



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Leonardo Silva Santos

**A APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS:**

**classificação de pontos em superfícies.**

Cuité-PB

2013

Leonardo Silva Santos

**A APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS:**  
classificação de pontos em superfícies.

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos

Coorientadora: Márcia Cristina Silva Brito

Cuité-PB

2013



Biblioteca Setorial do CES.

Junho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE  
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S237a

Santos, Leonardo Silva.

A Aplicação Normal de Gauss: classificação de pontos em superfícies. / Leonardo Silva Santos – Cuité: CES, 2013.

59 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCEG, 2013.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

Coorientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Aplicação Normal de Gauss. 2. Curvatura Gaussiana e Média. 3. Classificação de Pontos. I. Título.

CDU 514.7



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES**  
**UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE**

Leonardo Silva Santos

**A Aplicação Normal de Gauss: classificação de pontos em superfícies**

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 17 de setembro de 2013.

**Banca Examinadora**

  
Prof. Geraldo de Oliveira Filho

  
Prof. Maria Gisélia Vasconcelos  
(Orientadora)

  
Prof. Márcia Cristina Silva Brito  
(Coorientadora)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

## Agradecimentos

Primeiramente a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar forças sempre para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nos momentos de incertezas e suprir-me em todas as minhas necessidades.

Aos meus pais, Maria da Guia e Antônio, pelo apoio nos momentos difíceis, pela compreensão e incentivo em todas as minhas decisões.

Aos meus irmãos e familiares pelo incentivo.

À Pamella Salles, pela compreensão, paciência, carinho e principalmente pelo incentivo nos momentos em que pensei que não ia conseguir chegar ao fim deste trabalho.

A todos os meus amigos, em especial (Aline Pereira, Elias Monteiro, Jakeline Martins, Joel Oliveira, Raquel Diniz entre outros) pelas descontração nos momentos de turbulências, pelo carinho e amizade.

Aos companheiros de curso (Bosoerg, Elizangela, Fagner, José Filho e Jéssica), companheiros esses que prefiro chamá-los de “irmãos”, obrigado pela amizade, companheirismo, pela ajuda nos estudos, e pelos incentivos nos momentos de turbulências, nos quais enfrentamos juntos.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática-UFCG/CES, pelos ensinamentos ao longo de todo o curso.

Ao professor Geraldo de Oliveira Filho, pela disponibilidade em participar da banca e principalmente pelas contribuições e ensinamentos.

À minha orientadora, Professora Maria Gisélia Vasconcelos e à minha coorientadora, Professora Márcia Cristina Silva Brito, pela dedicação, incentivo, cobranças, exigências, entusiasmo, paciência e principalmente pelos ensinamentos.

Aos meus pais.

*“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”*

Carl Friedrich Gauss

## Resumo

A Aplicação Normal de Gauss apresenta uma teoria fundamental no estudo das superfícies regulares, pois através desta aplicação linear podemos obter inúmeras propriedades das superfícies em uma vizinhança de um ponto  $p$  qualquer. Com a aplicação de Gauss é possível medir o quão rapidamente uma superfície regular  $S$  se afasta de seu plano tangente  $T_p S$ , na vizinhança de um ponto desta superfície. Com a derivada de  $N$ ,  $dN_p$ , será possível medir o quanto  $N$  se afasta de  $N(p)$  em uma vizinhança de  $p$ . Esta diferencial é uma aplicação linear autoadjunta, e servirá para apresentarmos a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ . Utilizaremos a Aplicação Normal de Gauss para o estudo das curvaturas Gaussiana e Média de algumas superfícies regulares, e a classificação dos pontos de tais superfícies.

**Palavras-chave:** Aplicação Normal de Gauss. Curvatura Gaussiana e Média. Classificação de Pontos.

## Abstract

The normal application of Gauss presents a basic theory in the study of regular surfaces, therefore through this application we can get innumerable properties of the surfaces in a neighborhood of a point  $p$ . With the application of Gauss is possible to measure how neighborhood of a point  $p$  of this surface. With The derivate of  $N$ ,  $dN_p$ , will be possible measure how much  $N$  moves away from  $N(p)$  in a neighborhood of  $p$ . This differential is a linear application autoaid, and will help to present the second basic from of  $S$  in  $p$ . The normal application of Gauss study of the Gaussian curvatures and mean some surfaces regular, was made classification to the points of such surfaces.

**Keywords:** Normal Aplication of Gauss. Gaussian Curvature and Mean. Classification to the points.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Aspectos Históricos da Geometria</b>	<b>11</b>
<b>2 Superfícies Regulares</b>	<b>19</b>
2.1 Superfícies Regulares . . . . .	19
2.2 Primeira Forma Fundamental . . . . .	31
2.3 A Aplicação de Gauss e Segunda Forma Fundamental . . . . .	37
2.4 Curvatura Normal e Curvaturas Principais . . . . .	40
2.5 Normal de Gauss em Coordenadas Locais . . . . .	45
<b>3 Classificação de Pontos em Superfícies</b>	<b>49</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Introdução

Apresentaremos alguns aspectos da história da geometria, desde seus primórdios até a época do grande matemático e lógico alemão David Hilbert.

Para apresentar a Aplicação Normal de Gauss, devemos primeiramente explicitar o conceito de superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ , que é obtida, a grosso modo, tomando-se partes do plano, deformando-as e colando-as entre si, de tal forma que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos da figura resultante.

Pode-se dizer que um subconjunto  $S$  do  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada ponto  $p$  em  $S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que a aplicação seja diferenciável, homeomorfa e que a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $q \in U$ ,  $X(q) = p$ , seja injetiva.

As superfícies regulares possuem uma série de propriedades bastante interessantes e, para se estabelecer determinadas relações entre elas é necessário a existência de planos tangentes, que serão denotados aqui por  $T_p S$ . Uma importante estrutura associada a uma superfície é a primeira forma fundamental.

Tendo em vista que o produto interno canônico do  $\mathbb{R}^3$  induz em cada plano tangente  $T_p S$  de uma superfície regular  $S$  um produto interno, para cada dois vetores  $u, v$  de  $T_p S$  em  $\mathbb{R}^3$  dizemos que  $\langle u, v \rangle_p$  em  $T_p S$  é o produto interno induzido do  $\mathbb{R}^3$ .

A esse produto interno associamos a forma quadrática  $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = \|v\|^2 \geq 0$ , que é chamada *Primeira Forma Fundamental* da superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$ , em  $p \in S$ . A Primeira Forma Fundamental é meramente a expressão de como uma superfície  $S$  herda o produto interno usual do  $\mathbb{R}^3$  e, com esta definição é possível tratar de vários conceitos referentes a uma superfície, como a medida de distância entre dois pontos, a área de uma região da superfície entre outros.

O estudo da Aplicação Normal de Gauss que também representa um dos pon-

tos fundamentais no estudo das superfícies regulares pois através da derivada desta aplicação diferenciável podemos obter inúmeras propriedades das superfícies em uma vizinhança de um ponto  $p$  qualquer.

A aplicação  $dN_p$  diferencial da aplicação de Gauss é autoadjunta e este fato permite associar à  $dN_p$  uma outra forma quadrática  $Q$  em  $T_pS$ , dada por  $Q = \langle dN_p(v), v \rangle$ ,  $v \in T_pS$ . Esta forma com o sinal trocado é chamada de *Segunda Forma Fundamental* de  $S$  em  $p$ .

Associado a  $dN_p$  podemos definir curvaturas, à saber a *Curvatura Gaussiana* e a *Curvatura Média*. O determinante de  $dN_p$  é chamado de Curvatura Gaussiana  $K$ , de  $S$  em  $p$  e o negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado de Curvatura Média  $H$ , de  $S$  em  $p$ . Através de  $dN_p$  podemos classificar os pontos de uma superfície (elíptico, hiperbólico e umbílico).

Na Teoria da Geometria Diferencial das superfícies a Aplicação Normal de Gauss ocupa um lugar significativo e muitas propriedades podem ser obtidas através de um estudo da mesma.

# Capítulo 1

## Aspectos Históricos da Geometria

Neste capítulo, descrevemos algumas páginas da história da Geometria, desde seus primórdios até a época do grande matemático e lógico alemão David Hilbert. Daremos maior ênfase aos estudiosos que desenvolveram a Geometria Diferencial e que emprestaram seus nomes aos muitos teoremas que fundamentam essa área da matemática. Usamos como fonte de referências [2], [4], [5] e diversos fragmentos de notas históricas encontradas em alguns textos de Geometria Diferencial.

A palavra *geometria* origina-se do idioma grego e significa *medir a terra*, indicando que sua origem, como área de estudos, foi motivada pela necessidade de demarcação de terras, possivelmente para agricultura. Não existe consenso entre os historiadores antigos no que se refere a um marco inicial da geometria como área de estudos, entretanto, é inegável que boa parte de suas raízes encontram-se no antigo Egito e na Babilônia. Formas primitivas de geometria são encontradas também entre os hindus e chineses, embora, nesses povos, a geometria parece ter sido apresentada apenas como um conjunto de regras empíricas.

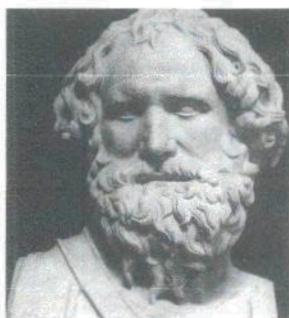
A geometria tal como a conhecemos hoje, como uma teoria lógico-dedutiva, teve origem e desenvolvimento na antiga Grécia, notadamente nos textos de Euclides de Alexandria. Euclides foi o matemático grego responsável pela compilação de praticamente toda a matemática desenvolvida até sua época em uma monumental obra de 13 volumes chamada de “Os Elementos”. Seu mérito não se restringe apenas à compilação, mas também à introdução do método lógico-dedutivo no desenvolvimento de uma teoria, isto é, do método axiomático, tão conhecido na atual matemática. Na obra

de Euclides temos dez axiomas, sendo cinco “noções comuns”, que Euclides acreditava serem verdades aceitas sem contestações em qualquer ciência, e cinco “postulados” que pretendiam ser proposições específicas da geometria e que também deveriam ser aceitas sem contestações. A partir desses axiomas, Euclides deduziu 465 proposições, dentre as quais figuram também resultados de geometria espacial e teoria dos números (do ponto de vista geométrico). Os livros didáticos de geometria, confeccionados ao longo do tempo, possuem, até hoje, “Os Elementos” de Euclides como base. Trata-se da segunda obra mais editada no mundo, perdendo apenas para a Bíblia.

Sabe-se que Euclides nasceu por volta do ano 325 a.C. e morreu por volta de 265 a.C. Ele viveu boa parte de sua vida na cidade de Alexandria, no Egito, onde trabalhou na famosa biblioteca de Alexandria.



EUCLIDES



ARQUIMEDES



APOLONIO

No que se refere à *geometria diferencial*, que atualmente significa o estudo da geometria com o auxílio do cálculo diferencial e integral, postula-se que esta tenha começado com o estudo de curvas notáveis, que são abundantemente encontradas nas obras de Euclides, Arquimedes de Siracusa e Apolônio de Perga, tidos como os três maiores matemáticos da antiguidade.

Entretanto, sua roupagem atual e seus principais teoremas, como o *Teorema Egregium*, tiveram seu início com Carl Gauss em seu trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curva*, de 1828, e coincide com uma época em que o famoso “Problema das Paralelas”, que consistia em tentar provar que o quinto Postulado de Euclides era independente dos demais, estava para ser resolvido. Tal postulado foi enunciado por Euclides, de modo não muito auto-evidente, do seguinte modo:

*“Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.”*

A tentativa de resolução do “Problema da Paralelas” levou à descoberta das geometrias não-euclidianas nesta mesma época por Gauss, Nikolai Lobachewsky e Janos Bolyai.

Outro personagem importante no desenvolvimento da geometria diferencial foi Bernhard Riemann que em 1854 escreveu e apresentou o trabalho *As hipóteses sobre as quais se baseiam os fundamentos da geometria* para admissão como docente na Universidade de Göttingen. Este trabalho é considerado o marco zero da criação da atual *geometria riemanniana* e nele a noção de “espaço” é tomada como sendo resultado da “colagem” de abertos do  $\mathbb{R}^n$  sendo que a cada ponto é associada uma forma quadrática que hoje chamamos de métrica. A partir da métrica, Riemann definiu as geodésicas como sendo as curvas que localmente minimizam distâncias entre pontos e, também, a noção de curvatura seccional. A noção de curvatura Gaussiana surgiu no trabalho de Gauss.



GAUSS



RIEMANN

Vale ressaltar que Gauss havia demonstrado que a curvatura (Gaussiana) de uma superfície do  $\mathbb{R}^3$  depende apenas de sua métrica e não da forma como a superfície está mergulhada no  $\mathbb{R}^3$ . Nessa demonstração Gauss obteve uma expressão explícita para a curvatura em termos dos coeficientes da métrica (isto é, coeficientes da Primeira Forma Quadrática) e de suas derivadas. Este resultado, conhecido como Teorema Egregium, abriu as portas para o estudo de superfícies abstratas (como os modelos euclidianos

para geometrias não euclidianas) e sua geometria intrínseca e, além disso, Riemann fez uso explícito desse teorema para estabelecer seu conceito de curvatura seccional. No entanto, Riemann não apresentou expressão para o cálculo dessa curvatura, embora tenha descrito como ela poderia ser calculada geometricamente. Esse trabalho coube a Elwin Christoffel e Rudolf Lipschitz que, em 1869, introduziram os atualmente chamados *símbolos de Christoffel*.

Trabalhos posteriores como os de Eugênio Beltrami, sobre a pseudo-esfera, Gregorio Ricci-Curbastro e Tulio Levi-Civita sobre a criação da noção de derivação covariante e da noção de transporte paralelo, Pierre Bonnet sobre as propriedades de geodésicas, incluindo o conceito de curvatura geodésica (Teorema de Gauss-Bonnet; Gauss publicou um caso especial desse teorema) e David Hilbert sobre os fundamentos da geometria (*Grundlagen der Geometrie*, de 1900) deram a roupagem que encontramos atualmente na geometria diferencial e geometria riemanniana.

Buscando uma melhor contextualização histórica da geometria diferencial, faremos um breve linha de tempo com os seus principais personagens, destacando as contribuições mais pertinentes.

**Euclides de Alexandria (325-265 a.C.), Arquimedes de Siracusa (278-212 a.C.) e Apolônio de Perga (262-190 a.C.)**

As idéias primárias da atual geometria diferencial possuem raízes nas obras desses três grandes matemáticos do antigo império grego de Alexandre, o grande. A obra de Euclides é o ponto de partida do método axiomático dedutivo na geometria, enquanto que nas obras de Arquimedes e de Apolônio há o estudo de propriedades de uma gama enorme de curvas que permeiam os atuais cursos de geometria diferencial.

**Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650)**

Ambos franceses, criaram o método das coordenadas ou a geometria analítica, que é o “método que atribui a cada ponto do espaço tridimensional uma terna ordenada de coordenadas  $(x, y, z)$  em relação aos três eixos ortogonais, permitindo relacionar a geometria com a álgebra”.

**Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1649-1727)**

Leibniz era alemão e Newton inglês. Eles descobriram, independentemente, algoritmos do cálculo infinitesimal, que possibilitam o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais.

**Christian Huygens (1629-1695), Aléxis Clairaut (1713-1765) e Gaspard Monge (1746-1818)**

Huygens era holandês e publicou um trabalho sobre curvas planas, originando os conceitos de involuta e evoluta de uma curva. Clairaut era francês e, ao estudar as curvas no espaço tridimensional, limitou-se às propriedades de primeira ordem, primando-se pelas derivadas primeiras e fazendo um interessante estudo sobre retas tangentes. Monge era francês e discutiu conceitos de curvatura e torção de uma curva espacial: “a torção em um ponto de uma curva mergulhada no espaço é uma medida numérica de quanto a curva se afasta de estar contida em um plano numa vizinhança daquele ponto; as curvas espaciais que estão contidas em um plano, ditas curvas planas, são caracterizados por terem torção nula”.

**Leonhard Euler (1707-1783), Louiz Cauchy (1789-1857) e Jean Meusnier (1754-1793)**

Euler nasceu na Basileia, Suíça. Ele se empenhou em escrever sobre o problema da determinação de quando uma superfície pode ser desenvolvida isometricamente, sem distorcer-se, sobre um plano, como é o caso do cilindro e do cone, o que requer que a superfície seja “folheada” por retas, isto é, sejam superfícies regradas. Cauchy era francês e publicou “*Leçons sier l' application do infinitesimal à la géométrie*” que introduziu novos métodos aos estudos da geometria, além de sistematizar e esclarecer diversos cálculos já utilizados por seus antecessores; por outro lado ele faz um refinamento nos trabalhos de Monge sobre a curvatura e a torção de uma curva espacial chegando às fórmulas, conhecidas atualmente como de *Frenet-Serret*, que “expressam o comportamento local da curva em função da curvatura e da torção em relação a um sistema de coordenadas móvel”. Já o francês Meusnier publicou, em 1776, um teorema sobre curvaturas normais que afirma que “todas as curvas de um superfície que têm,

em um ponto, a mesma reta tangente, têm, nesse ponto a mesma curvatura normal”. Meusnier também trabalhou em algumas propriedades de superfícies que chamamos atualmente de “mínimas”, como os helicóides.

### **Carl Gauss (1777-1855) e Bernard Riemann (1826-1860)**

Os alemães Gauss e Riemann podem ser considerados os criadores da moderna geometria diferencial e sua generalização: a geometria riemanniana. Os trabalhos fundamentais foram: *Disquisitiones generales circa superficies curva*, de 1828, de Gauss e *As hipóteses sobre as quais se baseiam os fundamentos da geometria*, de 1854, de Riemann.

### **Eugênio Beltrami (1835-1900), Félix Klein (1849-1925) e Henry Poincaré (1854-1912)**

O italiano Beltrami, tendo por base as idéias de Riemann, publica uma análise de espaços  $n$ -dimensionais de curvatura constante. Uma criação importante de Beltrami foi o primeiro modelo parcial de geometria não euclidiana, o modelo da pseudo-esfera para a geometria hiperbólica, que possui curvatura Gaussiana constante negativa e utiliza a métrica euclidiana induzida do espaço  $\mathbb{R}^3$ . O alemão Klein, que em 1872 tornou-se professor na Universidade de Erlanger, proferiu, nessa ocasião, uma conferência que mais tarde ficou conhecida como *Programa Erlanger*. Nessa conferência ele declarou que cada tipo de geometria consistia do estudo dos invariantes de um particular grupo de transformações, por exemplo, na geometria euclidiana, o grupo de transformações seria o grupo dos movimentos rígidos do plano (isometrias). Esse programa influenciou de modo muito contundente o desenvolvimento da geometria no século XX. Além disso, vários modelos para geometrias não euclidianas foram introduzidos por Klein, bem como pelo francês Poincaré. Esses modelos, de curvatura Gaussiana constante, fazem uso de superfícies abstratas, sendo que a métrica utilizada difere da euclidiana.

**Pierre Bonnet (1819-1892), Elwin Christoffel (1829-1900) e Rudolf Lipschitz (1838-1903)**

O francês Bonnet publicou um trabalho, em 1848, sobre propriedades de geodésicas em superfícies e introduziu o conceito de curvatura geodésica. Um dos principais teoremas da geometria diferencial, o Teorema de Gauss-Bonnet, é de sua autoria. Já os alemães Christoffel e Lipschitz publicaram, em 1869, um trabalho no qual podemos encontrar expressões analíticas para o cálculo de curvatura seccional.

**Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) e Tulio Levi-Civita (1873-1941)**

Os italianos Ricci-Curbastro e seu aluno Levi-Civita publicaram trabalhos que originaram o conceito de derivação covariante e da noção de transporte paralelo, muito utilizado nos atuais cursos de geometria diferencial no estudo de geodésicas.

**Ernst Minding (1806-1885), Jean Frenet (1819-1900) e Joseph Serret (1819-1885)**

O polonês Minding publicou, em 1839, um importante teorema presente nos cursos de geometria diferencial, que é uma espécie de recíproca do Teorema Egregium de Gauss, com o acréscimo da hipótese da curvatura gaussiana constante. Seu teorema afirma que duas superfícies de mesma curvatura Gaussiana constante são localmente isométricas. Os franceses Frenet e Serret estudaram curvas no espaço e publicaram, independentemente, as fórmulas que hoje são conhecidas como “Fórmulas de Frenet-Serret”. Frenet publicou seis fórmulas, em 1847, por ocasião da confecção de sua tese de doutoramento. Serret publicou nove fórmulas no total.

**Benjamin Olinde Rodrigues (1794-1851) e Joseph Liouville (1809-1882)**

Olinde Rodrigues era francês, de família judia proveniente da península ibérica, e aluno de Gaspard Monge. Sua principal contribuição em geometria diferencial reside em uma equação diferencial que relaciona curvatura normal e linhas de curvatura. No campo da geometria diferencial as contribuições do francês Liouville recaíram sobre o estudo de curvatura geodésica de curvas sobre superfícies regulares e, também, sobre transformações conformes sobre espaços que afirma que tais transformações são

inversões ou Homotetias (similitudes) ou compostas destas.

### Hermann Minkowski (1864-1909) e Jacques Hadamard (1865-1963)

O lituano Minkowski criou e desenvolveu a chamada *geometria dos números*, por meio de obra homônima publicada em 1896, na qual usa métodos geométricos para resolver problemas em teoria dos números e física-matemática. Seus estudos sobre a *aritmética das formas quadráticas* fundamentou alguns resultados interessantes na geometria global de superfícies, conhecida como *Fórmulas Integrais de Minkowski*, nas quais relaciona área de superfícies completas e compactas com integrais envolvendo curvaturas médias e gaussianas. O francês Hadamard provou dois importantes teoremas globais em geometria diferencial envolvendo difeomorfismos entre superfícies regulares completas.

### David Hilbert (1862-1943)

Além da organização lógica da geometria, citada acima, o alemão Hilbert forneceu uma demonstração do *Teorema da Rigidez da Esfera*, provado pela primeira vez por H. Liebmann, em 1899, além de provar a impossibilidade de um modelo bidimensional completo mergulhado no  $\mathbb{R}^3$ , com métrica euclidiana, para a geometria hiperbólica.

# Capítulo 2

## Superfícies Regulares

Neste capítulo introduzimos a noção de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . Discutiremos em seguida alguns exemplos. As referências para os estudos realizados neste trabalho são [3], [8], [9] e [10].

### 2.1 Superfícies Regulares

**Definição 2.1.** *Uma curva parametrizada diferenciável de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de classe  $C^\infty$  de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ . Escrevemos,*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

com  $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis de classe  $C^\infty$ . Esta curva é dita **curva regular**, se  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .

A partir desse momento, omitiremos o termo diferenciável apenas por simplicidade.

Dado  $t_0 \in I$ , o **Comprimento de arco** de uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a partir do ponto  $t_0$  é, por definição,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

onde  $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$  é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ .

**Definição 2.2.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma **superfície regular** se, para cada  $p \in S$ , existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^3$ , com  $p \in V$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  definida num aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que:

1.  $X(U) = V \cap S$  e  $X : U \rightarrow V \cap S$ , é diferenciável no sentido ordinário.
2.  $X : U \rightarrow V \cap S$ , é um homeomorfismo, isto é,  $X$  é uma bijeção contínua cuja inversa  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  é contínua.
3. para todo  $q \in U$ ,  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

A aplicação  $X$  é chamada uma **parametrização** de  $S$ , e  $V \cap S$  é chamada uma **vizinhança coordenada**, ver figura 2.1

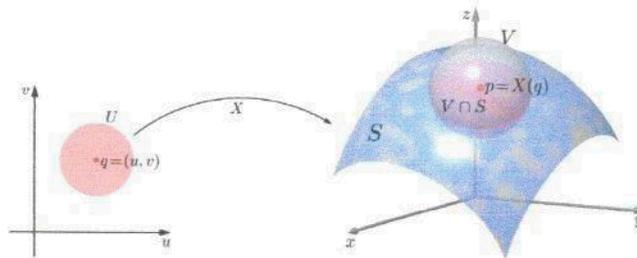


Figura 2.1: Vizinhança coordenada do ponto  $p \in S$

Uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  é obtida, a grosso modo, tomando-se partes do plano, deformando-as e colando-as entre si, de tal forma que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos da figura resultante.

### Observação 2.1.

- A aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  é diferenciável. Isto significa que se escrevemos  $x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , as funções  $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .
- A condição (1) nos permite assegurar que a superfície  $S$  é suave no sentido de que não tem arestas nem vértices.
- Com a condição (2) evita-se a possibilidade da superfície  $S$  tenha autointerseções. Isto é muito importante com vistas a conseguir a unicidade na hora de definir o plano tangente a superfície em um ponto.

- A condição (3) garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de  $S$ .

Vejam algumas formas equivalentes de expressar a condição (3).

Consideremos a base canônica  $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  e a base canônica  $\{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$  do  $\mathbb{R}^3$ .

Para cada  $q = (u_0, v_0) \in U$ , sabemos que a matriz associada a  $dN_q$  nas bases canônicas é a matriz jacobiana

$$J_X(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix},$$

pois

$$\begin{aligned} dX_q(e_1) &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right), \\ dX_q(e_2) &= \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right). \end{aligned}$$

Denotando esses vetores por  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  respectivamente, observamos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- 3.1)  $dX_q$  é injetiva;
- 3.2) a matriz  $J(u_0, v_0)$  tem posto 2;
- 3.3) os vetores  $X_u(u_0, v_0)$ ,  $X_v(u_0, v_0)$  são linearmente independentes;
- 3.3)  $X_u(u_0, v_0) \wedge X_v(u_0, v_0) \neq 0$ .

Fixado um ponto  $(u_0, v_0) \in U$ , as curvas

$$u \mapsto (u, v_0) \quad \text{e} \quad v \mapsto (u_0, v)$$

cujas imagens por  $X$  são as curvas na superfície  $S$

$$u \mapsto (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)) \quad \text{e} \quad v \mapsto (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

são chamadas **curvas coordenadas**. Os vetores  $X_u(u, v_0)$  e  $X_v(u_0, v)$  são os vetores tangentes às curvas coordenadas (ver figura 2.2).

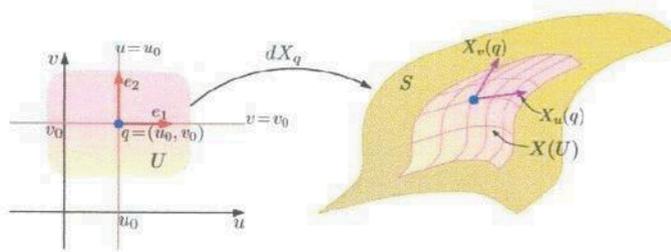


Figura 2.2: Vetores tangentes às curvas  $u \mapsto (u, v_0)$  e  $v \mapsto (u_0, v)$

**Exemplo 2.1.** *A esfera unitária,*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular.

Seja a aplicação  $X_3^+ : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X_3^+(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}),$$

definida no aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ .

Então  $X_3^+$  satisfaz as condições da definição.

De fato,

1.  $X_3^+(U) = S^2 \cap H_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$  é um aberto de  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $X_3^+$  é diferenciável, pois  $1 - (u^2 + v^2) > 0$  para todo  $(u, v) \in U$ .
- 3.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ para todo, } q \in U.$$

4.  $X_3^+$  é um homeomorfismo, pois  $X_3^+$  é uma bijeção contínua sobre  $S^2 \cap H_3^+$  e  $(X_3^+)^{-1} = \pi|_{S^2 \cap H_3^+}$  é contínua, onde  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a projeção sobre o plano- $xy$  dada por  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ .

Podemos cobrir a esfera com seis parametrizações similares a esta. Para isso, consideremos as aplicações:

$$X_1^+, X_1^-, X_2^+, X_2^-, X_3^+, X_3^- : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dadas por:

$$X_1^\pm(u, v) = (\pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v);$$

$$X_2^\pm(u, v) = (u, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v);$$

$$X_3^\pm(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}).$$

De modo análogo ao feito para  $X_3^+$ , podemos provar que  $X_1^\pm$ ,  $X_2^\pm$  e  $X_3^-$  são parametrizações de  $S^2$  sobre  $S^2 \cap H_1^\pm$ ,  $S^2 \cap H_2^\pm$ ,  $S^2 \cap H_3^\pm$ , respectivamente, onde

$$H_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0\}; \quad H_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0\};$$

$$H_2^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0\}; \quad H_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y < 0\};$$

$$H_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}; \quad H_3^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z < 0\},$$

são abertos de  $\mathbb{R}^3$ . Como

$$X_1^+(U) \cup X_1^-(U) = S^2 - \{(x, y, z) \in S^2 | y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x = 0\};$$

$$X_2^+(U) \cup X_2^-(U) = S^2 - \{(x, y, z) \in S^2 | x^2 + z^2 = 1 \text{ e } y = 0\};$$

$$X_3^+(U) \cup X_3^-(U) = S^2 - \{(x, y, z) \in S^2 | x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0\}.$$

temos que

$$S^2 = X_1^+(U) \cup X_1^-(U) \cup X_2^+(U) \cup X_2^-(U) \cup X_3^+(U) \cup X_3^-(U).$$

Logo,  $S^2$  é uma superfície regular.

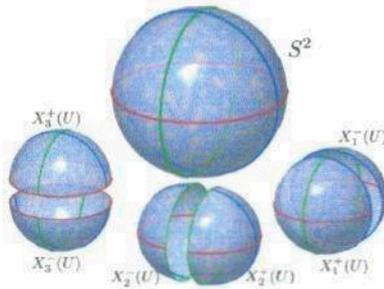


Figura 2.3: Parametrizações da Esfera

BIBLIOTECA

**Exemplo 2.2.** Considere a superfície  $S$  obtida pela rotação de uma curva regular  $C$  em torno de um eixo do plano que não encontra a curva;  $S$  é chamada uma **superfície de revolução**. A curva é chamada de **geratriz** e a reta de **eixo de revolução**. Os círculos descritos pelos pontos da curva são os **paralelos** de  $S$  e as várias posições da curva sobre a superfície  $S$  (interseções de  $S$  com os planos que contem o eixo de revolução) são chamados **meridianos** de  $S$ .

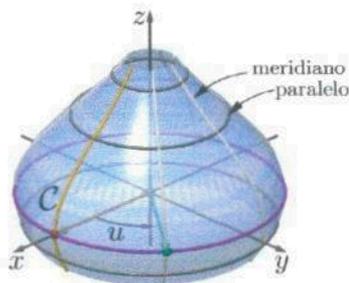


Figura 2.4: As curvas:  $v = \text{const.}$  são os paralelos e  $u = \text{const.}$  são os meridianos de  $S$ .

Consideremos o plano da curva como o plano  $xz$  e o eixo de rotação como o eixo  $O_z$ .

Seja  $\alpha : (a, b) \rightarrow \alpha(a, b) = V \cap C$ ,  $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$ ,  $f(v) > 0$ , uma parametrização da curva, onde  $V$  é um aberto de  $\mathbb{R}^3$ , e designamos por  $u$  o ângulo de rotação em torno do eixo  $O_z$ .

Ao girarmos a curva dada ao redor do eixo  $O_z$  obtemos:

$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v) \\ 0 \\ g(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v) \cos u \\ f(v) \sin u \\ g(v) \end{pmatrix},$$

onde  $0 < u < 2\pi$ .

Portanto, a aplicação  $X : (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow S$  é dada por:

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)).$$

**Afirmção:**  $X : U \rightarrow X(U)$  é uma parametrização de  $S$ , onde  $U = (0, 2\pi) \times (a, b)$ .

De fato,

1.  $X(U) = S \cap (\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, \text{ e } x \geq 0\})$  é um aberto de  $S$ .
2.  $X$  é diferenciável, pois  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis.

3.  $dX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora para todo  $(u, v) \in U$ , pois

$$\begin{aligned} \|\chi_u \wedge \chi_v\|^2(u, v) &= \|(-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0) \wedge (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))\|^2 \\ &= \|(f(v)g'(v) \cos u, f(v)g'(v) \sin u, -f(v)f'(v))\|^2 \\ &= f(v)^2(f'(v)^2 + g'(v)^2) > 0, \end{aligned}$$

para todo  $(u, v) \in U$ .

4.  $X : U \rightarrow X(U)$  é injetora e  $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$  é contínua.

De fato, Seja  $(x, y, z) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ .

Então,  $z = g(v)$ , e  $f(v) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Como  $\alpha : (a, b) \rightarrow \alpha((a, b))$ ,  $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$ , é um homeomorfismo,  $v$  é determinado de maneira única por  $v = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$  e é uma função contínua de  $\sqrt{x^2 + y^2}$  e  $z$ , e portanto, uma função contínua de  $x, y$  e  $z$ .

Além disso, como  $\cos u = \frac{x}{f(v)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\sin u = \frac{y}{f(v)} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , e  $u \in (0, 2\pi)$ , o parâmetro  $u$  é determinado de modo único. Logo,  $X$  é injetora.

Para provar que  $X^{-1}$  é contínua, temos que mostrar ainda que  $u$  é uma função contínua de  $x, y$  e  $z$ .

Seja  $(x, y, z) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) \in X(U)$ .

Como  $u \in (0, 2\pi)$  temos que  $\frac{u}{2} \in (0, \pi)$  e, portanto,  $\cot \frac{u}{2}$  está definida, para todo  $u \in (0, 2\pi)$  e

$$\cot \frac{u}{2} = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \frac{2 \cos \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 - \frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

Observe que  $\sqrt{x^2 + y^2} - x \neq 0$ , pois  $X(U) \subset \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$ .

Então  $u = 2 \operatorname{arccotg}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}\right)$  é uma função contínua de  $x, y$  e  $z$ .

Como  $S$  pode ser coberta inteiramente por parametrizações similares, segue-se que  $S$  é uma superfície regular.

**Exemplo 2.3.** Consideremos agora o cone duplo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Neste caso não temos uma superfície. Para concluir isso, suponhamos que  $X : U \rightarrow S \cap V$  é uma parametrização de  $S$  contendo o vértice  $v = (0, 0, 0)$ , e seja  $a \in U$  tal que  $X(a) = v$ . Podemos supor que  $U$  é um bola aberta de centro em  $a$ , pois qualquer aberto  $U$  contendo  $a$  terá que conter uma bola dessas. O aberto  $V$  tem que conter necessariamente um ponto  $p$  na metade inferior  $S_-$  do cone (onde  $z < 0$ ) e um ponto  $q$  na metade superior  $S_+$  (onde  $z > 0$ ). Sejam  $b$  e  $c$  os correspondentes pontos em  $U$  e consideremos uma curva  $\alpha$  em  $U$  passando por  $b$  e  $c$  e não passando por  $a$ . Esta curva é aplicada por  $X$  na curva  $X \circ \alpha$  em  $S$ , passando por  $p$  e  $q$  e não passando pelo vértice  $v$ . Isto é impossível!

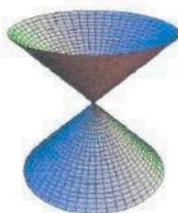


Figura 2.5: O cone duplo

Removendo o vértice, já obtemos uma superfície  $S_- \cup S_+$  com duas parametrizações  $X_{\pm} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , dadas pela inversa da projeção no plano horizontal  $xy$ :

$$X_{\pm}(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{u^2 + v^2})$$

**Proposição 2.1.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , então o seu gráfico

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U \text{ e } z = f(x, y)\}$$

é uma superfície regular.

*Demonstração.* Ver [3] □

**Definição 2.3.** Um número real  $a$  diz-se um **valor regular** de  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se, para cada  $p \in f^{-1}(a)$ , o gradiente  $\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0)$ .

**Proposição 2.2.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável definida no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^2$ .

*Demonstração.* Ver [3] □

**Exemplo 2.4.** *Sejam  $p_0$  um ponto do  $\mathbb{R}^3$  e  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$  vetores LI. Então o plano*

$$\pi = \{p_0 + \lambda w_1 + \mu w_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

*que passa pelo ponto  $p_0$  e é paralelo aos vetores  $a$  e  $b$ , é uma superfície regular.*

*De fato, seja  $N = w_1 \wedge w_2$  o vetor normal ao plano  $\pi$ .*

*Então,*

$$\pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, N \rangle = 0\}.$$

*Sendo  $N = (A, B, C)$ , temos que*

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz = D\}$$

*onde  $D = \langle p_0, N \rangle$ . Como  $N \neq (0, 0, 0)$ , temos  $A \neq 0$  ou  $B \neq 0$  ou  $C \neq 0$ .*

*Se  $C \neq 0$ , por exemplo, o plano  $\pi$  é o gráfico da função diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(x, y) = \frac{D - Ax - By}{C}.$$

*Portanto, pela proposição (2.1),  $\pi$  é uma superfície regular.*

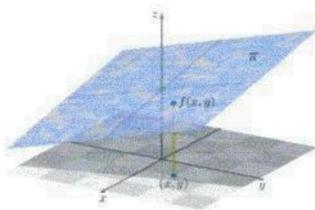


Figura 2.6: O plano  $\pi$  visto como gráfico de  $f$ .

**Exemplo 2.5.** *O parabolóide hiperbólico*

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \right\}$$

*( $a > 0, b > 0$ ) é uma superfície regular.*

*Com efeito,  $\mathcal{H}$  é o gráfico da função diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

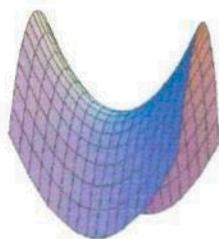


Figura 2.7: O parabolóide hiperbólico.

**Exemplo 2.6.** *O elipsóide*

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

é uma superfície regular.

De fato, considere a função diferenciável  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Então,

$$\nabla F(x, y, z) = \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right) = (0, 0, 0)$$

se, e somente se  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

Logo,  $F^{-1}(0) = \mathcal{E}$  é uma superfície regular, pois 0 é um valor regular de  $F$ , uma vez que o único ponto crítico de  $F$ ,  $(0, 0, 0)$ , não pertence a  $F^{-1}(0)$ .

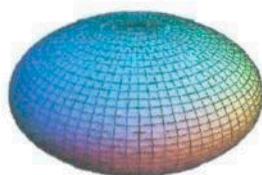


Figura 2.8: O elipsóide.

**Exemplo 2.7.** *O toro  $\mathcal{T}$  é a superfície gerada pela rotação de uma circunferência  $S^1$  de raio  $r$  em torno de uma reta pertencente ao plano do círculo a uma distância  $a > r$  do centro do círculo.*

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$$

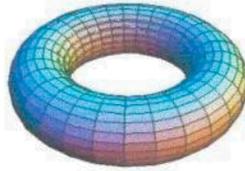


Figura 2.9: Toro

Seja  $S^1 : (y - a)^2 + z^2 = r^2$  a curva que descreve um círculo contido no plano  $yz$ , com centro  $(0, a, 0)$ . Então  $S^1$  e os pontos do conjunto  $\mathcal{T}$ , obtido pela rotação de  $S^1$  em torno do eixo  $O_z$  satisfazem a equação

Mostremos que  $\mathcal{T}$  é uma superfície regular.

De fato,

$$\mathcal{T} = f^{-1}(r^2)$$

onde  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$$

e  $r^2$  é um valor regular de  $f$ , pois

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

só se anula em  $(0, 0, 0) \notin \mathcal{T}$

Portanto,  $\mathcal{T} = f^{-1}(r^2)$  é uma superfície regular.

**Exemplo 2.8.** O hiperbolóide de duas folhas

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

é uma superfície regular.

De fato, consideremos a função diferenciável  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z) = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Como  $\nabla f(x, y, z) = \left( -\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right) = (0, 0, 0)$  se, e somente se  $x = y = z = 0$ , e  $(0, 0, 0) \notin f^{-1}(0)$ , temos que 0 é um valor regular de  $f$ .

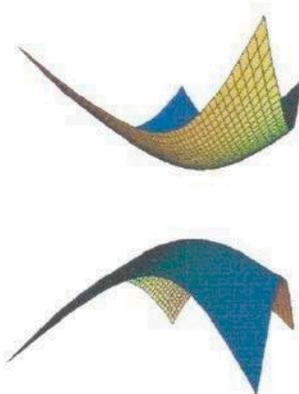


Figura 2.10: O Hiperbolóide de duas folhas.

**Observação 2.2.** *Note que a superfície  $\mathcal{H}$  não é conexa.*

Para o cone do exemplo 2.3 da seção 2.1, que observamos não ser uma superfície,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Então  $\nabla f = (2x, 2y, -2z)$  anula-se somente no vértice  $(0, 0, 0)$ . Por isso este critério não nos permite concluir que  $S = f^{-1}(0)$  é uma superfície. No entanto, removendo este ponto, ficamos com uma superfície, pois  $S$  é a união disjunta  $S_+ \cup S_-$  (note que, pela definição de superfície, é óbvio que a união de superfícies disjuntas é ainda uma superfície) e quer o cone  $S_+$  quer o cone  $S_-$  são superfícies pela proposição (2.2):  $S_+ = f_+^{-1}(0)$ , e,  $S_- = f_-^{-1}(0)$  onde

$$\begin{aligned} f_+ : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 + y^2 - z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_- : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z < 0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 + y^2 - z^2 \end{aligned}$$

Na definição de superfície regular, cada ponto  $p$  de  $S$  pertence a uma vizinhança coordenada. Para falarmos em diferenciabilidade de uma função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  num ponto  $p$  sobre a superfície, vamos tomar uma vizinhança de  $p$ , com coordenadas  $u$  e  $v$ , e  $f$  será dita diferenciável em  $p$  se sua expressão em termos dessas coordenadas admite derivas parciais contínuas de todas as ordens. Como o exemplo da esfera mostra, um ponto  $p$  de uma superfície  $S$  pode estar, em geral, na imagem de várias vizinhanças coordenadas, logo poderíamos eleger outra parametrização em uma vizinhança de  $p$ .

Para que a definição de superfície regular tenha sentido, é necessário que esta não dependa da parametrização escolhida. Isto é, devemos mostrar que se  $p$  pertence a duas vizinhanças coordenadas com parâmetros  $(u, v)$  e  $(a, b)$ . É possível passar de um dos pares coordenados para o outro por meio de uma transformação diferenciável. Para isto temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.3.** *Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações da superfície regular  $S$  e  $p$  um ponto de  $S$  tal que  $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ . Então a aplicação  $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$  (ver figura 2.11) é um difeomorfismo, que chamamos de **mudança de parâmetros**.*

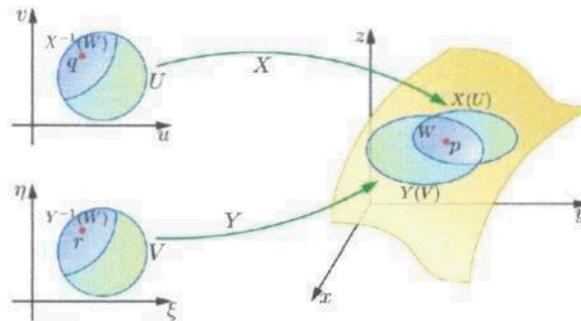


Figura 2.11: Coordenadas diferentes em torno do ponto  $p$ .

*Demonstração.* Ver [3]

□

Em outras palavras, se  $X$  e  $Y$  são parametrizações dadas por

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U,$$

$$Y(\xi, \mu) = (x(\xi, \mu), y(\xi, \mu), z(\xi, \mu)), (\xi, \mu) \in V,$$

então as coordenadas da mudança de parâmetros  $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$  são

$$u = u(\xi, \mu), \quad v = v(\xi, \mu), \quad (\xi, \mu) \in Y^{-1}(W),$$

onde as funções  $\xi$  e  $\mu$  também admite derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

## 2.2 Primeira Forma Fundamental

Geometricamente, a primeira forma fundamental nos permite fazer medições sobre a superfície.

**Definição 2.4.** Um vetor  $w$  é chamado de **vetor tangente** à superfície  $S$  no ponto  $p \in S$  se,  $w = \alpha'(0)$  e  $\alpha(0) = p$ , onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  é uma curva parametrizada diferenciável.

Denotaremos por  $T_p S$  o conjunto de todos os vetores tangentes à  $S$  em  $p$ .

**Definição 2.5.** Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e  $q$  um ponto em  $U$ . O subespaço vetorial de dimensão dois,  $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ , que coincide com o conjunto  $T_p S$  dos vetores tangentes à  $S$  em  $p = X(q)$ , é chamado **plano tangente** à  $S$  em  $p$ .

O plano  $dX_q(\mathbb{R}^2)$ , que passa por  $p = X(q)$ , não depende da parametrização  $X$ .

Como  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$ , então a injetividade de  $dX_q$  implica que  $\{dX_q(1, 0), dX_q(0, 1)\} = \{X_u(q), X_v(q)\}$  é uma base de  $T_p S$  chamada a base de  $T_p S$  associada a  $X$ .

**Observação 2.3.** Dada uma parametrização  $X : U \rightarrow X(U)$  de  $S$  em  $p$ , podemos escolher um **vetor unitário normal** em cada ponto  $p \in X(U)$  da seguinte maneira

$$N(p) = \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|}(q),$$

onde  $X(q) = p$ ,  $q \in U$ . Obtemos, assim, uma aplicação  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciável.

Assim, temos uma aplicação diferenciável  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $p \in X(U)$  um vetor unitário  $N(p)$ .

Seja  $S$  uma superfície regular e  $p \in S$ .

**Definição 2.6.** Chamamos **primeira forma fundamental** de  $S$  em  $p$  à forma bilinear simétrica definida positiva

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0,$$

associada ao produto interno induzido no plano tangente a  $S$  em  $p$  pelo o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ .

No que se segue, escreveremos simplesmente  $\langle , \rangle$  em lugar de  $\langle , \rangle_p$ .

Dada uma parametrização  $X(u, v)$  de  $S$  em  $p$ , veremos a expressão da primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_pS$ .

Tomando  $w \in T_pS$ , temos que  $w$  é o vetor tangente de uma curva parametrizada  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , com  $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$ .

Sabemos que

$$\alpha'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t),$$

então vamos calcular, em  $t = 0$ , a primeira forma fundamental. Logo,

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= \langle X_u, X_u \rangle (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle u'v' + \langle X_v, X_v \rangle (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \end{aligned}$$

onde

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2.$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{X_u(u(t), v(t)), X_v(u(t), v(t))\}$  de  $T_pS$ .

**Observação 2.4.** As funções  $E, F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^\infty$ ,  $E(u, v) > 0$ ,  $G(u, v) > 0$  e  $(EG - F^2)(u, v) > 0$  para todo  $(u, v) \in U$ , pois

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0$$

já que  $X_u(u, v)$  e  $X_v(u, v)$  são L.I.

**Exemplo 2.9.** O plano que passa por um dado ponto  $p$  e tem a direção dos vetores  $w_1$  e  $w_2$ , unitários e ortogonais, é parametrizado por  $X(u, v) = p + uw_1 + vw_2$ . Então  $\frac{\partial X}{\partial u} = w_1$ , e,  $\frac{\partial X}{\partial v} = w_2$ . Assim,

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = \|w_1\| = 1,$$

$$F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0$$

$$G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = \|w_2\| = 1,$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental.

**Exemplo 2.10.** O cilindro circular vertical, parametrizado por  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , tem como primeira forma fundamental  $E(u, v) = 1$ ,  $F(u, v) = 0$ , e  $G(u, v) = 1$  tal como o plano.

**Exemplo 2.11.** Consideremos uma superfície de revolução

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

onde  $u \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R}$  e  $f(u) > 0$ .

Como

$$X_u(u, v) = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u))$$

$$X_v(u, v) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$$

temos que coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = (f'(u))^2 + (g'(u))^2$$

$$F = 0$$

$$G = (f(u))^2.$$

**Exemplo 2.12.** Seja  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  a esfera unitária de centro na origem  $X : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow S^2$ ,

$$X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

uma parametrização de  $S^2$  dada por suas coordenadas esféricas.

Como

$$X_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

$$X_\varphi(\theta, \varphi) = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

temos que coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = 1$$

$$F = 0$$

$$G = \sin^2 \theta.$$

## Aplicações da Primeira Forma Fundamental

1. Cálculo do comprimento de uma curva na superfície.

Usando a primeira forma fundamental de  $S$ , podemos reescrever o **comprimento de arco**  $s$  de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  dada por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I_p(\alpha'(t))} dt,$$

pois,  $I_p(\alpha'(t)) = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_p = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = |\alpha'(t)|^2$ .

Além disso, se  $\alpha : I \rightarrow S$  está contida numa vizinhança coordenada correspondente a parametrização  $X(u, v)$ , podemos calcular o comprimento de arco de  $\alpha$  entre 0 e  $t$  por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

2. Cálculo do ângulo de intersecção, no ponto  $p$ , das curvas  $\alpha$  e  $\beta$  contida na superfície.

O **ângulo**  $\theta$  de duas curvas parametrizadas regulares  $\alpha, \beta : I \rightarrow S$  que se intersectam em  $t = t_0$  é definido como sendo o ângulo formado pelos vetores  $\alpha'(t)$  e  $\beta'(t)$ . Portanto

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

Em particular, o cosseno do ângulo  $\varphi$  entre as curvas coordenadas de uma parametrização  $X(u, v)$  é

$$\cos \varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Portanto, as curvas coordenadas são ortogonais se,  $F(u, v) = 0$  para todo  $(u, v) \in U$ .

Uma tal parametrização é chamada uma **parametrização ortogonal**.

3. Cálculo da área  $A(R)$  de uma região limitada  $R \subset S$ .

Tomemos  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $R \subset S$  uma região limitada, ou seja,  $R$  está contida em alguma bola aberta de  $\mathbb{R}^3$ , de forma que  $R$  seja a imagem por  $X$  de uma região limitada  $Q \subset U$ .

**Definição 2.7.** Se  $R \subset S$  é uma região limitada de uma superfície regular  $S$ , contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , definimos a **área da região**  $R$  como sendo

$$A(R) = \iint_Q |X_u \wedge X_v| dudv,$$

onde  $Q = X^{-1}(R)$ .

**Lema 2.1.** O número  $A(R)$  independe da parametrização  $X : U \rightarrow X(U)$  de  $S$  com  $R \subset X(U)$ . Além disso,

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

*Demonstração.* Ver [3] □

## Orientação de Superfícies

Nesta seção vamos discutir em que sentido, e quando, é possível orientar uma superfície. Para maiores detalhes ver [3].

Dada uma parametrização  $X : U \rightarrow X(U)$  existe um campo de vetores unitários diferenciável em  $X(U)$ ,  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v).$$

Escolhemos outra parametrização  $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow \bar{X}(\bar{U})$ , tal que  $W = X(U) \cap \bar{X}(\bar{U}) \neq \emptyset$ , existe um campo de vetores normais diferenciável em  $\bar{X}(\bar{U})$ ,  $\bar{N} : \bar{X}(\bar{U}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dado por:

$$\bar{N}(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})) = \frac{\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Seja  $h = X^{-1} \circ \bar{X} : \bar{X}^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ ,  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ , a aplicação de mudanças de coordenadas. Então,

$$(\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}})(\bar{u}, \bar{v}) = (X_u \wedge X_v)(h(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}),$$

temos que

$$\bar{N}(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})) = N(X(h(\bar{u}, \bar{v}))) \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v})}{|\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v})|}$$

Logo,

$$\bar{N}(\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})) = \begin{cases} N(X(h(\bar{u}, \bar{v}))), & \text{se } \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) > 0 \\ -N(X(h(\bar{u}, \bar{v}))), & \text{se } \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{u}, \bar{v}) < 0 \end{cases}$$

Assim, temos uma aplicação diferenciável  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $p \in X(U)$  um vetor unitário  $N(p)$ .

Isto conduz-nos a seguinte definição:

**Definição 2.8.** Uma superfície regular  $S$  é **orientável** se é possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de forma que se um ponto  $p \in S$  pertence a duas vizinhanças desta família, então a mudança de coordenadas tem determinante jacobiano positivo em  $p$ . A escolha de uma tal família é chamada **uma orientação de  $S$** , e a superfície  $S$ , neste caso, é dita **orientada**.

A aplicação  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  associa a cada  $q \in X(U)$  um vetor normal unitário  $N(q)$ . Sendo  $V$  um aberto de  $S$ , a aplicação  $N : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada de **campo diferenciável de vetores normais unitários** em  $V$ . Se pudermos definir esse campo em cada  $V \subset S$  de maneira contínua, então diremos que  $N$  é uma **orientação** de  $S$  e, neste caso, a superfície será dita **orientável**.

Dizemos que uma superfície  $S$  é **orientável** se for possível escolher, para cada  $p \in S$ , uma orientação em  $T_p S$  que varie continuamente com  $p$  - mais precisamente, se existir uma aplicação contínua  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que, para cada  $p$ ,  $N(p)$  seja ortogonal a  $T_p S$ . A um tal **campo de vetores normais**  $N$  chamamos uma **orientação** de  $S$ .

## 2.3 A Aplicação de Gauss e Segunda Forma Fundamental

Estamos interessados em realizar um estudo do quão rápido uma superfície regular  $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  afasta-se do seu plano tangente  $T_p S$ , em um ponto  $Q = S(P)$ . Isso equivale a estudar a “velocidade” com que a direção de um vetor normal e unitário a  $S$  em  $Q$  varia em uma vizinhança de  $Q$  contida em  $S$ .

Ao longo desta seção,  $S$  será uma superfície regular orientável na qual foi escolhida uma orientação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diremos simplesmente que  $S$  é uma superfície com uma orientação  $N$ .

**Definição 2.9.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$ , assim definida, é chamada a **Aplicação de Gauss** de  $S$ .

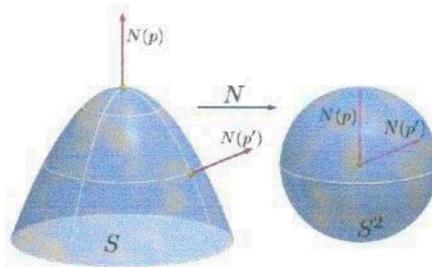


Figura 2.12: Aplicação de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$ .

**Exemplo 2.13.** Nas figuras seguintes podemos ver, respectivamente, a região equatorial do hiperbolóide de uma folha  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  e a sua imagem pela aplicação de Gauss, a região equatorial do hiperbolóide de duas folhas  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  e a sua imagem pela Aplicação de Gauss, o elipsóide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

e a sua imagem pela Aplicação de Gauss:

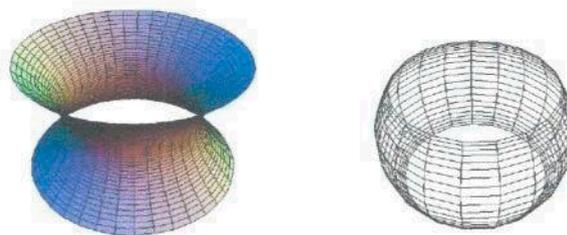


Figura 2.13: A região equatorial do hiperbolóide de uma folha  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

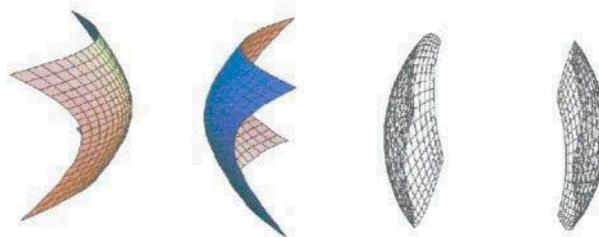


Figura 2.14: A região equatorial do hiperbolóide de duas folhas  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ .

UFCCV BIBLIOTECA

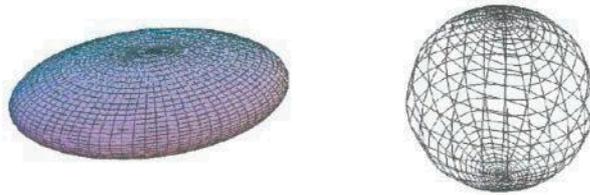


Figura 2.15: A região equatorial do elipsóide  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ .

**Observação 2.5.** A aplicação de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$  é diferenciável.

De fato, a aplicação  $N : S \rightarrow S^2$  é contínua e se  $X : U \rightarrow X(U) \subset S$  é uma parametrização de  $S$  em  $p$ ,  $p \in S$  e  $Y : V \rightarrow Y(V) \subset S^2$  é uma parametrização de  $S^2$  em  $N(p)$  tais que  $N(X(U)) \subset Y(V)$ , então a aplicação

$$Y^{-1} \circ N \circ X : U \rightarrow V$$

é diferenciável, pois  $N \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável, e  $Y^{-1}$  é a restrição de uma aplicação diferenciável definida num aberto de  $\mathbb{R}^3$ .

Usaremos para a notação  $N(u, v)$ ,  $N_p$ . E denotaremos, a diferencial  $dN_p$  de  $N$  em  $p \in S$ .

**Lema 2.2.** Para cada ponto  $p \in S$ , a diferencial é um operador linear

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

no plano tangente de  $S$  em  $p$ .

*Demonstração.* Por definição,  $N$  é um campo de vetores unitário, assim  $\langle N_p, N_p \rangle = 1$ . Derivando a identidade  $\langle N_p, N_p \rangle = 1$  na direção de um vetor unitário  $w$  tangente a superfície no ponto  $p$ , obtemos:

$$0 = 2\langle dN_p(w), dN_p \rangle, \quad \text{com } w \in T_p S, \|w\| = 1.$$

Donde concluímos que o vetor  $dN_p$  é ortogonal a o vetor normal  $N_p$ , logo, é tangente a  $S$  em  $p$ . Assim  $dN_p$  é uma função do  $T_p S$  no  $T_p S$ .

A linearidade de  $dN_p$  é consequência da linearidade das propriedades de derivadas.  $\square$

Seja  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação de Gauss em  $p$  e seja  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  uma curva diferenciável com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v \in T_p S$ . Então

$dN_p(v) = N'(0) \in T_pS$ , onde  $N(t) = N \circ \alpha(t)$ , mede a taxa de variação com que  $N$ , restrita à curva  $\alpha$ , muda de direção numa vizinhança de  $t = 0$ .

Assim,  $dN_p$  mede o quanto  $N$  se afasta de  $N(p)$  numa vizinhança de  $p$ , isto é, mede quanto  $S$  se afasta de  $T_pS$  numa vizinhança de  $p$ .

**Proposição 2.4.** *A diferencial  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

*Demonstração.* Como  $dN_p$  é linear, basta verificar que  $\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle$  para uma base  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_pS$ .

De fato, se  $v = aX_u + bX_v$  e  $w = cX_u + dX_v$  são vetores tangentes a  $S$  em  $p$ , então:

$$\begin{aligned} \langle dN_p(v), w \rangle &= \langle dN_p(aX_u + bX_v), cX_u + dX_v \rangle \\ &= ac\langle dN_p(X_u), X_u \rangle + ad\langle dN_p(X_u), X_v \rangle + bc\langle dN_p(X_v), X_u \rangle + bd\langle dN_p(X_v), X_v \rangle \\ &= ac\langle X_u, dN_p(X_u) \rangle + ad\langle X_u, dN_p(X_v) \rangle + bc\langle X_v, dN_p(X_u) \rangle + bd\langle X_v, dN_p(X_v) \rangle \\ &= \langle aX_u + bX_v, dN_p(cX_u + dX_v) \rangle \\ &= \langle v, dN_p(w) \rangle \end{aligned}$$

Seja  $X : U \rightarrow X(U)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$ , e seja  $\{X_u, X_v\}$  a base de  $T_pS$  associada a  $X$ .

Se  $\alpha : I \rightarrow X(U)$ ,  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt}(N \circ X(u(t), v(t))) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}\bar{N}(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0); \end{aligned}$$

onde  $\bar{N} = N \circ X$ .

Logo  $dN_p(X_u(q)) = \bar{N}_u(q)$  e  $dN_p(X_v(q)) = \bar{N}_v(q)$ .

Como  $\langle \bar{N}, X_v \rangle = \langle X_u, \bar{N} \rangle \equiv 0$  em  $U$  temos, derivando essas expressões em relação a  $v$  e  $u$ , respectivamente, que:

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}_v, X_u \rangle + \langle \bar{N}, X_{uv} \rangle &= 0 \\ \langle \bar{N}_u, X_v \rangle + \langle \bar{N}, X_{vu} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Assim,  $\langle \bar{N}_v, X_u \rangle = \langle \bar{N}_u, X_v \rangle$ , isto é,

$$\langle dN_p(X_v(q)), X_u(q) \rangle = \langle X_v(q), dN_p(X_u(q)) \rangle$$

como queríamos provar.  $\square$

Associada à aplicação linear auto-adjunta  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ , temos a forma bilinear simétrica

$$B(u, v) = \langle dN_p(v), w \rangle, \quad \forall v, w \in T_p S,$$

e a forma quadrática

$$Q(v) = B(u, v) = \langle dN_p(v), v \rangle \quad \forall v \in T_p S.$$

**Definição 2.10.** A forma quadrática  $\Pi_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), (v) \rangle,$$

é chamada a *segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$* .

## 2.4 Curvatura Normal e Curvaturas Principais

Seja  $\mathcal{C}$  uma curva regular em  $S$  com  $p \in \mathcal{C}$ . Suponhamos que em  $p$ ,  $\mathcal{C}$  possua curvatura  $\kappa(p)$ . Indiquemos por  $n(p)$  o vetor normal unitário a  $\mathcal{C}$  em  $p$ .

**Observação 2.6.** Se  $\mathcal{C}$  está parametrizada por  $\alpha(t)$ ,  $\alpha(0) = p$ , temos  $\kappa(p) = \frac{|\alpha'(0) \times \alpha''(0)|}{|\alpha'(0)|^3}$ . Se  $\alpha$  for parametrizada por comprimento de arco, então  $\kappa(p) = |\alpha''(0)|$  e  $n = \frac{\alpha''(0)}{|\alpha''(0)|}$  é um vetor normal a  $\alpha$  em  $p$ .

Assim, temos um ângulo  $\theta \in [0, \pi]$  entre  $N(p)$  (vetor normal e unitários  $S$  em  $p$  e  $n(p)$ ), que é dado por  $\cos(\theta) = \langle n(p), N(p) \rangle$ .

**Definição 2.11.** O número

$$\kappa_n(p) = \kappa(p) \cos(\theta)$$

é chamado de *curvatura normal de  $\mathcal{C}$  em  $p$* .

O número  $\kappa_n(p) = \kappa(p) \langle n(p), N(p) \rangle$  é o comprimento da projeção do vetor  $\kappa(p)n(p)$  sobre o vetor  $N(p)$  com sinal dado pela orientação  $N(p)$  de  $S$  em  $p$ .

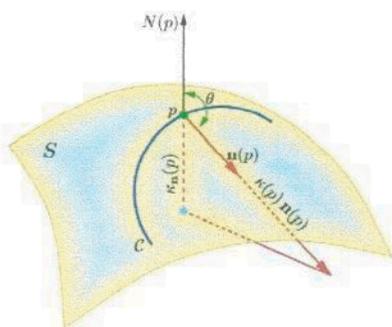


Figura 2.16:  $\kappa_n$  é a projeção do vetor  $\kappa n$  sobre a normal  $N$  da superfície  $S$  em  $p$

Observamos que se considerarmos  $\mathcal{C}$  como sendo a curva obtida pela a intersecção de  $S$  com um plano normal a  $S$  em  $p$ , então  $n(p)$  é paralela a  $N(p)$ , o que significa  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , o que significa  $|\kappa_n(p)| = \kappa(p)$ . Dessa forma, a menos do sinal, a curvatura de  $S$  coincide com a curvatura de  $\mathcal{C}$  em  $p$ .

**Observação 2.7. Interpretação Geométrica da Segunda Forma Fundamental**

Seja  $\mathcal{C}$  uma curva regular em  $S$ , com  $p \in \mathcal{C}$ , e  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}$  uma parametrização de  $\mathcal{C}$  pelo comprimento de arco tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ .

Seja  $\bar{N}(s) = N \circ \alpha(s)$ . Como  $\langle \bar{N}(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ , para todo  $s \in I$  temos que

$$\langle \bar{N}(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle \bar{N}'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Como,  $\bar{N}'(t) = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$ , ou seja  $\bar{N}'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \Pi_p(v) = \Pi_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle \bar{N}'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle \bar{N}(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N(0), k(p)n(p) \rangle \\ &= k_n(p). \end{aligned}$$

Assim, o valor de  $\Pi_p$  em um vetor unitário  $v \in T_pS$  é igual à curvatura normal de qualquer curva regular em  $S$  que passa por  $p$  e é tangente a  $v$  em  $p$ .

Logo, a segunda forma Quadrática em um vetor unitário  $v \in T_pS$  fornece-nos a curvatura normal de uma curva regular  $\alpha$  qualquer em  $S$  passando por  $p$  e que possua  $v$  como vetor tangente. Particularmente esta curva  $\alpha$  pode ser parametrizada

por comprimento de arco obtida da intersecção de  $S$  com um plano normal a  $S$  em  $p$  paralelo a  $v$ . Daí a justificativa de chamarmos  $\kappa_n(p)$  de curvatura **normal**. Podemos, desta forma, falar de curvatura normal a  $S$  em  $p$  segundo uma direção determinada por  $v$  e escrever  $\kappa_n^v(p)$  no lugar de  $\kappa_n(p)$ .

**Proposição 2.5.** (Meusnier) *Todas as curvas regulares de uma superfície  $S$  que passam por um ponto  $p \in S$  e têm a mesma reta tangente neste ponto, possuem a mesma curvatura normal em  $p$ .*

- A proposição acima nos permite definir a curvatura normal de  $S$  no ponto  $p \in S$  segundo uma dada direção  $v$  em  $T_pS$  da seguinte maneira:

$$\kappa_{n_p}(v) = \frac{\Pi_p(v)}{I_p(v)}, \quad v \in T_pS - \{0\}.$$

Observe que  $\kappa_{n_p}(v) = \kappa_{n_p}(v)(\lambda v)$  para todo  $v \in T_pS - \{0\}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.12.** *Seja  $v \in T_pS$  um vetor unitário, e seja  $\pi(N(p), v)$  o plano que passa por  $p$  e é paralelo aos vetores  $v$  e  $N(p)$ . A intersecção  $S \cap \pi(N(p), v)$  é chamada **seção normal de  $S$  em  $p$  ao longo de  $v$** .*

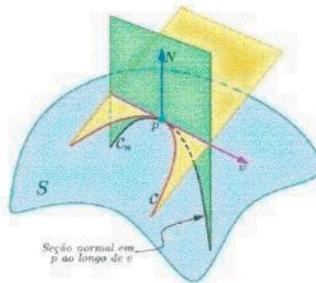


Figura 2.17: Representação do teorema de Meusnier, as curvas  $C$  e  $C_n$  têm a mesma curvatura normal em  $p$  ao longo de  $v$ .

Numa vizinhança de  $p$ , a seção normal de  $S$  em  $p$  é uma curva regular em  $S$  que passa por  $p$  cujo vetor normal  $n(p)$  é  $\pm N(p)$  ou zero, no caso em que  $\kappa(p) = 0$ . Então  $\kappa(p)$  é o módulo da curvatura normal ao longo de  $v$  em  $p$ .

Assim, o valor absoluto da curvatura normal em  $p$  de uma curva regular  $\alpha$  é igual à curvatura da seção normal de  $S$  em  $p$  ao longo de  $\alpha'(0)$ .

**Observação 2.8.** Estamos considerando a curva plana  $C \cap \pi(N(p), v)$  como uma curva no espaço  $e$ , portanto,  $\kappa(p) \geq 0$ .

Sejam  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial de  $N : S \rightarrow S^2$  em  $p$ , e  $\{e_1, e_2\}$  uma base ortonormal de autovetores de  $dN_p$  tal que  $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$ ,  $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$ , com  $\kappa_1 \geq \kappa_2$ . Então,

$$\Pi_p(xe_1 + ye_2) = \kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2,$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , com  $x^2 + y^2 = 1$ , isto é,  $\kappa_1$  é o máximo e  $\kappa_2$  é o mínimo das curvaturas normais a  $S$  em  $p$ .

**Definição 2.13.** A curvatura normal máxima  $\kappa_1$  e a curvatura normal mínima  $\kappa_2$  são chamadas **curvaturas principais** de  $S$  em  $p$ , e as direções dadas pelos autovetores  $e_1$  e  $e_2$  são chamadas **direções principais** de  $S$  em  $p$ .

O conhecimento das curvaturas principais em  $p$  permite calcular a curvatura normal em  $p$  segundo qualquer direção dada de  $T_p S$ .

De fato, seja  $\{e_1, e_2\}$  uma base ortonormal positiva de  $T_p S$  formada de autovetores de  $dN_p$ , com  $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$ ,  $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$  e  $\kappa_1 \geq \kappa_2$ .

Então, se  $v \in T_p S$  é unitário, temos que  $v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ , onde  $\theta$  é o ângulo de  $e_1$  a  $v$  na orientação de  $T_p S$ .

Logo a curvatura normal  $\kappa_n$  em  $p$  na direção de  $v$  é dada por:

$$\begin{aligned} k_n &= \Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \langle e_1 \kappa_1 \cos \theta + e_2 \kappa_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

que é conhecida como a **fórmula de Euler**.

**Definição 2.14.** Sejam  $p \in S$  e  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação normal de Gauss em  $p$ . O determinante de  $dN_p$  é chamada a **curvatura Gaussiana**  $K$  de  $S$  em  $p$ , e o negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a **curvatura média**  $H$  de  $S$  em  $p$ . Assim,

$$K(p) = \det(dN_p) \quad e \quad H(p) = -\frac{1}{2} \text{traço}(dN_p).$$

No caso em que  $\{e_1, e_2\}$  é uma base ortonormal de  $T_p S$  formada de autovetores de  $dN_p$ , com  $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$  e  $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$ ,

$$K(p) = \kappa_1 \kappa_2 \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{2}.$$

**Observação 2.9.** Se mudarmos a orientação da superfície  $S$ , a curvatura Gaussiana não muda, mas a curvatura Média muda de sinal.

**Definição 2.15.** Um ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$  é dito:

1. **Elíptico**, se  $\det(dN_p) > 0$ ;
2. **Hiperbólico**, se  $\det(dN_p) < 0$ ;
3. **Parabólico**, se  $\det(dN_p) = 0$ , com  $dN_p \neq 0$ ;
4. **Planar**, se  $dN_p = 0$ .

**Observação 2.10.** Num ponto elíptico, a curvatura Gaussiana é positiva e, portanto, as curvaturas principais têm o mesmo sinal. Assim, todas as curvas passando pelo ponto têm seus vetores normais apontando para um mesmo lado do plano tangente.

**Observação 2.11.** Em um ponto hiperbólico  $p$ , a curvatura Gaussiana é negativa. Assim, as curvaturas principais têm sinais opostos e, portanto, existem curvas passando pelo ponto  $p$  cujos vetores normais em  $p$  apontam para lados diferentes do plano tangente.

**Observação 2.12.** Em um ponto parabólico, a curvatura Gaussiana é nula, mas uma das curvaturas principais é diferente de zero.

**Observação 2.13.** Em um ponto planar  $p$ , todas as curvaturas normais são nulas. portanto  $K(p) = H(p) = 0$ .

**Definição 2.16.** Um ponto  $p \in S$  é chamado **umbílico** se  $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ .

**Observação 2.14.** Se  $p$  é um ponto umbílico, então  $K(p) \geq 0$ . Além disso,  $K(p) = 0$  se, e só se,  $p$  é planar. Ou seja, um ponto umbílico é elíptico ou planar.

Uma maneira de caracterizar pontos umbílicos é através das curvaturas Gaussiana e média, como mostra a seguinte proposição.

**Proposição 2.6.**  $p$  é um ponto umbílico se e só se,  $H^2(p) = K(p)$ .

*Demonstração.*

$$H^2(p) - K(p) = \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^2 - \kappa_1\kappa_2 = \frac{\kappa_1^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 - 4\kappa_1\kappa_2}{4} = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4} \geq 0.$$

Logo,  $H^2(p) = K(p)$  se, e só se  $\kappa_1 = \kappa_2$ . □

## 2.5 Normal de Gauss em Coordenadas Locais

Trataremos agora de encontrar fórmulas explícitas para o cálculo das curvaturas Gaussiana e Média de uma superfície parametrizada regular, em função dos coeficientes da primeira e da segunda forma quadrática fundamental.

Seja  $S$  uma superfície orientada com orientação  $N$ . Seja  $X : U \rightarrow X(U)$  uma parametrização de  $S$  compatível com a orientação  $N$  de  $S$ , isto é,

$$N(u, v) = N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v),$$

para todo  $(u, v) \in U$ .

Seja  $w \in T_pS$ ,  $w = \lambda X_u(q) + \mu X_v(q)$ , com  $X(q) = p$ . Então

$$dN_p(w) = dN_p(\lambda X_u(q) + \mu X_v(q)) = \lambda dN_p(X_u(q)) + \mu dN_p(X_v(q)) = \lambda N_u(q) + \mu N_v(q).$$

Como  $N_u(q)$  e  $N_v(q)$  pertencem a  $T_pS$ , podemos escrever esses vetores na base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  :

$$N_u(q) = a_{11}X_u(q) + a_{21}X_v(q) \tag{2.1}$$

$$N_v(q) = a_{12}X_u(q) + a_{22}X_v(q); \tag{2.2}$$

Portanto

$$dN_p(w) = (a_{11}\lambda + a_{12}\mu)X_u(q) + (a_{21}\lambda + a_{22}\mu)X_v(q),$$

isto é,

$$dN_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

onde  $[dN_p]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  é a matriz de  $dN_p$  na base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$ .

**Observação 2.15.** A matriz  $[dN_p]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  não é necessariamente simétrica. Mas se a base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  é ortogonal, a matriz  $[dN_p]_\beta$  é simétrica, pois nesse caso, por 2.1 e 2.2,

$$\begin{aligned} a_{21} &= \langle a_{11}X_u(q) + a_{21}X_v(q), X_v(q) \rangle = \langle dN_p(X_u(q)), X_v(q) \rangle \\ &= \langle X_u(q), a_{12}X_u(q) + a_{22}X_v(q) \rangle = a_{12} \end{aligned}$$

A expressão da segunda forma fundamental na base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi_p(w) &= -\langle dN(w), w \rangle = -\langle \lambda N_u(q) + \mu N_v(q), \lambda X_u(q) + \mu X_v(q) \rangle \\ &= e(q)\lambda^2 + 2f(q)\lambda\mu + g(q)\mu^2. \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} e(q) &= -\langle N_u(q), X_u(q) \rangle = \langle N(q), X_{uu}(q) \rangle \\ f(q) &= -\langle N_u(q), X_v(q) \rangle = \langle N(q), X_{vu}(q) \rangle = \langle N(q), X_{uv}(q) \rangle = -\langle N_v(q), X_u(q) \rangle \\ g(q) &= -\langle N_v(q), X_v(q) \rangle = \langle N(q), X_{vv}(q) \rangle \end{aligned}$$

já que  $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$  em  $U$ .

As funções  $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  são os **coeficientes da segunda forma fundamental na base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$** .

Como  $N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$  e  $N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$ , temos que

$$\begin{aligned} -e(q) &= \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F; \\ -f(q) &= \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G; \\ -f(q) &= \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F; \\ -g(q) &= \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G; \end{aligned}$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$ .

Então,

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}; & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}; & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

As equações,

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v,$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

com  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ , e  $a_{22}$  obtidos acima são conhecidos como as **equações de Weingarten**.

A partir de (2), obtemos que

$$K(q) = \det(dN_p) = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(q)$$

é a curvatura Gaussiana de  $S$  em  $p$ , e que

$$H(q) = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}(q)$$

é a curvatura média de  $S$  em  $p$ , onde  $X(q) = p$ .

Seja  $\kappa_1$ , e  $\kappa_2$  as curvaturas principais de  $S$  em  $p$ , isto é,

$$dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1 \quad e \quad dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2,$$

onde  $\{e_1, e_2\}$  é uma base ortonormal de autovetores de  $dN_p$ .

Como  $\kappa_1 + \kappa_2 = 2H$  e  $\kappa_1 \kappa_2 = K$ . Temos que  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são as raízes da equação

$$x^2 - 2Hx + K = 0.$$

Se considerarmos  $\kappa_1 \geq \kappa_2$ , temos

$$\kappa_1 = \frac{2H + \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} = H + \sqrt{H^2 - K}$$

e

$$\kappa_2 = \frac{2H - \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

que são funções contínuas em  $S$ .

A proposição seguinte dá outra caracterização de um ponto umbílico, desta vez em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais.

**Proposição 2.7.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular. Um ponto  $q \in U$  é umbílico, se e só se, existe um número real  $\lambda$  tal que*

$$e = \lambda E \quad f = \lambda F \quad g = \lambda G$$

onde  $E, F, G, e, f$  e  $g$  indicam os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais em  $q$ . Neste caso,  $\lambda$  é igual às curvaturas principais de  $X$  em  $q$ .

*Demonstração.* Se  $q$  é um ponto umbílico, então  $\forall w \in T_p X, w \neq 0$  temos que  $\kappa_n(w) = \lambda$  é constante. Isto é,  $\Pi_q(w) = \lambda I_p(w)$ .

Portanto,  $w = aX_u(q) + bX_v(q)$ , então

$$a^2 e + 2abf + b^2 g = a^2 \lambda E + 2ab \lambda F + b^2 \lambda G.$$

Em particular, se  $w = X_u(q)$  obtemos  $e = \lambda E$ . Analogamente, se  $w = X_v(q)$  obtemos  $g = \lambda G$  e finalmente, usando estas duas igualdades e considerando  $w = X_u(q) + X_v(q)$ , obtemos  $f = \lambda F$ . Reciprocamente, se os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são proporcionais então, para todo  $w \in T_p X, w \neq 0$ , temos

$$\Pi_q(w) = \lambda I_q(w),$$

consequentemente  $\kappa_n(w) = \lambda$ , isto é,  $q$  é um ponto umbílico de  $X$ . □

## Capítulo 3

# Classificação de Pontos em Superfícies

Como aplicação da Aplicação Normal de Gauss, classificaremos os pontos das seguintes superfícies: O Plano, O Elipsóide, A Esfera, O Parabolóide Hiperbólico, O Cilindro Elíptico e do Toro.

### Plano

Considere a parametrização do plano  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$X(u, v) = (u, v, 0)$$

onde  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Temos que,

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, 0) \\ X_v &= (0, 1, 0) \\ X_{uu} &= (0, 0, 0) = X_{uv} = X_{vv} \\ N &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 \end{aligned}$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = 0$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = 0$$

As Curvaturas Gaussiana e Média são:

$$K(u, v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$$

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0$$

Logo, todos os pontos do plano são planares.

## Elipsóide

Considere a parametrização do elipsóide  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, c \cos v),$$

onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < \pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$ .

Temos que

$$X_u = (-a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, b \operatorname{sen} v \cos u, 0)$$

$$X_v = (a \cos v \cos u, b \cos v \operatorname{sen} u, -c \operatorname{sen} v)$$

$$X_{uu} = (-a \operatorname{sen} v \cos u, -b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, 0)$$

$$X_{uv} = (-a \cos v \operatorname{sen} u, b \cos v \cos u, 0)$$

$$X_{vv} = (-a \operatorname{sen} v \cos u, -b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -c \cos v)$$

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{A}} (-bc \operatorname{sen} v \cos u, -ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -ab \cos v)$$

onde,  $A = (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ab \cos v)^2$ .

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = (a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (b \operatorname{sen} v \cos u)^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = (b^2 - a^2)(\cos v \cos u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \operatorname{sen} u)^2 + (c \operatorname{sen} v)^2$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{A}} (abc \operatorname{sen}^2 v) \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{A}} (abc) \end{aligned}$$

As Curvaturas Gaussiana e Média são:

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{(abc)^2}{\left[ (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ab \cos v)^2 \right]^2} \\ H(u, v) &= \frac{abc \left[ (a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \operatorname{sen} u)^2 + (c \operatorname{sen} v)^2 + (a \operatorname{sen} u)^2 + (b \cos u)^2 \right]}{2 \left[ (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ab \cos v)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

A curvatura Gaussiana do elipsóide é dada por

$$K(u, v) = \frac{(abc)^2}{\left[ (ac \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)^2 + (bc \operatorname{sen} v \cos u)^2 + (ab \cos v)^2 \right]^2} > 0$$

para todo  $(u, v)$  onde  $u \in \mathbb{R}$ , e  $0 < v < 2\pi$ .

Então concluímos que todos os pontos do elipsóide são elípticos.

Pela proposição (2.7), um ponto é umbílico, se e só se,

$$e = \lambda E \tag{3.1}$$

$$f = \lambda F \tag{3.2}$$

$$g = \lambda G \tag{3.3}$$

onde  $\lambda$  é igual às curvaturas principais de  $X$  em  $(u, v)$ .

No caso do elipsóide, como  $K(u, v) > 0$ , temos que  $\lambda \neq 0$ .

Agora  $f = 0$  implica  $F = 0$  e das equações (3.2) e (3.3) devemos ter  $eG = gE$ , ou seja,  $(u, v)$  é umbílico, se e só se,

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \cos u \cos v) &= 0 \quad e \\ (a \cos v \cos u)^2 + (b \cos v \operatorname{sen} u)^2 + (c \operatorname{sen} v)^2 &= (a \operatorname{sen} u)^2 + (b \cos u)^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Vamos nos deter aqui apenas no caso em que  $a > b > c > 0$ .

Assim é fácil ver que se  $\cos u = 0$  ou  $\cos v = 0$ , não existe  $(u, v)$  satisfazendo as equações

acima. Portanto devemos considerar  $\sin u = 0$ .

Substituindo  $\sin u = 0$  na equação (3.4) resulta

$$b^2 = (a \cos v)^2 + (c \sin v)^2 \quad (3.5)$$

Resolvendo a equação (3.5) obtemos

$$\cos^2 v = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \quad \text{e} \quad \sin^2 v = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

Desta forma, considerando  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , os pontos umbílicos no elipsóide resumem-se a quatro pontos, ou seja, aqueles cujas coordenadas são descritas por

$$x(u, v) = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y(u, v) = 0, \quad z(u, v) = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

## Esfera

Considere a parametrização da esfera  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$X(u, v) = (a \sin v \cos u, a \sin v \sin u, a \cos v)$$

onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$ , para obtermos as curvaturas gaussianas e média da esfera, basta fazermos  $a = b = c$  nas curvaturas do elipsóide.

E as Curvaturas Gaussianas e Média da esfera são:

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \frac{1}{a^2} \\ H(u, v) &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Sabemos que  $K(u, v) = \frac{1}{a^2} > 0$  para todo  $(u, v)$  com  $u \in \mathbb{R}$  e  $0 < v < 2\pi$ .

Logo concluímos que todos os pontos da esfera são elípticos.

Observamos ainda que  $H^2 = K$ , portanto, pela proposição (2.6), todos os pontos da esfera são umbílicos.

## Parabolóide Hiperbólico

Considere a parametrização do Parabolóide Hiperbólico  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$X(u, v) = \left( u, v, \frac{-u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right)$$

onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u, v \in \mathbb{R}\}$ .

Temos que,

$$\begin{aligned} X_u &= \left( 1, 0, -\frac{2u}{a^2} \right) \\ X_v &= \left( 0, 1, \frac{2v}{b^2} \right) \\ X_{uu} &= \left( 0, 0, -\frac{2}{a^2} \right) \\ X_{uv} &= (0, 0, 0) \\ X_{vv} &= \left( 0, 0, \frac{2}{b^2} \right) \\ N &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{D}} \left( \frac{2u}{a^2}, -\frac{2v}{b^2}, 1 \right) \end{aligned}$$

onde,  $D = \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1$ .

Os coeficientes da primeira forma são;

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + \frac{4u^2}{a^4} \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = -\frac{4uv}{(ab)^2} \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + \frac{4v^2}{b^4} \end{aligned}$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são;

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = -\frac{2}{a^2\sqrt{D}} \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{2}{b^2\sqrt{D}} \end{aligned}$$

As Curvaturas Gaussiana e Média são:

$$K = -\frac{4}{(ab)^2 \left[ \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right]^2} \quad e \quad H = -\frac{a^2(b^4 + 4v^2) + b^2(a^4 + 4u^2)}{(ab)^4 \left[ \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4} + 1 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Temos que,  $K < 0$  para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}$ .

Portanto, concluímos que todos os pontos do parabolóide elíptico são hiperbólicos.

Como  $K < 0$ , não existem pontos umbílicos.

## Cilindro Elíptico

Considere a parametrização do Cilindro Elíptico  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$X(u, v) = (a \cos v, b \sin v, u)$$

onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$ .

Temos que;

$$X_u = (0, 0, 1)$$

$$X_v = (-a \sin v, b \cos v, 0)$$

$$X_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$X_{vv} = (-a \cos v, -b \sin v, 0)$$

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{(a \sin v)^2 + (b \cos v)^2}} (-b \cos v, -a \sin v, 0)$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (a \sin v)^2 + (b \cos v)^2$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = 0$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{ab}{\sqrt{(a \sin v)^2 + (b \cos v)^2}}$$

As Curvaturas Gaussiana e Média são:

$$K = 0 \quad \text{e} \quad H = \frac{ab}{2[(a \sin v)^2 + (b \cos v)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Observemos que

$$K = 0 \quad \text{e} \quad H \neq 0,$$

Daí, conclui-se que todos os pontos do cilindro elíptico são parabólicos. Observamos ainda, que  $H^2 - K = H^2 \neq 0$ , e portanto o cilindro elíptico não possui pontos umbílicos.

## Toro

Considere a parametrização do toro  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

onde  $(u, v) \in U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ .

Temos que

$$X_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$X_v = (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0)$$

$$X_{uu} = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u)$$

$$X_{uv} = (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0)$$

$$X_{vv} = (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0)$$

Com os valores acima, obtemos

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2$$

os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$ .

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{r^2 \sin^2 v (a + r \cos u) + r^2 \cos^2 v (a + r \cos u)}{r(a + r \cos u)} = r \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{vv} \rangle}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{r \cos u (a + r \cos u)^2}{r(a + r \cos u)} = \cos u (a + r \cos u) \end{aligned}$$

os coeficientes da segunda forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$ .

Finalmente, como  $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ , temos que ,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r \cos u (a + r \cos u)}{r^2 (a + r \cos u)^2} = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

Observe que  $K$  só depende de  $u$ , isto é,  $K$  é constante ao longo de um paralelo.

Assim,

- $K = 0$  ao longo dos paralelos  $u = \frac{\pi}{2}$  e  $u = \frac{3\pi}{2}$ .

Os pontos desses paralelos são parabólicos, pois  $\Pi_p \neq 0$ , já que  $e = r \neq 0$ .

- $K > 0$  ao longo da região do toro dada pela condição  $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ , pois  $r > 0$  e  $a > r$ ; os pontos dessa região são, portanto, elípticos.
- $K < 0$  ao longo da região do toro dada pela condição  $u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ; os pontos dessa região são, portanto, hiperbólicos.

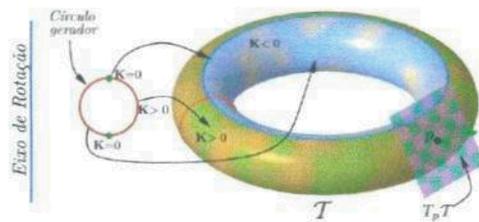


Figura 3.1: Curvatura Gaussiana no Toro.

## Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, P. V. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Matemática universitária). 1998.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.
- [3] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Matemática universitária), 2012.
- [4] COIMBRA, J. R. V. *Uma Introdução à Geometria Diferencial*, Dissertação de Mestrado Profissional, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.
- [5] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 3ª ed. Campinas. Editora da Unicamp. 2002.
- [6] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 7ª ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2008.
- [7] LIMA, E. L. *Curso de Análise vol.2*. 11ª ed. Rio de Janeiro. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Matemática universitária). 2012
- [8] KENEBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2ª ed. São Paulo. Edgar Bluch.2008.
- [9] FRENSEL, K. *Notas de Aulas*. Disponível em [http://www.professores.uff.br/Katia\\_frensel/aulasgeodif/gdif.pdf](http://www.professores.uff.br/Katia_frensel/aulasgeodif/gdif.pdf)  
(Acessado em 02/06/2013)

- [10] PICADO, J. *Apontamentos de Geometria Diferencial*, 2003. Disponível em <http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/0405/Apontamentos.html>  
(Acessado em 03/06/2013)
- [11] RUFINO, E. O. *Curvaturas Média e Gaussiana de Superfícies Quádricas*, Monografia de Especialização, Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2006.