UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Clebson Huan de Freitas

O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA

Cuité-PB

2014

Clebson Huan de Freitas

O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos
Coorientadora: Márcia Cristina Silva Brito

Cuité-PB

2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

F866t Freitas, Clebson Huan de.

O teorema da aplicação inversa. / Clebson Huan de Freitas. – Cuité: CES, 2014.

35 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2014.

Orientadora: Maria Gisélia Vasconcelos.
Co-orientadora: Márcia Cristina Silva Brito.

1. Aplicação inversa. 2. Análise. 3. Geometria. I. Título.

CDU 514

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Clebson Huan de Freitas

O Teorema da Aplicação Inversa

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 10 de abril de 2014.

Banca Examinadora

M. G. Gisélia Vasconcelos
Profª. Maria Gisélia Vasconcelos
(Orientadora)

Márcia Cristina Silva Brito
Profª. Márcia Cristina Silva Brito
(Coorientadora)

Marcelo Carvalho Ferreira
Prof. Marcelo Carvalho Ferreira

A minha família, em especial a minha mãe que sempre acreditou e confiou em mim.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sempre ter estado comigo para a conclusão desse trabalho.

A minha família pelo apoio, em especial a minha mãe por sempre ter acreditado em mim.

Aos professores, em especial as professoras Gisélia Vasconcelos e Márcia Cristina pelo apoio e pela paciência. E a gentileza do professor Marcelo Carvalho Ferreira por aceitar o convite para participar da banca e por suas observações que muito contribuíram para o resultado final.

A Neilton Dantas pela sua nobre gentileza.

Enfim, aos amigos, colegas, a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão desse trabalho.

Resumo

No presente trabalho, iremos estudar um dos mais importantes resultados da Análise Matemática: o Teorema da Aplicação Inversa. Nosso objetivo é demonstra-lo e, em seguida, aplicá-lo para obter o Teorema da Função Implícita, assim como também fazer uso do Teorema da Aplicação Inversa em Álgebra e em Geometria.

Palavras-chave: Aplicação Inversa. Análise.

Abstract

In this study, we will examine one of the most important results of the mathematical analysis: the Theorem of Inverse Function. Our purpose is test it and then apply it to prove the Theorem of Implicit Function as also make use of the results in other areas of Mathematics. Keywords: Implicit Function, Inverse applications

Keywords: Inverse applications. Analysis.

Sumário

Introdução

No estudo das funções, saber quando as mesmas admitem inversa é um trabalho árduo dependendo da lei que define a aplicação. Desse modo, é essencial estudar quais características possui uma função para que ela admita inversa. Além disso, surgem outras questões, a aplicação sendo diferenciável o que sabemos da diferenciabilidade de sua inversa, caso exista?

Um resultado essencial para estes fins é o que aqui estudaremos: o Teorema da Aplicação Inversa. Esse importante teorema nos fornece ferramentas para respondermos a essas questões. Nos dá informações para sabermos a respeito da existência da sua função inversa e da diferenciabilidade da mesma. Ainda mais que isso, o Teorema afirma que a classe de diferenciabilidade que a função inversa pertence, é a mesma classe que a da função dada.

Vamos verificar, porém, que o teorema tem caráter local e não global. Para tanto, serão necessários resultados preliminares que utilizaremos para demonstrar o Teorema da Aplicação Inversa. Inicialmente reuniremos a teoria necessária até chegarmos, de fato, a demonstração do resultado.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Topologia do Espaço Euclidiano

Definição 1.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função real $|\ |: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que cumpra as seguintes condições:*

1. $| x | \geq 0$, *valendo* $|x| = 0$ *somente quando* $x = 0$.
2. $| \alpha \cdot x | = |\alpha||x|$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Segue da definição que, $|x - y| = | - (y - x)| = | - 1||(y - x)| = |y - x|$.

Há uma infinidade de normas que se podem considerar no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Porém, as normas que usualmente se consideram neste espaço são

$$
\begin{array}{ll}
|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} & \text{Norma Euclidiana} \\
|x|_M = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} & \text{Norma do Máximo} \\
|x|_s = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| & \text{Norma da Soma}
\end{array}
$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_s \leq n \cdot |x|_M$$

Transformação Linear

Definição 1.2. *Uma aplicação* $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *diz-se linear quando*

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x)+T(y) \\ T(\lambda x) &= \lambda T(x) \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^m$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Indicaremos por $T \cdot x$, em vez de $T(x)$, a imagem do vetor $x \in \mathbb{R}^m$ pela aplicação linear T.

Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ o, espaço vetorial formado pelas transformações lineares $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, sua norma $|T|$ se define naturalmente por

$$|T| = sup\{|T \cdot x|;\ x \in \mathbb{R}^m,\ |x| = 1\}.$$

Definição 1.3. *Dados o ponto* $a \in \mathbb{R}^n$ *e o número real* $r > 0$, *a* ***bola aberta*** *de centro* a *e raio* r *é o conjunto denotado e definido por*

$$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x-a| < r\}$$

Definição 1.4. *Seja* X *um subconjunto do espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$. *Um ponto* $a \in X$ *chama-se* ***ponto interior*** *a* X *quando é centro de alguma bola aberta contida em* X.

Definição 1.5. *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *chama-se* ***aberto*** *quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, quando para cada* $x \in X$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $B(x;\delta) \subset X$.

Definição 1.6. *Um ponto* $a \in \mathbb{R}^m$ *diz-se* ***aderente*** *a um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *quando é limite de uma sequência de pontos desse conjunto.*

Definição 1.7. *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *chama-se* ***fechado*** *quando contém todos seus pontos aderentes.*

Definição 1.8. *Uma aplicação* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *é* ***contínua no ponto*** $a \in X$ *quando, para cada* $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente dado, pode-se obter* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in X, \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definição 1.9. *Um **homeomorfismo** do conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ sobre um conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ é uma bijeção contínua $f : X \to Y$ cuja a inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua.*

A aplicação composta de dois homeomorfismos ainda é um homeomorfismo. A inversa de um homeomorfismo também é um homeomorfismo.

Definição 1.10. *Dado $X \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ diz-se **Lipschitziana** quando existe $k > 0$ (constante de Lipschitz de f) tal que , para quaisquer $x, y \in X$, têm-se $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.*

Toda aplicação Lipschitziana é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon/k$. Então

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq k|x - a| < k.\varepsilon/k = \varepsilon.$$

1.2 Aplicações Diferenciáveis

Definição 1.11. *A aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se **diferenciável** no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(a + h) - f(a) = T \cdot h + r(h), \quad \text{onde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Observe que, na igualdade acima, h deve ser tomado suficientemente pequeno para que $a + h \in U$ e assim $f(a + h)$ ter sentido. A expressão $f(a + h) - f(a) = T \cdot h + r(h)$ é a definição do "resto" $r(h) \in \mathbb{R}^n$.

Em alguns casos, a diferenciabilidade de f no ponto a se exprime como

$$f(a + h) - f(a) = T \cdot h + \rho(h) \cdot |h|, \quad \text{onde} \quad \lim_{h \to 0} \rho(h) = 0.$$

Esta notação é usada para evitar as exceções causadas pelo denominador zero, nesse caso o resto é posto sob a forma $r(h) = \rho(h) \cdot |h|$, onde a aplicação ρ é definida, para todo h tal que $a + h \in U$, por $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{|h|}$, se $h \neq 0$ e $\rho(0) = 0$.

Se $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in U$, então para todo $h \in \mathbb{R}^m$ e qualquer $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno tem-se

$$T \cdot h = \frac{T \cdot (th)}{t} = \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \pm \frac{r(th)}{|th|} \cdot |h|, \quad t \neq 0$$

Logo,

$$T \cdot h = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Portanto,

$$T \cdot h = \frac{\partial f}{\partial h}(a)$$

E assim, é única, a transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que fornece a boa aproximação para f na vizinhança de a. Ela é chamada *derivada* de f no ponto a, indicada por $f'(a)$ ou $Df(a)$.

Assim, a condição para a diferenciabilidade de uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ aberto) em um ponto $a \in U$ se escreve

$$f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + r(h), \quad \text{onde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$$

ou

$$f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + \rho(h) \cdot |h|, \quad \text{onde} \quad \lim_{h \to 0} \rho(h) = 0.$$

Diferenciabilidade de Transformações Lineares

Um transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em cada ponto $x \in \mathbb{R}^m$ e $T'(x) = T$. De fato, por linearidade,

$$T(x+h) = T \cdot x + T \cdot h$$

Logo, $r(h) = 0$ e $T'(x) = T$.

Inversão de Matrizes

O conjunto $GL(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, das transformações lineares invertíveis $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é aberto. De fato, $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $det(T) \neq 0$ e $det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Considere a aplicação $f : GL(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, definida por $f(X) = X^{-1}$. A expressão clássica de X^{-1} em termos de determinante mostra que f é contínua. Afirmamos que f é diferenciável em cada $X \in GL(\mathbb{R}^n)$ e e que sua derivada $f'(X) : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é a transformação linear $H \mapsto -X^{-1}HX^{-1}$.
De fato, se escrevermos

$$(X+H)^{-1} - X^{-1} = -X^{-1}HX^{-1} + r(H)$$

e multiplicarmos ambos os membros destas igualdade, à esquerda, por $X + H$, obteremos

$$I - I - HX^{-1} = -HX^{-1} - (HX^{-1})^2 + (X + H) \cdot r(H),$$

donde

$$r(H) = (X + H)^{-1}(HX^{-1})^2.$$

Observe que, como $GL(\mathbb{R}^n)$ é aberto, existe $(X + H)^{-1}$ para todo H com norma suficientemente pequena. Daí, resulta

$$|r(H)| \leq |(X + H)^{-1}| \cdot |X^{-1}|^2 \cdot |H|^2.$$

Logo

$$\lim_{H \to 0} \frac{r(H)}{|H|} = 0.$$

A Matriz Jacobiana

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $a \in U$ e $e_j = j$-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^m$. Então

$$f'(a) \cdot e_j = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^n.$$

O limite acima é a j-ésima derivada parcial de f no ponto a e é indicado por

$$f'(a) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\right)$$

Assim, a matriz canônica da transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ chamada *matriz Jacobiana* de f no ponto a, é denotada e definida por

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}$$

onde $f_1, ..., f_n : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de f.

Diz-se que f é de classe C^0 quando é contínua, e de classe C^∞ quando $f \in C^k$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$

Definição 1.12. *Dizemos que a aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ quando é diferenciável e sua derivada $f' : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é uma aplicação de classe C^{k-1}.*

A definição anterior nos diz que, quando uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^k, $k \geq 1$, todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ de suas funções coordenadas existem e são contínuas em U. Escreve-se, então $f \in C^k$.

Proposição 1.1. *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ diferenciável no ponto $a \in U$. Se a transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetiva, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \geq c|x - a|$.*

Demonstração. Veja [7] □

Definição 1.13. *Sejam U e V abertos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$. Uma bijeção $f : U \to V$ chama-se um* **difeomorfismo** *de U sobre V quando é diferenciável e sua inversa $f^{-1} : V \to U$ é também diferenciável.*

Observe que, se $f : U \to V$ é um difeomorfismo entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$, sabendo-se que $f \in C^k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ conclui-se que seu inverso $g = f^{-1} : V \to U$ é de classe C^k. Com efeito, consideremos a aplicação $Inv : GL(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ a inversão de transformações lineares, a fórmula $g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}$, mostra que a derivada $g' : V \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ pode ser escrita como $g' = (Inv) \circ f' \circ g$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "g'"] & U \arrow[r, "f'"] & GL(\mathbb{R}^m) \arrow[d, "Inv"] \\ & & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \end{tikzcd}$$

Como $Inv \in C^\infty$ e $f \in C^k$, segue que $g \in C^k$. Podemos então enunciar a

Proposição 1.2. *Seja $f : U \to V$ uma bijeção de classe C^k $(k \geq 1)$ entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$. Se a inversa $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável, então $f^{-1} \in C^k$. Diz-se então que f é um difeomorfismo de classe C^k.*

Demonstração. Veja [7] □

A inversão de matrizes é um exemplo de difeomorfismo $f : U \to V$, de classe C^∞, onde U é o conjunto das matrizes invertíveis $n \times n$. Neste caso particular, $f^{-1} = f$.

Definição 1.14. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma função $f : U \to \mathbb{R}^m$ é chamada um* ***difeomorfismo local*** *se, para cada $x \in U$, existe uma vizinhança de V_x que é aplicada difeomorficamente por f sobre uma vizinhança W_x de $f(x)$. Quando f, restrita a cada V_x, é um difeomorfismo C^k dizemos que f é um* ***difeomorfismo local de classe C^k***

Proposição 1.3 (Desigualdade do Valor Médio). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto $(a, a+h)$ e tal que sua restrição ao segmento fechado $[a, a+h] \subset U$ seja contínua. Se $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, a+h)$, então $|f(a+h) - f(a)| \leq M|h|$*

Demonstração. Veja [7] □

Capítulo 2

Teorema da Aplicação Inversa

Neste capítulo será apresentado o Teorema da Aplicação Inversa. Basearemos a demonstração do Teorema da Aplicação Inversa no *método das aproximações sucessivas*, princípio de grande utilidade para provar a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais, equações integrais, etc. As referências para os estudos aqui realizados são [5], [7], [8] e [9].

2.1 O Teorema da Aplicação Inversa

Definição 2.1. *Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$, chama-se uma* ***contração*** *quando existem $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < 1$, e normas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, relativamente às quais se tem*

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|, \ \forall \ x, y \in X.$$

Toda contração é contínua. Quando for preciso especificar a constante λ, diremos que f é uma *λ-contração.*

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto convexo. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, tal que $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ para uma certa constante λ e para todo $x \in U$. Então pela desigualdade do valor médio,

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$$

e, portanto, f é uma contração.

Definição 2.2. *Um ponto fixo de uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^m$, é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Teorema 2.1 (Teorema do Ponto Fixo para Contrações). *Sejam $F \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto fechado e $f : F \to F$ uma contração. Então f admite um único ponto fixo.*

Demonstração. Consideremos $x_0 \in F$. Defina indutivamente, a sequência $x = (x_n)$ com termos em F do seguinte modo

$$x_1 = f(x_0) \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{se} \qquad n \geq 1.$$

Desta forma, temos

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), \quad \ldots, \quad x_{n+1} = f^{n+1}(x_0), \ldots$$

e

$$|x_2 - x_1| = |f^2(x_0) - f(x_0)| \leq \lambda |f(x_0) - x_0|, \quad \text{onde} \quad \lambda \in [0,1).$$

Prova-se, então, por indução que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^n |f(x_0) - x_0|.$$

De fato, supondo por indução que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^n |f(x_0) - x_0|$$

segue que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^{n+1} |f(x_0) - x_0|.$$

Isto completa a prova por indução.

Mostremos que $x = (x_n)$ é uma sequência de Cauchy.

De fato, dados $n, p \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq \sum_{i=1}^{p} |x_{n+i} - x_{n+i-1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda^{n+i-1} |f(x_0) - x_0| \\ &\leq \lambda^n |f(x_0) - x_0| \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}$ é a série geométrica com razão $\lambda \in [0,1]$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1}$, tem-se que $\sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1}$ é menor ou igual ao limite $\dfrac{1}{1-\lambda}$ desta série geométrica.

Portanto,

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \lambda^n |f(x_0) - x_0| \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} \leq |f(x_0) - x_0| \frac{\lambda^n}{1-\lambda}.$$

Como $\lim \lambda^n = 0$, segue que, dado $\varepsilon > 0$ consegue-se tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$ impliquem

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \lambda^n |f(x_0) - x_0| \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} \leq |f(x_0) - x_0| \frac{\lambda^n}{1-\lambda} < \varepsilon$$

ou seja, provamos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^m$. Segue do fato de ser $\mathbb{R}^m$ completo que a sequência (x_n) é convergente.
Seja $y \in \mathbb{R}^m$ o limite de (x_n). Como estamos supondo que F é fechado, segue que $y \in F$.

Afirmação: y é o único ponto fixo de f.

Com efeito, como $x_{n+1} = f(x_n)$, podemos escrever $Y_n = f(x_n)$, onde $Y = (x_2, x_3, \ldots)$.
É claro que $Y_n \to y$. Donde $y = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$.
Por outro lado, por f ser contínua tem-se que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n \to \infty} x_n\Big) = f(y).$$

Portanto, pelo Teorema de unicidade de limites, segue que, $f(y) = y$.

Quanto à unicidade, se z é outro ponto fixo de f, temos que

$$|z - y| = |f(z) - f(y)| \leq \lambda |z - y|$$

o que, combinado com o fato $0 \leq \lambda < 1$, produz, $0 \leq (1-\lambda)|z - y| \leq 0$, isto é, $z = y$.

□

Para garantir que uma contração $f : X \to \mathbb{R}^m$ possui um ponto fixo $a \in X$, é essencial descobrir um subconjunto $F \subset X$ tal que $f(F) \subset F$ e F fechado em $\mathbb{R}^m$. O lema a seguir é frequentemente utilizado para este fim.

Lema 2.1. *Seja $f : X \to \mathbb{R}^m$ uma λ - contração. Se X contém a bola fechada $B[a;r]$, e $|f(a) - a| \leq (1-\lambda)r$, então f admite um ponto fixo em $B[a;r]$.*

Demonstração. Basta provar que $f(B[a;r]) \subset B[a;r]$. Seja $x \in B[a;r]$, assim

$$\begin{aligned} |x-a| \leq r \Rightarrow |f(x)-a| &\leq |f(x)-f(a)| + |f(a)-a| \leq \lambda|x-a| + (1-\lambda)r \\ &\leq \lambda r + (1-\lambda)r = r \end{aligned}$$

isto é, $|f(x) - a| \leq r$.
Portanto, $x \in B[a;r] \Rightarrow f(x) \in B[a;r]$ o que prova o lema.

□

O teorema a seguir e seu corolário, são versões não-diferenciáveis do Teorema da Aplicação Inversa e, ao mesmo tempo, constituem etapas cruciais da sua demonstração.

Teorema 2.2 (Pertubação da Identidade). *Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ uma contração definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : U \to \mathbb{R}^m$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre o conjunto aberto $f(U) \subset \mathbb{R}^m$.*

Demonstração. Temos que f é contínua, pois $f = I + \varphi$, onde I é aplicação identidade e a φ é uma contração.
Sejam $x, y \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ a constante de contração, então

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= |x+\varphi(x) - \big(y+\varphi(y)\big)| = |x-y+\varphi(x)-\varphi(y)| \\ &\geq |x-y| - |\varphi(x)-\varphi(y)| \\ &\geq |x-y| - \lambda|x-y| = (1-\lambda)|x-y|. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$|f(x) - f(y)| \geq (1-\lambda)|x-y| \tag{2.1}$$

Daí, sendo $f(x) = f(y)$ temos, substituindo em (2.1), $(1-\lambda)|x-y| \leq 0$.
Como $(1-\lambda) > 0$, pois $0 \leq \lambda < 1$, temos que $|x-y| = 0$ donde segue que $x = y$.
Portanto, f é injetiva. E assim, f é uma bijeção de U sobre $f(U)$.
Considere $f(x) = w$ e $f(y) = z$, então $x = f^{-1}(w)$ e $y = f^{-1}(z)$, substituindo em (2.1), obtemos

$$|f^{-1}(w) - f^{-1}(z)| \leq \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)|w-z|$$

isto é, f^{-1} satisfaz a condição de Lipschitz, onde $c = \frac{1}{1-\lambda}$ é a constante Lipschitziana. Como toda aplicação Lipschitziana é contínua, segue que f^{-1} é contínua. E assim, f é um homeomorfismo de U sobre $f(U)$.

Afirmação: $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto.

De fato, seja $b \in f(U)$. Então, $b = f(a) = a + \varphi(a)$ para algum $a \in U$.
Devemos mostrar que b é um ponto interior do conjunto $f(U)$, isto é, que para todo ponto suficientemente próximo de b, a equação $y = f(x)$ ou, o que é o mesmo, $y = x + \varphi(x)$, possui uma solução $x \in U$. Para isso, seja $r > 0$ tal que $B[a;r] \subset U$ e consideremos a aplicação $\xi = \xi_y : B[a;r] \to \mathbb{R}^m$, dada por $\xi(x) = y - \varphi(x)$.
Então $\xi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Como y é constante e φ uma contração, sendo $x, y \in B[a;r]$, temos

$$\begin{aligned} |\xi(x) - \xi(y)| &= |y - \varphi(x) - \big(y - \varphi(y)\big)| \\ &= |\varphi(y) - \varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(y)| \\ &\leq \lambda|x - y| \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\xi(x) - \xi(y)| \leq \lambda|x - y|, \ \forall\ x, y \in B[a;r]$$

Logo ξ é uma contração.
Assim, pelo Lema 2.1, basta que

$$|\xi(a) - a| \ \leq \ (1 - \lambda)r$$

Ou seja,

$$|y - \varphi(a) - a| \ \leq \ (1 - \lambda)r$$

Ou seja,

$$|y - f(a)| \ \leq \ (1 - \lambda)r$$

Daí, $B(b;(1 - \lambda)r) \subset f(U)$ mostrando se $f(U)$ aberto. □

Corolário 2.1 (Pertubação de um Isomorfismo). *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^m$ *aberto e* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *uma aplicação da forma* $f(x) = T(x) + \varphi(x)$, *onde* $T \in GL(\mathbb{R}^m)$ *e* $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ *satisfaz* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda|x - y|$, *com* $\lambda \cdot |T^{-1}| < 1$. *Então* f *é um homeomorfismo de* U *sobre o conjunto aberto* $f(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Demonstração. Primeiro observe que,

$$f(x) = T(x) + \varphi(x),\ \forall\, x \in U \Leftrightarrow (T^{-1} \circ f)(x) = x + (T^{-1} \circ \varphi)(x).$$

Afirmação: $T^{-1} \circ \varphi$ é uma contração.

De fato,

$$\begin{aligned} |(T^{-1} \circ \varphi)(x) - (T^{-1} \circ \varphi)(y)| &= |T^{-1}(\varphi(x) - \varphi(y))| \\ &\leq |T^{-1}||\varphi(x) - \varphi(y)| \\ &\leq \lambda|T^{-1}||x - y|,\ \forall\, x, y \in U \end{aligned}$$

Como $\lambda|T^{-1}| < 1$, vemos que $T^{-1} \circ \varphi$ é uma contração.
Logo, segue do Teorema 2.2 que $T^{-1} \circ f$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $(T^{-1} \circ f)(U)$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T^{-1}\circ f"] \arrow[dr, "f=T(T^{-1}\circ f)"'] & (T^{-1} \circ f)(U) \arrow[d, "T"] \\ & f(U) \end{tikzcd}$$

Portanto, f é um homeomorfismo do aberto U sobre o aberto $f(U)$.

□

Provaremos, a seguir, uma versão do Teorema da Aplicação Inversa, na qual a aplicação é suposta diferenciável apenas num ponto. Na versão clássica, que decorre imediatamente desta, supõe-se que a aplicação seja pelo menos de classe C^1.

Teorema 2.3 (Diferenciabilidade do Homeomorfismo Inverso). *Seja $f : U \to V$ um homeomorfismo entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$. Se f é diferenciável num ponto $a \in U$ e a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então o homeomorfismo inverso $g = f^{-1} : V \to U$ é diferenciável no ponto $b = f(a)$, com $g'(f(a)) = f'(a)^{-1}$.*

Demonstração. Sejam $a, a+v \in U$ e, escrevamos $f(a) = b$ e $f(a+v) = b+w$. Como $g = f^{-1}$, temos $g(b+w) - g(b) = a+v-a = v$ e, assim, $f(a+v) - f(a) = b+w-b = w$, ou seja,

$$v = g(b+w) - g(b) \qquad \text{e} \qquad w = f(a+v) - f(a).$$

A diferenciabilidade de f no ponto a nos fornece

$$f(a+v) - f(a) = f'(a) \cdot v + r(v), \qquad \text{onde} \qquad \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Daí,

$$w = f'(a) \cdot v + r(v).$$

Para provar que $f'(a)^{-1}$ é a derivada de g no ponto b, escrevamos

$$g(b+w) - g(b) = f'(a)^{-1} \cdot w + s(w) \tag{2.2}$$

e mostremos que $\lim_{w \to 0} \dfrac{s(w)}{|w|} = 0$.

Substituindo as expressões de v e w acima obtidas na equação (2.2), temos

$$\begin{aligned} v = f'(a)^{-1}[f'(a) \cdot v + r(v)] + s(w) &= f'(a)^{-1}(f'(a) \cdot v) + f'(a)^{-1} \cdot r(v) + s(w) \\ &= (f'(a)^{-1} f'(a)) \cdot v + f'(a)^{-1} \cdot r(v) + s(w) \\ &= I \cdot v + f'(a)^{-1} \cdot r(v) + s(w) \\ &= v + f'(a)^{-1} \cdot r(v) + s(w) \end{aligned}$$

isto é,

$$f'(a)^{-1} \cdot r(v) + s(w) = 0$$

donde,

$$s(w) = -f'(a)^{-1} \cdot r(v) \qquad \text{e} \qquad \frac{s(w)}{|w|} = -f'(a)^{-1} \cdot \frac{r(v)}{|v|} \cdot \frac{|v|}{|w|}.$$

A continuidade de g garante que quando $w \to 0$ tem-se $v \to 0$.

De fato, como vimos $v = g(b+w) - g(b)$. Daí, como g é contínua

$$\begin{aligned} \lim_{w \to 0} v &= \lim_{w \to 0} \Big[g(b+w) - g(b) \Big] \\ &= g(b) - g(b) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $\lim\limits_{w \to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$.

Além disso, pela Proposição 1.1, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $|v| < \delta$ implica

$$|f(a+v) - f(a)| \geq c|v|, \quad \text{portanto} \quad \frac{|v|}{|w|} = \frac{|v|}{|f(a+v) - f(a)|} \leq \frac{1}{c}.$$

Como a transformação linear $f'(a)^{-1}$ é contínua e se anula na origem, segue-se da expressão

$$\frac{s(w)}{|w|} = -f'(a)^{-1} \cdot \frac{r(v)}{|v|} \cdot \frac{|v|}{|w|}.$$

que $\lim\limits_{w \to 0} \dfrac{s(w)}{|w|} = 0$.

Portanto, g é diferenciável no ponto b e $g'(b) = f'(a)^{-1}$.

$\square$

Corolário 2.2. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^m$. Se uma aplicação $f : U \to V$ é um homeomorfismo de classe C^k cuja derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível para todo $x \in U$, então seu inverso $g = f^{-1} : V \to U$ é de classe C^k.*

Enunciaremos a seguir, um dos mais importantes resultados da Análise Matemática, o Teorema da Aplicação Inversa. Nosso objetivo nesse trabalho é prová-lo e para tanto, já temos todas as ferramentas que precisamos. Sendo assim, vamos ao

Teorema 2.4 (Teorema da Aplicação Inversa). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ tal que, em um ponto $a \in U$, $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo. Então f é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança V de a sobre uma vizinhança W de $f(a)$.*

Demonstração. O que fizemos anteriormente foi encontrar cada peça para depois juntá-las e, assim, provar esse resultado.

Com efeito, escrevamos

$$f(x+a) - f(a) = f'(a) \cdot x + r(x).$$

Supondo $a = f(a) = 0$, que não restringe a generalidade, vem

$$f(x) = f'(0) \cdot x + r(x),$$

onde $r(x) = f(x) - f'(0) \cdot x$ é de classe C^k, pois f e a aplicação identidade $I(x) = x$ são ambas de classe C^k e $r'(0) = 0$.

Seja λ tal que $0 < \lambda < \frac{1}{|f'(0)^{-1}|}$.

Assim, como r' é contínua em U, em particular em $x = 0$, existe uma bola aberta V em torno da origem tal que, para $x \in V$ tem-se

$$|r'(x) - r'(0)| < \lambda$$

donde,

$$|r'(x)| < \lambda.$$

Daí, pela desigualdade do valor médio,

$$|r(x) - r(y)| \leq \lambda |x - y|,$$

para todos os $x, y \in V$.

Pelo corolário anterior, f restrita a V é um homeomorfismo de V sobre um aberto W que contém $f(a)$.

Além disso, como $f \in C^k$, a aplicação derivada

$$f' : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$$

é contínua.

Como o conjunto $GL(\mathbb{R}^m)$ dos isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^m$ é aberto e como $GL(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, em particular, $GL(\mathbb{R}^m)$ é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.

Daí e como $f'(a) \in GL(\mathbb{R}^m)$, devido f' ser contínua para todo $x \in U$, em particular em a, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f'(x) - f'(a)| < \varepsilon$$

de modo que $B(f'(a); \varepsilon) \subset GL(\mathbb{R}^m)$ ou seja, $f'(x) \in GL(\mathbb{R}^m)$ para todo $x \in V$. Segue que a bola V de centro a pode ser tomada, se necessário, tão pequena que $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ seja ainda um isomorfismo para todo $x \in V$.

Pelo Teorema da Diferenciabilidade do Homeomorfismo Inverso, $f^{-1} : W \to V$ é diferenciável em todos os pontos de W, logo f é um difeomorfismo.

Finalmente, pela proposição 1.2, segue que $f^{-1} \in C^k$.

$\square$

Exemplo 2.1. *A aplicação* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por* $f(x,y) = e^x(\cos y, \operatorname{sen} y)$ *é de classe* C^∞.

Em termos de variável complexa, $f(z) = e^z$.

Para todo $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$*, a derivada* $f'(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é um isomorfismo, que consiste na multiplicação pelo número complexo não-nulo* e^z.

A matriz jacobiana de f *no ponto* $z = (x,y)$ *tem a forma*

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

O determinante jacobiano de f *é* e^{2x} *que é* $\neq 0$.

No entanto, f *não é injetiva*

$$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Leftrightarrow e^{x_1}(\cos y_1, \operatorname{sen} y_1) = e^{x_2}(\cos y_2, \operatorname{sen} y_2),$$

donde

$$\begin{cases} e^{x_1} \cos y_1 = e^{x_2} \cos y_2 \\ e^{x_1} \operatorname{sen} y_1 = e^{x_2} \operatorname{sen} y_2 \end{cases}$$

E portanto, $x_1 = x_2$ *e* $y_2 = y_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Geometricamente, f *transforma cada reta vertical* $x = a$ *sobre o círculo de raio* e^a *e centro na origem, com período* 2π*. Cada reta horizontal* $y = b$ *é levada bijetivamente sobre a semi-reta aberta que parte da origem e passa pelo ponto* $(\cos b, \operatorname{sen} b) \in \mathbb{R}^2$*. Temos* $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

No exemplo anterior, f satisfaz as condições do teorema da aplicação inversa. Porém, f não é injetiva globalmente. Mas, pelo teorema, f é injetiva localmente, mais que isso, f é um difeomorfismo local.

Capítulo 3

Aplicações

O Teorema da Aplicação Inversa e suas consequências encontram naturalmente aplicações em diversos ramos da matemática. Demonstraremos aqui como aplicações do Teorema da Aplicação Inversa, o Teorema da Função Implícita, o Teorema Fundamental da Álgebra e que a Imagem Inversa de um Valor Regular é uma Superfície Regular. As referências para os estudos aqui realizados são [1], [2], [5] e [7].

Teorema da Função Implícita

Definição 3.1. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dados os intervalos abertos $I, J \subset \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, dizemos que uma função $g : I \to J$ é **fortemente definida implicitamente** pela equação $f(x, y) = c$ se*

1. *$f(x, g(x)) = c$ para todo $x \in I$;*

2. *o retângulo simples aberto $R = I \times J$ intercepta $f^{-1}(c)$ apenas em pontos do gráfico de g, isto é, $(I \times J) \cap f^{-1}(c) = G(g)$.*

Teorema 3.1 (Função Implícita). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto D. Sejam $x_0 = (a, b) \in D$ e $c = f(a, b)$. Se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, então existem intervalos abertos I e J, $a \in I$, $b \in J$ e uma função de classe C^1, $g : I \to J$ tal que*

1. *$g(a) = b$;*

2. *g é fortemente definida por $f(x, y) = c$;*

3. $g'(a) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)/\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b).$

Demonstração. No intuito de usar o teorema da função inversa, vamos introduzir a seguinte função

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & h(x,y) = (x, f(x,y)). \end{array}$$

É claro que h é de classe C^1, $h(a,b) = (a,c)$ e que sua matriz jacobiana em x_0 é dada por

$$Jh(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$$

cujo o determinante é $det Jh(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Logo, $h'(x_0)$ é um isomorfismo e, portanto, pelo teorema da função inversa: existe $\delta_0 > 0$ tal que $h(B(x_0, \delta_0))$ é aberto e $h : B(x_0, \delta_0) \to h(B(x_0, \delta_0))$ é um difeomorfismo de classe C^1. Seja

$$R = (a - \delta_1, a + \delta_1) \times (b - \delta_1, b + \delta_1), \delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_0$$

o retângulo simples aberto inscrito em $B(x_0, \delta_0)$. Temos que $W = h(R)$ é aberto e $h : R \to W$ é um difeomorfismo de classe C^1. Seja

$$\begin{array}{rccc} h^{-1}: & W & \to & R \\ & (u,v) & \longmapsto & h^{-1}(u,v) = (p(u,v), q(u,v)), \end{array}$$

o difeomorfismo inverso de h, o qual, é também, de classe C^1. Temos que $(h \circ h^{-1})(u,v) = (u,v)$ e, por outro lado,

$$(h \circ h^{-1})(u,v) = (u,v) = h(h^{-1}(u,v)) = h(p(u,v), q(u,v)) = (p(u,v), f(p(u,v), q(u,v))).$$

Logo,

$$p(u,v) = u \quad e \quad v = f(u, q(u,v)) \quad \forall (u,v) \in W.$$

Donde, fazendo $v = c$, $c = f(u, q(u,c))$, sempre que $(u,c) \in W$. Assim, fazemos a seguinte construção $g : g(x) = q(x,c)$, x variando em algum intervalo aberto $I \ni a$. Vejamos como construir I. Como W é aberto, existe $\delta_2 > 0$ tal que $B(y_0, \delta_2) \subset W$, onde $y_0 = h(x_0) = (a,c)$. Logo, $V = h^{-1}(B(y_0, \delta_2)) \subset R$ é um aberto cuja projeção no eixo-x coincide com o intervalo aberto $(a-\delta_2, a+\delta_2) \subset (a-\delta_1, a+\delta_1)$. Agora definimos $I = (a-\delta_2, a+\delta_2)$, $J = (b-\delta_1, b+\delta_1)$ e

$$\begin{aligned} g: \; I &\rightarrow J \\ x &\longmapsto g(x) = q(x,c) \end{aligned}$$

Temos que $(x,c) \in W$, se $x \in I$. Logo, $f(x, g(x)) = c$, o que mostra que g está definida implicitamente por $f(x,y) = c$. Falta verificar que $(I \times J) \cap f^{-1}(c)$ é o gráfico de g. De, $f(x,g(x)) = c$, $x \in I$, segue-se que $G(g) \subset (I \times J) \cap f^{-1}(c)$. Para a inclusão contrária, seja $(x,y) \in (I \times J) \cap f^{-1}(c)$. Isto implica que $f(x,y) = c$, $x \in I$ e $y \in J$. Logo, $h(x,y) = (x,c) \in W$ e, portanto, $h^{-1}(x,c) = (x, q(x,c)) = (x,y)$. Donde, $y = q(x,c) = g(x)$ e $(x,y) \in G(g)$. Note que, o gráfico de g é a imagem via h^{-1} do segmento de reta

$$l = \{(u,v); v = c, a - \delta_2 < u < a + \delta_2\}.$$

Como q é de classe C^1, vem que g é de classe C^1. A regra da cadeia agora dá que

$$0 = \frac{\mathrm{d}f(x,g(x))}{\mathrm{d}x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x)).$$

Logo, em $x = a$,

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)},$$

e está completa a prova.

$\square$

Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Seja $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um polinômio complexo não-constante, $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0, n \geq 1$. Afirmamos que p é sobrejetivo. Em particular, existe $z_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $p(z_0) = 0$.*

Demonstração. Como sabemos, para cada $z \in \mathbb{R}^2$, a derivada $p'(z)$ é a transformação linear em $\mathbb{R}^2$ que consiste na multiplicação pelo número complexo

$$a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1},$$

que identificamos com $p'(z)$.

Como um polinômio não-nulo pode ter apenas um número finito de raízes, o conjunto $F = \{z \in \mathbb{R}^2; p'(z) = 0\}$ é finito, assim como $p(F)$. Em particular, $\mathbb{R}^2 - p(F)$ é conexo.

Considere a aplicação $P : \mathbb{R}^2 - p^{-1}(p(F)) \to \mathbb{R}^2 - p(F)$ definida por restrição de p.

Para cada z no domínio de P, tem-se $z \notin F$. Assim $P'(z) = p'(z)$ é um complexo não-nulo e portanto $P'(z)$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Funçao Inversa, P é uma aplicação aberta. Em particular, a imagem de P é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2 - p(F)$.

Afirmação: O conjunto de valores de P é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2 - p(F)$

De fato, dada uma sequência de pontos z_n no domínio de P, com $\lim p(z_n) = w \in \mathbb{R}^2 - p(F)$, devemos mostrar que $w = p(z)$ para algum z no domínio de P. Note que, não se pode ter $z_n \to \infty$, pois se assim fosse teríamos $w = \lim p(z_n) = \infty$. Portanto, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $z_n \to z \in \mathbb{R}^2$. Então $p(z) = \lim p(z_n) = w \in \mathbb{R}^2 - p(F)$. Segue, então, que z pertence ao domínio de P.

A imagem de P é portanto aberta e fechada no conjunto conexo $\mathbb{R}^2 - p(F)$. Logo P é sobre $\mathbb{R}^2 - p(F)$. Como $p(F)$ está contido na imagem de p, segue que p é sobre $\mathbb{R}^2$. $\square$

Superfícies no Espaço Euclidiano

O Teorema da Aplicação Inversa e suas consequências encontram naturalmente aplicações na teoria das superfícies.

Definição 3.2. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma* ***superfície regular*** *se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\chi : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$ tal que*

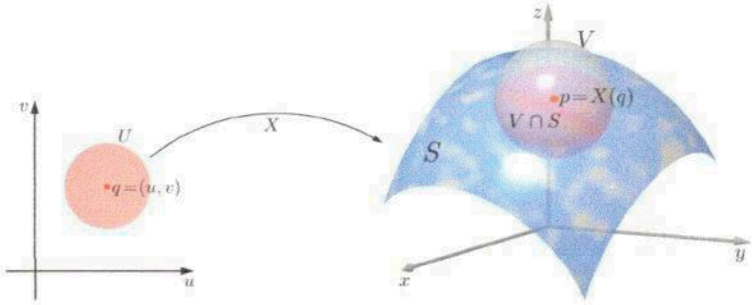
1. *χ é diferencial. Isto significa que se escrevemos*

$$\chi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in U$$

   as funções x(u,v), y(u,v), z(u,v) tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U.

2. *χ é um homeomorfismo. Como χ é contínua pela condição 1, isto significa que χ tem inversa $\chi^{-1} : V \cap S \to U$ que é contínua.*

3. *Para todo $q \in U$, a diferencial $d_{\chi_q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.*



Proposição 3.1. *Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto abeto U de $\mathbb{R}^2$, então seu gráfico, isto é*

$$graf(f) = \{(x, y, f(x,y)); (x,y) \in U\}$$

é uma superfície regular.

Demonstração. Basta mostrar que a aplicação $\chi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\chi(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico.

A condição 1 é verificada sem problemas, visto que f é uma função diferenciável. A condição 3 também não oferece dificuldade, uma vez que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv 1$.

Finalmente, cada ponto (x,y,z) do gráfico é a imagem por χ de um único ponto $(u,v) = (x,y) \in U$. Consequentemente, χ é bijetiva e como χ^{-1} é a restrição do gráfico de f da projeção, contínua, de $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy, χ^{-1} é contínua.

$\square$

Definição 3.3. *Dada $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Um ponto $p \in V$ é chamado* ***regular*** *se $\nabla f(p) \neq 0$. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um* ***valor regular*** *se $f^{-1}(\{a\})$ for diferente do vazio e contiver apenas pontos regulares.*

Portanto, $a \in f(V)$ é um valor regular de $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se, e somente se, f_x, f_y e f_z não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in V; f(x,y,z) = a\}.$$

Teorema 3.3. *Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $a \in f(U)$ é uma valor regular de f, então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Seja $p = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $f^{-1}(a)$.

Como a é um valor regular de f, podemos admitir, trocando o nome dos eixos coordenados, se necessário, que $f_z \neq 0$ em p.

Definimos uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = (x,y,f(x,y,z)),$$

e indicamos por (u,v,t) as coordenadas de um ponto do $\mathbb{R}^3$ onde F toma seus valores.

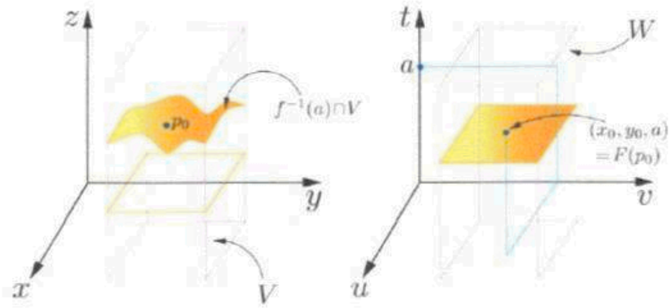
A diferencial de F em p é dada por

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

donde,

$$det(dF_p) = f_z \neq 0.$$

Nestas condições, podemos então aplicar o Teorema da Função Inversa, que garante a existência de V de p e W de $F(p)$ tais que $F : V \to W$ é inversível e a inversa $F^{-1} : W \to V$ é diferenciável.



Segue-se que as funções coordenadas de F^{-1}, isto é, as funções

$$x = u, \quad y = v, \quad \text{e} \quad , z = g(u, v, t), \quad (u, v, t) \in W,$$

são diferenciáveis.

Em particular, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ é uma função diferenciável definida na projeção de V sobre o plano xy.

Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\},$$

concluímos que o gráfico de h é $f^{-1}(a) \cap V$.

Pela proposição 3.1, $f^{-1}(a) \cap V$ é uma vizinhança coordenada e podemos concluir que $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular.

$\square$

Conclusão

Com o Teorema da Aplicação Inversa dada uma função, sob determinadas condições, no mínimo a aplicação dada tem que pertencer a classe C^1, sabemos da existência de sua inversa e, além disso, sabemos da diferenciabilidade da mesma sem mesmo conhecermos sua "cara". O teorema ainda nos da mais informações, de acordo com o que for a classe de diferenciabilidade da função dada é a mesma classe de diferenciabilidade que sua inversa pertence. Estas são as principais informações que este resultado nos fornece. Esses fatos nos fazem perceber o porque que o Teorema da Função Inversa é um dos mais importantes resultados da análise matemática, apesar de ser um resultado local e não global como constatamos.

Referências Bibliográficas

[1] CARLOS, A.; ADONAI, J. *Cálculo* vol. 1. UFAL: 2005.

[2] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção Matemática Universitária), 2012.

[3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* 3 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2002.

[4] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo* vol. 3. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

[5] LIMA, E. L. *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[6] LIMA, E. L. *Curso de Análise* vol. 1. 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[7] LIMA, E. L. *Curso de Análise* vol. 2. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[8] LIMA, E. L. *Espaços Métricos.* 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[9] SPIVAK, M. *O Cálculo em Variedades.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2003.