



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE  
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

**FUNÇÕES SENO E COSSENO:  
Fenômenos Periódicos**

Luana Cristina Santos Pereira

Cuité - PB

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

**FUNÇÕES SENO E COSSENO:  
Fenômenos Periódicos**

Luana Cristina Santos Pereira

Cuité - PB

2013

UFCC / BIBLIOTECA



Biblioteca Setorial do CES.

Junho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE  
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

P436f

Pereira, Luana Cristina Santos.

Funções seno e cosseno: fenômenos periódicos. /  
Luana Cristina Santos Pereira – Cuité: CES, 2013.

48 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) –  
Centro de Educação e Saúde / UFCEG, 2013.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.

Co-orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Função seno. 2. Função cosseno. 3. Fenômenos  
periódicos. I. Título.

CDU 51



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES**  
**UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE**

## **Funções Seno e Cosseno: Fenômenos Periódicos**

**Luana Cristina Santos Pereira**

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 24 de abril de 2013.

### **Banca Examinadora**

Maria Gisélia Vasconcelos  
Prof.<sup>a</sup> Maria Gisélia Vasconcelos  
(Orientadora)

Márcia Cristina Silva Brito  
Prof.<sup>a</sup> Márcia Cristina Silva Brito  
(Co-Orientadora)

Joseilson R. Lima  
Prof. Joseilson Raimundo de Lima

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus, minha força maior, pois em todos os momentos de dificuldades me dava coragem de seguir em frente, além de estar comigo em todos os momentos. De um modo especial, a minha Mãe do céu, que com seu amor de mãe intercedeu por mim.

Aos meus pais, em especial a minha amada mãe Lúcia Maria (Nina), que não conta esforços, fazendo sempre o que pode por mim, para a realização dos meus objetivos. E aos meus irmãos, aos quais eu dedico todo esse trabalho.

Em especial a Prof<sup>ª</sup>. Maria Gisélia e a Prof<sup>ª</sup>. Márcia Cristina, pela paciência na orientação o incentivo e a amizade, que tornaram possível a conclusão deste trabalho. Agradeço ao professor Joseilson por ter se disponibilizado a participar da banca examinadora e por suas sugestões. E a todos os professores do curso que foram importantes na minha vida acadêmica.

A minha inesquecível turma: Soliana, Izidio, Eudes, Sérgio, Jaldir, Wellison, Silvana, Ivanielma e Santiago. Eles tornaram possível que neste ambiente acadêmico não encontrássemos apenas colegas, mas sim verdadeiras amizades!

Agradeço de forma especial a minha cunhada Patrícia, a Eudes Vieira minha amiga para todas as horas, a Andreia Santos por atender as minhas necessidades e ao especial João Agripino. E também, Macielly Butiti, Kaliandra Santos, Daniel Macedo, Ancielio, Dayane Mayara e Danielly Buriti, verdadeiros anjos que Deus colocou em minha vida! Este trabalho tem um pedacinho de todos vocês!

Não esquecendo também, os funcionários do CES, que sempre atenderam as nossas necessidades.

Enfim, a todos que oraram e acreditaram em mim, que me ajudaram direto ou indiretamente, meu muito obrigado! Valeu a pena toda distância, todo sofrimento, todas as renúncias... Que Deus abençoe!

Aos meus três amados irmãos:

Juvenal Junior,

Jean Pereira e

Manuel Jeovani.

UFMG / BIBLIOTECA

*“ A matemática é o alfabeto com o qual DEUS  
escreveu o universo.”*

Pitágoras

## Resumo

Neste trabalho apresentamos um pouco da história, dando ênfase aos principais momentos e os matemáticos que fizeram parte dos estudos das Funções Trigonométricas. Como motivação, apresentamos as funções seno e cosseno definido para os ângulos agudos e a Função de Euler. Mostraremos a importância das aplicações das funções trigonométricas, pois através dela podemos modelar os fenômenos periódicos que acontece no nosso dia-a-dia. Como por exemplo, o fenômeno das marés que são variações periódicas do nível do mar devido principalmente à atração gravitacional da Lua. Outro exemplo é o ciclo cardíaco que é um dos fenômenos que repete periodicamente no nosso organismo.

**Palavras-chave:** Função seno. Função cosseno. Fenômenos Periódicos.



## Abstract

This work presentations a few story, emphasizing the principals moments and the mathematicians who were part of studies to trigonometric functions. As motivation, we present the sine and cosine functions defined for acute angles and the Euler function. We'll show also the important applications trigonometric functions therefore it we can model periodic phenomena in our day-to-day. For example, the phenomenon of tides that are periodic variations of sea level due mainly principally to the gravitational of Moon. Another example is the cardiac cycle that is one phenomenon that repeat periodically in our organism.

**Keywords:** Sine Function. Cosine Function. Periodic Functions.

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| Introdução                                     | 9         |
| <b>1 Aspectos Históricos da Trigonometria</b>  | <b>10</b> |
| <b>2 Conceitos Preliminares</b>                | <b>15</b> |
| 2.1 O Conceito de Ângulo                       | 15        |
| 2.2 Propriedades de Triângulos Planos          | 19        |
| <b>3 Funções Trigonométricas</b>               | <b>26</b> |
| 3.1 As Funções Trigonométrica do Ângulo Agudo  | 26        |
| 3.2 Extensões das Funções Trigonométricas      | 32        |
| 3.3 As Funções Seno e Cosseno                  | 35        |
| <b>4 Aplicações de Funções Trigonométricas</b> | <b>42</b> |
| 4.1 Ciclo Cardíaco                             | 43        |
| 4.2 Fenômeno das Marés                         | 46        |
| Referências Bibliográficas                     | 48        |

# Introdução

A matemática tem grande importância na história da humanidade, a mesma esta ligada a vida do homem desde que ele tomou consciência de sua existência.

No Egito e na Babilônia surgem as primeiras noções da Trigonometria a partir dos cálculos entre números e entre lados de triângulos semelhantes. A Trigonometria por sua vez é o estudo da Matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo.

Estudaremos as funções trigonométricas, que desempenham um papel relevante tanto na Análise, como por suas aplicações, que vão desde as mais simples, no dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia.

Introduziremos o conceito de seno e cosseno para ângulos agudos, e para um ângulo qualquer através da função de Euler, e suas propriedades. Com o uso destas funções, podemos modelar fenômenos periódicos que acontecem no nosso dia-a-dia, como por exemplo, o ciclo cardíaco, o fenômeno das marés, horário de verão, ciclo menstrual, entre outros.

# Capítulo 1

## Aspectos Históricos da Trigonometria

A história da Trigonometria, como qualquer outro ramo da Matemática, não surgiu de uma forma pronta. Mas de fato, foi construída devido às necessidades dos povos antigos, percorrendo assim, um longo caminho até chegar ao que conhecemos nos dias de hoje. A Trigonometria desenvolveu-se na antiguidade a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação.

Os primeiros sinais de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir dos cálculos de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, o Papiro de Rhind tem especial interesse por conter rudimentos de trigonometria. Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzir um conceito de *segt*, equivalente ao de cotangente de um ângulo, que significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para variação de unidade na altura.

Os gregos superaram os babilônios e estudaram pela primeira vez a relação entre os ângulos em um círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua.

Como sabemos os diversos ramos da Matemática não se formaram nem evoluíram

da mesma maneira e ao mesmo tempo, mas sim de uma forma graduada. O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. E nesta área, se destacaram grandes nomes na Grécia: entre eles Tales de Mileto (624-548 a.C. aproximadamente), com seus estudo de semelhança que embasam a trigonometria, e Pitágoras de Samos (580-600 a.C. aproximadamente). Conjectura-se que este último tenha feito à primeira demonstração do teorema que leva seu nome: "*Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos*". Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

Cada vez mais os astrônomos gregos, como Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 a.C.) contemporâneo de Arquimedes ( por volta de 287-212 a. C.) e Aristarco de Samos ( por volta de 310-230 a.C.) estavam mais interessados em problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas. Hoje Eratóstenes é lembrado especialmente por produzir a mais notável medida da Terra da Antiguidade.

Durante a segunda metade do segundo século a.C. surgiu uma marco na história da trigonometria, o astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180-125 a.C.), que ganhou o direito de ser chamado "o pai da trigonometria". Hiparco foi o que melhor calculou a tabela com os valores das cordas de uma série de ângulos de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir o círculo de  $360^\circ$ , mas deve-se em grande parte a Hiparco através de sua tabela de cordas. Como Hiparco fez sua tabela não se sabe, pois suas obras se perderam.

Além disso, Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. Ptolomeu escreveu a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade. Surgida no século dois d.C., em Alexandria, a *Syntaxis matemática* era composta de treze livros. Devido às frequentes referências como *me-giste*, ela ficou conhecida mais tarde na Arábia de *Almagesto*, que significa em árabe "o maior" e é por este nome que a obra de Ptolomeu de Alexandrina é conhecida a partir de então.

O *Almagesto* de Ptolomeu, é uma obra baseada nos estudo do astrônomo e matemático Hiparco e felizmente sobreviveu aos estragos do tempo e por isso temos não só as tabelas trigonométricas mas também uma exposição dos métodos usados nas

construções, o que é de grande importância, visto que muitos documentos daquela época se perderam. De importância central para o cálculo das cordas de Ptolomeu era uma proposição geométrica ainda hoje conhecida como "teorema de Ptolomeu", que entre os casos deste teorema, leva ao resultado  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ ,  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$  e ao par análogo  $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ . Foi a fórmula para o seno da diferença - ou, mais precisamente, corda da diferença - que Ptolomeu achou especialmente útil ao construir suas tabelas.

No século IV da nossa era, houve uma crise na Europa Ocidental com as invasões dos bárbaros germânicos e com a queda do Império Romano. O centro da cultura começou a se deslocar para Índia, que revolucionou a trigonometria com um conjunto de textos denominados Siddhanta, que significa sistemas de Astronomia. O que chegou até nós foi o Surya Siddhanta, que quer dizer Sistema do Sol escrito aproximadamente 400 d.C., escrito em versos e sânscrito, é o único que parece ter-se preservado completamente. Os hindus diziam que o autor da obra foi o Surya, o deus do Sol. Foi de grande importância esta obra para nós, pois ao passo que a trigonometria de Ptolomeu se baseava na relação entre as cordas de um círculo e os ângulos centrais que subentendem, os autores dos Siddhantas converteram isto em um estudo da correspondência entre metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo central correspondente.

Com isso, aparentemente nasceu na Índia, a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos seno de um ângulo, e a introdução desta função representa a contribuição mais importante dos Siddhantas à história da matemática. Não há dúvidas que é dos hindus, e não dos gregos, que deriva nosso uso da metade da corda, e o termo "seno", que por acidente de tradução, provém da palavra *jiva*.

Na Arábia houve dois tipos de influência nos estudos da trigonometria: a geometria grega das cordas, como é encontrada no Almagesto e as tabelas hindus de seno, derivadas através dos Siddhantas. Mas, todo o estudo da trigonometria árabe foi baseado na função seno do sistema hindu. Na realidade, foi também através dos árabes, não diretamente dos hindus, que esta trigonometria do seno chegou à Europa. A astronomia de Al-Battani (cerca de 850-929), conhecido na Europa com Albategnius, serviu de veículo primário para esta transmissão. Um século depois, aparece Abre'l-Wefa também fez uma nova tabela de senos para ângulos diferentes, diferindo por  $(1/4)^\circ$ , usando o equivalente de oito casas decimais.

O matemático europeu de grande habilidade do século XIII foi Fibonacci (cerca de 1180-1250). Ele estudou no norte da África e depois viajou pelo Oriente como mercador, com isso sofreu grande influência dos árabes. Em 1220, Fibonacci escreveu "*Practica geometria*", esta obra e as obras de Bradwardine continham alguns elementos de trigonometria recolhidos dos árabes. Mas, foi só quando apareceu o matemático mais influente do século XV, Regiomontanus (1436-1476) que começou a escrever sua obra "*De triangulis*" que a Europa adquiriu mais resistência nesse campo. O trabalho desse matemático estabeleceu a trigonometria como uma ciência independente da astronomia.

O primeiro trabalho impresso em trigonometria provavelmente foi a "*Tabulae directionum*" de Regiomontanus, publicado em Nuremberg em 1490, "*De triangulis*" só apareceu impresso em 1533.

Nicolau Copérnico (1473-1543) escreveu um trabalho com o título "*De lateribus et angulis triangulorum*", com conteúdo semelhante ao do "*De triangulis*" de Regiomontanus, que foi publicado em 1542 por seu discípulo Rhaeticus (ou Rheticus 1514-1576). Com a combinação de suas ideias, e as ideias de Regiomontanus e Copérnico, Rheticus foi mais além. No tratado "*Opus palatinum de triangulis*" elaborado em dois volumes, a trigonometria atingiu a maioridade, o autor abandonou a tradicional consideração de funções relativas ao arco de círculo em vez disso concentrou-se nos triângulos retângulos, e também as seis funções trigonométricas agora foram completamente utilizadas através das tabelas.

François Viète (1540-1603) foi um matemático de grande importância, pois pode até ser chamado o pai de uma abordagem analítica generalizada para a trigonometria e o primeiro, a considerar a trigonometria como um ramo independente da Matemática. Foi o grande responsável pelo progresso no campo da Álgebra, por usar letras para representar coeficientes gerais.

No fim do século dezesseis e começo do século dezessete, havia um considerável entusiasmo pela trigonometria, e foi neste período que o nome "trigonometria" veio a ser dado ao assunto. Foi através de Bartholomeus Pitiscus (1561-1613) que usou como título de uma exposição publicada pela primeira vez em 1595. Logo após Pitiscus, veio John Napier que estabeleceu regras ligadas à trigonometria esférica, que foram amplamente aceitas.

O próximo importante passo em trigonometria foi dado pelo brilhante John Wallis (1616-1703) ao expressar fórmulas usando equações em vez de proporções, e por trabalhar com séries infinitas.

Isaac Newton (1642-1727) paralelamente com os seus estudos de cálculo infinitesimal, também deu sua contribuição à trigonometria, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido  $\arcsin x$  em séries e, por reversão, deduzindo a série para  $\sin x$ .

Sua forma atual se deve a Euler (1707-1783) que adota a medida do raio de um círculo como unidade e define as funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então. A função de Euler associa a cada número um ponto de um círculo unitário e centrado na origem do plano cartesiano.



# Capítulo 2

## Conceitos Preliminares

### 2.1 O Conceito de Ângulo

A noção de ângulo encontra-se rigorosamente caracterizada na obra de Euclides, matemático e geômetra da antiguidade, chamada **Os Elementos**. Esta obra encontra-se dividida em treze livros. A oitava definição presente no primeiro livro é precisamente a definição de ângulo plano.

**Definição 2.1** Uma *semirreta* é cada uma das partes em que uma reta fica dividida por um de seus pontos.

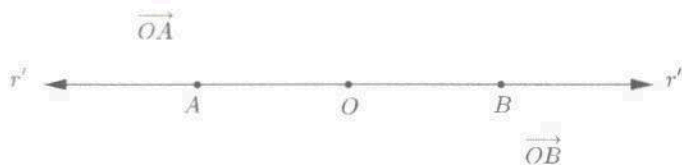


Figura 2.1: Semirreta

- $\overrightarrow{OA}$  a semirreta de origem em  $O$  que contém o ponto  $A$ .
- $\overrightarrow{OB}$  a semirreta de origem em  $O$  que contém o ponto  $B$ .

**Definição 2.2** Um *ângulo plano* é a reunião de duas semirretas distintas e de mesma origem.

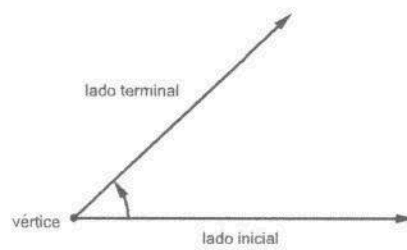
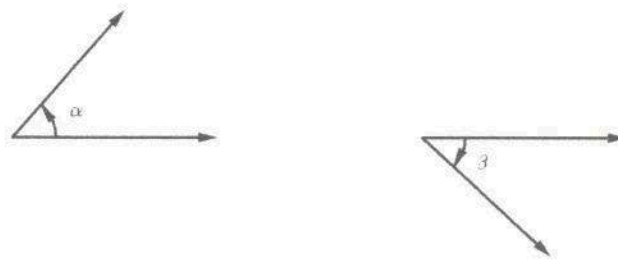


Figura 2.2: Ângulo Plano

Basicamente o conceito de ângulo mede a **inclinação** relativa de duas retas que se intersectam.

Diz-se que a rotação plana de uma reta em torno de um ponto descreve um **ângulo positivo** se a rotação se verificar no sentido anti-horário. Se a rotação se verificar no sentido horário o **ângulo descrito diz-se negativo**.

Figura 2.3: Ângulo  $\alpha$  (positivo) e  $\beta$  (negativo)

A magnitude de um ângulo pode ser expressa seja em graus ou em radianos. Um ângulo de medida em **graus**,  $1^\circ$  corresponde a  $\frac{1}{360}$  de uma revolução completa na direção anti-horária. Um **minuto** ( $1'$ ) é  $\frac{1}{60}$  de um grau, e um segundo ( $1''$ ) é  $\frac{1}{60}$  de um minuto.

Quando através de uma rotação plana, em sentido anti-horário, de uma **reta orientada** em torno de um seu ponto, esta volta pela primeira vez à posição inicial o ângulo descrito é igual a  $360^\circ$  (trezentos e sessenta graus).

Figura 2.4: Ângulo  $\alpha = 360^\circ$

Para definir um radiano, consideremos o **círculo unitário**  $S^1$  com centro na origem de um sistema retangular de coordenadas, e seja  $\theta$  um ângulo na posição padrão.

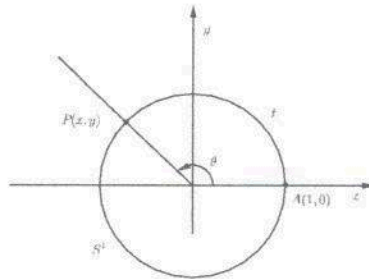


Figura 2.5: Círculo unitário  $S^1$

Fazendo o eixo- $x$  rodar até coincidir com o lado terminal de  $\theta$ , seu ponto de intersecção com  $S^1$  percorre uma certa distância  $t$  até chegar a sua posição final  $P(x, y)$ . Se  $t$  é considerado positivo para uma rotação anti-horária e negativo para uma rotação horária, então  $\theta$  é um ângulo de  $t$  radianos, e escrevemos  $\theta = t$ . Na figura (2.5)  $t$  é comprimento do arco  $\widehat{AP}$ . Se  $\theta = 1$ . (isto é, se  $\theta$  é um ângulo de 1 radiano), então o comprimento do arco  $\widehat{AP}$  em  $S^1$  é 1. (Vê fig. 2.6):

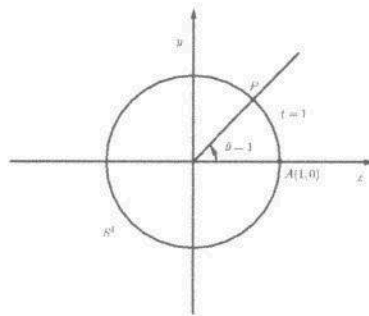


Figura 2.6: Comprimento do arco  $\widehat{AP}$

Como a circunferência do círculo unitário é  $2\pi$ . Segue-se que

$$2\pi \text{ radianos} = 360^\circ.$$

Esse fato nos dá as seguintes relações:

$$1rd = \left(\frac{180}{\pi}\right) \approx 57^\circ 17' 44,8''; \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}rd \approx 0,01745rd$$

Quando se dá a medida em radianos, não se indica unidade.

Se a rotação plana da reta anterior descreve apenas  $180^\circ$  ou  $\pi$  radianos a reta fica disposta na mesma direção embora com uma **orientação oposta**. É habitual designar este ângulo por ângulo **raso**.

Se a rotação plana da reta em questão descrever  $90^\circ$  ou  $\frac{\pi}{2}$  radianos, o ângulo descrito diz-se **reto**.

Denominamos **ângulo agudo** a todo ângulo menor que o ângulo reto. A medida de um ângulo agudo é, portanto, sempre menor que  $90^\circ$ .

Denominamos **ângulo obtuso** a todo ângulo maior que o ângulo reto. A medida de um ângulo obtuso é, portanto, sempre maior que  $90^\circ$ .

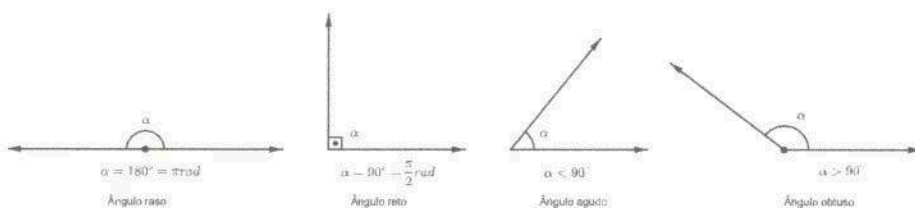


Figura 2.7: Ângulos

Um **ângulo central** de um círculo é um ângulo  $\theta$  cujo vértice coincide com o centro do círculo.

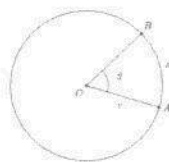


Figura 2.8: Ângulo Central

Dizemos então que o arco  $\widehat{AB}$  subtende o ângulo  $\theta$  ou que  $\theta$  é subtendido por  $\widehat{AB}$ . Dá-se a seguir a relação entre o comprimento  $s$  de  $\widehat{AB}$ , a medida em radianos de  $\theta$  e o raio do círculo  $r$ .

**Teorema 2.1** *Se um arco de comprimento  $s$  num círculo de raio  $r$  subtende um ângulo central de medida  $\theta$  em radianos, então*

$$s = r\theta$$

UFCCG/BIBLIOTECA

**Demonstração:** Se  $s_1$  é o comprimento de qualquer outro círculo, e se  $\theta_1$  é a medida em radianos do ângulo central correspondente, então, pela geometria plana, a razão dos arcos é a mesma que a razão das medidas angulares; isto é,  $\frac{s}{s_1} = \frac{\theta}{\theta_1}$ , donde  $s = \frac{s_1 \theta}{\theta_1}$ . Se consideramos o caso especial em que  $\theta_1 = 2\pi$ , então  $s_1 = 2\pi r$  e obtemos  $s = \frac{2\pi r \theta}{(2\pi)} = r\theta$ . □

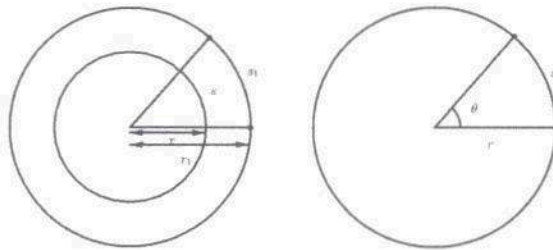


Figura 2.9:

**Teorema 2.2** Se  $\theta$  é a medida em radianos de um ângulo central de um círculo de raio  $r$  e se  $A$  é a área do setor circular definido por  $\theta$ , então

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

**Demonstração:** A figura exibe um ângulo típico e o correspondente setor circular. Se  $\theta$  é qualquer outro ângulo central e  $A_1$  a área do setor correspondente, então, pela geometria plana,  $\frac{A}{A_1} = \frac{\theta}{\theta_1}$  ou  $A = \frac{A_1 \theta}{\theta_1}$ . Considerando o caso especial  $\theta_1 = 2\pi$  então  $A_1 = \pi r^2$  e  $A = \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$ . □

## 2.2 Propriedades de Triângulos Planos

**Definição 2.3** O conjunto constituído por dois pontos  $A$  e  $B$  e por todos os pontos que se encontram entre  $A$  e  $B$  é chamado **segmento**  $AB$ . Os pontos  $A$  e  $B$  são denominados **extremos** ou **extremidade** de segmento.



Figura 2.10: Segmento de reta  $AB$

Indicaremos o comprimento do segmento  $AB$  pelo o símbolo  $\overline{AB}$ .

**Definição 2.4** Diremos que dois segmentos  $AB$  e  $CD$  são congruentes quando  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ; diremos que dois ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  são congruentes se eles têm a mesma medida.

Para simplificar ao máximo a notação, iremos utilizar o símbolo " $=$ " para significar **congruente**. Assim,  $AB = CD$  deve ser lido como  $AB$  é congruente a  $CD$  e  $\widehat{A} = \widehat{B}$  deve ser lido como ângulo  $\widehat{A}$  congruente ao ângulo  $\widehat{B}$ .

**Definição 2.5** Dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares, chama-se **triângulo**  $ABC$  a reunião dos segmentos  $AB$ ,  $BC$ , e  $CA$ .

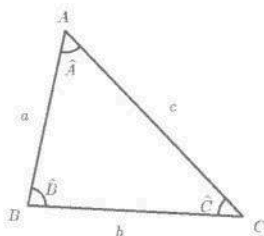


Figura 2.11: Triângulo plano

Num triângulo  $ABC$ , os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são chamados **vértices**, e os segmentos  $AB$  (de medida  $a$ ),  $BC$  (de medida  $b$ ) e  $CA$  (de medida  $c$ ) são chamados **lados** do triângulo.

Os ângulos  $\widehat{BAC}$  (ou  $\widehat{A}$ ),  $\widehat{ABC}$  (ou  $\widehat{B}$ ) e  $\widehat{ACB}$  (ou  $\widehat{C}$ ) são chamados **ângulos internos**.

No caso em que  $a = b = c$  o triângulo diz-se **equilátero**; se tiver dois lados iguais e um diferente diz-se um **triângulo isósceles** e se tiver os lados diferentes o triângulo diz-se **escaleno**. No caso em que um dos ângulos internos do triângulo é reto ( $90^\circ = \frac{\pi}{2} rad$ ), o triângulo diz-se **retângulo**.

A Figura (2.12) representa um triângulo retângulo, onde o ângulo reto se encontra assinalado.

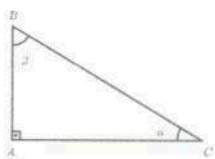


Figura 2.12: Triângulo retângulo

Observe que o triângulo ilustrado, apresenta mais dois ângulos internos aqui denotados pelas letras gregas  $\alpha$  e  $\beta$ . As letras  $a$ ,  $b$  e  $c$  representam respectivamente o comprimento dos diferentes lados do triângulo. O lado oposto ao ângulo que é reto designa-se por **hipotenusa**. Os lados adjacentes ao ângulo reto, são chamados de **catetos**.

**Definição 2.6** *Dois triângulos são **congruentes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Se  $ABC$  e  $EFG$  são dois triângulos congruentes e se  $A \leftrightarrow E$ ,  $B \leftrightarrow F$  e  $C \leftrightarrow G$  é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes;

$$AB = EF \quad BC = FG \quad AC = EG$$

$$\widehat{A} = \widehat{E} \quad \widehat{B} = \widehat{F} \quad \widehat{C} = \widehat{G}$$

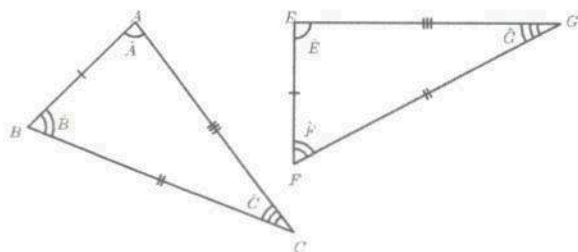


Figura 2.13: Triângulo congruentes

Escreveremos  $ABC = EFG$  para significar que os triângulos  $ABC$  e  $EFG$  são congruentes e que a congruência leva  $A$  em  $E$ ,  $B$  em  $F$  e  $C$  em  $G$ .

Uma das importantes propriedades dos triângulos planos que interessa assinalar, pelo seu alcance, é a que caracteriza a soma dos ângulos internos.

**Proposição 2.1** *A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é  $180^\circ$ .*

**Demonstração:** Considere um triângulo  $ABC$  e observe seus ângulos,  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  (Figura 2.14).

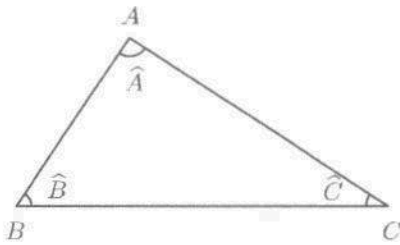


Figura 2.14:

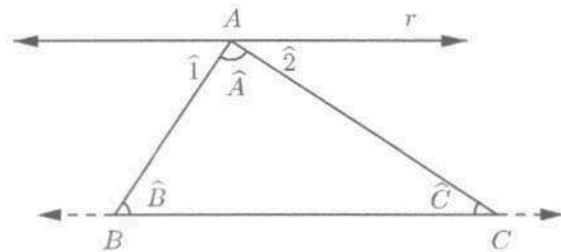


Figura 2.15:

Pelo vértice  $A$ , vamos traçar uma reta  $r$  paralela ao lado  $BC$  e observar os ângulos  $\widehat{1}$  e  $\widehat{2}$  (Figura 2.15)

Do paralelismo de  $r$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , considerando-se a transversal  $\overleftrightarrow{AB}$ , decorre que:

$$\widehat{1} = \widehat{B}$$

Do paralelismo de  $r$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , considerando-se a transversal  $\overleftrightarrow{AC}$ , decorre que:

$$\widehat{2} = \widehat{C}$$

Substituindo  $\widehat{1}$  por  $\widehat{B}$  e  $\widehat{2}$  por  $\widehat{C}$ , temos:

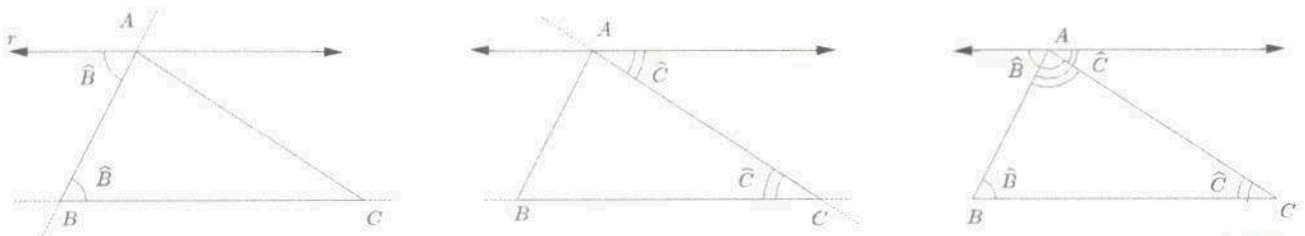


Figura 2.16:

Observando o triângulo da direita e somando os ângulos que têm vértice em  $A$ , concluímos que:  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \text{ângulo raso}$  □





Note que o resultado enunciado só é válido no contexto da geometria Euclidiana, isto é nas geometrias que satisfazem, entre outros, o *V* axioma (da geometria) de Euclides. Este axioma estabelece que por um ponto exterior a uma reta, existe uma e uma só reta paralela à reta dada. Observe-se que este fato esteve por trás dos argumentos apresentados na demonstração.

Existem efetivamente outras geometrias, conhecidas por geometrias não-Euclidianas, igualmente úteis em que o correspondente enunciado é distinto. Como exemplos de geometrias não-Euclidianas que não satisfazem este enunciado podemos referir a geometria dos triângulos esféricos (utilizada na navegação marítima e aérea) e a geometria de Lobachevsky (com aplicações em cosmologia).

## Semelhança de Triângulos

Suponha que a partir dos lados  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  de comprimento  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ , de um dado triângulo  $A$ , construímos um novo triângulo  $B$ , cujos lados tem comprimentos  $b_1 = ra_1$ ,  $b_2 = ra_2$  e  $b_3 = ra_3$ , em que  $r$  representa um número real qualquer estritamente positivo.

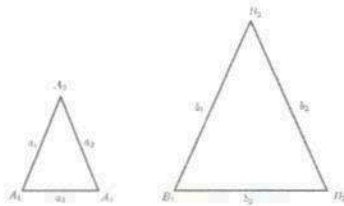


Figura 2.17: Triângulos semelhantes

Nestas circunstâncias, o triângulo  $B$  diz-se **semelhante** ao triângulo  $A$  e os lados  $A_i$  e  $B_i$  com  $1 \leq i \leq 3$  dos triângulos  $A$  e  $B$ , dizem-se **homólogos**.

**Definição 2.7** *Sejam  $A$  e  $B$  dois triângulos com lados  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ , e comprimentos  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$ , respectivamente. Se existir uma constante de proporcionalidade  $r > 0$  tal que*

$$b_i = ra_i$$

*com  $1 \leq i \leq 3$ , então o triângulo  $B$  diz-se **semelhante** a  $A$ .*

Podemos afirmar, com um pequeno abuso de linguagem que triângulos semelhantes são proporcionais entre si.

A propriedade seguinte permite-nos reconhecer triângulos semelhantes recorrendo à noção de ângulo interno.

**Proposição 2.2** *Dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos correspondentes congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

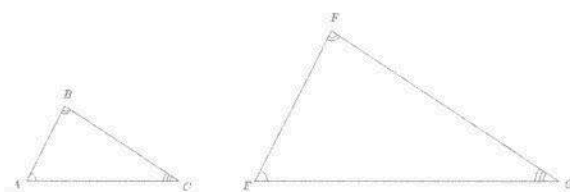


Figura 2.18: Triângulos semelhantes

Com isto queremos dizer que, se  $ABC$  e  $EFG$  são triângulos semelhantes e se  $A \rightarrow E$ ,  $B \rightarrow F$  e  $C \rightarrow G$  é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{E} \\ \widehat{B} = \widehat{F} \\ \widehat{C} = \widehat{G} \end{array} \right. \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondente é chamado de **razão de proporcionalidade** entre os triângulos.

Observe que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade um; inversamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade um, são congruentes.

Os triângulos planos, na geometria Euclidiana, possuem algumas propriedades que importa referir pela sua utilidade.

**Teorema 2.3** (Teorema de Pitágoras) *O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

**Demonstração:** Dado um triângulo retângulo  $ABC$  de cateto  $b$  e  $c$  e hipotenusa  $a$ .

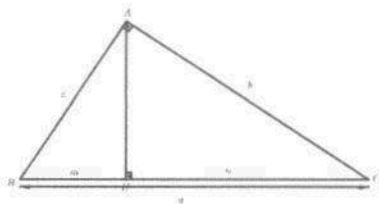


Figura 2.19:

A altura  $AH$ , relativa à base  $BC$ , dividi esse triângulo em dois outros:  $BHA$  e  $CHA$ .

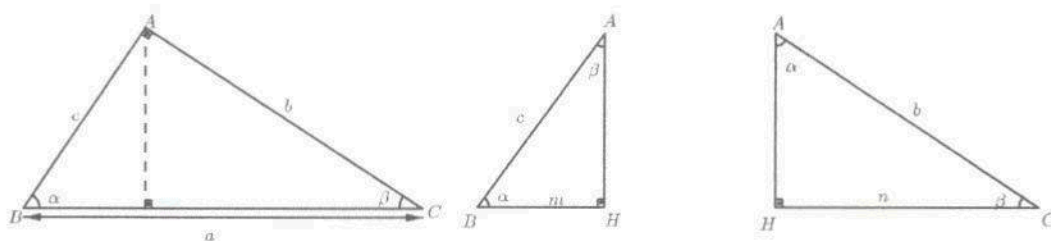


Figura 2.20:

Como os ângulos agudos de um triângulo retângulo somam  $90^\circ$ , segue que os triângulos retângulos  $ABC$ ,  $HBA$  e  $HAC$  possuem os mesmos ângulos, logo são semelhantes.

Da semelhança  $\triangle ABC = \triangle HBA$  obtemos

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BH} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = ma.$$

Da semelhança  $\triangle ABC = \triangle HAC$  obtemos

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = na$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= na + ma \\ &= (n + m)a = a \cdot a = a^2 \end{aligned}$$

□

## Capítulo 3

# Funções Trigonômicas

As funções trigonométricas, sobretudo o seno e cosseno, são muito importantes, tanto em matemática como em campos variados da ciência, como Acústica, Astronomia, Economia ou Medicina.

### 3.1 As Funções Trigonômicas do Ângulo Agudo

Considerando um ângulo agudo  $\widehat{AOB} = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  e traçando, a partir dos  $A_1, A_2, A_3$  etc., da semi-reta  $OA$ , perpendiculares  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$  etc., à semi-reta  $OB$ .

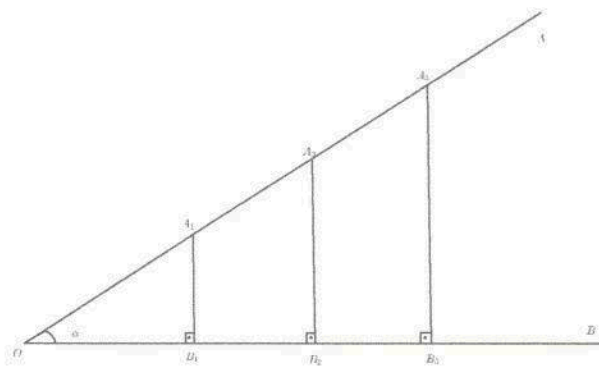


Figura 3.1:

Os triângulos  $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3$  etc., são semelhantes por terem os mesmos ângulos agudos. Então:

UFCG / BIBLIOTECA

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \dots$$

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \dots$$

Verificamos que as relações acima não dependem do tamanho dos triângulos  $\triangle OB_1A_1$ ,  $\triangle OB_2A_2$ ,  $\triangle OB_3A_3$ , ..., mas dependem apenas do valor do ângulo  $\alpha$ .

Desta forma, torna-se possível associar univocamente a cada ângulo  $\alpha$  de um triângulo, qualquer um daqueles quocientes. É desta forma que as funções seno, cosseno podem ser definidas de forma elementar. Estas funções associam números reais a ângulos.

Definiremos então as funções seno e cosseno para  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Considere-se um triângulo retângulo qualquer tal que  $\alpha$  é o ângulo definido pela hipotenusa e um dos catetos.

**Definição 3.1** A função seno, designada **seno de**  $\alpha$ , define-se como sendo o quociente entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  e o comprimento da hipotenusa, isto é:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

**Definição 3.2** A função cosseno, designada **cosseno de**  $\alpha$ , define-se como sendo o quociente entre o comprimento do cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$  e o comprimento da hipotenusa, isto é:

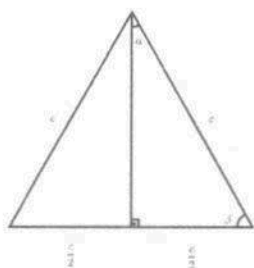
$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Estas funções são chamadas **funções trigonométricas** e não são independentes.

**Exemplo 3.1.1** Determine o valor da função seno de  $\alpha$  supondo que  $\alpha$  tem o valor de  $0$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{2}$  radianos.

**Solução:** Começamos por observar que quando  $\alpha$  tem o valor de  $0$  radianos o seu cateto oposto tem um comprimento nulo. Desta forma  $\sin 0 = \frac{0}{c} = 0$ .

Quando ao valor da função seno quando  $\alpha$  tem o valor de  $\frac{\pi}{6}$  radianos, consideremos o triângulo equilátero.

Figura 3.2: Determinação de  $\frac{\pi}{6}$ 

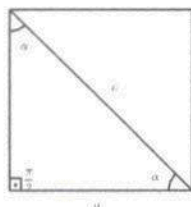
Traçamos a altura (que também é mediana e bissetriz). Como sabemos a soma dos ângulos internos de um qualquer triângulo plano e igual a  $\pi$  radianos. Assim, os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais a  $\beta = \frac{\pi}{3}$ . Desta forma, no triângulo da figura  $\alpha = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ . Donde se deduz, atendendo à definição de seno,

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, deduz-se também, atendendo ao Teorema de Pitágoras, que

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{c^2 - (\frac{c}{2})^2}}{c} = \frac{\sqrt{\frac{3c^2}{4}}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Consideremos, agora, o quadrado de lado  $a$ , seguinte:

Figura 3.3: Determinação de  $\sin \frac{\pi}{4}$ 

Naturalmente  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Donde, atendendo à definição de seno

$$\frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente, observe que quando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , o comprimento do cateto oposto torna-se igual ao comprimento da hipotenusa. Assim,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ .  $\square$

Em resumo obtemos a Tabela 3.1:

| ângulo          | seno                 |
|-----------------|----------------------|
| 0               | 0                    |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1                    |

Tabela 3.1: seno de alguns ângulos entre 0 e  $\frac{\pi}{2}$

## Relação entre o Seno e o Cosseno

As funções seno e cosseno encontra-se diretamente relacionadas. Consideremos novamente um triângulo retângulo.

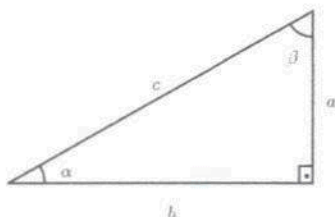


Figura 3.4: Triângulo retângulo

**Proposição 3.1** *Se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares ( $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ), então  $\sin \alpha = \cos \beta$  (o cosseno de um ângulo é o seno do ângulo complementar).*

**Demonstração:** Por definição

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad e \quad \cos \beta = \frac{a}{c}.$$

Por outro lado se  $\alpha$  e  $\beta$  representam os ângulos internos adjacentes a hipotenusa então

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

donde

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Isto é,

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Por outro lado, se na expressão anterior fizermos

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

então

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

O que nos permite obter a expressão equivalente

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta.$$

□

Estas importantes expressões permitem-nos obter o seno ou o cosseno de um ângulo  $\alpha$  se conhecermos, respectivamente, o cosseno ou o seno do ângulo  $\frac{\pi}{2} - \alpha$

**Exemplo 3.1.2** *Determine o valor da função cosseno de  $\beta$  que tem o valor de  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{2}$  radianos.*

**Solução:** Sabemos que

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Então, atendendo à Tabela (3.1), temos sucessivamente

$$\begin{aligned} \cos 0 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\ \cos \frac{\pi}{6} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{4} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \sin 0 = 0. \end{aligned}$$



Donde obtemos a Tabela

| ângulo          | cosseno              |
|-----------------|----------------------|
| 0               | 1                    |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0                    |

Tabela 3.2: cosseno de alguns ângulos entre 0 e  $\frac{\pi}{2}$

O Teorema de Pitagoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

aplicado ao triângulo retângulo  $OAB$ , retângulo em  $B$  e considerando um ângulo  $\alpha$  de vértice  $O$ , como mostra a figura abaixo. Fazendo  $\overline{OA} = a$ ,  $\overline{OB} = b$  e  $\overline{AB} = c$  nos dar o resultado imediato que:

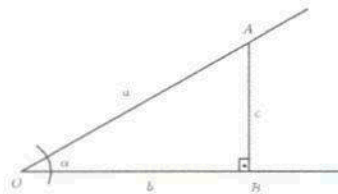


Figura 3.5: Triângulo retângulo em  $B$

$$\begin{aligned} (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donde pela notação, convém escrever  $\sin^2 \alpha$  e  $\cos^2 \alpha$  em vez  $(\sin \alpha)^2$  e  $(\cos \alpha)^2$ . Com isso, temos a relação fundamental.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

## 3.2 Extensões das Funções Trigonométricas

Seja  $\theta$  um ângulo qualquer, cujo vértice tomamos como centro comum a vários círculos. Então, os lados do ângulo interceptam, nesses círculos, os arcos  $\widehat{A_1B_1}$ ,  $\widehat{A_2B_2}$ ,  $\widehat{A_3B_3}$ , etc. Sabemos que a razão do arco pelo raio do círculo correspondente é constante.

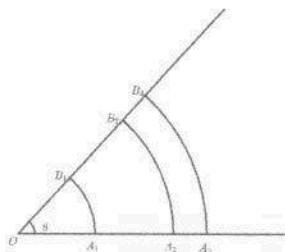


Figura 3.6:

$$\frac{\widehat{A_1B_1}}{OA_1} = \frac{\widehat{A_2B_2}}{OA_2} = \frac{\widehat{A_3B_3}}{OA_3} = \text{const.}$$

Esta razão dá a medida do ângulo em **radianos**; o ângulo de um radiano (1 rd) é aquele para o qual o raio  $OA$  é igual ao arco  $\widehat{AB}$ . Uma circunferência de raio  $r$  tem comprimento  $2\pi r$ , de forma que o ângulo de uma volta mede  $2\pi$  rd.

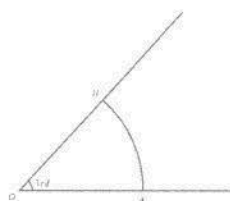


Figura 3.7:

### Circunferência Trigonométrica

No plano  $Oxy$  tomamos uma **circunferência unitária**, ou **círculo unitário**, e indicaremos com a notação  $S^1$ . Temos, portanto

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Daí, temos  $-1 \leq x \leq 1$  e  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $\forall (x, y) \in S^1$ .

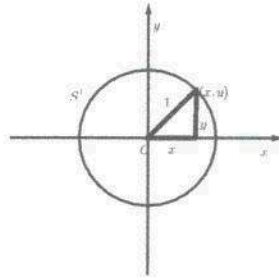


Figura 3.8: Círculo unitário

Dado um número real  $t$ , marcamos, sobre a circunferência, a partir do ponto  $A = (1, 0)$ , o arco  $\widehat{AP} = t$ . Se  $t$  é um número positivo, o arco é marcado sobre a circunferência no sentido anti-horário; se negativo, no sentido horário.

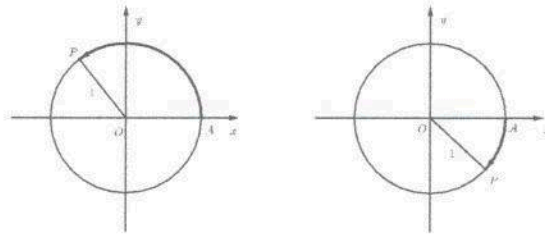


Figura 3.9:

Vamos definir a função  $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , que associa a cada número real um ponto  $P$  localizado na circunferência  $S^1$ , conforme ilustrado a seguir.

**Definição 3.3** A função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , que faz corresponder a cada número real  $t$  o ponto  $E(t) = (x, y)$  da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$
- quando  $t > 0$ , percorremos sobre a circunferência  $S^1$ , a parti do ponto  $(1, 0)$ , um caminho de comprimento  $t$ , sempre andando no sentido positivo. O ponto final do caminho será chamado  $E(t)$ .
- quando  $t < 0$ ,  $E(t)$  será a extremidade final de um caminho sobre  $S^1$ , de comprimento  $|t|$ , que parte do ponto  $(1, 0)$  e percorre  $S^1$  sempre no sentido negativo.

Na prática, a função de Euler consiste em "enrolar" a reta  $\mathbb{R}$  sobre a circunferência  $S^1$  de modo que o zero da reta coincida com o ponto  $A = (1, 0)$ , e que o sentido positivo da "reta enrolada" seja o sentido anti-horário.

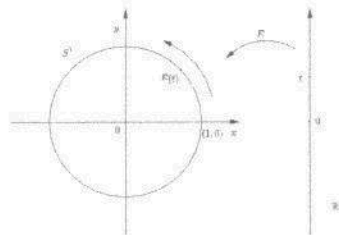


Figura 3.10:

Observe que se  $t > 0$  e  $t > 2\pi$ , será necessário dar mais de uma volta em  $S^1$ , no sentido positivo, para atingir  $E(t)$ ; uma observação análoga vale para o caso de ser  $t < 0$ . Seja como for,  $E(t)$  é um ponto bem definido de  $S^1$ . Por outro lado, dado um ponto  $P$  de  $S^1$ , ele é a imagem pela função  $E$  de uma infinidade de números reais, todos eles da forma

$$t + 2k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots, 0 \leq t \leq 2\pi$$

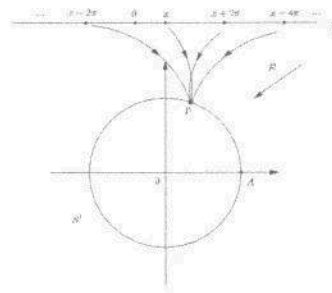


Figura 3.11:  $\widehat{AP} = t + 2k\pi$

A expressão  $t' = t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  é a **expressão geral** das medidas dos arcos  $\widehat{AP}$ , de mesma extremidade  $P$ , denominados **arcos cômgruos**.

**Proposição 3.2** Se  $E(t') = E(t)$  se, e somente se,  $t' = t + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Demonstração:** Cada vez que o ponto  $t$  descreve na reta um intervalo de comprimento  $l$ , sua imagem  $E(t)$  percorre sobre a circunferência  $S^1$  um arco de igual comprimento  $l$ . Em particular, como a circunferência unitária  $S^1$  tem comprimento igual a  $2\pi$ , quando

o ponto  $t$  descreve um intervalo de comprimento  $2\pi$ , sua imagem  $E(t)$  dá uma volta completa sobre  $S^1$ , retornando ao ponto de partida. Assim sendo, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , tem-se  $E(t+2\pi) = E(t)$  e, mais geralmente, para todo  $k \in \mathbb{Z}$  tem-se  $E(t+2k\pi) = E(t)$  seja qual for  $t \in \mathbb{R}$

Reciprocamente, se  $t < t'$  em  $\mathbb{R}$  são tais que  $E(t) = E(t')$  isto significa que, quando um ponto  $s$  da reta de  $t$  a  $t'$  sua imagem  $E(s)$  se desloca sobre  $S^1$ , no sentido positivo, partindo de  $E(t)$ , dando um número inteiro  $k$  de voltas e retornando ao ponto de partida  $E(t') = E(t)$ . A distância total percorrida é igual a  $2k\pi$ , logo  $t' = t + 2k\pi$ , pois o comprimento do caminho por  $E(s)$  é, por definição, igual a distância percorrida por  $s$  sobre a reta.  $\square$

As figuras abaixo deixam claro que se  $E(t) = (x, y)$  então  $E(t + \pi) = (-x, -y)$ ,  $E(t + \frac{\pi}{2}) = (-y, x)$ ,  $E(-t) = (x, -y)$  e  $E(\frac{\pi}{2} - t) = (x, x)$

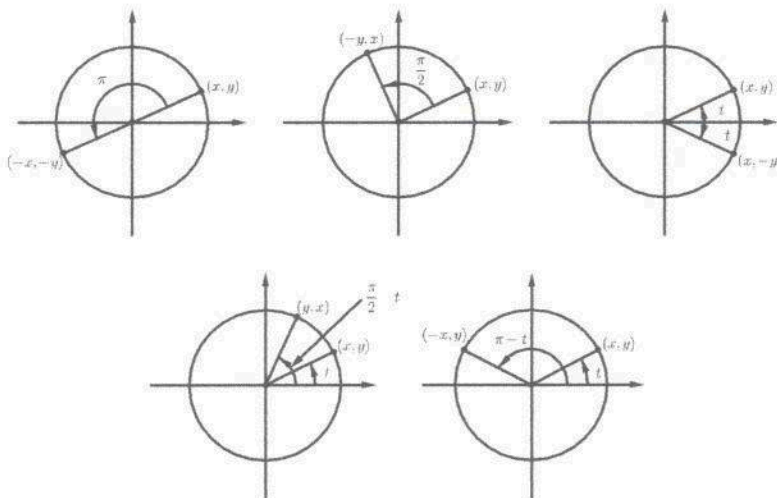


Figura 3.12:

Estas relações exprimem certas simetrias da função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , que se traduzem em propriedades das funções seno e cosseno.

### 3.3 As Funções Seno e Cosseno

**Definição 3.4** As funções  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , chamadas **função cosseno** e **função seno** respectivamente, são definidas pondo-se, para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

$$E(t) = (\cos t, \sin t)$$

UFCCG / BIBLIOTECA

Noutras palavras,  $x = \cos t$  e  $y = \sin t$  são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto  $E(t)$  da circunferência unitária.

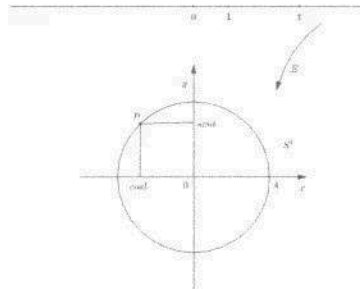


Figura 3.13:  $E(t) = P, m\widehat{AP} = t$

É claro que esta definição coincide com a anterior quando  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ .

Além disso permite escrever  $\cos 0 = 1$  e  $\sin 0 = 0$  (quando  $P = A$ ),  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  e  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  (quando  $\widehat{AOP}$  é reto). Como  $P$  está na circunferência unitária, o teorema de Pitágoras nos dá uma das identidade trigonométricas fundamentais:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

**Definição 3.5** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita periódica quando existir um número  $T \neq 0$  tal que  $f(t + T) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$ . Se isto ocorre, então  $f(t + kT) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $k \in \mathbb{Z}$ . O menor número positivo de  $T$  tal que  $f(t + T) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  é chamado de período da função  $f$ .

**Teorema 3.1** As funções seno e cosseno são periódicas, de período  $2\pi$ .

De fato, para todo  $k$  inteiro, e para todo  $t$  real,  $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$  e  $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$  isso porque  $E(t + 2k\pi) = E(t)$ . Assim, estas funções são periódicas e seu período  $T$  corresponde ao menor valor de  $2k\pi$ , que é  $2\pi$ .

O gráfico da função  $y = \sin t$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  é exatamente o mesmo em qualquer intervalo da forma  $[2k\pi, 2(k + 1)\pi]$ . Assim podemos particularizar o estudo destas funções ao intervalo  $[0, 2\pi]$  que corresponde ao estudo das coordenadas de um ponto que dá exatamente uma volta em  $S^1$ .

UFCCV BIBLIOTECA

**Definição 3.6** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é **par** quando se tem  $f(-t) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se tem  $f(-t) = -f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , a função  $f$  chama-se **ímpar**.

Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos

$$E(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$E(-t) = (\cos(-t), \sin(-t))$$

Mas, quando  $E(t) = (x, y)$  tem-se  $E(-t) = (x, -y)$ . Isto significa que

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Assim, cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar.

Através das figuras abaixo podemos verificar, como base na interpretação do círculo trigonométrico estas propriedades.

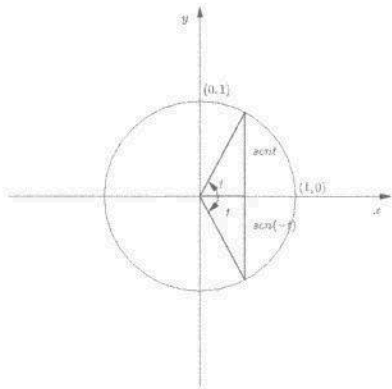


Figura 3.14:  $\sin(t) = -\sin(-t)$

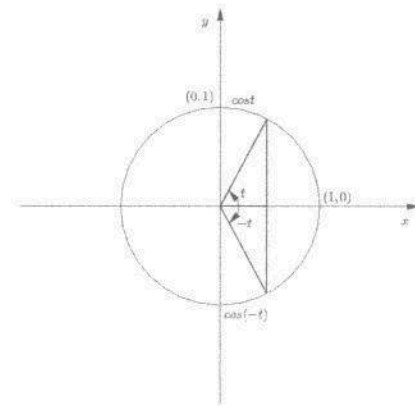


Figura 3.15:  $\cos(t) = \cos(-t)$

De modo análogo, as outras quatro relações estabelecidas mostram que, para todo  $t \in \mathbb{R}$  valem:

$$\cos(t + \pi) = -\cos(t), \quad \sin(t + \pi) = -\sin(t)$$

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t), \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$$

$$\cos(\pi - t) = -\cos(t), \quad \sin(\pi - t) = \sin(t)$$

As funções cosseno e seno, como coordenadas de um ponto, têm sinais que dependem do quadrante em que se encontram (figura 3.16). É possível determinar o valor do seno e do cosseno, em qualquer quadrante, conhecendo os valores do primeiro.

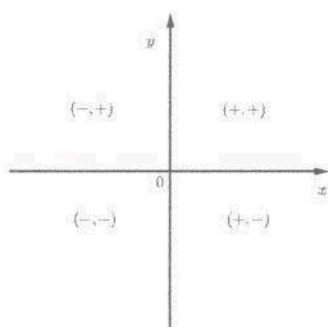


Figura 3.16:

Consideremos separadamente os casos em que a extremidade  $P$  do arco  $AP$  está no segundo, terceiro ou quarto quadrante.

- a)  $t$  está no segundo quadrante, isto é,  $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ . Traçando por  $P$  uma reta  $r$  paralela ao eixo das abscissas que intersecta novamente  $S'$  em  $B'$  (figura 3.17).

Temos que  $m\widehat{AP'} = m\widehat{P'A'} = \pi - t$  e portanto

$$\sin(t) = \sin(\pi - t) \quad \text{e} \quad \cos(t) = -\cos(\pi - t)$$

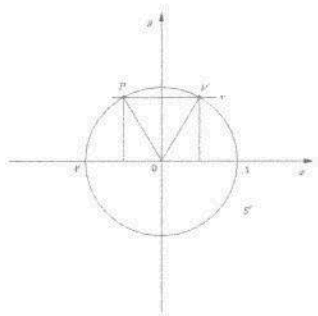


Figura 3.17:  $m\widehat{AP} = t$



- b)  $t$  está no terceiro quadrante, isto é,  $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$ . Tomando como  $r$  a reta que liga  $O$  a  $P$  (figura 3.18). Temos que  $m\widehat{AP'} = m\widehat{PA'} = t - \pi$  e obteremos  $\sin(t) = -\sin(t - \pi)$  e  $\cos(t) = -\cos(t - \pi)$

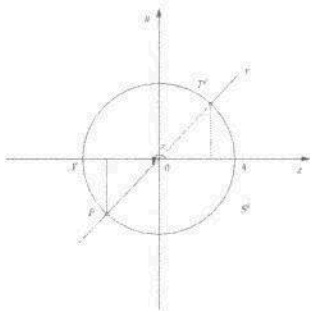


Figura 3.18:  $m\widehat{AP} = t$

- c)  $t$  está no quarto quadrante, isto é,  $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ . Tomando como  $r$  uma paralela ao eixo das ordenadas passando por  $P$  (figura 3.19). Obteremos  $m\widehat{AP} = 2\pi - t$  e  $\sin(t) = -\sin(2\pi - t)$  e  $\cos(t) = \cos(2\pi - t)$

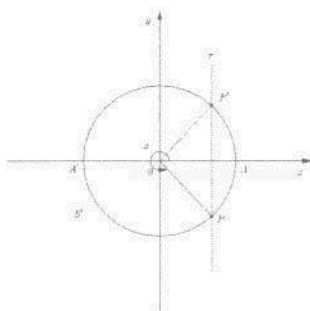


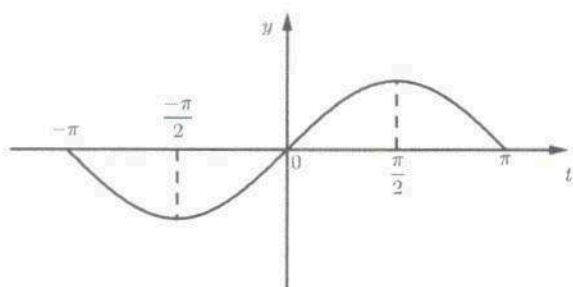
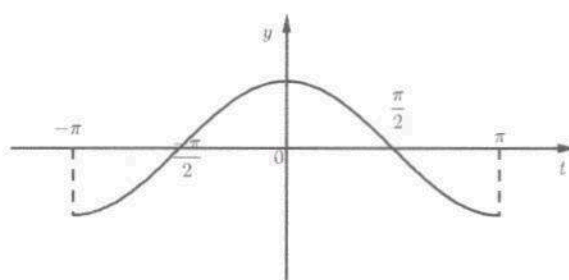
Figura 3.19:  $m\widehat{AP} = t$

## Gráficos das Funções Seno e Cosseno

À medida que o ponto  $P$  se move sobre a circunferência, tanto sua abscissa como sua ordenada variam, mantendo-se, em valor absoluto, nunca superior ao raio da circunferência, que é igual a 1. Isso significa que, para todo  $t$ , temos sempre.

$$-1 \leq \sin t \leq 1, \quad -1 \leq \cos t \leq 1.$$

O seno cresce de 0 a 1, à medida que  $t$  varia de 0 a  $\frac{\pi}{2}$  e o cosseno descreve de 1 a 0; quando  $t$  varia de  $\frac{\pi}{2}$  a  $\pi$ , o seno descreve de 1 a 0 e o cosseno decresce de 0 a  $-1$ .

Figura 3.20:  $\sin t$ Figura 3.21:  $\cos t$ 

Vemos diretamente das definições, que o seno é uma função ímpar e o cosseno é par, isto é:

$$\sin(-t) = -\sin t, \quad \cos(-t) = \cos t;$$

portanto, os gráficos anteriores se estendem ao intervalo  $-\pi \leq t \leq 0$ , como indica a figura.

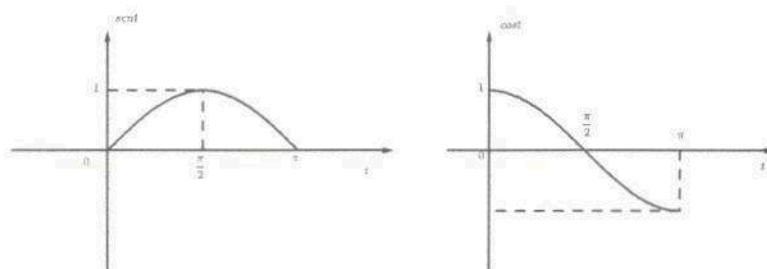


Figura 3.22:

Ainda da definição podemos verificar que essas funções são periódicas, de período  $2\pi$ , vale dizer,

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

Isso nos permite obter os gráficos das funções em toda a reta por repetidas translações de magnitude  $\pm 2\pi$ .

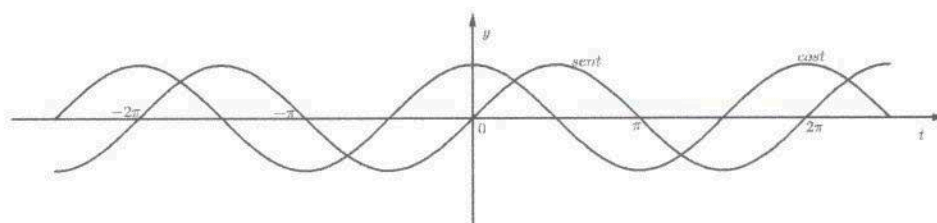


Figura 3.23:

Observando a figura, percebemos uma grande semelhança entre as duas curvas. Na realidade elas são idênticas. Esta curva, chamada **senóide** é a mesma em ambos os casos. O gráfico da função cosseno é apenas uma translação de  $\frac{\pi}{2}$  para a esquerda no gráfico da função seno.

Observe que a função  $\sin t$  está definida para todo número real  $t$ . O fato de  $t$  ser interpretado como medida de ângulo, em radianos, é apenas um recurso para definir o seno. Aliás, em análise há outras maneiras de definir essa função, sem qualquer referência a ângulos. O importante é ter sempre em mente que o argumento das funções trigonométricas é sempre um número puro, que pode ser interpretado como ângulo medido em radiano.

# Capítulo 4

## Aplicações de Funções

### Trigonométricas

De um modo geral as funções do tipo trigonométricas são escritas na forma

$$f(t) = a + b \cdot \text{trig}(ct + d)$$

em que  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  são constantes ( $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ ) e  $\text{trig}$  indica uma das funções trigonométricas, no nosso caso, usaremos as funções seno ou cosseno.

As funções do tipo  $f(t) = a + b \cdot \text{trig}(ct + d)$  têm características que podem ser relacionadas com as funções trigonométricas e seus gráficos padrões.

Vejamos o papel das constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$ .

As constantes  $a$  e  $b$  alteram a imagem da função (valores de  $y$ ), e as constantes  $c$  e  $d$  alteram as características relacionadas aos valores de  $x$  da seguinte forma:

- A constante  $a$  *translada* o gráfico padrão em  $a$  unidades verticais. Se  $a > 0$ , então o gráfico sobe  $a$  unidades, e, se  $a < 0$ , então o gráfico desce  $|a|$  unidades.
- A constante  $b$  *comprime* ou *dilata* o gráfico verticalmente. Se  $|b| > 1$ , então o gráfico *dilata*, e, se  $0 < |b| < 1$ , o gráfico *comprime*. Se  $b = -1$ , o gráfico fica invertido. Se  $b < 0$ , o gráfico fica simétrico (em relação ao eixo  $x$  ao original com  $b > 0$ ). O valor de  $b$  é, muitas vezes, chamado de *amplitude* do gráfico.
- A constante  $c$  altera o período padrão ( $P_{\text{trig}}$ ) da função  $\text{trig}$ , ou seja, *comprime* ou *dilata* o gráfico padrão na horizontal.

- Se  $|c| > 1$ ,  $f(x)$  será comprimido horizontalmente em  $|c|$  unidades.
- Se  $|c| < 1$ ,  $f(x)$  será dilatado horizontalmente em  $|c|$  unidades.

O novo período é dado por  $P_y = \frac{P_{trig}}{|c|}$ .

- A constante  $d$  translada o gráfico padrão em  $|\frac{d}{c}|$  unidades horizontais. Se  $d > 0$ , o gráfico translada  $|\frac{d}{c}|$  unidades para a direita, e, se  $d < 0$ , o gráfico translada  $|\frac{d}{c}|$  unidades para a esquerda.

Em particular, considerando

$$\cos t = a + b \sin(ct + d)$$

encontramos que

$$\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

## 4.1 Ciclo Cardíaco

Diversos fenômenos tendem a se repetir periodicamente, e são denominados fenômenos cíclicos. Um exemplo desses fenômenos, que ocorre em nosso organismo, é o ciclo cardíaco.

O ciclo cardíaco corresponde a uma sequência de eventos que ocorre durante um batimento do coração. Para uma pessoa cuja frequência cardíaca é de 80 batimentos por minutos, por exemplo, este ciclo ocorre a cada 0,8 segundos. Nos adultos um repouso, a frequência cardíaca geralmente está compreendida entre 60 e 100 batimentos por minuto.

Durante um ciclo cardíaco, os ventrículos contraem-se e logo em seguida relaxam. Quando os ventrículos se contraem, ocorre a sístole ventricular; quando relaxam, a diástole. No momento em que ocorre a contração ventricular, o sangue é empurrado contra as paredes arteriais e a força com que ele é ejetado exerce uma pressão nas artérias, que no pico da contração é chamada pressão sistólica. Já a menor pressão sanguínea nas artérias ocorre enquanto acontece o relaxamento do ventrículo é conhecida como pressão diastólica.

As pressões sistólica e diastólica correspondem àquelas que o médico informa ao paciente em uma consulta. Quando ele diz, por exemplo, que sua pressão está 12 por

8, isso significa que a pressão sistólica é de 120 mmHg (milímetros de mercúrio) e a diastólica é de 80 mmHg. Essas medidas fornecem informações importantes a respeito da saúde do indivíduo. Quando a pressão sistólica de uma pessoa é maior ou igual a 140 mmHg, e a diastólica é maior ou igual a 90 mmHg, ela apresenta tendência a desenvolver uma doença do coração e dos vasos sanguíneos chamada hipertensão, que pode contribuir para a ocorrência de insuficiência cardíaca, doença renais e infarto.

O melhor modelo para tal situação é dada por uma função trigonométrica do tipo

$$f(t) = a + b \cos(ct + d) \quad \text{ou} \quad f(t) = a + b \sin(ct + d)$$

Suponhamos que um ciclo completo, ou seja, o intervalo de tempo de um batimento cardíaco é de aproximadamente 0,8 segundos e também que a pressão sanguínea de um indivíduo, a partir de um instante inicial  $t = 0$ , daí vamos encontrar as constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ . Usaremos a função  $f(t) = a + b \sin(ct + d)$ .

Para determinar  $a$  e  $b$  temos:

$$\begin{cases} a + b = 120 \\ a - b = 80 \end{cases} \Rightarrow a = 100 \text{ e } b = 20$$

Para determinar  $c$  temos:

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow c = \frac{5\pi}{2}$$

E, finalmente para determinar  $d$ , observemos que  $c$  é o parâmetro de translação do gráfico, na horizontal, em relação ao gráfico da função  $f(t) = \sin t$  ou  $f(t) = -\sin t$ . Como estamos supondo que  $t = 0$ , neste caso:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} \cdot 0 + d\right) = 1 \Rightarrow (0 + d) = 1 \Rightarrow d = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Variando  $k$  obtemos  $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$  etc.. Escolhendo  $d = \frac{\pi}{2}$ .

Assim, podemos representar aproximadamente pela função

$$f(t) = 100 - 20 \sin\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

sendo  $t$  o tempo dado em segundos e  $f(t)$  a pressão sanguínea em milímetros de mercúrio  $t$  segundos após o instante inicial.

Representaremos graficamente esta função.

Podemos escrever a função da seguinte forma:

$$f(t) = 100 - 20 \sin \left[ \frac{5\pi}{2} \left( t + \frac{1}{5} \right) \right]$$

Iremos primeiramente calcular o período da função, ou seja,  $p = \frac{2\pi}{|\frac{5\pi}{2}|} = \frac{4}{5} = 0,8$ .

E em seguida vamos ver as outras transformações:

$$f(t) = \sin \left( \frac{5\pi}{2} t \right)$$

$$f(t) = \sin \left[ \frac{5\pi}{2} \left( t + \frac{1}{5} \right) \right] \text{ Translação horizontal de } \frac{1}{5}$$

$$f(t) = 20 \sin \left[ \frac{5\pi}{2} \left( t + \frac{1}{5} \right) \right] \text{ Dilatação vertical}$$

$$f(t) = -20 \sin \left[ \frac{5\pi}{2} \left( t + \frac{1}{5} \right) \right] \text{ Simetria em relação ao eixo X}$$

$$f(t) = 100 - 20 \sin \left[ \frac{5\pi}{2} \left( t + \frac{1}{5} \right) \right] \text{ Translação vertical}$$

Dai, obtemos o seguinte gráfico

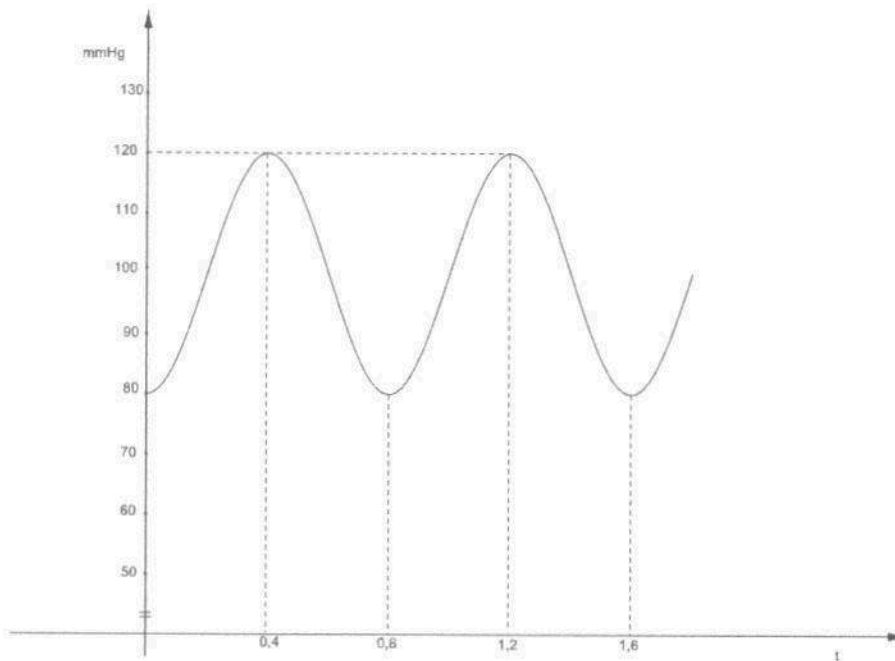


Figura 4.1:

Também podemos modelar esta situação através da função

$$f(t) = -20 \cos \frac{8\pi}{3} t + 100$$

neste caso, o período da função é, 0,75.

## 4.2 Fenômeno das Marés

Os movimentos periódico das marés são de elevação e declínio das águas do mar devido às forças de atração gravitacional da Lua e do Sol. A superfície da Terra é constituída de uma parte sólida que chamamos crosta terrestre e de uma parte líquida (rios, mares, etc.). A região do nosso planeta que está mais próxima da Lua e do Sol sofre uma força maior, com isso a água é "puxada" mais fortemente que a da crosta, formando uma perturbação nas águas nessa região.

A atração gravitacional do Sol provoca um efeito semelhante nas águas do mar, se sobrepondo ao efeito produzido pela Lua. Por isso, quando o Sol a Lua e a Terra estão alinhados, são observadas marés mais elevadas, pois nessa situação os efeitos se somam.

À medida que a Terra gira em torno de seu eixo, as marés alta e baixa se sucedem numa dada região. A amplitude das marés, isto é, a diferença de nível entre a maré alta e a maré baixa, varia muito de um lugar para outro.

Vamos descrever com uma senóide a altitude do mar em um dia em determinado local sabendo que nesse dia, na maré alta, a altitude do mar foi 1,6m e na maré baixa foi 0,2m. As marés altas ocorrem às 2h e às 14h, e as marés baixas ocorrem às 8h e às 20h. Vamos considerar a contagem do tempo em horas a partir da meia-noite.

Sem que haja motivo específico para isto, optaremos por

$$h(t) = a + b \cos(ct + d)$$

também optemos por considerar  $b$  e  $c$  positivos, que é o mais comum.

Assim, temos:

$$\begin{cases} a + b = 1,6 \\ a - b = 0,2 \end{cases} \Rightarrow a = 0,9 \text{ e } b = 0,7$$

O período das marés é de  $14 - 2 = 12h$ .

Então:

$$P = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow 12 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

Existe deslocamento horizontal da senóide. Então, para obter a constante  $d$ , percebemos que nesse caso o máximo seno ocorre quando  $t = 2$ , como já sabemos que  $c = \frac{\pi}{6}$ , temos:



$$\cos\left(\frac{\pi}{6}2 + d\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + d\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} + d = 2k\pi \Rightarrow d = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Variando  $k$ , encontramos os possíveis valores de  $d$ , que são  $-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ , etc.

Optaremos por  $d = -\frac{\pi}{3}$ .

Assim, neste dia e neste local, a altitude do mar pode ser descrita por

$$h(t) = 0,9 + 0,7 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Temos

$$h(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$h(t) = \cos\left[\frac{\pi}{6}(t - 2)\right] \text{ Translação horizontal de } -2$$

$$h(t) = 0,7 \cos\left[\frac{\pi}{6}(t - 2)\right] \text{ Dilatação vertical}$$

$$h(t) = 0,9 + 0,7 \cos\left[\frac{\pi}{6}(t - 2)\right] \text{ Translação vertical}$$

Obtemos, o seguinte gráfico:

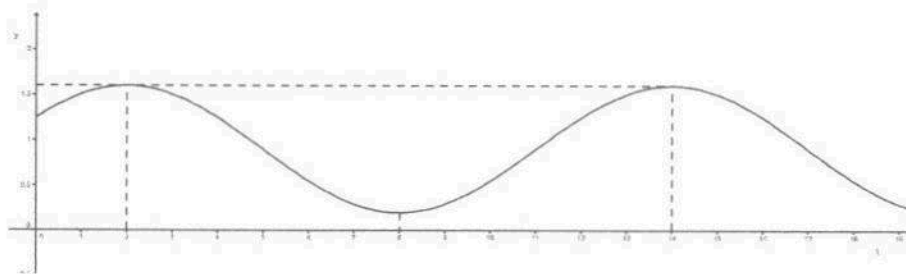


Figura 4.2:

## Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl B., *História da matemática*. 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [2] CARMO, Manfredo Perdigão do., MORGADO, Augusto César., WAGNER, Eduardo., CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. *Trigonometria e Números Complexos*. 3ª Edição. Rio de Janeiro: SBM.
- [3] COSTA, Nilce M. Lobo da. "A história da Trigonometria". São Paulo, Educação Matemática em revista, n.13, março de 2003. p. 60-68.
- [4] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicação*, 2: 1ª Edição. São Paulo: Ática, 2010
- [5] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campina, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [6] IEZZI, Gelson. *Fundamentos da matemática elementar, 3: trigonometria*. 8ª Edição. São Paulo: Atual, 2004.
- [7] LIMA, Elon Lages., CARVALHO, Paulo Cezar Pinto., WAGNER, Eduardo., MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. 9ª Edição. Rio de Janeiro: SBM.
- [8] SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo olhar matemática*, 2: 1ª Edição. São Paulo: FTD, 2010.
- [9] *Trigonometria e Números Complexos* Disponível em [http://ltodi.est.ips.pt/mmoreira/PUBLICACOES\\_P/TemaIII\\_Trigonometria\\_Numeros\\_Complexos.pdf](http://ltodi.est.ips.pt/mmoreira/PUBLICACOES_P/TemaIII_Trigonometria_Numeros_Complexos.pdf). (Acessado em 11/12/2012.)