UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Jaldir de Oliveira Costa

TRÊS PROBLEMAS FAMOSOS:

geometria grega.

Cuité-PB

2013

Jaldir de Oliveira Costa

TRÊS PROBLEMAS FAMOSOS:

geometria grega.

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

Cuité-PB
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

C837t Costa, Jaldir de Oliveira.

Três problemas famosos: geometria grega. / Jaldir de Oliveira Costa – Cuité: CES, 2013.

45 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2013.

Orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.
Coorientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

1. Álgebra. 2. Construções geométricas. 3. Régua. I. Título.

CDU 512

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Jaldir de Oliveira Costa

Três Problemas Famosos: geometria grega

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 17 de setembro de 2013.

Banca Examinadora

Prof. Marco Aurélio Soares Souto

Márcia Cristina S. Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Orientadora)

Mª Gisélia Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Coorientadora)

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por ter me fortalecido nos momentos difíceis e conduzido meus passos até a realização deste sonho.

De maneira especial aos meus pais, Maria das Graças e José Costa, pelo amor, paciência, ensinamentos e por terem me proporcionado uma boa educação, dentro das nossas condições. A Tia Dorinha, meus avós e demais familiares, que acompanharam de perto minha trajetória e torceram pela concretização deste objetivo.

A Professora, Márcia Cristina Silva Brito, pela compreensão, incentivo e a orientação prestada, desde a escolha do tema as indicações das melhores referências, contribuindo nas correções e ajustes. Agradeço também a Professora Maria Gisélia Vasconcelos, pela coorientação, sempre com sugestões bem vindas. E ao Professor Marco Aurélio Soares Souto pela gentil disponibilidade em participar da banca avaliadora.

A todos os educadores que passaram pela minha vida, depositando sua parcela de conhecimento, de modo particular a todos os docentes em matemática que me serviram de inspiração. A quem eu represento pela Professora Cida, a última da educação básica. Aos professores do Curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, campus Cuité, com que tive contato e oportunidade de aprimorar meus conhecimentos.

Aos amigos da graduação ingressos no mesmo período, pessoas magníficas: Luana, Ivanielma, Soliana, Eudes, Sérgio, Wellison, Izidio, Ana Élia, Santiago. Agradeço também, aos que fui encontrando ao longo do curso me ajudando nos estudos coletivos.

Ao PIBID de matemática, representado pelo Coordenador Alecxandro Alves, pela oportunidade oferecida em integrar esta equipe, que tanto acrescentou na minha formação e identificação com a docência.

Aos meus amigos católicos pela fé, irmãos da Comunidade São Francisco, em especial aos membros do Coral e do Grupo de Oração Ágape, pela força.

Aos meus colegas de trabalho, pela compreensão nos momentos em que me ausentei para frequentar as aulas, numa demonstração de apoio e incentivo.

As pessoas que bondosamente me acolheram em suas casas, nos dias em que estive impossibilitado de retornar a minha.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente na realização deste objetivo. Meus sinceros agradecimentos e fiquem com Deus.

Aos meus irmãos Juliana e Junior,

para quem sempre buscarei servir de exemplo.

" A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar, é aproximar-se de Deus."

Pitágoras.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre algumas construções geométricas, onde serão utilizados somente dois instrumentos de desenho geométrico - compasso e régua (não graduada). Através de uma pesquisa bibliográfica sobre a temática, investigamos como renomados matemáticos aprimoraram suas técnicas e fundamentaram teoricamente os resultados, assim foram criados alguns conceitos de álgebra necessários para provar se determinado caso apresenta solução ou não, sob tais restrições impostas pelo uso exclusivo dos dois objetos mencionados. Ilustraremos a construção de alguns casos possíveis acompanhada da demonstração. Em seguida exemplificaremos algumas situações em que é impossível finalizar a construção somente com régua e compasso, exceto por aproximação, conhecidos atualmente como os três famosos problemas clássicos da antiguidade: A Trissecção de um Ângulo, A quadratura do Círculo e a Duplicação do Cubo, para esses casos apresentamos os principais conceitos algébricos envolvidos que atestam a insolubilidade dos mesmos.

Palavras-chave: Construções Geométricas. Régua. Compasso. Álgebra.

Abstract

We present a study of some geometric constructions, which will be used only two geometric drawing instruments - compass and ruler (not graded). Through a literature review on the topic, we investigated how renowned mathematicians refined their techniques and theoretically substantiate the results, so were created some algebra concepts needed to prove whether a particular case presents a solution or not, under such restrictions imposed by the exclusive use of the two objects mentioned. We illustrate the construction of some possible cases accompanied by demonstration. Then exemplify some situations where it is impossible to complete construction with ruler and compass alone, except for approach, currently known as the three famous classical problems of antiquity: The Trisection of an Angle, Squaring the Circle and the Duplication of the Cube, for these cases present the main algebraic concepts involved attesting to the insolubility of the same.

Keywords: Geometric Constructions. Ruler. Compass. Algebra.

Sumário

Introdução

A Matemática e os demais ramos das ciências derivados dela evoluiu no decorrer do tempo. Estudiosos renomados dedicaram grande parte de suas vidas a buscarem soluções de problemas, explicação para fenômenos, respostas a desafios, formas de generalizações e outros mecanismos recorrendo aos conceitos matemáticos necessários, que tornassem a solução apresentada válida.

Para que esta matemática que está disponível ao nosso alcance fosse produzida, muitos testes foram realizados, com ou sem êxito. Muitos estudos precisaram ser comprovados, retificados ou mesmo refutados. Sendo que existem muitos sem solução até a atualidade, para solucionar estes, muita matemática ainda há para se descobrir. Vale salientar que hoje dispomos de equipamentos mais sofisticados, que podem tornar os processos mais ágeis, diferentemente dos povos da antiguidade que restringiam por conveniência as construções geométricas a utilização de dois objetos apenas.

Apresentaremos uma pequena amostra de algumas construções geométricas que podem ser realizadas utilizando somente os dois principais instrumentos de desenhos geométricos: régua (não graduada) e compasso. Estes dois instrumentos que são de conhecimento comum e manipulação prática, proporcionam uma grande diversidade de construções com diferentes níveis de complexidade, pois realizam desde uma simples ligação entre dois pontos no plano até a construção de alguns polígonos regulares executando várias etapas sequênciadas.

É um convite instigante, já que manusear estes dois recursos vão além de representar figuras com certo grau de exatidão ou perfeição nos traços. As limitações impostas pelos mesmos nos desafiam intelectualmente a compreender quando uma construção possui uma representação real ou não. Sendo necessário investigar o quanto de teoria matemática precisa ser aplicada para apresentar uma solução satisfatória.

> *Ao lidar com construções geométricas, nunca se deve esquecer de que o problema não consiste em desenhar figuras na prática com certo grau de exatidão, mas que uma solução possa ser ou não encontrada teoricamente, utilizando régua e compasso, supondo que os instrumentos tenham uma precisão perfeita. O que Gauss provou que suas construções poderiam ser executadas em princípio. Sua teoria não está relacionada à maneira mais simples de efetivamente executá-las, ou aos dispositivos que poderiam ser utilizados para simplificar e eliminar o número de etapas necessárias. Esta é uma questão de muito pouca importância teórica. Do ponto de vista prático, nenhuma construção desse tipo proporcionaria um resultado tão satisfatório quanto o que poderia ser obtido com o uso de um bom transferidor.[3]*

Estes dois objetos são utilizados desde a antiguidade, sendo os gregos famosos pelo emprego e manipulação dos mesmos, vale salientar que a habilidade desse povo em realizar construções, não foi suficiente para realizar todas as construções que almejavam, e durante este período da história surgiram alguns casos sem solução aparente, conhecidos atualmente como os três problemas clássicos da antiguidade - a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, que desafiaram não somente os gregos, mas renomados matemáticos e estudiosos por mais de dois milênios.

Muitas soluções foram apresentadas, porém algumas apresentaram falhas, outras realizaram técnicas de aproximação e outros ainda utilizaram recursos além dos permitidos. As inúmeras tentativas implicaram diretamente no desenvolvimento de novas teorias que puderam ser aplicadas em diversos ramos desta ciência.

> *A busca levou a muitas descobertas frutíferas, como as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentes. Um produto muito posterior foi o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos. Somente no século XIX, mais de 2000 anos depois de os problemas terem sido concebidos, se estabeleceu a impossibilidade das três construções sob a limitação autoimposta de se usarem apenas régua e compasso. [4]*

Obviamente não abordaremos neste trabalho todos esses resultados que foram surgindo com o desenvolvimento da álgebra, mais focaremos precisamente na reformulação desses problemas por meio da Teoria dos Corpos, mais precisamente no conceito de extensões de corpos e alguns resultados preliminares.

Capítulo 1

Contexto Histórico

Os matemáticos da Grécia Antiga exprimiam de forma geométrica muitos dos seus conceitos e ideias. Segundo Platão, as únicas figuras geométricas perfeitas eram a reta e a circunferência. Isto tinha o efeito de restringir os instrumentos disponíveis para efetuar construções geométricas a dois, de modo geral só admitiam como válidas construções geométricas que pudessem ser obtidas pelo uso exclusivo do compasso e da régua não graduada, isto é, sem escala. Operando com estes dois instrumentos muitas construções foram concretizadas, outras porém permanecerem sem solução por longos períodos.

Antes de investigarmos as construções (possíveis ou impossíveis) propriamente ditas, iniciemos com a seguinte lenda:

> *Conta a lenda que, em 429 a.C., os atenienses dirigiram-se ao célebre oráculo de Apolo na ilha de Delos, suplicando a graça de fazer cessar uma peste que então assolava a cidade. O oráculo respondeu, exigindo que fosse construído um novo altar no templo da divindade, com o dobro do tamanho do que lá existia. Os atenienses construíram então o novo altar, dobrando a aresta do antigo (em forma de cubo), o que naturalmente, multiplicou o volume do altar por oito. Devido a esta falha, a peste continuou e dizimou um grande número de atenienses. [9]*

Este problema ficou conhecido como "A duplicação do Cubo"ou "Problema de Delos", e esses nomes são atribuídos pelo fato de o problema consistir basicamente em encontrar um cubo cujo volume fosse o dobro de um outro já existente, e este fato segundo a lenda teria ocorrido na ilha de Delos - Grécia Antiga.

Além deste, outros dois desafios que surgiram na antiguidade inquietaram matemáticos por mais de dois milênios e ficaram conhecidos como os **Problemas Clássicos da Antiguidade**:

1. **Duplicação do Cubo**: que consiste na construção da aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de outro anteriormente dado;

2. **Trissecção de um ângulo**: divisão de um ângulo arbitrariamente dado em três partes iguais;

3. **Quadratura do Círculo**: encontrar um quadrado de área igual ao de um círculo dado.

Esses dois últimos não foram encontrados registros de lendas ou semelhantes, que deixassem a busca pela solução ainda mais interessante. A trissecção do ângulo está muito provavelmente ligada a busca por construir novos polígonos regulares, subdividindo algum já existente, por exemplo a tentativa de construir o polígono regular com nove lados necessitaria da trissecção dos ângulos de um triângulo. O primeiro contato com o problema da quadratura do círculo remota aos egípcios, por volta de 1800 a.C, quando acreditaram ter descoberto a solução apresentando o lado do quadrado igual a 8/9 do diâmetro do círculo dado. Na civilização grega o primeiro nome que está ligado ao problema é Anáxagoras (427a.C) mas sua contribuição é desconhecida, segundo a referência [4].

Um bom exemplo que se assemelha à busca pela solução destes problemas, são as sucessivas extensões do conceito de número: dos naturais para os inteiros, racionais, reais e, finalmente, complexos foram impostas pela necessidade de resolver equações polinomiais ou, o que é equivalente determinar raízes de polinômios. O que veremos adiante é que a solução para os problemas clássicos recaem na exibição das raízes para equações de grau igual ou superior a três.

No século XVI, matemáticos italianos descobriram uma fórmula para resolver as equações do terceiro e quarto graus. Geronimo Cardano (1501 – 1576), também conhecido por Cardan, incluiu no seu livro *Ars Magna*, publicado em 1545, fórmulas para a resolução de equações do terceiro e quarto graus, atribuídas pelo autor, respectivamente, a Nicolo Tartaglia (1500 – 1565) e Ludovico Ferrari (1522 – 1565). As quais poderiam ser resolvidas por um processo semelhante ao método elementar para resolver equações quadráticas.

Não é o tema tratado neste trabalho, contudo é interessante sabermos como prosseguiu o problema das soluções das equações de grau superior a cinco, pois de certa forma teve interferência na busca pela solução dos problemas clássicos, foi o problema de resolver equações de quinto grau e de grau maior que conduziu uma nova maneira de pensar: *Como é possível provar que certos problemas não podem ser resolvidos?*

Dizemos que equações algébricas até o quarto grau podem ser resolvidas por "radicais". E nada parecia mais natural do que estender este procedimento a equações de grau 5 ou maior, utilizando raízes com ordens mais altas. Todas as tentativas fracassaram, até mesmos destacados matemáticos do século XVIII enganaram-se pensando que haviam encontrado a solução. Foi somente no início do século XIX que o italiano Ruffini (1765 – 1822) e o gênio norueguês N. H. Abel (1802 – 1829) conceberam a então revolucionária ideia de provar *a impossibilidade da solução da equação algébrica de grau n por meio de radicais.*

Deve-se compreender claramente que a questão não é o fato de a equação algébrica de grau n possuir ou não soluções. Isto foi provado por Gauss (1777 – 1855) em sua tese de doutorado em 1799.

CARL FRIEDRICH GAUSS: Em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstadt escrita aos vinte anos de idade, Gauss deu a primeira demonstração plenamente satisfatória do teorema fundamental da álgebra (que uma equação polinomial, com coeficientes complexos e de grau $n > 0$, tem pelo menos uma raiz complexa). Newton, Euler, d'Alambert e Lagrange haviam feito tentativas frustradas de provar este teorema. A idéia por trás da demonstração de Gauss é a substituição de z na equação polinomial geral $f(z) = 0$ por $x + iy$. A separação a seguir das partes real e imaginária na equação resultante fornece duas equações reais $g(x, y) = 0$ e $h(x, y) = 0$ sempre têm um ponto real comum (a, b). Segue-se que $a + bi$ é uma raiz complexa de $f(z) = 0$. A demonstração envolvia considerações geométricas. Quase vinte anos depois, em 1816, Gauss publicou duas novas demonstrações, e mais tarde ainda, em 1850, uma quarta demonstração, num esforço para encontrar uma demonstração inteiramente algébrica. [4]

Porém o problema de Abel e de Ruffini era bastante diferente: a solução pode ser achada somente *por meio de operações racionais e por radicais?* O desejo de tornar absolutamente clara esta questão inspirou o magnífico desenvolvimento da álgebra moderna e da teoria dos grupos indicadas por Ruffini, Abel e Galois (1811-1832). Em 1823, Abel finalmente demonstrou que, exceto em casos particulares, de um modo geral é impossível resolvê-las utilizando apenas as operações algébricas (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Em 1843 Lioville escreveu para a Academia de Ciências de Paris anunciando os trabalhos deixados por Galois, contendo uma solução que respondia precisamente quando um polinômio de grau ≥ 5 é ou não solúvel por meio de radicais. A solução apresentada por Galois, ao caracterizar os polinômios resolúveis por meio de radicais através de propriedades do grupo de Automorfismo de um corpo, é considerada uma das mais belas páginas da História da Matemática e, uma das principais conquistas dessa ciência no século XIX. Aos interessados em conhecer mais da vida de Galois e Abel - dois importantes matemáticos, são recomendadas as referências [4] e [6].

Usando o fato das raízes de uma equação de terceiro grau poderem ser expressas por meio de operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão) e extração de raízes quadradas. E por outro lado, estas mesmas operações podem ser efetivadas pelo uso exclusivo de régua e compasso. Esse raciocínio contribuiu para demonstrar que um elemento geométrico é construtível com régua e compasso quando e apenas quando os números que os definem derivam dos dados do problema através de uma quantidade finita de operações algébricas e extração de raízes quadradas.

Estes fatos algébricos sobre construções geométricas foram descobertos pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), em seu trabalho "Pesquisas sobre os meios de reconhecer se um problema geométrico pode ser resolvido por régua e compasso", publicado aos 23 anos de idade. Para abordar os problemas de trissecção do ângulo e duplicação do cubo, Wantzel demonstrou o seguinte teorema auxiliar: ***A condição necessária e suficiente para que as três raízes de uma equação do terceiro grau, de coeficientes racionais, sejam construtíveis por régua e compasso é que uma delas seja racional.***

Em 1882, Lindemann solucionou o terceiro problema, ao provar a transcendência de π sobre o corpo dos racionais.

Capítulo 2

Algumas Construções por Régua e Compasso

Apenas com a utilização de régua e compasso, uma grande diversidade de construções podem ser executadas: um segmento de reta ou de um ângulo podem ser divididos ao meio, pode ser traçada uma reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado, um hexágono regular regular pode ser inscrito em um círculo, etc. Em todos os problemas a régua é utilizada meramente como uma margem retilínea.

2.1 Construções Geométricas Fundamentais

As construções geométricas utilizando uma régua não graduada e um compasso devem seguir duas regras básicas:

1. Conhecendo-se dois pontos distintos, é possível traçar uma reta utilizando a régua;

2. Com o compasso, é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto conhecido e que passa por um segundo ponto determinado.

É permitido obter pontos que podem ser construídos através de uma sequência finita de operações: intersecções de retas, intersecções de circunferências e intersecções de retas com circunferências. Com esses pontos obtidos, podemos traçar novas retas e novas circunferências e assim sucessivamente.

Com o uso da régua e compasso, os gregos realizaram uma grande quantidade de construções geométricas e solucionaram diversos problemas geométricos, tais como: construção de retas paralelas a uma reta dada, a bissecção de um ângulo, a bissecção de um segmento, a construção de circunferência e arco, a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, entre outras.

Para dar forma às ideias gerais, iniciaremos com o exame de algumas das construções clássicas. A chave para uma compreensão mais profunda consiste em traduzir os problemas geométricos para a linguagem da Álgebra. Qualquer problema de construção geométrica é do seguinte tipo: um certo conjunto de segmento de reta, digamos, $a, b, c, ...$, é dado e um ou mais outros segmentos $x, y, ...$, são procurados. Os segmentos procurados podem aparecer como lados de um triângulo a ser construído, como raios de círculos, ou como as coordenadas retangulares de certos pontos.

Iniciaremos com dois exemplos de construções bastantes elementares que obedecem as restrições impostas pelo uso exclusivo de régua e compasso, frequentemente requisitadas em construções mais elaboradas: a **mediatriz de um segmento** e a **bissetriz de um ângulo**.

1. *A mediatriz de um segmento é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos extremos do segmento.*

   A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio. Para construir, traçamos dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B. Sejam D e E os pontos de intersecção desses círculos. A reta DE é a mediatriz de AB (Figura 2.1).

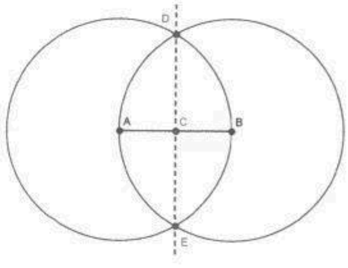

Figura 2.1: Mediatriz de AB

2. *A bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo.*

   A bissetriz de um ângulo $\widehat{AOB}$ é a semirreta OC tal que $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$. Costuma-se dizer que a bissetriz "divide" um ângulo em dois outros de medidas iguais. Para construir a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$ dado, traça-se um círculo de centro O determinando os pontos X e Y nos lados do ângulo. Em seguida, traçam-se dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y que possuem C como ponto de intersecção. A semirreta OC é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

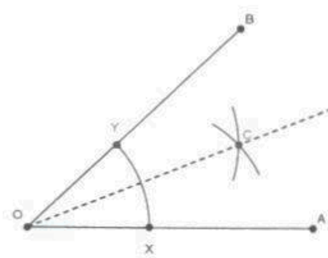

Figura 2.2: A bissetriz de $\widehat{AOB}$

De fato, pela construção feita (Figura 2.2), os triângulos OXC e OYC são congruentes e portanto $\widehat{XOC} = \widehat{COY}$.

Chamemos a atenção para o fato de um número real positivo b é chamado de **construtível** se conseguirmos usando apenas um compasso e uma régua não graduada construir com um número finito de passos um segmento de reta cujo comprimento seja b, a partir de um segmento cujo comprimento tomamos como a unidade.

Se dois segmentos são dados de comprimento a e b forem dados (conforme medidos por um determinado segmento "unitário"), então se torna muito mais simples construir $a+b$, $a-b$, ra (onde r é um número racional), $\frac{a}{b}$, e ab. Estas construções são garantidas de fato pelo seguinte Teorema:

Teorema 2.1. *Se a e b são números reais e positivos construtíveis, então $a+b$, $a-b$ $(a > b)$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ e $\sqrt{a}$ também são construtíveis.*

Para construir $a+b$, Figura (2.3), traçamos uma reta e sobre ela assinalamos com o compasso as distâncias $OA = a$ e $AB = b$. Então, $OB = a + b$.

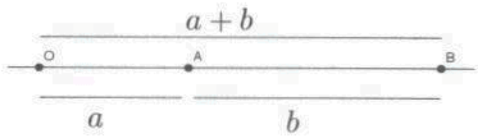

Figura 2.3: $a+b$

De modo semelhante, para $a-b$ marcamos $OB = a$ e $OB = b$, porém desta vez com AB na direção oposta a OA. Assim, $OA = a - b$, observamos a Figura (2.4)

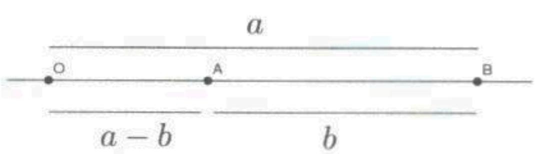

Figura 2.4: $a-b$

Para construir $3a$, simplesmente adicionamos $a + a + a$; de forma semelhante podemos construir pa, onde p é um número inteiro.

Para construirmos o segmento cujo comprimento seja $a \cdot b$, procedemos da seguinte maneira: sobre uma reta tracemos um segmento $AB = a$. Em seguida passando por A tracemos uma segunda reta que seja concorrente a primeira onde marcaremos o segmento unitário $AC = 1$ e o segmento $AD = b$. Ligando os pontos C e B por um segmento de reta e traçando uma reta que seja paralela a esse segmento, passando por D, esta reta paralela intersectará a reta que contém o segmento AB no ponto E, obtendo o segmento DE.

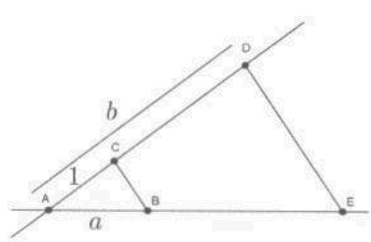

Figura 2.5: Construção do segmento $a \cdot b$

Usando o fato dos triângulos ACB e ADE serem semelhantes, temos que:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE},$$

Que pode ser reescrito como,

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{AE}$$

Portanto,

$$AE = a \cdot b$$

Com isso mostramos que $a \cdot b$ é construtível.

Por uma construção análoga obteremos um segmento cujo comprimento representa $\frac{a}{b}$. Posicionamos sobre uma reta um segmento $AB = a$, e concorrente a esta reta passa uma segunda reta contendo os segmentos $AD = b$ e $AC = 1$, traçamos uma reta que passa por B e D, marcando o segmento BD. Construímos uma reta paralela ao segmento BD passando em C, a qual intersecta o segmento AB no ponto P. Novamente por semelhança de triângulos, temos que:

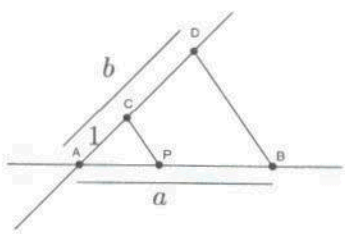

Figura 2.6: Construção do segmento $\frac{a}{b}$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AP},$$

Ou ainda,

$$\frac{b}{1} = \frac{a}{AP}$$

Assim,

$$AP = \frac{a}{b}$$

Isso comprova que $\frac{a}{b}$ também é construtível.

A partir destas considerações, segue-se que os *processos algébricos "racionais"* - adição, subtração, multiplicação e divisão de quantidades conhecidas - *podem ser executadas por construções geométricas.* A partir de quaisquer segmentos dados, medidos por números reais $a, b, c, \ldots$, podemos, por meio de aplicação sucessiva destas construções simples, construir qualquer quantidade que possa ser expressa em termos de $a, b, c, \ldots$ de maneira racional, isto é, por aplicação repetida da adição, subtração, multiplicação e divisão.

A totalidade das quantidades que podem ser obtidas desta forma a partir de $a, b, c, \ldots$ é chamada de *Corpo Numérico*, um conjunto de números tal que quaisquer operações racionais aplicadas a dois ou mais elementos do conjunto produzam como resultado um número do conjunto.

A nova construção que nos leva além do corpo que acabamos de obter é a extração de uma raiz quadrada: se um segmento a é dado, então $\sqrt{a}$ também pode ser construída utilizando somente régua e compasso. Pelo seguinte procedimento, em uma reta marcamos $OA = a$ e $AB = 1$ (Figura 2.7). Desenhamos um círculo com o segmento OB como seu diâmetro e construímos a perpendicular a OB passando por A, que encontra o círculo em C, pelo Teorema da Geometria Elementar que afirma que um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto.

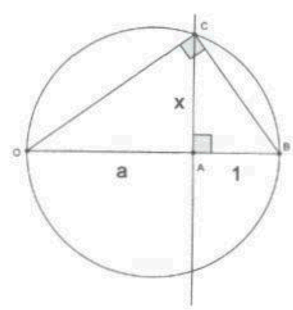

Figura 2.7: Construção de $\sqrt{a}$

Portanto, $\angle OCA = \angle ABC$, os triângulos retângulos OAC e CAB são semelhantes, e temos para $x = AC$,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1}, \quad x^2 = a, \quad x = \sqrt{a}$$

Utilizando somente régua e compasso ainda é possível extrair a raiz quadrada de um número n, onde n é um natural qualquer, já que dado um segmento a, podemos obter todos os segmentos da sequência $a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, a\sqrt{4}, \ldots$ através da seguinte construção, que utiliza basicamente o fato de dois segmentos estarem posicionados de modo a formar um ângulo reto, pela aplicação do Teorema de Pitágoras, resulta em um novo segmento, melhor observado na seguinte ilustração (Figura 2.8):

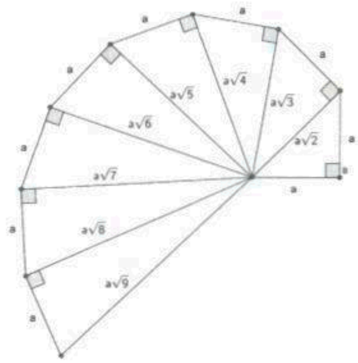

Figura 2.8: Construindo de $a\sqrt{n}$

Quando n for grande podemos buscar um caminho mais curto. Por exemplo, se desejamos construir $a\sqrt{21}$ devemos prosseguir conforme a Figura (2.9):

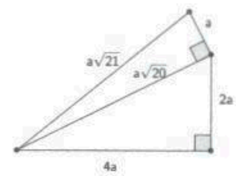

Figura 2.9: Construindo de $a\sqrt{21}$

Uma construção com régua e compasso é apenas uma combinação de circunferências, retas e pontos determinados através das interseções destas curvas. Tais interseções podem ser então de três tipos: *retas com retas, retas com circunferências ou circunferências com circunferências*. Analiticamente, tais interseções correspondem a pontos (x, y), soluções de duas equações.

Definição 2.1. *São* ***Pontos Construtíveis*** *com régua e compasso aqueles pontos do plano cartesiano obtidos pela interseção de retas e circunferências.*

Proposição 2.1. *Um ponto* $A(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *é construtível se e somente se as coordenadas* $a, b \in \mathbb{R}$ *são números construtíveis.*

Demonstração. Ver [7] $\square$

2.2 Construção de Polígonos Regulares

Também é possível realizar com uso apenas de régua e compasso a construção de alguns polígonos. Mas antes de acompanhar como se dá a construção de alguns objetos geométricos, faz-se necessário defini-los e identificar seus elementos, vejamos:

Definição 2.2. *Dada uma sequência de pontos de um plano* $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$*, com* $n \geq 3$*, todos distintos onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando consecutivos* A_{n-1}, A_n *e* A_1*, assim como* A_n, A_1 *e* A_2*, chama-se polígono a reunião dos segmentos* $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\ldots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

A partir desta definição, os polígonos que podem ser classificados em dois tipos: côncavo ou convexo. Estes são de conhecimento comum e omitiremos a descrição das características de um polígono do tipo côncavo, já que o objeto de estudo deste tópico são os polígonos regulares, e portanto necessariamente convexos, conforme a instrução que segue:

Definição 2.3. *Um polígono convexo é regular se, e somente se tem todos os lados congruentes (equilátero) e todos os ângulos congruentes (equiângulo).*

Assim construir um polígono regular de n lados - ora denominado de n-ágono, utilizando apenas régua e compasso apresenta talvez o maior interesse. E para certos valores de n, por exemplo: $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, e outros, a solução é conhecida desde a antiguidade. E caso se queira realizar a construção de um novo polígono cujo número de lados seja o dobro do anterior (2n-ágono), basta proceder com a divisão ao meio do arco subtendido sobre o círculo circunscrito por cada lado do n-ágono, utilizando os pontos adicionais assim encontrados bem como os vértices originais para o 2n-ágono procurado, como exemplo a partindo "3-ágono", podemos construir o $6, 12, 24, \ldots, 2n$-ágono.

Realizaremos a construção de um pentágono regular e de um decágono regular, que segundo a definição dada são polígono regulares que possuem cinco e dez lados e ângulos côngruos, respectivamente. Trata-se de construções bastante interessantes e nos ajudam a compreender os procedimentos necessários à conclusão de uma demonstração válida, já que a todo momento serão obedecidas as restrições impostas pelo uso exclusivo de régua e compasso.

2.2.1 Construção do Pentágono Regular

Para se construir um pentágono regular inscrito numa circunferência de raio unitário.

Consideremos o segmento de reta BD, como sendo o diâmetro de uma circunferência de raio unitário, sob este segmento podemos traçar outro segmento de reta AC de modo que este novo segmento seja mediatriz do segmento BD, logo o ponto médio e centro da circunferência o ponto O.

Prosseguimos com a construção do pentágono regular (Figura 2.10) dividindo o segmento OD, em duas partes iguais, marcando o ponto E. Com o compasso centrado em E, obtemos o arco AF. Agora obtemos o ponto G, tal que este seja $\overline{OG} = \overline{OF}/2$. Traçando uma reta perpendicular que passa por G, teremos que o vértice P_1, será a intersecção desta reta com a circunferência. Os demais vértices do polígono P_2, P_3 e P_4, serão construídos utilizando o compasso com abertura igual ao segmento $\overline{AP_1}$.

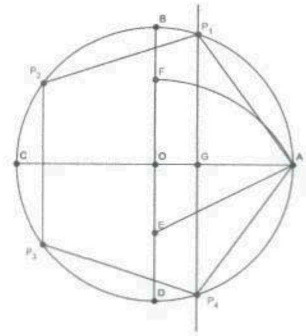

Figura 2.10: Construção do Pentágono Regular

2.2.2 Construção do Decágono Regular

Naturalmente o decágono regular pode ser obtido a partir da divisão ao meio do arco subtendido sobre o círculo circunscrito por cada lado do pentágono regular (já demonstrado como construtível), bastando apenas unir os pontos obtidos por este procedimento aos já existentes.

Uma outra maneira de realizar tal construção é supor um decágono regular inscrito numa circunferência de raio 1 e chamemos o seu lado de x.

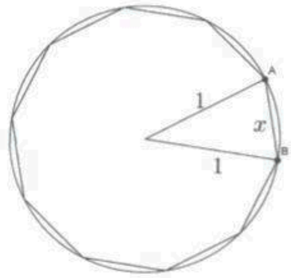

Figura 2.11: Decágono Regular inscrito na circunferência

Inicialmente podemos observar os seguintes elementos: $\widehat{O} = 36^o$, $\widehat{A} = \widehat{B} = 72^o$, $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$, formando o um triângulo isósceles.

Traçando uma reta pontilhada dividindo o ângulo $\widehat{A}$ ao meio, e que intercepta o segmento OB em D, dividi-se também o Triângulo OAB em dois triângulos isósceles. Lembrando que se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles. Já que $\widehat{O} \equiv \widehat{A}/2$, implica que os triângulos são isósceles pois possuem ângulos iguais, e também lados de comprimento x, confirmado pelos elementos listados posterior a observação da figura:

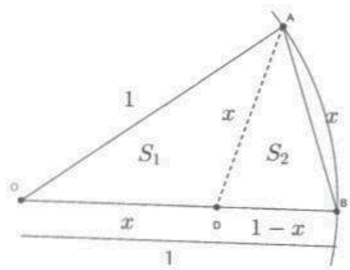

Figura 2.12: Divisão do Triângulo OAB

No primeiro momento analisemos os elementos do triângulo OAD, identificado por S_1, na Figura (2.12):

$$\begin{cases} \widehat{A} = 36^o \ ; \ \widehat{O} = 36^o \\ \widehat{O} + \widehat{D} + \widehat{A} = 180^o \Rightarrow \widehat{D} = 108^o \\ \overline{OD} = x = \overline{AD} \end{cases}$$

Em relação ao triângulo DAB, identificado por S_2, também representado na Figura (2.12), temos:

$$\begin{cases} \widehat{A} = 36^{\circ} \ ; \ \widehat{B} = 72^{\circ} \\ \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{A} = 180^{\circ} \Longrightarrow \widehat{D} = 72^{\circ} \\ \overline{AB} = x = \overline{AD} \end{cases}$$

Já é possível constatar a partir das medidas explicitadas acima os triângulos OAD e DAB, são isósceles, logo pelas condições de semelhanças entre triângulos, podemos utilizar a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{x}{1-x} \\ &\Rightarrow 1 - x = x^2 \\ &\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

A outra solução da equação é irrelevante, pois ela produz um resultado x negativo. E, torna-se claro que x pode ser construído geometricamente. Uma vez que tendo o comprimento x, podemos construir o decágono regular demarcando este comprimento dez vezes como uma corda do círculo.

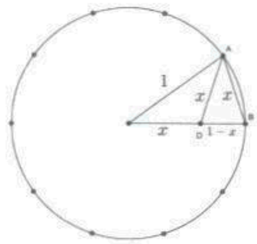

Figura 2.13: Decágono Regular

Tendo construído um decágono regular é possível obter um derivado deste processo de construção, é o pentágono regular, resultante da união de vértices alternados deste polígono. Como também é possível construir um polígono contendo 20 lados, por um procedimento já descrito anteriormente.

2.2.3 Construção do Heptadecágono Regular

A construção do heptadecágono é sem dúvidas uma das construções possíveis de serem realizadas que desperta a curiosidade de muitos, assim detalharemos a seguir a construção geométrica desta figura feita seguindo o procedimento adotado por

Gauss, mas antes disto enunciaremos alguns resultados que embasam a construção e evidenciam a genialidade desse matemático.

Também devemos ressaltar a importante participação de L. Euler (1707-1783) que ao demonstrar que um número tem n raízes enésimas, também provou que elas, quando representadas no plano complexo, formam entre si, sucessivamente, ângulos de $\frac{2\pi}{n}$. Em outras palavras, a extração da raiz enésima da unidade produz n números complexos, cujas representações gráficas formam um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio unitário. Por este motivo, a equação $x^n - 1 = 0$ foi intensamente estudada no final do século XVIII e início do século XIX, principalmente pelo jovem Gauss.

Com a idade de 17 anos, Gauss investigou a construtibilidade de "p-ágonos" regulares (polígonos com p lados), onde p é um número primo. A construção era então conhecida somente para $p = 3$ e $p = 5$. Gauss descobriu que o p-ágono é construtível se e somente se p for um " número de Fermat"primo,

$$p = 2^{2^n} + 1. \tag{2.1}$$

Os primeiros números de Fermat são 3, 5, 17, 257, 65537. O jovem Gauss ficou tão entusiasmado com sua descoberta que desistiu imediatamente da intenção de ser filósofo e decidiu dedicar sua vida a Matemática e às suas aplicações.

Pelo critério estabelecido na Equação (2.1) percebemos que o polígono regular que possui 17 lados (heptadecágono) é construtível, todavia a genialidade de Gauss não se limitou a provar que este polígono são construtíveis, ele também executou os procedimentos necessários para construção deste polígono com 17 lados, o entusiasmo foi tão grande que chegou a declarar que gostaria de ser homenageado após sua morte com com a construção de um heptadecágono regular sobre seu túmulo.

Apresentamos a partir de agora a fundamentação teórica para a construção do heptadecágono, segundo as referências [10] e [6], para em seguida realizar a construção geométrica deste polígono segundo as instruções presente na referência [10].

É interessante observar algumas propriedades da raízes enésimas da unidade. Ao denominá-las por $R_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$, nota-se algo curioso: Tomando $R_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}$, como ponto de partida temos,

$$R_2 = R_1^2; R_3 = R_1^3; \ldots; R_{n-1} = R_1^{n-1}.$$

Isto ocorre porque ao se elevar R_1 às sucessivas potências inteiras, o ângulo $\theta = \frac{2\pi}{n}$ vai sendo multiplicado por $2, 3, 4$, etc.

Há ainda outros fatos relacionados as raízes enésimas. Por exemplo:

$$R_{n-1} = \tfrac{1}{R_1};\ R_{n-2} = \tfrac{1}{R_2};\ \ldots;\ R_{n-i} = \tfrac{1}{R_i};$$

ou

$$R_1^{n-1} = \tfrac{1}{R_1};\ R_1^{n-2} = \tfrac{1}{R_1^2};\ \ldots;\ R_1^{n-i} = \tfrac{1}{R_1^i}$$

Isto acontece porque para se calcular o inverso de um número complexo de módulo 1, que é o nosso caso, basta inverter o ângulo em relação ao eixo real. Se for considerada qualquer outra raiz, R_2, R_3, etc, como ponto de partida, vê-se que, por exemplo, $R_4 = R_2^2$ ou $R_9 = R_3^3$, etc.

Seja agora a equação $x^{17} - 1 = 0$. Descartando a raiz $x = 1$, a equação torna-se:

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \tag{2.2}$$

Pelo que foi observado sobre relações entre raízes da equação acima, pode-se escrever:

$$R_1^{16} + R_1^{15} + R_1^{14} + \ldots + R_1^3 + R_1^2 + R_1 + 1 = 0$$

ou

$$R_{16} + R_{15} + R_{14} + \ldots + R_3 + R_2 + R_1 + 1 = 0$$

Foi nesse ponto que se fez presente a genialidade de Gauss que usou resultados de suas pesquisas anteriores sobre congruência, um tópico por ele introduzido na teoria dos números. As 16 raízes foram colocadas em uma ordem conveniente e a razão disso pode ser compreendida ao longo da exposição. Tal ordem é,

$$R_1, R_3, R_9, R_{10}, R_{13}, R_5, R_{15}, R_{11}, R_{16}, R_{14}, R_8, R_7, R_4, R_{12}, R_2, R_6.$$

Nesta sequência cada raiz é o cubo da anterior. Por exemplo,

$$(R_{16})^3 = (R_1^{16})^3 = R_1^{48} = R_1^{17} R_1^{17} R_1^{14} = R_1^{14}.$$

A partir da ordem estabelecida,as raízes foram agrupadas alternadamente em dois blocos de oito elementos cada:

$$y_1 = R_1 + R_9 + R_{13} + R_{15} + R_{16} + R_8 + R_4 + R_2$$

e

$$y_2 = R_3 + R_{10} + R_5 + R_{11} + R_{14} + R_7 + R_{12} + R_6$$

e assim, tem-se que $y_1 + y_2 = -1$.

Uma vez que $R_m R_n = R_{m+n}$, seque que $y_1 y_2 = 4(y_1 + y_2) = -4$ e, portanto, y_1 e y_2 satisfazem a equação $y^2 + y - 4 = 0$.

Considerando-se, alternadamente, os termos de y_1 e y_2, encontra-se

$$z_1 = R_1 + R_{13} + R_{16} + R_4, \ z_2 = R_9 + R_{15} + R_8 + R_2$$

e

$$w_1 = R_3 + R_5 + R_{14} + R_{12}, \ w_2 = R_{10} + R_{11} + R_7 + R_6$$

Assim,

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = y_1 \\ z_1 z_2 = -1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = y_1 \\ w_1 w_2 = -1 \end{cases}$$

ou seja, z_1, z_2 e w_1, w_2 satisfazem, respectivamente,às seguintes equações:

$$z^2 - y_1 z - 1 = 0 \text{ e } w^2 - y_2 w - 1 = 0.$$

Finalmente toma-se os termos de z_1 da forma $v_1 = R_1 + R_{16}$, $v_2 = R_{13} + R_4$ e nota-se que $v_1 + v_2 = z_1$ e $v_1 v_2 = w_1$, ou seja, v_1, v_2 satisfazem a equação $v^2 - z_1 v + w_1 = 0$ e R_1, R_2 satisfazem a equação $r^2 - v_1 r + 1 = 0$.

Desse modo pode-se encontrar R_1 resolvendo-se uma série de equações quadráticas. Lembrando-se que nesse caso, $R_1 = \cos\frac{2\pi}{17} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{17}$, tem-se que $\frac{1}{R_1} = \cos\frac{2\pi}{17} - i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{17} = R_{16}$ e assim $v_1 = R_1 + \frac{1}{R_1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$.

Desse modo pode-se construir um polígono regular de 17 lados por um processo em que estão envolvidas somente operações racionais e extração de raízes quadradas, ou seja, apenas com régua e compasso.

Construção Geométrica do heptadecágono

Considerando-se inicialmente um círculo unitário e duas perpendiculares aos diâmetros AB e CD que tangenciam o círculo em A e D e se cortam em S.

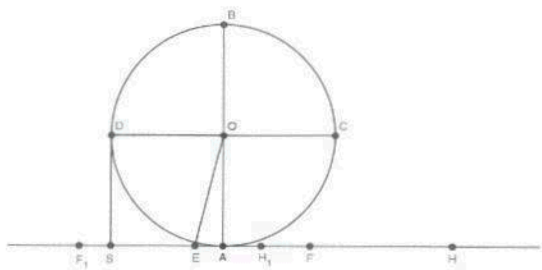

Figura 2.14: Primeira Etapa de Construção do Heptadecágono

A seguir dividi-se AS em quatro partes iguais e toma-se $AE = \frac{1}{4}AS$. Com centro em E e raio OE traça-se um círculo que corta a reta AS em F e F_1. Com centro em F e raio FO traça-se um círculo que corta AS em H (fora de F e F_1), e com centro em F_1 e raio F_1O traça-se outro círculo que corta AS em H_1 (entre F_1 e F), conforme a Figura (2.14). Verifica-se agora, que $AH = z_1$ e $AH_1 = w_1$.

De fato, como foi visto anteriormente $y_1 + y_2 = -1$ e $y_1y_2 = -4$, ou seja, $y^2 + y - 4 = 0$ e assim $y_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Por outro lado, como $z^2 - y_1z - 1 = 0$ e $w^2 - y_2w - 1 = 0$ tem-se:

$$z_1 = \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2} \quad \text{e} \quad w_1 = \frac{1}{2}y_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2}$$

Com base na figura acima conclui-se que:

1. Como $OE^2 = AE^2 + OA^2 = (\frac{1}{4}AS) + 1 = \frac{1}{16}AS^2 + 1 = \frac{17}{16}$, então $OE = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

2. $AF = EF - EA = OE - EA = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}-1}{4} = \frac{1}{2}y_1$.

3. $AF_1 = EF_1 + AE = EF + AE = OE - EA = \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{4}AS = \frac{\sqrt{17}+1}{4} = -\frac{1}{2}y_2$.

4. Como $OF^2 = OA^2 + AF^2 = 1 + (\frac{1}{2}y_1)^2$, então $OF = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2}$.

   Do mesmo modo $OF_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2}$.

Finalmente chega-se às duas conclusões mais importantes:

$$AHH = AF + FH = \frac{1}{2}y_1 + OF = \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2} = z_1$$

e

$$AH_1 = F_1H_1 - F_1A = F_1O - (-\frac{1}{2}y_2) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2} + \frac{1}{2}y_2 = w_1$$

Agora, considera-se o plano cujos eixos coordenados são as retas determinadas por SA e por SD e um círculo de diâmetro DD_1, em que $D = (0,1)$ e $D_1 = (z_1, w_1)$ e cujo centro M é o ponto médio de DD_1, observamos bem estas marcações na Figura (2.15)

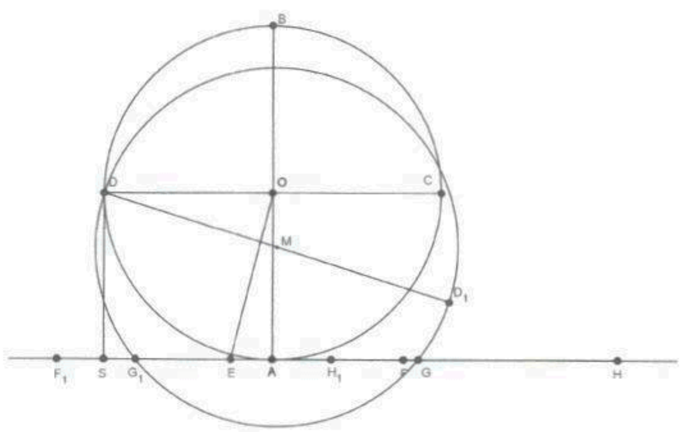

Figura 2.15: Segunda Etapa de Construção do Heptadecágono

A equação do círculo é

$$\left(x - \frac{z_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{w_1 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + w_1}{2} - 1\right)^2 = \frac{z_1^2}{4} + \left(\frac{w_1 - 1}{2}\right)^2 \quad (2.3)$$

Para encontrar as abscissas dos pontos G e G_1, considera-se $y = 0$ na igualdade anterior e obtem-se

$$\left(x - \frac{z_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{w_1 + 1}{2}\right)^2 = \frac{z_1^2}{4} + \left(\frac{w_1 - 1}{2}\right)^2 \quad (2.4)$$

Desenvolvendo um pouco mais, chega-se a equação $x^2 - z_1x + w_1 = 0$, ou seja, as abscissas de G e G_1 são precisamente v_1 e v_2 que satisfazem a equação $v^2 - z_1 + w_1 = 0$, em que $v_1 > v_2 > 0$.

Logo, $SG = v_1 = \frac{z_1+\sqrt{z_1^2-4w_1}}{2}$. E assim, como $v_1 = R_1 + \frac{1}{R_1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, tem-se que $SG = 2\cos\frac{2\pi}{17}$.

Finalmente pode-se construir o polígono de 17 lados do seguinte modo:

Transportando-se $SG = v_1$ sobre a reta que passa por O e C a partir de O, obtendo-se ON. Encontra-se o ponto médio P de ON e traça-se PQ perpendicular a ON por P e assim, PQ é o lado do heptadecágono, uma vez que $ON = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, ou seja, $OP = 2\cos\frac{2\pi}{17}$ e, portanto $POQ = \frac{2\pi}{17}$.

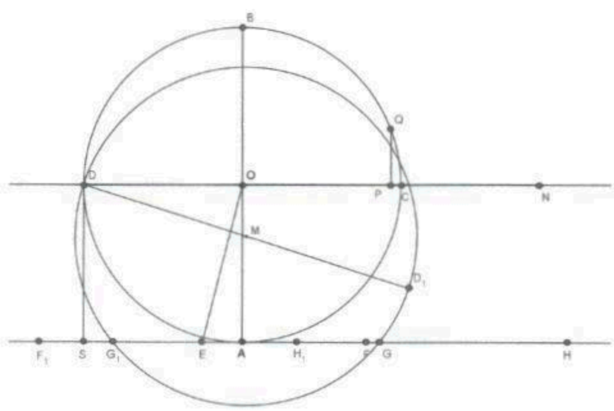

Figura 2.16: Etapa Final de Construção do Heptadecágono

Capítulo 3

Extensões Algébricas

Os matemáticos da Grécia Antiga exprimiam de forma geométrica muitos dos seus conceitos. Em geral, apenas eram consideradas válidas construções geométricas que pudessem ser obtidas pelo uso exclusivo de régua (não graduada) e do compasso. Apesar da grande habilidade demonstrada pelos matemáticos gregos, houve algumas figuras e construções aparentemente simples para as quais não conseguiram descobrir um método baseado exclusivamente no uso de régua e compasso. Entre as famosas encontram-se:

Trissecar um Ângulo; Duplicar o Cubo; Construir um Heptágono regular; Construir um quadrado de área igual a um dado círculo.

A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso, embora esses instrumentos sirvam para resolução de muitos outros problemas de construção. A busca ingente de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas , como as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quádricas e várias curvas transcendentes.

Estes problemas, bem como qualquer outro envolvendo construções com régua e compasso, podem ser reformulados em questões da Teoria dos Corpos. Tal reformulação permite mostrar que as construções acima não são de fato possíveis com recurso exclusivo à régua e compasso.

3.1 Extensões de Corpos

Enunciaremos vários resultados, sem demostração, necessários para a formulação. Para o leitor interessado em que queira verificar a demonstração destes Teoremas, indicamos as referências [1], [5], [7] e [8].

3.1.1 Corpos

Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas os *axiomas de corpo*, abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{K}$ sua soma $x + y \in \mathbb{K}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in \mathbb{K}$.

Axiomas de Corpo

C1. A soma é **associativa:** Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

C2. A soma é **comutativa**: Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{K}$, tem-se

$$x + y = y + x$$

C3. A soma tem um **elemento neutro**: Qualquer que seja $x \in \mathbb{K}$ existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que

$$x + 0 = 0 + x = x$$

O elemento 0 chama-se *zero*.

C4. A soma é **simétrica**: Todo elemento $x \in \mathbb{K}$ possui simétrico $y \in \mathbb{K}$ tal que

$$x + y = y + x =$$

O simétrico do número x designar-se-á $-x$.

C5. O produto é **associativo**: Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

C6. O produto é **comutativo**: Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{K}$, tem-se

$$x \cdot y = y \cdot x$$

C7. O produto tem um **elemento neutro**: Qualquer que seja $x \in \mathbb{K}$ existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

O elemento Neutro chama-se *um*.

C8. O **Inverso Multiplicativo**: Todo elemento $x \neq 0$ em $\mathbb{K}$ possui um inverso $y \in \mathbb{K}$ tal que

$$x \cdot y = y \cdot x = 1$$

O inverso do número $x \neq 0$ designar-se-á x^{-1} ou $\frac{1}{x}$.

C9. O produto é **distributivo** relativamente à adição, isto é: Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{e} \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

Como é habitual, omitir-se-á $\cdot$ entre letras ou entre letras e números.

Temos que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de corpos.

Sejam $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$ corpos tais que $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$. Se $\mathbb{K}$ é um corpo com as operações de $\mathbb{M}$ e $1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{M}}$ (Identidade de $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$), então dizemos que $\mathbb{K}$ é um subcorpo de $\mathbb{M}$.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. Chamaremos de polinômio sobre $\mathbb{K}$ em uma indeterminada t a expressão formal

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

onde $a_i \in \mathbb{K}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ e $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = 0 \ \ \forall j \geq n$.

Vamos denotar por $\mathbb{K}[t]$ o conjunto de todos os polinômios sobre $\mathbb{K}$, em uma indeterminada t.

$\mathbb{K}(t)$, o *corpo das funções racionais* com coeficientes em $\mathbb{K}$, é definido por

$$\mathbb{K}(t) = \left\{ \tfrac{g(t)}{h(t)} \mid g(t), h(t) \in \mathbb{K}[t] \ e \ h(t) \neq 0 \right\}$$

e $\mathbb{K}(t)$ é o corpo das frações de $\mathbb{K}[t]$.

Sendo $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ um polinômio não nulo, na indeterminada t, com coeficientes em $\mathbb{K}$, se $a_n \neq 0$ então dizemos que o grau do polinômio $f(t)$ é igual a n, e denotamos por $\deg f(t) = n$ ou $\partial f(t) = n$.

Definição 3.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Considere $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ tal que $\partial f(t) \geq 1$. Dizemos que $f(t)$ é um polinômio irredutível sobre $\mathbb{K}$ se toda vez que $f(t) = g(t)\cdot h(t)$, $g(t), h(t) \in \mathbb{K}[t]$ então temos $g(t) = a$ constante em $\mathbb{K}$ ou $h(t) = b$ constante em $\mathbb{K}$. Se $f(t)$ for não irredutível sobre $\mathbb{K}$ dizemos que f é redutível sobre $\mathbb{K}$.*

Em geral, verificar a irredutibilidade de um problema sobre um corpo é um problema difícil.

O Teorema a seguir, nos dá condições suficientes para que um polinômio $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ seja irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Antes disto também é necessário que conheçamos o Lema de Gauss.

Lema 3.1 (Lema de Gauss).

Seja $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tal que $f(t)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$ então $f(t)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Ver [7] □

Teorema 3.1 (Critério de Eisenstein).

Seja $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ um polinômio não constante com coeficientes inteiros. Se existir um número primo p tal que p divida cada $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, mas não divide a_n e tal que p^2 não divide o a_0, então $f(t)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Ver [7] □

3.1.2 Extensão

Em 1881 Kronecker criou uma extensão de um corpo juntando-lhe uma raiz α de um polinômio irredutível $f(t)$ de grau n, isto é, este novo corpo é menor corpo que contém o corpo inicial e a raiz α (com a condição $f(\alpha) = 0$).

Definição 3.2 (Extensão de Corpos). *Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ corpos. Dizemos que $\mathbb{E}$ é uma **extensão** de $\mathbb{F}$, se $\mathbb{F}$ é um subcorpo de $\mathbb{E}$. Denotamos esta extensão por $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$. A extensão é própria quando $\mathbb{E} \neq \mathbb{F}$.*

Assim, $\mathbb{R}$ é uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$ é uma extensão dos corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$. Temos também que, $\mathbb{Q}(i) \mid \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \mid \mathbb{Q}$ são extensões de corpos. Assim, como $\mathbb{F}(t) \mid \mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é um corpo e t é uma indeterminada sobre $\mathbb{F}$.

Seja $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ uma extensão de corpos. As operações de adição e multiplicação de $\mathbb{E}$ induzem em $\mathbb{E}$ uma estrutura $\mathbb{F}$-espaço vetorial. Podemos encarar $\mathbb{E}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

Definição 3.3. *A dimensão de $\mathbb{E}$ com $\mathbb{F}$-espaço vetorial é chamado de* ***grau*** *de $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$. Denotamos $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{E})$.*

Definição 3.4 (Extensões Finitas). *Seja $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Dizemos que $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ é* ***extensão finita*** *quando $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] < \infty$. Caso contrário, dizemos que $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ é* ***extensão infinita****.*

Definição 3.5 (Adjunção). *Seja $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ uma extensão de corpos e $S \subset \mathbb{E}$. Definimos*

$$\mathbb{F}[S] = \bigcup_{\substack{\mathcal{A}\,anel \\ \mathbb{F}\cap S \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \subset \mathbb{E}}} \mathcal{A} \quad e \quad \mathbb{F}(\mathcal{S}) = \bigcup_{\substack{\mathcal{L}\,corpo \\ \mathbb{F}\cap S \subset \mathcal{L} \\ \mathcal{L} \subset \mathbb{E}}} \mathcal{L}$$

$\mathbb{F}$ é o menor anel contido em $\mathbb{E}$ contendo $\mathbb{F} \cup S$, forçosamente, é um domínio, enquanto que $\mathbb{F}(S)$ é o menor corpo contido em $\mathbb{E}$ contendo $\mathbb{F} \cup S$.

Dizemos que $\mathbb{F}[S]$ é o subanel de $\mathbb{E}$ obtido pela ***adjunção de*** *S a $\mathbb{F}$, enquanto $\mathbb{F}(S)$ é o subcorpo de $\mathbb{E}$ obtido pela* ***adjunção de*** *S a $\mathbb{F}$.*

Seja $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ uma extensão de corpos e seja $\alpha \in \mathbb{E}$. Seja $S = \{\alpha\}$. Observamos que $\{f(\alpha); f(t) \in \mathbb{F}[t]\}$ é um subanel de $\mathbb{E}$ que contém $\mathbb{F} \cup \{\alpha\}$. Na verdade, o menor subanel de $\mathbb{E}$ que contém $\mathbb{F} \cup \{\alpha\}$ é $\{f(\alpha); f(t) \in \mathbb{F}[t]\}$, isto é,

$$\mathbb{F}[\alpha] = \{f(\alpha); f(t) \in \mathbb{F}[t]\}.$$

$\mathbb{F}(\alpha)$, o menor subcorpo de $\mathbb{E}$ que contém $\mathbb{F} \cup \{\alpha\}$, tem que conter o domínio $\mathbb{F}[\alpha]$. Portanto, $\mathbb{F}(\alpha)$ contém o corpo de frações de $\mathbb{F}[\alpha]$, isto é.

$$\mathbb{F}(\alpha) \supset \underbrace{Q(\mathbb{F}[\alpha]) = \left\{\frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \mid g(t), h(t) \in \mathbb{F}[t] \text{ e } h(\alpha) \neq 0\right\}}_{\text{é um corpo que contém } \mathbb{F}\cup\{\alpha\}}$$

Daí segue que

$$\mathbb{F}(\alpha) = \left\{\tfrac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \mid g(t), h(t) \in \mathbb{F}[t] \ e \ h(\alpha) \neq 0\right\}$$

Mais ainda, $\mathbb{F}(\alpha)$ é o corpo das frações de $\mathbb{F}[\alpha]$. Assim, $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}[\alpha] \subset \mathbb{F}(\alpha) \subset \mathbb{E}$. Neste caso dizemos que $\mathbb{F}(\alpha)$ é uma extensão simples de $\mathbb{F}$.

Definição 3.6 (Elemento algébrico ou transcendente sobre $\mathbb{F}$). *Seja $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ uma extensão de corpos e seja $\alpha \in \mathbb{E}$. Dizemos que α é* ***algébrico*** *sobre $\mathbb{F}$ se existe um polinômio $p(t) \in \mathbb{F}[t] \setminus \{0\}$, tal que $p(\alpha) = 0$, isto é, se α satisfizer a uma equação polinomial*

$$a_n\alpha^n + \cdots + a_0 = 0$$

com coeficientes em $\mathbb{F}$, nem todos nulos. Caso contrário dizemos que α é ***transcendente*** *sobre $\mathbb{F}$*

Exemplo 3.1.

1. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Se $\alpha \in \mathbb{F}$ então α é raiz do polinômio $t - \alpha \in \mathbb{F}[t]$ e portanto α é algébrico sobre $\mathbb{F}$.*

2. *$\sqrt{2}$ e i são algébricos sobre os números racionais $\mathbb{Q}$: $\sqrt{2}$ é raiz de $t^2 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ e i é raiz de $t^2 + 1 \in \mathbb{Q}[t]$.*

3. *$\sqrt[3]{2}$ é algébrico sobre os números racionais $\mathbb{Q}$, pois $\sqrt[3]{2}$ é raiz de $t^3 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$.*

4. *É um fato bastante conhecido que os números π e e são ambos transcendentes sobre $\mathbb{Q}$, isto é, não existe nenhum polinômio $p(t) \in \mathbb{Q}[t]\setminus\{0\}$ que tenha π ou e como raiz. As demonstrações destes fatos envolvem análise infinitesimal e devem-se originalmente a Lindermann (1882) e a Hermite (1873), respectivamente. Mas é claro que π e e são ambos algébricos sobre $\mathbb{R}$.*

Definição 3.7 (Polinômio mínimo de α sobre $\mathbb{F}$). *Seja $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ uma extensão de corpos e seja $\alpha \in \mathbb{E}$ algébrico sobre $\mathbb{F}$. O polinômio $p(t) \in \mathbb{F}[t]$ mônico irredutível, tal que $p(\alpha) = 0$, é chamado de* ***polinômio mínimo*** *de α sobre $\mathbb{F}$.*

Quando α é algébrico sobre o corpo $\mathbb{F}$ podemos definir o grau de α sobre $\mathbb{F}$ como o grau do polinômio mônico irredutível (polinômio mínimo) $p(t) \in \mathbb{F}[t]$ tal que α satisfaz a equação $p(\alpha) = 0$.

Exemplo 3.2.

1. *O grau de $\sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ é 2, pois $\sqrt{2}$ é raiz do polinômio irredutível $p_1 = t^2 - 2$.*

2. *O grau de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ é 3, pois $\sqrt[3]{2}$ é raiz do polinômio irredutível $p_2 = t^3 - 2$ de $\mathbb{Q}[t]$.*

Teorema 3.2. *Seja $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ uma extensão de corpos e seja $\alpha \in \mathbb{E}$. Temos que α é algébrico sobre $\mathbb{F}$ se, e somente se $[\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}] < \infty$. Neste caso, $\mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{F}[\alpha]$, $[\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}] = n$, onde $n = degp(t)$ e $p(t) \in \mathbb{F}[t]$ é o polinômio mínimo de α sobre $\mathbb{F}$.*

Demonstração. Ver [1] □

Definição 3.8 (Extensão algébrica ou transcendente). *Uma extensão de corpos $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ é dita* ***extensão algébrica*** *quando, todo elemento $\alpha \in \mathbb{E}$ é algébrico sobre $\mathbb{F}$. Caso contrário, $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ é dita uma* ***extensão transcendente****.*

Podemos agora enunciar uma condição necessária para as construções geométricas.

Teorema 3.3. *Se um número real α é construtível, então α é algébrico e o grau do polinômio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$ é uma potência de 2.*

Demonstração. Ver [1] □

Corolário 3.1. *Se um número real α satisfaz um polinômio irredutível de grau n sobre o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ e se n não é uma potência de 2, então α não é construtível.*

Demonstração. Ver [1] □

Segue do teorema (3.3) e de suas consequências que:

- $\sqrt{2}$ é construtível.

  De fato, temos que $\sqrt{2}$ é raiz do polinômio $t^2 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$, mostrando que $\sqrt{2}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ com polinômio mínimo $p(t) = t^2 - 2$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, assim o grau do polinômio mínimo de $\sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ é igual a 2 que é uma potência de 2.

- $\sqrt[3]{2}$ não é construtível.

  De fato, temos que $\sqrt[3]{2}$ é raiz do polinômio $t^3 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$, mostrando que $\sqrt[3]{2}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Pelo critério de Eiseinstein, $t^3 - 2$ é irredutível em $\mathbb{Q}[t]$, como este polinômio irredutível é mônico seque que ele é mínimo de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$, e tem grau igual a 3 que não é uma potência de 2.

Observamos que, para um número real α, a condição $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^m$, $m \geq 0$ **não** é suficiente para que α seja construtível. Para o leitor que queira verificar a demonstração deste fato, indicamos a referência [1], página 114.

Atendendo ao que já vimos sobre números construtíveis, dispomos de ferramentas para provar a insolubilidade dos três problemas gregos.

Antes porém vamos observar que, existe uma condição necessária e suficiente para que um número seja construtível que utiliza a noção de extensões quadráticas.

3.1.3 Extensões Quadráticas de Corpos

Seja $\mathbb{F}$ um subcorpo de $\mathbb{R}$.

Seja k um número real positivo tal que $\sqrt{k} \notin \mathbb{F}$.

O conjunto $\mathbb{F}(k) = \{x + y\sqrt{k} : x, y \in \mathbb{F}\}$ munido das operações induzidas pelas do corpo $\mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$ e uma extensão de $\mathbb{F}$ chamada **extensão quadrática** de $\mathbb{F}$.

Suponhamos agora que $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \cdots, \mathbb{F}_n$ é uma sequência finita de corpos, com $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ e cada $\mathbb{F}_{i+1} = \mathbb{F}_i(k_{i+1})$ com $k_{i+1} \in \mathbb{F}_i$ mas $\sqrt{k_{i+1}} \notin \mathbb{F}_i$, para $i = 0, 1, \cdots, n-1$ (ou seja, $\mathbb{F}_{i+1}$ é uma extensão quadrática de $\mathbb{F}_i$, para $i = 0, 1, \cdots, n-1$).

Nestas condições dizemos que $\mathbb{F}_n$ é uma **extensão quadrática de ordem** n no corpo $\mathbb{Q}$.

Um corpo $\mathbb{F}$ é uma extensão finita de $\mathbb{Q}$ se, e somente se $\mathbb{F} = \mathbb{F}_n$, para algum $n \geq 1$.

Teorema 3.4. *Um número real α é construtível se, e somente se pertence a alguma extensão quadrática de $\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Ver [1] □

3.2 A Insolubilidade dos Três Problemas Clássicos da Antiguidade

O grau de uma extensão algébrica é uma ferramenta muito poderosa. Podemos aplicar o grau à resolução de vários problemas geométricos famosos inventados pelos Gregos.

O Problema da Quadratura do Círculo é o mais famoso dos problemas de Construção com Régua e Compasso.

Estamos agora bem preparados para investigar os antigos problemas da trissecção do ângulo, duplicação do cubo e a quadratura do círculo.

3.2.1 Duplicação do Cubo

Uma das lendas acerca da origem desse problema é mitológica e afirma que por volta de 429 a.C. o oráculo anunciou aos habitantes de Delus, que para se livrarem da peste eles deveriam dobrar o altar cúbico de Apolo. Assim sendo, os arquitetos dobraram as dimensões do altar, com o que conseguiram multiplicar por oito o seu volume, e não duplicá-lo, como pedira o Oráculo.

Vários matemáticos propuseram soluções para o problema. Entre eles podemos citar: Hiócrates, Platão, Erástotanes, Nicodemes, Arquitas, Menécmo, Diocles, Hierão, Viète, Descartes, Fermat, Newton, Clairaunt, entre outros.

Dado um cubo de aresta a construtível, o problema consiste em encontrar um cubo de aresta x construtível cujo volume seja o dobro do volume do cubo dado.

$$\begin{aligned} x^3 &= 2a^3 \\ x &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Uma vez que a é construtível devemos descobrir se $\sqrt[3]{2}$ é também um número construtível. Ora, tendo determinado o critério de construtibilidade, basta verificar se o grau da extensão $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$ é uma potência de 2.

Note que $\sqrt[3]{2}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$, pois é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 2$, que é irredutível sobre os racionais, e $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ que não é uma potência de 2. Desta forma temos que o número $\sqrt[3]{2}$ não pode ser construído e consequentemente, não é possível a duplicação do cubo com régua e compasso.

3.2.2 Trissecção do Ângulo

Provaremos agora que a trissecção do ângulo apenas com régua e compasso é de maneira geral impossível. Naturalmente existem ângulos, tais como os de 90° e 180°, para os quais a trissecção pode ser realizada.

Trisseccionar um ângulo construtível consiste em dividí-lo, utilizando régua e compasso, em três ângulos da mesma medida. Equivalentemente dado o ângulo de medida 3θ construtível, queremos construir três ângulos de medida θ.

Não é suficiente argumentar que a divisão de números construtíveis é um número construtível, pois tal número representaria um segmento e não um ângulo como o problema requer.

Identificando o ângulo dado em ciclo trigonométrico, podemos afirmar, de acordo com o Teorema (3.3), que seu cosseno também é construtível e vice e versa.

Assim dado $\cos(3\theta)$ construtível, vamos investigar se o $\cos\theta$ é construtível.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) \\
&= \cos\theta\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} 2\theta \\
&= \cos\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}\theta(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) \\
&= \cos\theta[\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)] - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \\
&= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

Tomando $x = 2\cos\theta$, temos:

$$\cos 3\theta = \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

Podemos observar que para alguns valores de $\cos 3\theta$ o polinômio acima é redutível a um polinômio de 2° grau. De fato,

Para $\cos 3\theta = -1$, ou seja $3\theta = 180°$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} + 1 &= 0 \\
x^3 - 3x + 2 &= 0 \\
(x-1)(x^2+x-2) &= 0
\end{aligned}$$

Concluímos que nesse caso é possível trisseccionar o ângulo 180º utilizando régua e compasso. Os valores obtidos são raízes de um polinômio de 2º grau de coeficientes construtíveis, portanto são construtíveis. A saber, $x = 1$ e $x = -2$, o que determina que $\theta = 60^o = \frac{180^o}{3}$ ou $\theta = 180^o$ são ângulos construtíveis.

O ângulo de 60º não pode ser trisseccionado, tomando $3\theta = 60^o$ temos $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$, o que corresponde ao polinômio:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} &= 0 \\
x^3 - 3x - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Afirmação: O polinômio $x^3 - 3x - 1 = 0$ é irredutível sobre os racionais.

Assim, sendo α uma raiz da equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ temos que o grau da extensão $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ que não é uma potência de dois. Dessa forma, temos que o número α não pode ser construído, e consequentemente, o ângulo de 20º não é construtível e daí segue que o ângulo de 60º não pode ser trissèccionado.

Para concluir a prova da impossibilidade de trissecção de um ângulo qualquer, resta provar a afirmação.

Prova da afirmação: Se houvesse um número racional $x = r/s$ satisfazendo esta equação, onde r e s são números inteiros que não têm um fator comum > 1, deveríamos ter $r^3 - 3s^2r = s^3$. A partir disso segue-se que $s^3 = r(r^2 - 3s^2)$ é divisível por r, o que significa que r e s têm um fator comum a menos que ± 1. Da mesma forma, s^2 é um fator de $r^3 = s^2(s + 3r)$, o que significa que r e s têm um fator comum, demonstramos que os únicos números racionais que poderíam possivelmente satisfazer a equação dada são $+1$ ou -1. Substituindo x por $+1$ e -1 na equação observamos que nenhum destes dois valores a satisfaz. Portanto, as equações dadas acima não têm raiz racional.

3.2.3 Quadratura do Círculo

Possivelmente o problema de construir um quadrado cuja área seja igual a de um círculo dado foi um dos que exerceu um fascínio maior ou mais duradouro em toda a história. Expresso por meio de um enunciado muito simples, a resolução utilizando apenas régua e compasso se revelou como grande desafio a várias gerações de matemáticos e permaneceu sem solução por cerca de 2000 anos.

Em 1800 a.C., os egípcios haviam feito uma aproximação para a solução, tomando o lado do quadrado igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado. Mas o registro da primeira tentativa de se quadrar o círculo com exatidão remota Anaxágoras, no século V a.C. As tentativas de demonstrar uma solução ou a impossibilidade serviram como motivação à criação de novas teorias, principalmente aquelas referentes à gênese do número π.

Os problemas de duplicação do cubo, da trissecção do ângulo e da construção do heptágono regular, podem ser resolvidos por métodos comparativamente elementares. O problema de fazer a quadratura do círculo é muito mais difícil e requer a utilização de técnicas de análise matemática avançada.

O problema consiste em construir com régua e compasso um quadrado cuja área seja igual à de um dado círculo de raio r construtível. Se denotarmos por x o lado de tal quadrado, teremos então que:

$$\begin{aligned} x^2 &= \pi r^2 \\ x &= r\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Podemos sem perda de generalidade supor, o problema de construção de um quadrado com área igual à de um círculo cujo raio seja o comprimento unitário 1 isto equivale a construção de um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$ como lado do quadrado procurado. E assim, como $\sqrt{\pi}$ é raiz do polinômio $x^2 - \pi = 0$, o problema consiste em mostrar se $\sqrt{\pi}$ é um número construtível.

Porém mostrar que $\sqrt{\pi}$ é construtível equivale mostrar a garantir que o número π é construtível.

Mas, em 1882 o matemático Lindermann provou que o famoso número π não é construtível. E portanto, demonstrou a impossibilidade de fazer a quadratura do círculo.

A técnica necessária para provar que π é um número transcendente foi criada por Charles Hermite (1822-1905), que provou que o número e é transcendente. Por uma ligeira extensão do método de Hermite, F. Lindermann conseguiu, em 1882, provar a transcendência de π e assim, definitivamente por termo à antiga questão da quadratura do círculo.

Referências Bibliográficas

[1] BASTOS, G. G. *Notas de Álgebra*. Fortaleza: Editora Premius - Edições Livro Técnico, 2002.

[2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Traduçao de Elza F. Gomide. 2^a ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[3] COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

[4] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. - Campinas, SP, Editora da UNICAMP, 2004.

[5] FRALEIGH, J. *Abstract Algebra*. Addison Wesley Longman, 1999.

[6] GARBI, G. G. *O romance das Equações Algébricas* 4ªed. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2010.

[7] GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra* 5ªed. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

[8] HERNSTEIN, I. N. *Tópicos de Álgebra*; tradução de Adalberto P. Bergamasco e L. H. Jacy Monteiro. São Paulo, Editora da Uni. e Polígono, 1970.

[9] WAGNER, E. *Construções Geométricas* com a colaboração de João Paulo Q. Carneiro - 6. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2007.

[10] PEDROSO, H. A.; PRECIOSO, J. C. Artigo: *O problema da construção de polígonos regulares de Euclides a Gauss*. FAMAT em Revista. (2009), p.109-124. Disponível em: http://www.portal.famat.ufu.br/node/262

(Acessado em 17/07/2013).

[11] SANTOS, J.R.G.S.R. *Temas da Geometria nos ensinos Básico e Secundário.* Dissertação de Mestrado Trabalho. Universidade de Aveiro, 2007. Disponível em: `http://ria.ua.pt/bitstream/10773/2893/1/2008000864.pdf`

(Acessado em 27/06/2013).

[12] PICADO, J. *Corpos e Equações Algébricas,* 2009. Disponível em `http://www.mat.uc.pt/~picado/corpos`

(Acessado em 08/07/2013)