UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Vanessa Lays Oliveira dos Santos

FUNÇÃO LOGARÍTMICA E MODELOS EXPONENCIAIS

Cuité-PB

2014

Vanessa Lays Oliveira dos Santos

FUNÇÃO LOGARÍTMICA E MODELOS EXPONENCIAIS

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos
Coorientadora: Márcia Cristina Silva Brito

Cuité-PB

2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S237f Santos, Vanessa Lays Oliveira dos.

Função logarítmica e modelos exponenciais. / Vanessa Lays Oliveira dos Santos – Cuité: CES, 2014.

56 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2014.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.
Co-orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Cálculo. 2. Logaritmo. 3. Função logarítmica. I. Título.

CDU 517

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Vanessa Lays Oliveira dos Santos

Função Logarítmica e Modelos Exponenciais

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 10 de abril de 2014.

Banca Examinadora

Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)

Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Coorientadora)

Prof. José Fernando Leite Aires

Aos meus queridos avós.

Ao meu esposo Israel meu grande amor.

Aos meus filhos Iara e Iuri presentes de Deus.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que sempre esteve comigo, me fortalecendo, ele tornou esse sonho possível.

Aos meus avós queridos que tornaram-se meus pais, me deram amor, limites e educação, me guiaram para o caminho certo.

Ao meu amado esposo Israel pela paciência, companherismo, dedicação e carinho.

Aos aos meus filhos, que mesmo com tantos dias de ausência, era sempre com sorrisos que me recebiam.

As minhas amadas irmãs Lucinha, Maria Elza e Miriam.

A minha sogra Maria Lúcia e ao meu sogro Manuel pelo apoio em dias difíceis.

Ao trio mais lindo que meus olhos já viram, que a cada conquista minha comemoraram comigo, minhas queridas sobrinhas Layla, Laura e Lívia.

A minha madrinha Lurdes Barreto que com seus ensinamentos contribuiu para realização da minha carreira pessoal e profissional.

De uma forma muito especial as minhas professoras Gisélia Vasconcelos e Márcia Cristina, por toda paciência e orientação dedicada, para que esse trabalho fosse possível.

Agradeço a gentileza do professor José Fernando Leite Aires por aceitar o convite para participar da banca e por suas observações que muito contribuíram para o resultado final.

A todos os colegas do curso, em especial à Waléria, Sabrina, Élias, Jailsom, Fátima, Gerivaldo, Wellisom, Sérgio, Jaldir, Ivanielma e Jebsom, estes são os irmãos que a vida me deu oportunidade de escolher.

Agradeço a todos os professores do curso de matemática que contribuíram para meu sucesso e para meu crescimento como profissional. Sou o resultado da confiança e da força de cada um de vocês.

E também com muito carinho a Gilmara Sabino e Rosicleide Medeiros, babás dos meus filhos, mulheres fortes que me ajudaram nessa caminhada, dividindo os árduos trabalhos de dona de casa.

A todos muito obrigada.

"Escolha sempre o caminho que pareça o melhor, mesmo que seja o mais difícil; o hábito brevemente o tornará fácil e agradável. "

Pitágoras.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo propor uma abordagem sobre os logaritmos. Inicialmente, faremos um histórico da invenção do logaritmo como simplificador de cálculos no século XVI e dos principais matemáticos responsáveis pela descoberta que facilitou o trabalho de astrônomos e navegantes da época, e seu atual estudo como função. Em seguida definiremos a Função Logarítmica, suas propriedades e sua inversa, a Função Exponencial. Essas funções são modelos ideais para certos fenômenos de variação, para solução de problemas do cotidiano. Também serão apresentadas as equações diferencias de primeira ordem para função exponencial, assim como alguns modelos e aplicações.

Palavras-chave: Logaritmo. Cálculo. Aplicações.

Abstract

This paper aims to propose an approach for the logarithms. Firstly, make a history of the invention of logarithms simplifying calculations in the sixteenth century, responsible for major mathematical breakthrough that facilitated the work of astronomers and navigators of the time, and their current study like a function. Next define the logarithmic function, its properties and inverse, the exponential function. These functions are ideal models for certain phenomena of variation, to solve everyday problems. Also the differential equations first order will be presented for exponential function, as well as some models and applications.

Keywords: Logarithm. Calculation. Calculation.

Sumário

Introdução

Nesse trabalho estudaremos a função logarítmica e sua inversa que é a função exponencial, funções indispensáveis no estudo de Matemática

Os primeiros matemáticos a publicar obras sobre logaritmos foi o escocês Jonh Napier em 1614, que tinha como título *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* e alguns anos depois em 1620 foi a vez do suíço Jobst Bürgi publicar sua obra intitulada como *Tábuas de Progressões Aritméticas e Geométricas.*

Os logaritmos, como instrumento de cálculo, surgiram para realizar simplificações, uma vez que transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração.

No primeiro capítulo deste trabalho abordamos o surgimento dos logarítmos no final do século XVI, que no princípio foi criado como simplificador de cálculo, para facilitar a vida de astrônomos e navegadores já que cálculos complexos eram feitos diariamente por essas pessoas.

No segundo capítulo definimos a Função Logarítmica e suas propriedades e também a Função Exponencial que é sua inversa, bem como também suas propriedades.

No terceiro capítulo falaremos de alguns modelos exponenciais como: Desintegração radioativa, Método do carbono, Resfriamento de um corpo, Infusão intravenosa de glicose e a Dinâmica de crescimento de um tumor. Em seguida mostramos algumas exemplos com alguns desses modelos.

Capítulo 1

Abordagem Histórica

Neste capítulo abordaremos o surgimento dos logaritmo no final do século XVI, a questão da quadratura da hipérbole e o logaritmo como função e a origem do número e e sua presença nos logaritmos de Napier. As referências utilizadas para os estudos realizado neste capítulo são [3], [5] e [7].

O Logaritmo

No fim do século XVI na Europa, o desenvolvimento da astronomia e da navegação exigia cálculos aritméticos muito complexos para a época. O avanço da Matemática se deu principalmente em função do crescimento político, econômico e social.

Segundo Boyer [3], foi um período onde muitos estudos, sobre a trigonometria estavam sendo realizados em todas as partes da Europa. Entre esses estudos, havia um grupo de fórmulas conhecidas como "regras de prostaférese", eram fórmulas que transformavam um produto de funções numa soma ou diferença (daí o nome prosthaphaeresis, palavra grega que significa adição e subtração). Eram também conhecidas como fórmulas de Werner. As fórmulas são

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B) \quad (1.1)$$

$$2\operatorname{sen} A\cos B = \operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B) \quad (1.2)$$

$$2\cos A\cos B = \operatorname{sen}(A+B)-\operatorname{sen}(A-B) \quad (1.3)$$

$$2\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B = \cos(A-B)-\cos(A+B) \quad (1.4)$$

Dois matemáticos dinamarqueses Wittich (1584) e Clavius (1593), este último com a obra, "O Astrolábio"(1593), sugeriram o uso desse método para abreviar os cálculos.

Por exemplo, utilizaremos o método acima para efetuar o produto entre

$$0,17365 \cdot 0,9927$$

Consultando uma tabela Trigonométrica, temos que:

$$\operatorname{sen} 10^\circ = 0,17365 \qquad e \qquad \cos 8^\circ = 0,99027$$

Pela fórmula (1.2), temos:

$$\operatorname{sen} 10^\circ \cos 8^\circ = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 18^\circ + \operatorname{sen} 2^\circ)$$

Consultando novamente uma tabela trigonométrica temos:

$$\operatorname{sen} 18^\circ = 0,30902 \qquad e \qquad \cos 2^\circ = 0,03490$$

assim,

$$\operatorname{sen} 18^\circ + \operatorname{sen} 2^\circ = 0,34392 \Rightarrow \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 18^\circ + \operatorname{sen} 2^\circ) = 0,17196.$$

Portanto, sem cometer erro superior a um décimo de milésimo, podemos escrever:

$$0,17365 \cdot 0,99027 = 0,17196.$$

Conforme afirma Lima [7], uma das desvantagens do método prostaférese é a dificuldade em aplicá-lo para produtos de três ou mais fatores, potências e raízes. Essas operações eram frequentes no trabalho de astrônomos e navegadores. Por isso era constante o desafio em desenvolver ferramentas matemáticas que pudessem ajudar nessas tarefas.

As operações aritméticas segundo seu grau de dificuldade, podiam ser classificadas em três espécies, eram elas: 1^a espécie: adição e subtração; 2^a espécie: multiplicação e divisão e; 3^a espécie: potenciação e radiciação. Procurava-se então um processo que permitisse reduzir cada operação de 2^a ou 3^a espécie a uma de 1^a espécie inferior e portanto mais simples.

Para se ter uma idéia de como as multiplicações eram feitas, observe o exemplo de como era resolvida a multiplicação,

$$1535 \cdot 325$$

eles usavam a seguinte fórmula,

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Efetuava-se o cálculo:

$$1515 \cdot 325 = \left(\frac{1515+325}{2}\right)^2 - \left(\frac{1515-325}{2}\right)^2$$

e recorria-se a tabela a seguir:

n	$\cdots$	594	595	596	$\cdots$	920
$\left(\frac{n}{2}\right)^2$	$\cdots$	88209	88506,25	88804	$\cdots$	211600

Tabela 1.1: Tabela com números naturais e os quadrados de suas metades

Assim,

$$1515 \cdot 325 = \left(\frac{920}{2}\right)^2 - \left(\frac{595}{2}\right)^2 = 846400 - 354025 = 492375.$$

Os primeiros matemáticos a publicarem as primeiras tábuas de logaritmos foram John Napier(1550-1617) e Jobst Bürgi(1552-1632).

Figura 1.1: Jonh Napier

Figura 1.2: Jobst Bürgi

John Napier foi um nobre teólogo escocês que não era matemático profissional, mas tinha a Matemática como lazer. Seu interesse era por alguns aspectos da computação e trigonometria, especialmente em estudos relacionados à simplificação de cálculos. Segundo Boyer [3], Napier tinha dedicado anos às suas tábuas de logaritmos com o objetivo de simplificar as operações, em especial de produtos e quocientes.

Napier publicou sua abordagem dos logaritmos em 1614 num texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, que significa "Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos". Segundo consta, Napier dedicou-se por vinte anos antes da publicação desse sistema que viria facilitar consideravelmente os cálculos com senos na astronomia.

Sua definição do logaritmo, termo por ele criado, (logos que é razão e arithmos que é número) foi entusiasticamente adotada por toda europa. Como afirmou Laplace, a invenção dos logaritmos "ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos".

Jobst Bürgi suíço, fabricante de instrumentos para astronomia, matemático e inventor. Existem evidências de que os trabalhos de Bürgi acerca dos Logaritmos já estivessem em andamento desde 1588, mas a publicação dos mesmos somente ocorreu em 1620, num livro editado em Praga, sob o título: *"Tábuas de Progressões Aritméticas e Geométricas"*. O título da obra de Bürgi aponta para a conexão que ele teria estabelecido entre as progressões e os logaritmos e foi provavelmente inspirado no método de Prostaférese na simplificação de cálculos. Essa conexão também está presente nos trabalhos de Napier.

Segundo Lima [7], " A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior que a de Bürgi, devido a suas publicações e seu relacionamento com professores universitários".

Napier tomara conhecimento, lendo um trabalho de Michael Stifel (1486 - 1567), de que em alguns cálculos seria possível substituir multiplicações e divisões por adições e subtrações.

Para tal, usava-se uma tabela de duas colunas (ou duas linhas), que colocava em correspondência os termos de uma progressão geométrica (na verdade potências de um certo número) com os de uma progressão aritmética.

Abaixo temos um exemplo simples de uma tábua de logaritmos:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Observe que esta "tábua de logaritmos"tem a seguinte estrutura sendo, no exemplo, $a = 2$.

a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Temos que $8 = 2^3$ e $32 = 2^5$. Para multiplicar, por exemplo, 8 por 32 procura-se na tabela os números correspondentes na segunda linha, que são 3 e 5. Basta efetuar a adição $3 + 5 = 8$. Localizando 8 na segunda linha, vemos que seu correspondente na primeira linha é 256. Conclui-se então, que $8 \times 32 = 256$.

Para calcular a divisão, de dois números naturais o procedimento era o inverso ao anterior.

Por exemplo, para dividir 2048 por 128, toma-se os os números correspondentes, 11 e 7 e calcula-se $11 - 7 = 4$. O número da primeira linha correspondente a 4 é 16. Portanto $2048 \div 128 = 16$.

Essas idéias são formalizadas atualmente pelas propriedades das potências que possuem mesma base.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad e \quad a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

Assim,

$$8 \times 32 = 2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$$

e

$$2048 \div 128 = 2^{11} \div 2^7 = 2^{11-7} = 2^4 = 16.$$

O inconveniente dessa tábua é que ela nos permite um número restrito de multiplicações e divisões, pois as potências de 2 crescem muito rapidamente.

Napier desejava escrever os expoentes de maneira a formar uma faixa contínua (ou quase) de valores. Napier sabia que em tais sequências, para conservar os termos "próximos", deveria tomar um valor "pequeno"para base. Um valor que fosse uma fração da unidade. Ele escolheu como unidade 10^7 pois era prática comum em sua época, no trabalho com a trigonometria, dividir o raio do círculo unitário em 10^7 partes. Napier apenas seguiu o que se fazia em sua época e, como base, escolheu o número $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 0,9999999$.

Com isto ele era capaz de conservar próximos os termos de sua progressão geométrica de potências inteiras. Esta escolha que nos parece estranha hoje tem um motivo.

Napier então pensou em considerar um número bem próximo de 1, cujas potências crescessem lentamente, proporcionando um grande número de produtos e quocientes "instantâneos". Como naquela época, os valores numéricos que os astrônomos mais manipulavam eram valores de senos e cossenos, seria interessante, uma tábua com grande quantidade de números entre 0 e 1.

Os logaritmos de Napier eram substancialmente diferentes dos logaritmos com os quais estamos habituados e estudamos nos dias de hoje, o que, em hipótese alguma, diminui a relevância de sua empreitada e esforço em busca de um método que fosse capaz de simplificar cálculos grandes e cansativos.

Uma das diferenças básicas entre o que se estuda nos dias de hoje e o que foi criado por ele diz respeito à forma como ele concebeu sua invenção. Napier não tinha em mente o conceito de base de logaritmos e, além disso, todos os princípios eram explicados em termos geométricos.

Napier imaginou os seus logaritmos de forma dinâmica, pensando em segmentos, semi-retas e em velocidades. A seguir tentaremos explicitar a forma como ele a concebeu

1. Suponha, por exemplo, o segmento de reta AB e a semi-reta DX.

2. Tome AB como unidade, no caso de Napier 10^7(o raio do círculo no qual os senos eram medidos).

3. Suponha um ponto C percorrendo o segmento AB e um ponto F percorrendo a semi-reta DX de forma que ambas iniciam o movimento simultaneamente a partir dos extremos A e D respectivamente.

4. Suponha ainda que C e F possuam a mesma velocidade inicial.

5. Admitamos que a velocidade de C seja dada pela medida CB e que a velocidade F seja constante (igual a velocidade inicial de C).

6. Nessas condições Napier pensou no logaritmo do número $x = CB$ como sendo o número $y = DF$ (o conceito de base não interfere neste tipo de definição).

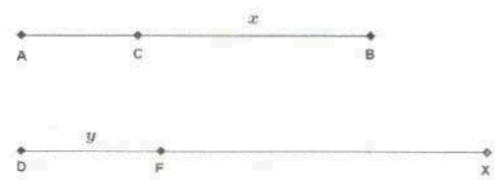

Figura 1.3:

Note que neste contexto o ponto C parte de A e se move ao longo de AB com velocidade variável, decrescendo em proporções com sua distância a B e que a velocidade de F, apesar de constante, está relacionada a velocidade inicial de C.

Outra diferença diz respeito às operações com logaritmos. A soma e a subtração dos logaritmos de Napier difere do que fazemos hoje. Para ele, por exemplo, admitindo $x_1 = \log A_1$ e $x_2 = \log A_2$, a operação $x_1 + x_2$ será $A_1A_2/10^7$, de fato, isto ocorre por termos $A_1 = 10^7(1-10^7)^{x_1}$ e $A_2 = 10^7(1-10^7)^{x_2}$.

Seguindo uma prática usada na trigonometria da sua época, Napier dividiu o raio de um círculo unitário em 10^7 partes. A seguir escolheu $q = 1-10^{-7}$ ou $0,9999999$ como a razão para construir sua tabela. Desse modo, segundo a Figura, Napier considerou $AB = 10^7$ e potências inteiras de q multiplicadas por $10^7 \approx 0,9999999\ldots$

Para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7. Então se

$$N = 10^7(1-1/10^7)^L,$$

ele chamava L de "logaritmo"do número N. Segue-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7(1-1/10^7) = 0,9999999$ é 1, e assim por diante.

Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base 1/e, pois $(1-1/10^7)^{10^7}$ fica próximo de

$$\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n = 1/\mathrm{e}.$$

Nepier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da nossa. Ele não pensou em uma base para seu sistemas, mas suas tabelas eram compiladas por multiplicações repetidas, equivalentes a potências de $0,9999999$. Sua potência ou número decrescia a medida que o índice(ou logaritmo) cresce, isso porque ele usava a base 1/e que é menor que 1.

Conforme imaginado por seu descobridor Napier, um sistema de logaritmos é simplesmente uma tabela com duas colunas. A cada número real positivo x na coluna à esquerda corresponde, no mesmo nível à direita, um número real $L(x)$ chamado o logaritmo de x.

Todos tinham conhecimento do trabalho para elaborar uma tábua de logaritmos, mas todos também tinham conhecimento de como ela facilitaria os cálculos.

Em 1615 o matemático inglês Henry Briggs (1561-1631) muito entusiasmado com os logaritmos, professor da universidade de Londres, visitou Napier e propôs o uso de potências de dez e Napier concordou, ambos concordaram que o logaritmo de um deveria ser zero e que o logaritmo de dez deveria ser um.

Em 1617 Napier morreu e recaiu sobre Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns. De mais fácil utilização, contendo os chamados logaritmos décimais ou logaritmos ordinários, que tiram proveito do fato do nosso sistema ser decimal.

Henry Briggs, apresentou uma nova tábua, proporcionando melhor interpretação, contendo os chamados Logaritmos Decimais. Essa tábua foi publicada por Brigs em *Logarithmorum Chilias prima* em 1617.

Uma última informação a respeito de Henry Briggs é que foi a partir de seu trabalho em 1624 que as palavras "mantissa" e "característica" passaram a ser utilizadas nas operações com logaritmos a partir das tabelas de valores.

Hoje em dia universalmente um logaritmo é considerado como um expoente; assim, se $n = b^x$, dizemos que x é o logaritmo de n na base b. Dessa definição, as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes. Uma das incongruências da história da matemática é que os logaritmos foram descobertos antes de se usarem expoentes.

Mas os logaritmos que durante três séculos e meio tão bem desempenharam o papel de maravilhoso instrumento para simplificar o cálculo aritmético, permitindo que se efetuassem, com rapidez e precisão operações complicadas, perderam a algum tempo esse lugar de eficiente calculador, hoje ocupado com grande êxito pelas máquinas eletrônicas. A função logarítmica, porém, nunca desaparecerá. A principal dessas razões é de natureza teórica. Embora a tábua de logaritmos tenham sido inventada como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos naturais e mesmo sociais são estreitamente relacionados com os logaritmos. Assim sendo, os logaritmos, que no princípio eram importantes apenas por causa das tábuas, mostraram ter apreciável valor intrínseco. Por isso eles continuam, a merecer uma posição de destaque no ensino da matemática e em suas aplicações.

A presença de e nos logaritmos de Napier

Lembremos que Napier não tinha consciência do conceito de base de um sistema de logaritmos, mas pode-se verificar que os seus dados levam a um sistema de base $\frac{1}{e}$.

De fato, com notações atuais, na Figura 1.3, seja $CB = x$ e $DF = y$. Sabendo que $AB = 10^7$, temos que $AC = 10^7 - x$.Se AB é tomado como 10^7 e se a velocidade inicial de C também é tomada como 10^7. Assim, para cada instante t, $AC = 10^7 - x$ e a velocidade de C é

$$\frac{d}{dt}(10^7 - x) = -\frac{dx}{dt} = x.$$

Logo, $-\frac{dx}{x} = dt$, ou seja $-\int \frac{dx}{x} = \int dt$, donde concluí-se que $-lnx = t + c$.

Assim, para $t = 0$, $A = C$, $x = 10^7$, $c = -\ln 10^7$, ou seja

$$-\ln x = t - \ln 10^7 \tag{1.5}$$

Por outro lado, F se move uniformemente com velocidade $\frac{dy}{dt} = 10^7$ o que implica que $y = 10^7 t + \bar{c}$. Para $t = 0$, tem-se $y = 0$ e assim, $\bar{c} = 0$ e $t = \frac{y}{10^7}$. Em (1.5) fazendo $t = \frac{y}{10^7}$, tem-se

$$-lnx = \frac{y}{10^7} - \ln 10^7 \Rightarrow \frac{y}{10^7} = -\ln x + \ln 10^7 \Rightarrow \frac{y}{10^7} = \ln \frac{10^7}{x} = \log_{\frac{1}{e}} \frac{x}{10^7} \Rightarrow y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \frac{x}{10^7}.$$

Portanto, o logaritmo de Napier, a menos do fator 10^7, é de base $\frac{1}{e}$.

A quadratura da hipérbole e o logaritmo como função

Uma das questões que inquietou muitos matemáticos no decorrer dos séculos foi a questão da *quadratura de curvas*. O problema se resume basicamente à procura de uma figura geométrica plana fechada que tenha mesma área de uma outra figura geométrica considerada.

No caso dos polígonos na geometria Euclidiana sempre é possível dissecar os polígonos em triângulos, o que torna a questão da quadratura bem mais simples do que, por exemplo, se considerarmos figuras curvas como o círculo, a hipérbole ou a parábola.

A hipérbole foi uma das curvas que mais resistiu ao problema da quadratura, vencendo até mesmo Arquimedes e o seu método da exaustão. Foi a partir do método dos indivisíveis, com Cavalieri, que as tentativas de quadratura da hipérbole ficaram mais próximas de uma solução.

Considerando a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, e tomando para análise a parte do gráfico que está no primeiro quadrante, consideramos a área sob a hipérbole como sendo a área entre o gráfico, o eixo x e as linhas verticais $x = 1$ e $x = n$, com $n > 1$.

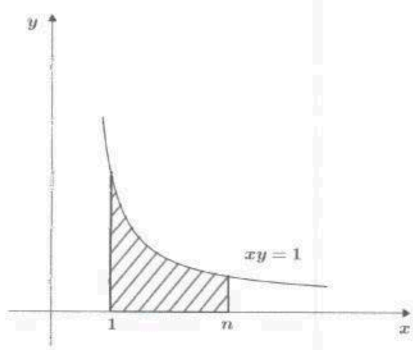

Figura 1.4:

A área será uma função da forma $A(n)$ e, a questão da quadratura da hipérbole se resume a encontrar tal função.

No início do século XVII, Fermat (1601 - 1665) e outros matemáticos, usando de procedimentos analíticos, ocupavam-se com o problema de quadraturas (cálculo de áreas). Fermat, por exemplo, determinou a área sob as curvas $y = x^n$, de 0 até $a > 0$ para n inteiro ou fracionário. Em notações atuais, concluiu que

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Tais curvas, foram por ele denominadas, parábolas generalizadas.

O resultado de Fermat não inclui o caso da hipérbole $y = \frac{1}{x}$.

Fermat e Descartes tentaram, mas não obtiveram sucesso na tentativa de efetuar a quadratura da hipérbole.

Coube a Grégorius de Saint-Vincent (1584-1667) um jesuíta belga que passou a maior parte de sua vida fazendo quadraturas, foi ele que percebeu uma proporcionalidade entre a área sob a hipérbole e o logaritmo da distância horizontal.

O aluno de Grégorius, Alfonso Anton de Sarasa (1618-1667) registrou pela primeira vez o uso de uma função logarítmica, em que $A(t) = \log t$ representa a área sob a hipérbole.

Foi dividindo um intervalo do domínio da função $y = 1/x, x \neq 0$, em um número infinito de pequenos retângulos, muito próximos da curva considerada, de maneira que suas áreas formassem uma sequência geométrica, que Saint-Vincent obteve a quadratura da hipérbole.

O método usado por Grégorius foi por exaustão, reduzindo o problema a series infinitas. Em 1667 o matemático escocês James Gregory mostrou como calcular logaritmos por aproximação das assíntotas dos espaços hiperbólico por meio da inscrição e circunscrição de polígonos. Assim, a quadratura da hipérbole torna-se parecida com o cálculo de logaritmos, por isso há uma relação do logaritmo e a hipérbole.

Modernamente encontramos nos livros de cálculo a expressão $\ln x = \int_0^x \frac{1}{t}dt$, com $x > 0$ para representar esta área sob o gráfico da hipérbole.

A questão da quadratura, levou Fermat naturalmente ao caminho que posteriormente Newton viria retomar para a invenção do Cálculo.

Em 1660 Isaac Newton reconheceu uma relação estreita entre a área de uma faixa da hipérbole e os logaritmos. Embora não tenha identificado realmente essa área como os logaritmos naturais, suas observações pioneiras mostram que a concepção geométrica de uma função logarítmica é uma idéia muito antiga, com mais de três séculos e meio de existência.

Newton, a partir das séries binomiais, utilizando os resultados de Fermat e abordando problemas relativos à área da hipérbole chegou a conclusão que a área delimitada pela curva $y = \frac{1}{x+1}$ para $x \neq 1$, o eixo x, $x = 0$ e $x = t$, fornecia como resultado $\log(t+1)$.

Além disso, levado a pesquisar sobre este resultado, concluiu que

$$\log(t+1) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$$

para todos os valores de t em $(-1, 1]$. Ele conjecturou que esta série poderia ser utilizada para calcular os logaritmos de vários números, mas que sua convergência lenta tornaria tal tarefa impraticável.

A origem do número e é cheia de mistérios. Ele aparece pela primeira vez na tradução de Edward Wright da obra Descriptio, de Napier (1618).

Esse período ficou marcado por um enorme crescimento do comércio e transações financeiras, em que havia necessidade de se calcular os juros compostos. O surgimento do número e pode ser consequência da tentativa de resolução de um desses problemas.

Outra hipótese sobre o surgimento do número e está relacionada com a resolução do cálculo para encontrar a área sob a hipérbole $y = 1/x$. Alguns matemáticos verificaram que essa área recaía nesse número.

Esse número ficou mais conhecido e passou a ter a importância que tem hoje depois que Leonhard Euler (1707-1783), grande matemático e físico suíço, mas que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha introduziu, em 1728, a definição de logaritmos que usamos hoje, isto é, $\log_a b = x$ se, e somente se, $b^x = a$, em que e era tido como uma base natural. Sua obra mais influente foi *Introductio in analysin infinitorum* (1748), que chamava a atenção para o número e e a importância das funções e^xe $\log_e x$.

De acordo com Lima [7], as funções logarítmicas e exponenciais possuem propriedades que as qualificam como modelos ideais de certos fenômenos de variação, ou seja, soluções de problemas do cotidiano. Pode-se citar a capitalização contínua de juros - que consiste em cálculos com aplicações financeiras - a desintegração de uma substância radioativa e a estimativa de idade de fósseis e artefatos através da datação por carbono. Essas são algumas situações da natureza que se revelam para justificar a importância das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática, nas ciências e na tecnologia.

Capítulo 2

Função Logarítmica

Neste capítulo estudaremos a função logaritmo e algumas de suas propriedades. Faremos uma abordagem geométrica do conceito de logaritmo, isto é, vamos defini-lo como área de uma faixa da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e finalmente apresentaremos a função exponencial como inversa da função logarítmica. As referências utilizadas para os estudos realizado neste capítulo são [1], [2], [6], e [7].

Definição 2.1. *Uma função real $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ chama-se* **função logarítmica** *quando tem as seguintes propriedades:*

a) L é uma função crescente, isto é, $x < y \Longrightarrow L(x) < L(y)$;

b) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$

Por intermédio desta definição, é possível demonstrar que várias propriedades e resultado são satisfeitos. Enunciaremos e provaremos alguns deles.

Propriedades das Funções Logarítmicas

Propriedade 2.1. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $x \neq y$;

1. Se $x < y$, pela propriedade (a) temos $L(x) < L(y)$;

2. Se $x > y$, pela propriedade (a) temos $L(x) > L(y)$.

Portanto em qualquer hipótese, $x \neq y$ concluímos que $L(x) \neq L(y)$. $\square$

Propriedade 2.2. *O logaritmo de 1 é zero.*

Demonstração. Pela propriedade b) temos:

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1), \quad \text{logo} \quad L(1) = 0.$$

□

Propriedade 2.3. *Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.*

Demonstração. Como L crescente para $0 < x < 1 < y$ resulta que

$$L(x) < L(1) < L(y),$$

como $L(1) = 0$ logo, $L(x) < 0 < L(y)$. □

Propriedade 2.4. *Para todo $x > 0$, tem-se $L(1/x) = -L(x)$.*

Demonstração. Desde que, $x \cdot (1/x) = 1$ pela propriedade b) temos:

$$L(x) + L(1/x) = L\Big(x \cdot \frac{1}{x}\Big) = L(1) = 0.$$

Portanto $L(1/x) = -L(x)$. □

Propriedade 2.5. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, vale $L\Big(\frac{x}{y}\Big) = L(x) - L(y)$.*

Demonstração. Com efeito,

$$L\Big(\frac{x}{y}\Big) = L\Big(x \cdot \frac{1}{y}\Big)$$

Usando a propriedade b) temos

$$L\Big(x \cdot \frac{1}{y}\Big) = L(x) + L\Big(\frac{1}{y}\Big)$$

Usando a propriedade 2.4 temos

$$L(x) + L\Big(\frac{1}{y}\Big) = L(x) - L(y).$$

□

Propriedade 2.6. *Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = p/q$ tem-se $L(x^r) = r \cdot L(x)$.*

Demonstração. A demonstração da propriedade 2.6 faremos por etapas.

Observe que a propriedade $L(xy) = L(x) + L(y)$ se estende para um número qualquer de fatores, isto é

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \cdots + L(x_n)$$

1° **caso:** $n \in \mathbb{N}$

$$L(x^n) = L(x \cdot x \cdots x) = L(x) + L(x) + \cdots + L(x) = n \cdot L(x).$$

A propriedade também vale para $n = 0$, pois para todo $x > 0$ temos que $x^0 = 1$, logo

$$L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x).$$

2° **caso:** n é um inteiro negativo:

Para todo $x > 0$ temos $x^n \cdot x^{-n} = x^0 = 1$. Logo

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(x^{n-n}) = L(x^0) = L(1) = 0$$

e portanto,

$$L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x).$$

3° **caso:** $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p.$$

Logo

$$q \cdot L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p \cdot L(x),$$

em virtude do que já foi provado. Da igualdade $q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x)$ resulta que

$$L(x^r) = (p/q) \cdot L(x),$$

ou seja,

$$L(x^r) = r \cdot L(x).$$

Isto termina a demonstração da propriedade 2.6.

□

Propriedade 2.7. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada, superior e inferiormente.*

Demonstração. Suponhamos que seja dado um número real β devemos achar um número $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > \beta$. Tomamos um número natural n tão grande que $n > \beta/L(2)$. Como $L(2)$ é positivo (Propriedade 2.3), temos $n \cdot L(2) > \beta$. Usando a propriedade 2.5, vemos que $n \cdot L(2) = L(2^n)$. Portanto, $L(2^n) > \beta$ agora escolhemos $x = 2^n$. Temos $L(x) > \beta$. Isto mostra que L é ilimitada superiormente.

Para provar que L também é ilimitada inferiormente, basta lembrar que $L(1/x) = -L(x)$. Dado qualquer número real a, como vimos acima, podemos achar $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > -\alpha$. Então, pondo $y = 1/x$, teremos $L(y) = -L(x) < \alpha$.

□

Observação 2.1.

- *Uma função logarítmica L não poderia estar definida para $x = 0$. Com efeito, se tal fosse o caso, para todo $x \geq 0$ teríamos*

$$L(0) = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0) \Rightarrow L(x) = 0.$$

  Assim, L seria identicamente nula, contrariando a propriedade a).

- *Também não é possível estender satisfatoriamente o domínio de uma função logarítmica de modo que $L(x)$ seja um número real, definido para todo $x < 0$.*

Se $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica e c é uma constante positiva arbitrária, então a função $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $M(x) = c \cdot L(x)$, é também uma função logarítmica.

Teorema 2.1. *Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$.*

Demonstração. Suponhamos que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Provaremos, que $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$.

Sendo $L(a) = M(a)$ então $L(a^r) = M(a^r)$ para todo r racional.

De fato,

$$L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r).$$

Suponhamos, por absurdo, que existe algum $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Seja $L(b) < M(b)$ e n um natural tão grande que

$$n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a).$$

Então

$$L(a^{1/n}) = L(a)/n < M(b) - L(b).$$

Escrevamos $c = L(a^{1/n})$. Os números $c, 2c, 3c, \cdots$ dividem $\mathbb{R}^+$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c. Como $c < M(b) - L(b)$, pelo menos um desses números, digamos $m \cdot c$, pertence ao interior do intervalo $(L(b), M(b))$ ou seja, $L(b) < m \cdot c < M(b)$. Ora,

$$m \cdot c = m \cdot L(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/m}).$$

Então

$$L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b).$$

Como L é crescente, a primeira das desigualdades acima implica $b < a^{m/n}$.

Por outro lado, como M também é crescente, a segunda desigualdade implica $a^{m/n} < b$.

Logo $b < a^{m/n}$ e $a^{m/n} < b$ que é uma contradição. Portanto não existe b tal que $L(b) \neq M(b)$ e $M(x) = L(x)$ para todo $x > 0$.

O caso geral reduz-se ao caso particular acima.

Dadas L e M, funções logarítmicas arbitrárias, temos $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$ porque $2 > 1$. Seja $c = M(2)/L(2)$ e seja a função logarítmica $N : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $N(x) = c \cdot L(x)$. Como

$$N(2) = c \cdot L(2) = [M(2)/L(2)] \cdot L(2) = M(2),$$

segue-se do que se provou acima que $N(x) = M(x)$ para todo $x > 0$, ou seja, que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$, como queríamos demonstrar. □

Teorema 2.2. *Toda função logarítmica L é sobrejetiva.*

Demonstração. Veja [7] □

Observação 2.2. *Segue da propriedade 2.1 e do teorema 2.2, que toda função logarítmica é bijetora.*

Observação 2.3. *Segue da observação 2.2 que, dada a função logarítmica* $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *existe um único número* $a > 0$ *tal que* $L(a) = 1$. *Este número é chamado a base do sistema de logaritmos* L.

Logaritmos Naturais

Existe uma relação estreita entre a área definida por uma hipérbole no plano cartesiano e os logaritmos. A concepção geométrica de uma função logarítmica é uma idéia antiga, com mais de 3 séculos e meio de existência. Para falarmos de logaritmos naturais, primeiro faremos uma exposição a respeito da área de uma "faixa de hipérbole para" depois então definirmos os logaritmos naturais.

Abordagem Geométrica do Conceito de Logaritmo

Seja

$$H = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right); x > 0\right\}.$$

o ramo positivo do gráfico da função $y = 1/x$. H é o gráfico da função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{1}{x}$.

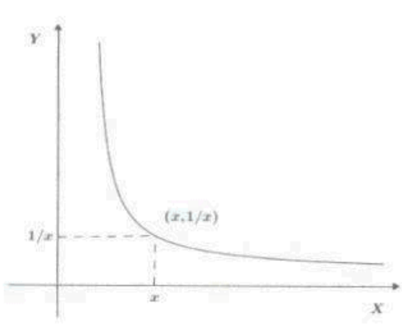

Figura 2.1: H é o ramo da hipérbole $xy = 1$

Uma faixa de hipérbole é obtida quando fixamos dois números reais positivos a, b, com $a < b$, e tomamos a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abcissas, e pela hipérbole H.

A faixa H_a^b é dada por

$$H_a^b = \left\{(x, y);\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le \frac{1}{x}\right\}$$

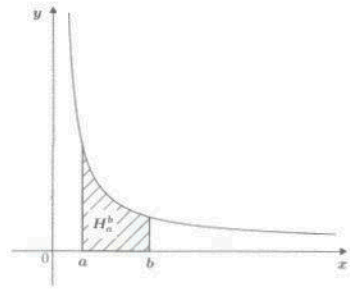

Figura 2.2: A região hachurada é a faixa H_a^b

Para cada número real $k > 0$, definimos a transformação

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \left(kx, \frac{y}{k}\right) \end{array}$$

T transforma toda figura F do plano numa figura $G = T(F)$ cujas as dimensões em relação a F são alteradas pelo o fator k na horizontal e $1/k$ na vertical. Logo F e G tem a mesma área.

A transformação $T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva a faixa H_a^b em H_{ak}^{bk}.

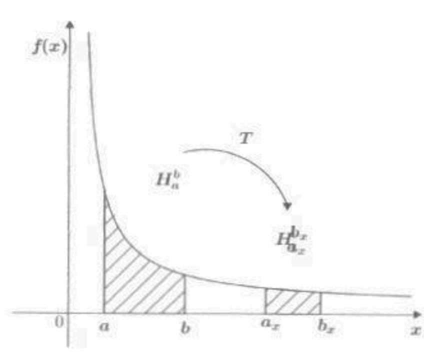

Figura 2.3: T_k leva a faixa H_a^b e H_{ak}^{bk}

Como T preserva áreas, segue-se que, para todo $k > 0$ as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

Exemplo 2.1. *Consideremos as regiões, H_1^2 entre as retas $x = 1$ e $y = 2$ e H_3^6 entre as retas $x = 3$ e $x = 6$. A segunda região resulta da primeira contraindo as ordenadas pelo fator 3 e dilatando as abscissas pelo fator 3.*

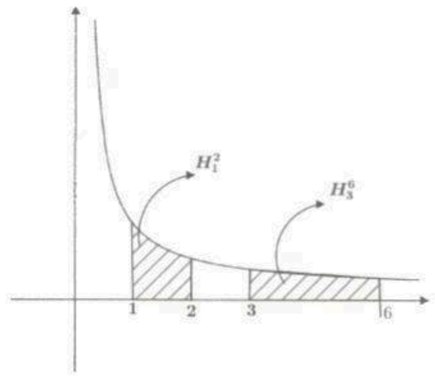

Figura 2.4: A faixa H_1^2 e H_3^6

Com efeito, esta deformação muda o ponto $(1,1)$, *em* $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ *e* $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ *em* $\left(6, \frac{1}{6}\right)$. *Então a área da região* H_1^2 *é igual à área da região* H_3^6.

Observação 2.4. *Dado um retângulo inscrito em* H, *cuja a base é o segmento* $[c,d]$ *do eixo das abcissas, o retângulo inscrito em* H *e com base no segmento* $[ck, dk]$ *tem a mesma área que o anterior.*

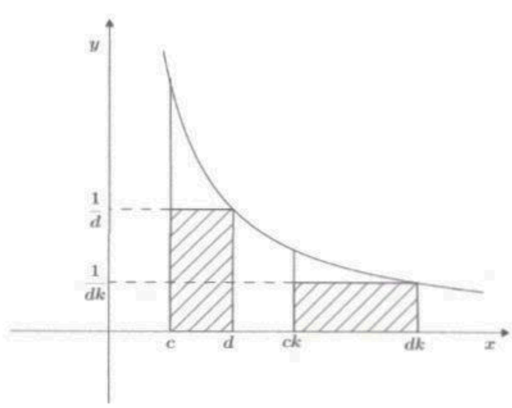

Figura 2.5: Os retângulos hachurados têm a mesma área

Com efeito, área do primeiro é igual a

$$(d-c) \times \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d},$$

enquanto a área do segundo é

$$(dk-ck) \times \frac{1}{dk} = 1 - \frac{c}{d}.$$

Consideremos um polígono retangular P, inscrito em H_a^b. Se multiplicarmos por k cada uma das abcissas dos pontos de subdivisão de $[a,b]$ determinados por P, obteremos uma subdivisão do intervalo $[ak, bk]$ e portanto um polígono retangular P', inscrito na faixa H_{ak}^{bk}.

Cada um dos retângulos que compõem P' tem a mesma área que o retângulo correspondente em P. Logo a área de P' é igual à de P.

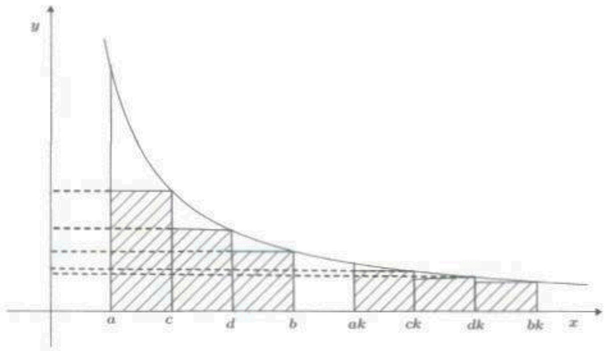

Figura 2.6:

Exemplo 2.2. *Seja a faixa H_1^3. Se tomarmos a decomposição do intervalo $[1,3]$ através dos pontos intermediários 1, 3/2, 2, 5/2, 3, obteremos um polígono retangular cuja área é igual à soma das áreas dos quatro retângulos abaixo hachurados, ou seja:*

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}.$$

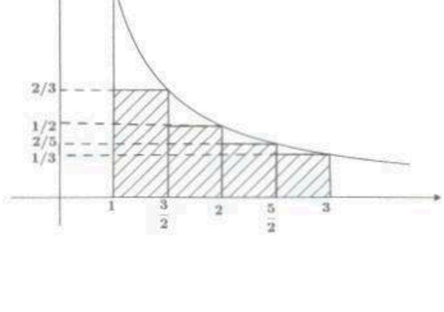

Figura 2.7: Uma aproximação para a área de H_1^3

Exemplo 2.3. *Seja a faixa H_4^{12}. Se tomarmos a decomposição do intervalo $[4, 12]$ através dos pontos intermediários 4, 6, 8, 10, 12, obteremos um polígono retangular cuja área é igual à soma das áreas dos quatro retângulos abaixo hachurados, ou seja:*

$$\left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{8}\right) + \left(2 \times \frac{1}{10}\right) + \left(2 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}.$$

No que segue, denotaremos $A(a, b) =$ área de H_a^b.

Teorema 2.3. *A área $A(a, b)$ compreendida entre a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, o eixo dos x e as verticais $x = a$ e $x = b$ (a e b positivos) tem a propriedade de que*

$$A(a, b) = A(ka, kb) \tag{2.1}$$

qualquer que seja $k > 0$.

Demonstração. Faremos a prova à maneira de somas de Riemann: Para isso considere

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

uma partição do intervalo $[a, b]$, em que todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tem comprimento igual $\frac{b-a}{n}$. Então as somas inferior e superior são dadas, respectivamente, pelos somatórios das áreas dos retângulos de base $\frac{b-a}{n}$ e alturas $\frac{1}{x_i}$ e $\frac{1}{x_{i-1}}$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_i} \leq A(a, b) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_{i-1}}. \tag{2.2}$$

Analogamente, considera-se a partição

$$ka = kx_0 < kx_1 < \cdots < kx_{i-1} < kx_i < \cdots < kx_n = kb,$$

do intervalo $[ka, kb]$, em que todos os subintervalos $kx_{i-1}, kx_i]$ tem comprimento igual $\frac{k(b-a)}{n}$. Nesse caso também, as somas inferior e superior são dadas, respectivamente, pelos somatórios das áreas dos retângulos de base $\frac{k(b-a)}{n}$ e alturas $\frac{1}{kx_i}$ e $\frac{1}{kx_{i-1}}$. Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k(b-a)}{n}\right)\left(\frac{1}{kx_i}\right) \leq A(ka, kb) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k(b-a)}{n}\right)\left(\frac{1}{kx_{i-1}}\right)$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_i} \leq A(ka, kb) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_{i-1}}. \tag{2.3}$$

Subtraindo-se, membro a membro, (2.2) de (2.3), tem-se

$$0 \leq A(a,b) - A(ka,kb) \leq 0$$

e, portanto, $A(a,b) = A(ka,kb)$. □

Uma consequência dessa propriedade é podemos restringir as considerações às áreas das faixas da forma H_1^c, pois

$$A(a,b) = A(1,b/a) = A(1,c),$$

em que $c = b/a$.

Quando $a < b < c$, tem-se $A(a,b) + A(b,c) = A(a,c)$.

Observação 2.5. *Normalmente, a área de uma figura não é um número negativo. Mas às vezes é conveniente usar áreas orientadas, ou seja, provida de sinal + ou −.*

Definimos o número:

$$L(H_a^b) = \begin{cases} A(a,b), & \text{se} \quad a < b \\ 0, & \text{se} \quad a = b \\ -A(a,b), & \text{se} \quad a > b \end{cases}$$

Note que agora para quaisquer a, b e c, temos:

$$L(H_a^b) + L(H_b^c) = L(H_a^c)$$

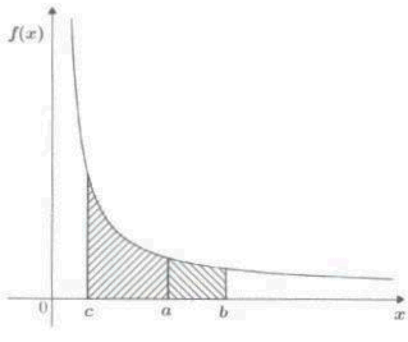

Figura 2.8: Soma de áreas

Usando a figura 2.8, temos:

$$\begin{aligned}
A(c,b) &= A(c,a) + A(a,b) \\
\Rightarrow -A(c,a) &= A(a,b) - A(c,b) \\
\Rightarrow A(a,c) &= A(a,b) + A(b,c)
\end{aligned}$$

2.1 Função Logarítmica Natural

Seja x um número real positivo. Definimos uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = A(1,x),$$

onde $A(1,x)$ é área da faixa H_1^x.

Assim,

$$f(x) = \begin{cases} A(1,x), & \text{se} \quad x \geq 1 \\ -A(1,x), & \text{se} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Por definição, quando $x > 0$, escrevemos $f(x) = \ln x$ para indicar a função logaritmo natural de x, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos.

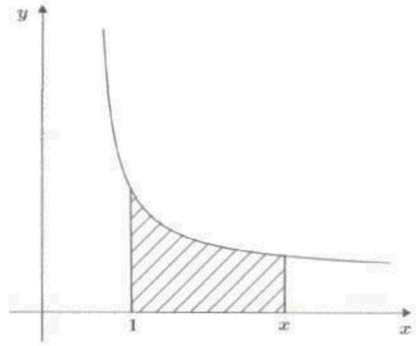

Figura 2.9: A área hachurada é igual a $\ln x$

Em particular, quando $x = 1$, H_1^1 reduz-se a um segmento de reta, portanto, tem área igual a zero. Podemos então escrever

$$\begin{aligned}
\ln x &= 0, \quad \text{se } x = 1, \\
\ln x &> 0, \quad \text{se} \quad x > 1, \\
\ln x &< 0, \quad \text{se} \quad 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

O logaritmo natural que estamos definindo é, por alguns autores, chamado logaritmo neperiano. Preferimos chamá-lo de logaritmo natural, mesmo porque o logaritmo definido por Napier tinha valores diferentes destes.

Teorema 2.4. *$ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.*

Demonstração.

a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

De fato,

$$\begin{aligned} A(1, xy) &= A(1, x) + A(x, xy) \\ &= A(1, x) + A(1, y), \quad \text{(Ver (2.1))} \end{aligned}$$

donde segue o resultado.

b) ln é uma função crescente.

De fato, suponha $x, y \in \mathbb{R}^+$, e que $x < y$. Isso significa que existe um número $a > 1$, tal que $y = ax$. Assim, $lny = lna + lny$. Como $a > 1$, temos $lna > 0$. Portanto, $lny > lnx$.

□

As seguintes regras de cálculo com logaritmos naturais (onde x, y são números reais positivos e $m \in \mathbb{N}$) resultam do teorema 2.4:

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln x + \ln y \\ \ln \frac{1}{y} &= -\ln y \\ \ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y \\ \ln(x^m) &= m. \ln x \\ \sqrt[m]{x} &= \frac{\ln x}{m}. \end{aligned}$$

A função logarítmica é crescente, ilimitada nos dois sentidos (superior e inferiormente) e sobrejetiva. O *gráfico* da função logaritmo natural é o conjunto

$$G = \{(x, \ln x);\ x > 0\}.$$

Assim, o gráfico de $\ln x$ é uma curva contida no primeiro e quarto quadrantes, a qual corta o eixo das abscissas no ponto $x = 1$ e que, quando x varia entre 0 e $+\infty$, a ordenada do ponto $(x, \ln x)$ sobre a curva cresce de $-\infty$ a $+\infty$.

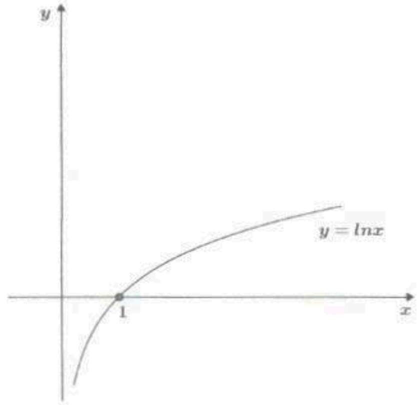

Figura 2.10:

Como as funções logarítmicas são bijetoras, existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Tal número é representado pela letra e. Ele é a *base* do sistema de logaritmos naturais.

Assim,

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Temos que $e > 1$, pois os números reais positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos. Vemos que a faixa H_1^e tem área 1. A faixa H_1^2 tem área menor que 1, enquanto que H_1^3 tem área maior do que 1. Assim, $ln2 < 1 < ln3$. Portanto, $2 < e < 3$.

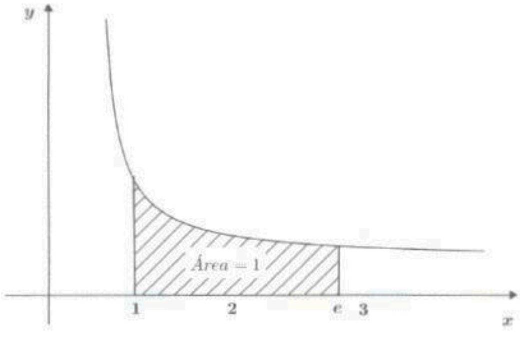

Figura 2.11: O número e

O número e é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é

$$e \approx 2,718281828459\ldots$$

Teorema 2.5. *Seja $r = p/q$ um número racional. Tem-se $y = e^r$ se, e somente se, $\ln y = r$.*

Demonstração. Se $y = e^r$, então $\ln y = r \cdot \ln e = r$, pois $\ln e = 1$.

Reciprocamente, seja $y > 0$ um número real tal que $lny = r$. Como função logarítmica é bijetora, temos o resultado.

□

Assim, pelo menos para potências de expoente racional de e, o logaritmo natural de um número é o expoente ao qual se deve elevar a base e a fim de obter esse número.

2.2 A Função Exponencial

Definição 2.2. *Dado o número real x, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x.*

A observação (2.2) assegura a existência de e^x, e sua unicidade.

Geometricamente, $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa da hipérbole H_1^y tenha área x.

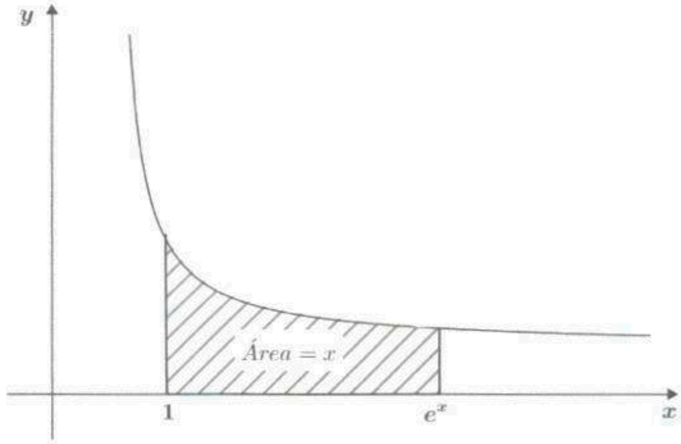

Figura 2.12:

Vê-se que $e^x > 0$ para todo x, que $e^x > 1$ quando $x > 0$, que $e^x < 1$ quando $x < 0$.

A equivalência abaixo é a definição de e^x:

$$y = e^x \iff x = lny.$$

Enquanto lnx tem sentido apenas par $x > 0$, e^x é definido para todo valor real de x.

A correspondência $x \mapsto e^x$ define uma função cujo domínio contém todos os números reais. Esta é a **função exponencial**.

A função exponencial $y = e^x$ é a função inversa da função logaritmo natural. Isto que dizer que as igualdades abaixo são válidas para todo x real e todo $y > 0$:

$$ln(e^x) = x \quad e^{lny} = y.$$

A propriedade fundamental da função exponencial é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 2.6. *Para todos os números reais, x, y, tem-se*

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

Demonstração. ln é uma função logarítmica, temos:

$$\ln(e^x \cdot e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y$$

Daí, $e^x \cdot e^y$ é o número real cujo logaritmo natural é igual a $x + y$. Assim, $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. □

Corolário 2.1. *Para todo número real x, $e^{-x} = 1/e^x$.*

Com efeito, como $e^0 = 1$, do Teorema 2.6 podemos escrever,

$$e^{-x} \cdot e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1.$$

Portanto, $e^{-x} = 1/e^x$.

Teorema 2.7. *A função exponencial $y = e^x$ é crescente e assume todos os valores positivos quando x varia entre $-\infty$ e $+\infty$.*

Demonstração.

- A função exponencial é crescente.

  De fato, sejam x, y números reais, com $x < y$. Como $x = ln(e^x)$ e $y = ln(e^y)$, não podemos ter $e^x = e^y$, pois isto acarretaria $x = y$. Nem podemos ter $e^y < e^x$ porque então seria $ln(e^y) < ln(e^x)$, ou seja, $y < x$. Assim, quando $x < y$, deve-se ter $e^x < e^y$.

- Para provar que os valores e^x incluem todos os números reais positivos, consideremos um número real qualquer $a > 0$. Tem-se $e^{lna} = a$, logo a é o valor que a função exponencial e^x assume quando $x = lna$.

$\square$

Observação 2.6. *Tem-se* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

- *Quando $x > 0$, a faixa de hipérbole $H_1^{e^x}$, cuja área vale x, está contida no retângulo de altura 1, com base no segmento $[1, e^x]$. A área deste retângulo vale $e^x - 1$. Segue-se que $x < e - 1$, ou seja $e^x > 1 + x$, para todo $x > 0$. Portanto,* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

- *Escreveremos $y = -x$. Então:* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{y \to \infty} e^{-y} = \lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{1}{e^y} = 0$, *pois quando e^y cresce infinitamente, seu inverso $\frac{1}{e^y}$ deve tender para zero.*

O *gráfico* da função exponencial é o conjunto

$$E = \{(x, y); y = e^x\}$$

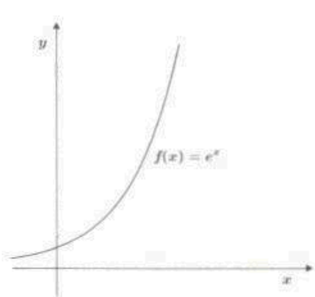

Figura 2.13: Gráfico da função e^x

Além disso, como a exponencial é a inversa do logaritmo, seu gráfico é obtido pela reflexão do gráfico do logaritmo em torno da reta $y = x$.

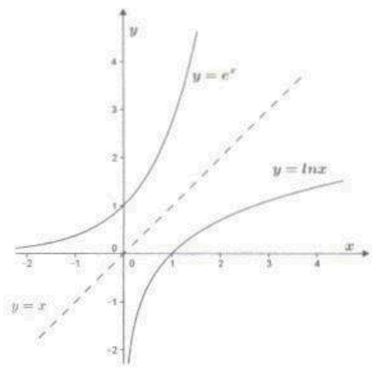

Figura 2.14:

Capítulo 3

Equações Diferenciais

Neste capítulo serão tratadas as equações diferenciais que são usadas para fazermos a conexão entre taxa de variação instantânea e vários problemas na natureza. As referências utilizadas para os estudos realizado neste capítulo são [4], [6], [7], e [10].

Derivadas

Vamos imaginar que o gráfico da função $y = f(x)$ seja o representado abaixo. Marcaremos nesse gráfico os pontos do domínio p e x, com os respectivos valores da função $f(p)$ e $f(x)$.

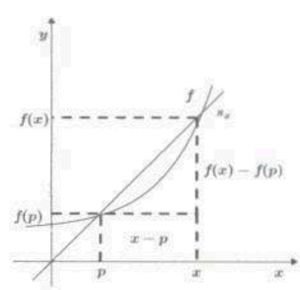

Figura 3.1:

A taxa de variação média no intervalo $[p, x]$ é definida pelo o quociente

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Chamamos taxa de variação instantânea no ponto de abscissa $p \in D_f$ ao limite (quando existe)

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

A taxa de variação média (instantânea) também se designa por velocidade média (instantânea) ou taxa de crescimento média (instantânea), consoante o contexto em que se aplica.

Definição 3.1. *Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio.*

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

quando existe e é finito, denomina-se **derivada** *de f em p e indica-se por $f'(p)$.*

Observação 3.1. *Segue das propriedade de limites que*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Assim,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Interpretação Geométrica da Derivada

Como a derivada é uma taxa de variação instantânea, a reta que era secante à curva na taxa de variação média passa a ser tangente à curva no ponto considerado pois, quando x vai se aproximando de p, os dois pontos da secante tendem a tornar-se um único ponto da curva.

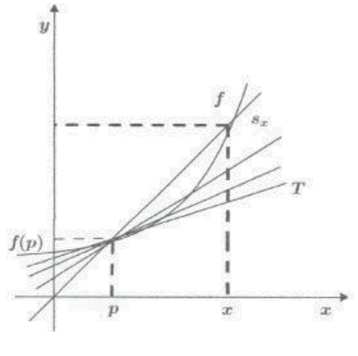

Figura 3.2:

3.1 Equação diferencial ordinária (EDO)

Definição 3.2. *Chama-se* **equação diferencial** *a uma equação envolvendo uma função desconhecida (função incógnita), com uma ou mais variáveis independentes, e suas derivadas.*

Exemplo 3.1.

a) $\frac{dy}{dx} = 3e^x - 5xy$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 6e^{5x}$

c) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \cos x$

d) $y' = y$

e) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = z + x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^4$

f) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

Classificação de equações diferenciais

Uma equação diferencial pode ser **ordinária** ou **parcial**.

a) Chama-se **equação diferencial ordinária** a toda equação diferencial cuja função incógnita possui apenas uma variável independente.

b) Chama-se **equação diferencial parcial** a toda equação diferencial cuja função incógnita possui duas ou mais variáveis independentes.

As equações a, b, c e d do Exemplo 3.1 são equações diferenciais ordinárias e as equações e e f são equações diferenciais parciais.

Ordem de uma equação diferencial

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem maior das derivadas que aparecem na equação diferencial.

As equações a), d) e e) do Exemplo 3.1 são de primeira ordem, já os exemplos b), c) e f) são de segunda ordem.

Neste trabalho usaremos apenas as Equações Diferenciais Ordinárias(EDO).

Solução

Chama-se **solução** de uma equação diferencial (num domínio D) a toda a função que satisfaz a equação diferencial em D.

As soluções podem ser: solução geral ou particular.

- Chama-se **solução geral** de uma equação diferencial a qualquer família de soluções da equação.

- Chama-se **solução particular** de uma equação diferencial a toda a solução obtida de uma solução geral dessa equação, atribuindo valores às constantes arbitrárias.

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a relação

$$y' = f(x, y)$$

é chamada de **Equação Diferencial Ordinária (EDO)** de primeira ordem.

Um problema de valor inicial (PVI) é constituído pela a equação diferencial e por uma condição inicial $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ e é denotado por:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Geometricamente, resolver (3.1) consiste em determinar um intervalo I, contendo x_0 e uma função y que satisfaz $y' = f(x, y(x))$, $\forall x \in I$ que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

As Equações Diferenciais que nos interessam neste trabalho são as equações de primeira ordem nas quais a variável independente não aparece explicitamente.

Definição 3.3. *Uma EDO de* 1^a *ordem é dita autônoma se não envolve explicitamente a variável independente. As EDO autônomas de* 1^a *ordem são as da forma*

$$y' = f(y) \tag{3.2}$$

onde f *é uma função de uma variável.*

Equações autônomas são úteis para determinar o crescimento ou declínio populacional de uma dada espécie e os seus pontos críticos, localizados nos zeros de $f(y)$. Nestes pontos, $\frac{dy}{dx} = 0$, ou seja, a taxa de variação da população se anula. Assim, se a população, em algum momento, atinge algum dos valores críticos, a partir daí ela permanecerá constante. Dizemos que a população atingiu o equilíbrio.

Existência e unicidade da solução

Três perguntas importantes sobre soluções para EDO.

1. Dada uma equação diferencial, será que ela tem solução?
2. Se tiver solução, será esta solução é única?
3. Existe uma solução que satisfaz a alguma condição especial?

Para responder a estas perguntas, existe o Teorema de Existência e Unicidade de Solução, cuja a demonstração pode ser encontrada, por exemplo, na referência [9].

Teorema 3.1. *(Teorema de Existência e Unicidade)*

Suponha que $f(x,y)$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ são funções contínuas em uma região retangular

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$$

contendo (x_0, y_0). Então nessas condições, existe uma única função $y(t)$ definida num intervalo I contendo x_0, que é solução de (PVI).

O intervalo onde existe a solução única pode ser maior ou menor que o intervalo onde a função f e a sua derivada parcial $\partial f/\partial y$ são contínuas (o teorema não permite determinar o tamanho do intervalo).

As condições do teorema de são condições suficientes, mas não necessárias para a existência de solução única. Quando f ou a sua derivada parcial $\partial f/\partial y$ não sejam contínuas, o teorema não nos permite concluir nada: provavelmente existe solução única a pesar das duas condições não se verificarem.

3.2 Equação diferencial de primeira ordem para a função exponencial

O caso mais simples em que a taxa de variação de uma grandeza em relação a uma variável depende da própria grandeza é o caso do **crescimento exponencial**.

A função exponencial $y = e^x$ é igual à sua derivada e o mesmo sucede à função $y = Ce^x$, em que C é uma constante real.

Vamos mostrar que são as únicas funções com essa propriedade.

Teorema 3.2. *Se $f(x)$ é solução da equação*

$$y' = y \tag{3.3}$$

então

$$f(x) = Ce^x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Por derivação verifica-se que, para $C \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = Ce^x$ satisfaz (3.3). Suponhamos que g é outra função tal que $g'(x) = g(x)$. Queremos provar que g é da forma $g(x) = Ce^x$, para $C \in \mathbb{R}$, ou, o que é o mesmo, que $g(x)e^{-x} = C$. Definimos uma nova função $h(x) = g(x)e^{-x}$ e calculamos a sua derivada:

$$h'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = (g'(x) - g(x))e^{-x} = 0$$

Dado que a derivada é 0, a função $h(x)$ é constante, ou seja, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = C, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

o que prova que $g(x) = Ce^x$. □

O problema de valores iniciais associado à equação $y' = y$, com a condição $y(0) = b$; sendo b constante real, tem solução única:

Corolário 3.1. *Se $b \in \mathbb{R}$, existe uma e uma só função f que satisfaz simultaneamente a equação diferencial (3.2) e a condição inicial*

$$y(0) = b. \tag{3.4}$$

Essa função é definida por

$$f(x) = be^x. \tag{3.5}$$

Demonstração. Por derivação e substituição, verifica-se que a função $f(x) = be^x$ satisfaz simultaneamente (3.3) e (3.4). Para ver que é a única função nessas condições suponhamos que existe outra função g tal que $g'(x) = g(x)$ e $g(0) = b$. Pelo teorema 3.2 sabemos que g é da forma $g(x) = Ce^x$. Mas $g(0) = b \Rightarrow C = b$ e $g(x) = be^x$. □

De forma completamente análoga se prova que a solução geral da equação diferencial

$$y' = ky$$

sendo k uma constante real, é da forma

$$y' = Ce^{kx}, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Se, além disso, considerarmos a condição inicial

$$y(0) = b,$$

a solução tem a forma

$$y = be^{kx}.$$

Exemplo 3.2. *Consideremos uma população cuja taxa de crescimento é proporcional ao seu tamanho. Então, se P representar o número de indivíduos da população e k a constante de proporcionalidade, a taxa de crescimento é dada por*

$$P'(t) = kP(t)$$

ou, em outra notação e omitindo a dependência de t na função P,

$$\frac{dP}{dt} = kP. \tag{3.6}$$

Notemos que, uma vez que se trata de uma população, $P(t) > 0$, para todo o instante t.

Para saber qual o comportamento da população à medida que o tempo aumenta, consideremos dois casos.

- *Caso $k > 0$:*

  Neste caso, $P'(t) > 0$, para todo o instante t, o que significa que a população está sempre a aumentar, a partir de um valor inicial $P(0) = P_0$. Além disso, à medida que a população $P(t)$ aumenta, a sua taxa de crescimento também aumenta.

- *Caso $k < 0$:*

  Neste caso, $P'(t) < 0$, para todo o instante t, o que significa que a população está sempre a decrescer, a partir de um valor inicial $P(0) = P_0$. Além disso, à medida que a população $P(t)$ aumenta, a sua taxa de crescimento diminui.

O modelo de crescimento exponencial é também chamado modelo de Malthus. Apresentado em 1798 por Thomas Robert Malthus (1766-1834), a equação foi o primeiro modelo do crescimento de uma população humana, onde a constante de proporcionalidade é dada pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.

O modelo de Malthus descreve o crescimento de uma população em condições ideais mas não nos podemos esquecer que, por exemplo, o ambiente tem recursos limitados o que faz com que a população não possa crescer indefinidamente. Muitas populações começam por crescer exponencialmente mas o nível da população começa a estabilizar quando ela se aproxima da sua capacidade de suporte S (ou a diminuir em relação a S, se ela exceder o valor de S)

3.3 Crescimento e Decaimento Exponencial

Vimos que um modelo para o crescimento exponencial pode ser dado por

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad k \in \mathbb{R} \text{ (constante)}, \tag{3.7}$$

onde $y(t)$ é o valor de uma quantidade y no tempo t. Neste modelo supõe-se que a taxa de variação de y em relação a t é proporcional a y. A esta lei chama-se lei de crescimento natural ($k > 0$) ou lei de decaimento natural ($k < 0$).

Esta EDO de primeira ordem pode ser resolvida por integração direta:

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt \Rightarrow \ln|y| = kt + C \Rightarrow |y| = e^{kt+C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Então

$$y(t) = Ae^{kt}, \qquad A = \pm e^C$$

Uma condição inicial determina o valor da constante A, $A = y(0) =: y_0$, de modo que a única solução da EDO é

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Vejamos, agora, qual o significado da constante de proporcionalidade k. Temos que

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow k = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}.$$

Assim, k representa a taxa de crescimento (decaimento) relativa, isto é, a taxa de crescimento (decaimento) dividida pelo tamanho da população. Podemos então dizer que, no modelo exponencial a taxa de crescimento (decaimento) relativa é constante.

3.4 Modelos Exponenciais

Alguns exemplos de aplicação das funções exponenciais são:

Desintegração Radioativa

O processo de desintegração radioativa é aquele no qual os átomos de uma substância (como rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui(aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto é feito de tal maneira que, num determinando instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo é proporcional à quantidade de substância presente naquele momento. A constante de proporcionalidade, que é uma medida da velocidade na qual determinada substância é decomposta com o passar do tempo, é determinada experimentalmente, pois essa constante varia de substância para substância, e de isótopo para isótopo.

Consideremos um corpo de massa M_0 formado por uma substância radioativa cuja a taxa de desintegração é k. Num instante t qualquer, a massa da substância será de

$$M(t) = M_0 e^{-kt} (k > 0).$$

Para cada unidade de tempo considerada a constante k é alterada proporcionalmente. Na prática a constante k fica determinada a partir de um número básico chamado de **meia- vida** da substância.

Definição 3.4. *A* **meia- vida** *de uma substância radioativa é o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância.*

Substância	**Meia Vida**
Polônio 218	2 min 45 seg
Polônio 218	1,64 $\times 10^{-4}$ seg
Urânio(isótopos)	da ordem de 10^9 anos
Carbona 14	5570 anos

Se sabemos que certo elemento radioativo tem meia-vida igual a t_0 unidades de tempo, isto significa que uma unidade de massa desse elemento se reduz à metade no tempo t_0. Assim,

$$\frac{1}{2} = e^{-k \cdot t_0} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -kt_0 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{t_0}.$$

Isto nos mostra como calcular a taxa e desintegração k quando se conhece a meia-vida t_0. Reciprocamente, tem-se $t_0 = \frac{\ln 2}{k}$, o que permite calcular a meia-vida t_0 em função da taxa k.

O método do carbono 14

O método do Carbono 14 representa mais um modelo de funções exponenciais, mas antes é importante entender o que é o método do Carbono 14, indicado por C^{14}. O Carbono 14 é um isótopo radioativo do Carbono, formado na atmosfera devido ao bombardeio da terra por raios cósmicos. Através dos tempo, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. O C^{14} é criado nos vegetais durante o processo da fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão, direta ou indireta, de vegetais. Quando o ser morre, a absorção cessa mas, o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira.

Para isso precisamos saber que a meia-vida do C^{14} é de 5570 anos. Segue-se daí que a constante de desintegração de C^{14} é

$$k = \frac{\ln 2}{5570} = 0,0001244.$$

Resfriamento de um corpo

O resfriamento de um corpo possui uma situação análoga à desintegração radioativa pois, pode-se associar a esse fenômeno um modelo de decaimento exponencial. Analisando a situação temos um objeto aquecido, colocado num meio mais frio (ar ou água por exemplo), e cuja grande massa faz com que a temperatura desse meio permaneça praticamente constante, sem ser afetada pela presença do objeto mais quente. Sendo assim, a Lei do Resfriamento de Newton afirma que, nessas condições, a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com um taxa de variação proporcional a essa própria diferença.

Como no caso da desintegração radioativa, essa lei se traduz matematicamente. Chamando T_0 a temperatura no instante $t = 0$ e T_a a temperatura do ambiente (ou meio) temos que;

$$T - T_a = (T_0 - T_a)e^{-kt} \ (k > 0) \Rightarrow T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Assim, a temperatura num instante t qualquer é dada por

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

A constante k depende do material de que é constituída a superfície do objeto. A lei do resfriamento vale também (com expoente positivo) para o aquecimento de um corpo frio colocado num ambiente mais quente.

Infusão intravenosa de glicose

O corpo humano tanto produz como utiliza glicose (açúcar do sangue), geralmente a corrente sanguínea apresenta um certo "nível de equilíbrio" na quantidade de glicose, resultante destes dois processos.

Suponha que um paciente recebe uma injeção intravenosa de glicose e seja $A(t)$ a quantidade de glicose (em miligramas) acima do nível de equilibro. O corpo irá utilizar a glicose em excesso com uma taxa proporcional à quantidade em excesso.

$$A'(t) = -kA(t),$$

onde a constante k é chamada de velocidade de eliminação.

Agora suponha que o paciente recebe uma infusão contínua de glicose. Neste caso, há duas influências na quantidade de glicose em excesso no sangue: a glicose que recebe continuamente e a que o corpo elimina pelo processo metabólico.

Seja r a taxa de infusão de glicose (geralmente de 10 a 100 mg por minuto). Se o corpo não removesse qualquer quantidade de glicose, o excesso iria aumentar a uma taxa constante de r miligramas por minuto.

Tendo em conta as duas influências temos:

$$A'(t) = r - kA(t).$$

Fazendo $M = r/k$, temos

$$A'(t) = k(M - A(t)).$$

Uma solução desta equação é dada por

$$A(t) = M(1 - e^{-kt}).$$

A dinâmica de crescimento de um tumor

Experimentalmente observou-se que células de divisão de crescimento livre, tais como as células de bactérias, satisfazem o modelo de Malthus. Isto é, crescem numa razão proporcional ao volume das células de divisão naquele instante. Considere $V(t)$ o volume das células de divisão no instante t. Logo

$$\frac{dV}{dt} = kV \tag{3.8}$$

para alguma constante positiva k. Integrando (3.8) obtemos

$$\ln V = kt + c \Rightarrow V(t) = Ae^{kt}$$

Considerando $V(t_0) = V_0$, então a solução de (3.8) com essa condição inicial é

$$V(t) = V_0 e^{kt}$$

Portanto, as células de divisão de crescimento livre crescem exponencialmente com o tempo. Uma consequência importante da solução acima é que se o intervalo de tempo for de comprimento $t^* = \frac{\ln 2}{k}$, então

$$V(t^*) = V_0 e^{k(\frac{\ln 2}{k})} \Rightarrow V(t^*) = V_0 e^{\ln 2} = 2V_0.$$

ou seja, o volume da célula mantém-se dobrando para estes intervalos.

Por outro lado, tumores sólidos não crescem exponencialmente com o tempo. Quando o tumor se torna maior, o tempo de duplicação do volume total do tumor cresce continuamente.

Exemplos

Exemplo 3.3. *(A Famosa Távola Redonda do Rei Artur) Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola redonda do rei Artur, soberano que viveu no século V. Constatou-se que a massa* $M = M(t)$ *de* C^{14} *hoje existente na mesa é* $0,894$ *vezes a massa* $M(t)$ *de* C^{14} *que existe num pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa.* M_0 *é também a massa de* C^{14} *que existia na mesa quando ela foi feita, há t anos.*

Sabemos que $M = M_0 \cdot e^{-kt}$*, donde* $\frac{M}{M_0} = e^{-kt}$*. Isto significa que* $0,894 = e^{-0,0001244t}$*. Daí tiramos:*

$$t = -\frac{ln(0,894)}{0,0001244} = \frac{0,1121}{0,0001244} = 901 anos$$

Se a mesa fosse mesmo a Távola Redonda, ela deveria ter mais de 1500 *anos.*

Exemplo 3.4. *Um arqueólogo encontrou um fóssil no qual a razão entre as massas de carbono 14 e carbono 12 era 1/5 da razão observada na atmosfera. Qual a idade aproximada do fóssil?*

A idade do fóssil é o valor de t para o qual $R(t) = R_0/5$*, isto é, para o qual*

$$\frac{1}{5}R_0 = R_0 e^{-kt}$$

Dividindo por R_0 *e tomando os logaritmos de ambos os lados, temos:*

$$\frac{1}{5} = e^{-kt} \Rightarrow \ln\frac{1}{5} = -kt \Rightarrow t = \frac{-\ln\frac{1}{5}}{k} = \frac{\ln 5}{k}$$

A meia vida $\bar{t}$ *satisfaz à equação* $\bar{t} = (\ln 2)/k$*. Como o* C^{14} *tem uma meia vida* $\bar{t} = 5.730$*, temos:*

$$k = \frac{\ln 2}{\bar{t}} = \frac{\ln 2}{5.730} = 0,000121$$

Assim, a idade do fóssil é

$$t = \frac{\ln 5}{k} = \frac{\ln 5}{0,000121} \simeq 13.300$$

O fóssil tem, portanto, aproximadamente 13.300 anos de idade.

Exemplo 3.5. *Se uma xícara de café estava a uma temperatura de $95°C$ e esfriou para $85°C$ em um minuto em uma sala a $20°C$, em quanto tempo esse café atingirá a temperatura de $65°C$, sendo possível tomá-lo sem riscos de queimadura?*

Para determinar os valores de A e k devemos usar os dados fornecidos pelo problema.

Como $T(0) = 95$, temos:

$$95 = A \cdot e^{-k\cdot 0} + 20 \Rightarrow 95 = A + 20 \Rightarrow A = 75.$$

De fato, temos

$$85 = 20 + 75 \cdot e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = \frac{65}{75} = \frac{13}{15} \Rightarrow k = -\ln\left(\frac{13}{15}\right) \approx 0,1431.$$

Assim, $T(t) = 75 \cdot e^{-0,1431t} + 20$.

Fazendo $T(t) = 65$, temos

$$75e^{-0,1431t} + 20 = 65 \Rightarrow = 45 \Rightarrow e^{-0,1431t} = \frac{3}{5}.$$

Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros temos:

$$-0,1431t = \ln\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow t = \frac{0,5108}{0,1431} \Rightarrow t = 3,57min.$$

O valor $t = 3,57$ min significa é o tempo necessário para que o café mantenha o sabor sem riscos de queimaduras.

Conclusão

Neste trabalho observamos a grande importância dos logaritmos como simplificador de cálculo e como essa ferramenta matemática facilitou a vida cotidiana de vários estudiosos principalmente os astrônomos e navegadores.

Observamos que mesmo os logaritmos tendo perdido há algum tempo o papel de grande simplificador de cálculo para as máquinas calculadoras, o estudo da Função Logarítmica e suas propriedades, bem como sua função inversa a Função Exponencial é de grande importância para uma variedade de aplicações em vários fenômenos naturais, seu estudo possibilitou o uso prático no estudo das Equações Diferenciais de primeira ordem e em muito outros ramos do conhecimento.

Referências Bibliográficas

[1] APOSTOL, T. M. *Cálculo I.* v.1 2ª ed.Barcelona. Editorial Reverté S.A, 1988.

[2] ÁVILA, G. *Cálculo das funções de uma variável.* v.1 7ªed. Rio de Janeiro. Editora LTC, 2003.

[3] BOYER, C. B. *História da Matemática.* 2ª ed. São Paulo. Editora Edgard Blucher. 2004.

[4] DIACU, F. *Introdução a Equações Diferenciais Teoria e Aplicações.* Editora LTC, 2014.

[5] EVES, H. *Introdução à história da matemática.* 2ª ed. São Paulo. Editora Unicamp. 2004.

[6] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo.* 5ª ed. Rio de Janeiro. LTC. 2008.

[7] LIMA, E. L. *Logaritmos.* 5ª ed. Rio de Janeiro. Editora SBM. 2013.

[8] LIMA, E. L. *Meu professor de matemática.* 5ª ed. Rio de Janeiro. Editora SBM. 2013.

[9] SOTOMAYOR, J. M. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[10] ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem.* Tradução. São Paulo. 2003.

[11] Figura 1.1: *Jonh Napier.* Fonte: http://www.ofilosofo.com/logaritmo.htm

[12] Figura 1.2: *Jobst Bürgi.* Fonte: http://www.habsburger.net/de/kapitel/die-kunst-und-wunderkammer-rudolfs-ii