

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS**

**TRANSPORTE DE CALOR E MASSA EM SÓLIDOS ESFEROIDAIS
OBLATOS VIA TERMODINÂMICA DOS PROCESSOS
IRREVERSÍVEIS – ESTUDO DE CASO: SECAGEM DE LENTILHA**

Autor: João Carlos Soares de Melo
Orientadores: Antonio Gilson Barbosa de Lima
Wilton Pereira da Silva

Campina Grande, Agosto de 2013
PB - Brasil

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS**

**TRANSPORTE DE CALOR E MASSA EM SÓLIDOS ESFEROIDAIS
OBLATOS VIA TERMODINÂMICA DOS PROCESSOS
IRREVERSÍVEIS – ESTUDO DE CASO: SECAGEM DE LENTILHA**

Autor: João Carlos Soares de Melo

Orientadores: Antonio Gilson Barbosa de Lima
Wilton Pereira da Silva

Curso: Doutorado em Engenharia de Processos

Área de Concentração: Desenvolvimento de Processos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Processos.

Campina Grande, Agosto de 2013
PB – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

M528t Melo, João Carlos Soares de.
Transporte de calor e massa em sólidos esferoidais oblatos via termodinâmica dos processos irreversíveis – Estudo de caso: secagem de lentilha / João Carlos Soares de Melo. – Campina Grande, 2013.
167 f. : Color.

Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

"Orientação: Prof. Antonio Gilson Barbosa de Lima, Prof. Wilton Pereira da Silva".

Referências.

1. Secagem. 2. Simulação. 3. Esferóide Oblato. 4. Lentilha. I. Lima, Antonio Gilson Barbosa de. II. Silva, Wilton Pereira da. III. Título.

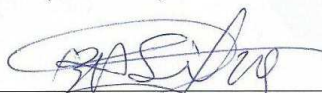
CDU 664.723:633.35(043)

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **JOÃO CARLOS SOARES DE MELO** APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS DO CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE.

Tese de Doutorado **aprovada** em 28 de Agosto de 2013.



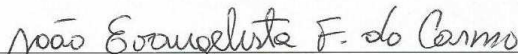
Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima
UAEM / CCT / UFCG
(Orientador)



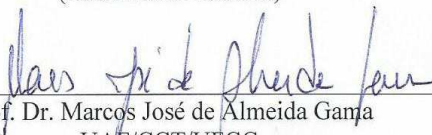
Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva
UAF/CCT/UFCG
(Orientador)



Prof. Dr. Fernando Fernandes Vieira
DESA/CCT/UEPB
(Examinador Externo)



Prof. Dr. João Evangelista Franco do Carmo
UAF/CCT/UFCG
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Marcos José de Almeida Gama
UAF/CCT/UFCG
(Examinador Externo)



Prof. Dra. Fabiana Pimentel Macêdo Farias
UATEC/CDSA/UFCG
(Examinadora Externa)

DEDICATÓRIA

A meus pais, João Soares de Melo e Maria Nelci de Melo; a minhas irmãs, Rejânia e Rosana; a meus irmãos, José Ozébio e Antônio Klebson (*in memoriam*) e aos sobrinhos e sobrinhas.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado força e coragem para superar os desafios que surgiram durante todo o curso.

A meus pais, irmãos, irmãs, sobrinhas e sobrinhos, pelo apoio incondicional em todos os momentos de minha vida.

Aos professores Dr. Wilton Pereira da Silva e Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima, pela paciência, apoio e estímulo para a realização deste trabalho.

À banca examinadora, pela importante contribuição a este trabalho.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Aos professores do curso de Doutorado em Engenharia de Processos, pelo conhecimento transmitido durante o curso.

Aos demais colegas de doutorado Edna, Ivonete, Josedite, Jobsan, Aguinaldo, Clenildon, Evaldo, Enivaldo, Fernando, Iran, Paulo, Tony e Valério pelo auxílio e apoio.

Às minhas amigas Flávia, Regilane e Wolia, pelos momentos felizes e difíceis compartilhados juntos. Foi um enorme prazer conviver com vocês durante esse tempo!

A todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para a conclusão deste trabalho.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 – Conservação de alimentos.....	4
2.2 - O Processo de secagem	6
2.2.1 - Períodos de taxa de secagem e aquecimento do sólido.....	7
2.2.2 - Teores de umidade	9
2.2.3 - Atividade de água.....	11
2.2.4 – Propriedades térmicas da lentilha.....	14
2.2.4.1 – Calor específico.....	14
2.2.4.2 – Condutividade térmica.....	15
2.2.4.3 – Difusividade térmica.....	16
2.3 - Modelagem matemática da secagem.....	17
2.3.1 - Modelos fundamentados numa análise concentrada.....	17
2.3.2 - Modelos difusivos.....	18
2.3.3 - Modelos fundamentados na Termodinâmica dos processos irreversíveis.....	20
2.4 – Lentilha.....	21
2.4.1 – Aspectos científico.....	22
2.4.2 – Secagem da lentilha.....	23

2.5 - Coordenadas Generalizadas.....	25
2.5.1 - Métricas de uma transformação.....	26
2.5.2 - Vetores de base.....	30
2.5.2.1- Vetores de base covariantes.....	31
2.5.2.1.1- Vetores unitários de base covariantes.....	32
2.5.2.1.2- Vetores unitários de base contravariantes.....	33
3 - MODELAGEM MATEMÁTICA.....	35
3.1 - Teoria de Fortes e Okos.....	35
3.1.1 – Formulação geral.....	35
3.1.2 - Abordagem mecanística.....	41
3.1.3 - Avaliação dos coeficientes fenomenológicos.....	44
3.1.4 - Equações de conservação.....	45
3.2 - A Equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esferoidais oblato.....	48
3.3 - Resolução numérica das equações governantes.....	58
3.3.1 – Discretização da equação da conservação de massa.....	59
3.3.2 - Discretização da equação de energia.....	63
3.4 – Modelos Difusivos.....	72
3.4.1 – Modelo I – Transferência simultâneo de calor e massa com condição de contorno de equilíbrio na superfície do material.....	72
3.4.2 - Modelo II - Transferência simultânea de calor e massa com condição de contorno convectiva na superfície.....	80
3.5 - Aplicação da secagem no grão de lentilha.....	86
4 – RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	90
4.1 - Refinamento da malha.....	90
4.2 – Resultados numéricos da secagem de lentilha.....	91
4.2.1- Resultados obtidos com o modelo I.....	92
4.2.1.1 – Teor de umidade.....	92
4.2.1.2 – Temperatura.....	95
4.2.1.3 – Fluxo de líquido.....	98
4.2.1.4 – Fluxo de vapor.....	101
4.2.1.5 – Fluxo total.....	104

4.2.1.6 –Relação entre fluxo de vapor e líquido J_v/J_l	106
4.2.1.7 –Fluxo de calor.....	109
4.2.1.8 -Distribuição do Teor de umidade no interior da lentilha.....	111
4.2.1.9 - Distribuição de Temperatura no interior da lentilha.....	115
4.2.2 - Resultados obtidos com o modelo II.....	118
4.2.2.1 – Teor de umidade.....	118
4.2.2.2– Temperatura.....	120
4.2.2.3 – Fluxo de líquido.....	123
4.2.2.4 – Fluxo de vapor.....	126
4.2.2.5 – Fluxo total.....	129
4.2.2.6 – Relação entre fluxo de vapor e líquido J_v/J_l	133
4.2.2.7–Fluxo de calor.....	136
4.2.2.8 -Distribuição do Teor de umidade no interior da lentilha.....	139
4.2.2.9 - Distribuição de Temperatura no interior da lentilha.....	143
4.3 - Estimativa dos coeficientes de transporte (k_l , k_v e h_m).....	145
5 – CONCLUSÕES.....	150
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	153

RESUMO

MELO, João Carlos Soares de. *Transporte de calor e massa em sólidos esféricos oblato via termodinâmica dos processos irreversíveis – Estudo de caso: Secagem de lentilha*, Campina Grande: Pós-Graduação em Engenharia de Processos, Universidade Federal de Campina Grande, 2013. 167 p.

Este trabalho tem como objetivo estudar a secagem de sólidos com geometria esférica oblato baseando-se na termodinâmica dos processos irreversíveis. Propõe-se uma modelagem matemática para descrever simultaneamente a transferência de calor e massa (líquido e vapor) durante a secagem de corpos capilares porosos com forma complexa considerando os coeficientes de transporte variáveis e condições de contorno de equilíbrio ou convectiva na superfície do sólido. Todas as equações diferenciais governantes foram escritas no sistema de coordenadas esférica oblato e resolvidas numericamente via método numérico dos volumes finitos. O modelo proposto foi aplicado para prever a secagem de grão de lentilha em diversas condições experimentais. Resultados do teor de umidade, temperatura, fluxo de líquido, vapor e calor durante o processo de secagem, foram obtidos, analisados e comparados com dados experimentais obtendo-se boa concordância. Verificou-se que as zonas próximas do ponto focal do grão de lentilha secam e aquecem mais rápido; em consequência, essas zonas são mais propícias ao surgimento de trincas e fissuras que podem comprometer a qualidade do produto. Em todas as condições experimentais estudadas o fluxo de vapor foi predominante durante o processo de secagem quando comparado com o fluxo de líquido.

Palavras-chave: Secagem, simulação, esferoide oblato, lentilha.

ABSTRACT

MELO, João Carlos Soares de, *Heat and mass transport in oblate spheroidal solids via thermodynamics of irreversible processes- Case study: Dryer Lentil*. Campina Grande: Pós-Graduação em Engenharia de Processos, Universidade Federal de Campina Grande, 2013. 167 p.

This work aims to study the drying of solids with oblate spheroidal geometry based on the thermodynamics of irreversible processes. Was proposed a mathematical model that describes the simultaneous heat and mass transfer (liquid and vapor) during the drying of capillary-porous bodies with complex geometry, considering the variable transport coefficients and equilibrium or convective boundary conditions at the surface solid. All differential governing equations were written in oblate spheroidal coordinate system and numerically solved through the finite volume numerical method. The proposed model was applied to predict the drying of lentil grain in different experimental conditions. Results of the moisture content, temperature, liquid, vapor and heat fluxes during the drying process were obtained, analyzed and compared with experimental data, obtaining good concordance. It was verified that zone closed to focal point of the lentil grain dry and heat faster, in consequence, these areas are more susceptible to the appearance of cracks and fissures which may compromise the quality of the product. In all experimental conditions the vapor flux is predominant in the drying process as compared to liquid flux.

Keywords: Drying, simulation, oblate spheroid, lentil grain.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Cinética de aquecimento do sólido durante a secagem.....	8
Figura 2.2 - Representação de uma isoterma de adsorção.....	13
Figura 2.3 - Tipos de lentilhas	22
Figura 2.4 - Diagrama esquemático da estrutura da lentilha.....	23
Figura 2.5 - Sistemas de coordenadas cartesianas e de coordenadas generalizadas.....	26
Figura 2.6 - Representação do vetor de base e_ξ	31
Figura 2.7 - Representação dos vetores de base covariantes e_ξ e e_η	33
Figura 2.8 - Representação do vetor de base contravariantes e_ξ	33
Figura 3.1 - Características de um corpo esferoidal oblato.....	49
Figura 3.2 - Domínio transformado.....	54
Figura 3.3 - Superfície contínua subdividida em pontos nodais.....	59
Figura 3.4 - Ponto na superfície do corpo.....	69
Figura 3.5 - Esquema mostrando a posição da interface i entre os pontos P e E	72
Figura 3.6 - Diagrama do algoritmo computacional.....	79
Figura 4.1 - Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1 = 2,43$	91
Figura 4.2 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos com o	

Modelo I e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para a temperatura 40°C e umidade relativa de 50% em função do tempo de secagem.....	92
Figura 4.3 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos com o Modelo I e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para a temperatura 60°C e umidade relativa de 30% em função do tempo de secagem.....	93
Figura 4.4 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos com o Modelo I e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para a temperatura 60°C e umidade relativa de 50% em função do tempo de secagem.	93
Figura 4.5 - Taxa de secagem do grão de lentilha em diferentes temperaturas e umidade relativa.....	95
Figura 4.6 - Temperatura média do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40 °C e umidade relativa de 50% ao longo do tempo de 200s.....	96
Figura 4.7 - Temperatura média do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60 °C e umidade relativa de 30% ao longo do tempo de 200s.....	96
Figura 4.8 - Temperatura média do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60 °C e umidade relativa de 50% ao longo do tempo de 200s.....	97
Figura 4.9 – Taxa de aquecimento do grão de lentilha em diferentes temperaturas e umidade relativa.....	98
Figura 4.10 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.....	99
Figura 4.11 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.....	99
Figura 4.12 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.....	100
Figura 4.13 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50%.....	101

Figura 4.14 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.....	102
Figura 4.15 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.....	102
Figura 4.16 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.....	103
Figura 4.17 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50%.....	103
Figura 4.18 - Fluxo total ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40 °C e umidade relativa de 50%.....	104
Figura 4.19 - Fluxo total ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60 °C e umidade relativa de 30%.....	105
Figura 4.20 - Fluxo total ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60 °C e umidade relativa de 50%.....	105
Figura 4.21 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50%	106
Figura 4.22 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.....	107
Figura 4.23 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.....	107
Figura 4.24 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.....	108
Figura 4.25 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidade relativas de 30 e 50%.....	108
Figura 4.26 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.....	109
Figura 4.27 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.....	110
Figura 4.28 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.....	110

Figura 4.29 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50%.....	111
Figura 4.30 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha durante a secagem a temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.	112
Figura 4.31 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha durante a secagem a temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.	113
Figura 4.32 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha durante a secagem a temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.	114
Figura 4.33 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 40°C e umidade relativa de 50%.....	115
Figura 4.34 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 30%.....	116
Figura 4.35 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 50%.....	116
Figura 4.36 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos com o modelo II e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%	118
Figura 4.37 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos com o modelo II e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%	119
Figura 4.38 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos com o modelo II e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%	119
Figura 4.39 - Taxa de secagem do grão de lentilha em diferentes temperaturas e umidade relativa.....	120
Figura 4.40 - Temperatura média do grão de lentilha ao longo do tempo de 2000s para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% ...	121
Figura 4.41 - Temperatura média do grão de lentilha ao longo do tempo de 2000s para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% ...	121
Figura 4.42 - Temperatura média do grão de lentilha ao longo do tempo de 2000s para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% ...	122
Figura 4.43 - Taxa de aquecimento do grão de lentilha para a secagem em	

diferentes temperaturas e umidade relativa.....	122
Figura 4.44 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).....	123
Figura 4.45 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).....	124
Figura 4.46 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).....	124
Figura 4.47 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50% (Modelo II).....	125
Figura 4.48 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e modelo II.....	126
Figura 4.49 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).....	127
Figura 4.50 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).....	127
Figura 4.51 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).....	128
Figura 4.52 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50% (Modelo II).....	128
Figura 4.53 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e modelo II.....	129
Figura 4.54 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).....	130
Figura 4.55 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).....	130
Figura 4.56 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).....	131
Figura 4.57 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem nas	

temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50% (Modelo II).....	132
Figura 4.58 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e modelo II.....	132
Figura 4.59 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).....	133
Figura 4.60 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).....	134
Figura 4.61 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).....	134
Figura 4.62 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidade relativas de 30 e 50%.....	135
Figura 4.63 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e II.....	136
Figura 4.64 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).....	137
Figura 4.65 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).....	137
Figura 4.66 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).....	138
Figura 4.67 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidade relativas de 30 e 50%.....	138
Figura 4.68 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e modelo II.....	139
Figura 4.69 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha para a secagem a 40°C e umidade relativa de 50%.....	140
Figura 4.70 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 30%.....	141

Figura 4.71 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 50%.....	142
Figura 4.72 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 40°C e umidade relativa de 50%.....	143
Figura 4.73 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 30%.....	144
Figura 4.74 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 50%.....	144
Figura 4.75 - Valores do coeficiente de difusão (D) do grão de lentilha para os diferentes casos estudados.....	147
Figura 4.76 - Condutividade de líquido durante a secagem do grão de lentilha para os três casos estudados.....	148
Figura 4.77 - Condutividade de vapor durante a secagem do grão de lentilha para os três casos estudados.....	148
Figura 4.78 - Isoterma de sorção do grão de lentilha para os diferentes casos estudados.....	149

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1- Condições do ar de secagem e do grão de lentilha.....	89
Tabela 4.1- Comparação da condutividade de líquido e vapor e erro residual.....	145

NOMENCLATURA

Letras Latinas

a - conteúdo volumétrico de ar em meio poroso, $m^3 m^{-3}$;	[-]
a' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
A_{E_i} - coeficiente da Equação 3.89c	[-]
A_i - constantes $i=0, 1, 2$	[-]
A_j - constantes $i=0, 1, 2$	[-]
A_p - coeficiente da Equação 3.89c	[-]
A_o - constante	[-]
A_p° - coeficiente da Equação 3.89c	[-]
A_w - coeficiente da Equação 3.89c	[-]
b' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
c - calor específico	[J / kg / K]
C - Calor de adsorção	[J / kg]
c_b - calor específico do meio úmido	[J / kg / K]
h_w - calor diferencial específico de sorção	[J/kg]
h_{fg} - calor latente específico de vaporização	[J / kg]
c_p - calor específico do produto	[J /kg /K]
c_ℓ - calor específico do líquido	[J /kg /K]

c_v - calor específico do vapor	[J /kg /K]
c' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
D - coeficiente de difusão	[m ² / s]
d - coeficiente esferoidal	[-]
D_{atm} -coeficiente de difusão molecular da água no ar,	[m ² / s]
d' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
D_{ij} -coeficientes da Equação. 3.87a-h	[-]
D_p – diâmetro da esfera equivalente	[mm]
$\partial M/\partial t$ - taxa de difusão	[1 / s]
e,w,s,n - faces dos pontos nodais	[-]
e' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
exp - exponencial	[-]
\vec{F}_k -forças externas no componente k;	[-]
f' - coeficientes das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
\hat{f}_1 - fator de interpolação	[-]
\vec{g} - aceleração da força gravitacional	[m / s ²]
H - umidade relativa	[%]
h_c - coeficiente de transferência de calor	[W/m ² /K]
h_{fg} - calor latente de vaporização da água livre	[J / kg]
h_m - coeficiente de transferência de massa	[m / s]
h_w - calor diferencial específico de umidificação	[J / kg]
h_k - entalpia na componente k	[J / kg]
i, j - posição do ponto nodal na malha	[-]
J - jacobiano da transformação	[-]
J_p - jacobiano da transformação do produto	[-]
J_u -fluxo de energia;	[-]
\vec{J}_q - fluxo de calor	[W]
J_k -fluxo de massa dos componentes k em relação ao centro de gravidade;	[-]
k - condutividade térmica	[W / m /K]
k_i, k_j - constantes $i=0, 1,2, \dots, n; j= 1, 2, \dots, n$	[-]

K_{ij} - $i=j$ coeficientes fenomenológicos; $i \neq j$ coeficientes combinados	[-]
k_l - condutividade térmica de líquido	[W/m/K]
k_T - condutividade térmica aparente efetiva na ausência de transporte de massa	[W / m / K]
k_t - condutividade térmica do grão.	[W / m / K]
k_v - condutividade térmica de vapor	[m ² / s]
L - comprimento focal	[m]
L_{ik} - coeficientes fenomenológicos	[-]
L_v - calor específico de evaporação	[J/kg]
L_1, L_2 - dimensões do esferóide prolato	[m]
m - massa	[kg]
M - teor de umidade	[kg / kg]
M_e - teor de umidade de equilíbrio	[kg / kg]
M''' - termo de geração de massa	[kg / kg/m ³]
\bar{M} - teor de umidade médio	[kg / kg]
M_{ev} - taxa de evaporação de umidade	[kg/m ³ .s]
M^* - razão de umidade	[kg / kg]
N, S, E, W, P - pontos nodais	[-]
$P\Phi$ - termo de pressão	[-]
P, P_v - pressão total, pressão parcial de vapor,	[Pa]
P_o - pressão ambiente	[Pa]
\dot{q} - geração interna de calor	[W/m ³]
r - coordenada radial esférica, raio	[m]
R_v - constante dos gases para o vapor d'água = 462,69 J.kg-1.K-1	[J / kg/ K]
R_o - constante universal dos gases = 8314 J.kg-1. mol-1.K-1	[J / kg / mol / K]
S - área superficial do sólido	[m ²]
S_η - área perpendicular ao fluxo angular de Φ	[m ²]
S_ξ - área perpendicular ao fluxo radial de Φ	[m ²]
S_ζ - área perpendicular aos fluxos angular e radial de Φ	[m ²]
S - termo fonte	[-]
S_1^ϕ - termo fonte da massa	[-]
S_2^ϕ - termo fonte do calor	[-]

t - tempo	[s]
T - temperatura	[K]
\bar{T} - temperatura média	[K]
u, v, w - componentes do vetor velocidade	[m/s]
$\hat{U} \hat{V} \hat{W}$ - coeficientes métricos	[-]
V - volume	[m ³]
\bar{X}_i - forças motrizes	[-]
\bar{X}_q - força conjugada associada ao fluxo de calor;	[-]
\bar{X}_k - força conjugada associada a \vec{J}_k ;	[-]
\bar{X}_u - força conjugada associada ao fluxo de energia \vec{J}_u ;	[-]
x, y, z - coordenadas cartesianas	[m]

Letras Gregas

θ - temperatura do produto	[°C]
ρ - densidade (massa específica)	[kg / m ³]
ε - tortuosidade	[-]
α_{ij} - parâmetros	[-]
α - difusividade térmica	[m ² / s]
λ - função esferoidal radial	[-]
Φ - função	[-]
$\Gamma, \Gamma\phi$ - propriedade do material	[-]
η - coordenada angular perpendicular a x	[-]
λ - função esferoidal angular	[-]
μ, ϕ, ω - coordenadas esferoidais prolato	[-]
μ_q - potencial químico	[J / kg]
θ - temperatura do produto	[°C]
σ - fator de tortuosidade para difusão de gases em meios porosos	[-]
σ - entropia	[-]
τ - função de tempo	[-]

ν_a - viscosidade cinemática do ar	[m ² / s]
ν - coeficiente de gradiente térmico	[-]
μ_k - potencial químico na componente k	[J / kg]
μ_k - viscosidade dinâmica do ar	[Pa.s]
ξ - coordenada radial	[-]
ζ - coordenada angular ($\perp z$)	[-]
∇ - gradiente	[-]
Δ, δ - Variação	[-]

Superescritos

- * - adimensional
- + - tempo posterior
- o - anterior

Subscritos

- a- ar
- abs – absoluta
- b meio úmido
- c - calor
- e - equilíbrio
- e, w, n, s - faces dos pontos nodais
- ℓ - líquido
- m - massa
- n - convecção natural
- n, m, r, k, p - números inteiros
- o - inicial
- P - ponto nodal P
- p- produto
- ps - produto seco
- s - seco

t - tempo

u - úmido

v - vapor

vs - vapor no estado de saturação

w – água

η ; ζ ; ξ - direção perpendicular ao fluxo.

Siglas

UFMG – Universidade Federal de Campina Grande

CONAB – Companhia Nacional de Abastecimento

USDA - Departamento de Agricultura dos Estados Unidos

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A secagem de sólidos é uma das mais antigas e usuais operações unitárias encontradas nos inúmeros setores das indústrias agrícola, cerâmica, química, alimentícia, farmacêutica, de papel e celulose, mineral e de polímeros. É também uma das operações mais complexas e menos entendida devido à dificuldade e deficiência da descrição dos fenômenos envolvidos na transferência simultânea de calor, massa e quantidade de movimento no sólido (Park et al., 2007).

A transferência de umidade dentro de um sólido pode ocorrer na forma de líquido e/ou vapor, dependendo do tipo de material e das condições experimentais; daí, para descrever a transferência de umidade e calor dentro do material e explicar os efeitos de certos parâmetros na sua cinética de secagem e aquecimento, é imprescindível que o transporte de umidade e calor, dentro do material, seja muito bem representado por modelos matemáticos. Vários fenômenos físicos devem ser considerados no modelo matemático desenvolvido para o estudo da secagem, pois os mesmos podem ter um efeito significativo na difusividade de massa e calor, conseqüentemente, na taxa de remoção de umidade e no aquecimento do sólido (Lima, 1999).

Na literatura se observa a preferência dos pesquisadores pelos modelos de difusão líquida, aplicados na sua maioria, a produtos com formas bem conhecidas, tais como: esferas, cilindros e paralelepípedos (Oliveira, 2006), mas existe, porém, a necessidade de modelos que envolvam outras geometrias conhecidas, tais como esferoides prolato e oblato e que incorporem, ao modelo, o transporte simultâneo de calor e massa.

O modelo proposto por Fortes e Okos, baseando-se nos conceitos termodinâmicos de processos irreversíveis, descreve o transporte de calor e umidade simultâneos no interior do sólido, considerando que o transporte de umidade ocorre na forma de líquido e vapor. A diferença fundamental entre sua teoria e a teoria de Luikov é que a força motriz para a transferência isotérmica, tanto do líquido quanto do vapor, é um gradiente do teor de umidade de equilíbrio e não do teor de umidade, devido à hipótese de equilíbrio local.

Oliveira (2006) aplicou o modelo proposto por Fortes e Okos e obteve uma solução numérica para o problema de difusão transiente em corpos com forma esferoidal prolato. O autor observou que os resultados obtidos foram consistentes e o modelo apresentado pode ser usado para resolver problemas de transferência de calor e massa (líquido e vapor) simultâneos em produtos agrícolas com alto teor de umidade como, também, com geometria que varia desde um disco circular até uma esfera, incluindo o esferoide prolato.

Na literatura ainda são escassos estudos sobre a transferência de calor e/ou massa de processos de secagem em produtos biológicos com difusão acoplada de líquido e vapor com geometria elipsoidal (esferóides prolatos e oblatos). Pesquisas nesta área são motivadas porque vários produtos biológicos têm formas elipsoidais, como: banana, laranja, arroz, casulo da seda, trigo e lentilha (Teruel et al., 2001; Cihan et al., 2008; Carmo e Lima, 2008; Oliveira et al., 2012).

Apesar da grande importância para a área de secagem de sólidos, o modelo proposto por Fortes e Okos foi aplicado a uma esfera e não contempla os surgimentos de trincas no sólido nem os efeitos dos termos cruzados na perda de massa e aquecimento do sólido durante o processo de secagem.

Diante do exposto, o objetivo geral deste trabalho é estudar a transferência de calor e massa no interior de sólidos com geometria esferoidal oblata aplicando-se o modelo de Fortes e Okos via termodinâmica de processos irreversíveis usando o método numérico dos volumes finitos através de um programa computacional que contemple os surgimentos de trincas no sólido e os efeitos dos termos cruzados na perda de massa e no aquecimento do sólido durante o processo de secagem

Objetivos específicos:

- Apresentar a modelagem matemática e a solução numérica para o problema de difusão transiente, em corpos com forma elipsoidal oblata, baseando-se no modelo proposto por Fortes e Okos;
- Desenvolver um programa computacional para simular o processo de difusão em corpos esferoidais oblatos;
- Simular a distribuição do teor de umidade e temperatura no interior de sólidos esferoidais oblatos e suas respectivas cinéticas de secagem e aquecimentos, utilizando-se dois modelos matemáticos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis;
- Aplicar os modelos numéricos desenvolvidos à secagem de lentilha;
- Comparar os resultados numéricos do teor de umidade com os resultados experimentais disponíveis na literatura para o grão de lentilha e determinar os coeficientes de transferência de calor e massa: difusivo e convectivo, no interior e na superfície do produto, respectivamente, para várias condições de secagem;
- Estudar o efeito das considerações adotadas em cada modelo sobre os coeficientes de transporte;
- Obter correlações matemáticas para os coeficientes de difusão de calor e massa e de transferência de calor convectiva, como função dos parâmetros de secagem e dimensões do sólido.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 – Conservação de alimentos

A água é um constituinte presente em alta concentração em alimentos frescos, que influencia consideravelmente, a palatabilidade, a digestibilidade e a estrutura física do alimento. A deterioração que ocorre nos alimentos é influenciada, praticamente, de uma ou outra forma pela concentração e mobilidade de água no seu interior (Silva et al., 2005).

A remoção de água de alimentos sólidos é utilizada como forma de reduzir a atividade de água (a_w) inibindo o crescimento microbiano evitando, assim, sua deterioração. A remoção passou a ter grande importância na redução dos custos energéticos, de transporte, embalagem e armazenagem desses alimentos (Park et al, 2006).

A maioria dos métodos de preservação de alimentos se baseia na redução da mobilidade da água pelo uso de umectante e de congelamento e também pela remoção física da água através da secagem, evaporação, concentração ou liofilização (Fellows, 2006).

Vários pesquisadores têm aplicado o resfriamento, congelamento, adição de solutos ou secagem, entre outros métodos, para manter as propriedades físico-químicas e sensoriais dos produtos agrícolas, a fim de aumentar a vida de prateleira dos mesmos. Frutas como caqui, pêssegos, goiabas e clones de aceroleiras são exemplos de produtos biológicos que usam o armazenamento refrigerado como forma de conservação (Gonçalves et al., 2006; Seibert et al., 2007; Steffens et al., 2008; Araújo et al., 2009).

Lopes et al. (2005) usaram o congelamento para estudar a estabilidade da polpa de pitanga e observaram que ela se manteve dentro dos padrões de qualidade exigidos pela legislação vigente durante 90 dias de armazenamento a -18 °C, constatando-se a eficiência do método.

Alexandre et al. (2004) utilizaram a sacarose na conservação do açaí para reduzir a atividade de água da polpa através da aplicação da tecnologia de obstáculos. De acordo com Cavalcanti Mata et al. (2005), a concentração de açúcares é importante principalmente pela sua capacidade de reduzir a atividade de água e, conseqüentemente, dificultar a ação microbológica no alimento.

Trabalhos desenvolvidos por vários autores mostram a diversidade de materiais biológicos que utilizam a secagem como método para aumentar a vida de prateleira de produtos como, por exemplo: lentilha (Tang e Sokhansanj, 1993); a uva (Azzouz et al., 2002); cenoura (Hatamipour e Mowla, 2002); banana (Karim e Hawlader, 2005); milho (Neves et al., 2005; Palacin et al., 2005); pimentões vermelhos (Arora et al., 2006); trigo (Gonelli et al., 2007); feijão (Resende et al., 2008) e morango (Doymaz, 2008) entre outros produtos.

Embora vários processos tecnológicos de conservação de alimentos possam ser aplicados a fim de aumentar o tempo de vida útil dos produtos agrícolas, o processo de secagem apresenta várias vantagens, dentre as quais se destacam: a facilidade na conservação do produto; estabilidade dos componentes aromáticos em temperatura ambiente por longos períodos de tempo; a proteção contra degradação enzimática e oxidativa; a redução do seu peso; economia de energia por não necessitar de refrigeração e a disponibilidade do produto durante qualquer época do ano (Park et al., 2001).

2.2 - O processo de secagem

A secagem é uma operação unitária de retirada de água de um produto por evaporação ou sublimação, mediante aplicação de calor sob condições controladas a qual tem, como finalidade, conservar alimentos através da diminuição da atividade de água no interior do mesmo (Kajiyama e Park, 2008).

Durante o processo de secagem os sólidos sofrem variações nas suas características químicas, físicas e biológicas que, dependendo da intensidade do efeito, podem ocasionar sua perda ou inutilizá-los para certas funções (Azzouz et al., 2002; Almeida et al., 2009). Assim, o critério de conservação da qualidade do produto, que depende do uso final que será feito, é que dita o tipo de processo de secagem e armazenamento (Park et al., 2006).

A secagem de grãos para o armazenamento tem, por finalidade, colocá-los em níveis recomendáveis de umidade para minimizar a deterioração e a redução da qualidade durante o processo de estocagem (Simione et al., 2008). Segundo Park et al. (2007), se os grãos forem armazenados acima de 13% (b.u.), sua respiração aumentará exponencialmente, o que causará sua deterioração.

Os grãos e as sementes expostos em um ambiente absorvem ou perdem água, até entrarem em equilíbrio com o ambiente, pois se trata de materiais biológicos higroscópicos (Camacho et al., 2004; Park et al., 2007). A capacidade desses materiais quanto a entrarem em equilíbrio depende da temperatura e da umidade relativa do ar e das características do produto.

Devido a esses materiais biológicos serem higroscópicos, ocorre entre eles e o ar ambiente, fluxos de vapor de água. O sentido e a intensidade destes fluxos irão depender do gradiente imposto pela diferença dos valores da pressão de vapor na superfície do sólido (P_{vp}) e a pressão de vapor no ar (P_{var}). Assim, dependendo das condições do produto e do ar, pode-se ter a ocorrência de três situações:

- a) Se $P_{vp} > P_{var}$, tem-se a secagem do produto;

- b) Se $P_{vp} < P_{var}$, tem-se o umedecimento do produto;
- c) Se $P_{vp} = P_{var}$, tem-se o equilíbrio higroscópico, nesta situação não há fluxo de massa.

De acordo com Camacho et al. (2004), esses produtos e a atmosfera que os rodeiam são sistemas que se encontram em permanente troca de água com sentido preferencial definido pela diferença de potencial hídrico existente entre ambos.

O equilíbrio dos materiais higroscópicos é alcançado quando os produtos entram em contato com o ar realizando trocas até que sua pressão de vapor e a temperatura do produto e do ar de secagem tenham valores semelhantes, atingindo, respectivamente, níveis de equilíbrio energético, hídrico e térmico (Saravia et al., 2007).

2. 2. 1 - Períodos de taxa de secagem e aquecimento do sólido

O processo de secagem pode ser dividido em três etapas, como é verificado na Figura 2.1 (Arnosti Junior et al., 1999). As respectivas curvas são: a) curva da redução do teor de umidade do material; b) curva da taxa de secagem e c) curva da variação de temperatura do sólido ao longo do período de secagem. Pode-se observar, também, que cada etapa é dividida em três períodos, I, II e III.

O primeiro período, também conhecido como período de taxa crescente, representa o início da secagem do produto cujo teor de umidade inicial é dado por M_0 (I-a); nele, a taxa de secagem é crescente, devido à umidade relativa do ar na camada limite ser menor que 100%, ocorrendo um período conhecido como acomodação (I-b), no qual, a temperatura e a pressão de vapor de água do produto se elevam gradualmente até que a transferência de calor seja equivalente à transferência de massa (I-c) (Reeds, 1991; Park et al., 2001).

Já o segundo período (II) chamado período de taxa constante, é caracterizado pela taxa constante de secagem (II-b), responsável pela evaporação da água livre e a transferência de calor e massa é equivalente, ou seja, a velocidade de secagem é neste período, constante, até que ocorra a evaporação da água da superfície do produto (Park et al., 2001). Neste segundo período, o período II-c, a temperatura permanece constante até o sólido atingir um teor de umidade no qual a temperatura começa a se elevar, tem-se o chamado ponto de teor de

umidade crítica, que indica o fim do período de taxa de secagem constante (II) e o início do período de taxa decrescente (III).

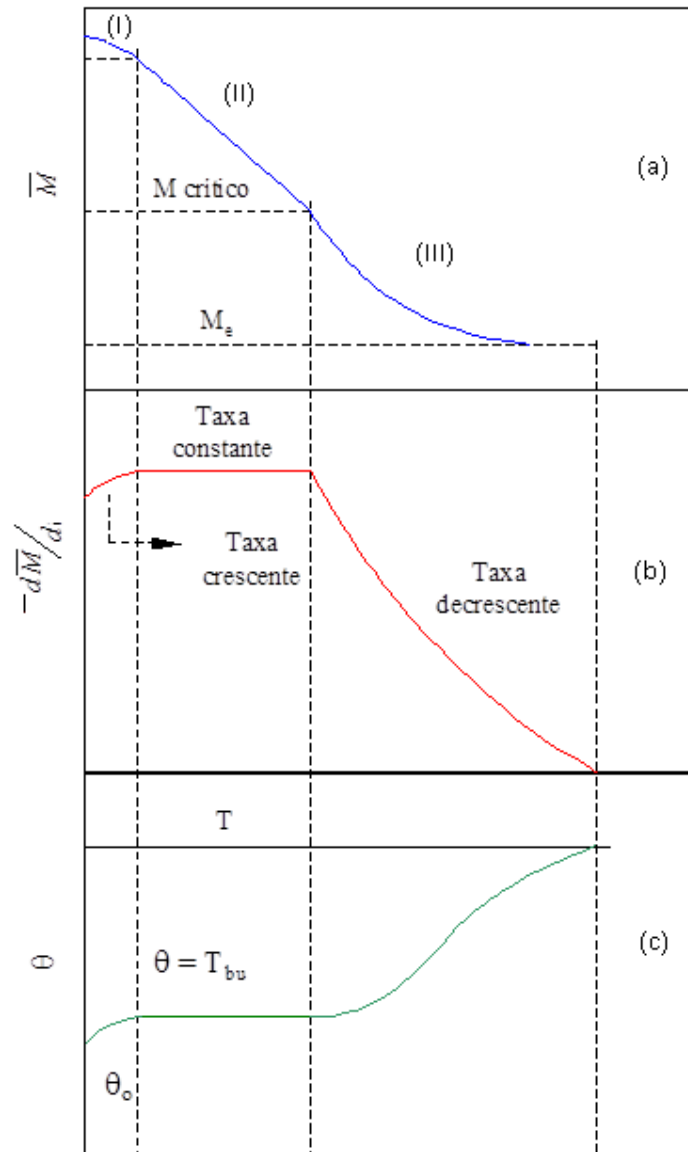


Figura 2.1 - Cinética de aquecimento do sólido durante a secagem.

Fonte: Arnosti Junior et al. (1999)

Quando o sólido atinge o período de taxa decrescente (III), sua temperatura começa a aumentar até atingir a temperatura do ar de secagem; nesta fase o fator limitante é a redução da migração de umidade do interior para a superfície do produto; a temperatura do produto aumenta até atingir a temperatura do ar de secagem e quando a umidade de equilíbrio do produto é atingida, o processo é encerrado.

Segundo Park et al. (2001), na secagem de produtos agrícolas, o terceiro período é quase sempre o único observado. Togrul e Pehlivan (2003), observaram, estudando a cinética de secagem do damasco, que a remoção de água durante a secagem ocorre unicamente no período de taxa decrescente.

De acordo com Karim e Hawlader (2005) a quantidade necessária de energia térmica para secar determinado produto depende de muitos fatores, tais como: teor de umidade inicial, umidade final desejada, temperatura, umidade relativa do ar de secagem e taxa de fluxo de ar.

2.2.2 – Teor de umidade

Na secagem de produtos biológicos a determinação do teor de umidade é um procedimento fundamental, visto que valores de umidade devem ser considerados seguros para o armazenamento adequado do produto para que a qualidade dos grãos se mantenha durante a estocagem (Valentini et al., 1998).

Para Neves (2007) o teor de umidade ideal para o armazenamento de grãos e sementes é 13% nas condições brasileiras, o que inviabiliza, sobretudo, o desenvolvimento de fungos e bactérias.

No processo de secagem os produtos biológicos apresentam ou atingem os seguintes teores de umidade: teor de umidade inicial, teor de umidade crítico e teor de umidade de equilíbrio.

O teor de umidade inicial (M_0) corresponde ao valor de umidade do produto no início do processo de secagem; enquanto a umidade crítica (M_c) ocorre quando a taxa de secagem muda de constante para decrescente e a umidade de equilíbrio (M_e) ocorre quando a quantidade de umidade perdida pelo produto é igual à quantidade de umidade recebida.

O teor de umidade de um produto é obtido das seguintes formas:

- a) Teor de umidade em base úmida (b.u)

$$M' = \frac{m_a}{m_t} \quad (2.1)$$

donde:

M' é o teor de umidade em base úmida (b.u);

m_a é a massa de água contida no produto;

m_t é a massa total do produto, dada por $m_t = m_a + m_s$, sendo m_s a massa seca.

b) Teor de umidade em base seca (b.s)

$$M = \frac{m_a}{m_s} \quad (2.2)$$

donde:

M é o teor de umidade (b.s);

m_s é a massa do produto seco.

De acordo com Fellows (2006), a umidade em base seca é mais utilizada nos cálculos de processamento, enquanto a base úmida é frequentemente relacionada em tabelas de composição de alimentos.

A água pode estar presente nos produtos sob duas formas: como água livre e água ligada (Park et al., 2007).

- Água livre: é a água que, simplesmente, está presente nos espaços intergranulares e entre os poros do material; funciona como solvente, permitindo o crescimento dos microrganismos e reações químicas, e é retirada com relativa facilidade.

- Água ligada: é a água da constituição, que faz parte da estrutura do material, ligada a proteínas, açúcares e adsorvida na superfície de partículas coloidais necessitando de níveis elevados de temperatura para sua remoção, e dependendo da natureza da amostra, requer temperaturas diferentes para sua remoção que, frequentemente, não é total e em alguns casos não é eliminada nem a temperaturas que carbonizam parcialmente a amostra.

Segundo Ribeiro e Seravalli (2007), a água ligada é subdividida em:

Água constitucional: representa uma pequena fração da água presente em alimentos com alto teor de umidade, sendo a água mais fortemente ligada aos constituintes mais aquosos do alimento, através das ligações iônicas.

Água vicinal: representa a próxima camada de água adjacente à água constitucional e ocupa os sítios mais próximos da maioria dos grupos hidrofílicos presentes nos constituintes.

Água de multicamadas: representa a água ligada em menor intensidade que a água vicinal, sendo a água ligada de modo mais fracamente aos constituintes não aquosos do alimento, mas que ainda possuem uma intensidade de ligação com os outros que não lhe permite comportar-se como água pura.

2.2.3 – Atividade de água

A disponibilidade da água em materiais higroscópicos é mais indicada pela atividade de água (a_w), pois nem todos os métodos indicam a disponibilidade da água para o desenvolvimento dos microrganismos já que nem toda a água do grão pode ser utilizada (Afonso Júnior et al., 2003).

A atividade de água designa o quanto de água está disponível no alimento para o crescimento de microrganismo, reações químicas e enzimáticas, ou seja, é um indicador útil quanto à estabilidade de um produto e sua segurança microbiológica (Maltini et al., 2003; Ribeiro e Seravalli, 2007).

A atividade de água é definida pela razão entre a pressão parcial de vapor da água contida na solução ou no alimento (P) e a pressão parcial de vapor da água pura (P_o), a dada temperatura (Franco e Landgraf, 2008), como verificado na equação (2.3).

$$a_w = \left(\frac{P}{P_o} \right)_T \quad (2.3)$$

Segundo Fellows (2006), o teor de umidade do alimento sob temperatura constante muda até entrar em equilíbrio com o vapor de água do ar circundante, com o alimento equilibrando a perda e o ganho de água; desta forma, o teor de umidade alcança o teor de umidade de equilíbrio e a umidade relativa do ar alcança a umidade relativa de equilíbrio (H), dada por:

$$a_w = H/100 \quad (2.4)$$

onde:

H é a umidade relativa do ar no equilíbrio.

De acordo com Damodaran et al. (2010), a igualdade da Equação (2.4) só existe se o equilíbrio entre o produto e sua vizinhança for alcançado.

A atividade de água pode ser estudada através das isotermas de sorção representadas por uma curva que descreve a relação de equilíbrio entre a quantidade de água sorvida por componentes do material biológico e a umidade relativa, na qual se encontra o produto (Park et al., 2001).

Observa-se, na Figura 2.2, a isoterma de adsorção dividida em três regiões. A água presente na região I é a mais fortemente adsorvida e imóvel que existe no alimento, denominada água da monocamada; a água contida na região II da isoterma é denominada água da multicamada, a qual representa 5% da água contida em um alimento com alto teor de umidade (Ribeiro e Seravalli, 2007). Na região III, se encontra a água ligada mais fracamente e com maior mobilidade, a água livre, a qual está disponível como solvente e suficientemente abundante para permitir o desenvolvimento de microrganismo, reações químicas e enzimáticas (Ribeiro e Seravalli, 2007).

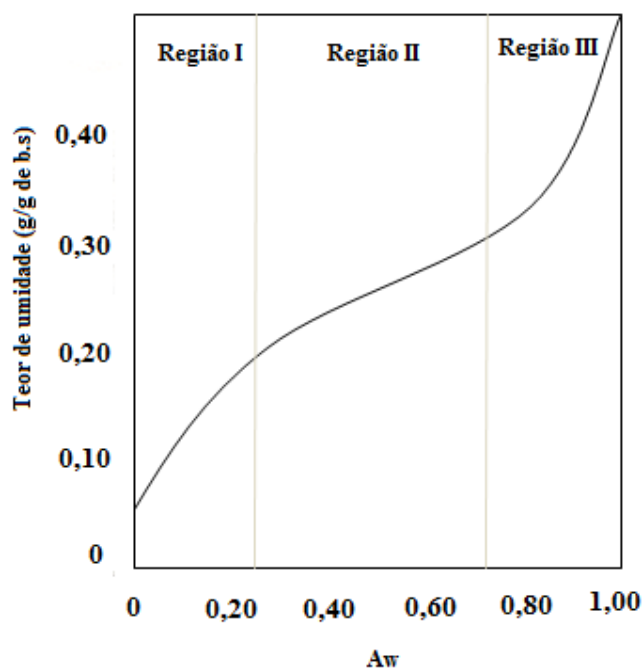


Figura 2.2 – Representação de uma isoterma de adsorção

Fonte: Ribeiro e Seravalli (2007)

A isoterma de sorção de água representa a relação de equilíbrio entre o teor de umidade da amostra e a atividade de água em temperatura e pressão constantes. O conhecimento da isoterma de sorção de materiais biológicos é muito importante para a previsão da qualidade e da otimização da secagem, armazenamento e outros processos como, também, são úteis para modelar as alterações no teor de água e calcular parâmetros termodinâmicos (Park et al., 2001; Azuara-Nieto e Beristain-Guevara, 2007; Domínguez et al., 2007; Moreira et al., 2008).

As isotermas de sorção vêm sendo estudadas por vários pesquisadores para diversos produtos como, por exemplo, lentilha (Menkov, 2000), grãos de quinoa (Toloba et al., 2004); soro do leite (Azuara-Nieto e Beristain-Guevara, 2007); Noz de macadâmia (Domínguez et al., 2007); milho (Samapundo et al., 2007); semente de pinhão (Thys et al., 2010); casca e folha da laranja (Bejar et al., 2012); polpa de abacaxi em pó (Viganó et al., 2012) e arroz (Bingol et al., 2012).

Dentre os vários modelos estudados na literatura para prever o comportamento das isotermas tem-se: os modelos de GAB (Guggenheim, Anderson e de Boer), BET (Brunauer, Emmett e Teller), Halsey, Henderson, Peleg e Henderson modificado, entre outros. Esses modelos são úteis no conhecimento das características do produto (Park et al., 2007).

2.2.4 – Propriedades térmicas

O conhecimento das propriedades térmicas dos produtos biológicos é bastante significativo para prever e/ou simular o comportamento de grãos e a quantidade de energia requerida quando submetidos a diferentes condições de secagem, aquecimento ou resfriamento (Ribeiro et al., 2007).

A condutividade térmica, a difusividade térmica e o calor específico são as três principais propriedades dos materiais referentes à transferência de calor. Esses parâmetros são essenciais para o estudo dos processos de aquecimento, secagem e resfriamento (Yang et al., 2002; Tres et al., 2011).

2.2.4.1 - Calor específico

O calor específico (c_p) é definido como a energia necessária para aumentar a temperatura em um grau de uma unidade de massa de uma substância mantendo a pressão constante (Çengel, 2007).

Diversos pesquisadores verificaram que existe uma relação entre os valores do calor específico de vários materiais biológicos e o teor de água na qual o aumento do teor de água provoca elevação dos valores de calor específico de diversos produtos estudados como, por exemplo, a semente de lentilha (Tang et al., 1991), a semente de cominho (Singh e Goswami, 2000), o milho (Andrade et al., 2004), o trigo (Ribeiro et al., 2007) e o amendoim (Bitra et al., 2010).

Segundo Ribeiro et al. (2007), o calor específico do trigo variou linearmente em função do teor de água; já Singh e Goswami (2000) observaram que o calor específico do

cominho aumentou com o aumento da temperatura (-70 ° C a 50 ° C) e com o teor de umidade (1,8% a 20,5% b.s.), sendo representado por polinômios de segunda ordem, em função da variação da temperatura e do teor de umidade.

Tang et al. (1991) determinaram, estudando o calor específico da semente de lentilha, uma relação para o cálculo do calor específico variando a temperatura do ar de secagem ($10\text{ }^{\circ}\text{C} \leq T \leq 80\text{ }^{\circ}\text{C}$) e o teor de umidade do produto ($0,02 \leq M \leq 0,35$). Esta relação é dada por:

$$c = 0,5773 + 0,00709 T + (6,22 - 9,14 M) M \quad (2.5)$$

onde:

T é a temperatura dada em °C.

M é dado em base seca decimal.

2.2.4.2 – Condutividade térmica

De acordo com Incropera e DeWitt (2008) a condutividade térmica define a quantidade de calor que é transmitida por unidade de tempo entre duas superfícies, através de uma unidade de área devido a um gradiente de temperatura.

Os valores da condutividade térmica podem variar de acordo com a composição química, estrutura física, estado, densidade, temperatura e teor de umidade do material (Park et al., 1997).

Alguns pesquisadores estudaram a condutividade térmica de diversos produtos biológicos e observaram que este parâmetro aumenta com o teor de umidade, tais como, grãos de arroz (Muramatsu et al., 2007), trigo (Ribeiro et al., 2007) e café (Burmester e Eggers, 2010).

Alagusundaram et al. (1991) constataram que a condutividade térmica da lentilha cresce com o aumento do teor de umidade (9 até 23%) e com o aumento da temperatura (-28 a

29 °C) e desenvolveram um modelo empírico que relaciona a condutividade térmica da lentilha com a temperatura (T) e o teor de umidade (M) dado por:

$$k = B_1 + B_2 T + B_3 M \quad (2.6)$$

onde: T é dado em °C e M é dado em base seca (decimal)

2.2.4.3 - Difusividade térmica

A difusividade térmica é uma propriedade que permite prever a velocidade da penetração de calor no interior do alimento além de controlar a velocidade de propagação da frente de aquecimento para alimentos condutivos, sendo assim de fundamental importância para o projeto de equipamentos e para o cálculo do processamento térmico (Carbonera et al., 2003). Esta propriedade física é dada por:.

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (2.7)$$

onde:

k é a condutividade térmica;

ρ é a massa específica;

α é a difusividade térmica;

C_p é o calor específico.

A difusividade térmica de um material é influenciada pelo teor de umidade, pela temperatura, pela composição química e por sua porosidade. Além disto, a difusividade térmica dos produtos biológicos ainda tende a variar em locais diferentes dentro do próprio produto, visto que é composta por produtos heterogêneos (Tres et al., 2011).

Ribeiro et al. (2007) e Andrade et al. (2004) avaliaram a difusividade térmica do grão de trigo e milho, respectivamente, e observaram que a difusividade térmica desses produtos aumenta com a diminuição do teor de umidade dos produtos.

2.3 - Modelagem matemática da secagem

A modelagem do processo de secagem pode ser abordada de duas formas: baseando-se nos parâmetros externos ao sólido como a umidade relativa, temperatura e velocidade do ar, correlacionando-as com a velocidade de secagem do sólido; enquanto a outra tem como característica, as condições internas e os mecanismos de transporte de umidade internamente ao sólido (Lima e Nebra, 2000).

A complexidade da secagem conduz os pesquisadores a propor várias teorias e múltiplas fórmulas empíricas para prever a taxa de secagem, tais como: Teoria da difusão líquida, Teoria capilar, Teoria da condensação e evaporação, Teoria de Luikov, Teoria de Krischer, Teoria de Berger e Pei, Teoria de Philip e De Vries, Teoria de Fortes e Okos (Fortes e Okos, 1981).

Alguns modelos baseados nessas teorias têm sido propostos para descrever a taxa de redução de umidade durante a secagem dos sólidos podendo ser agrupados em três grandes grupos: modelos baseados numa análise concentrada (modelos empíricos e semiempíricos); modelos baseados numa análise distribuída (modelos difusivos) e modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis (Lima et al., 2003).

2.3.1 - Modelos fundamentados na análise concentrada

Os modelos concentrados admitem que, dentro do sólido, as grandezas em estudo (temperatura e/ou massa) são espacialmente uniformes em qualquer tempo durante o processo transiente. A análise concentrada é considerada mais simples do que a análise distribuída, pois este último envolve a resolução das equações de difusão de calor e/ou massa (Almeida et al., 2003).

Alguns trabalhos vêm utilizando os modelos matemáticos para estudar o fenômeno de secagem por análise concentrada (camada fina), dentre eles se destacam:

Lima e Nebra (2000) apresentam modelos matemáticos baseados numa análise concentrada para descrever a transferência simultânea de calor e massa em corpos com geometria arbitrária considerando a existência de geração interna de massa e energia, convecção térmica e de massa, evaporação e aquecimento do vapor produzido na superfície do produto.

Lima et al. (2003) incorporam os fenômenos simultâneos de transporte de calor e massa com o objetivo de desenvolver modelos matemáticos para a descrição das trocas de energia e massa, durante o processo, em corpos com geometria arbitrária, baseados numa análise concentrada.

2.3.2 - Modelos difusivos

Nos modelos difusivos o transporte de massa é definido pela Lei de Fick, através do gradiente de umidade no interior do sólido, que se relaciona com a taxa de secagem por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M) + M''' \quad (2.8)$$

onde:

M é o teor de umidade em base seca;

D é o coeficiente de difusão de massa;

M''' representa o termo de geração de massa.

O transporte de calor é definido pela lei de Fourier, dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (2.9)$$

onde:

T é a temperatura;

k representa a condutividade térmica;

ρ é a densidade;

c_p é o calor específico do sólido;

\dot{q} é a geração interna de energia.

Se as propriedades ρ e c_p são constantes e sem geração de energia, a Equação (2.9) pode ser escrita por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) \quad (2.10)$$

sendo α determinado pela equação (2.7).

Nota-se que esta equação é semelhante à equação para difusão de massa e, portanto pode ser resolvida numérica e analiticamente, de forma similar.

O modelo de difusão líquida é um exemplo de modelo baseado na difusão de massa e calor. Vários trabalhos têm sido reportados na literatura para descrever o transporte difusivo de calor e/ou massa utilizando os modelos de secagem baseados na teoria da difusão líquida, tais como: Lima et al. (2004), Carmo e Lima (2008) e Cihan et al. (2008).

Lima et al. (2004) estudaram a transferência de calor e massa no interior de sólidos esferoidais usando o modelo de difusão sem encolhimento e observaram que os resultados obtidos foram consistentes e o modelo apresentado pode ser utilizado para resolver problemas de difusão, tais como a secagem, umidificação, aquecimento e resfriamento.

Carmo e Lima (2008) consideraram a teoria de difusão líquida no estudo da simulação numérica da transferência de massa no interior de sólidos esferoidais oblatos, via método dos volumes finitos no modelo matemático, e concluíram que o modelo foi consistente e que pode ser utilizado também para resolver casos como aqueles que incluem discos e esferas com propriedades variáveis ou constantes.

Já Cihan et al. (2008) estudaram o comportamento da secagem intermitente de arroz com casca através do modelo de difusão líquida com base em uma geometria esferoidal prolato e outra cilíndrica e observaram que os resultados do modelo baseado na difusão líquida com a geometria esferoidal prolato foram mais precisos em comparação com outras geometrias.

2.3.3 - Modelos fundamentados na termodinâmica dos processos irreversíveis

Os modelos de Luikov e Fortes e Okos (1981) são exemplos de modelos fundamentados na termodinâmica dos processos irreversíveis.

A teoria de Luikov se baseia nos princípios da Termodinâmica de não-equilíbrio e leva em consideração os mecanismos de difusão, efusão e convecção de água no interior do meio poroso. Portanto, as equações que definem o modelo de Luikov levam em consideração que o transporte molecular de vapor d'água, ar e líquido acontecem ao mesmo tempo (Luikov, 1975).

Os autores Fortes (1978) e Fortes e Okos (1980) propõem, com base nos conceitos Termodinâmicos dos Processos Irreversíveis, que a força motriz para transferência isotérmica, tanto do líquido quanto do vapor, é o gradiente do teor de umidade de equilíbrio, devido à hipótese de equilíbrio local que, por sua vez, é uma função da temperatura, da umidade relativa e do teor de umidade de equilíbrio.

Fortes e Okos (1981) analisaram os fenômenos de transporte em sistemas de secagem de grãos utilizando os conceitos da termodinâmica de processos irreversíveis estabelecendo que o gradiente do teor de umidade é a força motriz tanto para o movimento do líquido quanto de vapor.

Oliveira e Lima (2009) utilizaram o modelo proposto por Fortes e Okos (1981) para estudar a transferência de calor e massa na simulação da secagem de trigo e concluíram que os resultados referentes aos resultados numéricos do teor de umidade médio apresentaram boa concordância com os valores experimentais.

Oliveira et al. (2011) observaram, aplicando o modelo desenvolvido por Fortes e Okos (1981) para estudar o fenômeno do encolhimento do grão de trigo durante a secagem, que o modelo utilizado foi preciso e eficaz podendo ser usado para simular muitos problemas práticos de difusão, tais como aquecimento, resfriamento, umidificação e secagem em sólidos esferoidais prolato, incluindo sólidos esféricos.

Oliveira et al. (2012) constataram, estudando a transferência simultânea de calor e massa do grão de trigo utilizando um modelo matemático baseado na termodinâmica dos processos irreversíveis considerando o trigo com uma geometria prolata e condições de contorno de equilíbrio na superfície do sólido, que o modelo utilizado tem grande potencial e é preciso e eficiente para simular muitos problemas práticos de difusão.

2.4– Lentilha

A lentilha é uma importante leguminosa produzida por diversos países como fonte de alimentação humana. Os cinco maiores produtores de lentilha do mundo são Canadá (1.531.900 t), Índia (943.800 t), Turquia (405.952 t), Austrália (379.659 t) e Estados Unidos (214.640 t) (FAO, 2011). O Canadá é o maior exportador de lentilha com 1.183.308 toneladas enquanto a Turquia é a maior importadora, com 210.289 toneladas (FAO, 2010).

Na América do Sul, os três maiores produtores de lentilha são o Peru (3.812 t), Argentina (2.600 t) e Equador (2.100 t), enquanto os valores da produção de lentilha do Brasil não constam nos dados da FAO (2010) provavelmente, a sua produção ser pequena pela falta de hábito dos brasileiros. O Brasil importa a lentilha para suprir suas necessidades domésticas (Manara et al., 1992).

A lentilha (*Lens culinaris* L.) é uma das leguminosas graníferas mais antigas cultivadas pelo homem, sendo também uma das mais cultivadas em todo o mundo, em virtude da sua qualidade nutricional, e por serem fontes ricas em carboidratos complexos, proteínas, fibras, vitaminas, minerais, antioxidante e alto valor energético, além de possuir boa digestibilidade e sabor (Vieira, 2003; Amim et al., 2004; Freitas e Nascimento, 2006; Wang et al., 2009; Zia-ul-haq et al., 2011).

Os valores de proteínas das sementes de lentilhas podem variar de 24 a 30% (Lee et al., 2007). Joshi et al. (2010) observaram diferentes percentuais de proteínas para as variedades Boomer (26,73%), French-Green (28,34%) e Nugget (26,34%). A proteína da lentilha é altamente digerível e seu aquecimento não causa perdas de qualidade (Vega et al., 2012).

As sementes de lentilhas também são importantes fontes de ferro e de outros minerais essenciais na alimentação; por exemplo, uma porção de 100 g de lentilhas secas supre a ingestão diária de Fe e Zn recomendada (Vega et al., 2012).

Devido a essas propriedades apresentadas pelas sementes de lentilha, diversos pesquisadores a estudam como fonte de alimentação humana, seja na forma de grãos (sopas, ensopados, saladas etc.) ou processadas, como purês e farinhas incorporadas a cereais para fazer pão, bolos e alimentos para crianças (Sotomayor et al., 1999; Smith & Jimmerson, 2005; Aguilera et al., 2009).

Além da semente de lentilha ser consumida na alimentação humana seus resíduos também vêm sendo estudados na alimentação animal, como, por exemplo, a palha da lentilha, cujo valor nutritivo é superior ao da palha de ervilha e da palha do trigo (Haddad e Husein, 2001).

2.4.1 – Aspectos científico

A lentilha (Figura 2.3) pertence à ordem Rosales, família Leguminosae, subfamília Papilionoidae, gênero *Lens*. Seu nome botânico é *Lens culinaris Medik*, embora seja também conhecida como *Lens esculenta Moench*. Além da espécie *Culinaris* que inclui a lentilha comestível, existem mais quatro espécies selvagens que não apresentam valor comercial (Carmo, 2004).



Figura 2.3 – Tipos de lentilhas

Fonte: www.portalsaofrancisco.com.br

As sementes de lentilha apresentam forma típica de lente biconvexa (Figura 2.4), com diâmetro variando entre 2 e 9 mm. O tegumento externo pode ser verde, rosa, preto, marrom ou cinza. O hilo é fino e elíptico. Os cotilédones podem ser verde, amarelo ou laranja; no entanto, todos se tornam amarelados depois de certo período de estocagem (Tang e Sokhansanj, 1994).

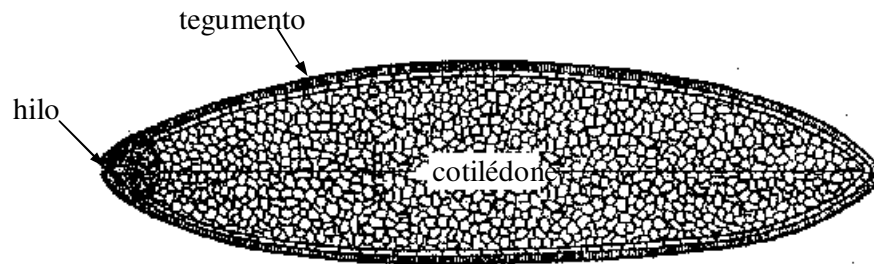


Figura 2.4– Diagrama esquemático da estrutura da lentilha.

Fonte: Tang e Sokhansanj (1993)

Os cotilédones, que representam aproximadamente 94% do peso total da semente, são revestidos por uma fina película exceto na região ocupada pelo pequeno hilo, que é uma pequena abertura com 1,5 mm de comprimento por 8 μ m de abertura.

De acordo com Gahoonia et al. (2006) a semente de lentilha é cultivada, muitas vezes, em solos pobres em nutrientes, com pouca ou sem aplicação de fertilizantes, porém ainda consegue manter sua produção.

2.4.2 – Secagem da lentilha

Com a produção da lentilha sendo mecanizada é aconselhável que o teor de umidade seja maior que 14% para evitar perdas durante a colheita; assim, quase sempre é oportuna uma secagem artificial do produto antes do armazenamento (entre 18 a 20%) (Oplinger et al., 1990; Carmo, 2004). Idealmente, esta secagem deve ser feita de tal forma que o grão fique invulnerável ao ataque de insetos e microrganismos e ainda seja preservado de danos mecânicos (Carmo, 2004).

O teor de umidade recomendado para armazenar as sementes de lentilhas secas deve ser na faixa de 13 a 14%, acima deste valor as sementes podem sofrer alterações provocadas

por microrganismos e, conseqüentemente, causará perda de sua qualidade (Oplinger et al., 1990; Ghosh et al., 2007).

Alguns trabalhos foram desenvolvidos para estudar as alterações que afetam a qualidade da semente de lentilha quanto à germinação e vigor, aos danos mecânicos e as características físico-química e sensorial da lentilha durante o ganho/perdas de umidade (Tang & Sokhansanj, 1993; Çarman, 1996; Isik, 2007; Zhang et al., 2008; Bagherpour et al., 2010; Isik et al, 2011).

Tang & Sokhansanj (1993a) avaliaram o efeito da temperatura do ar de secagem (40 a 80 °C), o teor de umidade inicial (16 a 20%) e a umidade relativa (5 a 70%) sob a germinação das sementes de lentilha e observaram que as mesmas sofreram perdas significativas de germinação quando secas a temperaturas entre 66 e 80 °C. Os autores concluíram que as perdas de germinação da semente de lentilha ocorrem devido aos danos mecânicos no germe da semente em virtude das tensões excessivas e da desnaturação das proteínas do germe em razão das altas temperaturas.

Bagherpour et al. (2010) observaram, estudando a dependência das propriedades físico-mecânica da lentilha com diferentes teores de umidade, que o diâmetro médio, a espessura e o ângulo de repouso da semente de lentilha aumentam com o aumento do teor de umidade do produto (8 a 20% b.u), enquanto a densidade e a força de ruptura diminuíram com o aumento do teor de umidade. De acordo com Szot et al. (2003), as propriedades físicas da lentilha são fortemente influenciadas pelo teor de umidade.

Isik (2007) verificou que o aumento do teor de umidade do grão de lentilha verde alterou significativamente alguns parâmetros físicos, durante sua reidratação. E que o aumento do teor de água de 11,36 para 25,08 %, aumentou a esfericidade, área projetada, porosidade, velocidade terminal e o coeficiente de fricção. Çarman (1996) também constatou que a densidade da lentilha diminui enquanto a porosidade, a área projetada e a velocidade terminal do grão aumentavam com sua reidratação.

2.5 - Coordenadas Generalizadas

As equações de difusão de calor e massa em sistemas de coordenadas cartesianas são muito utilizadas em problemas cujas geometrias dos sólidos se aproximem de uma placa plana ou uma forma para a qual as coordenadas do contorno do corpo possam ser dadas por expressões analíticas (Silva et al, 2010). Para geometrias mais complexas (geometria cilíndricas, esférica, elipsoidal prolata e oblata), vários autores também vêm aplicando a técnica de mudança de variável, sendo a mais usada a técnica de coordenadas generalizadas, para solucionar este problema.

Wu et al. (2004) concluíram que o modelo matemático desenvolvido para descrever a transferência de calor e a massa do grão de arroz, usando as coordenadas generalizadas via método de volume finito, descreveu bem esses dois fenômenos ao comparar os valores do teor de umidade e calor com os valores da literatura.

Carmo e Lima (2008) utilizaram o sistema de coordenadas generalizadas para a geometria oblata através do método dos volumes finitos, com malha 20x20, no intuito de resolver a equação de transferência de massa. Os autores concluíram que os resultados do teor de umidade médio do grão de lentilha foram consistentes com os resultados da literatura.

Silva et al. (2010) obtiveram, usando coordenadas generalizadas e o método dos volumes finitos, uma solução numérica para a equação de difusão do sólido com geometria arbitrária e observaram que os resultados obtidos pela solução proposta condizem com as soluções analíticas e com os dados experimentais.

Oliveira et al. (2012) constataram, estudando numericamente a transferência de calor e massa, em sólido eferoiadal oblato, através do método dos volumes finitos, com malha 20x20 e intervalo de 1,0s, que os dados numéricos se ajustaram bem aos dados experimentais.

Na Figura 2.5 pode-se perceber a relação entre as coordenadas do ponto P nos sistemas de eixos coordenados cartesianos (x,y,z) e o sistema de eixos com coordenadas generalizadas

(ξ, η, γ) . Um sistema de coordenadas generalizadas possui eixos que podem ser curvilíneos e não-ortogonais entre si, e também são referidos como sistema transformado (Silva, 2007).

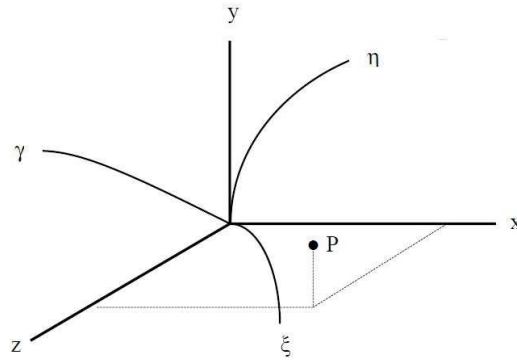


Figura 2.5 Sistemas de coordenadas cartesianas e de coordenadas generalizadas.

Fonte: Silva (2007)

2.5.1 – Métricas de uma transformação

As componentes do sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η, γ) podem ser relacionadas em funções do sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) , do seguinte modo (Anderson, 1995; Maliska, 2004; Silva et al., 2010):

$$\xi = \xi(x, y, z) \quad (2.9)$$

$$\eta = \eta(x, y, z) \quad (2.10)$$

$$\gamma = \gamma(x, y, z) \quad (2.11)$$

Desta forma, tem-se que as diferenciais totais destas funções podem ser dadas, na forma matricial, como segue:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Na forma compacta tem-se:

$$[DT] = [A][DF] \quad (2.13)$$

onde:

[DT] é um vetor no sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η, ζ), frequentemente chamado domínio transformado;

[DF] é o seu correspondente no sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z), também denominado domínio físico.

[A] é uma matriz dada por:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Já as coordenadas do ponto P no domínio físico podem ser obtidas invertendo-se o procedimento realizado anteriormente, da seguinte forma:

$$x = x(\xi, \eta, \gamma) \quad (2.15)$$

$$y = y(\xi, \eta, \gamma) \quad (2.16)$$

$$z = z(\xi, \eta, \gamma) \quad (2.17)$$

Usando o mesmo procedimento aplicado anteriormente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Na forma compacta:

$$[DF] = [B][DT] \quad (2.19)$$

onde:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Utilizando as equações (2.14) e (2.20), encontram-se:

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) & - \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\ - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) & - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) & - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Sendo o parâmetro J denominado jacobiano, denotado por:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|\mathbf{B}|} = |\mathbf{A}| \quad (2.22)$$

Usando a matriz $[\mathbf{B}]$ dada pela Equação (2.21) tem-se que o jacobiano pode ser determinado por:

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \right]^{-1} \quad (2.23)$$

No caso bi-dimensional o inverso do jacobiano determinado por Blazek (2001) é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.23a)$$

Levando em consideração as matrizes $[A]$ e $[B]^{-1}$ dadas, pode-se identificar as seguintes relações denominadas métricas da transformação do sistema (x, y, z) para o sistema (ξ, η, ζ) .

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = J \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -J \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = J \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -J \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = J \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (2.32)$$

Para a determinação das métricas para a transformação inversa, comparam-se as matrizes $[A]^{-1}$ e $[B]$ podem ser combinadas de forma a se obter as seguintes métricas:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)}{J} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)}{J} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)}{J} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)}{J} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)}{J} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = -\frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)}{J} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)}{J} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = -\frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)}{J} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)}{J} \quad (2.41)$$

2.5.2 – Vetores de base

No sistema de coordenadas cartesianas suas componentes são descritas em termos dos vetores unitários i , j e k . Cada vetor possui a mesma magnitude e direção para qualquer ponto do espaço representando uma proporcionalidade com o vetor de base (Maliska, 1995).

Ao se utilizar as coordenadas curvilíneas generalizadas, torna-se conveniente empregar vetores de base local que sejam alinhados ou normais às linhas coordenadas. Existem dois sistemas de vetores de base que podem ser utilizados: covariante e o contravariante.

2.5.2.1 – Vetores de base covariantes

Por definição, os vetores de base covariantes são tangentes às linhas coordenadas. Na Figura 2.6, pode-se observar que o vetor de base covariante e_ξ é tangente ao eixo ξ .

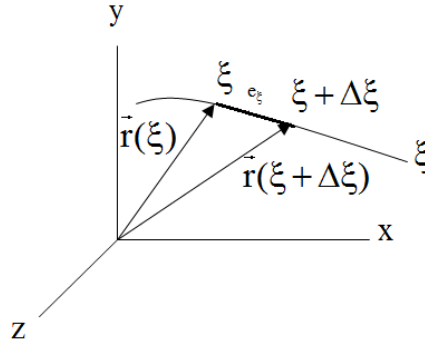


Figura 2.6 – Representação do vetor de base e_ξ

Fonte: Silva (2007).

O vetor de base covariante e_ξ é dado por:

$$e_\xi = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{r(\xi + \Delta\xi) - r(\xi)}{\Delta\xi} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \quad (2.42)$$

Como r é dado por:

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.43)$$

Logo o vetor de base covariante, e_ξ resulta em:

$$e_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \mathbf{k} \quad (2.44)$$

Para os demais vetores de base covariantes e_η e e_ζ , tem-se:

$$e_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \mathbf{k} \quad (2.45)$$

$$e_\zeta = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \mathbf{k} \quad (2.46)$$

generalizando: $e_{m^i} = \frac{\partial x}{\partial m^i} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial m^i} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial m^i} \bar{\mathbf{k}}$, em que $m^i = \xi(i = 1), \eta(i = 2), \zeta(i = 3)$

Esses vetores podem ser apresentados na forma matricial, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} e_{\xi} \\ e_{\eta} \\ e_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{i}} \\ \bar{\mathbf{j}} \\ \bar{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Segundo Maliska (2004), o fato dos vetores de base covariantes serem tangentes às linhas coordenadas generalizadas facilita a análise de resultados de problemas físicos pois basta estar de posse das métricas da transformação inversa e determinar o vetor na direção tangente desejada.

2.5.2.1.1 – Vetores unitários na base covariantes

Os vetores unitários na base covariantes são dados por:

$$u_{m^i} = \frac{e_{m^i}}{|e_{m^i}|} \Rightarrow u_{m^i} = \frac{e_{m^i}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial m^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial m^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial m^i}\right)^2}} \Rightarrow u_{m^i} = \frac{e_{m^i}}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (2.48)$$

$$\text{Em que } |e_{m^i}| = \sqrt{g_{ii}} \quad (2.49)$$

onde:

g_{ii} é a componente “ii” do tensor métrico.

Os vetores de base covariantes são representados por:

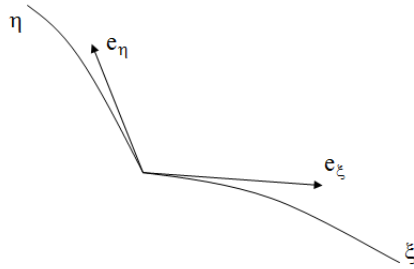


Figura 2.7 – Representação dos vetores de base covariantes e_ξ e e_η

Fonte: Silva (2007)

2.5.2.2 – Vetores de base contravariantes

De acordo com Maliska (2004) os vetores de base contravariantes são normais às superfícies coordenadas (Figura 2.8) e são definidos como:

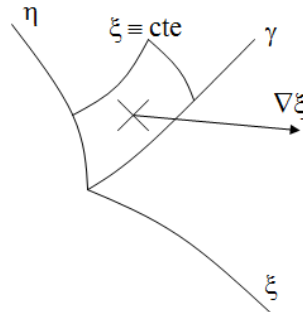


Figura 2.8 – Representação do vetor de base contravariantes e_ξ

Fonte: Silva (2007).

$$e^\xi = \nabla \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.50)$$

$$e^\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.51)$$

$$e^\zeta = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \mathbf{k} \quad (2.52)$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}^\xi \\ \mathbf{e}^\eta \\ \mathbf{e}^\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Os vetores unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} podem ser expressos nas bases covariantes e contravariantes, da seguinte forma:

$$\vec{i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \quad (2.54)$$

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial y} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \quad (2.55)$$

$$\vec{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial z} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \quad (2.56)$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \mathbf{e}_i \quad (2.57)$$

onde:

$$g_{ii} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.58)$$

$$g^{ii} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^i \quad (2.59)$$

Segundo Maliska (2004) quando um vetor é descrito pelas suas componentes covariante ou contravariante, o vetor de base a esta representação, não é nulo.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 - Teoria de Fortes e Okos

3.1.1 – Formulação geral

Fortes (1978), Fortes e Okos, (1980, 1981) e Fortes (1982) sugeriram, com base nos conceitos termodinâmicos de processos irreversíveis e utilizando os desenvolvimentos da abordagem mecanística, um modelo cujo fenômeno de encolhimento e os efeitos de pressão total são desconsiderados, assumindo as seguintes condições:

- a) Existência de equilíbrio local entre as fases sólida, líquida e vapor;
- b) Validade da equação de Gibbs para condições de não-equilíbrio;
- c) Validade das leis fenomenológicas lineares;
- d) Validade das relações fundamentais de Onsager;
- e) Sólido contínuo e isotrópico;
- f) A água migra nas fases líquida e vapor;

- g) A razão de transferência de calor e massa é mais lenta que a razão de mudança de fase;
- h) Validade do princípio de Curie, que não permite o acoplamento entre difusão e reação química.

A diferença fundamental entre a teoria de Fortes e Okos (1981) e as outras anteriores, é que a força motriz para a transferência isotérmica, tanto do líquido quanto do vapor, é um gradiente do teor de umidade de equilíbrio e não do teor de umidade sendo isto devido à hipótese de equilíbrio local (Fortes e Okos, 1981). A força motriz para a transferência de líquido e vapor é o gradiente do potencial químico que por sua vez, é função da temperatura, da umidade relativa e do teor de umidade de equilíbrio.

Neste modelo é postulado que a água em meios capilares porosos pode até mover-se no sentido contrário ao gradiente do teor de umidade mas sempre na direção do gradiente do teor de umidade de equilíbrio. Assim, o teor de umidade de equilíbrio é apresentado como a escolha mais natural para o potencial de transporte de massa que simplesmente o teor de umidade.

Em seguida, tem-se todo o equacionamento do modelo matemático apresentado por Fortes e Okos (1981), pois o mesmo será usado nesta pesquisa de forma modificada e ampliada.

O teorema de Onsager é válido se as relações seguintes existem entre a produção de entropia (σ), os fluxos (\vec{J}_i) e as forças termodinâmicas (\vec{X}_i):

$$\sigma = \frac{dS_i}{dt} = \sum_i \vec{J}_i \cdot \vec{X}_i \quad (3.1)$$

A expressão para a produção de entropia é dada por:

$$\sigma = \vec{J}_u \cdot \vec{X}_u + \sum_k \vec{J}_k \cdot \vec{X}_k \quad (3.2)$$

onde:

\vec{J}_u é fluxo de energia;

$\vec{X}_u = -\frac{1}{T^2} \nabla T$ é força conjugada associada ao fluxo de energia \vec{J}_u ;

\vec{J}_k é o fluxo de massa dos componentes k em relação ao centro de gravidade;

$\vec{X}_k = \frac{1}{T} \left[\vec{F}_k - T \nabla \left(\frac{\mu_k}{T} \right) \right]$ é a força conjugada associada a \vec{J}_k ;

\vec{F}_k são as forças externas na componente k;

S_i é a entropia do sistema;

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ é o gradiente em coordenadas cartesianas;

T é a temperatura, K.

μ_k é o potencial químico da componente k (J/kg)

O fluxo de calor deve ser empregado ao invés do fluxo de energia por ser mais conveniente; desta forma, é desejável que ocorra mudança de fluxos e forças. A prova da invariância do caráter simétrico da matriz L_{ik} ou, em outras palavras, a validade das relações de Onsager sob transformações lineares de forças e fluxos mantendo a produção de entropia, dS_i/dt invariante, é dada por DeGroot (1951).

Ao invés de utilizar o fluxo de energia que considera todas as formas de energia, como a cinética, potencial, térmica etc., emprega-se especificamente o fluxo de calor por ser mais conveniente; desta forma, é preferível que ocorra mudança de fluxos e forças. A prova da invariância do caráter simétrico da matriz L_{ik} ou, em outras palavras, a validade das relações de Onsager sob transformações lineares de forças e fluxos mantendo a produção de entropia, dS_i/dt invariante, é dada por DeGroot (1951).

Portanto, a expressão para o fluxo de calor (\vec{J}_q) pode ser escrita como:

$$\vec{J}_q = \vec{J}_u - \sum_k h_k \vec{J}_k \quad (3.3)$$

onde:

h_k é a entalpia da componente k .

Introduzindo essas transformações na Equação (3.2), as seguintes forças motrizes são obtidas:

$$\vec{X}_q = \vec{X}_u = -\frac{1}{T^2} \nabla T \quad (3.4)$$

e

$$\vec{X}_k = X_k^1 + h_k \vec{X}_u = \frac{1}{T} \left[\vec{F}_k - (\nabla \mu_k)_T \right] \quad (3.5)$$

sendo que a Equação (3.5) foi obtida utilizando-se a seguinte relação termodinâmica:

$$(\nabla \mu_k)_T = \nabla \mu_k - X_k \nabla T \quad (3.6)$$

em que $(\nabla \mu)_T$ é o potencial químico em condição isotérmica e $(\nabla \mu)$ é o potencial químico a qualquer temperatura.

Denotando por ℓ e v as fases líquida e de vapor, respectivamente, as equações gerais para o transporte de calor e massa podem ser escritas como:

$$\vec{J}_q = L_{qq} \vec{X}_q + L_{q\ell} \vec{X}_\ell + L_{qv} \vec{X}_v \quad (3.7)$$

$$\vec{J}_\ell = L_{\ell q} \vec{X}_q + L_{\ell\ell} \vec{X}_\ell + L_{\ell v} \vec{X}_v \quad (3.8)$$

$$\vec{J}_v = L_{vq} \vec{X}_q + L_{v\ell} \vec{X}_\ell + L_{vv} \vec{X}_v \quad (3.9)$$

Sendo que as forças motrizes $(\vec{X}_q, \vec{X}_\ell$ e $\vec{X}_v)$ são dadas por:

$$\vec{X}_q = -\frac{1}{T^2} \nabla T \quad (3.10)$$

$$\vec{X}_\ell = \frac{1}{T} \left[\vec{g} - (\nabla \mu_\ell)_T \right] \quad (3.11)$$

$$\vec{X}_v = \frac{1}{T} \left[\vec{g} - (\nabla \mu_v)_T \right] \quad (3.12)$$

onde:

g é a aceleração gravitacional.

A partir da condição de equilíbrio local, tem-se que:

$$\mu_\ell = \mu_v = \mu \quad (3.13)$$

As equações para as forças motrizes podem ser escritas na seguinte forma:

$$\vec{X}_m = \vec{X}_\ell = \vec{X}_v = \left[\frac{1}{T} \vec{g} - (\nabla \mu)_T \right] \quad (3.14)$$

onde:

X_m é a força motriz.

Propõe-se, portanto, que as forças motrizes para o transporte tanto de líquido quanto de vapor sejam as mesmas. Além disso, deve-se notar que essas forças motrizes dependem do potencial químico na condição isotérmica $(\nabla \mu)_T$ e não só do potencial químico $(\nabla \mu)$.

O potencial químico total da água em um meio capilar poroso pode ser escrito como a soma de potenciais químicos individuais, como segue:

$$\nabla \mu = \nabla \mu_s + \nabla \mu_p + \nabla \mu_o + \nabla \mu_F \quad (3.15)$$

onde:

$\nabla \mu_s$ é o componente do potencial químico devido à tensão superficial e o raio de curvatura da interface água-ar;

$\nabla\mu_p$ é o componente devido à pressão hidrostática da umidade adjacente à superfície da partícula causada por forças de adsorção rodeando a partícula (excluindo o efeito da tensão superficial) e por qualquer pressão transmitida de fontes externas;

$\nabla\mu_o$ é o componente devido à pressão osmótica do material dissolvido;

$\nabla\mu_F$ é o potencial químico da água devido à sua posição no campo de adsorção rodeando as partículas intersticiais, e devido também ao campo gravitacional.

Devido a complexidade da Equação (3.15), pode-se concluir que a aceitação de uma das expressões isoladas das teorias de difusão líquida, capilaridade ou vaporização-condensação é uma simplificação exagerada para o problema em vista, de uma maneira geral.

Qualquer alteração no potencial químico resulta na mudança da pressão de vapor e, conseqüentemente, da umidade relativa de equilíbrio no interior do meio poroso. Admitindo que a mistura de ar e vapor é uma mistura de gases perfeitos, a Equação (3.16), relacionando o potencial químico total do vapor d'água em equilíbrio com a água líquida nos capilares, é postulada ser válida para toda a isoterma:

$$\mu_v - \mu_{v0} = R_v T \ln \left(\frac{P_v}{P_{v0}} \right) = R_v T \ln H \quad (3.16)$$

onde:

μ_{v0} é o potencial químico do vapor saturado;

R_v é a constante universal do gás referente ao vapor de água;

P_v é a pressão parcial de vapor;

P_{v0} é a pressão parcial de vapor saturado;

H é umidade relativa de equilíbrio no interior de um meio capilar poroso.

E todos os componentes do potencial químico da Equação (3.15) deve-se refletir seus efeitos nos fatores que afetam a umidade relativa de equilíbrio, exceção deve ser feita às pressões não-hidrostáticas.

De vez que a umidade relativa de equilíbrio (H) é função do teor de umidade de equilíbrio (M) e da temperatura do ar de secagem (T), tem-se que:

$$H = H(M, T) \quad (3.17)$$

Após derivação direta da Equação (3.17) considerando o gradiente de umidade relativa de equilíbrio na mesma temperatura (processo isotérmico) pode-se concluir, imediatamente, que:

$$(\nabla H)_T = \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M \quad (3.18)$$

das Equações (3.13), (3.16) e (3.18), obtém-se:

$$(\nabla \mu)_T = \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M \quad (3.19)$$

onde:

M deve ser tomado como o teor de umidade de equilíbrio em qualquer local no interior do meio poroso.

Substituindo as Equações (3.10), (3.11), (3.12), (3.14) e (3.19) nas Equações (3.7), (3.8) e (3.9), obtém um conjunto mais explícito de equações para os fluxos de calor, vapor e água líquida, como segue:

$$\vec{J}_q = -\frac{L_{qq}}{T^2} \nabla T - (L_{q\ell} + L_{qv}) \frac{R_v}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \frac{(L_{q\ell} + L_{qv})}{T} \vec{g} \quad (3.20)$$

$$\vec{J}_v = -\frac{L_{vq}}{T^2} \nabla T - (L_{v\ell} + L_{vv}) \frac{R_v}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \frac{(L_{v\ell} + L_{vv})}{T} \vec{g} \quad (3.21)$$

$$\vec{J}_\ell = -\frac{L_{\ell q}}{T^2} \nabla T - (L_{\ell\ell} + L_{\ell v}) \frac{R_v}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \frac{(L_{\ell\ell} + L_{\ell v})}{T} \vec{g} \quad (3.22)$$

3.1.2 - Abordagem mecanística

Esta abordagem é essencial para a obtenção dos coeficientes fenomenológicos. Postula-se a igualdade entre o potencial químico e o potencial de água (sucção).

A expressão para o fluxo de líquido é dada da seguinte maneira:

$$\vec{J}_\ell = -\rho_\ell k_\ell \nabla \mu \quad (3.23)$$

onde:

ρ_ℓ é a densidade do líquido;

k_ℓ é a condutividade líquida;

$\nabla \mu$ é o potencial químico.

O sinal negativo da equação (3.23) indica que o fluxo de líquido ocorre no sentido dos potenciais decrescentes, ou seja, no sentido contrário ao gradiente do potencial químico. O potencial químico ($\nabla \mu$) é tomado como sendo a força-motriz para a transferência de massa em condições isotérmicas ou não isotérmicas.

A Equação (3.23) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{J}_\ell = -\rho_\ell k_\ell \frac{\partial \mu}{\partial T} \nabla T - \rho_\ell k_\ell \frac{\partial \mu}{\partial H} \nabla H \quad (3.24)$$

Substituindo a Equação (3.16) e a relação (3.17) na Equação (3.24) e acrescentando o efeito da gravidade, obtém-se:

$$\vec{J}_\ell = -\rho_\ell k_\ell R_v \ell n H \nabla T - \rho_\ell k_\ell \left(\frac{R_v T}{H} \right) \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \rho_\ell k_\ell \vec{g} \quad (3.25)$$

Esta é uma expressão generalizada para a equação de Darcy.

A expressão para o fluxo de vapor é a mesma utilizada por Fortes (1978) e adaptada a partir das expressões clássicas (Philip e De Vries, 1957; Krischer, 1963; Luikov, 1966):

$$\vec{J}_v = -\varepsilon a \frac{P}{P - P_v} D_{\text{atm}} \nabla P_v \quad (3.26)$$

onde:

\vec{J}_v é o Fluxo de vapor, kg/sm;

ε é a tortuosidade;

a é o conteúdo volumétrico de ar em meio poroso, m^3/m^3 ;

P é a pressão total, N/m^2 ;

P_v é a pressão parcial de vapor, N/m^2 ;

D_{atm} é o coeficiente de difusão molecular da água no ar, m^2/s ;

ρ_v é a densidade, kg/m^3 .

Definindo a condutividade de vapor como sendo:

$$k_v = -\varepsilon a \frac{P}{P - P_v} D_{atm} \quad (3.27)$$

pode-se escrever:

$$\vec{J}_v = -k_v \nabla \rho_v \quad (3.28)$$

que pode ser reescrito na forma:

$$\vec{J}_v = -k_v \nabla \left(\rho_{v0} \frac{\rho_v}{\rho_{v0}} \right) = -k_v (\rho_{v0} \nabla H + H \nabla \rho_{v0}) \quad (3.29)$$

ou ainda, acrescentando o efeito gravitacional, pode-se escrever:

$$\vec{J}_v = -k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \nabla T - k_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \rho_v k_1 \vec{g} \quad (3.30)$$

A expressão para o fluxo de calor é dada pela Lei de Fourier, com a condutividade térmica redefinida:

$$\left(\vec{J}_q \right)_m = -k_T \nabla T \quad (3.31)$$

onde:

k_T refere-se à condutividade térmica aparente efetiva do meio poroso, válida para condições que não envolvem transporte de massa.

A inclusão de um termo em que se insere o transporte de massa, é discutida mais adiante.

3.1.3 - Avaliação dos coeficientes fenomenológicos

Comparando as equações (3.19) e (3.22) com as Equações (3.25), (3.30) e (3.31) e fazendo uso das relações de Onsager, obtém-se:

$$L_{qq} = T^2 k_T \quad (3.32)$$

$$L_{q\ell} = L_{\ell q} = T^2 \rho_\ell k_\ell R_v \ell nH \quad (3.33)$$

$$L_{\ell\ell} + L_{\ell v} = T \rho_\ell k_\ell \quad (3.34)$$

$$L_{vq} = L_{qv} = T^2 k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \quad (3.35)$$

$$L_{v\ell} + L_{v\ell} = \frac{H k_v \rho_{v0}}{R_v} \quad (3.36)$$

Ressalta-se que L_{qv} e $L_{q\ell}$, são os coeficientes fenomenológicos que caracterizam o transporte de calor ocasionando pelos gradientes dos potenciais de vapor e líquido e também foram obtidos através das relações de Onsager.

Desta forma, por substituição direta desses parâmetros nas Equações (3.20) e (3.22), obtém-se as equações finais para os fluxos de calor, líquido e vapor, como segue:

$$\begin{aligned} \vec{J}_q = & -k_T \nabla T - \left[\rho_\ell k_\ell R_v \ell nH + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right] \frac{R_v T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \\ & + T \left[\rho_\ell k_\ell R_v \ell nH + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right] \vec{g} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\vec{J}_\ell = -\rho_\ell k_\ell R_v \ell nH \nabla T - \rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \rho_\ell k_\ell \vec{g} \quad (3.38)$$

$$\vec{J}_v = -k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \nabla T - k_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \left(\frac{H k_v \rho_{v0}}{TR_v} \right) \vec{g} \quad (3.39)$$

onde:

\vec{J}_ℓ é o fluxo de líquido;

ρ_ℓ é a massa específica do sólido seco;

k_ℓ é a condutividade do líquido;

\vec{J}_q é o fluxo de calor;

H é a umidade relativa decimal;

M é o teor de umidade (b.s);

R_v é a constante universal para o vapor de água;

\vec{J}_v é o fluxo de vapor;

k_v é a condutividade de vapor.

Postula-se a validade dessas equações para quaisquer meios porosos, saturados ou não saturados, para condições nas quais o efeito de filtração (transporte molar) seja desprezível.

3.1.4 - Equações de conservação

Considerando-se a inexistência de gelo e que a massa de ar seja desprezível, as equações diferenciais para a transferência de massa aplicada às fases de vapor e líquido presentes no sistema, levam a:

$$\frac{\partial(\rho_s M_\ell)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}_\ell + \dot{M}_{ev} \quad (3.40)$$

e

$$\frac{\partial(\rho_s M_v)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}_v + \dot{M}_{ev} \quad (3.41)$$

onde:

\dot{M}_{ev} é a taxa de evaporação de umidade;

ρ_s é a massa específica do sólido.

Se a massa de vapor (mas não seu fluxo) é também suposta ser desprezível em relação a M_ℓ (Luikov, 1966), a equação de conservação de massa para um volume de controle elementar, se torna:

$$\frac{\partial(\rho_s M)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{J}_\ell + \vec{J}_v) \quad (3.42)$$

onde:

t é o tempo;

$$M = M_\ell + M_v \approx M_\ell.$$

Se o encolhimento do meio for desprezível, a massa específica do esqueleto sólido do meio é constante e a Equação (3.42) se torna:

$$\rho_s \frac{\partial M}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{J}_\ell + \vec{J}_v) \quad (3.43)$$

A Equação (3.43) foi usada por Fortes (1978) para o transporte de massa no interior do grão do trigo.

A equação do balanço de balanceamento de energia pode ser obtida estabelecendo-se que a taxa de variação da entalpia volumétrica do sistema menos o calor de adsorção, é igual à divergência do fluxo de entalpia. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h_s \rho_s + h_\ell \rho_s M_\ell + h_v \rho_s M_v - \rho_s \int_0^M h_w dM \right) = -\nabla \cdot (\vec{J}_q + h_\ell \vec{J}_\ell + h_v \vec{J}_v) \quad (3.44)$$

onde:

h_w é o calor diferencial específico de sorção;

h_ℓ é a entalpia do líquido

h_v é a entalpia do vapor d'água

A partir da definição de calor específico e do calor de adsorção dados por:

$$c = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (3.45)$$

e

$$h_w = R_v T^2 \frac{\partial \ln H}{\partial T} \quad (3.46)$$

Segue-se que:

$$\begin{aligned} & (c_s \rho_s + c_\ell \rho_s M_\ell + c_v \rho_s M_v) \frac{\partial T}{\partial t} + h_\ell \frac{\partial(\rho_s M_\ell)}{\partial t} + h_v \frac{\partial(\rho_s M_v)}{\partial t} - \rho_s h_w \frac{\partial M}{\partial t} = \\ & -\nabla \cdot \vec{J}_q - \vec{J}_\ell \cdot c_\ell \nabla T - \vec{J}_v \cdot c_v \nabla T - h_\ell \nabla \cdot \vec{J}_\ell - h_v \nabla \cdot \vec{J}_v \end{aligned} \quad (3.47)$$

Multiplicando as Equações (3.40) e (3.41) por h_ℓ e h_v , respectivamente, adicionando-as e substituindo o resultado na Equação (3.47), obtém-se a forma final da equação de conservação de energia. A equação resultante é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s h_w M) = -\nabla \cdot \vec{J}_q - \nabla \cdot (h_{fg} \vec{J}_v) - \vec{J}_\ell \cdot c_\ell \nabla T - \vec{J}_v \cdot c_v \nabla T \quad (3.48)$$

onde:

h_w é o calor diferencial específico de sorção;

h_{fg} é o calor latente específico de vaporização;

c_s é o calor específico do produto;

c_ℓ é o calor específico do líquido;

c_v é o calor específico do vapor e,

c_b é o calor específico do meio úmido, dado por:

$$c_b = c_s + c_\ell M_\ell + c_v M_v \quad (3.49)$$

Se o processo ocorre sem encolhimento e desde que o termo referente ao transporte convectivo de calor é geralmente pequeno em comparação com o termo condutivo, pode-se escrever:

$$\rho_s c_b \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_s h_w \frac{\partial M}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}_q - h_{fg} \nabla \cdot \vec{J}_v \quad (3.50)$$

Esta equação foi usada por Fortes (1978) para o transporte de calor. O modelo de Fortes e Okos é constituído, numa forma mais geral, pelas as Equações (3.37), (3.39), (3.43) e (3.48).

Segundo Fortes (1978) esta metodologia permite verificar a importância relativa dos fluxos de vapor, líquido e calor, levando-se em consideração os gradientes hídrico e térmico para determinado processo de transferência de calor e massa que o modelo de difusão líquida simples não apresenta na condição de secagem. Sendo possível determinar se existe um fenômeno dominante e, no caso afirmativo, se é o de difusão de líquido ou de vapor.

3.2 - A equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esferoidais oblato

A equação de difusão de massa em coordenadas cartesianas para o caso tridimensional, é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial M}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial M}{\partial z} \right) \quad (3.51)$$

onde:

D é o coeficiente de difusão;

M é a massa.

Substituindo M por T (Temperatura) e D por α (difusividade térmica), na equação (3.51) tem-se a equação da condução de calor considerando-se que as propriedades térmicas c_p e ρ sejam constantes.

A equação (3.51) é ideal para descrever o problema de difusão de massa em placas retangulares e em corpos com a forma de um paralelepípedo. No caso particular de sólido de

revolução um sistema de coordenadas que se adequa muito bem à forma do corpo, é o esferoidal oblato.

Segundo Magnus et al. (1966) as relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas (x,y,z) e o sistema de coordenadas esferoidais oblatos (elípticas) (μ, ϕ, ω) são as seguintes:

$$x = L \cosh \mu \sin \phi \cos \omega \quad (3.52a)$$

$$y = L \cosh \mu \sin \phi \sin \omega \quad (3.52b)$$

$$z = L \sinh \mu \cos \phi \quad (3.52c)$$

A Figura 3.1 mostra as principais características de um corpo com a geometria esferoidal oblata.

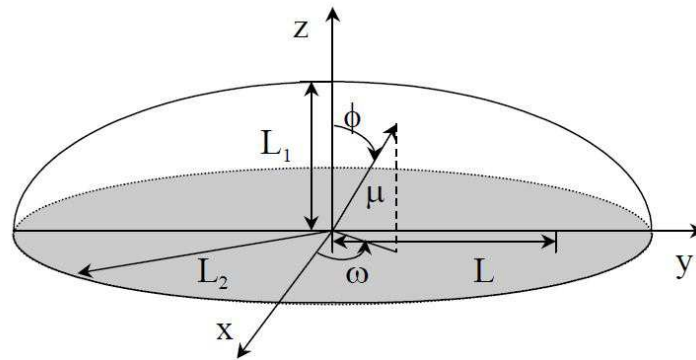


Figura 3.1 – Características de um corpo esferoidal oblato.

Fonte: Carmo e Lima (2008).

Da Figura 3.1, obtém-se as seguintes relações:

$$e = L_2/L \quad (3.53)$$

$$L_1 = L\sqrt{e^2 - 1} \quad (3.54)$$

onde:

L é o comprimento;

L_1 e L_2 são os semieixos menor e maior da elipse, respectivamente.

Combinando as equações (3.53) e (3.54) pode-se mostrar que:

$$L = \sqrt{L_2^2 - L_1^2} \quad (3.55)$$

De acordo com a Figura 3.1, percebe-se que quando $L_2 = L_1$, o esferoide será uma esfera; para $L_2 > L_1$, o esferoide é dito oblato e para $L_2 < L_1$ tem-se um esferoide prolato. Quando $L_2/L_1 \rightarrow \infty$, o ponto focal se desloca para a superfície do corpo e a forma do corpo se aproxima de um disco circular.

Para expressar a equação de difusão no sistema de coordenadas esferoidais oblata, tem-se as seguintes relações:

$$\xi = \sinh \mu \quad \eta = \cos \phi \quad \zeta = \cos \omega \quad (3.56)$$

Com o auxílio das relações trigonométricas, $\cosh^2 \mu - \sinh^2 \mu = 1$ e $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ e de posse das relações (3.52a-c), obtém-se para as coordenadas (x,y, z):

$$x = L \sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \zeta \quad (3.57a)$$

$$y = L \sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.57b)$$

$$z = L \xi \eta \quad (3.57c)$$

O domínio das novas variáveis esferoidais ξ , η e ζ (em termos de ω), relacionadas com a Figura 3.1 é definido por:

$$0 \leq \xi \leq L_1/L \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

Utilizando a metodologia apresentada por Maliska (2004) com vista à obtenção da equação de difusão no sistema de coordenadas esferoidal oblata, tem-se que a equação geral de difusão é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \Phi}{j} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \mathbf{J} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} \mathbf{J} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{13} \mathbf{J} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \\
\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{21} \mathbf{J} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} \mathbf{J} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{23} \mathbf{J} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) &+ \\
\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{31} \mathbf{J} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{32} \mathbf{J} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{33} \mathbf{J} \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) &+ \frac{\mathbf{S}^\Phi}{\mathbf{J}}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

onde:

\mathbf{J} é o jacobiano da transformação e é obtido pela relação seguinte:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \tag{3.59}$$

Os coeficientes α_{ij} são calculados usando-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{a'}{j^2}; & \alpha_{22} &= \frac{b'}{j^2}; & \alpha_{33} &= \frac{c'}{j^2}; \\
\alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{d'}{j^2}; & \alpha_{31} = \alpha_{13} &= \frac{e'}{j^2}; & \alpha_{32} = \alpha_{23} &= \frac{f'}{j^2};
\end{aligned} \tag{3.60a-f}$$

com:

$$\begin{aligned}
a' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 & b' &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \\
c' &= \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 & d' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \\
e' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) & f' &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{3.61a-f}$$

Os termos que contêm α_{ij} , com $i \neq j$, que aparecem na equação, são os termos difusivos referentes à não-ortogonalidade da malha.

As condições para que as linhas de uma malha estruturada sejam ortogonais, são (MacRobert, 1967):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0 \quad (3.62a)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) = 0 \quad (3.62b)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) = 0 \quad (3.62c)$$

Essas equações resultam da imposição do produto escalar zero entre os vetores de base covariantes $e_\xi \cdot e_\eta = 0$, $e_\xi \cdot e_\zeta = 0$ e $e_\eta \cdot e_\zeta = 0$, que é a condição para que as linhas da malha sejam perpendiculares entre si.

Desta forma, os termos d' , e' e f' das Equações (3.61d-f) são eliminados; daí, a equação se reduz para:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{33} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \frac{S^\Phi}{J} \quad (3.63)$$

Na condição do problema sem termo de geração ou qualquer outro termo fonte, a equação geral reduz-se a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{33} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \quad (3.64)$$

As expressões para o jacobiano J^{-1} e os coeficientes α_{ij} , com $i = j$ são:

$$J^{-1} = \frac{L^3 (\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{(1 - \zeta^2)}} \quad \alpha_{11} = \frac{L^4 (\xi^2 + 1) (\xi^2 + \eta^2)}{(1 - \zeta^2)}$$

$$\alpha_{22} = \frac{L^4 (1 - \eta^2) (\xi^2 + \eta^2)}{(1 - \zeta^2)} \quad \alpha_{33} = \frac{L^4 (\xi^2 + \eta^2)^2}{(1 - \eta^2) (1 + \xi^2)}$$

Substituindo os valores do jacobiano (J) e dos coeficientes α_{ij} , com $i = j$; re-arranjando os termos, a Equação (3.64), assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = & \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

A Equação (3.65) é a equação de difusão escrita no sistema de coordenadas esferoidais oblato.

Como o sólido apresentado na Figura 3.1 é resultante da rotação de uma superfície elíptica em torno do eixo z, existe uma simetria em torno deste eixo e o termo da derivada $\partial/\partial\omega=0$, implicando que $\partial/\partial\zeta = 0$; assim, o terceiro termo da equação (3.65) se anulará e a equação (3.65) se reduz a:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.66)$$

Como esta equação diferencial parcial é de segunda ordem na posição e de primeira ordem no tempo, sua solução requer, no mínimo, duas condições de contorno em cada direção e uma condição inicial. São elas:

$$\Phi(\xi, \eta, t = 0) = g_1(\xi, \eta) \quad (3.67a)$$

$$\Phi(\xi = L_2/L, \eta, t) = g_2(\eta, t) \quad (3.67b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\xi, \eta = 0, t) = g_3(\xi, t), \quad (3.67c)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(\xi = 0, \eta, t) = g_4(\eta, t) \quad (3.67d)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\xi, \eta = 1, t) = g_5(\xi, t) \quad (3.67e)$$

Para melhor visualização observa-se, na Figura 3.2, o domínio transformado das condições de controle.

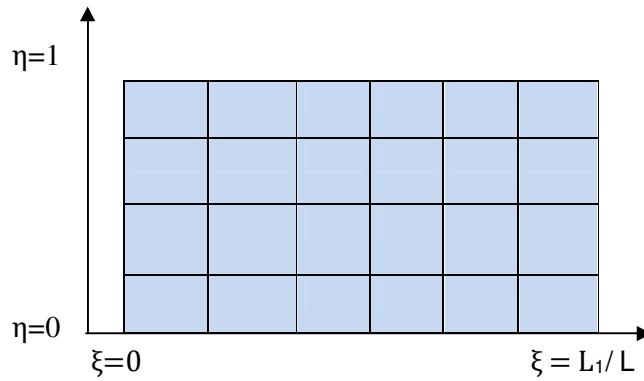


Figura 3.2 - Domínio transformado

Os pesquisadores Magnus et al. (1966); Brodkey (1967); Abramowitz e Stegun (1972) e Kreyszig (1988) apresentaram relações matemáticas que podem ser usadas para calcular o gradiente de Φ , as áreas de transferência de massa e/ou calor e o volume diferencial do sólido no novo sistema de coordenadas. Estas variáveis são obtidas como segue:

a) Volume diferencial

$$dV = \left(\frac{1}{\hat{U}\hat{V}\hat{W}} \right) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.68)$$

onde:

\hat{U} , \hat{V} e \hat{W} são os coeficientes métricos.

b) Área diferencial de fluxo de Φ

$$\begin{aligned} dS_\xi &= \frac{1}{\hat{V}\hat{W}} d\eta d\zeta \\ dS_\eta &= \frac{1}{\hat{W}\hat{U}} d\zeta d\xi \\ dS_\zeta &= \frac{1}{\hat{U}\hat{V}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.69a-c)$$

c) Gradiente de Φ

$$\nabla\Phi = \text{Grad}\Phi = \left(\hat{U} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}; \hat{V} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}; \hat{W} \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right) \quad (3.70)$$

onde os coeficientes métricos são obtidos por:

$$\frac{1}{\hat{U}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{\hat{V}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.72)$$

$$\frac{1}{\hat{W}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (3.73)$$

Os parâmetros \hat{U} , \hat{V} e \hat{W} são chamados coeficientes métricos da transformação. É possível demonstrar que o produto dos coeficientes métricos dá, como resultado, o próprio jacobiano da transformação (J). Com a substituição dos coeficientes métricos nas equações (3.68) a (3.70), obtém-se:

$$dV = \frac{L^3 (\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.74)$$

$$dS_\xi = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 + \eta^2) (\xi^2 + 1)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\eta d\zeta \quad (3.75a)$$

$$dS_\eta = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 + \eta^2) (1 - \eta^2)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\xi d\zeta \quad (3.75b)$$

$$dS_\zeta = \frac{L^2 (\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{(\xi^2 + 1) (1 - \eta^2)}} d\xi d\eta \quad (3.75c)$$

$$\nabla \Phi = \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \zeta^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \quad (3.76)$$

Com base na metodologia apresentada e considerando desprezíveis os efeitos gravitacionais, pode-se escrever as Equações (3.42) e (3.48) como segue:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s M) = -\nabla \cdot \left[\rho_\ell k_\ell R_v \ln H \nabla T - \rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \nabla T - k_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M \right] \quad (3.77a)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s h_w M) = & \nabla \cdot (k_T \nabla T) + \nabla \cdot \left\{ \left[\rho_\ell k_\ell R_v \ln(H) + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right] \left(\frac{R_v T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \right) \nabla M \right\} + \\ & \nabla \cdot \left[h_{fg} k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \nabla T \right] + \nabla \cdot \left[h_{fg} k_v \rho_{v0} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) \nabla M \right] + \end{aligned}$$

$$+ \left[c_\ell \rho_\ell k_\ell R_v \ln(H) + k_v c_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right] \nabla T \cdot \nabla T + \left[c_\ell \rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) + k_v c_v \rho_{v0} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) \right] \nabla M \cdot \nabla T$$

Numa forma mais compacta, as Equações (3.77a) e (3.77b) podem ser escritas como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s M) = \nabla \cdot (\Gamma_1^\Phi \nabla M) + \nabla \cdot (\Gamma_2^\Phi \nabla T) \quad (3.78a)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s h_w M) &= \nabla \cdot (\Gamma_3^\Phi \nabla T) + \nabla \cdot (\Gamma_4^\Phi \nabla M) + \nabla \cdot (\Gamma_5^\Phi \nabla T) \\ + \nabla \cdot (\Gamma_6^\Phi \nabla M) &+ \Gamma_7^\Phi \nabla T \cdot \nabla T + \Gamma_8^\Phi \nabla M \cdot \nabla T \end{aligned} \quad (3.78b)$$

sendo:

$$\Gamma_1^\Phi = \left[\rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) + k_v \rho_{v0} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) \right];$$

$$\Gamma_2^\Phi = \rho \left[\rho_\ell k_\ell R_v \ln(H) + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right];$$

$$\Gamma_3^\Phi = k_T;$$

$$\Gamma_4^\Phi = \left[\rho_\ell k_\ell R_v \ln(H) + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right] \left(\frac{R_v T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \right);$$

$$\Gamma_5^\Phi = h_{fg} k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right);$$

$$\Gamma_6^\Phi = h_{fg} k_v \rho_{v0} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right);$$

$$\Gamma_7^\Phi = c_\ell \rho_\ell k_\ell R_v \ln(H) + k_v c_v \left[\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \left(\frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right];$$

$$\Gamma_8^\Phi = c_\ell \rho_\ell k_\ell \frac{R_v}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) + k_v c_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M}.$$

Escrevendo as Equações (3.78a) e (3.78b) no sistema de coordenadas esferoidais oblatas, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho_s M)}{\partial t} = & \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] + \\
& + \left[\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \Gamma_2^\Phi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] + \\
& \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_2^\Phi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] + \left[\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_2^\Phi \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (3.79a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s h_w M) = & \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ [(\xi^2 + 1) \Gamma_3^\Phi] \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ [(1 - \eta^2) \Gamma_3^\Phi] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\} + \\
& + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ [(\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_3^\Phi] \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right\} + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ [(\xi^2 + 1) \Gamma_4^\Phi] \frac{\partial M}{\partial \xi} \right\} + \\
& \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ [(1 - \eta^2) \Gamma_4^\Phi] \frac{\partial M}{\partial \eta} \right\} + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ [(\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_4^\Phi] \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right\} + \\
& \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ [(\xi^2 + 1) \Gamma_5^\Phi] \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ [(1 - \eta^2) \Gamma_5^\Phi] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\} + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ [(\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_5^\Phi] \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right\} + \\
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ [(\xi^2 + 1) \Gamma_6^\Phi] \frac{\partial M}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ [(1 - \eta^2) \Gamma_6^\Phi] \frac{\partial M}{\partial \eta} \right\} + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ [(\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_6^\Phi] \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right\} + \\
& + \Gamma_7^\Phi \left[\left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 + 1)}{(\xi^2 + \eta^2)}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \zeta^2)}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right)^2 \right] + \\
(3.79b) \quad & + \Gamma_8^\Phi \left[\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 + 1)}{(\xi^2 + \eta^2)}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \Gamma_8^\Phi \left[\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)}} \frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \Gamma_8^\Phi \left[\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \zeta^2)}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial M}{\partial \zeta} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right] \right] \right]
\end{aligned}$$

Para o caso bidimensional, devido à simetria do sólido, as equações (3.79a) e (3.79b) reduz-se a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho_s M)}{\partial t} = & \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] + \\
& + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \Gamma_2^\Phi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_2^\Phi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.80a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s h_w M) = \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \Gamma_3^\Phi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_3^\Phi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \Gamma_5^\Phi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_5^\Phi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] \right\} + \frac{\Gamma_7^\Phi}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \\
& \left[(\xi^2 + 1) \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)^2 + (1 - \eta^2) \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\Gamma_8^\Phi}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \left[(\xi^2 + 1) \frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} + (1 - \eta^2) \frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \\
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \Gamma_4^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_4^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \Gamma_6^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_6^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.80b}$$

Para determinar a perda de umidade e o aquecimento no processo de secagem, torna-se necessário determinar o teor de umidade médio em todo o volume do elipsoide. Sabe-se, também, que o teor de umidade no interior do sólido durante o estado transiente é uma função da posição e do tempo; logo, pode-se encontrar, para o sólido, um teor de umidade médio assim como sua temperatura média. Este teor de umidade médio é dado por (Whitaker, 1980):

$$\bar{M} = \frac{1}{V} \int_V M(\xi, \eta, t) dV \tag{3.81a}$$

A temperatura média pode ser obtida como segue:

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \int_V T(\xi, \eta, t) dV \tag{3.81b}$$

onde V é o volume do sólido.

3.3 - Resolução numérica das equações governantes

Vários pesquisadores vêm estudando a técnica de volumes finitos para resolver problemas de difusão de calor e massa em sólidos com geometrias mais complexas, tais como Wu et al. (2004) para descrever a transferência de calor e massa do grão de arroz; Carmo e Lima (2008), para um esferoide oblato (grão de lentilha); Silva et al. (2010), para a equação de difusão do sólido com geometria arbitrária; Oliveira et al. (2012) para um esferoide prolato (grão de trigo) entre outros.

Nesta seção será apresentada uma metodologia para a solução numérica do problema de difusão transiente em corpos elipsoidais utilizando-se o conceito de volumes finitos.

3.3.1 – Discretização da equação da conservação de massa

Pode-se encontrar com facilidade, na literatura atual, o desenvolvimento de várias técnicas numéricas. Normalmente, cada termo da equação envolvendo as diferenciais, é aproximado por somas ou diferenças de valores pontuais da grandeza física representativa do fenômeno, localizada em pontos discretos do domínio, denominados pontos nodais (Carmo, 2004). Assim, surgem alguns métodos de discretização para a obtenção do sistema de equações algébricas, tais como: volumes finitos, elementos finitos, diferenças finitas e elementos de fronteira.

A formulação numérica para um problema qualquer começa com a identificação do domínio de interesse e, a partir daí, sua subdivisão em um número finito de subdomínios.

Na Figura 3.3(a) observam-se as linhas de ξ e η constantes delimitando o volume de controle associado ao ponto nodal P. Os pontos N, S, E e W são os pontos nodais vizinhos a P, os quais representam os pontos nodais norte, sul, leste e oeste, respectivamente. Observam-se, também, a distância entre o ponto nodal P e seus vizinhos ($\delta\xi$ e $\delta\eta$) e as dimensões do volume de controle ($\Delta\xi$, $\Delta\eta$).

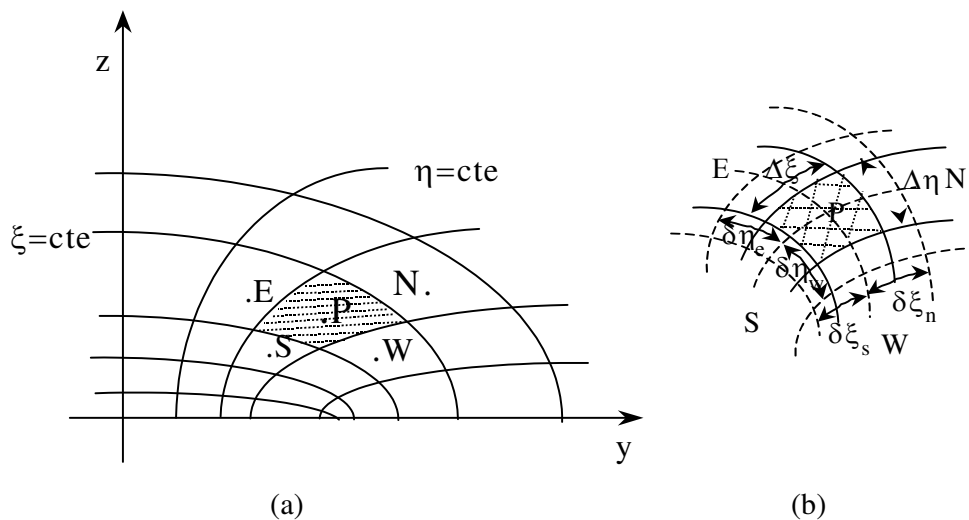


Figura 3.3 – Superfície contínua subdividida em pontos nodais

O método de volumes finitos foi utilizado para resolver numericamente a equação de difusão em coordenadas elípticas. Neste método os pontos nodais estão centrados no volume de controle e a malha adotada possui volumes inteiros em todo o domínio (Patankar, 1980; Maliska, 2004). O procedimento é preferido por duas razões: porque facilita a generalização da determinação dos coeficientes e simplifica a aplicação das condições de contorno.

Para o caso bidimensional tem-se a equação de conservação de massa dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_s M)}{\partial t} = & \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \Gamma_1^\phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_1^\phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 + 1) \Gamma_2^\phi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_2^\phi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.82)$$

A equação (3.82) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_1 \Phi_1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + S_1^\phi \quad (3.83)$$

onde:

$$S_1^\phi = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma_2^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma_2^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \quad (3.84)$$

Aplicando o método dos volumes finitos à equação (3.83) e considerando uma formulação completamente implícita, ou seja, todos os termos difusivos da equação são avaliados no instante $t+\Delta t$, integrando sobre o volume de controle (Figura 3.3), que corresponde aos pontos internos do domínio, e no tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_{v_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \Phi_1}{J} \right) dt dv = & \iint_{v_t} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\alpha_{11} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \right] dt dv + \iint_{v_t} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \\ & dt dv + \iint_{v_t} S_1^\phi dt dv \end{aligned} \quad (3.85a)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \Phi_1}{j} \right) dt d\xi d\eta &= \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^c \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\alpha_{11} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \right] dt d\xi d\eta + \\ + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^c \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\alpha_{22} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \right] dt d\xi d\eta &+ \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^c S_1^\phi dt d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.85b)$$

Após as integrações no tempo e no espaço das expressões da equação (3.85b) e dividindo-a por Δt , tem-se:

$$\left[\frac{\lambda_p \Phi_{1p} - \lambda_p^\circ \Phi_{1p}^\circ}{\Delta t} \right] \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{J_p} = \left[\left(D_{11} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{11} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{22} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{22} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] + \hat{S}_1^\phi \quad (3.86a)$$

onde:

$$\hat{S}_1^\phi = \left[\left(D_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{44} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{44} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \quad (3.86b)$$

Admitiu-se que a integração da variável Φ no tempo foi obtida a partir de um perfil do tipo degrau. Nas equações (3.86a-b), os coeficientes D_{ij} e o jacobiano são dados por:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \Gamma_1^\phi J \alpha_{11} \Delta \eta & D_{22} &= \Gamma_1^\phi J \alpha_{22} \Delta \xi & D_{33} &= \Gamma_2^\phi J \alpha_{11} \Delta \eta \\ D_{44} &= \Gamma_2^\phi J \alpha_{22} \Delta \xi & J^{-1} &= \frac{L^3 (\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} & \alpha_{22} &= \frac{L^4 (1 - \eta^2) (\xi^2 + \eta^2)}{(1 - \zeta^2)} \\ \alpha_{11} &= \frac{L^4 (\xi^2 + 1) (\xi^2 + \eta^2)}{(1 - \zeta^2)} \end{aligned} \quad (3.87a-g)$$

A principal vantagem da escolha pelo procedimento implícito é que este é incondicionalmente estável (Patankar, 1980); entretanto, a utilização desta formulação não significa trabalhar com qualquer intervalo de tempo pois o problema de acoplamento pode ser limitado com grande intensidade o Δt .

Para o problema físico proposto levam-se em conta apenas os efeitos difusivos, por ser simples utilizar uma função linear como função de interpolação espacial entre os pontos

nodais. Assim, as derivadas diretas relativas ao fluxo difusivo referentes à Figura 3.3, são avaliadas da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \quad \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1S}}{\delta \xi_s} \quad (3.88a-b)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \quad \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1W}}{\delta \eta_w} \quad (3.88c-d)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\Phi_{2N} - \Phi_{2P}}{\delta \xi_n} \quad \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2S}}{\delta \xi_s} \quad (3.88e-f)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\Phi_{2E} - \Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \quad \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2W}}{\delta \eta_w} \quad (3.88g-h)$$

Na equação (3.88a-h), os $\Phi_1 = M$ e $\Phi_2 = T$.

Substituindo as derivadas acima e fazendo as demais substituições dos coeficientes J_p , ΔV e D_{ij} , $i = j$, reorganizando e rearranjando os termos comuns, pode-se escrever a equação (3.88a), tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_p \Phi_{1P}}{J_p \Delta t} - \frac{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_p^\circ \Phi_{1P}^\circ}{J_p \Delta t} = D_{11} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{11} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1S}}{\delta \xi_s} \right) + D_{22} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) - \\ & - D_{22} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1W}}{\delta \eta_w} \right) + D_{33} \left(\frac{\Phi_{2N} - \Phi_{2P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{33} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2S}}{\delta \xi_s} \right) + D_{44} \left(\frac{\Phi_{2E} - \Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{44} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2W}}{\delta \eta_w} \right) \end{aligned} \quad (3.89a)$$

Reorganizando a equação 3.89a, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_p \Phi_{1P}}{J_p \Delta t} + D_{11} \frac{\Phi_{1P}}{\delta \xi_n} + D_{11} \frac{\Phi_{1P}}{\delta \xi_s} + D_{22} \frac{\Phi_{1P}}{\delta \eta_e} - D_{22} \frac{\Phi_{1P}}{\delta \eta_w} = D_{11} \frac{\Phi_{1N}}{\delta \xi_n} + D_{11} \frac{\Phi_{1S}}{\delta \xi_s} + D_{22} \frac{\Phi_{1E}}{\delta \eta_e} \\ & + \frac{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_p^\circ \Phi_{1P}^\circ}{J_p \Delta t} + D_{22} \frac{\Phi_{1W}}{\delta \eta_w} + D_{33} \frac{\Phi_{2N}}{\delta \xi_n} + D_{33} \frac{\Phi_{2S}}{\delta \xi_s} + D_{44} \frac{\Phi_{2E}}{\delta \eta_e} + D_{44} \frac{\Phi_{2W}}{\delta \eta_w} - D_{33} \frac{\Phi_{2P}}{\delta \xi_n} - D_{33} \frac{\Phi_{2P}}{\delta \xi_s} - D_{44} \frac{\Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \\ & - D_{44} \frac{\Phi_{2P}}{\delta \eta_w} \end{aligned} \quad (3.89b)$$

ou pode ser reescrita na forma linear como segue:

$$A_{1P} \Phi_{1P} = A_{1N} \Phi_{1N} + A_{1S} \Phi_{1S} + A_{1E} \Phi_{1E} + A_{1W} \Phi_{1W} + A_{1P}^0 \Phi_{1P}^0 + \hat{S}_{1c}^\phi \quad (3.89c)$$

onde:

$$\hat{S}_{1c}^\phi = B_{1N} \Phi_{2N} + B_{1S} \Phi_{2S} + B_{1E} \Phi_{2E} + B_{1W} \Phi_{2W} - B_{1P} \Phi_{2P} \quad (3.89d)$$

com:

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{\Gamma_{1n}^\phi (\xi_n^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n}; & A_S &= \frac{\Gamma_{1s}^\phi (\xi_s^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s}; \\ A_E &= \frac{\Gamma_{1e}^\phi (1 - \eta_c^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e}; & A_W &= \frac{\Gamma_{1w}^\phi (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w}; \\ A_P &= A_N + A_S + A_E + A_W + \frac{\lambda_p \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2)}{\Delta t}; & B_{1N} &= \frac{\Gamma_{2n}^\phi (\xi_n^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n} \\ B_{1S} &= \frac{\Gamma_{2s}^\phi (\xi_s^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s}; & B_{1E} &= \frac{\Gamma_{2e}^\phi (1 - \eta_c^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e}; & B_{1W} &= \frac{\Gamma_{2w}^\phi (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w} \\ B_{1P} &= B_N + B_S + B_E + B_W; & A_P^0 &= \frac{\lambda_p^0 \Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_p^2 + \eta_p^2)}{\Delta t} \end{aligned}$$

onde os Γ_i^ϕ são dadas na Equação (3.78b) e $\lambda = \rho_s$.

Substituindo os termos $\Phi_1 = M$ e $\Phi_2 = T$, tem-se:

$$A_P M_P = A_N M_N + A_S M_S + A_E M_E + A_W M_W + A_P^0 M_P^0 + S_{1c}^\phi \quad (3.90a)$$

com:

$$\hat{S}_{1c}^\phi = B_N T_N + B_S T_S + B_E T_E + B_W T_W - B_P T_P \quad (3.90b)$$

3.3.2 - Discretização da equação de energia

Para o caso bidimensional tem-se a equação (3.80a) dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s h_w M) = \frac{1}{L^2 (\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \Gamma_3^\phi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_3^\phi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \Gamma_5^\Phi \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_5^\Phi \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right] \right\} + \frac{\Gamma_7^\Phi}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \\
& \left[(\xi^2 + 1) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 + (1 - \eta^2) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\Gamma_8^\Phi}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \left[(\xi^2 + 1) \frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + (1 - \eta^2) \frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right] + \\
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \Gamma_4^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_4^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 + 1) \Gamma_6^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_6^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

A Equação (3.91) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_2 \Phi_2}{J} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \mathbf{J} \Gamma_3^\Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \mathbf{J} \Gamma_3^\Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \mathbf{J} \Gamma_5^\Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \mathbf{J} \Gamma_5^\Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \mathbf{S}_2^\Phi
\end{aligned} \tag{3.91a}$$

com o termo fonte \mathbf{S}_2^Φ dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_2^\Phi &= \alpha_{11} \mathbf{J} \Gamma_7^\Phi \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right)^2 + \alpha_{22} \mathbf{J} \Gamma_7^\Phi \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 + \alpha_{11} \mathbf{J} \Gamma_8^\Phi \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) + \alpha_{22} \mathbf{J} \Gamma_8^\Phi \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \\
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \mathbf{J} \Gamma_4^\Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \mathbf{J} \Gamma_4^\Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \mathbf{J} \Gamma_6^\Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \mathbf{J} \Gamma_6^\Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\lambda_1 \Phi_1}{J} \right)
\end{aligned} \tag{3.91b}$$

Integrando e reorganizando as Equações (3.91a) e (3.91b), tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta \eta \Delta \xi}{J_p} \left[\frac{\lambda_{2P} \Phi_{2P} - \lambda_{2P}^0 \Phi_{2P}^0}{\Delta t} \right] &= \left[\left(\mathbf{D}_{aa} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(\mathbf{D}_{aa} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \\
& \left[\left(\mathbf{D}_{bb} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(\mathbf{D}_{bb} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] + \left[\left(\mathbf{D}_{cc} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(\mathbf{D}_{cc} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \\
& \left[\left(\mathbf{D}_{dd} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(\mathbf{D}_{dd} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] + \hat{\mathbf{S}}_2^\Phi
\end{aligned} \tag{3.92a}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_2^\Phi = & \left[D_{ec} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{ec} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right] + \\
& \left[D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2e}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2e}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right] + \\
& \left[D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right] + \\
(3.92b) & + \left[D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right] + \\
& \left[\left(D_{ii} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{ii} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{jj} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{jj} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \\
& \left[\left(D_{kk} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{kk} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{ll} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{ll} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \\
& + \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{J_p} \left[\frac{\lambda_{1P} \Phi_{1P} - \lambda_{1P}^0 \Phi_{1P}^0}{\Delta t} \right]
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
D_{aa} &= \Gamma_3^\Phi J \alpha_{11} \Delta \eta & D_{bb} &= \Gamma_3^\Phi J \alpha_{22} \Delta \xi; & D_{cc} &= \Gamma_5^\Phi J \alpha_{11} \Delta \eta; \\
D_{dd} &= \Gamma_5^\Phi J \alpha_{22} \Delta \xi; & D_{ee} &= \Gamma_{7p}^\Phi J_p \alpha_{11p} \Delta \eta \Delta \xi; & D_{ff} &= \Gamma_{7p}^\Phi J_p \alpha_{22p} \Delta \xi \Delta \eta; \\
D_{gg} &= \Gamma_{8p}^\Phi J_p \alpha_{11p} \Delta \eta \Delta \xi & D_{hh} &= \Gamma_{8p}^\Phi J_p \alpha_{22p} \Delta \xi \Delta \eta; & D_{ii} &= \Gamma_4^\Phi J \alpha_{11} \Delta \eta \\
D_{jj} &= \Gamma_4^\Phi J \alpha_{22} \Delta \xi; & D_{kk} &= \Gamma_6^\Phi J \alpha_{11} \Delta \eta; \\
D_{ll} &= \Gamma_6^\Phi J \alpha_{22} \Delta \xi \\
\alpha_{11} &= \frac{L^4 (\xi^2 + 1) (\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} & \alpha_{22} &= \frac{L^4 (1 - \eta^2) (\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}
\end{aligned}$$

As derivadas e parâmetros são dados como segue:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \Big|_n = \frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \Big|_s = \frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1s}}{\delta \xi_s} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \Big|_e = \frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \Big|_w = \frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1w}}{\delta \eta_w} \quad \Phi_1 = M; \quad \Phi_2 = T \quad \lambda_1 = \rho_s h_w; \quad \lambda_2 = \rho_s c_b$$

$$\Delta V = \Delta \xi \Delta \eta \quad J^{-1} = \frac{L^3(\xi^2 + \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad c_b = c_s + c_\ell M_\ell + c_v M_v$$

$$\text{Analogamente, faz-se para: } \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \Big|_n; \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \Big|_s; \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \Big|_e; \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \Big|_w.$$

Substituindo esses resultados na Equação (3.92a) e (3.92b) e os reorganizando, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\lambda_{2P} \Phi_{2P}}{\Delta t} \right] - \frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\lambda_{2P}^0 \Phi_{2P}^0}{\Delta t} \right] &= \left[D_{aa} \left(\frac{\Phi_{2N} - \Phi_{2P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{aa} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2S}}{\delta \xi_s} \right) \right] + \\ &+ \left[D_{bb} \left(\frac{\Phi_{2E} - \Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{bb} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2W}}{\delta \eta_w} \right) \right] + \left[D_{cc} \left(\frac{\Phi_{2N} - \Phi_{2P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{cc} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2S}}{\delta \xi_s} \right) \right] \\ &+ \left[D_{dd} \left(\frac{\Phi_{2E} - \Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{dd} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2W}}{\delta \eta_w} \right) \right] + \\ &+ \left[D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right] + \\ &+ \left[D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right] + \quad (3.93) \\ &+ \left[D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - 2D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} + D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}}{\delta \xi_n} \right] + \\ &+ \left[D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - 2D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} + D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \right] + \\ &+ \left[D_{ii} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{ii} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1S}}{\delta \xi_n} \right) \right] + \left[D_{jj} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{jj} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1W}}{\delta \eta_w} \right) \right] + \\ &+ \left[D_{kk} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{kk} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1S}}{\delta \xi_n} \right) \right] + \\ &+ \left[D_{\ell\ell} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{\ell\ell} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1W}}{\delta \eta_w} \right) \right] + \frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\lambda_{1P} \Phi_{1P}}{\Delta t} \right] - \frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\lambda_{1P}^0 \Phi_{1P}^0}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como:

$$A_{2P}\Phi_{2P} = A_{2N}\Phi_{2N} + A_{2S}\Phi_{2S} + A_{2E}\Phi_{2E} + A_{2EW}\Phi_{2W} + A_{2P}^0\Phi_{2P}^0 + S_{2c}^\Phi \quad (3.94a)$$

onde:

$$A_{2N} = \frac{(\Gamma_{3n}^\Phi + \Gamma_{5n}^\Phi)(\xi_n^2 + 1)\Delta\eta}{\delta\xi_n} ; A_{2S} = \frac{(\Gamma_{3s}^\Phi + \Gamma_{5s}^\Phi)(\xi_n^2 + 1)\Delta\eta}{\delta\xi_s}$$

$$A_{2E} = \frac{(\Gamma_{3e}^\Phi + \Gamma_{5e}^\Phi)(1 - \eta_e^2)\Delta\xi}{\delta\eta_e}$$

$$; A_{2W} = \frac{(\Gamma_{3w}^\Phi + \Gamma_{5w}^\Phi)(1 - \eta_w^2)\Delta\xi}{\delta\eta_w} \quad A_{2P}^0 = \frac{\lambda_{2P}^0\Delta\xi\Delta\eta L^2(\xi_P^2 + \eta_P^2)}{\Delta t};$$

$$A_{2P} = A_N + A_S + A_E + A_W + \frac{\lambda_{2P}\Delta\xi\Delta\eta L^2(\xi_P^2 + \eta_P^2)}{\Delta t} - S_{2P}^\Phi$$

sendo:

$$\hat{S}_2^\Phi = S_{2c}^\Phi + S_{2P}^\Phi$$

e

$$S_{2P}^\Phi = - \left[\Gamma_{7n}^\Phi (\xi^2 + 1) \Delta\eta \Delta\xi \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta\xi_n} \right) \right] - \left[\Gamma_{7n}^\Phi (1 - \eta^2) \Delta\eta \Delta\xi \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta\eta_e} \right) \right] + \left[\Gamma_{8n}^\Phi (\xi^2 + 1) \Delta\eta \Delta\xi \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta\xi_n} \right) \right] + \Gamma_{8e}^\Phi (1 - \eta^2) \Delta\eta \Delta\xi \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta\eta_e} \right) \quad (3.94b)$$

e

$$S_{2C}^\Phi = \left[D_{ce} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta\xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta\xi_n} \right] + \left[D_{fe} \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta\eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta\eta_e} \right] + \left[D_{ge} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta\xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta\xi_n} - 2D_{ge} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta\xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta\xi_n} \right] + \quad (3.95a)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - 2D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right] + \left[\frac{(D_{ii} + D_{kk})}{\delta \xi_n} \Phi_{1N} + \frac{(D_{ii} + D_{kk})}{\delta \xi_s} \Phi_{1S} \right] + \\
& + \left[\frac{(D_{jj} + D_{ll})}{\delta \eta_e} \Phi_{1E} + \frac{(D_{jj} + D_{ll})}{\delta \eta_w} \Phi_{1W} \right] - \left[\frac{(D_{ii} + D_{kk})}{\delta \xi_n} + \frac{(D_{ii} + D_{kk})}{\delta \xi_s} + \frac{(D_{jj} + D_{ll})}{\delta \eta_e} + \frac{(D_{jj} + D_{ll})}{\delta \eta_w} \right] + \\
& + \frac{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_{1P}}{J_P \Delta t} \Phi_{1P} - \frac{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_{1P}^0}{J_P \Delta t} \Phi_{1P}^0
\end{aligned}$$

sendo

$$\mathbf{S}_{2C}^\Phi = \mathbf{B}_{star} + \mathbf{B}_{2N} \Phi_{1N} + \mathbf{B}_{2S} \Phi_{1S} + \mathbf{B}_{2E} \Phi_{1E} + \mathbf{B}_{2W} \Phi_{1W} - \mathbf{B}_{2P} \Phi_{1P} - \mathbf{B}_{P2}^0 \Phi_{P2}^0 \quad (3.95b)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{2N} &= \frac{(\Gamma_{4_{2n}}^\phi + \Gamma_{6_{2n}}^\phi)(\xi_n^2 + 1)\Delta \eta}{\delta \xi_n} & \mathbf{B}_{2S} &= \frac{(\Gamma_{4_{2s}}^\phi + \Gamma_{6_{2s}}^\phi)(\xi_s^2 + 1)\Delta \eta}{\delta \xi_s} \\
\mathbf{B}_{2E} &= \frac{(\Gamma_{4_{2e}}^\phi + \Gamma_{6_{2e}}^\phi)(1 - \eta_e^2)\Delta \xi}{\delta \xi_e} & \mathbf{B}_{2W} &= \frac{(\Gamma_{4_{2w}}^\phi + \Gamma_{6_{2w}}^\phi)(1 - \eta_w^2)\Delta \xi}{\delta \xi_w} \\
\mathbf{B}_P^0 &= \frac{\rho_P^0 h_w^0 \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_P^2 + \eta_P^2)}{\Delta t} & \mathbf{B}_{2P} &= \mathbf{B}_{2N} + \mathbf{B}_{2S} + \mathbf{B}_{2E} + \mathbf{B}_{2W} - \frac{\rho_P h_w \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_P^2 + \eta_P^2)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{star} &= \left[\Gamma_{7n}^\phi (\xi^2 + 1) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} \right] + \left[\Gamma_{7n}^\phi (1 - \eta^2) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} \right] + \\
& \left[\Gamma_{8n}^\phi (\xi^2 + 1) \Delta \eta \Delta \xi \left[\left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - 2 \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right] \right] + \Gamma_{8e}^\phi (1 - \eta^2) \Delta \eta \Delta \xi \\
& \left[\left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_e} - 2 \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_e} \right]
\end{aligned}$$

onde os Γ_i^Φ são dadas por:

$$\Gamma_3^\Phi = k_T;$$

$$\Gamma_4^\Phi = \left[\rho_l k_l R_v \ln(H) + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right] \left(\frac{R_v T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \right);$$

$$\Gamma_5^\Phi = h_{fg} k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right);$$

$$\Gamma_6^\Phi = h_{fg} k_v \rho_{v0} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right);$$

$$\Gamma_7^\Phi = c_\ell \rho_\ell k_\ell R_v \ln(H) + k_v c_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \left(\frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right);$$

$$\Gamma_8^\Phi = c_\ell \rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) + k_v c_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M}$$

Os coeficientes A_k e A_p° , com $K \neq P$, refletem a contribuição dos diferentes nós devido ao transporte difusivo de Φ dos pontos vizinhos na direção do nó P e a influência da variável Φ no tempo anterior, sobre seu valor no tempo presente, respectivamente.

As Equações (3.90a) e (3.94a) são aplicadas a todos os pontos internos no domínio computacional, exceto nos pontos de fronteira (Figura 3.4), que são os volumes de controle adjacentes à superfície do corpo (volumes de fronteira). Para esses volumes o procedimento adotado é o da integração das equações de conservação, considerando-se as condições de contorno existentes.

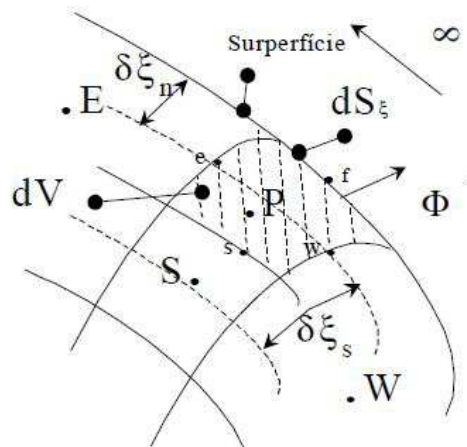


Figura 3.4 – Ponto na superfície do corpo.

Fonte: Oliveira (2006).

Neste caso, as seguintes equações discretizadas são válidas:

◆ **Para massa:**

$$\frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\lambda_p \phi_{1p} - \lambda_p^0 \phi_{1p}^0}{\Delta t} \right] = \left[\phi'' ds_\xi - \left(D_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] + \hat{S}_1^\phi \Delta V \quad (3.96a)$$

onde:

$$\hat{S}_1^\phi = \left[\left(D_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{44} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{44} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \quad (3.96b)$$

● **Para calor:**

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{J_p} [\lambda_{2p} \Phi_{2p} - \lambda_{2p}^0 \Phi_{2p}^0] &= \left[\phi'' ds_\xi - \left(D_{aa} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta t + \\ &\left[\left(D_{bb} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left[\left(D_{bb} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \right] \Delta t + \left[\left(D_{cc} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{cc} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta t + \\ &\left[\left(D_{dd} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left[\left(D_{dd} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \right] \Delta t + \hat{S}_2^\Phi \end{aligned} \quad (3.97a)$$

onde:

$$\begin{aligned} \hat{S}_2^\Phi &= \left[D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^0}{\delta \xi_n} \right] \Delta t + \\ &+ \left[D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2e}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2e}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^0}{\delta \eta_e} \right] \Delta t + \\ &+ \left[D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}}{\delta \xi_n} \right] \Delta t + \\ &+ \left[D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \right] \Delta t + \end{aligned} \quad (3.97b)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(D_{kk} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{kk} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta t + \left[\left(D_{ll} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{ll} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \Delta t + \\
& + \frac{\Delta V}{J_p} [\lambda_{IP} \Phi_{IP} - \lambda_{IP}^0 \Phi_{IP}^0]
\end{aligned}$$

onde Φ'' é o fluxo de Φ por unidade de área obtido a partir da condição de contorno imposta ao problema físico.

De acordo com as condições de contorno, deve-se agora, especificar os fluxos difusivos em f. Três tipos de condições de contorno são possíveis: Φ prescrito, fluxo de Φ prescrito e convecção.

- Φ prescrito

Neste caso, o valor de Φ'' será:

$$\Phi'' = \Gamma_n^\Phi \frac{(\Phi_n - \Phi_p)}{\delta \xi_n} \frac{1}{dS_\xi} \quad (3.98)$$

onde Φ_n é a propriedade específica da fronteira.

- Fluxo de Φ prescrito

Neste caso, o valor de Φ'' deve ser substituído pelo valor prescrito do fluxo de fronteira.

$$\Phi'' dS_\xi = \text{valor desconhecido} = D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n \quad (3.99)$$

- Convecção

Para esta situação o fluxo difusivo que atravessa a fronteira é igualado ao fluxo convectivo na vizinhança da mesma e fora do domínio em estudo, isto é:

$$\Phi'' dS_\xi = D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n = \text{fluxo convectivo, função de } \Phi_n \quad (3.100)$$

Para problemas de difusão com Γ^Φ variável, de acordo com a Figura 3.5, o procedimento para se obter seu valor nas interfaces do volume de controle, é assumir uma

variação de Γ^Φ entre os pontos P e seu vizinho, em qualquer direção (N, S, E ou W), expressa por (Patankar, 1980):

$$\Gamma_i^\Phi = \left(\frac{1-\hat{f}_i}{\Gamma_P^\Phi} - \frac{\hat{f}_i}{\Gamma_E^\Phi} \right)^{-1} \quad (3.101)$$

onde \hat{f}_i é o fator de interpolação dado por: $\hat{f}_i = \frac{(\delta d)_i^+}{(\delta d)_i}$

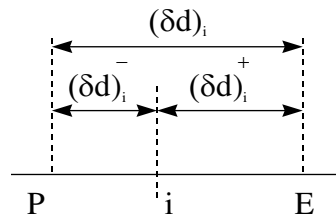


Figura 3.5 - Esquema mostrando a posição da interface i entre os pontos P e E.

Se a interface i está situada no ponto médio que une os pontos P e E (malha uniforme), então $\hat{f}_i = 0,5$ e, portanto Γ_i^Φ é dado pela média harmônica de Γ_P^Φ e Γ_E^Φ . Isto é:

$$\Gamma_i^\Phi = \frac{2\Gamma_P^\Phi \Gamma_E^\Phi}{\Gamma_P^\Phi + \Gamma_E^\Phi} \quad (3.102)$$

Esta é a formulação mais efetiva uma vez que, se Γ_P^Φ ou Γ_E^Φ forem zero, não haverá fluxo de Φ e, portanto Γ_i^Φ será nulo, o que é fisicamente realista.

Apresentam-se, a seguir, alguns modelos de difusão para as condições de contorno antes mencionadas.

3.4 – Modelos Difusivos

3.4.1 – Modelo I – Transferência simultânea de calor e massa em condição de equilíbrio na superfície do material.

O Modelo em estudo envolve a determinação de transferência de calor e massa no caso bidimensional, em produtos com geometria elipsoidal; este modelo é constituído das Equações 3.80a e 3.80b; para a formulação matemática deste problema foram adotadas as seguintes considerações:

- **Transferência de massa**

- a) o produto é homogêneo e isotrópico;
- b) a transferência de massa na partícula individual ocorre por difusão de líquido e vapor, sob taxa sempre decrescente;
- c) os perfis do teor de umidade são considerados simétricos em torno do eixo z (a umidade inicial está uniformemente distribuída no produto);
- d) as propriedades termofísicas são variáveis durante o processo, isto é, são dependentes da posição e do seu teor de umidade no interior do material;
- e) o encolhimento volumar do material é desprezível durante o processo;
- f) não há efeito de capilaridade;
- g) o processo ocorre em condições de equilíbrio na superfície com teor de umidade constante e igual ao teor de umidade de equilíbrio do produto nas condições do ar de secagem.

- **Transferência de calor**

- a) a distribuição de temperatura inicial é uniforme e simétrica em torno do eixo z, durante o processo;
- b) a transferência de calor dentro do material ocorre por condução e na superfície do material tem-se condição de temperatura constante.

As condições de contorno são expressas pelas equações:

► **massa**

- **inicial:**

$$M(\xi; \eta; t=0) = M_0 = \text{cte} \quad (3.103)$$

• **Superfície livre:** O teor de umidade na superfície é constante e igual ao teor de umidade de equilíbrio.

$$M(\xi; \eta; t) = M_e = \text{cte}, \text{ com } \xi = \frac{L_1}{L} \text{ na superfície do sólido.} \quad (3.104)$$

• **Plano de simetria:** os gradientes angulares e radiais do teor de umidade são iguais a zero nos planos de simetria.

$$\frac{\partial M(\xi; 1; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(0; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.105)$$

► **calor**

◆ **inicial:**

$$T(\xi; \eta; t=0) = T_0 = \text{cte} \quad (3.106)$$

◆ **Superfície livre:** A temperatura na superfície é constante e igual à temperatura do ar de secagem.

$$T(\xi = \xi; \eta; t=0) = T_e = \text{cte}, \text{ com } \xi = \frac{L_1}{L} \text{ na superfície do sólido.} \quad (3.107)$$

◆ **Plano de simetria:** Os gradientes angular e radial de calor são iguais a zero.

$$\frac{\partial T(\xi; 1; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial T(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial T(0; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.108)$$

A solução numérica deste modelo é obtida pela solução das Equações (3.90a) e (3.94a), no que se refere aos pontos de simetria, estes não entram no conjunto de equações a ser resolvido. Logo após o sistema de equações ter sido solucionado, sua estimativa é feita. Para este caso, se assume que o fluxo de umidade que sai do ponto adjacente ao ponto de simetria é igual ao fluxo de umidade que chega neste ponto; então, pode-se expressá-las como segue:

► **Massa**

■ **Para os pontos em $\eta=0$ ($L < y < L_2$):**

$$\left(\bar{J}_\ell + \bar{J}_v\right)_w = \left(\bar{J}_\ell + \bar{J}_v\right)_e \quad (3.109)$$

Discretizando e re-arranjando os termos, tem-se:

$$M_w = \left(1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{1e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}} \right)} M_p - \frac{\left(\frac{\Gamma_{1e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}} \right)} M_E - \frac{\left(\frac{\Gamma_{2e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}} \right)} (T_E - T_p) \right) \quad (3.110)$$

■ **Para os pontos em $\eta = 1$ ($0 < z < L_1$):**

$$\left(\bar{J}_\ell + \bar{J}_v\right)_w = \left(\bar{J}_\ell + \bar{J}_v\right)_e \quad (3.111)$$

Discretizando e re-arranjando os termos, tem-se:

$$M_e = \left(1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{1w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}} \right)} M_p - \frac{\left(\frac{\Gamma_{1w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}} \right)} M_w + \frac{\left(\frac{\Gamma_{2w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}} \right)} (T_p - T_w) \right) \quad (3.112)$$

■ Para os pontos em $\xi = 0$ ($0 < y < L$):

$$\left(\bar{\mathbf{J}}_{\ell} + \bar{\mathbf{J}}_v\right)\Big|_s = \left(\bar{\mathbf{J}}_{\ell} + \bar{\mathbf{J}}_v\right)\Big|_n \quad (3.113)$$

Discretizando e rearranjando os termos, tem-se:

$$\mathbf{M}_s = \left(1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{1n}^{\Phi} \sqrt{\xi_n^2 + 1}}{\delta \xi_n \sqrt{\xi_n^2 + \eta_p^2}}\right)}{\left(\frac{\Gamma_{1p}^{\Phi} \sqrt{\xi_s^2 + 1}}{\delta \xi_s \sqrt{\xi_s^2 + \eta_p^2}}\right)} \right) \mathbf{M}_p - \frac{\left(\frac{\Gamma_{1n}^{\Phi} \sqrt{\xi_n^2 + 1}}{\delta \xi_n \sqrt{\xi_n^2 + \eta_p^2}}\right)}{\left(\frac{\Gamma_{1p}^{\Phi} \sqrt{\xi_s^2 + 1}}{\delta \xi_s \sqrt{\xi_s^2 + \eta_p^2}}\right)} \mathbf{M}_N - \frac{\left(\frac{\Gamma_{2n}^{\Phi} \sqrt{\xi_n^2 + 1}}{\delta \xi_n \sqrt{\xi_n^2 + \eta_p^2}}\right)}{\left(\frac{\Gamma_{1p}^{\Phi} \sqrt{\xi_s^2 + 1}}{\delta \xi_s \sqrt{\xi_s^2 + \eta_p^2}}\right)} (\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_p) \quad (3.114)$$

► Calor

● Para os pontos em $\eta = 0$ ($L < y < L_2$):

$$\bar{\mathbf{J}}_q \Big|_w = \bar{\mathbf{J}}_q \Big|_e \quad (3.115)$$

Discretizando e rearranjando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_w = & \left[1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{3e}^{\Phi} \sqrt{1 - \eta_e^2}}{\delta \eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}}\right)}{\left(\frac{\Gamma_{3w}^{\Phi} \sqrt{1 - \eta_w^2}}{\delta \eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}}\right)} \right] \mathbf{T}_p - \frac{\left(\frac{\Gamma_{3e}^{\Phi} \sqrt{1 - \eta_e^2}}{\delta \eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}}\right)}{\left(\frac{\Gamma_{3w}^{\Phi} \sqrt{1 - \eta_w^2}}{\delta \eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}}\right)} \mathbf{T}_E - \\ & - \frac{\left(\frac{\Gamma_{4e}^{\Phi} \sqrt{1 - \eta_e^2}}{\delta \eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}}\right)}{\left(\frac{\Gamma_{3w}^{\Phi} \sqrt{1 - \eta_w^2}}{\delta \eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}}\right)} (\mathbf{M}_E - \mathbf{M}_p) + \frac{\Gamma_{4w}^{\Phi}}{\Gamma_{3w}^{\Phi}} (\mathbf{M}_p - \mathbf{M}_w) \end{aligned} \quad (3.116)$$

- Para os pontos em $\eta = 1$ ($0 < z < L_1$):

$$\bar{J}_q|_e = \bar{J}_q|_w \quad (3.117)$$

Discretizando e rearranjando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} T_e = & \left[1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{3w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}} \right)} \right] T_P - \left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{3w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}} \right)} \right] T_W + \\ & + \left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{4w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 + \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 + \eta_e^2}} \right)} \right] (M_P - M_W) - \frac{\Gamma_{4e}^\Phi}{\Gamma_{3e}^\Phi} (M_e - M_P) \end{aligned} \quad (3.118)$$

- Para os pontos em $\xi = 0$ ($0 < z < L$):

$$\bar{J}_q|_s = \bar{J}_q|_n \quad (3.119)$$

Discretizando e rearranjando os termos, tem-se:

$$T_s = \left[1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{3n}^\Phi \sqrt{\xi_n^2 + 1}}{\delta\xi_n \sqrt{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3s}^\Phi \sqrt{\xi_s^2 + 1}}{\delta\xi_s \sqrt{\xi_s^2 + \eta_p^2}} \right)} \right] T_P - \left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{3n}^\Phi \sqrt{\xi_n^2 + 1}}{\delta\xi_n \sqrt{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3s}^\Phi \sqrt{\xi_s^2 + 1}}{\delta\xi_s \sqrt{\xi_s^2 + \eta_p^2}} \right)} \right] T_N -$$

$$-\left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{4n}^{\Phi}}{\delta\xi_n} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3s}^{\Phi}}{\delta\xi_s} \sqrt{\frac{\xi_s^2 + 1}{\xi_s^2 + \eta_p^2}} \right)} \right] (M_N - M_P) + \frac{\Gamma_{4s}^{\Phi}}{\Gamma_{3s}^{\Phi}} (M_P - M_S) \quad (3.120)$$

Visando à solução do sistema de equações gerados a partir da solução numérica, foi desenvolvido um código computacional no Software Mathematica[®]. Um fluxograma de operação do programa na forma de diagrama de blocos é apresentado na Figura 3.6, o qual contempla este e os demais modelos que serão tratados posteriormente. Em todos os casos analisados foi utilizado o método de Gauss-Siedel para a solução do sistema de equações geradas com um critério de convergência de 10^{-8} kg/kg, para o teor de umidade e 10^{-8} °C para a temperatura.

O procedimento utilizado para simular a secagem do grão de lentilha, de forma resumida, é o seguinte:

a) No início da simulação o usuário fornece as informações físicas e geométricas do problema estudado, gerando a malha numérica correspondente à geometria do sólido.

b) Calculam-se os valores de k_v , k_l , h_m (Modelo II), Γ_k^{Φ} e dos coeficientes do sistema de equações, nesta sequência.

c) Resolvem-se os sistemas de equação, tanto para a transferência de massa quanto de calor, iterativamente através do método de Gauss-Siedel, até encontrar os valores médios do teor de umidade e da temperatura.

d) Comparam-se os valores do teor de umidade numéricos com os valores experimentais do grão de lentilha usando a técnica do erro quadrático mínimo, e se verifica o critério de convergência de 10^{-8} kg/kg.

e) Caso não seja alcançado o critério de convergência, os valores de k_v , k_ℓ e h_m (Modelo II) são corrigidos até se alcançar o critério de convergência. Após a correção desses parâmetros são obtidos os valores numéricos do teor de umidade médio e da temperatura média, em cada volume de controle da malha e em cada tempo.

f) Caso seja alcançado o critério de convergência, calculam-se os valores numéricos do teor de umidade médio e da temperatura média em cada volume de controle da malha e em cada tempo.

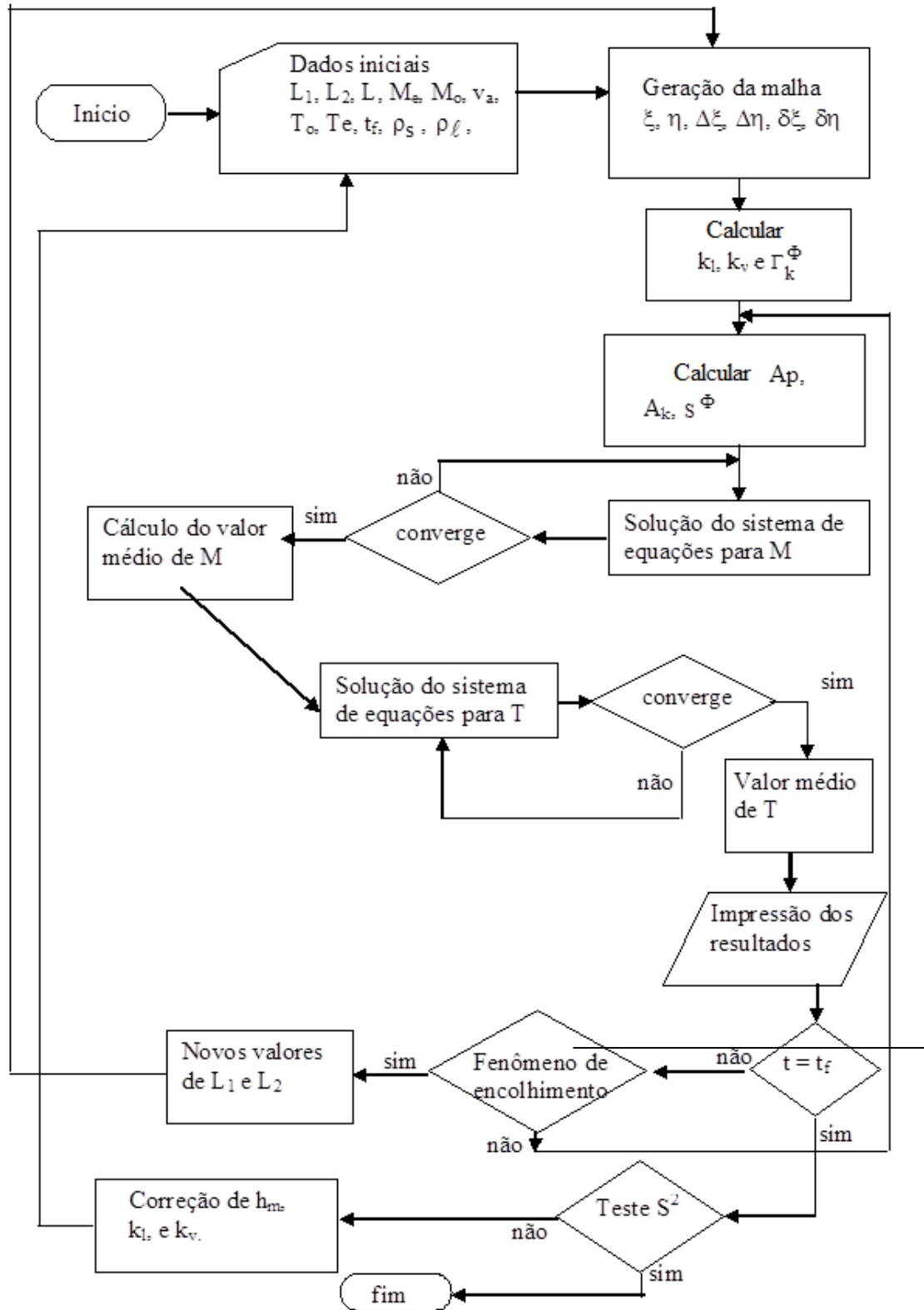


Figura 3.6 - Diagrama do algoritmo computacional.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2006).

3.4.2 - Modelo II - Transferência simultânea de calor e massa com condição de contorno convectiva na superfície.

Serão asseguradas, neste modelo, as considerações de a até f para massa e a para temperatura apresentadas no modelo I e acrescentadas a essas:

- **Transferência de massa**

g) O movimento de umidade é por difusão de líquido e vapor dentro do sólido e que a evaporação ocorre somente na superfície.

- **Transferência de calor**

Substitui-se a consideração b do modelo I por:

b) a transferência de calor dentro da partícula é dada por condução e na superfície do material é por convecção.

As condições iniciais de contorno e de simetria para este modelo, são assim expressas:

► **Massa**

- Inicial:

$$M(\xi, \eta, t = 0) = M_0 \quad (3.121)$$

- **Plano de Simetria:** Na transferência de massa os gradientes angulares e radiais do teor de umidade são iguais a zero nos planos de simetria.

$$\frac{\partial M(\xi, 1, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(\xi, 0, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(0, \eta, t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.122)$$

• **Superfície livre:** O fluxo difusivo é igual ao fluxo convectivo do teor de umidade na superfície do esferoide oblato.

$$\left(\vec{J}_\ell + \vec{J}_v \right) \Big|_{\xi=\frac{L_1}{L}} = h_m (M - M_e) \text{ com } T=T_a \text{ e } H=H_a \quad (3.123)$$

O fluxo de umidade é representado por qualquer termo desta igualdade por unidade de área (M'').

► Calor

◆ **Inicial**

$$T(\xi, \eta, t = 0) = T_o = \text{cte} \quad (3.124)$$

◆ **Plano de simetria:** Os gradientes angular e radial de calor são iguais a zero.

$$\frac{\partial T(\xi, 1, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial T(\xi, 0, t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial T(0, \eta, t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.125)$$

◆ **Superfície livre:** O fluxo difusivo é igual ao fluxo convectivo de calor na superfície do sólido, somados a energia para evaporar a água e a energia para aquecer o vapor de água produzido na evaporação.

$$\vec{J}q \Big|_{\xi=\frac{L_1}{L}} = h_c (T_s - T_a) + h_{fg} \vec{J}_\ell + \left(\vec{J}_\ell + \vec{J}_v \right) c_v (T_s - T_a) \quad (3.126)$$

Qualquer um dos termos acima da igualdade representa o fluxo de calor por unidade de área (q'').

• **Formulação Numérica**

A formulação numérica para os pontos internos (exceto os pontos imediatamente próximos à fronteira do corpo), segue o mesmo procedimento apresentado no modelo I.

Para os pontos de fronteira o procedimento é descrito a seguir:

• **Massa**

$$\mathbf{M}'' = \left(\vec{\mathbf{J}}_\ell + \vec{\mathbf{J}}_v \right) \Big|_{\xi=\frac{L}{L}} = h_m (\mathbf{M}_f - \mathbf{M}_e) \quad (3.127)$$

(I) (II) (III)

onde o \mathbf{M}_f é o teor de umidade de fronteira.

Igualando as Equações (II) e (III), isolando o \mathbf{M}_f e os substituindo na Equação (II) tem-se:

$$\mathbf{M}'' = \frac{\mathbf{M}_p - \mathbf{M}_e}{\frac{1}{\left(\frac{\Gamma_1^\Phi}{\delta \xi_n L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \right)} + h_m \rho_s} + \frac{(\Gamma_2^\Phi \nabla T)}{\frac{1}{\left(\frac{\Gamma_1^\Phi}{\delta \xi_n L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \right)} + h_m \rho_s} \quad (3.128)$$

Substituindo a Equação (3.127) na Equação (3.96a) eliminando e rearranjando alguns termos do resultado obtido, tem-se a equação na sua forma discretizada dada pela Equação (3.90a), sendo os coeficientes A_E , A_W , A_S , A_p° , B_N , B_E , B_W e B_P , iguais aos apresentados como antes e:

$$A_p = \frac{\rho_p \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_n^2 + \eta_p^2)}{\Delta t} + \frac{L \Delta \eta \sqrt{(\xi_n^2 + 1)(\xi_n^2 + \eta_p^2)}}{\frac{\Gamma_1^\Phi}{\delta \xi_n L} \sqrt{(\xi_n^2 + 1)} + h_m \rho_s} + \sum A_K$$

e o \hat{S}_{1c}^Φ dado por:

$$\hat{S}_{1c}^\Phi = B_N T_N + B_S T_S + B_E T_E + B_W T_W - B_P T_P + \overline{SM}$$

com

$$\overline{SM} = \left[\frac{\frac{\Gamma_2^\phi (T_n - T_p) L \Delta \eta \sqrt{(\xi_n^2 + 1)(\xi_n^2 + \eta_p^2)}}{\Gamma_1^\phi}}{\frac{1}{\frac{\Gamma_1^\phi}{\delta \xi_n L \sqrt{(\xi_n^2 + 1)}} + \frac{1}{h_m \rho_s}}} \right] + \left[\frac{L \Delta \eta \sqrt{(\xi_n^2 + 1)(\xi_n^2 + \eta_p^2)}}{\frac{1}{\frac{\Gamma_1^\phi}{\delta \xi_n L \sqrt{(\xi_n^2 + 1)}} + \frac{1}{h_m \rho_s}}} \right] M_e$$

Sendo assim, as equações referentes a este modelo podem ser reunidas como segue:

$$A_p M_p = A_N M_N + A_S M_S + A_E M_E + A_W M_W + A_p^o M_p^o + \hat{S}_{cl}^\phi \quad (3.129)$$

sendo:

$$\begin{aligned} A_S &= \frac{\Gamma_{1s}^\phi (\xi_s^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s}; & A_E &= \frac{\Gamma_{1e}^\phi (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e} \\ A_W &= \frac{\Gamma_{1w}^\phi (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w}; & A_p^o &= \frac{\rho_p^o \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2)}{\Delta t} \\ A_N &= 0; & B_S &= \frac{\Gamma_{2s}^\phi (\xi_s^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s}; & B_E &= \frac{\Gamma_{2e}^\phi (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e} \\ B_W &= \frac{\Gamma_{2w}^\phi (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w}; & B_{p1} &= B_{N1} + B_{S1} + B_{E1} + B_{W1}; & B_N &= 0 \end{aligned}$$

O termo \overline{SM} é o termo fonte, o qual contém o teor de umidade na superfície do sólido que é adicionado aos pontos nodais, que por outro lado, precedem a sua fronteira. Somente para esses pontos os coeficientes A_N são iguais a zero; para os demais, \overline{SM} é igual a zero e A_N é dado pela expressão apresentada para os pontos interno. Os métodos de solução deste conjunto de equações e o critério de convergência são idênticos aos utilizados no modelo I, tal como a determinação do teor de umidade médio.

Os pontos de simetria estimados são semelhantes ao equacionamento apresentado no modelo I. Para os pontos situados na superfície do material tem-se, após a discretização da equação de condição de contorno na superfície, que o teor de umidade nesses pontos pode ser calculado pela expressão:

$$M_f = \frac{\left(\frac{\Gamma_1^\Phi}{\delta \xi_n} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 + 1)}}{(\xi_n^2 + \eta_p^2)} \right) M_p + \frac{\Gamma_2^\Phi}{\delta \xi_n} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 + 1)}}{(\xi_n^2 + \eta_p^2)} (T_p^* - T_f^*) + h_m M_e}{hm + \frac{\Gamma_1^\Phi}{\delta \xi_n} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 + 1)}}{(\xi_n^2 + \eta_p^2)}} \quad (3.130)$$

- **Calor**

Para transferência de energia, a seguinte equação é válida:

$$q'' = \vec{J}_q \Big|_{\xi = \frac{L_1}{L}} = h_c (T_a - T_f) + h_{fg} \vec{J}_\ell + (\vec{J}_\ell + \vec{J}_v) c_v (T_a - T_f) \quad (3.131)$$

(I) (II) (III)

Igualando os termos da equação acima e isolando T_f , e ainda o substituindo na Equação (I), tem-se:

$$q'' = \frac{1}{\left(\frac{L \delta \xi_n}{\Gamma_{3P}^\Phi \sqrt{\xi_n^2 + \eta_p^2}} + \frac{1}{h_c} \right)} \left\{ \begin{array}{l} \left[T_a - T_p - \frac{\Gamma_{4P}^\Phi}{\left(\frac{\Gamma_{3P}^\Phi}{\delta \xi_n} \right)} \left(\frac{M_f - M_p}{\delta \xi_n} \right) - \frac{L_{fg} \rho_l k_l R_v \ln H}{h_c} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \left(\frac{T_f - T_p}{\delta \xi_n} \right) \right] \\ \frac{L_{fg} \rho_l k_l}{h_c} \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \left(\frac{M_f - M_p}{\delta \xi_n} \right) - \frac{\sqrt{\xi_n^2 + 1}}{h_c} x \end{array} \right\} \quad (3.132)$$

$$\left(\left[\frac{\Gamma_{2P}^\Phi}{L} \left(\frac{T_f - T_p}{\delta \xi_n} \right) \right] + \frac{\Gamma_{1P}^\Phi}{L} \left(\frac{M_f - M_p}{\delta \xi_n} \right) \right) c_v (T_a - T_f)$$

Substituindo a Equação (3.132) na Equação (3.97a), obtém-se a Equação (3.94a), aplicada para os pontos de fronteira sendo os coeficientes A_E , A_W , A_S , A_p^0 , B_N , B_E , B_W e B_P , iguais a:

$$A_{2S} = \frac{(\Gamma_{3S}^\Phi + \Gamma_{5S}^\Phi)(\xi_n^2 + 1)\Delta\eta}{\delta \xi_s}; \quad A_{2E} = \frac{(\Gamma_{3E}^\Phi + \Gamma_{5E}^\Phi)(1 - \eta_c^2)\Delta\xi}{\delta \eta_c}$$

$$A_{2W} = \frac{(\Gamma_{3W}^\Phi + \Gamma_{5W}^\Phi)(1 - \eta_w^2)\Delta\xi}{\delta \eta_w}; \quad A_{2P}^0 = \frac{\rho_{sp}^0 c_{bp}^0 \Delta\xi \Delta\eta L^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2)}{\Delta t}$$

$$A_{2N} = \frac{\Gamma_{5n}^\Phi (\xi_n^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n}$$

$$A_{2P} = A_{2E} + A_{2W} + A_{2S} + \frac{\rho_{sP} c_{bP} \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2)}{\Delta t} + \frac{L \Delta \eta \sqrt{(\xi_p^2 + 1)(\xi_p^2 + \eta_p^2)}}{\frac{1}{\frac{\Gamma_1^\Phi}{\delta \xi_n L} \sqrt{\left(\frac{(\xi_p^2 + 1)}{(\xi_p^2 + \eta_p^2)} \right)} + \frac{1}{h_c}}} - S_{2P}^\Phi$$

$$S_{2P}^\Phi = - \left[\Gamma_{7n}^\Phi (\xi_p^2 + 1) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{T_N^* - T_P^*}{\delta \xi_n^2} \right) \right] - \left[\Gamma_{7e}^\Phi (1 - \eta_p^2) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{T_E^* - T_P^*}{\delta \eta_e^2} \right) \right] +$$

$$\left[\Gamma_{8n}^\Phi (\xi_p^2 + 1) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{M_N - M_P}{\delta \xi_n^2} \right) \right] + \left[\Gamma_{8e}^\Phi (1 - \eta_p^2) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{M_E - M_P}{\delta \eta_e^2} \right) \right]$$

$$\hat{S}_{2C}^\Phi = B_{star} + B_{2N} M_N + B_{2S} M_S + B_{2E} M_E + B_{2W} M_W - B_{2P} M_P - B_{2P}^0 M_P^0 + \overline{ST}$$

$$B_{2N} = \frac{\Gamma_{6n}^\Phi (\xi_n^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n}$$

$$B_{2S} = \frac{(\Gamma_{4s}^\Phi + \Gamma_{6s}^\Phi) (\xi_s^2 + 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s};$$

$$B_{2E} = \frac{(\Gamma_{4e}^\Phi + \Gamma_{6e}^\Phi) (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \xi_e}$$

$$B_{2W} = \frac{(\Gamma_{4w}^\Phi + \Gamma_{6w}^\Phi) (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \xi_w};$$

$$B_{2P}^0 = \frac{\rho_p^0 h_w^0 \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2)}{\Delta t}$$

$$B_{2P} = B_{2N} + B_{2S} + B_{2E} + B_{2W} - \frac{\rho_p h_{wP} \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2)}{\Delta t}$$

$$B_{star} = \left[\Gamma_{7n}^\Phi (\xi_p^2 + 1) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{T_N^* - T_P^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{T_N^*}{\delta \xi_n} \right] + \left[\Gamma_{7e}^\Phi (1 - \eta_p^2) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{T_E^* - T_P^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{T_E^*}{\delta \eta_e} \right] +$$

$$\Gamma_{8n}^\Phi (\xi_p^2 + 1) \Delta \eta \Delta \xi \left[\left(\frac{M_N - M_P}{\delta \xi_n} \right) \frac{T_N^*}{\delta \xi_n} - 2 \left(\frac{M_N - M_P}{\delta \xi_n} \right) \frac{T_P^*}{\delta \xi_n} \right] + \Gamma_{8e}^\Phi (1 - \eta_p^2) \Delta \eta \Delta \xi$$

$$\left[\left(\frac{M_E - M_P}{\delta \eta_e} \right) \frac{T_P^*}{\delta \xi_e} - 2 \left(\frac{M_E - M_P}{\delta \eta_e} \right) \frac{T_P^*}{\delta \eta_e} \right]$$

$$\overline{ST} = \left\{ \begin{array}{l} T_e - \frac{L_{fg} \rho_l k_l R_v \ln H}{h_c} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \left(\frac{T_f - T_p}{\delta \xi_n} \right) - \frac{L_{fg} \rho_l k_l}{h_c} \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \\ x \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \left(\frac{M_f - M_p}{\delta \xi_n} \right) - \frac{\sqrt{\xi_n^2 + 1}}{h_c} \left[\frac{\Gamma_{2P}^\varphi}{L} \left(\frac{T_f - T_p}{\delta \xi_n} \right) \right] + \\ + \frac{\Gamma_{1P}^\varphi}{L} \left(\frac{M_f - M_p}{\delta \xi_n} \right) x c_v (T_a - T_f) - \frac{\Gamma_{4P}^\varphi}{\left(\frac{\Gamma_{3P}^\varphi}{\delta \xi_n} \right)} \left(\frac{M_f - M_p}{\delta \xi_n} \right) \end{array} \right\} \left[\frac{\Delta \eta L \sqrt{(\xi_p^2 + 1)(\xi_p^2 + \eta_p^2)}}{\left(L \delta \xi_n \right) \left(\Gamma_{3P}^\varphi \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \right) + \frac{1}{h_c}} \right]$$

Os pontos de simetria são estimados semelhantes ao equacionamento apresentado no modelo I. Para os pontos situados na superfície do material tem-se, após a discretização da equação de condição de contorno na superfície, que a temperatura nesses pontos pode ser calculada pela expressão:

$$T_f = \frac{1}{\left(\frac{L \delta \xi_n}{\Gamma_{3P}^\varphi \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}}} \right) + \frac{1}{h_c}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{h_c} T_p + \frac{L \delta \xi_n}{\Gamma_{3P}^\varphi \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}}} T_a + \\ h_{fg} \left(\rho_l k_l \ln H \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \\ - \Gamma_{4P}^\varphi \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \frac{\partial M}{\partial \xi} + \left(\frac{\Gamma_{2P}^\varphi}{L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\Gamma_{1P}^\varphi}{L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 + \eta_p^2}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) c_v (T_a - T_f) \end{array} \right] \quad (3.133)$$

3.5. Aplicação à secagem de grão de lentilha

A lentilha tem forma aproximadamente elipsoidal oblata; por isto, ela foi escolhida para ser estudada nesta pesquisa.

Os parâmetros a seguir foram usados na simulação numérica:

- Densidade do vapor saturado (Forte et al., 1981):

$$\rho_{vo} = (2,54 \times 10^8 / T) \exp(-5200/T) \quad (\text{kg/m}^3) \quad (3.134)$$

- Densidade da água (Forte et al., 1981):

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

- Densidade do sólido seco (Tang e Sokhansanj, 1993):

$$\rho_s = 1375 \text{ kg/m}^3$$

- Calor latente de vaporização (Forte et al., 1981):

$$h_{fg} = h_o + h_w \quad (\text{J/kg}) \quad (3.135a)$$

$$h_o = 3,11 \times 10^6 - 2,38 \times 10^3 T \quad (\text{J/kg}) \quad (3.135b)$$

$$h_w = \frac{R_v T^2}{H} \times \frac{\partial H}{\partial T} \quad (\text{J/kg}) \quad (3.135c)$$

- Isoterma de sorção (equação de Henderson modificada) (Menkov, 2000):

$$H = 1 - \exp[-0,000207 \times (T + 21,63811) M^{1,73806}] \quad (\text{decimal}) \quad (3.136)$$

Válida nos seguintes intervalos: $5 \leq T \leq 60^\circ \text{C}$ e $4 \leq M \leq 26\%$ (base seca)

- Condutividade térmica da lentilha (Tang e Sokhansanj, 1993):

$$k_T = 0,15 \text{ W/m.K}$$

- Condutividade do líquido e do vapor (Fortes et al, 1981):

$$k_l = a_1 \times 4,366 \times 10^{-18} H^3 \exp(-1331/T) \quad (\text{s}) \quad (3.137)$$

$$k_v = a_2 \times 6,982 \times 10^{-9} (T - 273,16)^{0,41} \times (H^{0,1715} - H^{1,1715}) \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (3.138)$$

Os valores dos parâmetros a_1 , a_2 e h_m (coeficientes de transferência de massa) das equações (3.137) e (3.138) foram obtidos por ajuste entre os dados numéricos e experimentais

do teor de umidade (Tang e Sokchansanj, 1994) usando-se a técnica do erro quadrático mínimo, da seguinte forma:

$$\text{ERMQ} = \sum_{n=1}^n (M_{i,\text{Num}} - M_{i,\text{Exp}})^2 \quad (3.139)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{\text{ERMQ}}{(n - \bar{n})} \quad (3.140)$$

onde ERMQ é o erro quadrático mínimo, \bar{S}^2 é a variância, n é o número de pontos experimentais e \bar{n} é o número de parâmetros encontrados (Figliola e Beasley, 1995).

Para o cálculo do coeficiente de determinação (R^2) foi usado o programa LAB Fit Curve Fitting Software V 7.2.46 (Silva e Silva, 2009).

- Calor específico da lentilha, da água na fase líquida e vapor (Tang e Sokhansanj, 1991; Çengel, 2007):

$$c_b = 0,5773 + 0,00709T + (6,22 - 9,14M)M \quad (3.141)$$

$$c_l = 4185 \text{ J/kg}; \quad c_v = 1916 \text{ J/kg}$$

- Dimensão do grão de lentilha (Tang e Sokhansanj, 1993):

$$L_1 = 1,4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$L_2 = 3,4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Em relação ao coeficiente de transferência de calor convectivo, o mesmo é obtido considerando-se o grão de lentilha como esfera de volume de um elipsoide, como segue:

$$h_c = \frac{k_a}{d_p} (2 + 0,6R_e^{1/2} P_r^{1/3}) \quad (3.142)$$

onde o número de Reynolds e o número de Prandtl são dados pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$R_e = \frac{\rho_a v_a d_p}{\mu_a} \quad e \quad P_r = \frac{c_a \mu_a}{k_a}$$

Na Tabela 1 tem-se os valores dos parâmetros do ar de secagem e os teores de umidade inicial (M_o), de equilíbrio (M_e) e final (M_f) do grão de lentilha utilizado neste trabalho, baseando-se nos dados reportados por Tang e Sokhansanj, 1994.

Tabela 3.1. Condições do ar de secagem e do grão de lentilha (Fonte: Tang e Sokhansanj, 1994).

Ar			Lentilha				
Ta	H	v	M_o	M_e	T_o	T_e	t
(°C)	(%)	(m/s)	(% b.s)	(% b.s)	(°C)	(°C)	(s)
40	50	0,3	24,5	12,1	25	40	86400
60	30	0,3	24,5	7,9	25	60	86400
60	50	0,3	24,5	10,1	25	60	86400

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 - Refinamento da malha

Os resultados referentes à transferência de calor e massa que serão discutidos neste trabalho foram gerados através de uma malha 20x20 pontos nodais com intervalo de tempo de $\Delta t = 1,0$ s. Estes refinamentos foram propostos baseando-se nos estudos realizados por Carmo (2004) e Oliveira et al. (2012) os quais observaram que nessas condições as dimensões do sólido e o intervalo de tempo foram suficientes para o refinamento da malha.

Na Figura 4.1 tem-se a malha numérica no plano z-y; no plano computacional tem-se uma malha regularmente espaçada ($\Delta \xi$ e $\Delta \eta$ são iguais para todos os volumes de controle); já no plano físico y-z, como pode ser observado na Figura 4.1, a malha numérica não é regular pois existe uma região com maior concentração de pontos nodais localizada ao longo do eixo y, nas vizinhanças do ponto focal ($y = L$ e $z = 0$). Os pontos nodais próximos ao eixo z ($\eta = 1$) estão notadamente mais afastados uns dos outros.

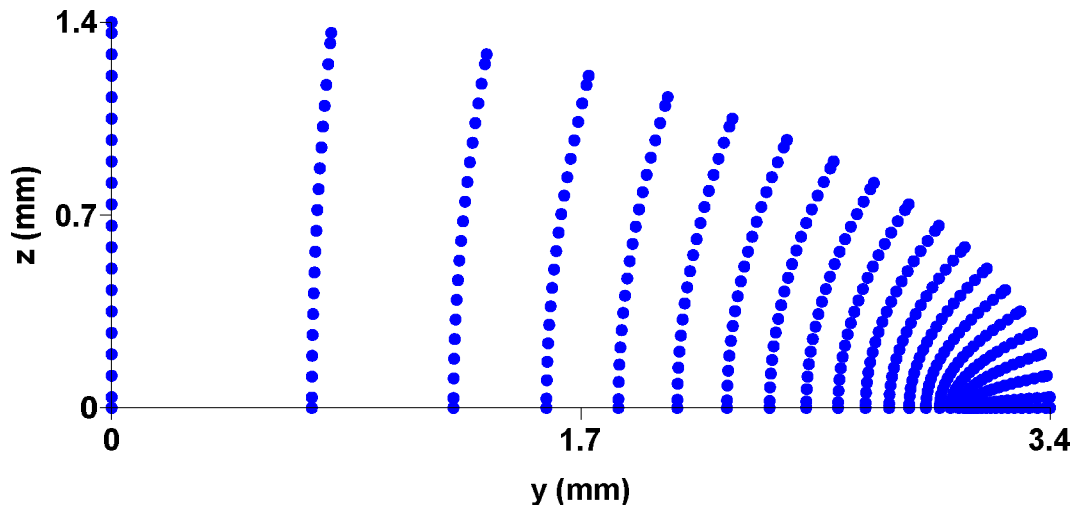


Figura 4.1 - Malha numérica para um corpo esferoidal oblato com $L_2/L_1 = 2,43$.

4.2 - Resultados numéricos da secagem de lentilha

Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos através da solução numérica da equação da difusão considerando-se a remoção do teor de umidade na forma de líquido e vapor (Teoria de Fortes e Okos), submetida a duas diferentes condições de contorno na superfície do material.

Os modelos I e II tratam da transferência simultânea de calor e massa no interior do sólido com condição de contorno de equilíbrio na superfície do sólido e com condição de contorno convectiva, respectivamente.

Nos modelos I e II o encolhimento não foi considerado devido ao fato da secagem envolver teores de umidade de 0,245 acerca de 0,10 kg água/kg massa seca; assim, o efeito do encolhimento sobre a secagem, embora importante, não deve ser muito significativo.

4.2.1 - Resultados obtidos com o modelo I

4.2.1.1 – Teor de umidade

Os valores numéricos do teor de umidade da lentilha obtidos neste trabalho para o Modelo I foram validados comparando com os dados experimentais do teor de umidade da lentilha obtidos durante a secagem por Tang e Sokhansanj (1994), conforme observado nas Figuras 4.2 a 4.4.

Observa-se, nas Figuras 4.2 a 4.4, boa concordância entre os dados numéricos e experimentais, porém ocorreram algumas discrepâncias em tempos longos do processo em razão da condição de contorno utilizada no modelo matemático, que considerava a condição de equilíbrio na superfície do material (Oliveira et al., 2012).

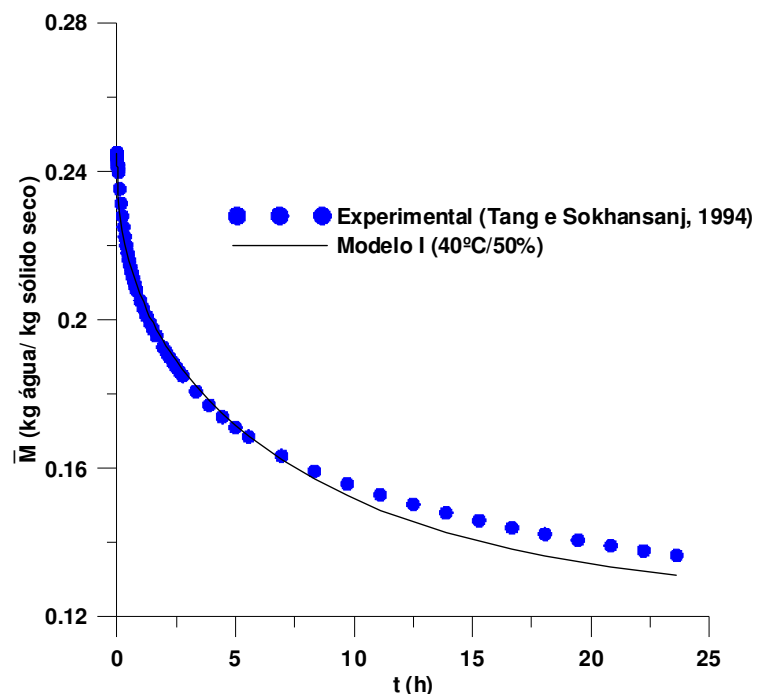


Figura 4.2 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos com o Modelo I e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para a temperatura 40°C e umidade relativa de 50%, em função do tempo de secagem.

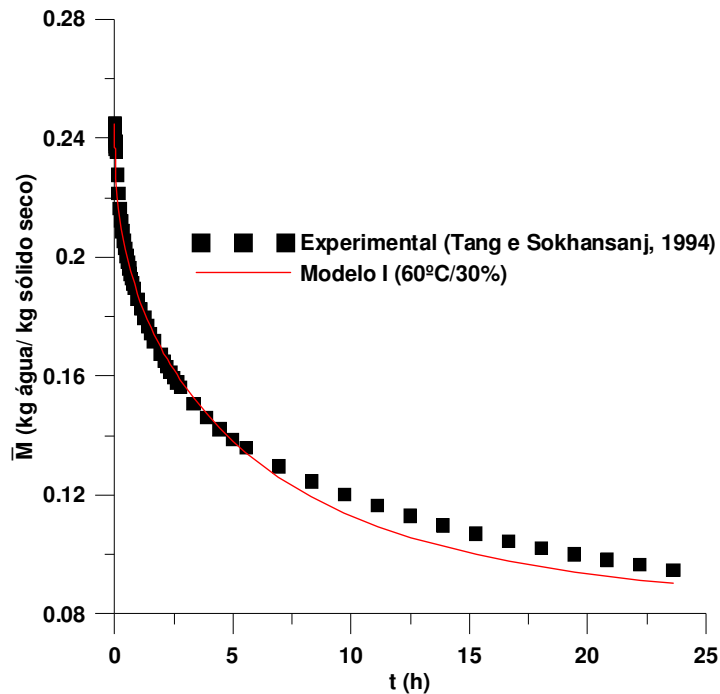


Figura 4.3 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos com o Modelo I e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para a temperatura 60°C e umidade relativa de 30%, em função do tempo de secagem.

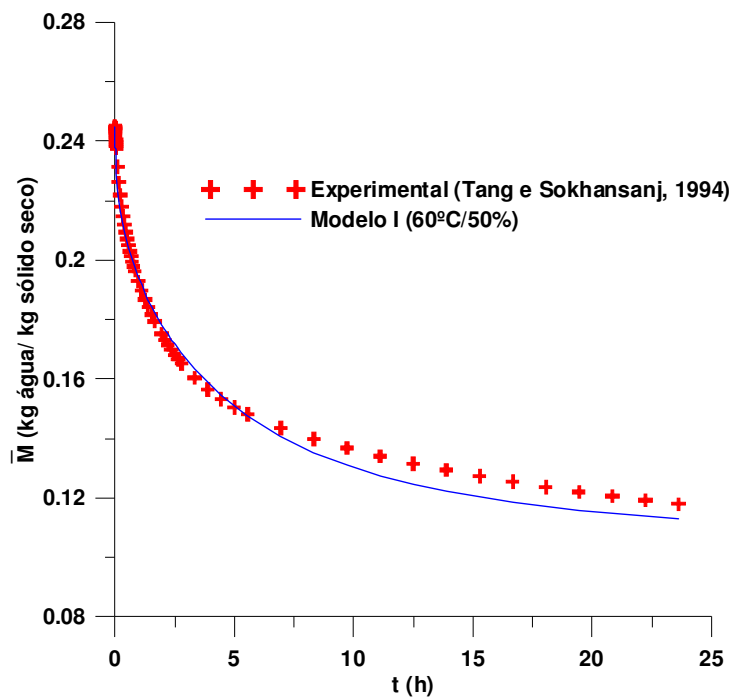


Figura 4.4 - Comparação entre os teores de umidade médio obtidos com o Modelo I e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para a temperatura 60°C e umidade relativa de 50%, em função do tempo de secagem.

Comparando as três cinéticas de secagem para um mesmo valor do teor de umidade, nota-se que no experimento, com maior temperatura (60°C) e menor umidade relativa (30%), Figura 4.3, o produto seca mais rapidamente, ou seja, em menor tempo; seguido das cinéticas de teor de umidade da Figura 4.2 e 4.4, respectivamente. Verifica-se, então, a influência da temperatura e da umidade relativa nas cinéticas de secagem uma vez que os maiores valores de temperatura e os menores valores de umidade relativa resultaram na diminuição do teor de umidade e, conseqüentemente, na redução do tempo de secagem.

Fixando a temperatura do ar de secagem e analisando as Figuras 4.3 e 4.4, verifica-se que menores umidades implicam em secagem mais rápida. Já se fixando o valor da umidade relativa e analisando a influência da temperatura nas Figuras 4.2 e 4.4, nota-se que o aumento da temperatura do ar de secagem diminui o tempo de secagem do grão de lentilha, percebendo-se que a influência da temperatura é maior que o efeito da umidade relativa na cinética de secagem. O efeito da temperatura sobre a cinética de secagem já foi relatada por Markowski et al. (2010) e Burmester e Eggers (2010), ao observarem a influência do aumento de temperatura com a diminuição do tempo de secagem.

Na Figura 4.5 tem-se a taxa de secagem da lentilha em diferentes temperaturas e umidade relativa. Observa-se que no início a taxa de secagem tende a ser maior devido à baixa resistência oferecida pela água a ser removida do grão, porém, ao longo do tempo, a taxa de secagem tende a permanecer constante em virtude da dificuldade da retirada da água ainda retida no produto.

Nota-se também que a velocidade de remoção da umidade (líquido e vapor) do produto aumenta com o aumento da temperatura e com a diminuição da umidade relativa. Este comportamento pode ser observado no início da secagem do produto, cujas taxas de secagem foram, para as condições de secagem de 60°C/30%, 60°C/50% e 40°C/50%, iguais a 0,144, 0,131 e 0,100, respectivamente.

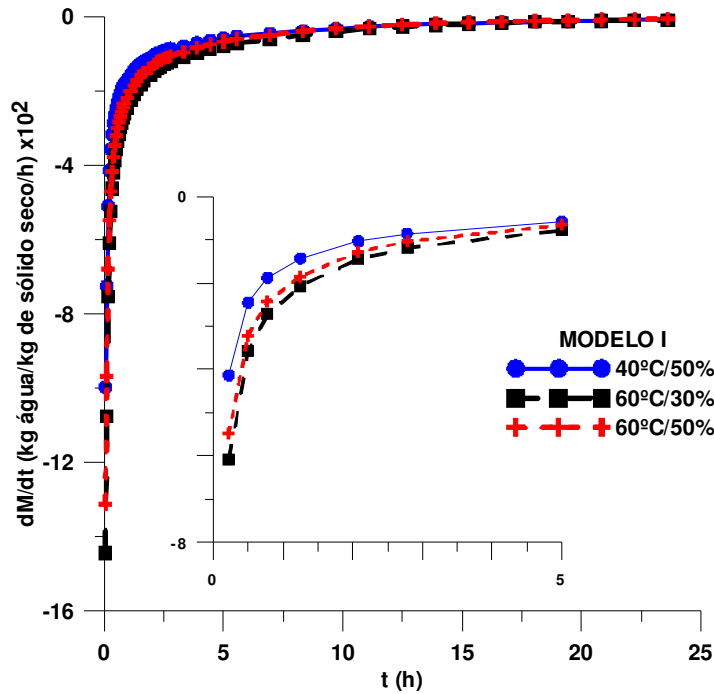


Figura 4.5 – Taxa de secagem do grão de lentilha em diferentes temperaturas e umidade relativa.

4.2.1.2 – Temperatura

Nas Figuras 4.6 a 4.8 têm-se as cinéticas de aquecimento do grão de lentilha ao longo do tempo de secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidade relativa de 30 e 50%. Nota-se que a temperatura média do grão de lentilha alcança rapidamente sua temperatura de equilíbrio em razão da pequena dimensão do grão, alta condutividade (0,15 w/m k) e da condição de contorno de equilíbrio utilizada no modelo matemático.

Ao comparar as curvas da Figura 4.9, percebe-se que as taxas de aquecimento para a mesma temperatura (60°C) e umidade relativa diferente (30 e 50%), não apresentaram diferenças significativas, enquanto as curvas com temperaturas diferentes (40 e 60°C) e mesma umidade relativa, foram visivelmente significativas, evidenciando a influência do parâmetro temperatura do ar de secagem.

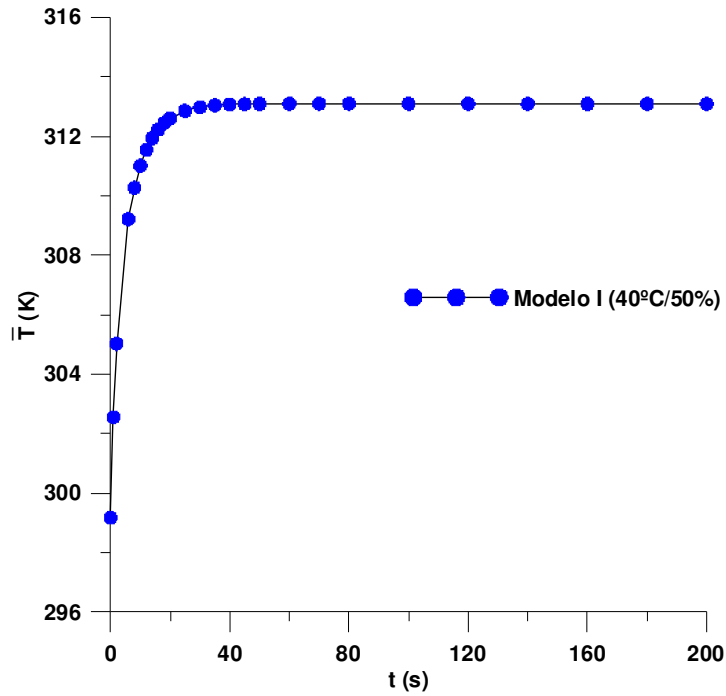


Figura 4.6 - Temperatura média do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% ao longo do tempo de 200 s.

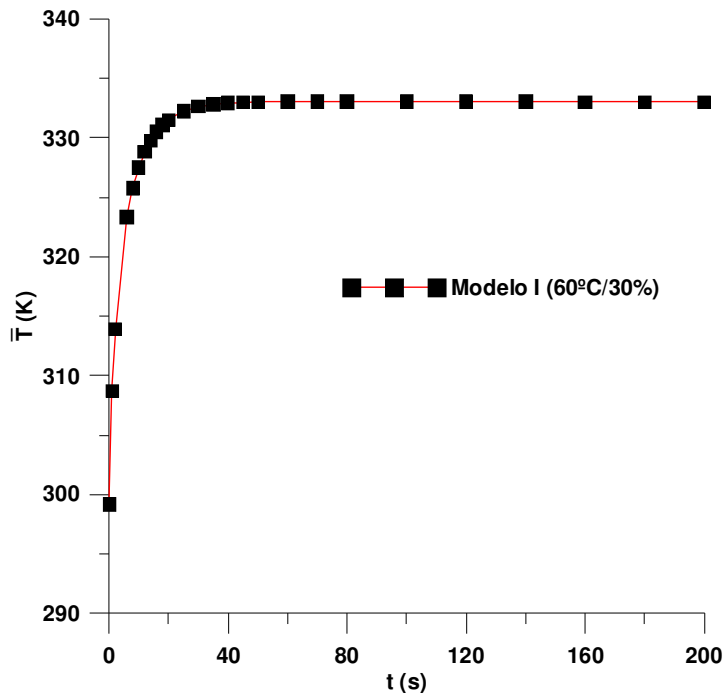


Figura 4.7 - Temperatura média do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% ao longo do tempo de 200 s.

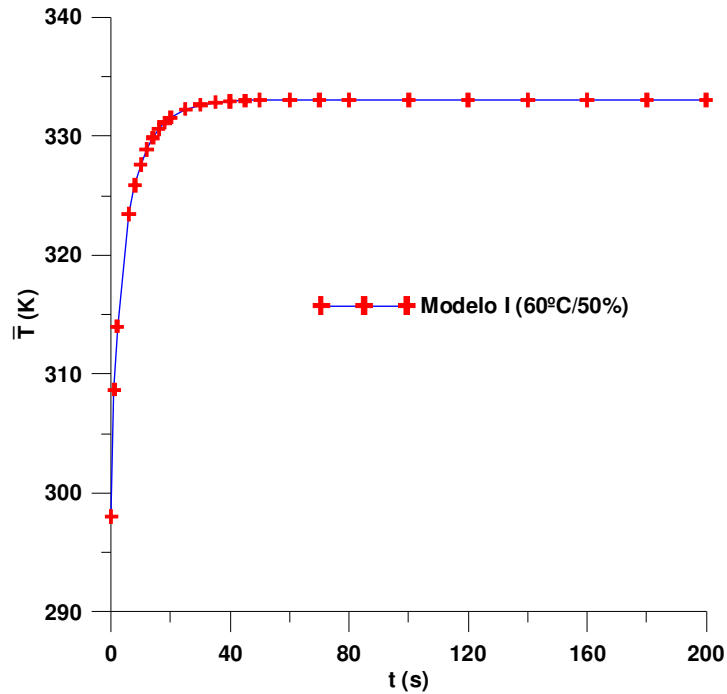


Figura 4.8 - Temperatura média do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% ao longo do tempo de 200 s.

Embora a temperatura e a umidade relativa do ar de secagem não sejam a mesma nos três casos estudados, os tempos de secagem atingiram a temperatura de equilíbrio em aproximadamente 40 s. Para se ter uma ideia, Oliveira et al. (2012) verificaram que a temperatura de equilíbrio alcançada pelo grão de trigo durante sua secagem ($T = 87,8^{\circ}\text{C}$) foi atingida em aproximadamente 50 s. Provavelmente o rápido aquecimento foi devido à condição de contorno utilizada e à pequena dimensão apresentada pelo grão.

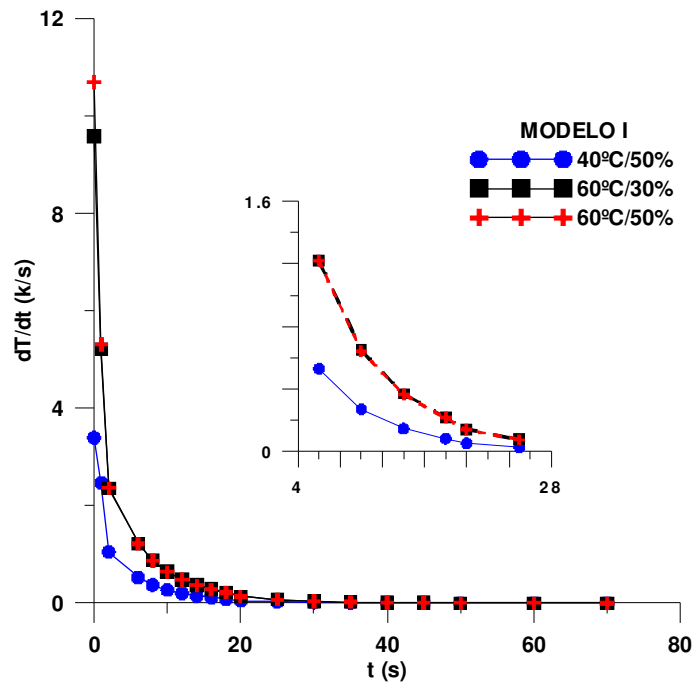


Figura 4.9 – Taxa de aquecimento do grão de lentilha em diferentes temperaturas e umidade relativa.

4.2.1.3 – Fluxo de líquido

Nas Figuras 4.10 a 4.12 verifica-se o comportamento dos fluxos de líquido na superfície do grão de lentilha obtido durante o processo de secagem. Nas primeiras 2 (duas) horas os fluxos de líquido decaem acentuadamente atingindo o equilíbrio após as 10 horas do processo; provavelmente em razão do tamanho do grão, do teor de umidade inicial e também em razão do modelo matemático utilizar a condição de contorno de equilíbrio na superfície do grão, similar ao reportado por Oliveira et al. (2012).

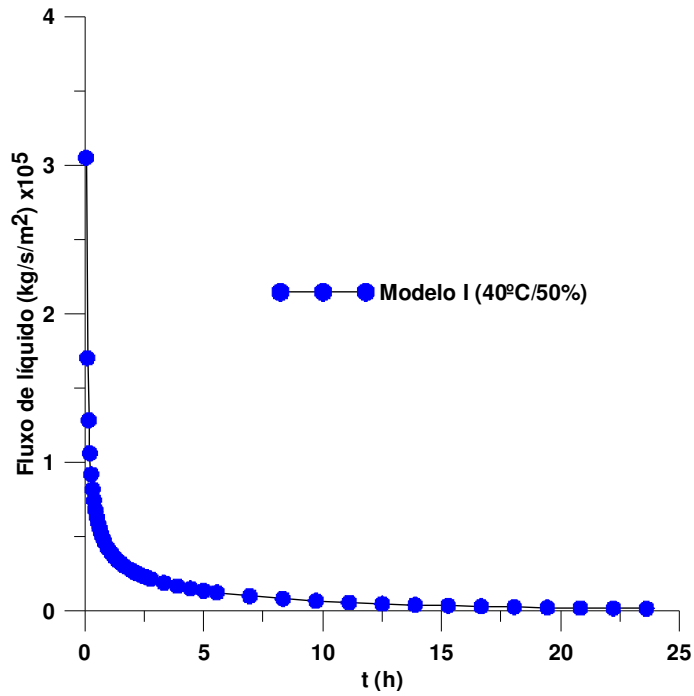


Figura 4.10 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.

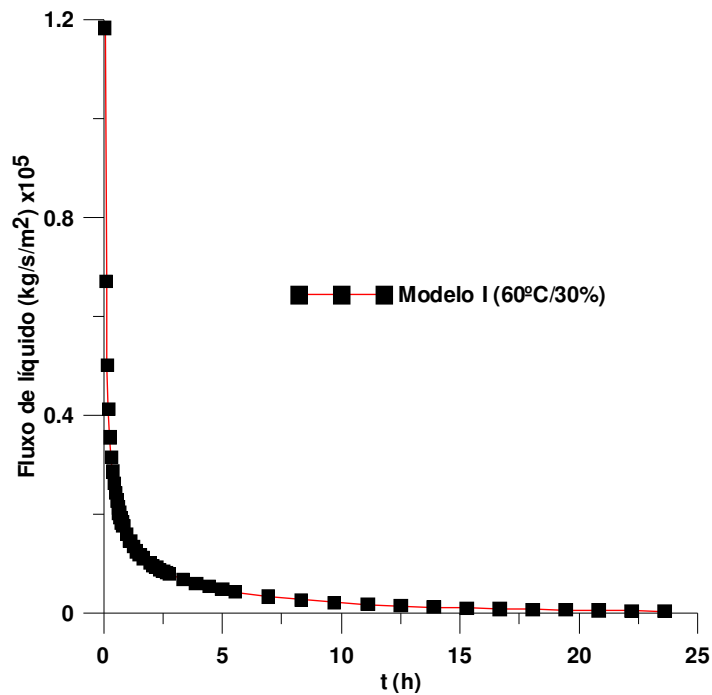


Figura 4.11 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.

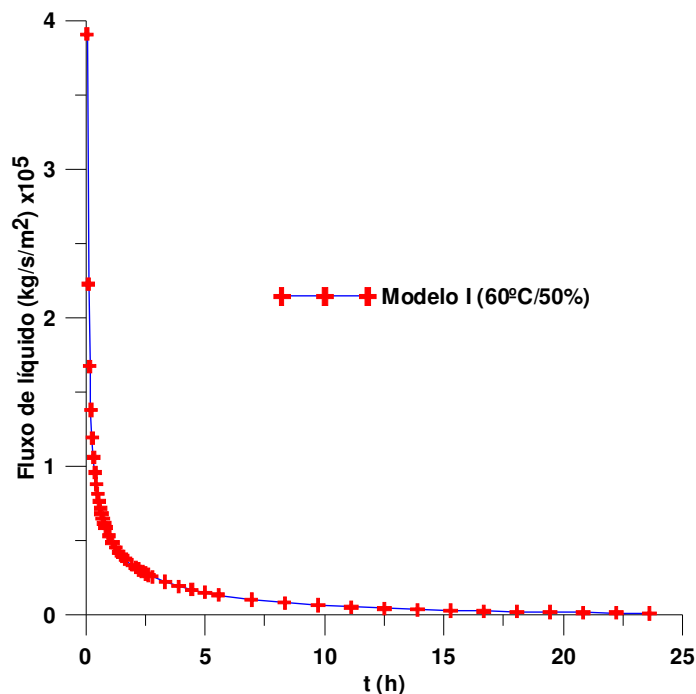


Figura 4.12 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.

Observando a Figura 4.13 percebe-se que o menor fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha ocorreu no modelo I, com maior temperatura (60°C) e menor umidade relativa (30%) do ar de secagem, com valor inicial inferior a $1,2 \times 10^{-5}$ kg /m²s em razão provavelmente, da remoção de umidade na superfície do produto ter sido maior na forma de vapor, como será observado na Figura 4.15. Na Figura 4.13 verifica-se também que o fluxo de líquido com temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%, decresceu mais rapidamente evidenciando a rapidez com que a umidade do grão, na forma de líquido, é removida através da maior temperatura do ar de secagem (60°C) e menor umidade relativa (30%).

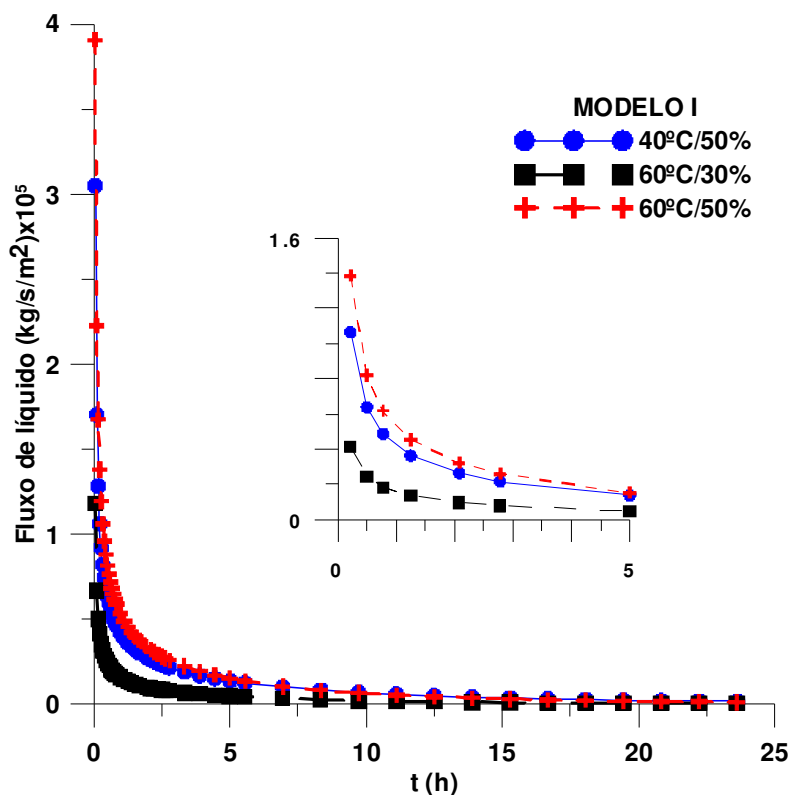


Figura 4.13 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50%.

4.2.1.4 – Fluxo de vapor

Observa-se, nas Figuras 4.14 a 4.16, o comportamento dos fluxos de vapor na superfície do grão de lentilha obtido durante o processo de secagem, os quais decaem de forma acentuada, atingindo rapidamente o equilíbrio, tal como ocorreu com o fluxo de líquido. Nota-se que a ordem de grandeza dos valores dos fluxos de vapor foi bem superior a do fluxo de líquido evidenciando que a remoção da umidade do grão de lentilha foi maior na forma de vapor. Oliveira (2006) observou, ao avaliar o comportamento do fluxo de líquido e vapor na secagem de trigo, que o fluxo de vapor é dominante na superfície do corpo enquanto nas regiões mais úmidas o fluxo de umidade se dá predominantemente na fase líquida, considerando a condição de contorno de equilíbrio na superfície do sólido, similar à que foi usada nesta pesquisa.

Desta forma, a modelagem matemática estudada pode prever, dentre o fluxo de líquido ou de vapor, qual o mecanismo dominante para migração de umidade no interior do sólido.

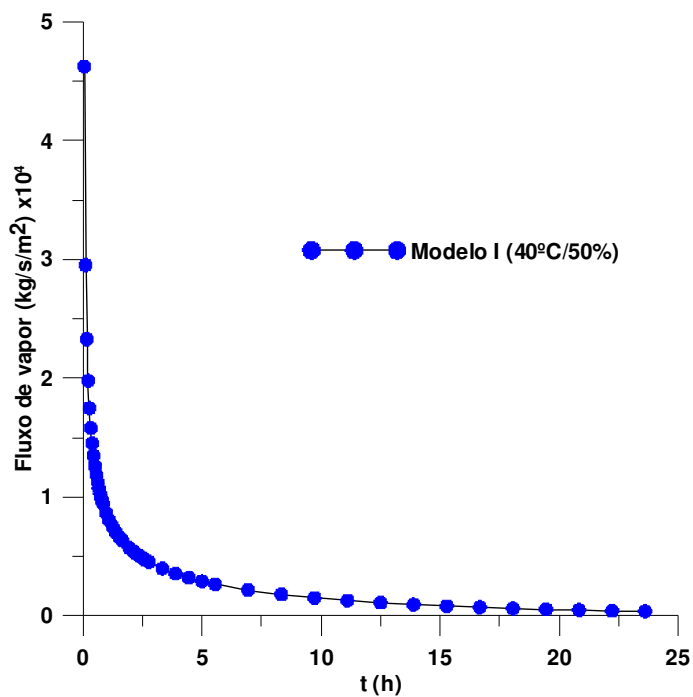


Figura 4.14 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.

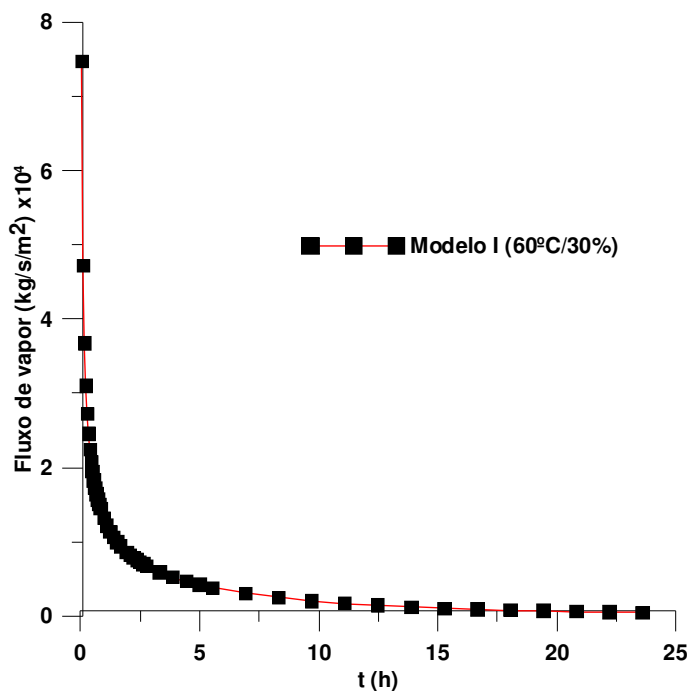


Figura 4.15 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.

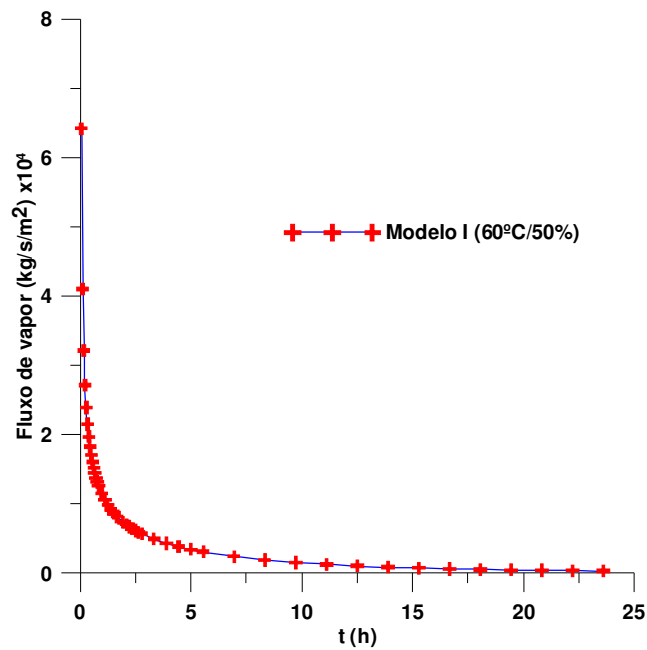


Figura 4.16 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.

Comparando as curvas da Figura 4.17 nas temperaturas de 40 e 60°C e com a mesma umidade relativa, verifica-se que a temperatura influencia na remoção de umidade na forma de vapor enquanto a influência do parâmetro umidade relativa (30 e 50%) não foi tão significativa.

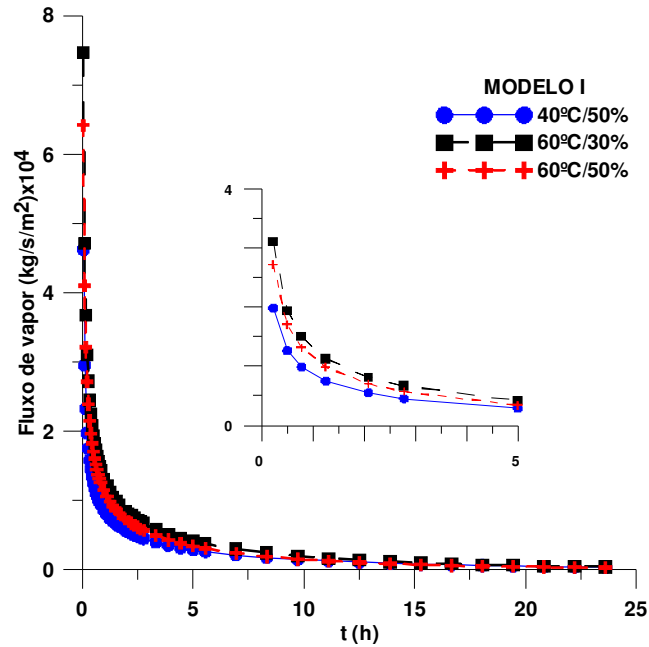


Figura 4.17 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50%.

4.2.1.5 – Fluxo total

Nas Figuras 4.18 a 4.20, têm-se os fluxos totais de massa ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha em diferentes temperaturas e umidade relativa. Percebe-se que no início do processo de secagem as curvas do fluxo total decaem rapidamente atingindo o equilíbrio após aproximadamente 15h de processo. A ordem de grandeza dos valores do fluxo total é a mesma dos valores dos fluxos de vapor, evidenciando uma parcela maior do fluxo de vapor em relação ao fluxo de líquido.

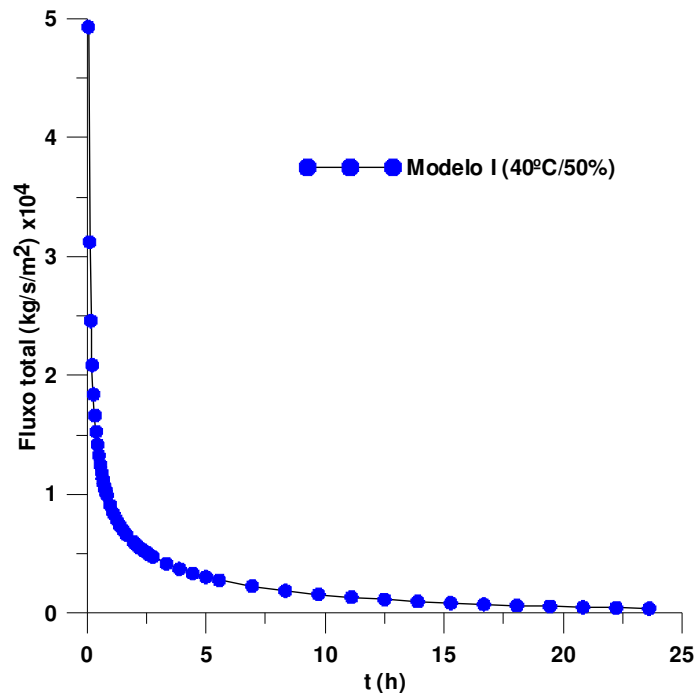


Figura 4.18 - Fluxo total ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.

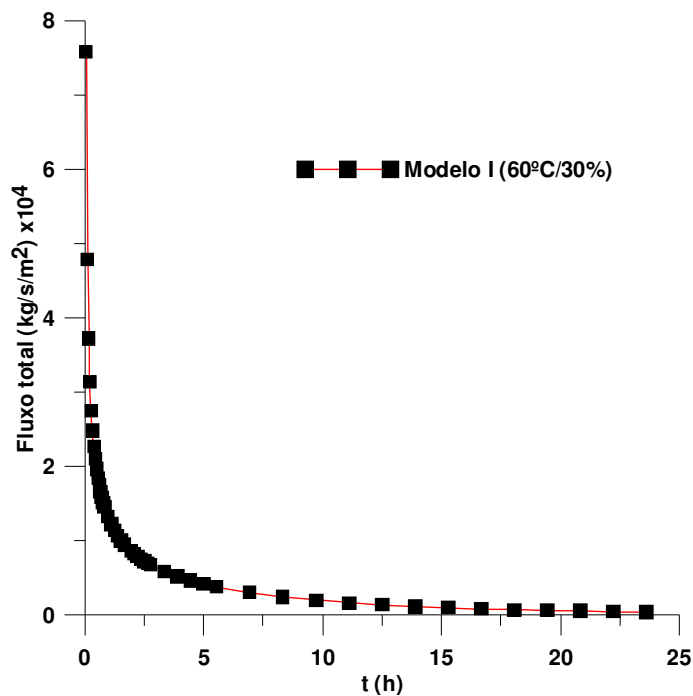


Figura 4.19 - Fluxo total ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.

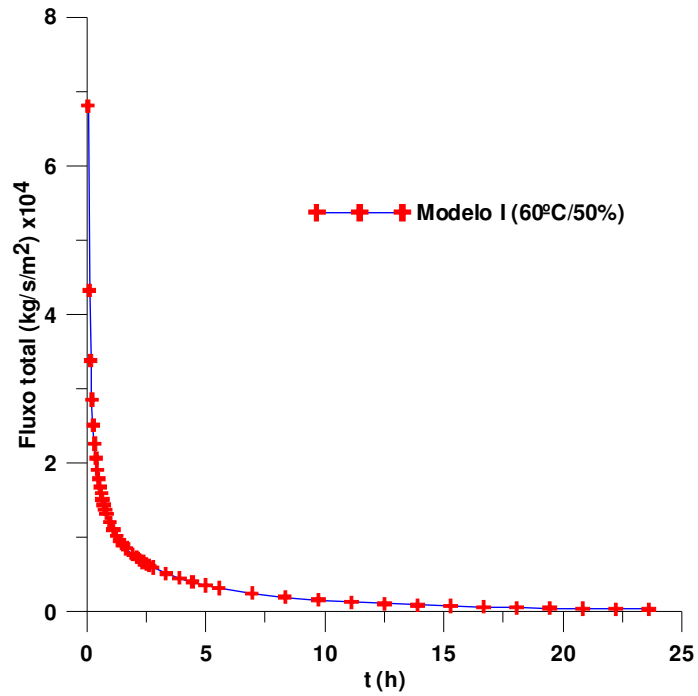


Figura 4.20 - Fluxo total ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.

Comparando as curvas da Figura 4.21, nota-se que o fluxo total ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha foi influenciado principalmente pelo parâmetro temperatura enquanto a umidade relativa do ar de secagem praticamente não apresentou diferença entre as curvas com 30 e 50% de umidade relativa.

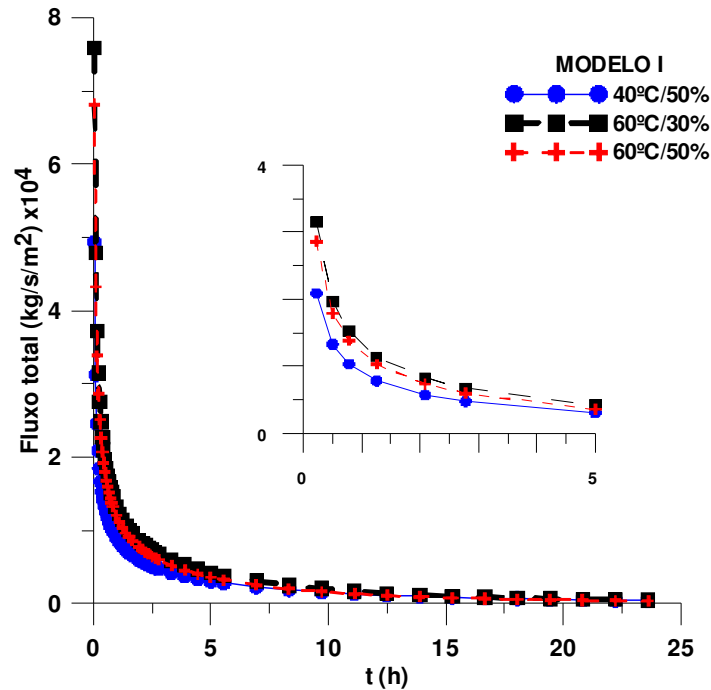


Figura 4.21 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50%.

4.2.1.6 –Relação entre o fluxo de vapor e fluxo de líquido

Tem-se, nas Figuras 4.22 a 4.24, a relação entre os fluxos de vapor e de líquido a qual evidencia uma remoção maior de massa na superfície do grão de lentilha na forma de vapor, durante o tempo de secagem. Nota-se, também, que nas primeiras 2,5 horas do processo a relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ cresce rapidamente tendendo a permanecer constante ao fim do processo de secagem, com o alcance do teor de umidade de equilíbrio.

Observa-se que as relações \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ foram maiores que 15, 16 e 60 para as Figuras, 4.22, 4.23 e 4.24, respectivamente. Os dois primeiros valores da relação se aproximam do valor reportado por Fortes et al. (1981), para o grão de trigo cujo valor foi igual a $\bar{J}_v/\bar{J}_\ell > 10$.

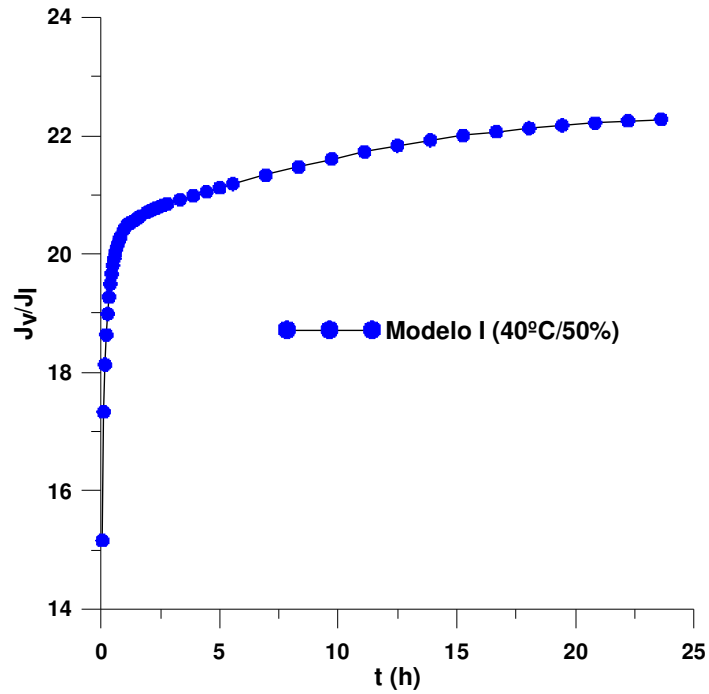


Figura 4.22 – Relação \bar{J}_v/\bar{J}_l na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.

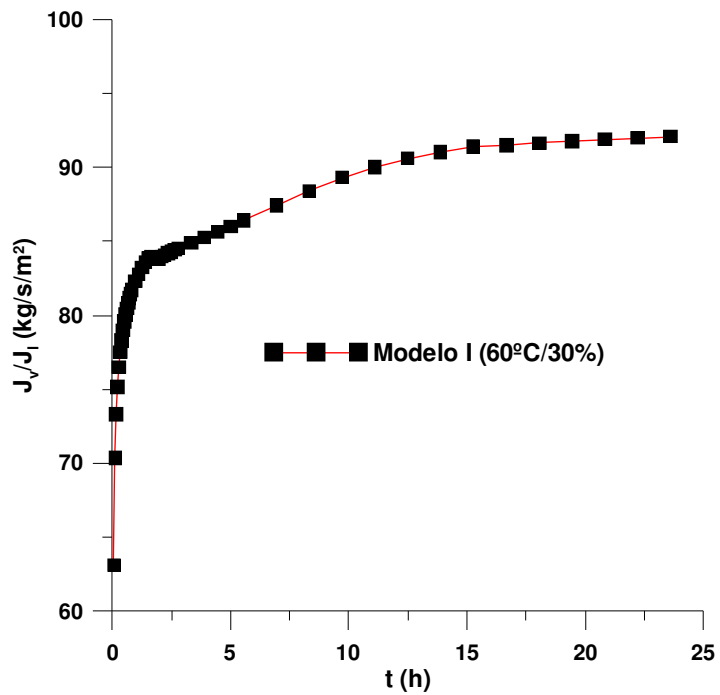


Figura 4.23 – Relação \bar{J}_v/\bar{J}_l na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.

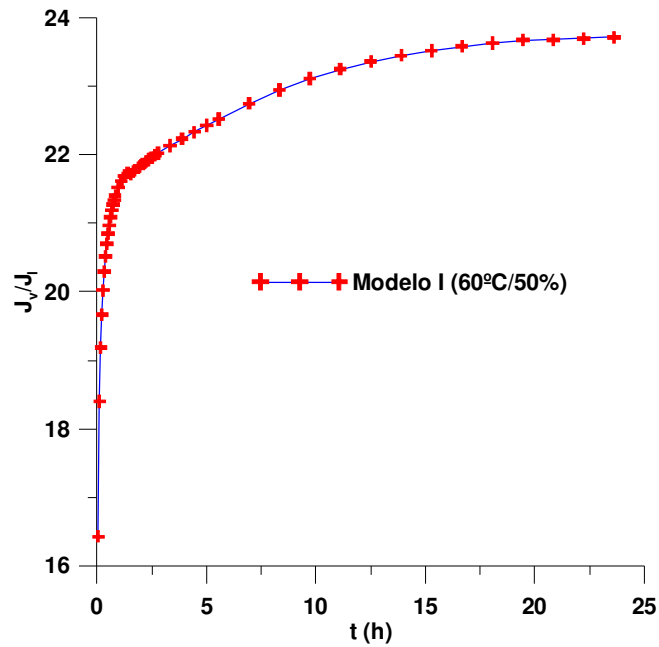


Figura 4.24 – Relação \bar{J}_v/\bar{J}_l na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.

Observa-se, na Figura 4.25, que a combinação maior temperatura e menor umidade relativa influenciou significativamente a relação \bar{J}_v/\bar{J}_l na superfície do grão de lentilha pois a curva com essas características foi a que apresentou os maiores valores.

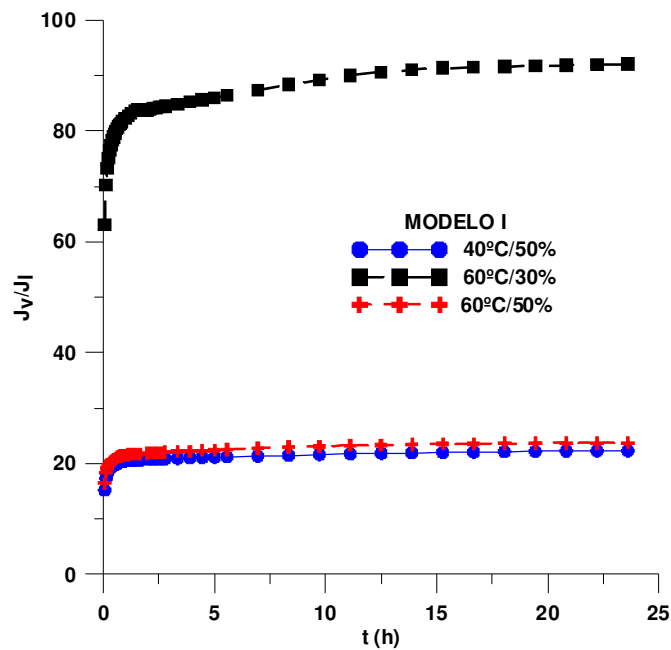


Figura 4.25 – Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidade relativas de 30 e 50%.

4.2.1.7 –Fluxo de calor

Observam-se nas Figuras 4.26 a 4.28, os fluxos de calor na superfície do grão de lentilha, ao longo do tempo de secagem, os quais são maiores no início, devido à grande diferença entre a temperatura do sólido e a temperatura do ar de secagem. Nota-se, também, um decaimento acentuado do fluxo de calor, ao longo do tempo de secagem devido à condição de contorno utilizada neste trabalho e ao tamanho do grão de lentilha.

A quantidade de energia que flui através da superfície do sólido é maior na Figura 4.27 isso porque quanto maior a temperatura menor é o tempo de secagem e quanto menor a umidade relativa do ar menos saturado é o ar de secagem, o que facilita a remoção da umidade do grão.

Embora o grão de lentilha tenha aquecido em aproximadamente em 50 s, o fluxo de calor continua decrescendo até 24 h do processo, pois uma parte da energia fornecida é utilizada para aquecer o grão e a outra para evaporar sua umidade.

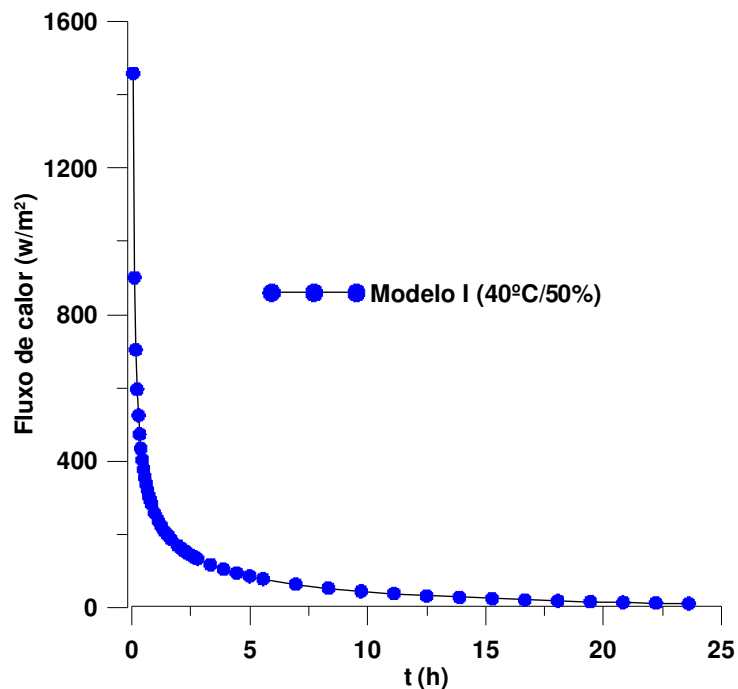


Figura 4.26 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%

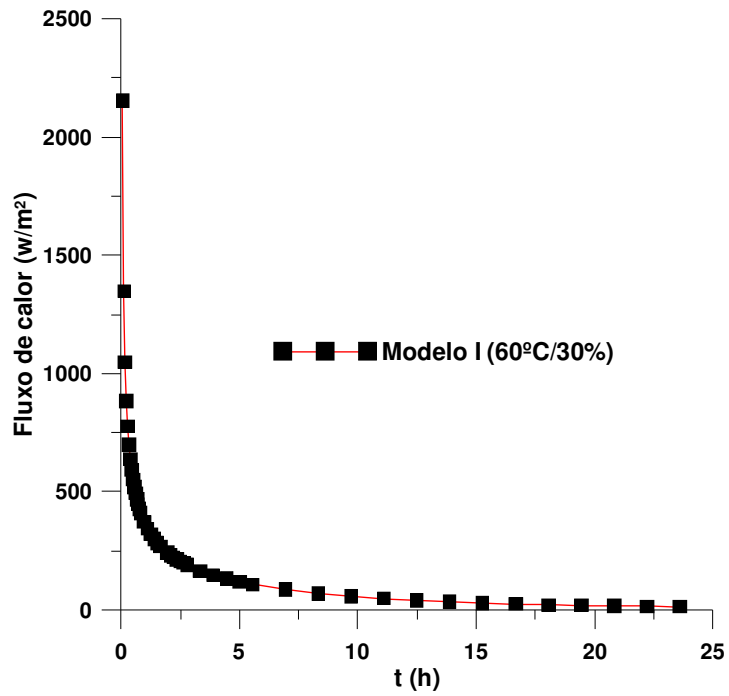


Figura 4.27 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.

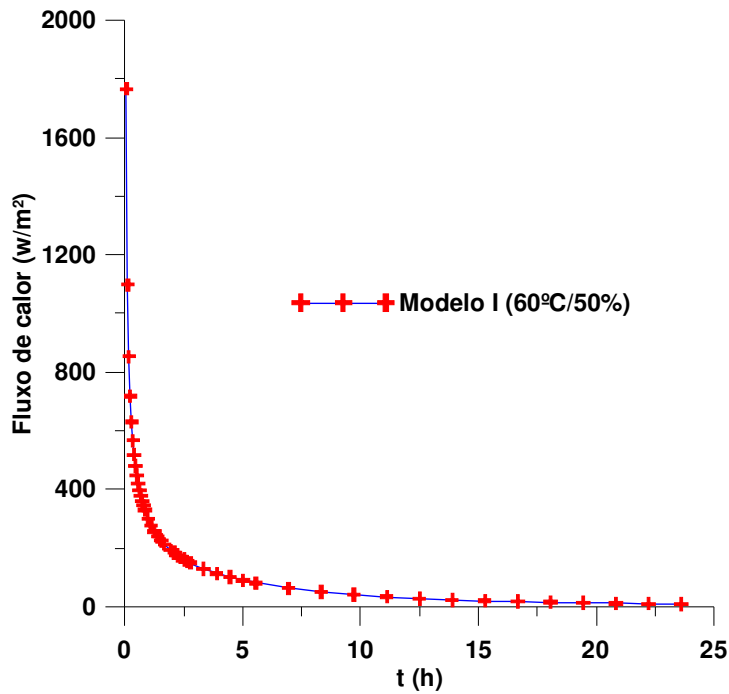


Figura 4.28 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.

Na Figura 4.29 nota-se que o maior fluxo de calor está representado pela curva com maior temperatura (60°C) e menor umidade relativa do ar (30%), seguida da curva com 60°C/50% e 40°C/50%, respectivamente.

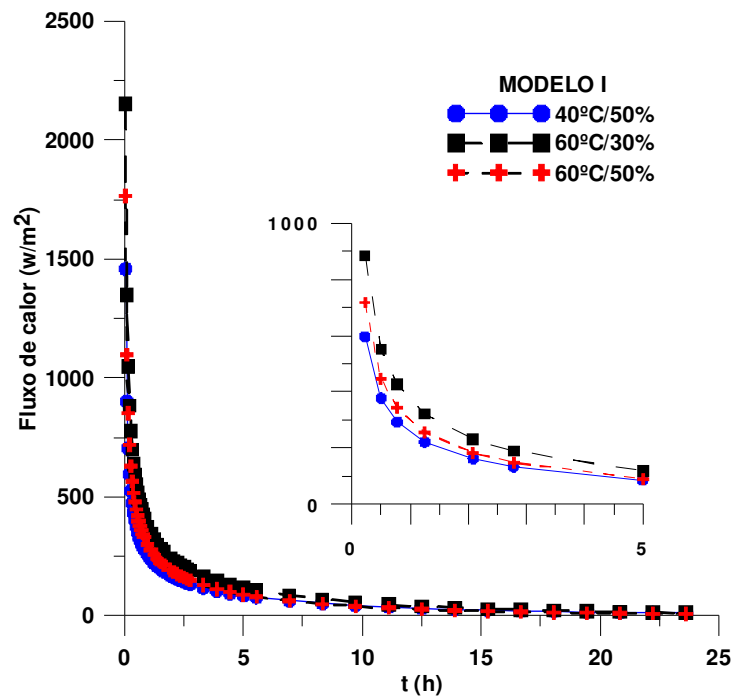


Figura 4.29 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50%.

4.2.1.8 -Distribuição do Teor de umidade no interior da lentilha

A distribuição do teor de umidade no interior do esferoide oblato nos tempos de 1000, 5000, 10000, 20000, 40000 e 85000 s, nas diferentes condições de secagem (40°C/50%, 60°C/30% e 60°C/50%), se encontra nas Figuras 4.30 a 4.32. Pode-se verificar que a umidade (nas formas de líquido e vapor) migra do centro para a superfície do grão de lentilha em que a parcela de líquido é evaporada. Constata-se, ainda, que o teor de umidade do grão diminui do centro para a superfície do grão e ao longo do tempo de secagem da lentilha.

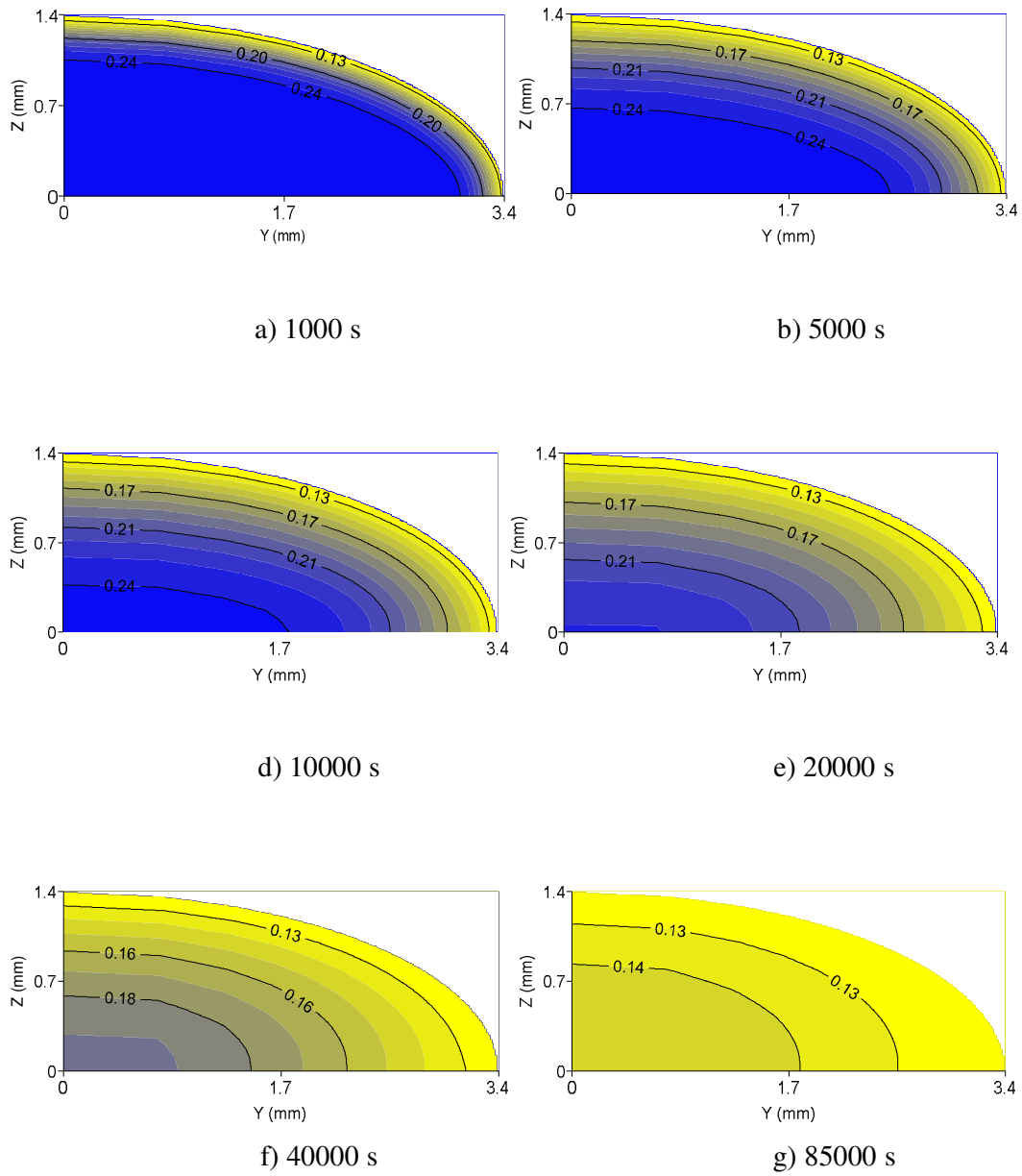


Figura 4.30 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha durante a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%

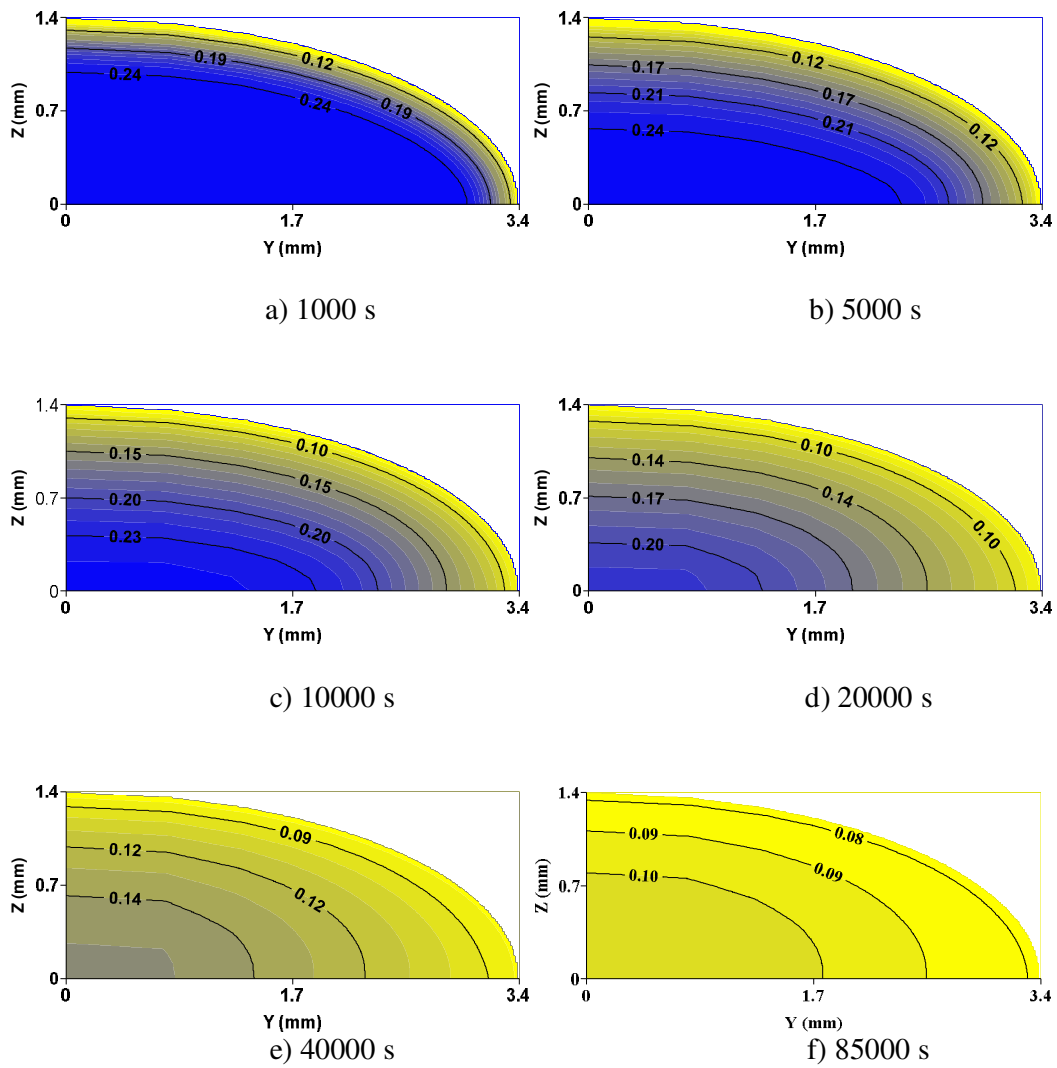


Figura 4.31 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha durante a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%

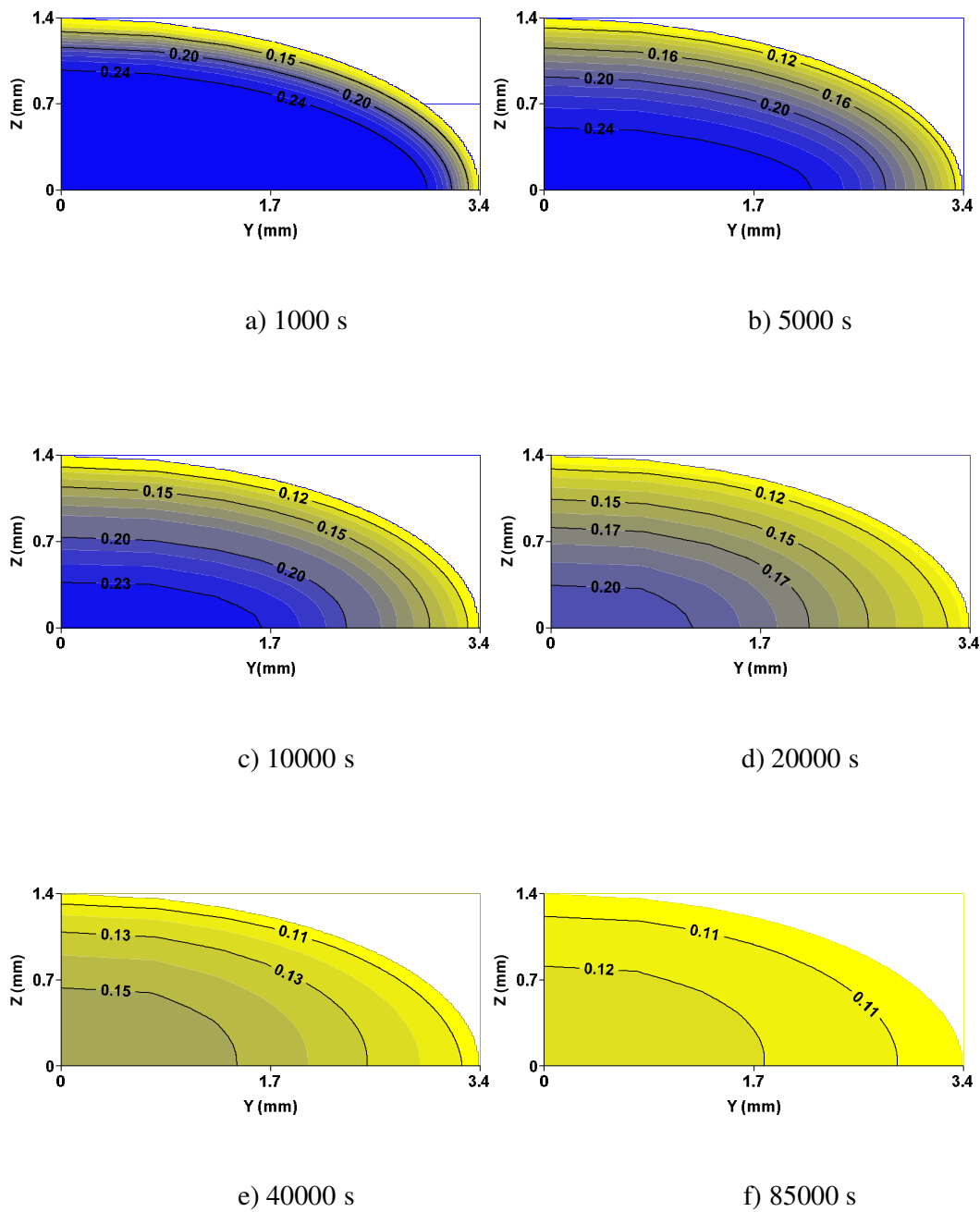


Figura 4.32 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha durante a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%

O estudo da distribuição do teor de umidade dentro do material é muito importante para analisar a evolução das tensões mecânicas desenvolvidas no corpo, devido aos altos gradientes de umidade (Oliveira et al., 2012). Pode-se observar que os maiores gradientes de umidade ocorrem nas proximidades da superfície e do ponto focal do sólido (pontas), o que pode provocar fissuras e trincas devido às tensões provocadas pelos altos gradientes de umidade. Carmo et al. (2012) estudando numericamente a distribuição de umidade do grão de lentilha usando o modelo de difusão líquida, durante a secagem, observaram que os maiores gradientes de umidade ocorriam próximo da superfície e perto do ponto focal do sólido, deixando essas áreas mais susceptíveis a rachaduras e fissuras, além de outros problemas físicos e químicos, como a alteração da cor, textura e sabor.

Comparando as Figuras 4.31 a 4.33, nos tempos de 20000 s, percebe-se que a umidade (nas formas de líquido e vapor) migra mais rapidamente do centro para a superfície do grão de lentilha nas condições de maior temperatura e menor umidade relativa, sendo esse comportamento observado, por exemplo, na linha de isso-umidade igual a 0,17. Em relação à umidade relativa há uma diferença mínima entre o teor de umidade no interior do grão, para isso-umidade com valor de 0,17, no tempo de 20000 s.

4.2.1.9 - Distribuição de temperatura no interior da lentilha

Nas Figuras 4.33 a 4.35 tem-se a distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha durante a secagem nos tempos de 2, 6, 10 e 25 s. Observa-se que a temperatura do grão de lentilha cresce da superfície para o centro do grão e também aumenta com o tempo de secagem.

Observa-se, nos perfis de temperatura, que o aquecimento da superfície do grão até atingir o centro do grão de lentilha ocorre muito rápido atingindo a temperatura de equilíbrio em poucos segundos. Assim, a transferência de calor no interior do grão só é significativa no início da cinética de secagem para a condição de contorno utilizada.

Verifica-se também que os maiores gradientes ocorrem nas proximidades da superfície e do ponto focal do sólido (pontas) tendendo a uma temperatura de equilíbrio com o aumento do tempo de secagem. A rapidez com que o sólido aumenta de temperatura se deve ao

tamanho e à condutividade térmica do grão e também a condição de equilíbrio na superfície do material. Assim, esta região além de se aquecer mais rápida, também seca mais rápida, intensificando ainda mais os problemas de deterioração do material, nessa região.

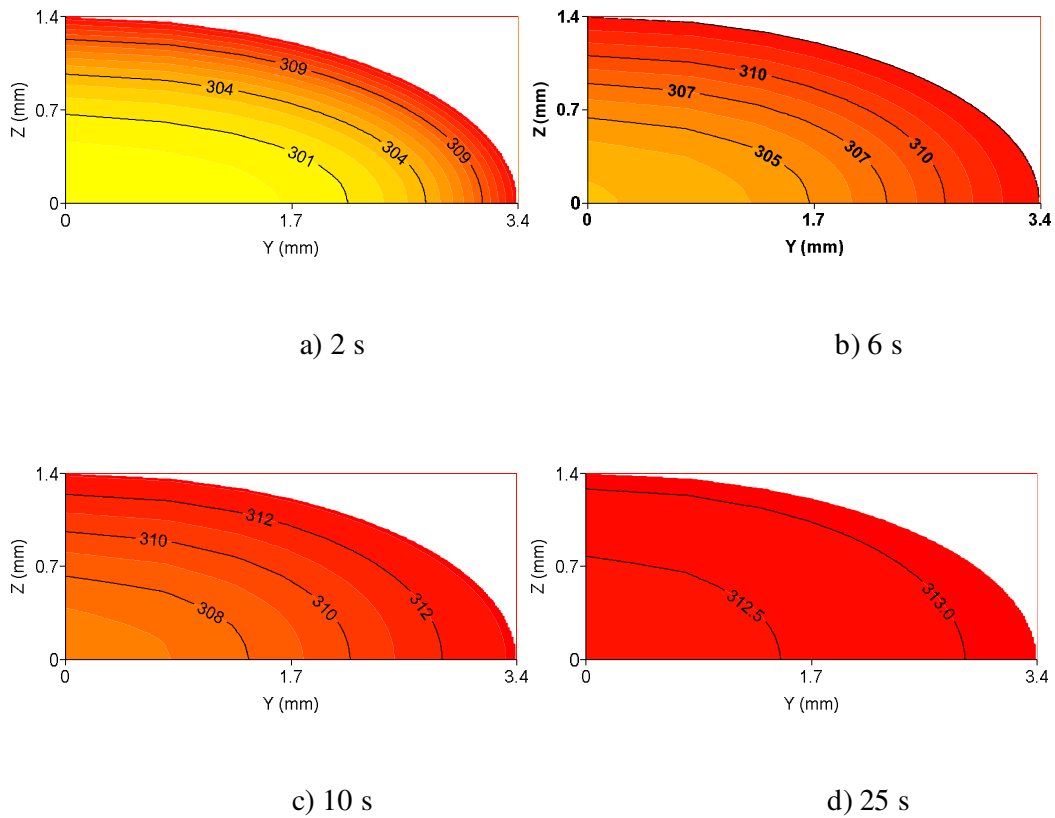


Figura 4.33 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 40°C e umidade relativa de 50%.

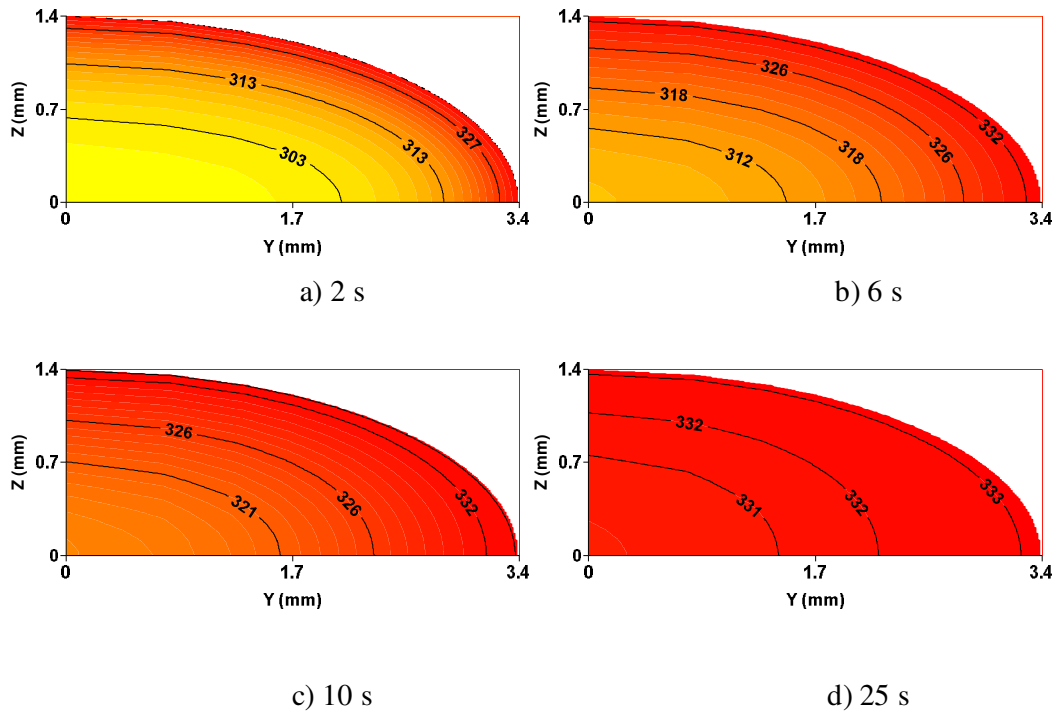


Figura 4.34 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 30%.

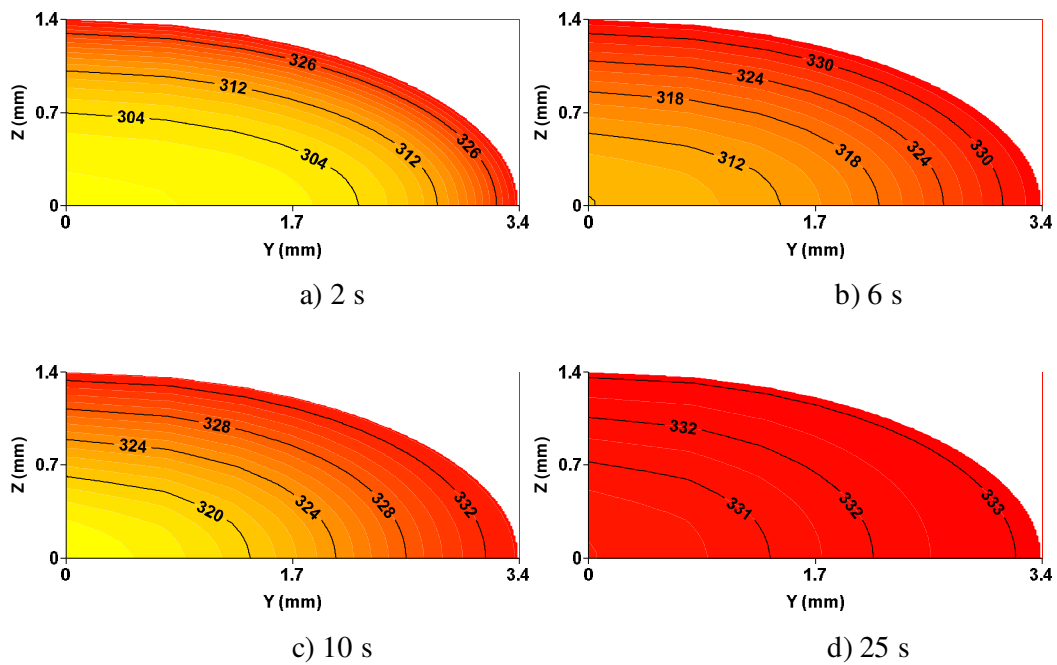


Figura 4.35 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 50%.

4.2.2 - Resultados obtidos com o modelo II

O modelo II, apresentado neste trabalho, trata-se da transferência simultânea de calor e massa no interior do grão de lentilha, com condição de contorno convectiva na superfície de separação entre o produto e o ar de secagem.

4.2.2.1 – Teor de umidade

Têm-se, nas Figuras 4.36 a 4.38, a comparação entre as cinéticas de secagem do grão de lentilha obtida numérica e experimentalmente (Tang e Sokhansanj, 1994), ao longo do processo de secagem. É possível observar melhor concordância entre os valores do teor de umidade média obtidos com o modelo II em relação àqueles obtidos com o modelo I. Oliveira e Lima (2009) estudando um modelo numérico que descrevia simultaneamente a transferência de calor e massa utilizando a condição de contorno convectiva durante a secagem do grão de trigo, observaram que o ajuste dos dados numéricos aos dados experimentais do teor de umidade apresentou bom ajuste, assim como verificado no modelo II. Isto ocorre devido ao fato de que a condição de contorno convectiva na superfície do material é mais realista fisicamente.

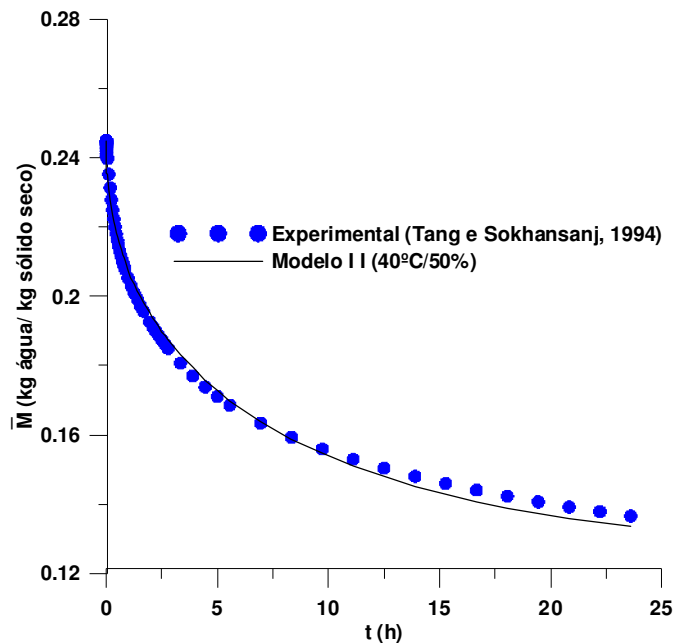


Figura 4.36 - Comparação entre os teores de umidade média obtidos com o modelo II e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.

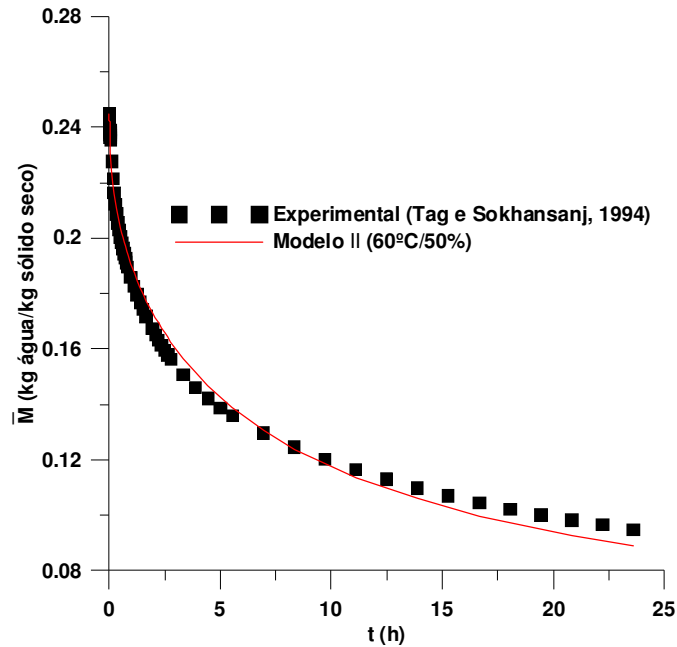


Figura 4.37 - Comparação entre os teores de umidade média obtidos com o modelo II e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.

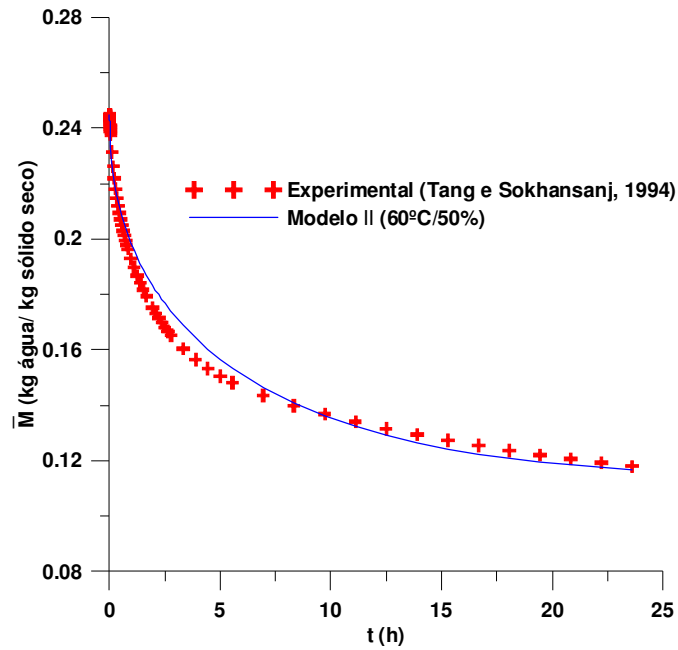


Figura 4.38 - Comparação entre os teores de umidade média obtidos com o modelo II e os reportados por Tang e Sokhansanj (1994), para temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.

O comportamento da taxa de secagem do grão de lentilha do modelo II é semelhante ao do modelo I, com a velocidade de remoção da umidade (líquido e vapor) do produto aumentando com o aumento da temperatura e com a diminuição da umidade relativa. Porém, percebe-se que no início da secagem do produto para o modelo II, as taxas de secagem foram maiores para os casos 60°C/30%, 60°C/50% e 40°C/50% cujos valores foram iguais a 0,165, 0,137 e 0,103 kg água/kg sólido seco.h, respectivamente.

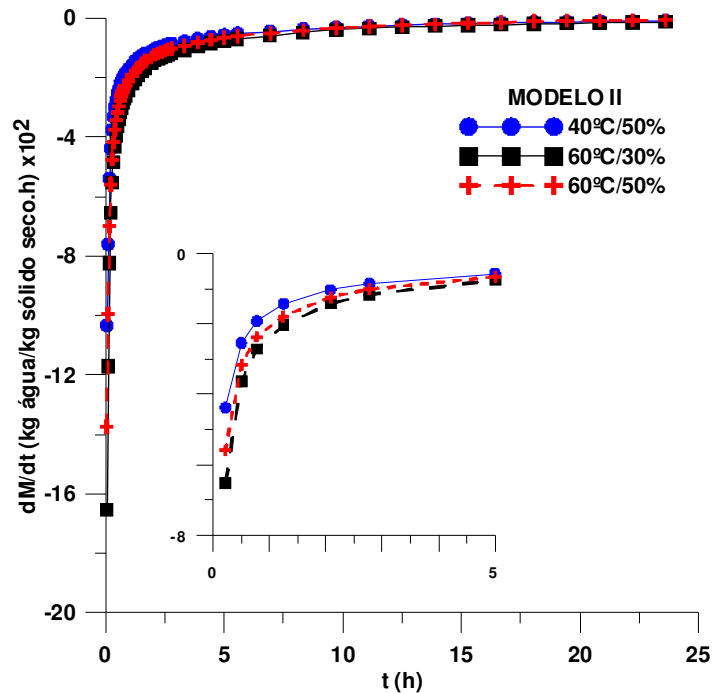


Figura 4.39 – Taxa de secagem do grão de lentilha em diferentes temperaturas e umidade relativa.

4.2.2.2 – Temperatura

Nas Figuras 4.40 a 4.42 verifica-se o aquecimento médio do grão de lentilha ao longo do tempo de secagem. Nota-se que, diferente do ocorrido com o modelo I, no modelo II a temperatura média do grão de lentilha alcança a temperatura de equilíbrio em um intervalo de tempo maior apresentando, inclusive, um crescimento mais suave, devido à condição de contorno convectiva utilizada neste modelo.

Observa-se, na Figura 4.43, que a taxa de aquecimento do grão de lentilha tem o mesmo comportamento da taxa de aquecimento observado no modelo I, ou seja, as curvas

com a mesma temperatura (60°C) e umidade relativa diferente (30 e 50%) não apresentaram diferenças significativas enquanto as curvas com temperaturas diferentes (40 e 60°C) e mesma umidade relativa (50%) influenciaram o comportamento da taxa de secagem demonstrando a importância da temperatura do ar de secagem.

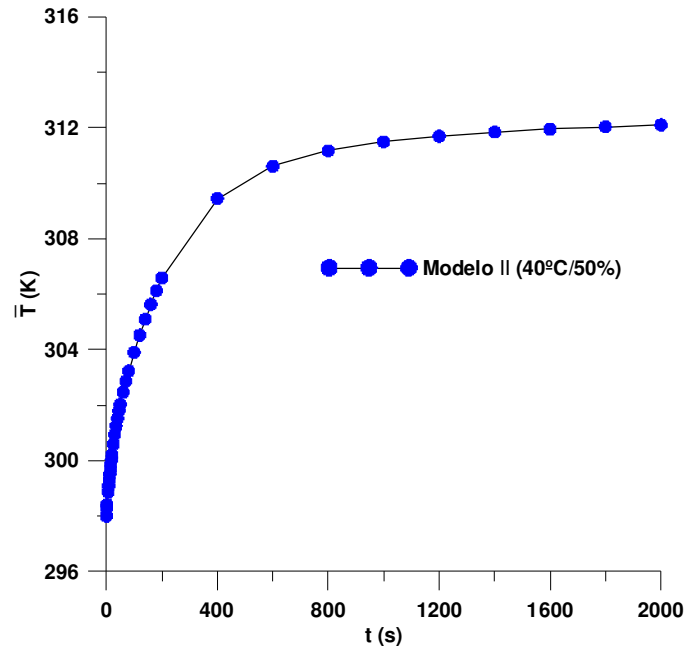


Figura 4.40 - Temperatura média do grão de lentilha ao longo do tempo de 2000 s para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50%.

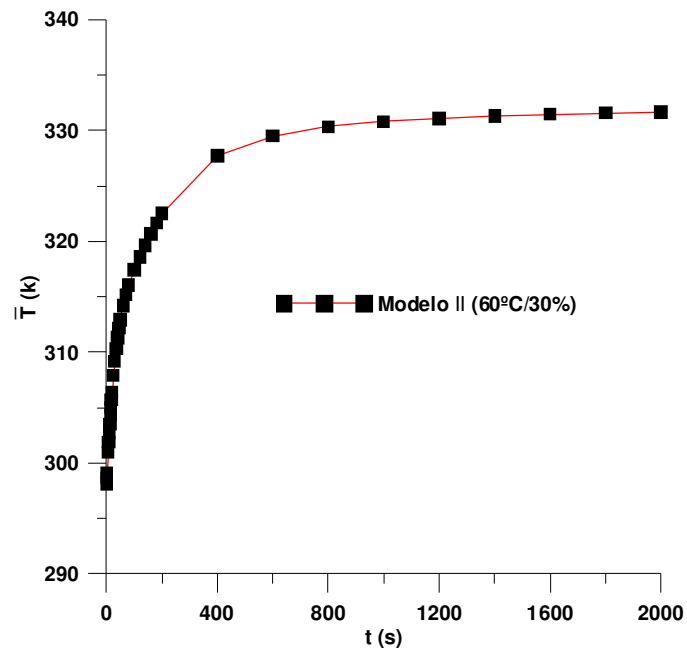


Figura 4.41 - Temperatura média do grão de lentilha ao longo do tempo de 2000 s para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%.

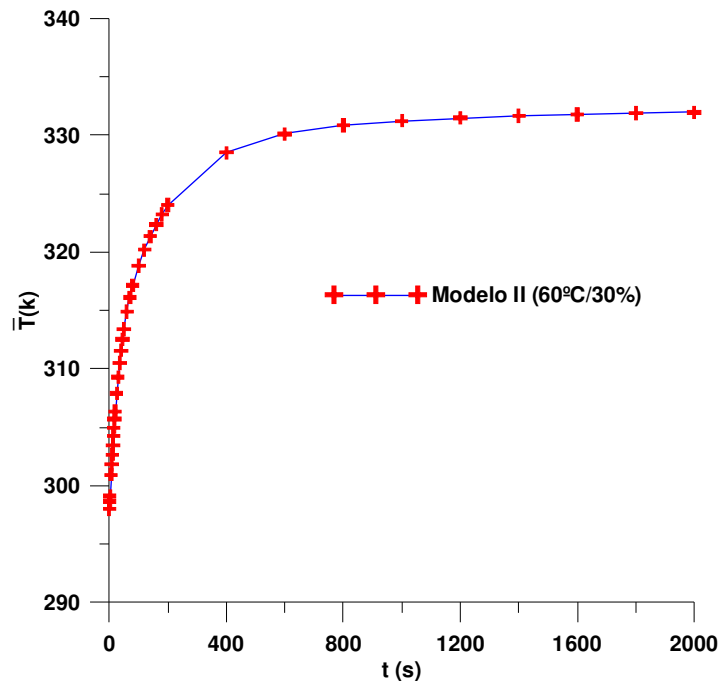


Figura 4.42 - Temperatura média do grão de lentilha ao longo do tempo de 2000 s para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50%.

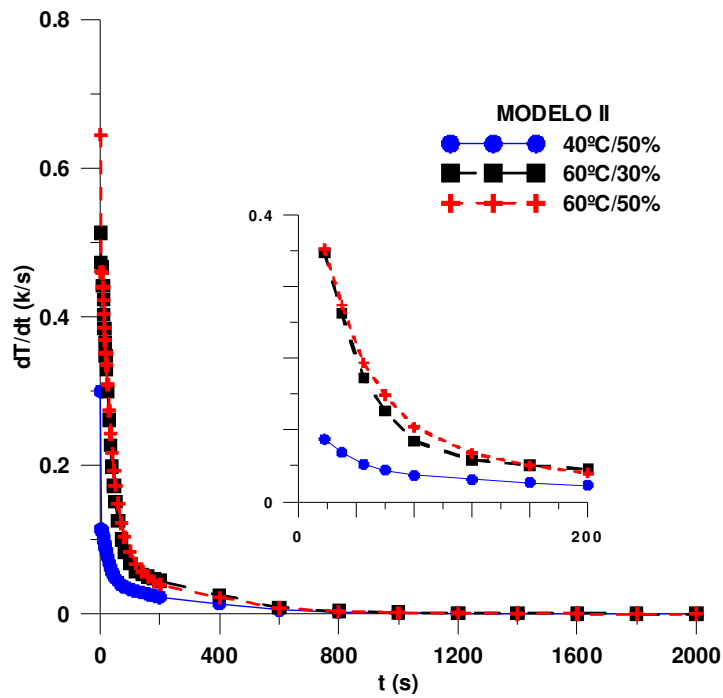


Figura 4.43 – Taxa de aquecimento do grão de lentilha para a secagem em diferentes temperaturas e umidade relativa.

4.2.2.3 – Fluxo de líquido

Nas Figuras 4.44 a 4.46 verifica-se o comportamento dos fluxos de líquido na superfície do grão de lentilha obtido durante o processo de secagem com o modelo II. Observa-se que, para todos os casos analisados, os valores iniciais dos fluxos de líquido apresentaram resultados maiores que os obtidos com o uso do modelo I. Nota-se também que o caso com $T = 40^{\circ}\text{C}$ e $H = 50\%$, apresentou o maior valor de fluxo de líquido na superfície do material seguido dos casos com 60°C e umidade relativa de 50% com 60°C e umidade relativa de 30% .

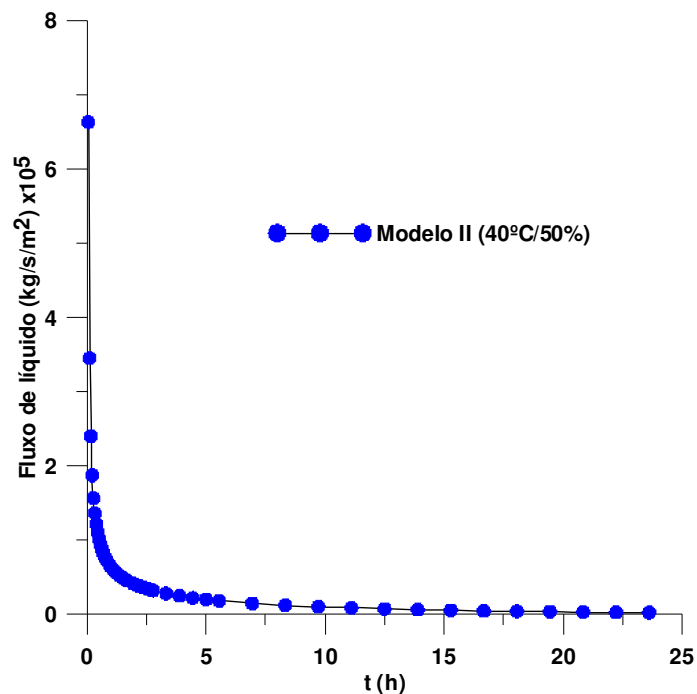


Figura 4.44 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

Comparando o aumento percentual entre os valores iniciais dos fluxos de líquidos do modelo II em relação ao modelo I, observa-se que esses aumentos foram iguais a 46% para a condição de $40^{\circ}\text{C}/50\%$, 53% para a condição de $60^{\circ}\text{C}/30\%$ e de 67% para $60^{\circ}\text{C}/30\%$, evidenciando a importância de se considerar uma modelagem mais realista para prever o fenômeno da secagem.

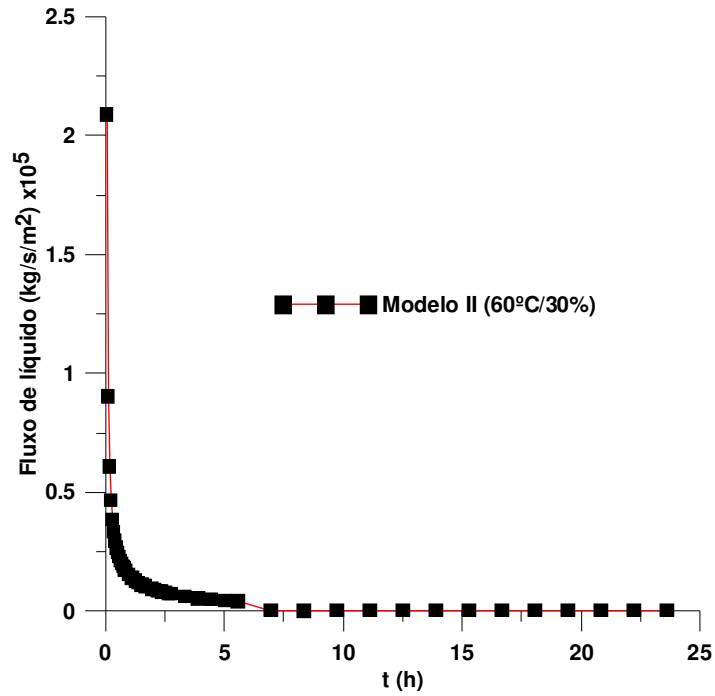


Figura 4.45 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).

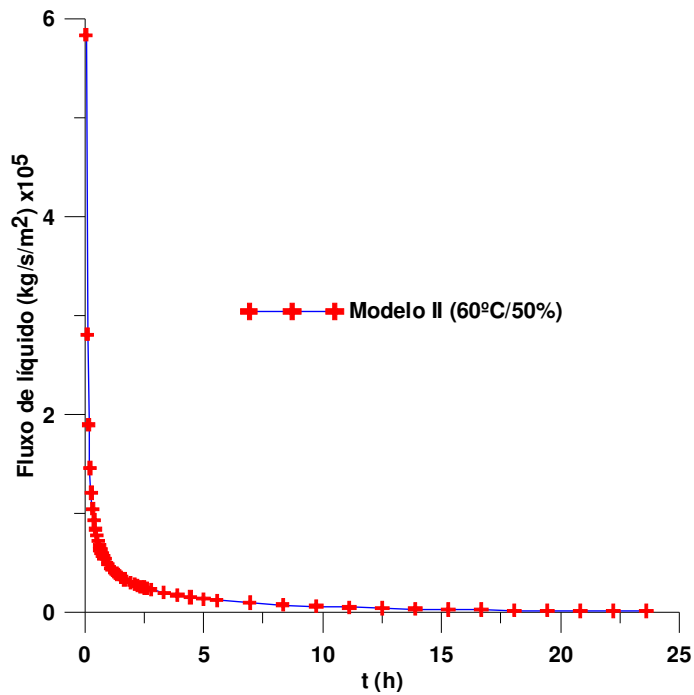


Figura 4.46 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

Na Figura 4.47 verifica-se o mesmo comportamento do fluxo de líquido observado no modelo I, com o fluxo de líquido na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30%, decrescendo mais rapidamente que as demais curvas evidenciando a rapidez com que a umidade do grão, na forma de líquido, é removida através da maior temperatura do ar de secagem (60°C) e menor umidade relativa (30%).

Tem-se, na Figura 4.48, a comparação entre as curvas de fluxo de líquido para o caso com temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% dos modelos I e II. Nota-se que apenas no início da secagem houve diferenças entre os valores do fluxo de líquido e que na maior parte do processo de secagem o comportamento foi praticamente o mesmo.

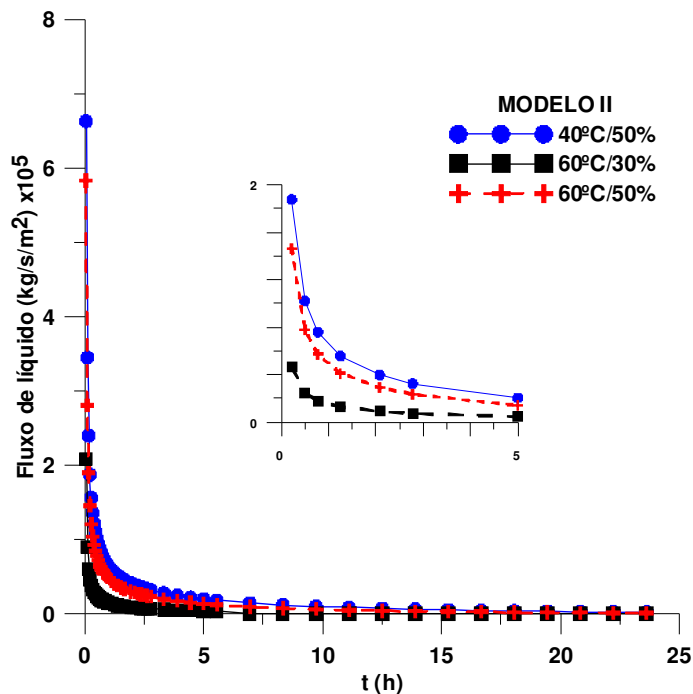


Figura 4.47 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50% (Modelo II).

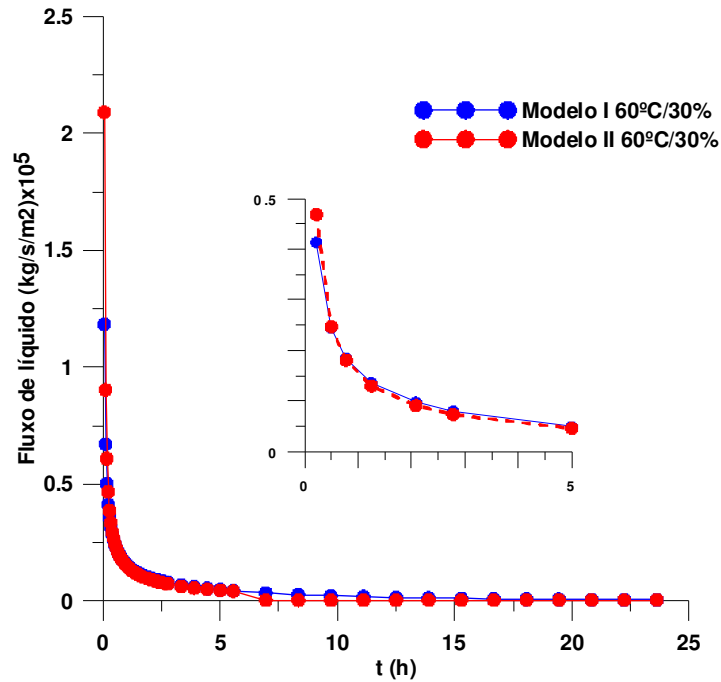


Figura 4.48 - Fluxo de líquido na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e modelo II.

4.2.2.4 – Fluxo de vapor

Têm-se, nas Figuras 4.49 a 4.51, os fluxos de vapor na superfície do grão de lentilha obtidos durante o processo de secagem no interior do grão de lentilha com o modelo II. Nota-se que os fluxos de vapor apresentaram valores superiores aos valores de fluxos de vapor determinados pelo modelo I em quanto a maior remoção de massa na forma de vapor foi observada no modelo II com a temperatura do ar de secagem igual a 60°C e 30% de umidade relativa.

É importante observar que, no início do processo, os valores do fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para os três casos estudados, chegam a ser 10 vezes maiores que o fluxo de líquido.

Na Figura 4.52 têm-se os fluxos de vapor do grão de lentilha em diferentes condições de secagem. Nota-se que essas curvas do modelo II apresentaram o mesmo comportamento das curvas do modelo I.

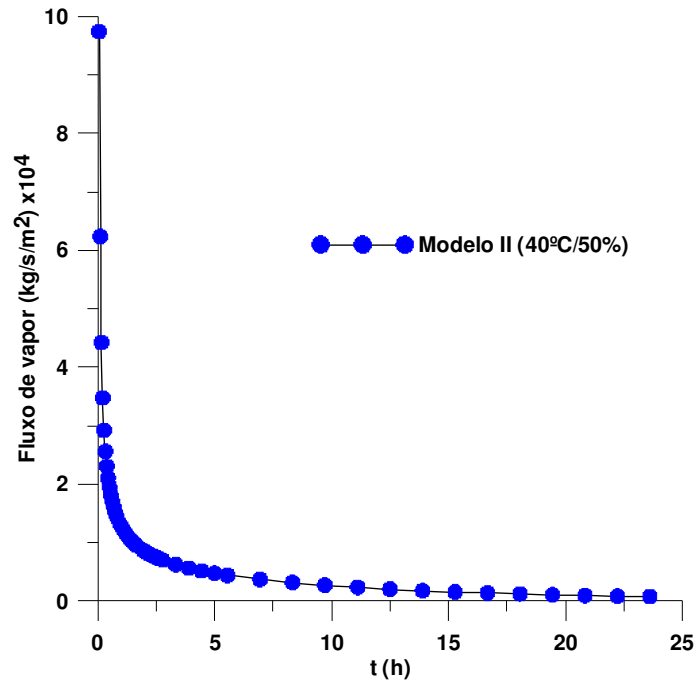


Figura 4.49 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

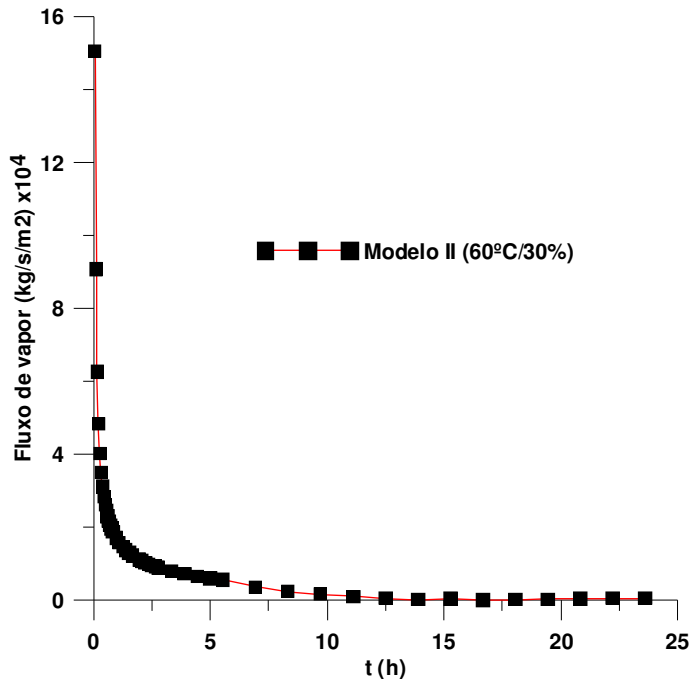


Figura 4.50 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).

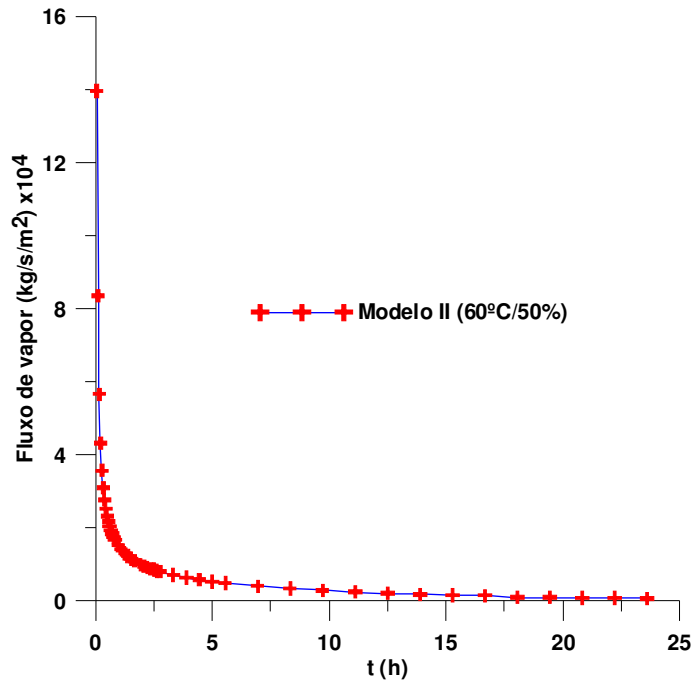


Figura 4.51 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

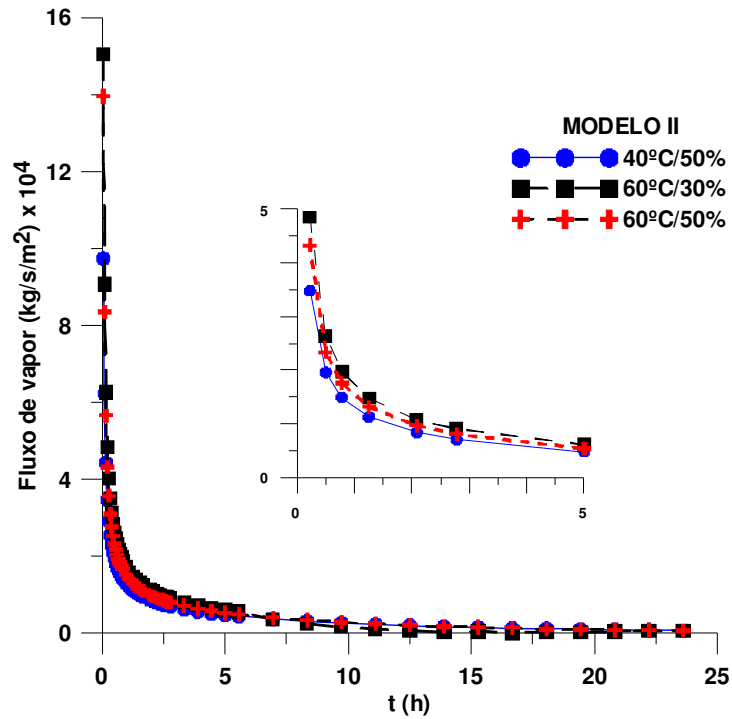


Figura 4.52 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50% (Modelo II).

Comparando as curvas de fluxo de vapor dos modelos I e II para o mesmo caso estudado, ou seja, 60°C/30%, observa-se que o fluxo de vapor foi maior no modelo II, nas 5 primeiras horas do processo de secagem; após este tempo praticamente não há diferença entre as curvas.

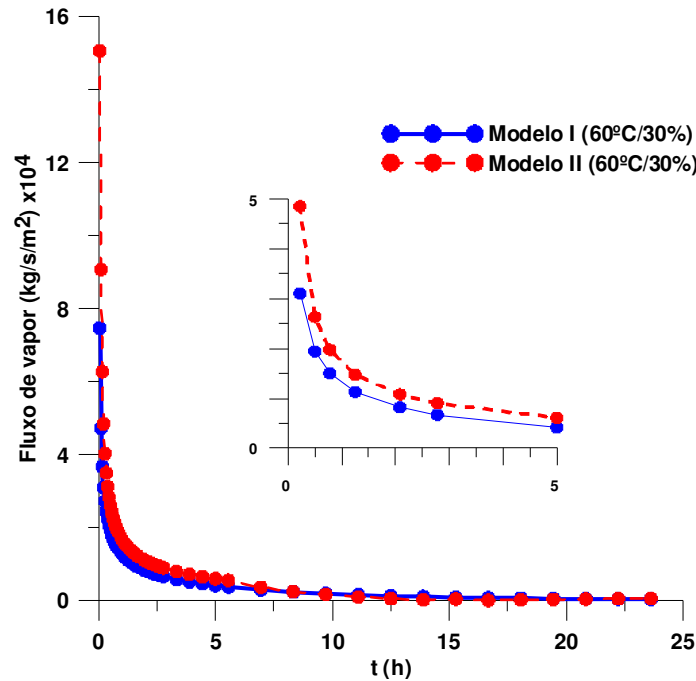


Figura 4.53 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e modelo II.

4.2.2.5 – Fluxo total

Nota-se, nas Figuras 4.54 a 4.56, que os fluxos totais de massa ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha em diferentes temperatura e umidade relativas nos instantes iniciais e as curvas do fluxo total, decaem rapidamente atingindo o equilíbrio em 12h de processo; após este tempo o fluxo total tende a permanecer constante até o final da secagem.

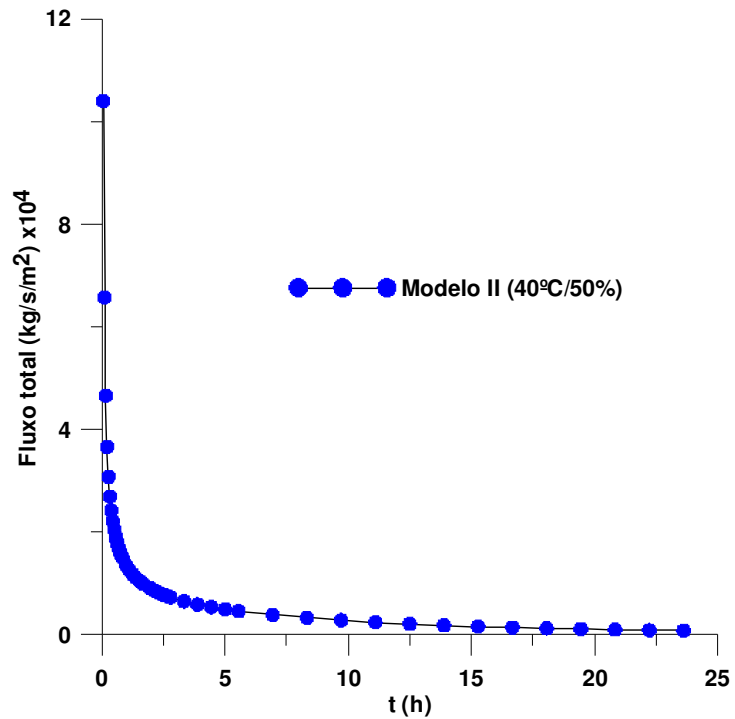


Figura 4.54 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

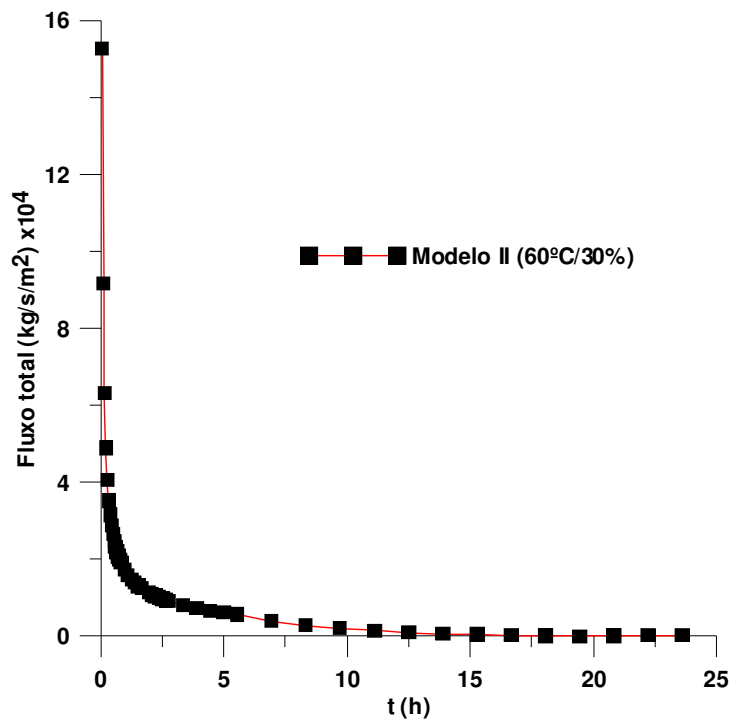


Figura 4.55 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).

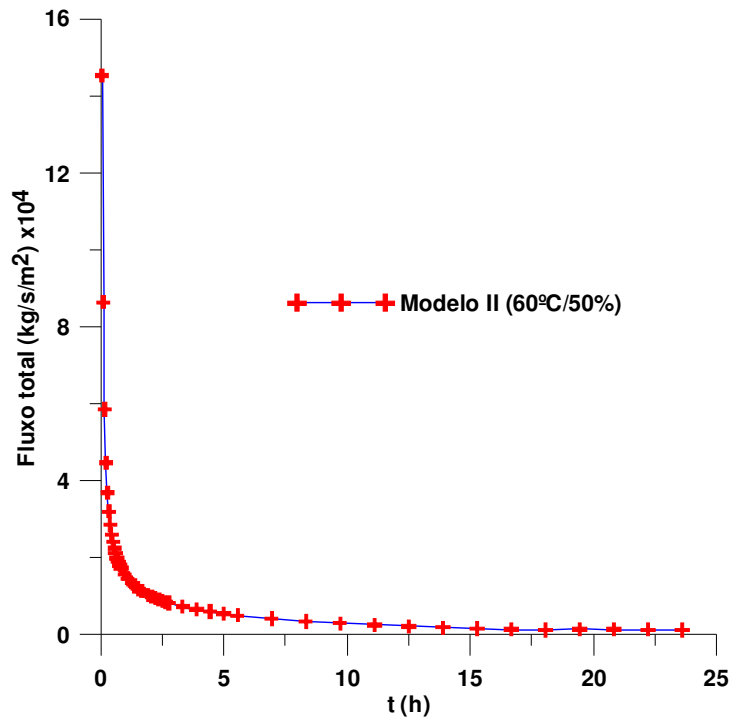


Figura 4.56 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

Na Figura 4.57 têm-se os fluxos totais de massa ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha para os diferentes casos. Ao comparar as curvas com umidade relativa igual (50%) e diferentes temperaturas (40 e 60°C), observa-se pequena influência deste parâmetro no fluxo total enquanto fixando a temperatura (60°C) e variando a umidade relativa (30 e 50%), praticamente não existe diferença na curva de fluxo de total evidenciando que o parâmetro temperatura tem maior influência no fluxo total de massa ($\bar{J}_v + \bar{J}_\ell$) na superfície do grão de lentilha, que a umidade relativa do ar de secagem.

Comparando as curvas de fluxo total da Figura 4.58 percebe-se que o fluxo total do modelo II é maior que o fluxo total do modelo I, até as 5 (cinco) primeiras horas da secagem do grão de lentilha; após este tempo, não há diferença entre as curvas.

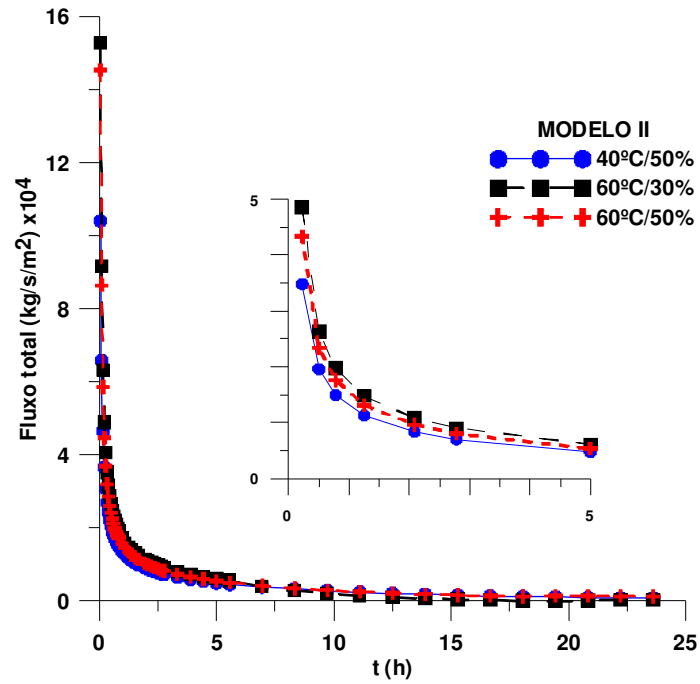


Figura 4.57 - Fluxo de vapor na superfície do grão de lentilha para a secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidades relativas de 30 e 50% (Modelo II).

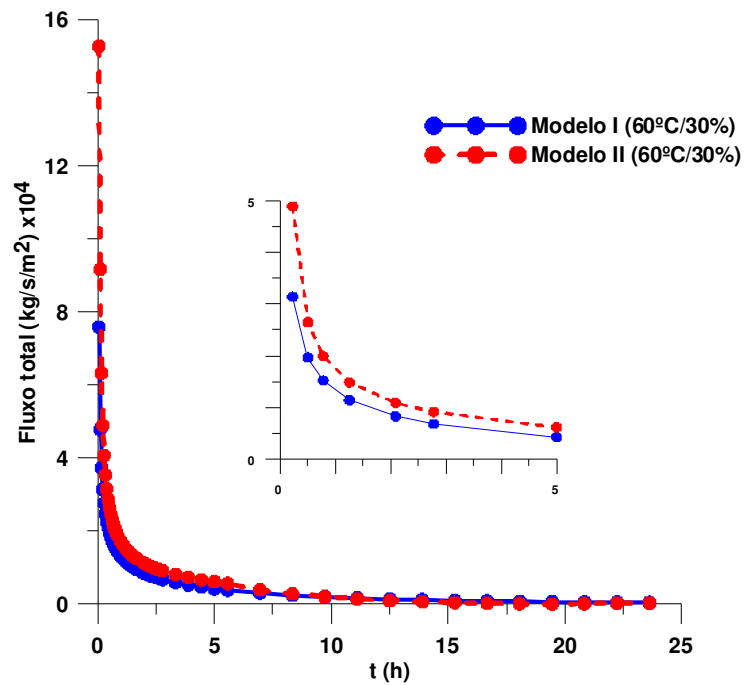


Figura 4.58 - Fluxo total na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e modelo II.

4.2.2.6 – Relação entre o fluxo de vapor e líquido (\bar{J}_v/\bar{J}_ℓ)

Nas Figuras 4.59 a 4.61 se evidencia a saída considerável de fluxo de massa na forma de vapor, no início do processo de secagem. Observa-se que a relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ é maior que 14, 72 e 23, para os casos com 40°C/50%, 60°C/30% e 60°C/50%, respectivamente, o que evidencia a predominância da remoção de umidade na forma de vapor. Nota-se, também, que no final do processo a relação entre o fluxo de vapor e fluxo de líquido tende a permanecer constante nos três casos estudados, como pode ser observado nas Figuras 4.59 a 4.61.

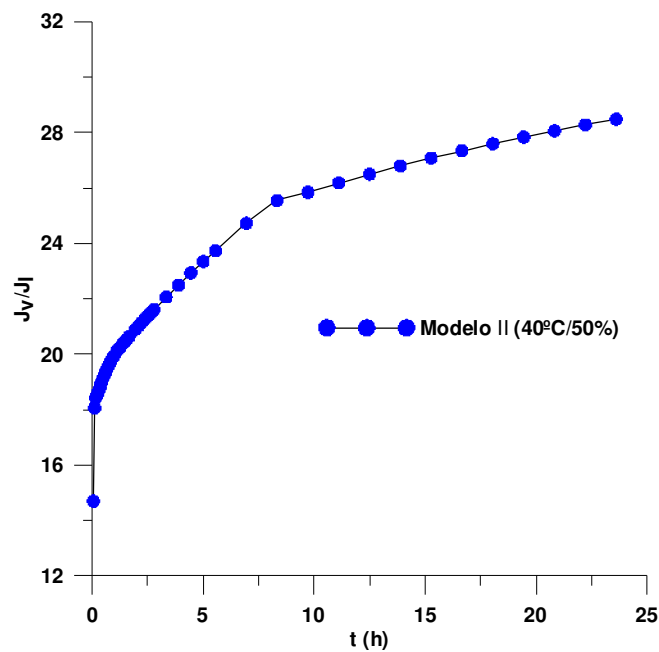


Figura 4.59 – Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

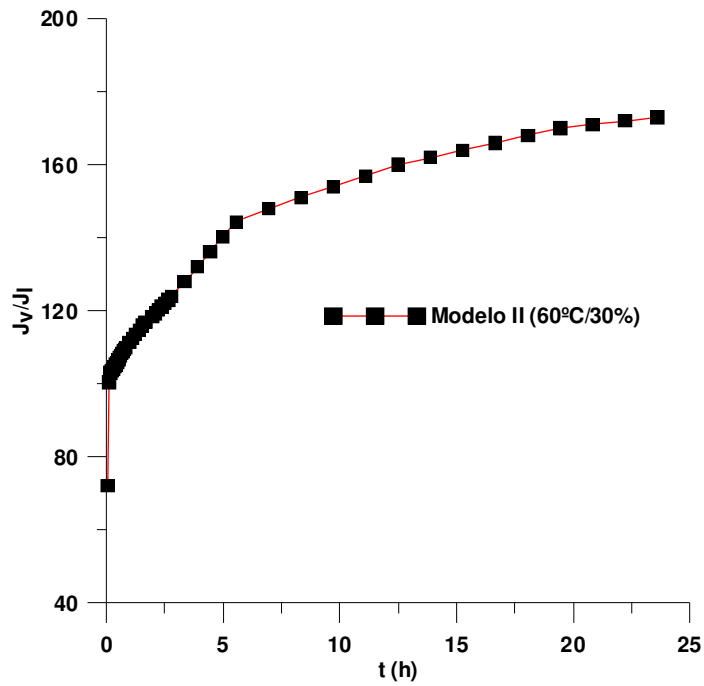
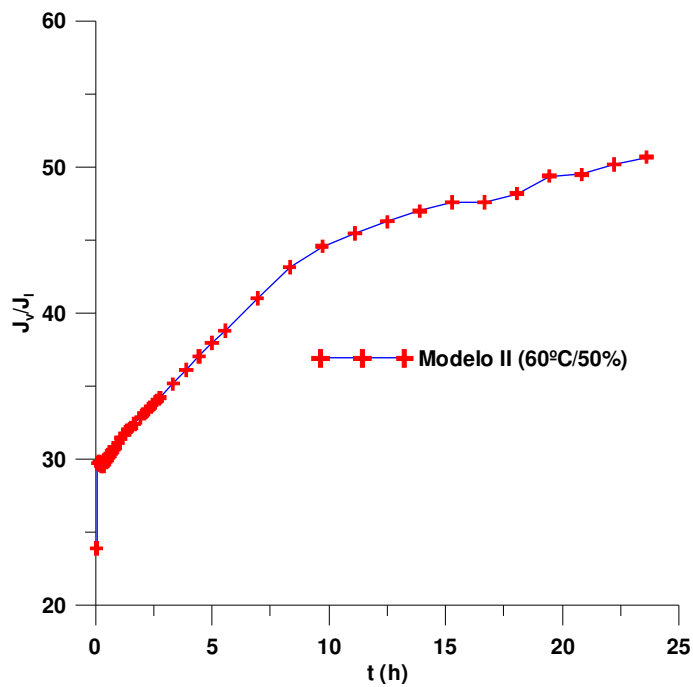


Figura 4.60 – Relação \bar{J}_v/\bar{J}_l na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).



(a) T=60° C e UR=50%

Figura 4.61 – Relação \bar{J}_v/\bar{J}_l na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

Observa-se também, na Figura 4.62 que a relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ foi influenciada tanto pela temperatura quanto pela umidade relativa embora as curvas com as mesmas temperaturas (60°C) e umidade relativa diferente (30 e 50%) foram as que diferenciaram fortemente uma da outra.

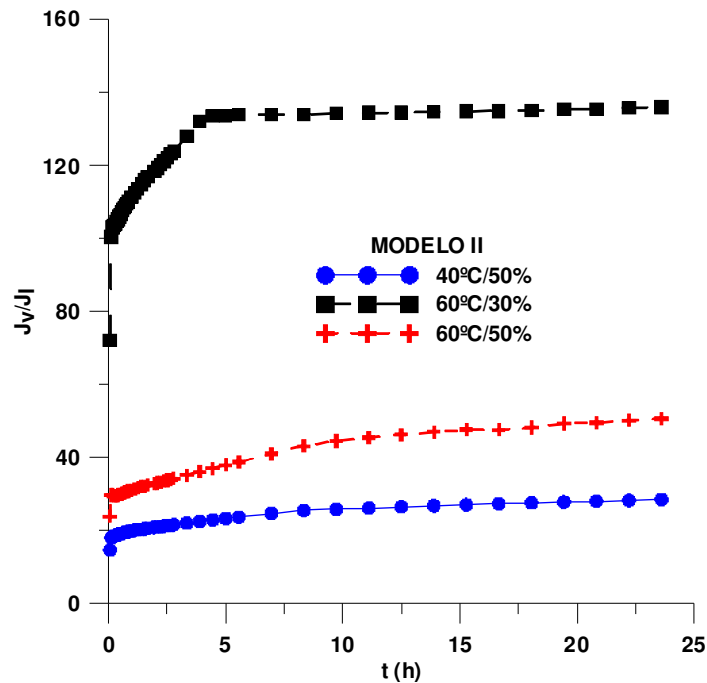


Figura 4.62 – Relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ na superfície do grão de lentilha para secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidade relativas de 30 e 50%.

Comparando as curvas da Figura 4.63, com os mesmos parâmetros (temperatura e umidade relativa) também apresentaram diferenças entre os dois modelos. Nota-se que a relação \bar{J}_v/\bar{J}_ℓ foi maior no modelo II, devido à condição de contorno utilizada entre os dois modelos.

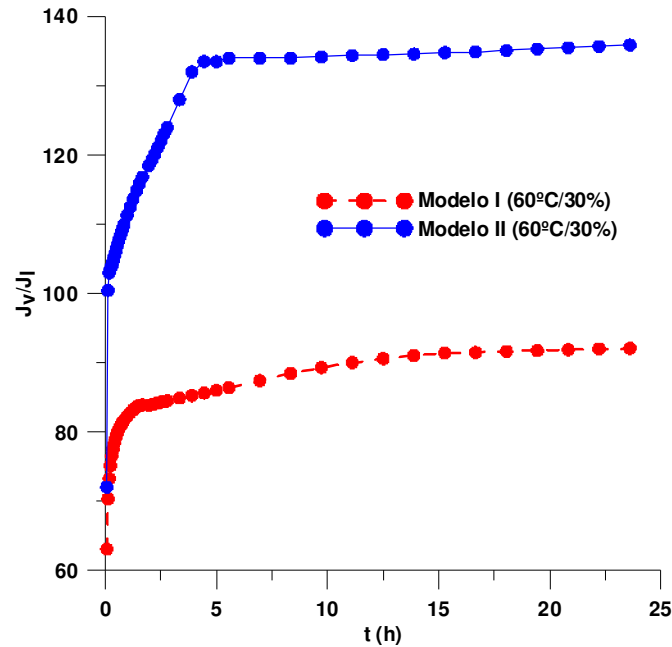


Figura 4.63 - Relação \bar{J}_v/\bar{J}_l na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e modelo II.

4.2.2.7 – Fluxo de calor

Nas Figuras 4.64 a 4.66 têm-se os fluxos de calor na superfície do grão de lentilha. Nota-se que durante o tempo de secagem o fluxo de calor decai acentuadamente até as 5h de secagem; após este tempo o fluxo de calor tende a permanecer constante até o final da secagem.

Na Figura 4.67 observa-se o fluxo de calor na superfície do grão de lentilha com três diferentes condições de secagem. No início do processo percebe-se uma diferença entre os valores do fluxo de calor; no entanto, na maior parte do processo de secagem os valores de fluxo de calor praticamente coincidem.

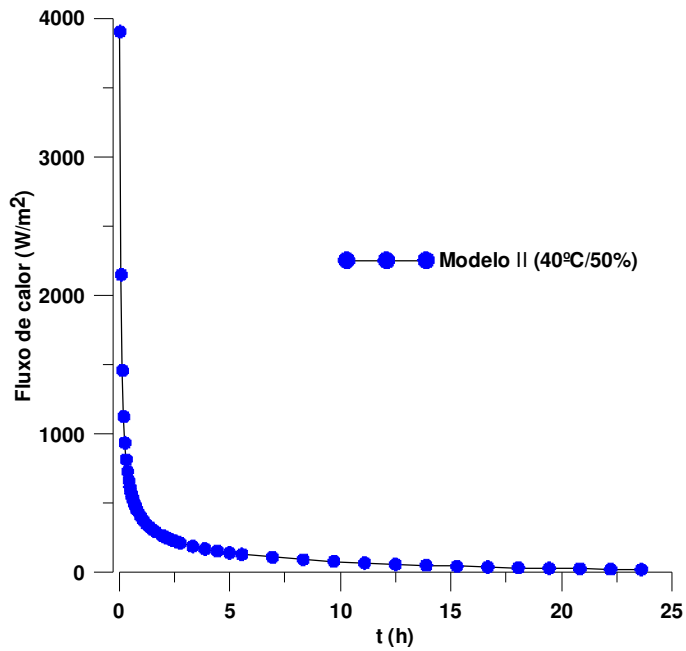


Figura 4.64 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 40°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

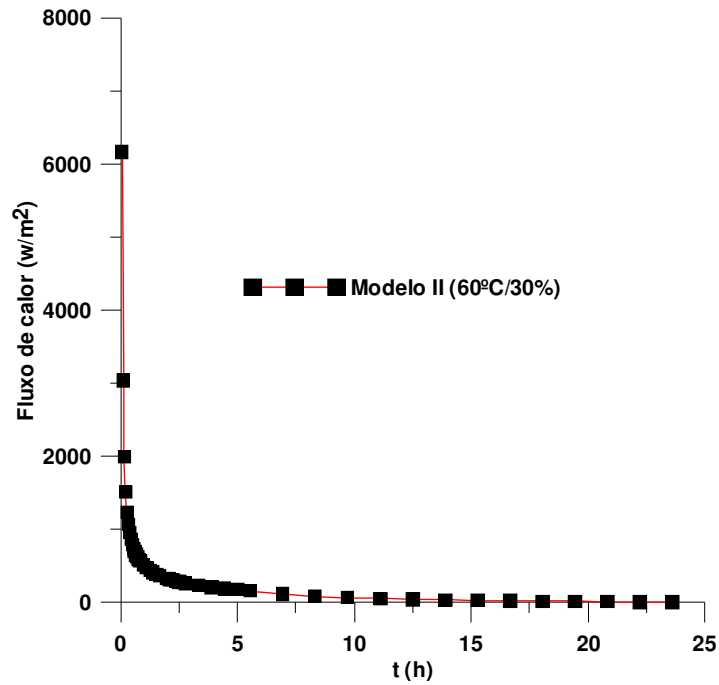


Figura 4.65 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 30% (Modelo II).

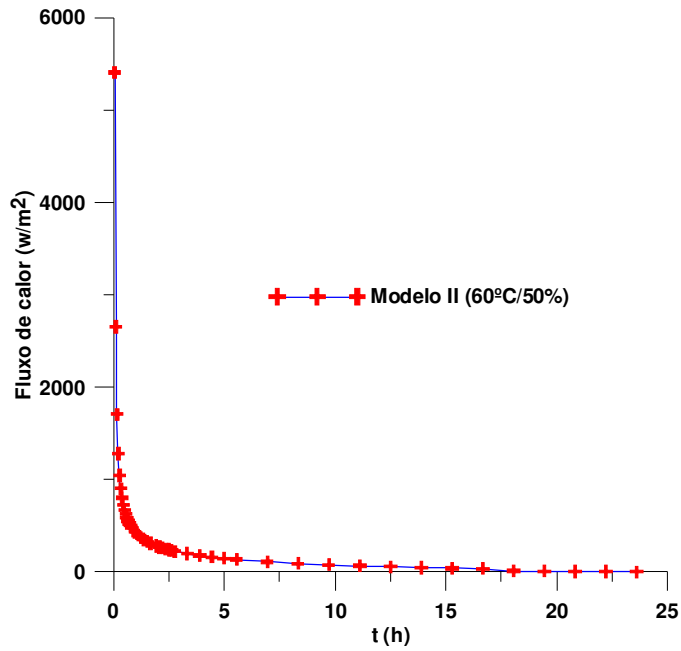


Figura 4.66 - Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidade relativa de 50% (Modelo II).

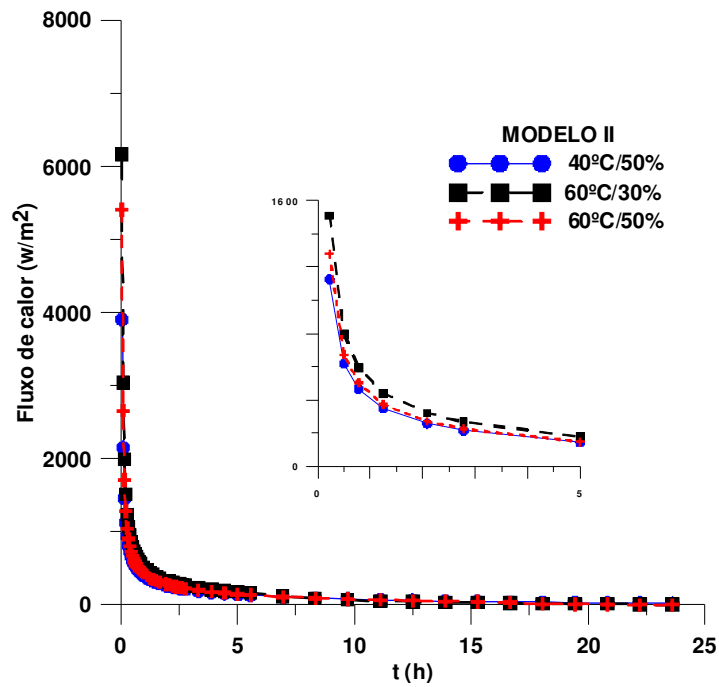


Figura 4.67 – Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para secagem nas temperaturas de 40 e 60°C e umidade relativas de 30 e 50%.

No início da secagem nota-se, na Figura 4.68 que o fluxo de calor obtido com o modelo II foi maior que o valor do fluxo de calor obtido com o modelo I.

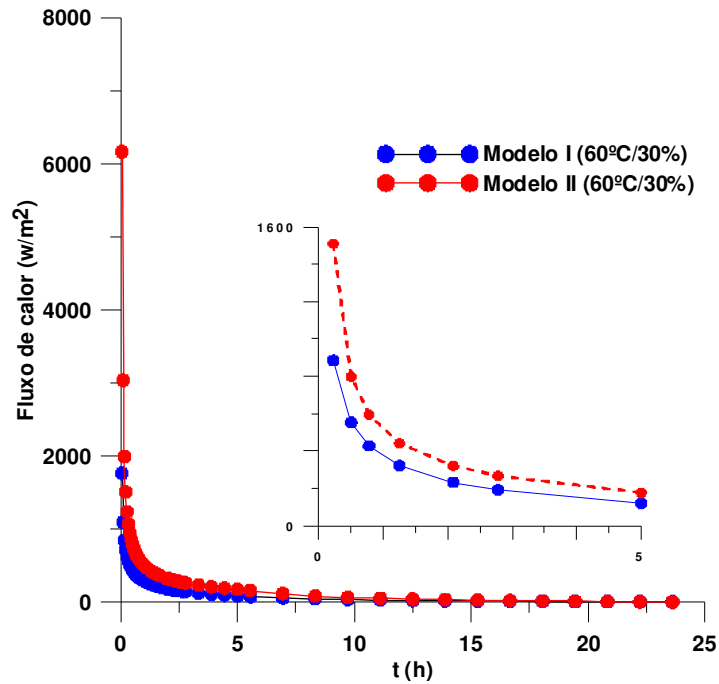


Figura 4.68 – Fluxo de calor na superfície do grão de lentilha para a secagem na temperatura de 60°C e umidades relativas de 30% do modelo I e modelo II.

4.2.2.8 -Distribuição do Teor de umidade no interior da lentilha

Nas Figuras 4.69 a 4.71 tem-se a distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha, em seis tempos de processo (1000, 5000, 10000, 20000, 40000 e 85000 s) respectivamente, obtido com o modelo II. Nestas figuras os teores de umidade no interior do sólido são representados pelas linhas de iso-umidade. Percebe-se que no modelo II a secagem é mais lenta em relação ao modelo I, visto que o modelo II considera o h_m finito (condição de contorno convectiva) influenciando bastante no processo de secagem.

Verifica-se ainda o mesmo comportamento do fluxo de umidade conforme comentado para o modelo I, só que desta feita em menor intensidade favorecendo a qualidade do produto pós-secagem.

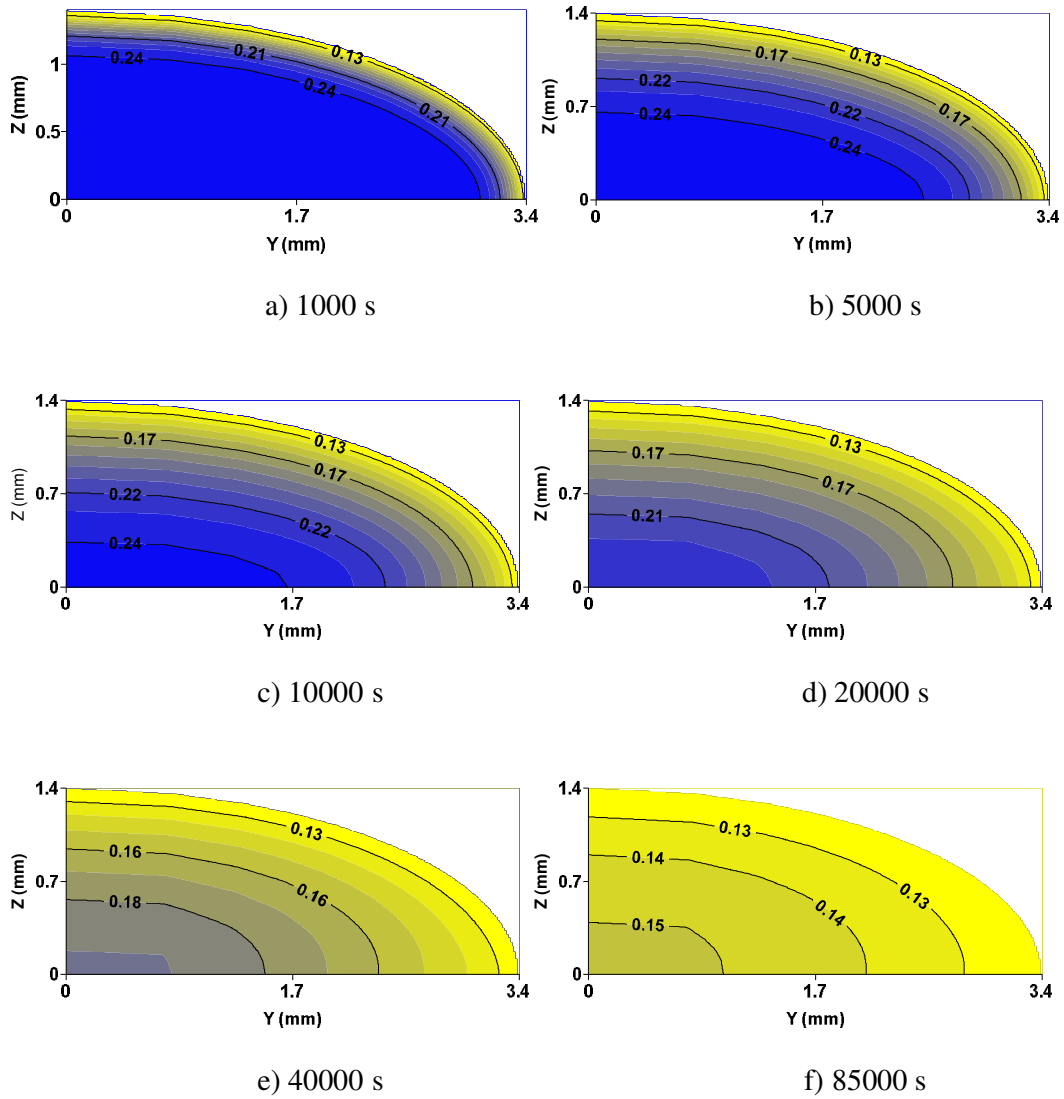


Figura 4.69 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha para a secagem a 40°C e umidade relativa de 50%.

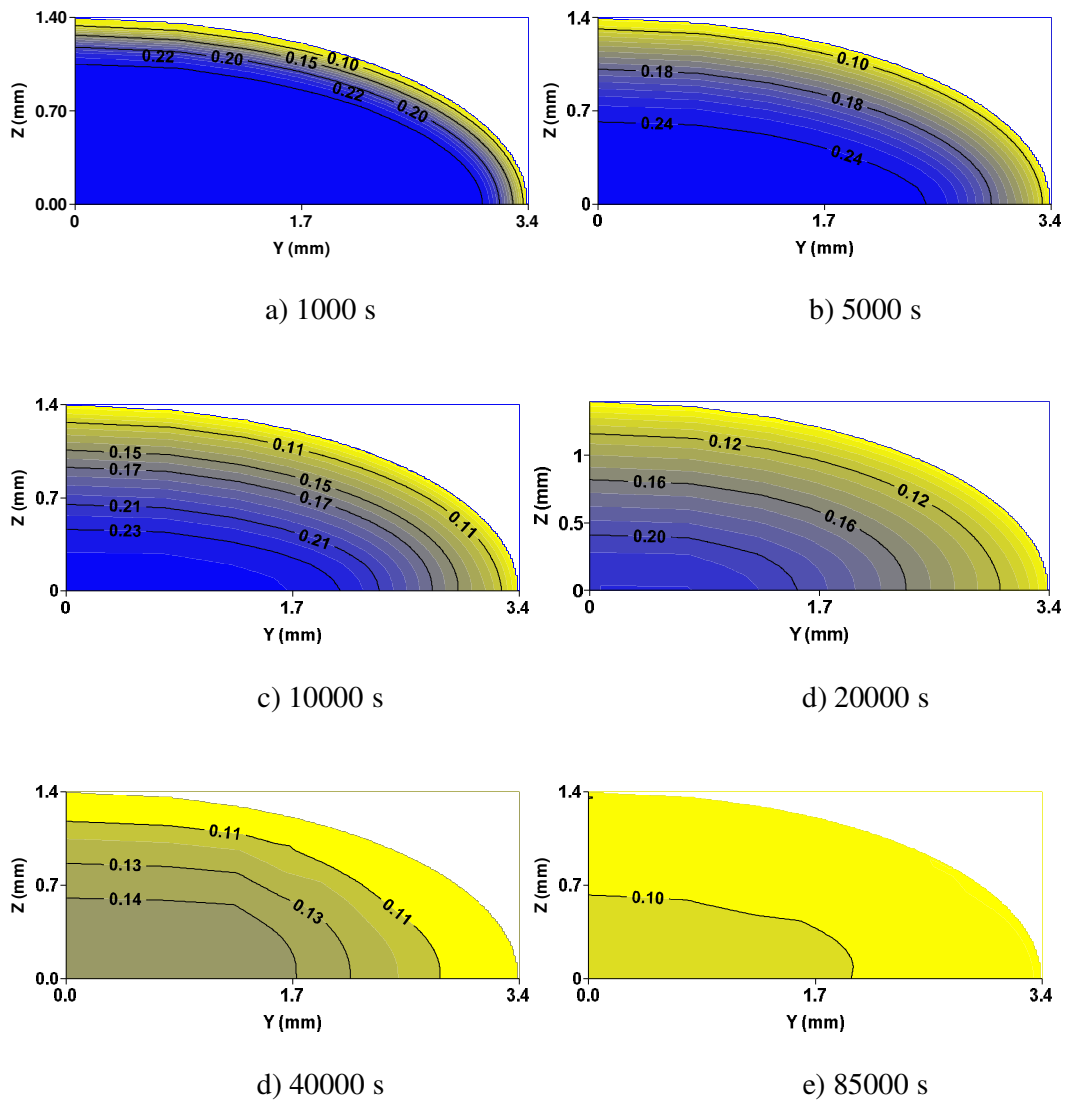


Figura 4.70 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 30%.

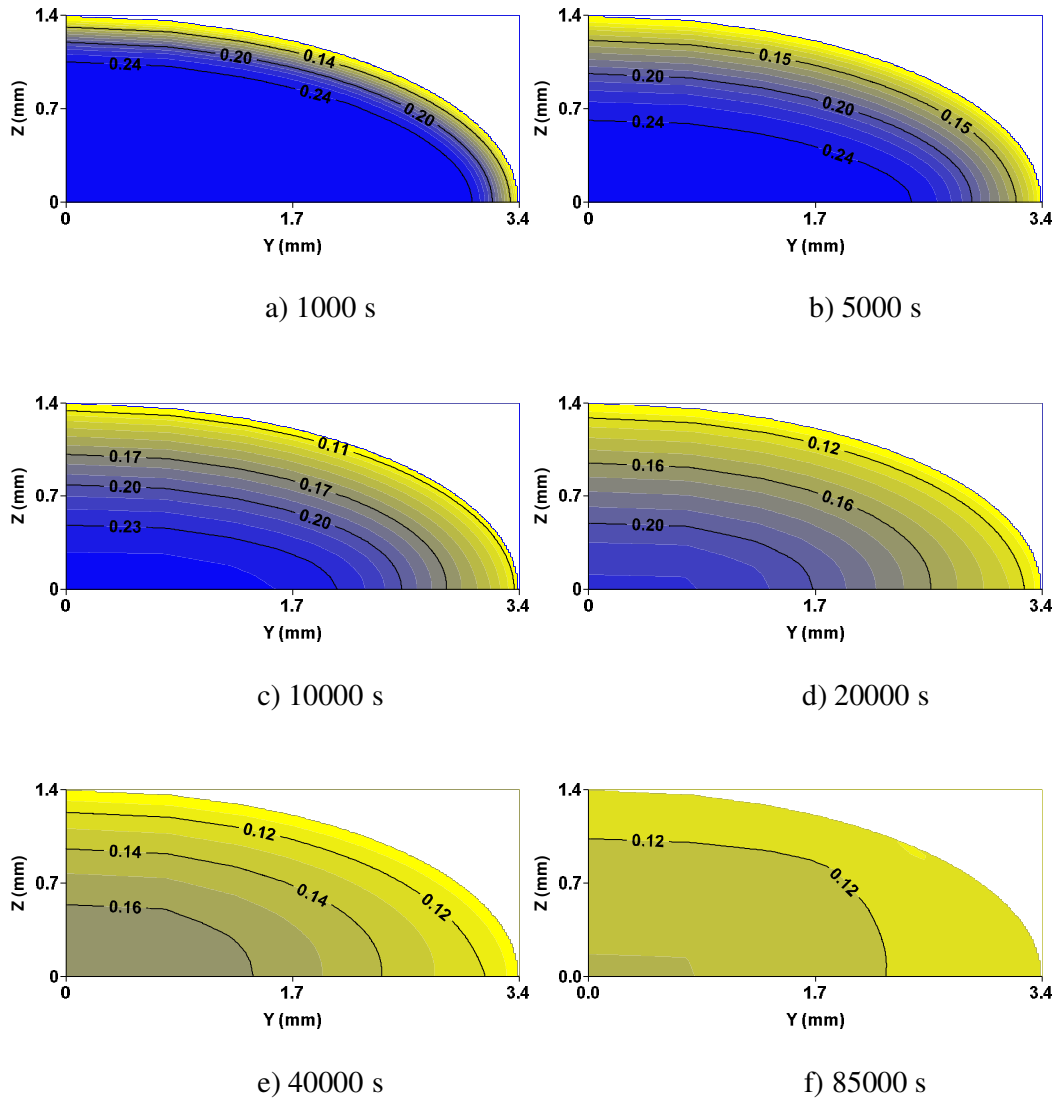


Figura 4.71 - Distribuição do teor de umidade no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 50%.

Nas Figuras 4.69 a 4.71, no tempo de 10000 s, por exemplo, percebe-se que a umidade (nas formas de líquido e vapor) migra mais rapidamente do centro para a superfície do grão de lentilha nas condições de maior temperatura e menor umidade relativa como observado nas linhas de iso-umidade igual a 0,17; o mesmo comportamento também foi observado para o modelo I.

4.2.2.9 - Distribuição de temperatura no interior da lentilha

A distribuição de temperaturas no interior do grão de lentilha representada pelas Figuras 4.72 a 4.74 foi determinada nos tempos de 1000, 5000, 10000, 20000, 40000 e 85000 s, respectivamente. Nota-se nas linhas de temperatura constante (isotermas) que o aquecimento do sólido é mais rápido no Modelo I em relação ao Modelo II, cuja ocorrência é devida à condição de contorno do Modelo I considerar a temperatura do sólido prescrita no começo da secagem, que é equivalente a um coeficiente de transferência de calor convectiva infinito.

Analisando essas Figuras, a distribuição de temperatura é praticamente uniforme em qualquer tempo de processo pré-estabelecidos.

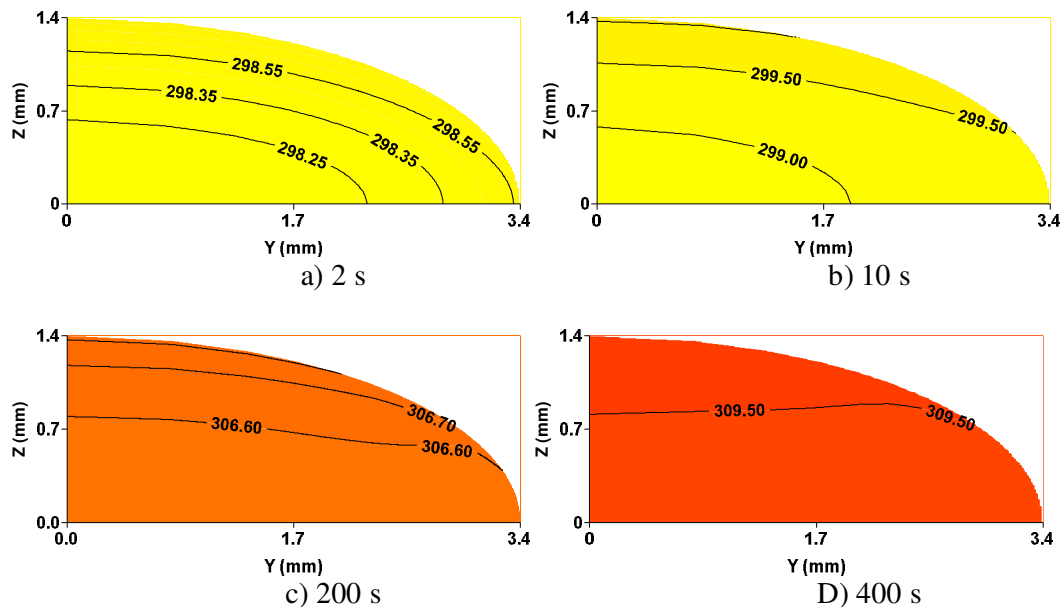


Figura 4.72 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 40°C e umidade relativa de 50%.

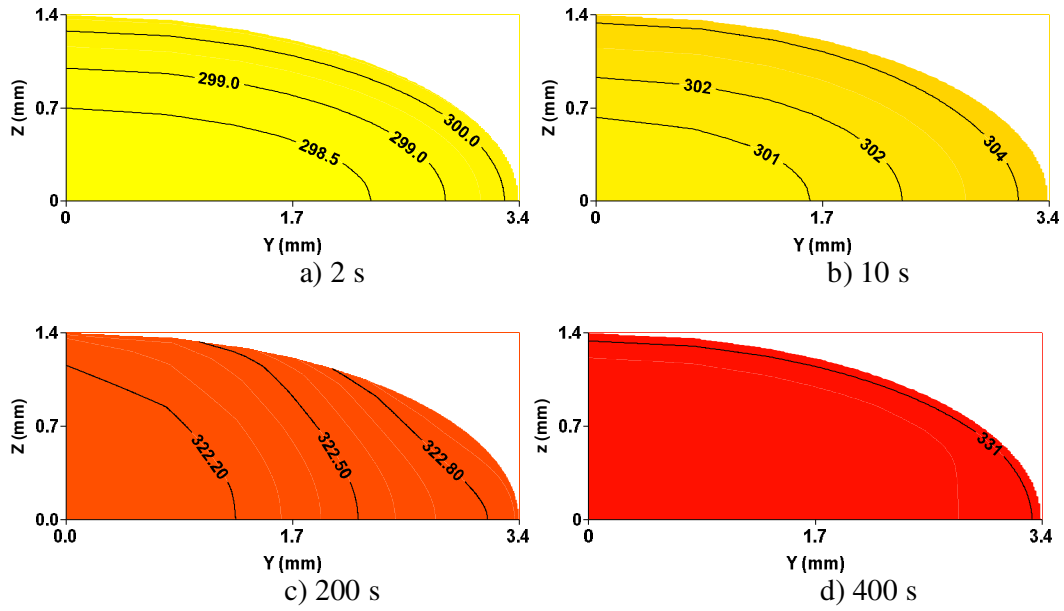


Figura 4.73 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 30%.

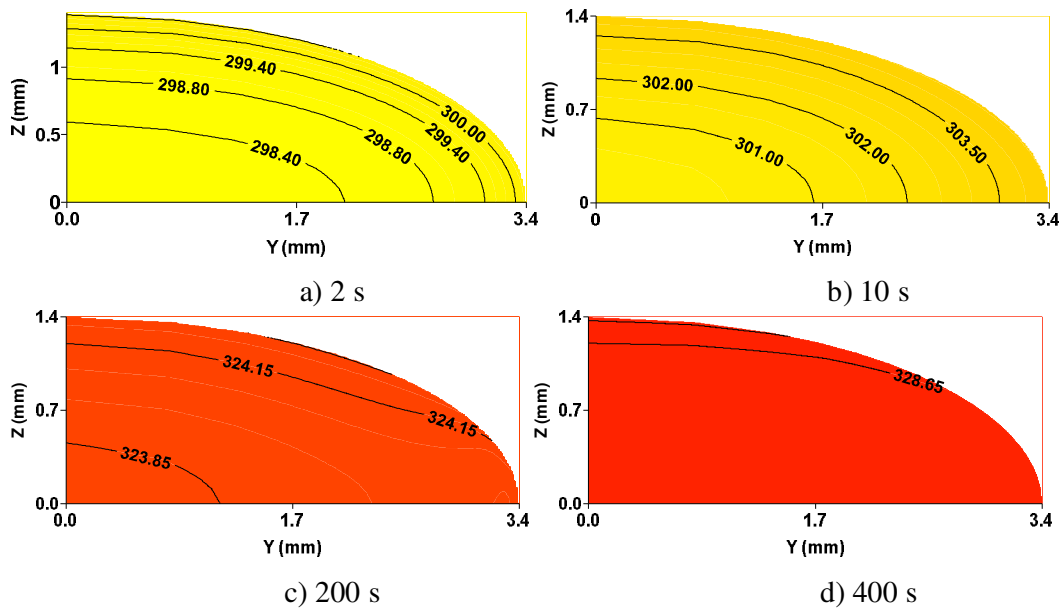


Figura 4.74 - Distribuição de temperatura no interior do grão de lentilha para a secagem a 60°C e umidade relativa de 50%.

4.3 - Estimativa dos coeficientes de transporte (k_l , k_v e h_m)

Observam-se, na Tabela 4.1, os valores dos parâmetros a_1 e a_2 , dos coeficientes de transporte (k_v e k_l), os coeficientes de transferência de convectiva de massa e calor (h_m e h_c), erro relativo (ERMQ), variância (\bar{S}^2) e coeficiente de determinação (R^2), respectivamente, determinados usando-se os Modelos I e II. Nota-se que ambos os modelos apresentaram bom ajuste devido à pequena discrepância apresentada entre os dados experimentais e os numéricos, com melhor ajuste para o modelo II (menor ERMQ e \bar{S}^2) e com os maiores valores dos coeficientes de determinação.

Tabela 4.1 – Comparação da condutividade de líquido e vapor e erro residual

Modelos	Casos		a_1 $\times 10^4$	a_2 $\times 10^2$	$h_m \times 10^6$ (m/s)	h_c (W/m ² K)	ERMQ ($\times 10^3$)	\bar{S}^2 ($\times 10^5$)	R^2
	T (°C)	H (%)							
Modelo I	40	50	2,0000	22,66	-	-	0,788	1,13	0,994
	60	30	1,1262	9,17	-	-	1,485	2,12	0,994
	60	50	2,1636	11,23	-	-	1,451	2,07	0,992
Modelo II	40	50	2,3313	25,07	6,20	37,31	0,413	0,61	0,996
	60	30	0,8785	9,47	19,50	37,81	1,018	1,50	0,994
	60	50	1,4391	10,74	12,80	37,81	1,374	2,02	0,991

Analisando os parâmetros a_1 e a_2 , verifica-se que ambos diminuem com o aumento da temperatura e com o decréscimo da umidade relativa, ao contrário do que ocorre com o coeficiente de transferência convectiva cujo parâmetro aumenta com o aumento da temperatura e com o decréscimo da umidade relativa.

Para relacionar a teoria de Fortes e Okos com a teoria de difusão líquida, considera-se que o problema no qual se tenha inexistência de fluxo de vapor e geração de massa, efeitos gravitacionais desprezíveis e que o gradiente de temperatura, não tenha efeito sobre o fluxo de líquido; então, a Equação (3.38), assume a forma:

$$\vec{J}_\ell = \rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M \quad (4.1)$$

Portanto, a Equação (3.42) será escrita como:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\rho_{\ell} k_{\ell} \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M \right) \quad (4.2)$$

Comparando a Equação (4.2) com a Equação (2.8) verifica-se que o coeficiente de difusão será:

$$D = \rho_{\ell} k_{\ell} \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \quad (4.3)$$

As Figuras 4.75 a 4.78 apresentam o valor do coeficiente de difusão de massa (D), umidade relativa (H) e condutividades de líquido e de vapor em função do teor de umidade para os três casos estudados (40°C/50%, 60°C/30% e 60°C/50%).

Verifica-se, na Figura 4.75, que os valores do coeficiente de difusão (D), obtidos pela teoria da difusão líquida, aumentam com a diminuição do teor de umidade até alcançar os valores de 0,16, 0,14 e 0,14 b.s, para os casos 40°C/50%, 60°C/30% e 60°C/50%, respectivamente. A partir daí, os valores do coeficiente de difusão (D) seguem comportamento esperado, ou seja, diminuem com a diminuição do teor de umidade para os três casos estudados já que o coeficiente de difusão aumenta com o aumento do teor de umidade e com a temperatura, segundo a teoria de Arrhenius.

Os valores da difusividade de massa determinados com a teoria da difusão líquida, foram da ordem de grandeza de 10^{-12} m/s. Tang e Sokhansanj (1993), considerando o grão de lentilha composto de três regiões distintas, observaram que a difusividade de umidade encontrada para o hilo, cotilédone e para o tegumento, apresentou valores da ordem de 10^{-9} , 10^{-11} e 10^{-13} m²/s.

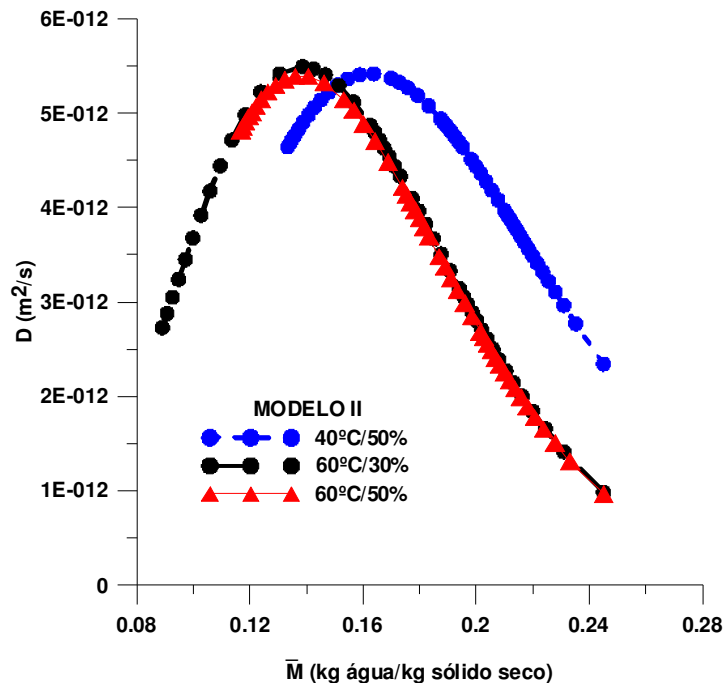


Figura 4.75 -. Valores do coeficiente de difusão (D) do grão de lentilha para os diferentes casos estudados.

Comparando as Figuras 4.76 e 4.77, observa-se que os valores da condutividade do líquido e vapor possuem comportamento inverso durante a secagem enquanto a condutividade de líquido decresce durante a secagem, a condutividade de vapor aumenta com a diminuição do teor de umidade, alcançando valores máximos de condutividade de vapor iguais a $2,35 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (40°C/50%), $1,49 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (60°C/30%) e $1,13 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (60°C/50%). Segundo Fortes (1978) a condutividade de líquido aumenta com o teor de umidade a uma dada temperatura e, durante este aumento, deverão ocorrer, simultaneamente, difusão molecular de líquido e vapor, escoamento capilar e filtração enquanto para baixos valores de teor de umidade os mecanismos de migração consistirão de processos de vaporização-condensação. O mesmo pesquisador ainda observou que a condutividade de vapor apresentará um valor máximo a baixos teores de umidade, dada à descontinuidade de líquido e, conseqüentemente, o esvaziamento dos poros e capilares.

Nota-se, na Figura 4.77, que os valores da condutividade de vapor do grão de lentilha foram maiores para a menor temperatura de secagem (40°C); tal comportamento deve-se,

provavelmente, à diminuição da pressão de saturação com a diminuição da temperatura aumentando o vapor dentro do poro, supondo volume constante.

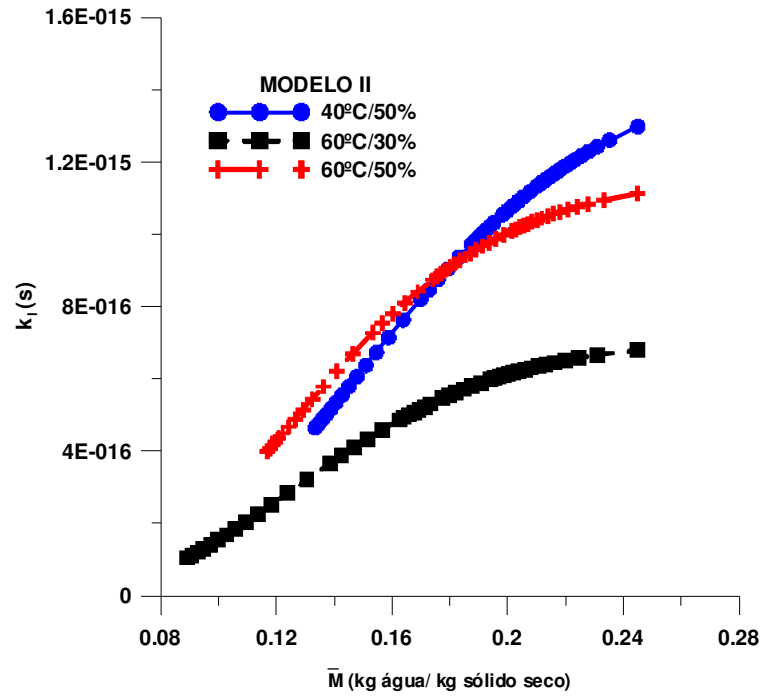


Figura 4.76 - Condutividade de líquido durante a secagem do grão de lentilha para os três casos estudados

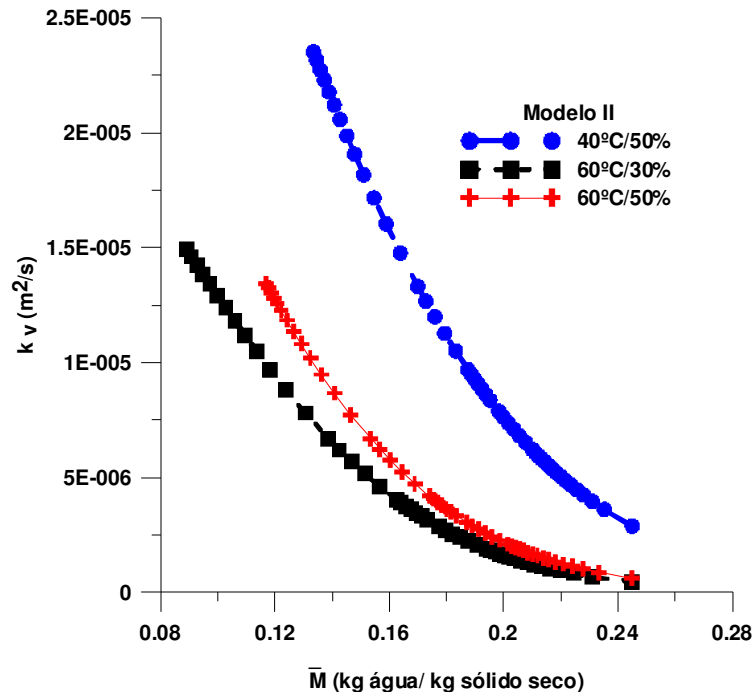


Figura 4.77 - Condutividade de vapor durante a secagem do grão de lentilha para os três casos estudados.

Verificam-se, na Figura 4.78, as isotermas de desorção do grão de lentilha para os três casos estudados. Nota-se que para um mesmo valor de umidade relativa o teor de umidade diminui com o aumento da temperatura do ar de secagem para valores de teor de umidade inferiores a 0,24 b.s. Observa-se também que para os casos com o mesmo valor de temperatura e diferentes umidades realtiva do ar, as curvas coincidem.

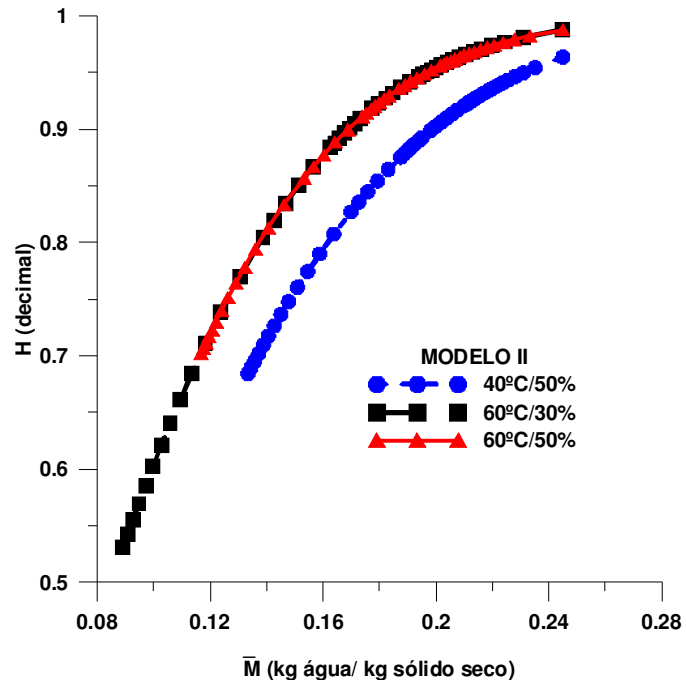


Figura 4.78 - Isoterma de sorção do grão de lentilha para os diferentes casos estudados.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 – Conclusões

Analisando os resultados obtidos com a simulação da secagem em corpos com geometria esferoidal oblato para os modelos I e II, conclui-se que:

- Os modelos matemáticos propostos para prever a difusão transiente em sólidos esferoidais oblatos e sua solução numérica via método dos volumes finitos com condição de equilíbrio e convectiva na superfície, foram adequados uma vez que os valores numéricos do teor de umidade obtidos pelos modelos (I e II) apresentaram baixos desvios e variância quando comparados com os dados do teor de umidade obtidos experimentalmente.

- As áreas do grão de lentilha mais susceptíveis a fissuras e rachaduras são as da superfície e em torno dos pontos focais (pontas), podendo provocar maiores tensões térmica e hídricas devido aos altos gradientes de umidade e temperatura.

- No grão de lentilha o mecanismo de migração dominante é o fluxo de vapor, na superfície do produto, com uma razão fluxo de vapor/fluxo de líquido maior que 14, ou seja,

$J_v/J_l > 14$, nos Modelos I e II, para todos os casos estudados (40°C/50%, 60°C/30% e 60°C/50%).

- O comportamento da taxa de secagem do grão de lentilha dos modelos I e II foi semelhante com a velocidade de remoção da umidade (líquido e vapor) do produto aumentando com o aumento da temperatura e com a diminuição da umidade relativa. Enquanto para a taxa de aquecimento do grão de lentilha dos modelos I e II a temperatura foi o parâmetro que mais influenciou no aquecimento do sólido, ao compará-lo com a umidade relativa utilizada.

- Os dois modelos matemáticos estudados apresentaram boa concordância entre os valores do teor de umidade experimental e o numérico. O modelo II, que inclui os fenômenos convectivos é mais realista fisicamente que o modelo I fornecendo resultados mais confiáveis dos coeficientes de transporte, inclusive apresentando menor erro relativo.

- A condutividade de líquido aumenta com o aumento do teor de umidade e diminui com o aumento da temperatura enquanto a condutividade de vapor aumenta com a diminuição do teor de umidade e diminui com o aumento da temperatura devido ao comportamento da pressão de saturação no poro.

- Comparando o coeficiente de difusão de massa (D) obtido pela teoria de Fortes e Okos e admitindo a inexistência do fluxo de vapor com a teoria da difusão líquida, verifica-se que os autores ressaltaram o comportamento semelhante na faixa de umidade de 0,8 a 0,14 b.s. para os três casos estudados, apresentando, porém, comportamento contrário ao esperado (decréscimo com a diminuição do teor de umidade).

5.2 - Sugestões para trabalhos futuros

- Examinar o efeito do encolhimento no fenômeno de difusão de sólidos esferoidais oblatos e simular a distribuição do teor de umidade e temperatura no interior de corpos esferoidais oblatos e suas respectivas cinéticas de difusão;

- Modelar e estudar numericamente a secagem intermitente de corpos com geometria elipsoidal, utilizando o modelo proposto e determinando, inclusive, o mínimo tempo de têmpera requerido na secagem;
- Aplicar os modelos numéricos desenvolvidos   secagem de outros produtos agrícolas, tais como fava, café etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramowitz, M.; Stegun, I. A. **Handbook of mathematical functions**. New York: Dover Publications, Inc., USA, p. 752-772, 1972.

Afonso Júnior, P. C.; Corrêa, P. C.; Silva, F. S.; Ribeiro, D. M. Atividade de água, crescimento microbiológico e perda de matéria seca dos grãos de café (*coffea arabica* L.) em diferentes condições de armazenamento. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, v.5, n.1, p.17-24, 2003.

Aguilera, Y.; Esteban, R. M.; Tez, V. B.; Molla, E., Cabrejas, M. A. M. Starch, Functional Properties, and Microstructural Characteristics in Chickpea and Lentil As Affected by Thermal Processing. **Journal of Agricultural and Food Chemistry**, v.57, n. 22, p. 10682–10688, 2009.

Alagusundaram, K.; Jayas, D. S.; Muir, W. E.; White, N. D. G. Thermal conductivity of bulk barley, lentils, and peas. **Transactions of the ASAE**, v.34, n.4, p.1784-1788, 1991,

Alexandre, D.; Cunha, R. L. Hubinger, M. D. Conservação do açaí pela tecnologia de obstáculos. **Ciência e Tecnologia dos Alimentos**, v. 24, n.1, p. 114-119. 2004.

Almeida, G. S.; Cavalcante, F. J. N.; Lima, A. G. B. Transporte de calor e massa em sólidos heterogêneos: um estudo teórico via análise concentrada. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, v.5, n.1, p.1-16, 2003.

Almeida, D.P.; Resende, O.; Costa, L.M.; Mendes, U.C.; Sales, J.F. Cinética de secagem do feijão adzuki (*Vigna angularis*). **Global Science and Technology**, v.2, n.1, p.72-83, 2009.

Amin, M.N.; Hossain, M.A.; Roy, K.C. Effects of moisture content on some physical properties of lentil seeds. **Journal of Food Engineering**, v. 65, n. 1, p. 83-87, 2004.

Andrade, E. T.; Couto, S. M.; Queiroz, D. M.; Peixoto, A. B. Determinação de propriedades térmicas de grãos de milho. **Ciência e Agrotecnologia**, v.28, n.3, p. 488-498, 2004.

Anderson, J.D. Computational fluid dynamics with applications. 1995.

Araújo, P. G. L.; Figueiredo, R. W.; Alves, R. E.; Maia, G. A.; Moura, C. F. H.; Sousa, P. H. M. Qualidade físico-química e química de frutos de clones de aceroleira recobertos com filme de PVC e conservados por refrigeração. **Ciências Agrárias**, v. 30, n. 4, p. 867-880, 2009.

Arnosti Jr. S.; Innocentini, M. D. M.; [Pandolfelli, V. C.](#) Variáveis críticas no processo de secagem de concretos refratários. **Cerâmica**, v. 45, n. 292, p. 107-118, 1999.

Arora, S.; Bharti, S.; Sehgal, V. K. Convective Drying Kinetics of Red Chillies. **Drying Technology**, v. 24, n. 2, p. 189–193, 2006.

Azzouz, S.; Guizani, A.; Joma, W.; Belghith, A. Moisture diffusivity and drying kinetic equation of convective drying of grapes. **Journal of Food Engineering**, v. 55 n.4, p. 323–330, 2002.

Azuara-Nieto, E.; Beristain-Guevara, C. I. Estudio termodinamico y cinetico de la adsorción de água En proteína de suero de leche. **Revista Mexicana de Ingeniería Química**, V. 6, n. 3, p. 359-365, 2007.

Bagherpour, H.; Minaei, S.; Khoshtaghaza, M. H. Selected physico-mechanical properties of lentil seed. **International Agrophysics**, v.24, n.1, p. 81-84, 2010.

Bejar, A. K.; Mihoubi, N. B; Kechaou, N. Moisture sorption isotherms – Experimental and mathematical investigations of orange (*Citrus sinensis*) peel and leaves. **Food Chemistry**, v. 132, n. 4, p. 1728-1735, 2012.

Bingol, G.; Prakash, B.; Pan, Z. Dynamic vapor sorption isotherms of medium grain rice varieties. **Food Science and Technology**, v. 48, n. 2, p. 156 -163, 2012.

Bitra, V.P.V.; Banu, S.; Ramakrishna, P.; Narender G.; Womac, A.R. Moisture dependent thermal properties of peanut pods, kernels, and shells. **Biosystems Engineering**, v. 106, n. 4, p. 503-512, 2010.

Borem, F. M.; Ribeiro, R. C. M. S.; Correa, P. C.; Pereira, Rosemary G. F. A.. Propriedades térmicas de cinco variedades de café cereja descascado. **Revista Brasileira em Engenharia agrícola e ambiental**. v.6, n.3, p. 475-480, 2002.

Brodkey, R. S. **The phenomena of fluid motions**. London: Addison-Wesley Publishing Company, p.18-23, 1967.

Burmester, K.; Eggers, R. Heat and mass transfer during the coffee drying process. **Journal of Food Engineering**. v. 99, n. 4, p. 430–436, 2010.

Camacho, D. G.; Barros, A. C. S. A.; Peske, S. T.; Menezes, N. L. A secagem de sementes. **Ciência Rural**, v. 34, n. 2, p. 603-608, 2004.

Carbonera, L.; Carciofi, B. M.; Huber, E.; Laurindo, J. B. Determinação Experimental da difusividade Térmica de uma Massa de Tomate Comercial. **Brazilian Journal of Food Technology**, v.6, n.2, p. 285-290, 2003.

Çarman, K. Some physical properties of lentil seeds. **Journal of Agricultural Engineering Research**, v.63, n.2, p.87–92, 1996.

Carmo, J. E. F. **Fenômenos de difusão transiente em sólidos esferoidais oblato, Estudo do caso: Secagem de lentilhas.** Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, 140 p. Tese (Doutorado), 2004.

Carmo, J. E. F.; Lima, A. G. B. Mass transfer inside oblate spheroidal solids: modelling and simulation. Brazilian Journal of Chemical Engineering, v.25, n.1, p. 19-26. 2008.

Cavalcanti Mata, M. E. R. M.; Duarte, M. E. M.; Zanini, H. L. H. T. Calor específico e densidade da polpa de cajá (*spondias lutea* l.) com diferentes concentrações de sólidos solúveis sob baixas temperaturas. **Engenharia Agrícola**, Jaboticabal, v.25, n.2, p.488-498, 2005.

Çengel, A.Y. **Heat and Mass Transfer: A Practical Approach, 3 ed.** McGraw-Hill Companies, EUA, 2007, 901.

Cihan, A.; Kahveci, K.; Hacıhafızoglu, O.; Lima, A. G. B. A diffusion based model for intermittent drying of rough rice. **Heat and Mass Transfer**, v. 44, n.8, p. 905-911, 2008.

Damodaran, S.; Parkin, K. L.; Fennema, O. R. **Química de Alimentos de Fennema.** 4. ed., Artmed, Porto Alegre, 2010. 900p.

DeGroot, S. R. **Thermodynamics of irreversible processes.** Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1951.

Domínguez, I. L.; Azuara, E.; Vernon-Carter, E. J.; Beristain, C. I. Thermodynamic analysis of the effect of water activity on the stability of macadamia nut. **Journal of Food Engineering**, v.81, n.3, p. 566–571, 2007.

Doymaz, I. Convective drying kinetics of strawberry. **Chemical Engineering and Processing: Process Intensification**, v. 7, n. 5, p. 914-919, 2008.

FAO, Food and Agriculture Organization, 2010. Disponível em: <www.fao.org>. Acesso em: 10 junho de. 2003.

FAO, Food and Agriculture Organization, 2011. Disponível em: <www.fao.org>. Acesso em: 10 junho de. 2003.

Fellows P. J. **Tecnologia do Processamento de Alimentos: Princípios e Práticas**. 2 ed. Porto Alegre, Brasil: Artmed, 2006. 602 p.

Figliola, R. S.; Beasley, D. E. **Theory and Design for Mechanical Measurements**, 607p. John Wiley & Sons, New York, 1995.

Fortes, M. **A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media with special reference to drying of grains and foods**. Purdue University, 226p. (Tese de Doutorado), 1978.

Fortes, M.; Okos, M. R. Drying theories: their bases and limitations as applied to foods and grain. In: **Advances in drying**. Ed. A. S. Mujumandar v.1, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, p. 119-154, 1980.

Fortes, M.; Okos, M. R. A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media. **Transactions of the ASAE**, v.24, p. 756-760, 1981.

Fortes, M., Okos, M.R., Barret Jr., J. R. Heat and mass transfer analysis of intra-kernel wheat drying and rewetting. *Journal Agricultural Engineering Research*, v.26, p.109-125, 1981.

Fortes, M. **Um estudo fundamental das equações de transporte de massa e energia em meios capilares porosos**. 1982. 100p. Tese apresentada como parte dos requisitos do concurso para professor titular. Departamento de Engenharia Térmica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais.

Franco, B.D.G.M.; Landgraf, M. **Microbiologia dos Alimentos**. São Paulo:Atheneu, 2008. 182p

Freitas, R. A.; Nascimento, W. M. Envelhecimento acelerado em sementes de lentilha. **Revista Brasileira de Sementes**, v. 28, n. 3, p. 59-63, 2006.

Gahoonia, T. S.; Ali, O.; Sarker, A.; Nielsen, N. E.; Rahman, M. M. Genetic variation in root traits and nutrient acquisition of lentil genotypes. **Journal of Plant Nutrition**, v.29, n.4, p.643-655, 2006.

Ghosh, P. K.; Jayas, D. S.; Srivastava, C.; JHA, A. N. Drying and Storing Lentils. In: Yadav, S. S.; Mcneil, D. L.; Stevenson, P. C. **Lentil: An Ancient Crop for Modern Times**. ed. Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2007, cap.22, p. 384-414.

Gonçalves, E. D.; Trevisan, R.; Scileswski, T.; Zanata, J. F.; Piana, C. F. B.; Silva, J. A.; Rombaldi, C. V. Armazenamento refrigerado de caqui 'fuyu' (*diospyros kaki*) em atmosfera modificada com filme de polietileno. **Revista Brasileira de Agrociência**, v. 12, n. 2, p. 187-190, 2006.

Gonelli, A. L. D.; Correa, P. C.; Resende, O. Reis Neto, S. A. Estudo da difusão de umidade em grãos de trigo durante a secagem. **Ciência e Tecnologia dos Alimentos**, v.27, n.1, p. 135-140, 2007.

Haddad, S.G.; Husein, M.Q. Nutritive value of lentil and vetch straws as compared with alfalfa hay and wheat straw for replacement ewe lambs. **Small Ruminant Research**, v. 40, n. 3, p. 255-260, 2001.

Hatamipour, M. S.; Mowla D. Shrinkage of carrots during drying in an inert medium fluidized bed. **Journal of Food Engineering**, v. 55, n. 3, p. 247-252, 2002.

Incropera, F.P. e Dewitt, D.P. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**, 6 ed., LTC. Editora, Rio de Janeiro, 2008, p. 664.

Isik, E, Moisture Dependent Physical and Mechanical Properties of Green Laird Lentil (*Lens culinaris*) grains. **Pakistan Journal of Biological Sciences**, v.10, n.3, p. 474-480, 2007.

Isik, E.; Izli, N.; Bayram, G.; Turgut, I. Drying kinetic and physical properties of green lard lentil (*Lens culinaris*) in microwave drying. **African Journal of Biotechnology**, v. 10, n.19, p. 3841-3848, 2011.

Joshi, M.; Adhikari, B.; Panozzo, J.; Aldred, P. Water uptake and its impact on the texture of lentils (*Lens culinaris*). **Journal of Food Engineering**, v. 100, n. 1, p. 61-69, 2010.

Kajiyama, T.; Park, K. J. Influência da umidade inicial da alimentação no tempo de secagem em secador atomizador. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, v.10, n.1, p.1-8, 2008.

Karim, M. A.; Hawlader, M. N. A. Drying characteristics of banana: theoretical modelling and experimental validation. **Journal of Food Engineering**, v.70, n. 1, p.35–45, 2005.

Kreyszig, E. **Advanced engineering mathematics**. 6. ed. New York: John Wiley & Sons, p. 498-504. 1988.

Krischer, O. **Die Wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik**, 2 ed., Springer, Berlin, 1963, p. 491.

Lee, H.C.; Htoon, A.K.; Paterson, J.L. Alkaline extraction of starch from Australian lentil cultivars Matilda and Digger optimised for starch yield and starch and protein quality. **Food Chemistry**, v.102, n.3 , p. 551–559, 2007.

Lima, A.G.B. **Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de banana**. 1999. 265p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo.

Lima, A.G.B.; Nebra, S.A. Modelos concentrados de transferência de calor e massa aplicados a corpos com forma arbitrária. **In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, (CONEM)**, 1., 2000, Natal. Anais... Natal: Sociedade Brasileira de Ciências Mecânicas, 2000.

Lima, L. A.; Silva, J. B.; Lima, A. G. B. Transferência de calor e massa durante a secagem de sólidos com forma arbitrária: uma abordagem concentrada. **Engenharia Agrícola**, v.23, n.1, p.150-162, 2003.

Lima, D. R.; Farias, S. N.; Lima, A. G. B.. Heat and mass transfer inside oblate and prolate spheroids: an exact solution. Drying 2004 – Proceedings of the 14th International Drying Symposium (IDS 2004). São Paulo, Brazil, 22-25 August 2004, vol. A, pp. 493-500.

Lima, D. R., Farias, S. N., Lima A. G. B. Mass transport in spheroids using the Galerkin method. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, v. 21, n. 4, p. 667-680, 2004.

Lopes, A. S.; Mattietto, R. A.; Menezes, H. C. Estabilidade da polpa de pitanga sob congelamento. **Ciência e Tecnologia dos Alimentos**, v.25, n.3, p. 553-559, 2005.

Luikov, A. V. **Heat and mass transfer in capillary porous bodies**. New York: Pergamon Press Ltd., 523p. 1966.

Luikov, A. V. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies: review. **International Journal heat and mass transfer**, v.18, n.1, p.1-14, 1975.

MacRobert, T. M. **Spherical harmonics: an elementary treatise on harmonic function with application**. Oxford: Pergamon Press, 1967, 349 p.

Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Soni, R. P. **Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics**. Berlin: Springer-Verlag, p.472-495, 1966.

Maliska, C.R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**, LTC, Rio de Janeiro, 1995, 424 p.

Maliska, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Rio de Janeiro: LTC editora S.A., 2004, 453p.

Maltini, E.; Torreggiani, D.; Venir, E.; Bertolo, G. Water activity and the preservation of plant foods, **Food Chemistry**, v. 82, n. 1, 2003.

Manara, W.; Manara, N.T.F.; Veiga, P.; Taragó, M.F.S. A cultura da lentilha. **Informe Agropecuário**, v.16, n.174, p.61-70, 1992.

Markowski, M.; Białobrzewski, I.; Modrzewska, A. Kinetics of spouted-bed drying of barley: Diffusivities for sphere and ellipsoid. **Journal of Food Engineering**, v. 96, n. 3, p.380–387, 2010.

Menkov, N. D. Moisture sorption isotherms of lentil seeds at several temperatures, **Journal of Food Engineering**, v. 44, n. 4, p. 205-211, 2000.

Moreira, R.; Chenlo, F.; Torres, M.D.; Vallejo, N. Thermodynamic analysis of experimental sorption isotherms of loquat and quince fruits. **Journal of Food Engineering**, v. 88, p. 514–521, 2008.

Muramatsu, Y.; Tagawa, A.; Sakaguchi, E.; Kasai, T. Prediction of thermal conductivity of kernels and a packed bed of brown rice, **Journal of Food Engineering**, v. 80, n.1, p. 241-248, 2007.

Neves, E.; Peske, S. T.; Villela, F. A.; Baudet, L.; Peres, W. B. Secagem de sementes de milho em espiga, em função da altura da camada e fluxo de ar. **Revista Brasileira de sementes**, v.27, n.2, p. 117-124, 2005.

Neves, I. P. **Armazenamento de grãos**. Dossiê Técnico, Rede de Tecnologia da Bahia - RETEC/BA. 2007. Disponível em: <<http://sbrtv1.ibict.br/upload/dossies/sbrtdossie256.pdf>>. Acesso em: 27out. 2011.

Oliveira, V. A. B. **Transferência de calor e massa no interior de sólidos com forma esferoidal prolata via termodinâmica dos processos irreversíveis**. 2006. 150 p. Tese

(Doutorado em Engenharia de Processos). Centro de ciência e tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB, Brasil.

Oliveira, V.A.B., Lima, A.G.B. Drying of wheat based on the non-equilibrium thermodynamics: a numerical study. **Drying Technology**, v.27, n.2, p.306–313, 2009.

Oliveira, V.A.B.; Lima, W.C.P.B.; Farias Neto, S.R.; Lima, A.G.B. Heat and mass diffusion and shrinkage in prolate spheroidal bodies based on non-equilibrium thermodynamics: a numerical investigation. **Journal of Porous Media**, v. 14, n.7, p. 593-605, 2011.

Oliveira, G. H. H.; Corrêa, P. C.; Botelho, F. M.; Goneli, A. L. D.; Afonso Júnior, P. C.; Campos, S. C. Modeling of the shrinkage kinetics of coffee berries during drying. **Acta Scientiarum. Agronomy**, v. 33, n. 3, p. 423-428, 2011.

Oliveira, V. A. B.; Lima, A. G. B.; Silva, C. J. Drying of wheat: A numerical study based on the non-equilibrium thermodynamics. **International Journal of Food Engineering**, v. 8, n.3, p.1-19, 2012.

Oplinger, E.S.; Hardman, L.L.; Kaminski, A.R.; Kelling, K.A.; Doll, J.D. **Lentilhas**. Field Crops Manual, 1990. Disponível em:< <http://www.hort.purdue.edu/newcrop/afcm/lentil.html>>. Acesso em: 20/09/2011.

Palacin, J. J. F.; Lacerda Filho, A. F.; Cecon, P. R. Montes, E. J. M. Determinações das curvas de secagem de milho nas espigas (zea mays l.). **Engenharia na Agricultura**, v.13, n.4, p. 300-313, 2005.

Park, K. J.; Murr, F. E. X.; Salvadego, M. Medição da condutividade térmica de milho triturado pelo método da sonda. **Food Science and Technology (Campinas)**, v.17, n.3, p. 242-247, 1997.

Park, K. J.; Yado, M. K. M.; Brod, F. P. R. Estudo de secagem de pêra bartlett (*pyrus* sp.) em fatias. **Ciência e Tecnologia dos Alimentos**, v.21, n.3, p. 288-292, 2001.

Park, K. J.; Antonio, G. C.; Oliveira, R. A. de; Park, K. J. B. **Seleção de Processos e Equipamentos de Secagem**. 10 p. 2006. Disponível em: <<http://www.feagri.unicamp.br/ctea/manuais/selprcequipsec.pdf>>. Acesso em: 17 de maio. 2010.

Park, K. J.; Antonio, G. C.; Oliveira, R. A. de; Park, K. J. B. **Conceitos de processo e equipamentos de secagem**. 121p. 2007. Disponível em: <http://www.feagri.unicamp.br/ctea/manuais/concproceqsec_07.pdf>. Acesso em: 17 de maio. 2010.

Patankar, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**, New York: Hemisphere Publishing Corporation, 197 p. 1980.

Philip, J.R., D.A. De Vries. Moisture movement in porous materials under temperature gradients. **Transactions of the American Geophysical Union**, v.38, n.2, p. 222-232, 1957.

Reeds, J. S. Drying. **ASM International Handbook Committee**, 1991. p. 131-134.

[Resende, O.](#); [Correa, P. C.](#); [Goneli, A. L. D.](#); [Ribeiro, D. M.](#) Propriedades físicas do feijão durante a secagem: determinação e modelagem. **Ciência Agrotecnica**. v.32, n.1, p. 225-230, 2008.

Ribeiro, E. P.; Seravalli, E. A. G. **Química de alimentos**. 2 ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2007. 184 p.

Ribeiro, D. M.; Corrêa, P. C.; Resende, O.; Botelho, F. M. Propriedades térmicas de grãos de trigo: Determinação e modelagem. **Ciência e Agrotecnologia**, v. 31, n. 2, p. 462-467, 2007.

Samapundo, S.; Devlieghere, F.; Meulenaer, B.; Atukwase, A.; Lamboni, Y., Debevere, J. M. Sorption isotherms and isosteric heats of sorption of whole yellow dent corn. **Journal of Food Engineering**, v.79, n.1, p.168–175, 2007.

Saravia, C. T.; Peres, W. B.; Risso, J. Manejo da temperatura do ar na secagem intermitente de sementes de arroz irrigado. **Revista Brasileira de Sementes**, v. 29, n. 2, p.23-27, 2007.

Seibert, E.; Casali, M. E.; Leão, M. L.; Rieth, S.; Pezzi, E.; Corrent, A. R.; Brandelli, A.; Bender, R. J. Efeito do condicionamento térmico na prevenção de danos por frio em pêssegos Granada. **Revista Brasileira de Agrociência**, v. 13, n.4, p. 513-519, 2007.

Silva, W. P.; Silva, C. D. P. S.; Lima, A. G. B. Incerteza na determinação do teor de água de equilíbrio de produtos agrícolas. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, Campina Grande, Especial, v.7, n.2, p.159-164, 2005.

Silva, W. P. **Transporte difusivo em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas generalizadas**. Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, 263 p. Tese (Doutorado), 2007.

Silva, W. P.; C. Silva, M. D. P. S.; Silva, D. D.P.S.; Neves, G. A.; Lima, A. G. B. Mass and heat transfer study in solids of revolution via numerical simulations using finite volume method and generalized coordinates for the Cauchy boundary condition, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v.53, n. 5-6, p. 1183-1194, 2010.

Silva, W. P.; Silva, C. M. D. P. S. **Lab fit curve fitting software**, V.7.2.46, 2009; online, disponível em: www.labfit.net, data de acesso: agosto/2013.

Simioni, D.; Oliveira, M.; Pagnussatt, F. A.; Deuner, C. C.; Gutkoski, L. C.; Elias, M. C. Parâmetros operacionais na secagem intermitente de grãos de aveia branca cultivar UPFA 20 Teixeira. **Ciência Agrotécnica**, Lavras, v. 32, n. 2, p. 497-502, 2008.

Smith, V. H.; Jimmerson, J. "Briefing n. 61," **Agricultural Marketing Policy Center**, 2005-Revised. Disponível em: <<http://www.montanamarketmanager.org/pages/custom.php?id=2165>>, Acesso em 30/09/2011.

Singh, K.K.; Goswami, T.K. Thermal properties of cumin seed. **Journal of Food Engineering**, v.45, n.4, p. 181-187, 2000.

Sotomayor, C.; Frias, J.; Vidal-Valverde, C.; Fornal, J.; Sadowska, J.; Urbano, G. Lentil starch content and its microscopical structure as influenced by natural fermentation. **Starch/Stärke**, v. 51, n. 5, p. 152–156, 1999.

Steffens, C. A.; Amarante, C. V. T.; Silveira, J. P. G.; Chechi, R.; Espindola, B. P. Tolerância ao dano pelo frio em goiabas 'Pedro Sato' submetidas ao condicionamento térmico. **Biotemas**, v.21, n.3, p.75-80, 2008.

Szot, B.; Horabik, J.; Rusinek, R. Physical properties characteristic of Polish and Canadian lentil seeds. . **International Agrophysics**, v.17, p. 123-129, 2003.

Tang, J.; Sokhasanj.; Yannacopoulos, S.; Kasap, S. O. Specific heat of lentils by differential scanning calorimetry. **Transaction of ASAE**, v.34, n. 4, p. 517-522, 1991.

Tang, J.; Sokhansanj, S. Moisture diffusivity in Laird Lentil seed components. **Transaction of ASAE**, v.36, n.6, p. 1791-1798, 1993.

Tang, J.; Sokhansanj, S. Geometric changes in lentil seeds caused by drying. **Journal of Agricultural Engineering Research**, v. 56, n. 4, p. 313-326, 1993a.

Tang, J.; Sokhansanj, S. A model for thin-layer drying of lentils. **Drying Technology**, v.12, n.4, p. 849-867, 1994.

Teruel, B.; Cortez, L. A.; Leal, P.; Lima, A. G. B. Estudo teórico do resfriamento com ar forçado de frutas de geometrias diferentes. **Ciência e Tecnologia de Alimentos**, v.21, n.2, p. 228-235, 2001.

Thys, R. C. S.; Noreña, C. P. Z.; Marczak, L. D. F.; Aires, A. G.; Olivera, F. C. Adsorption isotherms of pinhão (*Araucaria angustifolia* seeds) starch and thermodynamic analysis. **Journal of Food Engineering**, v.100, n.3, p. 468–473, 2010.

Togrul, I. T.; Pehlivan, D. Modelling of drying kinetics of single apricot. **Journal of Food Engineering**, v. 58, p. 23–32, 2003.

Tolaba, M. P.; Peltzer, M.; Enriquez, N.; Pollio, M. L. Grain sorption equilibria of quinoa grains. **Journal of Food Engineering**, v.61, n.3, p. 365–371, 2004.

Tres, M. V.; Borges, G. R.; Corazza, M. L.; Zakrzewski, C. A. Determinação da difusividade térmica de alimentos: medidas experimentais e simulação numérica. **Perspectiva**, v.35, n.131, p. 43-56, 2011.

Yang, W.; Sokhansanj, S.; Tang, J.; Winter, P. Determination of Thermal Conductivity, Specific Heat and Thermal Diffusivity of Borage Seeds. **Biosystems Engineering**, v.82, n.2, p.169–176, 2002.

Valentini, S. R. T.; Castro, M. F.P. M.; Almeida, F. H. Determinação do teor de umidade de milho utilizando aparelho de microondas. **Ciência e Tecnologia dos Alimentos**. v.18, n.2, p. 237-240, 1998.

Vega, M. P.; Fratini, R. M.; Muehlbauer, F.J. Lentil. In: Vega, M. P. Genetics, genomics and breeding of cool season grain legumes, 1 ed. CRC Press; Jersey, British Isles ; Enfield, NH: Science Publishers, Boca Raton, 2012, 98-150.

Viganó, J.; Azuara, E.; Telis, V. R.N.; Beristain, C. I.; Jiménez, M.; Telis-Romero, J. Role of enthalpy and entropy in moisture sorption behavior of pineapple pulp powder produced by different drying methods. **Thermochimica Acta**, v. 528, n.1, p. 63– 71, 2012.

Vieira, R. F. Potencialidade da cultura da lentilha em Coimbra, Minas Gerais. **Revista Ceres**, v.50, n. 291, p.669-674, 2003.

Wang, N.; Hatcher, D.W.; Toews, R.; Gawalko E.J. Influence of cooking and dehulling on nutritional composition of several varieties of lentils (*Lens culinaris*). **Food Science and Technology**, v. 42, n.4, p. 842–848, 2009.

Whitaker, S. O. **Advances in Drying**, Ed. A. S. Mujumdar, Hemisphere Publishing Corporation, New York. Chapter two: Heat and mass transfer in granular porous media, p.23-61, 1980.

Wu, B.; Yang, W.; Jia, C. A Three-dimensional numerical simulation of transient heat and mass transfer inside a single rice kernel during the drying process. **Biosystems Engineering**, v.87, n.2, p. 191–200, 2004.

Zhang, Y.; Tabil, L.G.; Wang, D. Effect of moisture content, postharvest treatment and Storage time on physical properties and dehulling Quality of red lentil. In: 2008 ASABE Annual International Meeting, 2008 – Providence, Rhode Island. ASABE, St. Joseph, MI, USA. 15p.

Zia-ul-haq, M.; Ahmad, S.; Aslam shad, M.; Iqbal, S.; Qayum, M.; Ahmad, A.; Luthria, D. L.; Amarowicz, R. Compositional studies of lentil (*lens culinaris* medik.) Cultivars commonly grown in pakistan. **Pakistan Journal of Botany**, v. 43, n.3, p. 1563-1567, 2011.