



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Gerivaldo Bezerra da Silva

TCC:

Séries de Fourier e Aplicações

Cuité-PB

2014

Gerivaldo Bezerra da Silva

TCC:
Séries de Fourier e Aplicações

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Célia Maria Rufino Franco

Cuité-PB

2014



Biblioteca Setorial do CES.

Julho de 2021.

Cuité - PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Msc. Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586s Silva, Gerivaldo Bezerra da.

Séries de Fourier e Aplicações. / Gerivaldo Bezerra da Silva. – Cuité: CES, 2014.

90 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCEG, 2014.

Orientadora: Célia Maria Rufino Franco.

1. Séries de Fourier. 2. Equação do Calor. 3. Equação de Laplace. I. Título.

CDU 517.95



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Gerivaldo Bezerra da Silva

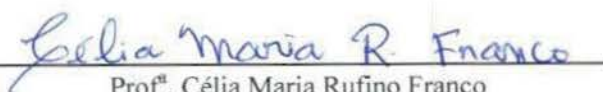
Séries de Fourier e Aplicações

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 30 de julho de 2014.

Banca Examinadora



Prof.^a Célia Maria Rufino Franco
(Orientadora)



Prof. Aluizio da Silva Júnior



Prof.^a Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus que é meu pastor e rei eterno. Pela simples compreensão, ouvidoria e auxílio nas horas de aflição, assim como nas de glória. Ele que me proporcionou conhecer as pessoas abaixo as quais agradeço:

Aos meus pais, irmãos e demais familiares pelas horas, dias e anos que comigo passaram bons e não tão bons momentos. Assim, como pelo tempo que ausente da família fiquei ao longo destes cinco anos de graduação.

Aos meus mestres professores da educação básica, pelas mãos dos quais eu passei. Em especial a E. M. E. F. Manoel Rodrigues Pinto e a E. E. E. F. M. Olavo Bilac.

A minha professora orientadora, Célia Maria Rufino Franco, com a qual simpatizei desde a primeira disciplina – Cálculo Diferencial e Integral I. Pela grande contribuição em minha vida acadêmica e pessoal e pelas boas horas de aprendizagem. Um exemplo a ser seguido: suas lutas e conquistas.

Aos meus mestres professores da UFCG/CES, por me proporcionarem não só conhecimentos, mas também valores e muitos bons momentos de amizade.

Ao meu amigo José Neto de Oliveira pelo companheirismo nesses cinco anos de convivência.

Aos meus amigos, com os quais desfrutei de bons momentos de diversão, assim como horas de estudos. Sem vocês eu sou quase metade de mim e a vida não tem tanta graça.

A todos, meu sincero obrigado!

À minha família, em especial aos meus pais: Maria
das Graças Silva e Genival Bezerra da Silva.

“Os sinais + e - modificam a quantidade diante da qual são colocados, assim como o adjetivo modifica o substantivo.”

(Cauchy)

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre as séries de Fourier e algumas de suas aplicações na condução do calor sensível em materiais sólidos. Inicialmente, fazemos uma revisão bibliográfica sobre séries de Fourier, ressaltando algumas definições, proposições e teoremas importantes; assim como alguns exemplos de funções reais seccionalmente contínuas e periódicas com suas respectivas séries de Fourier. Em seguida, abordamos alguns problemas de transferência de calor: para isso apresentamos algumas definições importantes na calorimetria e termodinâmica e depois deduzimos e resolvemos o modelo matemático da condução de calor ao longo de uma barra com condições de contorno homogêneas. Resolvemos um caso da equação do calor com condições de contorno não-homogêneas. Descrevemos a equação do calor para um caso geral no \mathbb{R}^n e sua ocorrência de transferência de calor em regime permanente (estacionário). Definimos o problema de Dirichlet para uma região qualquer no \mathbb{R}^2 e depois solucionamos o mesmo numa região retangular limitada no \mathbb{R}^2 . Podemos dizer que este trabalho sintetiza conhecimentos das equações diferenciais parciais e ordinárias presentes em modelos de grande importância e aplicação em processos que ocorre transferência de calor, como no aquecimento de peças rotativas e circuitos e na escolha de melhores isolantes e condutores térmicos em objetos.

Palavras-chave: Séries de Fourier. Equação do Calor. Equação de Laplace.

Abstract

In this work we present a study of Fourier series and some of its applications in the conduct of sensible heat in solids. Initially we review the literature on Fourier series, highlighting some definitions, propositions and theorems; as well as some examples of piecewise continuous and periodic with respective Fourier series real functions. Then, we discuss some problems of heat transfer: for this we present some important definitions in calorimetry and thermodynamics and then deduce and solve the mathematical model of heat conduction along a bar with homogeneous boundary conditions. We solved a case of the heat equation with non-homogeneous conditions outline. We describe the heat equation for a general case in \mathbb{R}^n and their occurrence of heat transfer in steady state (stationary). We define the Dirichlet problem for any region in \mathbb{R}^2 e after we solve it in a rectangular region bounded in \mathbb{R}^2 . We can say that this work synthesizes knowledge of ordinary and partial differential equations in animal models of great importance and application processes occurring heat transfer during the heating of rotating parts and circuits and in choosing the best insulation and thermal conductive objects.

Keywords: Fourier Series. Equation of Heat. Laplace Equation.

Sumário

Introdução	10
1 Séries de Fourier	14
1.1 Funções Periódicas e Convergência Uniforme	14
1.2 Ortogonalidade das Funções Seno e Cosseno	24
1.3 Série e Coeficientes de Fourier de uma Função	26
1.4 Convergência e Soma de uma Série de Fourier	31
1.5 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares	35
1.6 Desenvolvimento de Fourier em Outros Intervalos	39
2 Equação do Calor	46
2.1 Conceitos de Calorimetria	46
2.2 Equação do Calor ao Longo de uma Barra	50
2.3 Problemas de Autovalores	54
2.4 Resolução da Equação do Calor: Barra Com Extremidades a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. . .	56
2.5 Condução do Calor em Regime Estacionário	63
2.6 Resolução da Equação do Calor: Barra com Temperaturas Não-nulas nas Extremidades	64
3 Equação de Laplace	70
3.1 Equação do Calor em Dimensões Maiores	70
3.2 Equação de Laplace e Problema de Dirichlet	71
3.3 Problema de Dirichlet no Retângulo	72
Referências Bibliográficas	78

A Comandos no Mathematica 7	80
A.1 Gráficos do Exemplo 1.15	80
A.2 Gráficos do Exemplo 1.19	81
A.3 Gráficos do Exemplo 1.20	83
A.4 Gráficos do Fenômeno de Gibbs	84
A.5 Gráficos dos Exemplos 1.21 e 1.22	84
A.6 Gráficos do Exemplo 2.3	85
A.7 Gráficos do Exemplo 2.4	86
A.8 Gráficos do Exemplo 2.5	87
A.9 Gráficos do Exemplo 3.2	89

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral iniciado com os estudos de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727) possibilitou um grande avanço na literatura matemática. Conhecer taxas de variações é de fundamental importância em problemas aplicados. Por exemplo, na fabricação de novos medicamentos faz-se uso indispensável das equações diferenciais usando taxas de variações da absorção e da eliminação da droga no organismo, assim como os efeitos causados, para descobrir a dosagem e o intervalo de aplicação a serem ministrados corretamente.

As aplicações da teoria de Equações Diferenciais tem uma vasta gama que norteiam muitas áreas do conhecimento, em particular nas Ciências Exatas e da Terra. No curso de Equações Diferenciais Ordinárias estuda-se aplicações na Física (estudo de fenômenos) e na Química (estudo de reações).

As equações diferenciais possibilitam modelar vários problemas biológicos, físicos e químicos. Porém, nem sempre – ou quase nunca – problemas modelados com equações diferenciais possuem uma solução analítica ou podem ser resolvidos de maneira fácil; principalmente quando são equações diferenciais parciais. Quanto mais real o modelo matemático, mais complicado de obter a solução.

Neste trabalho estudaremos dois modelos matemáticos baseados na **Equação do Calor** e na **Equação de Laplace**, que são Equações Diferenciais Parciais (EDP) clássicas reportadas em [BOYCE, FIGUEIREDO] [1, 3]:

- 1 - Na *condução do calor* ao longo do comprimento de uma barra, a temperatura $u(x, t)$ do ponto x da barra, no instante t , deve satisfazer à equação do calor

$$u_t = ku_{xx} . \quad (1)$$

- 2 - No *equilíbrio de uma membrana*, analisada em duas dimensões – na região do plano x, y – sob a ação de certas forças obtém-se uma equação que deve satisfazer

a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (2)$$

Resolver os problemas acima consiste em obter as funções que são suas soluções. Porém, não sendo fácil de obtê-las, aplica-se o método de aproximar a solução por uma série de funções.

No estudo do Cálculo Diferencial e Integral estão presentes as séries de potências que são séries de funções, onde as funções são potências da variável independente. Isto é, a **Série de Potências de uma função f centrada em $x = a$** é uma série da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots$$

na qual o centro a e os coeficientes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ são constantes. Dentre essas séries se destacam dois tipos por se aproximarem com mais precisão da função que representam: **Séries de Taylor** – onde os c_n são da forma $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, quando a função f possui derivadas de todas as ordens num intervalo contendo a como ponto interior – e as **Séries de Maclaurin** (quando $a = 0$ na série de Taylor). Porém, uma série de potência é usada para aproximar uma função em um determinado ponto e, o erro aumenta consideravelmente quando se tenta ampliar essa aproximação para um intervalo I , como diz [BOYCE][1].

Existe outro método que também visa aproximar uma função $f(x)$ por uma série de funções e que gera boas aproximações em intervalos. O matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) em seus estudos de modelar a condução do calor em uma barra de metal foi o precursor deste método que é usado para resolver algumas equações diferenciais parciais. Este método é aplicável desde que se possa expressar uma função dada como uma série infinita de senos e cossenos. Em sua homenagem, estas séries ficaram conhecidas como **Séries de Fourier**. Não foi Fourier quem formalizou com rigor o método, mas foi o primeiro no desenvolvimento do mesmo. A Série de Fourier de uma função f é dada por [BOYCE, FIGUEIREDO] [1, 3]:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

Os dois problemas clássicos – 1 e 2 – citados anteriormente, são resolvidos com o uso das Séries de Fourier ao invés de Séries de Potências de x , visto que buscamos aproximar uma função ao longo de um intervalo e não apenas em um ponto. As Séries de Fourier devem se aproximar de funções periódicas de modo que essa aproximação seja quase que perfeita ao longo de um intervalo (que tem comprimento igual ao período da função) para uma determinada quantidade de termos da série.

O processo de resolução das equações 1 e 2, com condições iniciais e/ou condições de contorno especificadas, consiste em dois passos:

- Separar as variáveis – quebrar a equação diferencial parcial em duas equações diferenciais ordinárias – recaindo em problemas de autovalores de funções, encontrando assim famílias de soluções da equação diferencial parcial que satisfazem parte das condições
- Usar as Séries de Fourier para encontrar a solução final que satisfaz o restante das condições.

Desta forma, no decorrer deste trabalho, especificamente no capítulo 1, são apresentados resultados sobre as Séries de Fourier. Antes, porém, fazemos algumas considerações sobre definições, propriedades e teoremas a respeito de funções periódicas, função par e função ímpar, função seno e cosseno, séries de funções e convergências de séries de funções que são conhecimentos prévios necessários para a compreensão do que é a Série de Fourier de uma função f , quando esta série existe e quando representa bem tal função f (convergência). Ou seja, definir e obter a Série de Fourier de uma função f e saber quando as características de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade das funções f_n , que compõem os termos da Série de Fourier de uma função f , continuam valendo para f .

O estudo detalhado da convergência da série de Fourier de uma função não é apresentado neste trabalho, tendo em vista que o nosso objetivo é abordar as aplicações das séries de Fourier às Equações Diferenciais.

O capítulo 2 contém a dedução, resolução e exemplificação da equação diferencial que descreve a condução do calor unidimensional ao longo de uma barra com isolamento térmico lateral. Os exemplos analisados envolvem condição de contorno

homogênea e não-homogênea. Também, descrevemos conceitos da Teoria da Calorimetria, como calor, calor específico, calor latente, calor sensível, condutividade e a Equação Fundamental da Calorimetria.

Já no capítulo 3, está presente a resolução da Equação de Laplace no modelo que descreve a condução do calor em uma placa bidimensional em regime permanente.

Ao longo deste trabalho aparecem gráficos de funções com suas respectivas Séries de Fourier que foram plotados no software **Mathematica 7**. Os comandos usados nessas plotagens estão presentes nos apêndices e são indicados ao longo do texto por ícones como **A1** que aparecem ao lado do respectivo gráfico. Alguns gráficos, após plotados no Mathematica 7, foram complementados com outros elementos no software **Microsoft PowerPoint 2010**.

Em suma, este trabalho descreve e sintetiza vários conhecimentos produzidos por matemáticos, físicos e químicos que têm ampla aplicação em situações da sociedade, principalmente no ramo das engenharias. Tendo como foco de aplicação a transferência de calor ao longo de materiais sólidos. Conhecimento este que auxilia na escolha do melhor material na construção de objetos que estejam relacionados a produzir, conduzir ou conservar calor: fogões, fornos, turbinas, isolantes térmicos, resfriamento de ambientes, aparelhos elétricos, etc.

Capítulo 1

Séries de Fourier

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nos perguntamos se é possível aproximar f por uma série infinita de senos e cossenos do tipo

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] ?$$

Para que isso ocorra é necessário que a função f possua certas características, as quais serão expostas no decorrer deste capítulo. Outra questão é como determinar os coeficientes a_0 , a_n e b_n ? Esta questão será abordada, especificamente, na seção 1.3.

1.1 Funções Periódicas e Convergência Uniforme

Definição 1.1. (Função Periódica) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T se $f(x + T) = f(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f .

Exemplo 1.1. A função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z}; \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

é periódica de período 1 (ver gráfico na figura 1.1).

Exemplo 1.2. Considere a função $f(x) = ||x| - |k||$, onde k é o menor inteiro par próximo de x . Esta função é periódica de período 2 (ver gráfico na figura 1.2).

Exemplo 1.3. As funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são periódicas de período 2π (representadas graficamente nas figuras 1.3 e 1.4, respectivamente).

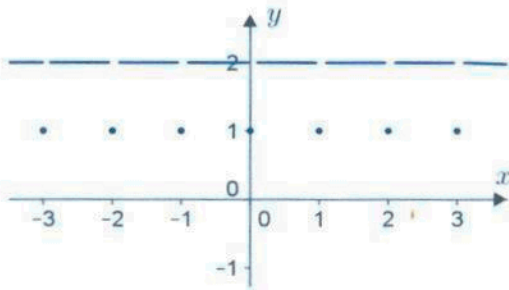


Figura 1.1:

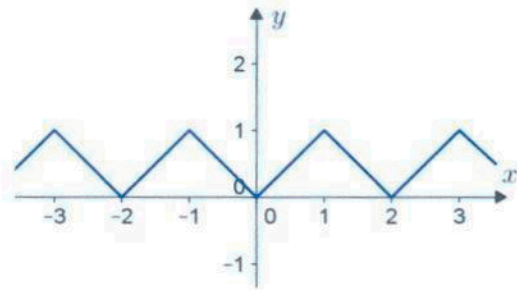


Figura 1.2:

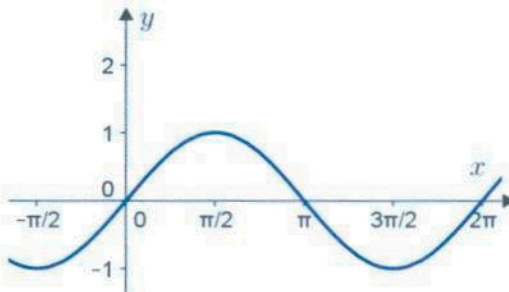


Figura 1.3:

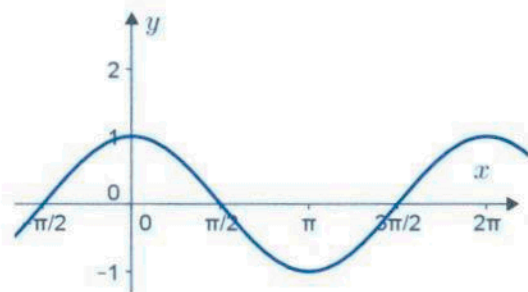


Figura 1.4:

Se uma função f tem um período T , então $2T$ também é um período desta função. De uma maneira geral, nT é um período de f qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$. De fato,

$$f(x + 2T) = f(x + T + T) = f(x + T) = f(x)$$

$$\text{e } f(x + nT) = f(x + 2T) = f(x). \tag{1.1}$$

Deste modo, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ são também períodos da função do exemplo 1.1, $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ são períodos da função do exemplo 1.2 e $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$ são períodos das funções $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$.

Definição 1.2. (Período Fundamental) *O menor período positivo de uma função é denominado período fundamental. Usaremos T para representá-lo.*

Nos exemplos 1.1 e 1.2 os períodos fundamentais são, respectivamente, $T = 1$ e $T = 2$. Já nas funções $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$ o período fundamental é $T = 2\pi$.

Proposição 1.1. *Seja f uma função periódica de período T , então:*

- i) $f(ax)$, $a \neq 0$, é periódica de período $\frac{T}{a}$.
- ii) $f\left(\frac{x}{b}\right)$, $b \neq 0$, é periódica de período bT .

Prova:

i) Suponha que T^* é o período de $f(ax)$, assim

$$f(ax) = f[a(x + T^*)] = f(ax + aT^*).$$

Fazendo $u = ax$ na última igualdade e como o período de f é T , temos que

$$f(u) = f(u + aT^*) \Rightarrow T = aT^* \Rightarrow T^* = \frac{T}{a}.$$

ii) Suponha que T^* é o período de $f\left(\frac{x}{b}\right)$, assim

$$f\left(\frac{x}{b}\right) = f\left[\frac{1}{b}(x + T^*)\right] = f\left(\frac{x}{b} + \frac{T^*}{b}\right).$$

Fazendo $u = \frac{x}{b}$ na última igualdade e como o período de f é T , temos

$$f(u) = f\left(u + \frac{T^*}{b}\right) \Rightarrow T = \frac{T^*}{b} \Rightarrow T^* = bT. \quad \blacksquare$$

Da proposição 1.1 segue que as funções $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ têm período $T = 2\pi \frac{1}{n\pi} L = \frac{2L}{n}$. E como todo múltiplo de um período também é período da função, temos que $2L$ também é período das funções $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Definição 1.3. (Sequência Numérica) Uma sequência numérica é uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $n \in \mathbb{N}$ associa um $a_n \in \mathbb{R}$, chamado termo geral (quando possui uma lei de formação) ou n -ésimo termo. Denotamos uma sequência escrevendo todos os seus termos (a_1, a_2, a_3, \dots) ou por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente por (a_n) .

Exemplo 1.4. São exemplos de sequências numéricas:

$$1. (n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots)$$

$$2. \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

$$3. (2)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots)$$

Definição 1.4. (Série Numérica) Uma série numérica é uma soma infinita da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Exemplo 1.5. São séries numéricas: $\sum_{n=1}^{\infty} n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Uma série pode convergir (a soma infinita dos termos se aproximar de um valor real) ou divergir (a soma infinita dos termos ir pra infinito ou alternar).

Definição 1.5. Uma série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se a sequência das somas parciais $S_n = \sum_{j=1}^n a_n$ converge, ou seja, se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, onde $S \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.6. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ é chamada de série geométrica e converge se, e somente se, $|q| < 1$. Converging para o valor $S = \frac{1}{1-q}$. Desta forma, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

Definição 1.6. (Sequência de Funções) Seja S um subconjunto não vazio de \mathbb{R} . Uma sequência de funções é uma correspondência que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa uma função f_n definida em S e tomando valores em \mathbb{R} . Usamos a notação $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in S$ ou simplesmente (f_n) , quando está suficientemente esclarecido no contexto qual seja o domínio S , para denotar uma sequência de funções.

Exemplo 1.7. São sequências de funções:

1. $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in [0, 1]$.
2. $\left(\frac{x}{(n+1)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Definição 1.7. (Convergência Pontual de Sequência de funções) Dizemos que uma sequência de funções $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in S \subset \mathbb{R}$ converge pontualmente (ou converge simplesmente) para uma função $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para cada $x_0 \in S$ fixado, a sequência numérica $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para $(f(x_0))$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, para cada $x_0 \in S$ existe $N \in \mathbb{N}$ ($N = N(\varepsilon, x_0)$) tal que

$$n > N \implies |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Exemplo 1.8. A sequência (f_n) dada por $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $x \in (0, +\infty)$ é pontualmente convergente para a função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0, \forall x \in (0, +\infty)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N > \frac{1}{\varepsilon x} > 0$, temos que

$$n > N > \frac{1}{\varepsilon x} \implies \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon x \implies \left| \frac{1}{nx} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Definição 1.8. (Convergência Uniforme de Sequência de Funções) Uma sequência de funções $(f(x)_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in S \subset \mathbb{R}$ é dita uniformemente convergente para uma função $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in S.$$

Exemplo 1.9. A sequência (f_n) onde $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$, daí temos que

$$n > N > \frac{1}{\varepsilon^2} \implies \left| \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}} - 0 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Definição 1.9. (Sequência de Cauchy) Dizemos que uma sequência (f_n) de funções de S é uma sequência de Cauchy quando, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in S.$$

Teorema 1.1. Uma sequência (f_n) de funções de $S \subset \mathbb{R}$ converge se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

Prova:

(\implies) Suponhamos que (f_n) converge uniformemente para $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Então, por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in S$$

$$m > N \implies |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in S$$

Logo, para $m, n > N$ temos

$$\begin{aligned} m, n > N \implies |f_n(x) - f_m(x)| &= |[f_n(x) - f(x)] + [f(x) - f_m(x)]| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| = \\ &= |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall x \in S, \end{aligned}$$

ou seja, (f_n) é uma sequência de Cauchy.

(\Leftarrow) Suponhamos agora que (f_n) é uma sequência de Cauchy. Então, para cada $x \in S$ a sequência numérica $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy e, sendo \mathbb{R} um corpo ordenado completo, tal sequência converge para um número real $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (unicamente determinado, tendo em vista a unicidade do limite em \mathbb{R}). Assim, definamos a função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta > 0$ com $\delta < \varepsilon$. Temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in S$,

$$n > N \implies |f_n(x) - f_{n+m}(x)| < \delta, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Logo, fixado $n > N$, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n+m}(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \delta < \varepsilon,$$

ou seja, se $n > N$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in S$. Isto é, (f_n) converge uniformemente para f . ■

Teorema 1.2. *Seja (f_n) uma sequência de funções de S em \mathbb{R} que converge uniformemente para uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que todas as funções f_n são contínuas em um ponto $x_0 \in S$. Então, f é contínua em x_0 .*

Prova: Temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in S.$$

Fixemos um natural $n_0 > N$. Como f_{n_0} é contínua em x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in S \text{ e } |x - x_0| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

se $|x - x_0| < \delta$, o que demonstra a continuidade de f em x_0 . ■

Teorema 1.3. *Seja (f_n) uma sequência de funções de $[a, b]$ em \mathbb{R} que converge uniformemente para uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que todas as funções f_n são integráveis em $[a, b]$. Então,*

- i) f é integrável em $[a, b]$ e

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Prova:

(i) Consideremos $\varepsilon > 0$ e seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]. \quad (1.2)$$

Seja agora P uma partição de $[a, b]$. Por 1.2 temos, para todo $x \in [a, b]$,

$$f_N(x) - \varepsilon < f(x) < f_N(x) + \varepsilon,$$

então

$$s(f_N, P) - \varepsilon(b - a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f_N, P) + \varepsilon(b - a),$$

onde $s(f_N, P)$ e $S(f_N, P)$ são as somas de Riemann inferior e superior, respectivamente, relativas à partição P .

Logo,

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f_N, P) - s(f, P) + 2\varepsilon(b - a).$$

Mas, desde que f_N é integrável em $[a, b]$, existe uma partição P_0 de $[a, b]$, tal que

$$S(f_N, P_0) - s(f_N, P_0) < \varepsilon.$$

Para a partição P_0 temos

$$S(f, P_0) - s(f, P_0) < \varepsilon[1 + 2(b - a)].$$

De onde segue que f é integrável em $[a, b]$.

(ii) Observemos que, para todo $n \geq N$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon(b - a).$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Definição 1.10. (Série de Funções) Dada uma sequência de funções (f_n) definidas em $S \subset \mathbb{R}$, definimos como série das funções f_n o somatório

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n + \dots \quad (1.3)$$

O subconjunto dos pontos x de S tais que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge é chamado de **domínio de convergência** de 1.3.

Exemplo 1.10. A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ tem como domínio de convergência o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\}$.

Exemplo 1.11. A série $\sum_{n=1}^{\infty} x$ tem como domínio de convergência o conjunto $S = \{0\}$.

Dada uma série de funções com domínio de convergência S , podemos definir a função $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente (ou uniformemente) conforme a sequência das somas parciais (Φ_n) dadas por

$$\Phi_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

seja convergente pontualmente (ou uniformemente) em S .

Definição 1.11. (Convergência Pontual de Série de Funções) Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, onde $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais definidas em um subconjunto S de \mathbb{R} , converge pontualmente se, para cada $x_0 \in S$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, convergir. Isto é, se dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in S$, existir um inteiro $N = N(\varepsilon, x_0)$, tal que $\left| \sum_{j=n}^m f_j(x_0) \right| < \varepsilon$ para todo $n < m$, tais que $n \geq N$.

Exemplo 1.12. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^n}$ converge pontualmente para $-1 \leq x < 3$. Pois, se $x = -1$ temos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que converge pelo critério de Leibniz. Já se $-1 < x < 3$, aplicamos o teste da razão

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n2^n}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)}{2} \right| \frac{n}{n+1} = \left| \frac{(x-1)}{2} \right| < 1, \text{ se } -1 < x < 3$$

e a série converge absolutamente se $-1 < x < 3$.

Definição 1.12. (Convergência Uniforme de Série de Funções) Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, converge uniformemente, se, dado $\varepsilon > 0$, existir um inteiro N ,

dependendo apenas de ε , tal que $\left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \varepsilon$, para todo $m > n \geq N$.

Teorema 1.4. (Critério de Weierstrass) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série de funções em S tais que $|f_n(x)| \leq b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente (e absolutamente) em S .

Prova: Seja (Φ_n) a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Desde que a série

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n > N \implies b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+m} < \varepsilon.$$

Portanto, para $m > n > N$ temos

$$\sup_{x \in S} |\Phi_m(x) - \Phi_n(x)| \leq b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+m} < \varepsilon.$$

e pelo teorema 1.1 temos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em S . ■

Exemplo 1.13. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge uniformemente. Pois, $\left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Assim, aplicando o teste de Weierstrass verifica-se que a série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge uniformemente.

Proposição 1.2. Sejam f e g funções periódicas de período T ; a e b duas constantes reais quaisquer. A função h definida por

$$h(x) = af(x) + bg(x)$$

também é periódica de período T (isto é, a combinação linear de funções periódicas de mesmo período também é periódica, com mesmo período das funções que foram combinadas).

Prova: Temos que,

$$h(x + T) = af(x + T) + bg(x + T) = af(x) + bg(x) = h(x),$$

que implica em h ser periódica de período T . ■

Observação 1.1. Ampliando a idéia da proposição 1.2 obtemos que:

- i) Uma série finita de funções periódicas de mesmo período também é periódica com mesmo período, ou seja, dadas as funções reais f_1, f_2, \dots, f_n de período T e as constantes $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, então $h(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$ também é periódica de período T .
- ii) Uma série infinita de funções periódicas também é periódica com mesmo período para os valores de x onde a série converge, ou seja, dadas as funções reais $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ de período T , então $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$, onde a_n são constantes reais, é uma função também com período T para os pontos x onde a série converge.

A observação acima pode ser deduzida analogamente a proposição 1.2 pelo princípio de indução.

Como consequência dos teoremas 1.2 e 1.3 temos as propriedades para séries de funções:

Propriedade 1.1. Suponhamos que as funções u_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então, a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.

Propriedade 1.2. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente para u em S e cada u_n é contínua em $x_0 \in S$. Então, u é contínua em x_0 .

Propriedade 1.3. Suponhamos que as funções u_n sejam integráveis em um intervalo $[a, b] = I \subset \mathbb{R}$ e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então,

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_I u_n(x) dx \right).$$

1.2 Ortogonalidade das Funções Seno e Cosseno

Definição 1.13. (Função Par) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita par se $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Isto significa que o gráfico de f é simétrico com relação ao eixo dos y .

Definição 1.14. (Função Ímpar) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ímpar se $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Isto significa que o gráfico de f é simétrico com relação à origem.

Exemplo 1.14. As funções $f(x) = x$ e $f(x) = \text{sen}(x)$ são ímpares em qualquer intervalo simétrico. Já as funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = \text{cos}(x)$ são pares. Como se pode ver nos gráficos abaixo:

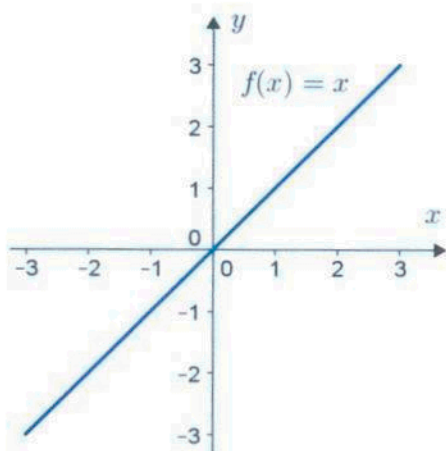


Figura 1.5: Função x em $[-3, 3]$

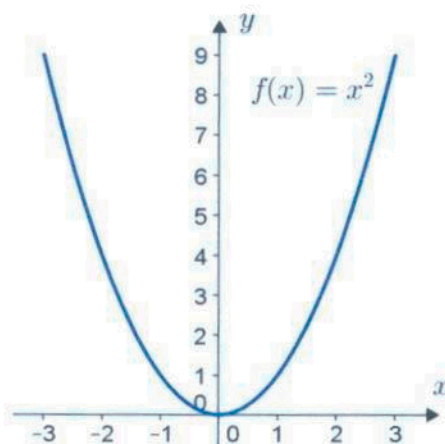


Figura 1.6: Função x^2 em $[-3, 3]$

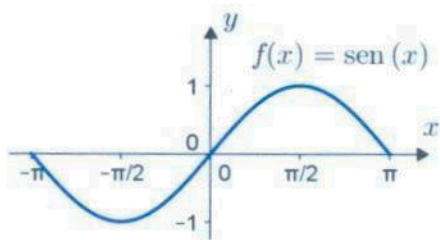


Figura 1.7: Função seno em $[-\pi, \pi]$

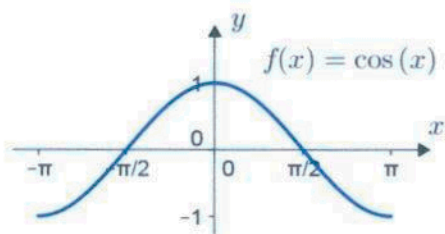


Figura 1.8: Função cosseno em $[-\pi, \pi]$

Proposição 1.3. As integrais das funções $f(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $g(x) = \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, com $n \in \mathbb{Z}^*$, calculadas de $-P$ até P são nulas, onde P é um múltiplo de L .

Prova: De fato, como P é múltiplo de L , então $P = kL$ com $k \in \mathbb{Z}$ e assim

$$\begin{aligned} \int_{-kL}^{kL} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx &= \frac{-L}{n\pi} \left[\cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]_{-kL}^{kL} \\ &= \frac{-L}{n\pi} [\cos(kn\pi) - \cos(-kn\pi)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pois, a função cosseno é par e assim $\cos(kn\pi) = \cos(-kn\pi)$.

$$\begin{aligned} \int_{-kL}^{kL} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx &= \frac{L}{n\pi} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]_{-kL}^{kL} \\ &= \frac{L}{n\pi} [\operatorname{sen}(kn\pi) - \operatorname{sen}(-kn\pi)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pois, seno de múltiplos de π são nulos e assim $\operatorname{sen}(kn\pi) = \operatorname{sen}(-kn\pi) = 0$. ■

Definição 1.15. (Produto Interno) Sejam f e g funções reais, contínuas, definidas num intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$. Denotamos e definimos o produto interno dessas funções como sendo

$$\langle f, g \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad (1.4)$$

Definição 1.16. (Ortogonalidade) Duas funções são ditas ortogonais se o produto interno entre elas é nulo.

Teorema 1.5. (Relações de Ortogonalidade) Se $m, n \in \mathbb{N}^*$, então:

$$\text{i) } \int_{-L}^L \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

$$\text{ii) } \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

$$\text{iii) } \int_{-L}^L \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = 0, \forall m, n.$$

Demonstração: Para provar o item (i) analisemos dois casos.

Se $m \neq n$:

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L}\right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{\pi(n+m)x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\pi(n-m)x}{L}\right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos\left(\frac{\pi(n+m)x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \cos\left(\frac{\pi(n-m)x}{L}\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} [0 + 0] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Se $m = n$:

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + 1 \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx \\
 &= \left[\frac{x}{2} \right]_{-L}^L \\
 &= L.
 \end{aligned}$$

As demonstrações de (ii) e (iii) são análogas. ■

1.3 Série e Coeficientes de Fourier de uma Função

Definição 1.17. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente integrável sobre um intervalo $[a, b]$ se $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$.

Pelos resultados anteriores temos que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \tag{1.5}$$

possui todas as infinitas parcelas periódicas de período $2L$. No conjunto de valores de x para os quais a série (1.5) converge ela define uma função f de período $2L$. Dizemos então que a série (1.5) é a **Série de Fourier** para f e escrevemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \tag{1.6}$$

onde as constantes reais a_0, a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}^*$) são chamados **Coefficientes de Fourier**.

Usamos “ \sim ” ao invés de “ $=$ ” na equação 1.6 porque, pelas informações anteriores, garantimos que a série de f existe, mas talvez não convirja para f .

Podemos agora responder a questão de como determinar os coeficientes de Fourier!

Determinando a_0 : Dada uma função f escrita na forma

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (1.7)$$

e considerando que a série convirja uniformemente temos as condições da propriedade 1.1. Desse modo, $f(x)$ e o lado direito da igualdade (1.7) são funções contínuas (portanto integráveis) e têm o período comum $2L$; então, podemos integrar a igualdade (1.7) termo a termo de $-L$ até L de modo a termos

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \left\{ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \right\} dx.$$

Aplicando a propriedade (1.3) na igualdade acima, temos

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \quad (1.8)$$

Resolvendo a integral da igualdade (1.8) determinamos a_0 em função de $f(x)$.

Isto é,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx = \left[\frac{a_0 x}{2} \right]_{-L}^L = a_0 L,$$

ou seja,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (1.9)$$

Determinando a_n : Multiplicamos a igualdade (1.7) por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ para $m \geq 1$ fixo e aplicamos as propriedades (1.1) e (1.3), daí

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-L}^L a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-L}^L b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right]. \end{aligned}$$

Pelo teorema (1.5) temos que a primeira integral do somatório é nula quando $n \neq m$ e, igual a $a_n L$ quando $n = m$. Já a segunda integral é sempre nula. Assim temos (sem perda de generalidade em substituir m por n),

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + a_n L = 0 + a_n L.$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (1.10)$$

Determinando b_n : Multiplicamos a igualdade (1.7) por $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ para $m \geq 1$ fixo e aplicamos as propriedades (1.1) e (1.3), daí

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-L}^L a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-L}^L b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right]. \end{aligned}$$

Pelo teorema (1.5) temos que a primeira integral do somatório é nula. Já a segunda integral é nula quando $n \neq m$ e, igual a $b_n L$ quando $n = m$. Assim temos (sem perda de generalidade em substituir m por n),

$$\int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n L = 0 + b_n L.$$

Logo,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (1.11)$$

Observação 1.2.

- i) Dada uma função f que possui uma Série de Fourier, podemos determinar seus coeficientes de Fourier pelas equações (1.9), (1.10) e (1.11); e em seguida determinar sua série de Fourier;
- ii) Note que a equação (1.9) é um caso particular da equação (1.10), isso justifica o porque da parcela $\frac{a_0}{2}$ na série de Fourier de uma função. Caso não houvesse o produto de a_0 por $\frac{1}{2}$, então a equação que determina a_0 seria diferente da equação que determina os demais a_n .

Formalmente, temos que se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ é integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado; em particular $\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$. Então, f possui uma série de Fourier da forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Para encontrar a série de Fourier de uma função f usamos a definição de f em um de seus intervalos de repetição e chamamos seu período de $2L$ que nos fornece L a ser substituído nas fórmulas para calcularmos os coeficientes de Fourier.

Exemplo 1.15. $f(x) = ||x| - |k||$, onde k é o menor inteiro par próximo de x .

Como visto, na seção (1.1), f tem período $2L = 2$, assim $L = 1$. Além disso, podemos reescrever f no intervalo $[-1, 1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } -1 \leq x < 0; \\ x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Daí, podemos determinar os coeficientes usando as equações (1.9), (1.10) e (1.11):

$$a_0 = \frac{1}{1} \left[\int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx \right] = \left[\frac{-x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} \left[\int_{-1}^0 -x \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx + \int_0^1 x \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx \right] \\ &= \left[-\frac{x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) - \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2} \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2} [-1 + \cos(n\pi)] \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2} [-1 + (-1)^n], \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \left[\int_{-1}^0 -x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx + \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx \right] \\ &= \left[-\frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi x) \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) - \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi x) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos(-n\pi) + \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) \\ &= 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever a série de Fourier de f :

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} [-1 + (-1)^n] \cos(n\pi x)$$

ou escrever os termos da série de Fourier de f :

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4 \cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{4 \cos(3\pi x)}{9\pi^2} - \frac{4 \cos(5\pi x)}{25\pi^2} - \dots$$

ou escrever o somatório das parcelas ímpares da série de Fourier (as parcelas pares são nulas) :

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} - \left(\frac{2}{(2n-1)\pi} \right)^2 \cos[(2n-1)\pi].$$

Se fizermos $n = 1$ na Série de Fourier de f , temos:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^1 \frac{2}{n^2\pi^2} [-1 + (-1)^n] \cos(n\pi x) \\ &\sim \frac{1}{2} - \frac{4 \cos(\pi x)}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Se fizermos $n = 3$ na Série de Fourier de f , temos:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^3 \frac{2}{n^2\pi^2} [-1 + (-1)^n] \cos(n\pi x) \\ &\sim \frac{1}{2} - \frac{4 \cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{4 \cos(3\pi x)}{9\pi^2}. \end{aligned}$$

Se fizermos $n = 5$ na Série de Fourier de f , temos:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^5 \frac{2}{n^2\pi^2} [-1 + (-1)^n] \cos(n\pi x) \\ &\sim \frac{1}{2} - \frac{4 \cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{4 \cos(3\pi x)}{9\pi^2} - \frac{4 \cos(5\pi x)}{25\pi^2}. \end{aligned}$$

Se fizermos $n = 10$ na Série de Fourier de f , temos:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{n^2\pi^2} [-1 + (-1)^n] \cos(n\pi x) \\ &\sim \frac{1}{2} - \frac{4 \cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{4 \cos(3\pi x)}{9\pi^2} - \frac{4 \cos(5\pi x)}{25\pi^2} - \frac{4 \cos(7\pi x)}{49\pi^2} - \frac{4 \cos(9\pi x)}{81\pi^2}. \end{aligned}$$

Representando graficamente f e sua Série de Fourier para $n = 1, 3, 5, 10$ e 20 , temos:

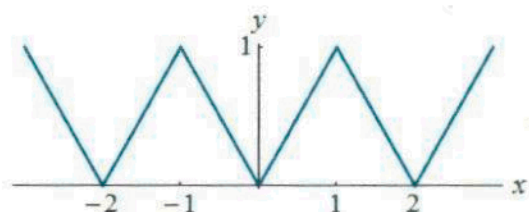
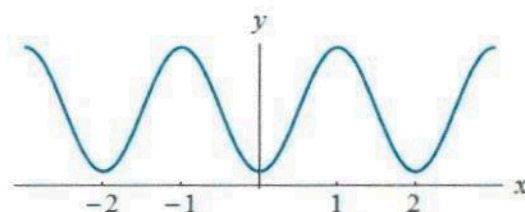
Figura 1.9: Gráfico de f 

Figura 1.10: Série com 1 termo

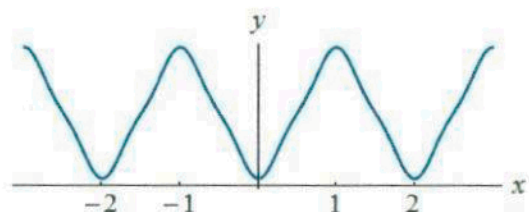


Figura 1.11: Série com 3 termos

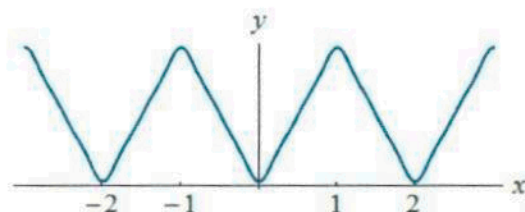


Figura 1.12: Série com 5 termos

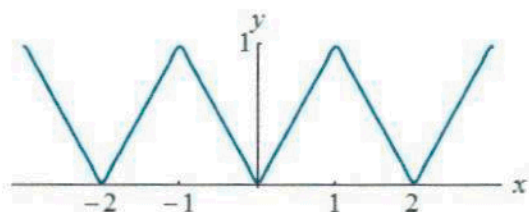


Figura 1.13: Série com 10 termos

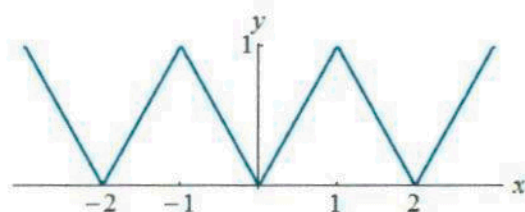


Figura 1.14: Série com 20 termos

A1

Como mostra os gráficos acima, para $n = 20$ a série de Fourier está mais próxima de f do que em $n = 1, 3, 5$ ou 10 . Além disso, como n -par implica no n -ésimo termo da série ser nulo, então calculada a série para um n -ímpar será a mesma para o próximo n que é par.

1.4 Convergência e Soma de uma Série de Fourier

No exemplo acima (1.15) vemos que quanto maior o valor de n – quanto mais termos calcularmos da série – mais a série de Fourier se aproxima de f . No entanto,

existem funções que possuem séries de Fourier que divergem da função. Veremos nesta seção condições que garantem a convergência da série de Fourier para a função que ela representa.

Definição 1.18. (Salto de Função Descontínua) *Seja a função $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descontínua em $a \in S$. Definimos e denotamos o salto de f em a como,*

$$\text{salto}(f)(a) = f(a+0) - f(a-0),$$

onde $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Observação 1.3. *A definição de salto de função também se estende para pontos onde a função f é contínua, sendo que nestes pontos tem-se $\text{salto}(f)(a) = 0$, já que $f(a+0) = f(a-0)$.*

Definição 1.19. *Seja $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in S$. Denotaremos por*

$$\bar{f}(a) = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2}$$

o valor médio dos limites à direita e à esquerda no ponto a .

Se f é contínua em a , então $\bar{f}(a) = f(a)$, pois $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$.

Definição 1.20. (Descontinuidade de Primeira Espécie) *Seja f uma função real, dizemos que f tem descontinuidade de primeira espécie em a quando:*

- i) *sobre cada intervalo limitado I da reta real, f é contínua, exceto em $a \in I$;*
- ii) *f é contínua à direita e à esquerda de a ;*
- iii) *$\text{salto}(f)(a)$ é finito.*

Definição 1.21. (Função Seccionalmente Contínua) *Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado, ou seja, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada subintervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, 2, \dots, n-1$, e existem os limites*

$$f(a_j+0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j-0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Exemplo 1.16.

1. A função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x) = 2$, se $x \in [4k, 4k + 2[$ e $u(x) = -2$, se $x \in [4k + 2, 4(k + 1)[$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ é seccionalmente contínua.
2. A função $h(x) = \operatorname{tg}(x)$ não é seccionalmente contínua nos pontos $x = \frac{(2k + 1)\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Pois, $\operatorname{salto}(h) \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2} \right)$ é infinito; $h \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2} - 0 \right) = +\infty$ e $h \left(\frac{(2k + 1)\pi}{2} + 0 \right) = -\infty$.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é seccionalmente contínua em nenhum ponto. Pois, em qualquer intervalo limitado I , f possui um número infinito de saltos.
4. $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{x}$ não é seccionalmente contínua em $x = 0$. Pois, não existe $g(0 - 0)$.

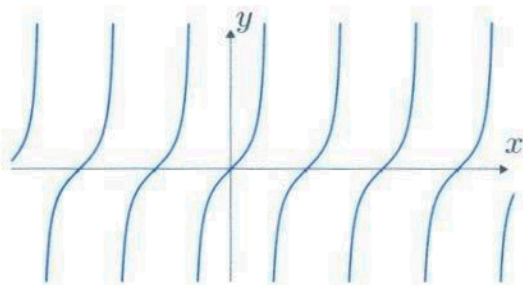


Figura 1.15: Gráfico de h

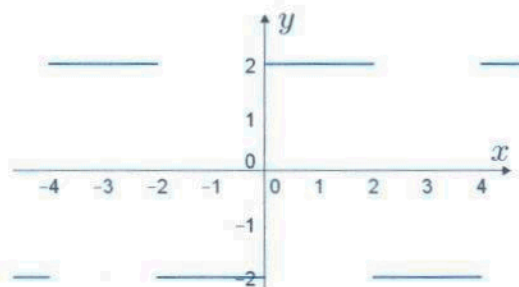


Figura 1.16: Gráfico de u

Definição 1.22. (Função Seccionalmente Diferenciável) Uma função $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita seccionalmente diferenciável se f for seccionalmente contínua e a função derivada f' também for seccionalmente contínua.

Teorema 1.6. (Teorema de Fourier) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então, a Série de Fourier da função f converge em cada ponto x para $\bar{f}(x)$, isto é,

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]. \quad (1.12)$$

Demonstração: Ver em [FIQUEIREDO] [3]

A série de Fourier de uma função f converge para f em todos os pontos onde a função é contínua, pois $\bar{f}(x) = f(x)$.

Exemplo 1.17. Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ se $x \in [-\pi, 0)$, $f(x) = 2$ se $x \in [0, \pi)$ e periódica de período 2π . Vamos obter a série de Fourier de f .

Calculando os coeficientes de Fourier, temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 1 dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right] = \left[\frac{x}{\pi} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{2x}{\pi} \right]_0^{\pi} = 1 + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 2 \cos(nx) dx \right] = \left[\frac{\text{sen}(nx)}{n\pi} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{2 \text{sen}(nx)}{n\pi} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\text{sen}(-n\pi)}{n\pi} + \frac{2 \text{sen}(n\pi)}{n\pi} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \text{sen}(nx) dx + \int_0^{\pi} 2 \text{sen}(nx) dx \right] = \left[-\frac{\cos(nx)}{n\pi} \right]_{-\pi}^0 + \left[-\frac{2 \cos(nx)}{n\pi} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\cos(0)}{n\pi} + \frac{\cos(-n\pi)}{n\pi} - \frac{2 \cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{2 \cos(0)}{n\pi} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever a série de Fourier de f :

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n\pi} \text{sen}(nx) \tag{1.13}$$

$$\sim \frac{3}{2} + \frac{2 \text{sen}(x)}{\pi} + \frac{2 \text{sen}(3x)}{3\pi} + \frac{2 \text{sen}(5x)}{5\pi} + \frac{2 \text{sen}(7x)}{7\pi} \dots \tag{1.14}$$

Pelo teorema de Fourier o gráfico da função definida pela série 1.13 é o da figura abaixo e nem era preciso conhecer a série para traçá-lo, já que ela converge para a função f nos pontos de continuidade.

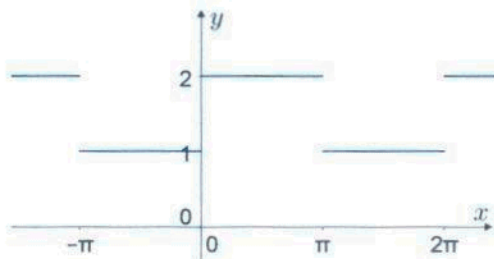


Figura 1.17: Gráfico de f

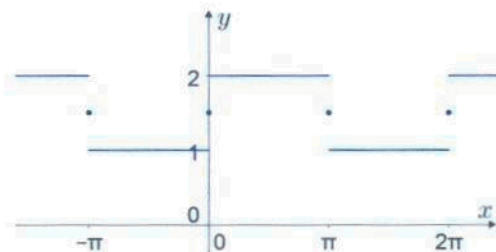


Figura 1.18: Gráfico da série de f

Exemplo 1.18. Vamos esboçar o gráfico da série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x + 2$, se $x \in [-2, 0)$, $f(x) = x^2$, se $x \in [0, 2)$ e f periódica de período 4.

Como f é seccionalmente diferenciável, então a série de Fourier de f converge para f em cada ponto x onde f é contínua, ou seja, o gráfico da série é o mesmo da função f nos intervalos $(2k, 2(k+1))$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Nos pontos $x = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$ a série converge para o valor

$$\frac{f(4k - 0) + f(4k + 0)}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1,$$

e nos pontos $x = 4k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$ a série converge para o valor

$$\frac{f((4k + 2) - 0) + f((4k + 2) + 0)}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2.$$

Assim, podemos plotar o gráfico da série de Fourier de f usando apenas as informações acima, sem precisar calculá-la:

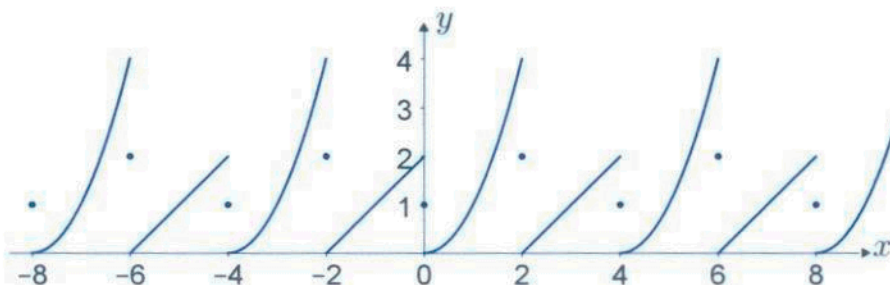


Figura 1.19: Gráfico da Série de Fourier de f

1.5 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Se f é um função que possui série de Fourier onde f é par ou ímpar, ocorre que essas características se relacionam com os coeficientes de Fourier. Já era de se esperar, visto que a função seno é ímpar e a função cosseno é par. O fato de uma função ser par ou ímpar facilita o cálculo de seus coeficientes de Fourier.

Proposição 1.4.

i) A soma de duas funções pares é uma função par;

- ii) A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar;
- iii) O produto de duas funções pares é uma função par;
- iv) O produto de duas funções ímpares é uma função par;
- v) O produto de uma função par com uma ímpar é uma função ímpar.

Prova:

i) e iii) Sejam f e g funções pares, temos $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$ para todo x , daí

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x) \Rightarrow (f + g) \text{ é par}$$

$$\text{e } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x) = (f \cdot g)(-x) \Rightarrow (f \cdot g) \text{ é par}$$

ii) e iv) Sejam f e g funções ímpares, temos $f(x) = -f(-x)$ e $g(x) = -g(-x)$ para todo x , daí

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) + [-g(-x)] = -f(-x) - g(-x)$$

$$= -[f(-x) + g(-x)] = -(f + g)(-x) \Rightarrow (f + g) \text{ é ímpar}$$

$$\text{e } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = -f(-x) \cdot [-g(-x)] = f(-x) \cdot g(-x)$$

$$= (f \cdot g)(-x) \Rightarrow (f \cdot g) \text{ é par}$$

v) Sejam f uma função par e g uma função ímpar, temos $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = -g(-x)$ para todo x , daí

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot [-g(-x)] = -f(-x) \cdot g(-x)$$

$$= -[f(-x) \cdot g(-x)] = -(f \cdot g)(-x) \Rightarrow (f \cdot g) \text{ é ímpar} \quad \blacksquare$$

Observação 1.4. Dada a função nula, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $f(x) = f(-x) = -f(-x)$, ou seja, a função nula é ao mesmo tempo par e ímpar.

Observação 1.5. Toda função real $f = f(x)$ pode ser reescrita como a soma de uma função par com uma função ímpar. Basta tomarmos $f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, onde $f_P(x)$ é par, $f_I(x)$ é ímpar e, $f_P(x) + f_I(x) = f(x)$.

Proposição 1.5.

i) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado.

$$\text{Então } \int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx .$$

ii) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar que é integrável em qualquer intervalo limitado.

$$\text{Então, } \int_{-L}^L f(x) dx = 0 .$$

Prova:

i) Seja $f(x)$ par e fazendo a mudança de variável $y = -x$ em f , temos $dy = -dx$ e daí,

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-x) dx = \int_0^L f(-x) dx = \int_0^L f(x) dx .$$

Logo,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx .$$

ii) Seja $f(x)$ ímpar e fazendo a mudança de variável $y = -x$ em f , temos $dy = -dx$ e daí,

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-x) dx = \int_0^L f(-x) dx = \int_0^L -f(x) dx = - \int_0^L f(x) dx .$$

Logo,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = - \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = 0 . \quad \blacksquare$$

Assim, se f é uma função que possui série de Fourier, segue das duas proposições anteriores, (1.4 e 1.5), que:

i) Se f for uma função par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

E dizemos que a série de Fourier de uma função par é uma *série de cossenos*.

ii) Se f for uma função ímpar, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

E dizemos que a série de Fourier de uma função ímpar é uma *série de senos*.

Exemplo 1.19. Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por $f(x) = x^2$, para $-L \leq x \leq L$. Vamos encontrar sua série de Fourier.

(Solução:)

Como f é par, então teremos uma série de cossenos cujos coeficientes são:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{2L^2}{3}; \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Fazendo $y = \frac{n\pi x}{L} \Rightarrow dx = dy \frac{L}{n\pi}$, daí

$$\int x^2 \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \int y^2 \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos(y) dy \frac{L}{n\pi} = \frac{L^3}{n^3 \pi^3} \int y^2 \cos(y) dy. \quad (1.16)$$

Integrando por partes temos, $u = y^2 \Rightarrow du = 2y dy$ e $dv = \cos(y) dy \Rightarrow v = \operatorname{sen}(y)$, donde

$$\int y^2 \cos(y) dy = y^2 \operatorname{sen}(y) - 2 \int y \operatorname{sen}(y) dy. \quad (1.17)$$

E novamente integrando por partes, temos $w = y \Rightarrow dw = dy$ e $dz = \operatorname{sen}(y) dy \Rightarrow z = -\cos(y)$, donde,

$$\int y \operatorname{sen}(y) dy = -y \cos(y) + \int \cos(y) dy = -y \cos(y) + \operatorname{sen}(y). \quad (1.18)$$

Substituindo 1.18 em 1.17, 1.17 em 1.16 e 1.16 em 1.15 podemos explicitar a_n como,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2L^2}{n^3 \pi^3} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left(\frac{n^2 \pi^2 x^2}{L^2} - 2 \right) + 2 \frac{n\pi x}{L} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]_0^L = \frac{2L^2}{n^3 \pi^3} 2n\pi \cos(n\pi) \\ &= \frac{4L^2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) \\ &= \frac{4L^2}{n^2 \pi^2} (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de f é

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &\sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \left[-\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{1}{9} \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Plotando o gráfico de f e de sua série de Fourier para $L = 2$ com $n = 1, 2, 3, 5$ e 10 , temos:

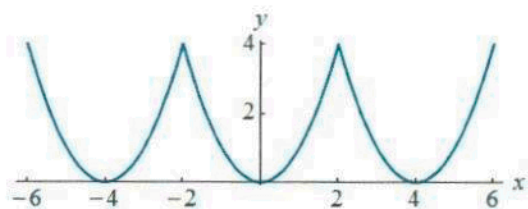


Figura 1.20: Gráfico de f

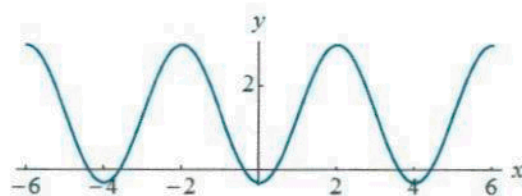


Figura 1.21: Série com 1 termo

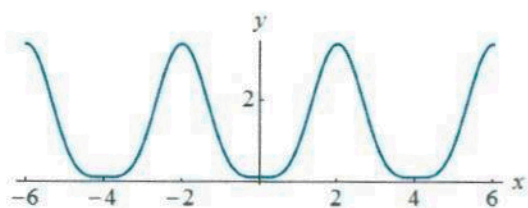


Figura 1.22: Série com 2 termos

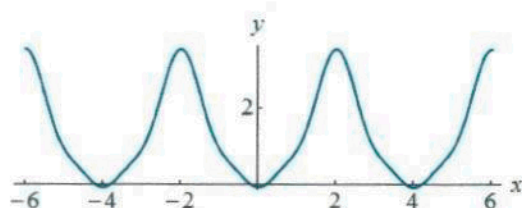


Figura 1.23: Série com 3 termos

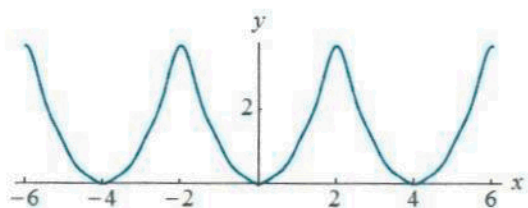


Figura 1.24: Série com 5 termos

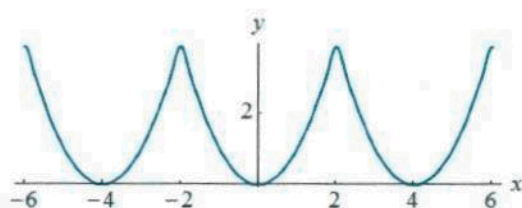


Figura 1.25: Série com 10 termos

A2

1.6 Desenvolvimento de Fourier em Outros Intervalos

Nos exemplos anteriores usamos funções definidas em intervalos do tipo $(-L, L]$, sendo essas funções simétricas neste intervalo e expandidas por toda reta real a serem

periódicas de período $2L$. Porém, é comum em problemas de aplicações a função f não está definida no intervalo $(-L, L]$ ou não apresentar simetria em relação ao eixo y (função par) ou simetria em relação à origem (função ímpar).

Proposição 1.6. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ integrável em todo seu domínio e $a \in \mathbb{R}$, então*

$$\int_{-L}^L f = \int_{-L+a}^{L+a} f.$$

Prova:

Definamos $\Phi(x) = \int_{x-L}^{x+L} f$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue-se que

$$\Phi'(x) = f(x+L) - f(x-L). \quad (1.19)$$

Como f é periódica de período $2L$, temos $f(x-L) = f(x-L+2L) = f(x+L)$ que substituindo em 1.19 resulta em

$$\Phi'(x) = 0, \quad \forall x, \quad (1.20)$$

ou seja, Φ é constante e assim $\Phi(a) = \Phi(0)$, isto é, $\int_{a-L}^{a+L} f = \int_{-L}^{+L} f$. ■

Em alguns casos a proposição 1.6 facilita o cálculo dos coeficientes de Fourier de funções não simétricas no intervalo $(-L, L]$. É o caso do exemplo abaixo.

Exemplo 1.20. *Considere a função f definida no intervalo $[-1, 3]$ e expandida sobre toda a reta a ser periódica de período 4, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2, & \text{se } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

Temos que f é periódica de período $2L = 4 \Rightarrow L = 2$. Porém, f não é par, nem ímpar. Observe que para calcularmos os coeficientes de Fourier para f é mais conveniente integrarmos no intervalo $[-1, 3]$ (fazendo $a = 1$ na proposição 1.6) ao invés de $[-2, 2]$.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+1) dx + \frac{1}{2} \int_1^3 2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 + \left[x \right]_1^3 = 3.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+1) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_1^3 2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_1^3 2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= 0 + \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_1^3 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \left[\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^3 = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+1) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_1^3 2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_1^3 2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + 0 + \int_1^3 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \left[\frac{-2x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^1 - \left[\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_1^3 \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo, temos que a série de Fourier de f é

$$f \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]$$

Esboçando graficamente f e sua série de Fourier para $n = 1, 3, 5, 10$ e 20 , temos:

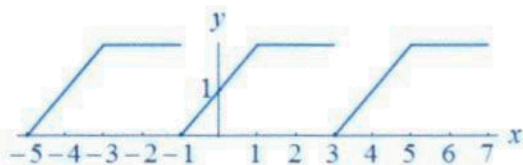


Figura 1.26: Gráfico de f

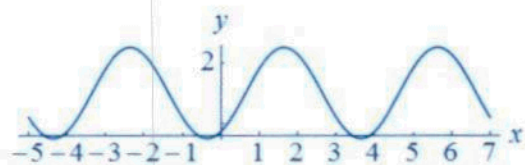


Figura 1.27: Série com 1 termo

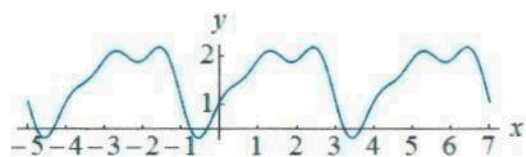


Figura 1.28: Série com 3 termos

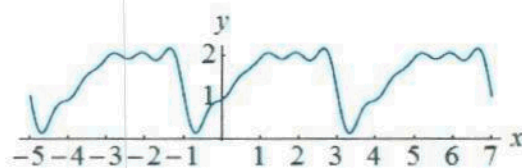


Figura 1.29: Série com 5 termos

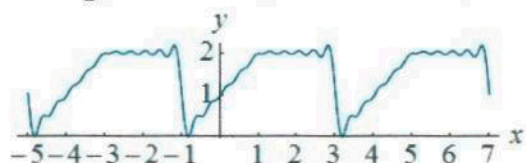


Figura 1.30: Série com 10 termos

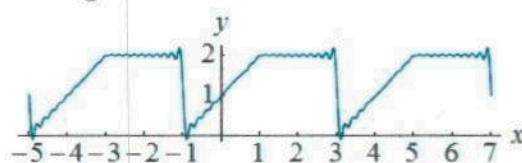


Figura 1.31: Série com 20 termos

A3

O matemático Josiah William Gibbs (1839-1903) estudou a convergência da série de Fourier de uma função na vizinhança de um ponto de descontinuidade. Observando que: no ponto $x = a$, onde a função tem um salto de descontinuidade do tipo $\text{salto}(f)(a) = b \neq 0$, a série oscila bastante quando $x \rightarrow a$. Devido aos seus estudos, este fenômeno é conhecido como *Fenômeno de Gibbs*¹. No exemplo 1.20 podemos ver o Fenômeno de Gibbs, no gráfico da série de Fourier de f , nos pontos $x = 4k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

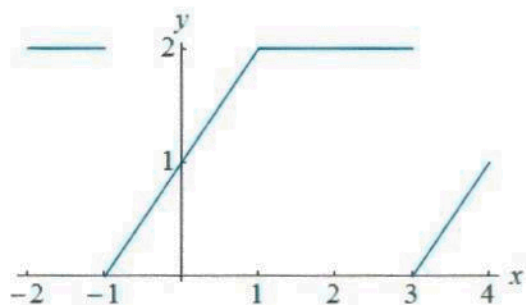


Figura 1.32: Gráfico de f

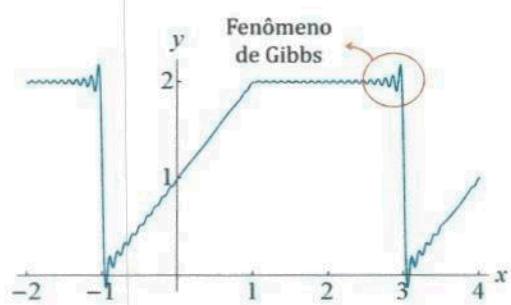


Figura 1.33: Série com 40 termos

A4

Em problemas de aplicação – como é o caso da equação do calor – estamos interessados em representar uma função do tipo $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ por uma série de Fourier. Tal representação não é possível já que f não é periódica. Porém, podemos expandir f sobre toda a reta real de modo a torná-la uma função periódica. Esta expansão pode ser feita de três maneiras:

¹Um estudo analítico detalhado deste fenômeno está presente em [FIGUEIREDO][3] e é omitido aqui neste trabalho.

1. **Expansão de período completo:** expandir f repetindo-a, isto é, fazendo $f(x + a) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ deixando f com período igual a a (ver figura 1.35);
2. **Expansão de meio período par:** expandir f de modo que tenha período igual a $2a$ e seja uma função par (ver figura 1.36);
3. **Expansão de meio período ímpar:** expandir f de modo que tenha período igual a $2a$ e seja uma função ímpar (ver figura 1.37).

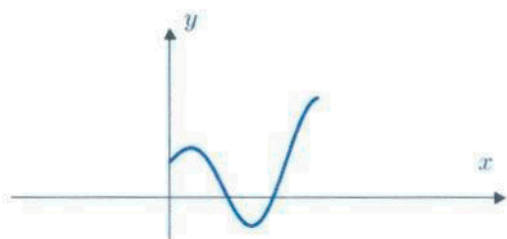


Figura 1.34: Gráfico de f

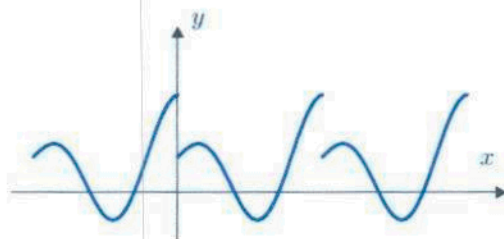


Figura 1.35: Expansão de f repetida

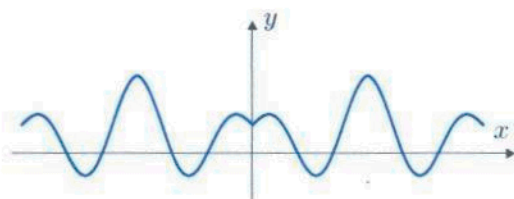


Figura 1.36: Expansão tornando f par

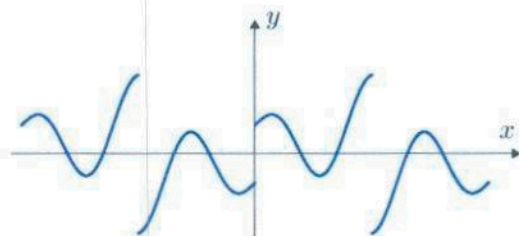


Figura 1.37: Expansão tornando f ímpar

Podemos ver a função f do exemplo 1.20 como uma expansão de período completo da função $f_1 : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f_1(x) = x + 1$, se $0 \leq x < 1$, $f_1(x) = 2$, se $1 \leq x < 3$ e $f_1(x) = x - 3$, se $3 \leq x < 4$.

Exemplificaremos a seguir expansões de meio período par e ímpar.

Exemplo 1.21. Dada a função $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{4x}{\pi}$. Expandindo g em meio período de modo que ela se torne uma função par periódica de período 2π obtemos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{\pi}, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \frac{4x}{\pi}, & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad g(x + 2\pi) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, a série de Fourier de g é uma série de cossenos e temos que seus coeficientes de Fourier são

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{4x}{\pi} dx = \left[\frac{4x^2}{\pi^2} \right]_0^\pi = 4.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{4x}{\pi} \cos(nx) dx = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{x}{n} \operatorname{sen}(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_0^\pi \\ &= \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{8}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier (de cossenos) de g é

$$\begin{aligned} g(x) &\sim 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \cos(nx) \\ &\sim 2 - \frac{16 \cos(x)}{\pi^2} - \frac{16 \cos(3x)}{9\pi^2} - \frac{16 \cos(5x)}{25\pi^2} - \frac{16 \cos(7x)}{49\pi^2} - \dots \end{aligned} \tag{1.21}$$

Exemplo 1.22. Dada a função $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{4x}{\pi}$. Expandindo g em meio período de modo que ela se torne uma função ímpar periódica de período 2π obtemos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g(x) = \frac{4x}{\pi}$, $-\pi \leq x < \pi$ e $g(x+2\pi) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Então, a série de Fourier de g é uma série de senos e temos que seus coeficientes de Fourier são

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{4x}{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{8}{\pi^2} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \right]_0^\pi \\ &= \frac{8}{\pi^2} \frac{-\pi}{n} \cos(n\pi) = \frac{-8}{n\pi} (-1)^n = \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier (de senos) de g é

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}(nx) \\ &\sim \frac{8 \operatorname{sen}(x)}{\pi} - \frac{4 \operatorname{sen}(2x)}{\pi} + \frac{8 \operatorname{sen}(3x)}{3\pi} - \frac{2 \operatorname{sen}(4x)}{\pi} + \dots \end{aligned} \tag{1.22}$$

Comparando graficamente a série de cossenos 1.21 com a série de senos 1.22 da função $g(x) = \frac{4x}{\pi}$, temos:

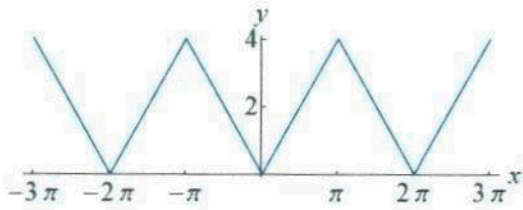


Figura 1.38: Expansão par de g

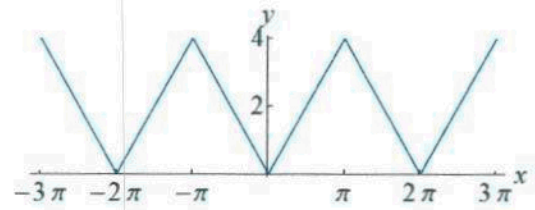


Figura 1.39: Série de Cossenos ($n=50$)

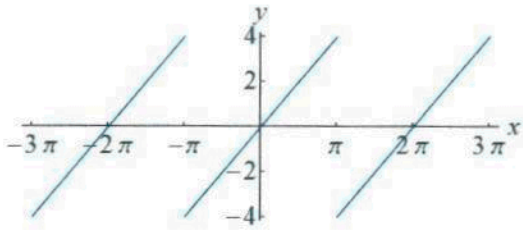


Figura 1.40: Expansão ímpar de g

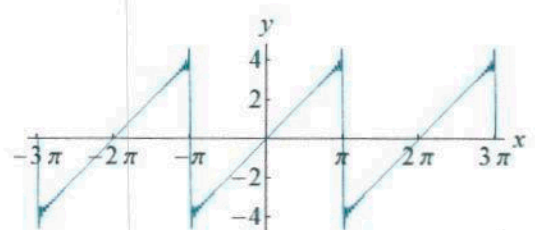


Figura 1.41: Série de Senos ($n=50$)

A5

Para um número finito de termos calculados, note que a série de cossenos é uma melhor representação da função g em relação a série de senos. Isso porque a primeira é obtida de uma função par que é contínua, enquanto a segunda é obtida de uma função ímpar que tem saltos (portanto, apresenta o Fenômeno de Gibbs).

Capítulo 2

Equação do Calor

É comum nos depararmos com problemas de temperatura que envolvem “quente” e “frio”, até mesmo no nosso próprio corpo. Estão presentes de forma indispensável na Teoria da Evolução do homem e na Teoria do Big-Bang. A esses antônimos, quente e frio, está associado o conceito de calor, seja por perda de calor (esfriar) ou por ganho de calor (aquecer). Estudos sobre calor são encontrados em Termodinâmica e Calorimetria (ramos da ciência que partem da definição do que é o calor e estudam no que diz respeito a classificação, conservação, transferência, importância e sua ação nos processos físicos e químicos). O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos relacionados a calor, em seguida modelar o fenômeno da transferência de calor sensível em uma barra obedecendo a certas condições fixadas, encontrar a solução geral da Equação do Calor, utilizando séries de Fourier, e exemplificá-la.

2.1 Conceitos de Calorimetria

Definição 2.1. (Calor) *É a transição de energia térmica entre dois corpos (ou duas partes de um corpo) devido a diferença de temperatura entre eles, sendo que essa transição ocorre do corpo com maior temperatura para o corpo com menor temperatura. Indicamos a Quantidade de Calor por Q e sua unidade de medida no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o Joule (J), podendo ser usado a caloria (cal), sendo que $1cal \simeq 4,186J$.*

Quando as temperaturas se igualam, a transição de calor cessa e dizemos que

houve um **equilíbrio térmico**. Dizer que ocorre *Transferência de calor* é equivalente a dizer que ocorre *Transferência de Energia Térmica*. A transferência de calor pode ocorrer de três maneiras: *condução, convecção e radiação*.

Definição 2.2. (Condução de Calor) *É a transferência de calor em uma substância (sólido, líquido ou gás) ou entre substâncias que estão em contato físico direto por colisões (agitações) entre átomos e/ou moléculas vizinhas.*

Por exemplo, ao passar roupa o ferro elétrico transfere calor para a roupa pelo processo de condução, onde o contato direto do ferro com a roupa promove a agitação das partículas do tecido transferindo o calor do ferro para a roupa.

Definição 2.3. (Calor Latente) *É a perda ou recebimento de calor que modifica o estado físico de um corpo.*

Quando o calor latente é positivo o corpo está ganhando calor, e assim o corpo funde ou vaporiza. Já quando o calor latente é negativo o corpo está perdendo calor, e assim o corpo solidifica ou condensa. O calor latente depende da natureza da substância, assim como de cada mudança de estado físico.

Definição 2.4. (Calor Sensível) *É a perda ou recebimento de calor que provoca apenas variação na temperatura de um corpo.*

Definição 2.5. (Calor Específico) *É a quantidade de calor, em Joules (J), necessário para elevar em um grau kelvin (1K) a temperatura de um quilograma (1kg) de uma substância. É indicado por c e sua unidade de medida no SI é $\frac{J}{kg \cdot ^\circ K}$ (joule por quilograma grau Kelvin), podendo ser usada $\frac{cal}{g \cdot ^\circ C}$ (caloria por grama grau célsius).*

O calor específico depende da natureza de cada substância.

Dada uma substância, a equação

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \quad (2.1)$$

é conhecida como **Equação Fundamental da Calorimetria** e relaciona a quantidade de calor sensível Q (em *cal* ou *J*) com a massa m (em *g* ou *kg*), a variação da temperatura ΔT (em $^\circ C$ ou K) e o calor específico c (em $\frac{cal}{g \cdot ^\circ C}$ ou $\frac{J}{kg \cdot K}$).

Definição 2.6. (Condutividade Térmica) A condutividade térmica, indicada por k , é uma característica específica de cada material que quantifica a habilidade dos materiais de conduzir calor. Ela depende da variação de temperatura do sistema e da pureza do material (especialmente sob baixas temperaturas). A condutividade térmica equivale a quantidade de calor Q (em J) transmitida através de uma espessura L (em m), numa direção normal a superfície de área A (em m^2), devido a uma variação de temperatura ΔT (em K) quando a transferência de calor se deve apenas a variação de temperatura. A unidade de medida da condutividade térmica no SI é $\frac{W}{m \cdot K} = \frac{J/s}{m \cdot K}$ (watt por metro kelvin). Em forma de equação temos a condutividade dada por:

$$k = \frac{Q}{A \cdot \Delta t} \cdot \frac{L}{\Delta T} . \quad (2.2)$$

Em geral, os materiais tornam-se mais condutores de calor com o aumento da temperatura. Materiais com alta condutividade térmica conduzem calor de forma mais rápida que os materiais com baixa condutividade térmica. Desta maneira, materiais com alta condutividade térmica são utilizados como dissipadores de calor e materiais de baixa condutividade térmica são utilizados como isolantes térmicos. O inverso da condutividade térmica é a **resistividade térmica**.

É muito comum em painéis de alumínio as alças serem de um material preto (polímero chamado baquelite). Em contato com o fogo esse material não aquece ao contrário do alumínio. Neste exemplo, o alumínio é um ótimo condutor de calor sensível e, o baquelite é um péssimo condutor.

Definição 2.7. (Difusividade Térmica) A difusividade térmica, denotada por α , indica como o calor se difunde através de um material. Isso depende, por um lado, da condutividade (k) ou da velocidade de condução da energia térmica no interior do material e, por outro lado, do calor específico volumétrico - $c \cdot \rho$, onde ρ é a densidade da substância ($\rho = \frac{m}{V}$) - ou da quantidade de energia térmica necessária para aumentar a temperatura de determinado volume do material. Obtém-se a difusividade térmica dividindo a condutividade pelo calor específico volumétrico e sua unidade de medida no SI é $\frac{m^2}{s}$ (metro quadrados por segundo):

$$\alpha = \frac{k}{c\rho} . \quad (2.3)$$

A difusividade é uma variável mais importante para o controle térmico das construções do que a condutividade, porque expressa quão rapidamente um corpo se ajusta por inteiro à temperatura de seu entorno. Materiais de baixa difusividade retardam a transferência de variações externas de temperatura para o interior das construções. Um material com baixa difusividade conduz muito mal e é necessária muita energia térmica para aumentar a temperatura de determinado volume do material. Assim, em construções civis, como pontes e edifícios, é mais benéfico usar materiais com baixa difusividade térmica; pois estes materiais se dilatam menos, evitando assim trincas devido ao processo de dilatação térmica por mudanças de temperatura do ambiente, como a irradiação solar e a presença de chuvas.

Por exemplo, comparando o concreto celular ($k = 0,4 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$; $\alpha = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$) com o Cobre ($k = 390 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$; $\alpha = 1153 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$) temos que considerando-se a mesma área e a mesma espessura, uma parede de cobre aquecida em uma das faces se aquecerá mais rapidamente na outra face do que uma parede de concreto celular. Portanto, levando em consideração a difusividade térmica, uma parede de cobre é mais exposta a trincas que uma parede de concreto celular.

Tabela 2.1. Elementos Metálicos: Propriedades a 20 °C (293 K)

Substância Pureza > 99%	Calor Específico (J/kg · K)	Condutividade (W/m · K)	Difusividade (cm ² /s)
Alumínio	0,896	236	0,975
Cobre	0,383	399	1,166
Cromo	0,440	91,4	0,29
Ferro	0,452	81,1	0,228
Ouro	0,129	316	1,269
Prata	0,234	427	1,738
Titânio	0,611	22	0,08
Zinco	0,385	121	0,44

FONTE: Adaptado da tabela 12, do apêndice 2, de [KREITH][5]

Tabela 2.2. Isolamentos e Materiais: Propriedades a 20 °C (293 K)

Material	Calor Específico (J/kg · K)	Condutividade (W/m · K)	Difusividade (cm ² /s)
Asfalto		0,698	
Argila, 48,7% de umidade	0,880	1,26	0,0101
Baquelite	0,383	399	1166000
Concreto Seco	0,837	1,8	0,0094
Tijolo Comum	0,84	0,38 - 0,52	0,0028 - 0,0034
Tij. Alvenaria	0,837	0,658	0,0046
Vidro, Janela	0,8	0,81	0,0034

FONTE: Adaptado da tabela 11, do apêndice 2, de [KREITH][5]

Definição 2.8. (Taxa de Fluxo de Calor) Denotado por q , a taxa de fluxo de calor é o quociente da quantidade de calor, em Joules, que atravessa uma superfície durante um intervalo de tempo, em segundo. Assim, a unidade de medida de q é o Watt, $W = \left(\frac{J}{S}\right)$. Por meio de equação temos que

$$q = \frac{Q}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Definição 2.9. (Fluxo de Calor) O fluxo de calor, denotado por q'' , é a quantidade de energia térmica (calor) transferida numa dada superfície; especificamente, ele é quantificado pela quantidade de calor que passa por unidade de área em uma unidade de tempo. A unidade de medida de q'' é Watt por metro quadrado $\left(\frac{W}{m^2}\right)$. Temos que

$$q'' = \frac{q}{A} \quad (2.5)$$

2.2 Equação do Calor ao Longo de uma Barra

Deduziremos agora a equação do calor que descreve a transferência de calor sensível em uma barra sólida fixadas certas condições. Para isso, consideremos uma barra homogênea de comprimento L , feita de um material uniforme condutor de calor,

onde cada seção transversal tem área A . Supondo ainda que a superfície lateral da barra está isolada termicamente impedindo a transferência de calor com o meio ambiente – podendo ocorrer transferências de calor apenas nas extremidades da barra – e que a temperatura seja a mesma em cada ponto de uma seção transversal.

Sob as condições acima, temos que o calor fluirá apenas ao longo do comprimento da barra. Tomemos uma das extremidades da barra como 0 e a outra como L de modo que o calor flua no sentido de L , como na figura abaixo:

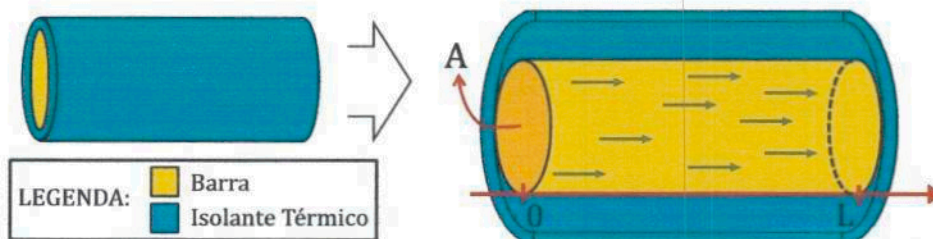


Figura 2.1: Barra isolada termicamente e seção transversal

Deste modo, a temperatura depende apenas da posição $x \in [0, L]$ e do tempo $t \geq 0$. Assim, podemos supor que existe uma função $u(x, t)$ que determina a temperatura em cada seção transversal da barra e em cada intervalo de tempo decorrido.

Para deduzirmos a equação do calor partimos da *Lei de Fourier* que foi demonstrada através de experimentos.

Lei 2.1. (Lei do Resfriamento de Fourier) *Considere duas placas, P_1 e P_2 , de áreas iguais a A , mantidas constantes às temperaturas T_1 e T_2 , respectivamente; se colocadas paralelamente a uma distância d uma da outra, haverá passagem de calor da placa mais quente para a mais fria; e a quantidade de calor Q é diretamente proporcional à área A e à diferença de temperatura e , inversamente proporcional à distância d , isto é,*

$$Q = kA \frac{|T_2 - T_1|}{d}, \quad (2.6)$$

onde a constante de proporcionalidade $k > 0$ é a **condutividade térmica** do material da barra.

Para aplicarmos a Lei de Fourier no problema da transferência de calor ao longo do comprimento de uma barra, consideremos duas seções transversais da barra, localizadas em x e em $x + \Delta x$, como sendo as placas P_1 e P_2 , veja na figura abaixo:

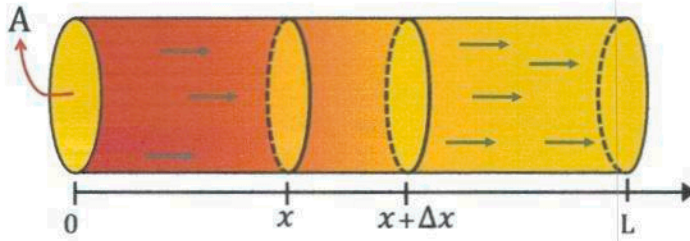


Figura 2.2: Transferência de calor ao longo do comprimento de uma barra

Porém, as temperaturas nessas seções variam com o tempo. Portanto, não são constantes como requer a Lei de Fourier. Para aplicá-la, definamos a **taxa do fluxo de calor** através de uma seção em x num instante t . Fixando o tempo t na equação 2.6, considerando $T_2 = u(x + \Delta x, t)$ e $T_1 = u(x, t)$ e passando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} kA \frac{|u(x + \Delta x, t) - u(x, t)|}{\Delta x} = kA |u_x(x, t)|. \quad (2.7)$$

A taxa do fluxo de calor, na direção positiva do eixo x , é uma função que denotaremos como $q(x, t)$ e é definida por:

$$q(x, t) = -kA u_x(x, t). \quad (2.8)$$

Observação 2.1. O sinal negativo na equação 2.8 ocorre porque $u(x, t)$ e $q(x, t)$ são definidas na direção positiva do eixo x e sendo assim:

- se $u(x, t)$ é crescente, então $u_x(x, t) > 0$ e o calor fluirá para esquerda (direção negativa do eixo x) devendo ser $q(x, t) < 0$;
- se $u(x, t)$ é decrescente, então $u_x(x, t) < 0$ e o calor fluirá para direita (direção positiva do eixo x), devendo ser $q(x, t) > 0$;

Agora, fixado um elemento da barra entre x e $x + \Delta x$ a taxa total segundo a qual o calor aí entra, usando o fluxo de calor em 2.8, é dada por:

$$q = q(x, t) - q(x + \Delta x, t) = -kA u_x(x, t) + kA u_x(x + \Delta x, t),$$

ou seja, $q = kA [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]. \quad (2.9)$

E a quantidade de calor entrando nesse trecho da barra no intervalo de tempo Δt , usando 2.9, é:

$$Q = q \cdot \Delta t = kA [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \Delta t. \quad (2.10)$$

Por outro lado, escrevendo a quantidade de calor (Q) em função do calor específico (c) segundo a *Equação Fundamental da Calorimetria*, temos

$$Q = m c \Delta u = \rho V c \Delta u = \rho (A \Delta x) c \Delta u \quad (2.11)$$

onde $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u \text{ é a variação média de temperatura no intervalo de tempo } \Delta t \\ \rho \text{ é a densidade do material da barra } \left(\rho = \frac{m}{V} \right). \end{array} \right.$

Nas igualdades acima, consideramos Δx muito pequeno de modo que a variação média de temperatura Δu seja igual a variação de temperatura em algum ponto intermediário $x + \theta \Delta x$, com $0 < \theta < 1$. Portanto, podemos reescrever a equação 2.11 como:

$$Q = \rho (A \Delta x) c [u(x + \theta \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \theta \Delta x, t)] . \quad (2.12)$$

Igualando a equação 2.10 com a equação 2.12, temos:

$$k A [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \Delta t = \rho (A \Delta x) c [u(x + \theta \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \theta \Delta x, t)] ,$$

donde segue que

$$k \frac{[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]}{\Delta x} = \rho c \frac{[u(x + \theta \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \theta \Delta x, t)]}{\Delta t} . \quad (2.13)$$

Fazendo $x \rightarrow 0$ e $t \rightarrow 0$ na equação 2.13 obtemos a equação abaixo, que é a **equação do calor** unidimensional em regime transiente¹:

$$k u_{xx} = \rho c u_t \quad \text{ou} \quad \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} , \quad (2.14)$$

onde $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ é a **difusividade térmica** do material da barra.

Observação 2.2. Para garantir a dedução da equação do calor, realizada acima, temos que considerar a função $u(x, t)$ com derivadas parciais até segunda ordem contínuas na região retangular $R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L ; t > 0\}$.

¹ regime transiente é quando a variação do tempo influencia na variação da temperatura. Na seção 2.5 abordamos a equação do calor em regime estacionário que é quando a variação do tempo não influencia mais na variação da temperatura.

2.3 Problemas de Autovalores

Ao resolvermos a equação do calor numa barra com extremidades mantidas a 0°C , aparece um problema de autovalor ao aplicarmos o Método de Fourier (método da separação de variáveis).

Exemplo 2.1. (Problema de Autovalores) *Encontre a solução não-trivial da E.D.O. $F''(x) - \sigma F(x) = 0$, para $0 \leq x \leq L$, com as condições de contorno $F(0) = F(L) = 0$. (Solução:)*

A equação $F''(x) - \sigma F(x) = 0$ é uma E.D.O. homogênea linear de segunda ordem com coeficientes constantes podendo ser resolvida por meio de sua equação característica associada que é $r^2 - \sigma = 0$; cuja solução é dada por

$$r = \pm \sqrt{\sigma}.$$

Devemos analisar os possíveis valores reais para σ :

Se $\sigma > 0$: Então, teremos duas raízes, reais e distintas ($r_1 = \sqrt{\sigma}$ e $r_2 = -\sqrt{\sigma}$) da equação característica, e assim a solução geral da E.D.O. é dada por

$$F(x) = a_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + a_2 e^{-\sqrt{\sigma}x},$$

daí segue que,

$$F(0) = F(L) = 0 \implies \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + a_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0, \end{cases}$$

mas a única solução deste sistema é $a_1 = a_2 = 0$ o que implica na solução da E.D.O. para $\sigma > 0$ ser $F(x) \equiv 0$.

Se $\sigma = 0$: Então, teremos duas raízes, reais e idênticas ($r_1 = r_2 = 0$) da equação característica, e assim a solução geral da E.D.O. é dada por

$$F(x) = a_1 x + a_2,$$

daí, $F(0) = F(L) = 0 \implies a_1 = a_2 = 0$ o que implica na solução da E.D.O. para $\sigma = 0$ ser $F(x) \equiv 0$.

Se $\sigma < 0$: Então, teremos duas raízes complexas conjugadas da equação característica.

Fazemos $\sigma = -\lambda^2$ (ficando com $r_1 = 0 + \lambda i$ e $r_2 = 0 - \lambda i$) e assim a solução geral da E.D.O. é dada por

$$F(x) = a_1 \cos(\lambda x) + a_2 \sin(\lambda x),$$

daí, $F(0) = F(L) = 0 \implies a_1 = 0$ e $a_2 \sin(\lambda L) = 0$. Como não queremos $a_2 = 0$, devemos ter $\sin(\lambda L) = 0 \implies \lambda L = n\pi \implies \lambda = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto, temos um conjunto de soluções da E.D.O., quando $\sigma < 0$, dado em função de n por

$$F_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.15)$$

Observação 2.3. Os valores $-\sigma = \lambda^2$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (2.16)$$

são chamados os **autovalores** ou valores próprios do problema dado pela E.D.O. $F''(x) + \sigma F(x) = 0$ e pelas condições $F(0) = F(L) = 0$. Note que não é necessário considerar os valores negativos de n , pois estes diferem apenas por sinal dos valores positivos.

Observação 2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, as funções

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.17)$$

são chamadas de **autofunções** ou funções próprias do problema dado pela E.D.O. $F''(x) + \sigma F(x) = 0$ e pelas condições $F(0) = F(L) = 0$.

Exemplo 2.2. Encontre a solução da E.D.O. $G'(t) - \sigma \alpha G(t) = 0$, para $t > 0$.

Onde σ é o determinado no exemplo anterior.

(Solução:)

A equação $G'(t) - \sigma \alpha G(t) = 0$ é uma E.D.O. linear de primeira ordem podendo ser resolvida por integração direta:

$$G'(t) - \sigma \alpha G(t) = 0 \implies \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma \alpha$$

integrando a última igualdade em relação a t e aplicando a função exponencial, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{G'(t)}{G(t)} dt &= \int \sigma \alpha dt \implies \ln |G(t)| = \sigma \alpha t + b_1 \implies \\ \implies e^{\ln |G(t)|} &= e^{\sigma \alpha t + b_1} \implies G(t) = e^{b_1} e^{\sigma \alpha t}, \end{aligned}$$

fazendo $b_n = e^{b_1}$ e usando $\sigma = -\lambda^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ (pelo exemplo anterior) obtemos a solução da E.D.O. que também é uma família de soluções dada por

$$G_n(t) = b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha t}{L^2}}. \quad (2.18)$$

2.4 Resolução da Equação do Calor: Barra Com Extremidades a 0°C

Buscamos agora determinar uma função $u(x, t)$, definida em \bar{R} , que descreva a transferência de calor ao longo de uma barra de comprimento L cujas extremidades T_1 e T_2 são mantidas a 0°C (condições de fronteira²), $u(0, t) = u(L, t) = 0$, tal que u satisfaça a equação do calor em R e a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, ou seja, buscamos resolver o PVIF (Problema de Valor Inicial e de Fronteira):

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & \text{em } R \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.19)$$

onde são dadas a função f e a difusividade térmica α .

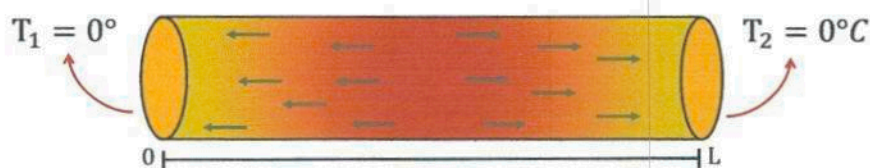


Figura 2.3: Barra com extremidades mantidas a 0°C , supondo que a barra foi aquecida no meio e o calor flui para as extremidades.

² Mais condições de fronteira referentes à equação do calor estão presentes e discutidas em [FIQUEIREDO][3] (capítulo 1, páginas 4 e 5).

Definição 2.10. (Solução do PVIF 2.19) Seja $R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L \text{ e } t > 0\}$ e $\bar{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0\}$ a aderência de R .

Uma função $u : \bar{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do PVIF 2.19 se ela for contínua em \bar{R} , tiver derivadas parciais u_t e u_{xx} em R e satisfizer as três relações em 2.19.

Para resolver o PVIF 2.19 aplicamos o **Método de Fourier** que consiste em separar as variáveis, e procurar soluções $u(x, t)$ na forma

$$u(x, t) = F(x) \cdot G(t), \quad (2.20)$$

ou seja, dada a equação com duas variáveis independentes (x e t) buscamos a equação solução ($u(x, t)$) de forma que ela possa ser expressa pelo produto de uma função que só depende de x por outra função que só dependa de t . Então, o problema que antes relacionava derivadas parciais de x e t pode ser reescrito de forma a relacionar derivadas ordinárias de x e t .

Aplicando o Método de Fourier para resolvermos a E.D.P. do PVIF 2.19 fazemos

$$u(x, t) = F(x) \cdot G(t) \implies \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = F(x)G'(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

e substituímos estes resultados, considerando que $F(x) \neq 0$ e $G(t) \neq 0$, transformamos a E.D.P na equação

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{G'(t)}{G(t)}. \quad (2.22)$$

Na igualdade 2.22 o lado esquerdo independe de t e o lado direito independe de x . Logo, devemos ter ambos os lados independentes de t e de x e, assim existe um parâmetro σ independente de t e de x onde,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{1}{\alpha} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma. \quad (2.23)$$

De 2.23 obtemos o problema de autovalores

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0, & \text{para } 0 < x < L, \\ F(0) = F(L) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

e a equação diferencial

$$G'(t) - \sigma\alpha G(t) = 0, \text{ para } t > 0, \quad (2.25)$$

que por 2.15 e 2.18, têm como soluções não nulas, respectivamente,

$$F_n(x) = a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{e} \quad G_n(t) = b_n e^{-n^2\pi^2\alpha t/L^2}. \quad (2.26)$$

Portanto, a solução $u(x, t) = F(x) \cdot G(t)$ do PVIF 2.19 é na realidade uma família de soluções. Onde, para cada $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ temos uma função do tipo

$$u_n(x, t) = a_n b_n e^{-n^2\pi^2\alpha t/L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.27)$$

a qual satisfaz a equação do calor e as condições $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Aplicando a condição inicial obtemos $u_n(x, 0) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$. Então, $u_n(x, t)$ só será solução do PVIF 2.19 se a função $f(x)$ tiver a forma

$$f(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.28)$$

Observação 2.5. Se $u(x, t)$ e $v(x, t)$ forem soluções da Equação do Calor, então qualquer função da forma

$$a u(x, t) + b v(x, t),$$

onde a e b são constantes, será também solução. Ou seja, combinação linear de soluções também é solução, chamado de **princípio da superposição** que também vale para um número finito de soluções. Assim, qualquer expressão da forma

$$\sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t) \quad (2.29)$$

também é solução do PVIF 2.19, onde os c_n são constantes e os u_n são funções definidas em 2.27 com a_n e b_n incorporados a c_n , já que ambos não variam em função de n .

Por consequência da observação anterior, se a condição inicial $f(x)$ for da forma

$$\sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

então, nesse caso, a solução do PVIF 2.19 será

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-n^2\pi^2\alpha t/L^2} u_n(x, t)$$

E se f não tiver a forma simples de 2.28, então expressamos f como uma soma infinita da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.30)$$

ou seja, substituímos $f(x)$ por sua Série de Fourier que deve ser uma Série de Senos.

Então, o candidato para a solução do PVIF 2.19, nesse caso, é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha t/L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.31)$$

onde os c_n são os coeficientes de Fourier da função f dada em $[0, L]$, e estendida para o resto de \mathbb{R} de modo a ser ímpar e periódica de período $2L$. Assim,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (2.32)$$

Porém, devemos lembrar que a igualdade 2.30 se verifica para todo $x \in [0, L]$ se f for seccionalmente diferenciável e $f(0) = f(L) = 0$.

Exemplo 2.3. Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em uma barra de ferro com 50cm de comprimento a uma temperatura uniforme, inicial, de 20 °C em toda a barra, e cujas extremidades são mantidas a 0 °C para todo $t > 0$.

(Solução:)

A solução do exemplo 2.3 consiste em encontrar $u(x, t)$ que seja solução do PVIF abaixo onde consideremos a difusividade do ferro sendo $\alpha = 0,228 \text{ cm}^2/\text{s}$:

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 50; t > 0 \\ u(0, t) = u(50, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) = 20, & 0 < x < 50 \end{cases}$$

Estendendo $f(x)$ para todos os reais de forma a ser ímpar de período $2L = 100$, temos

$$f(x) = \begin{cases} -20 & \text{se } -50 < x < 0 \\ 20 & \text{se } 0 < x < 50 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e } x = 50 \end{cases} \quad ; \quad f(x) = f(x + 100), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daí podemos expressar a série de Fourier de f , onde

$$c_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} 20 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right) dx = \left[\frac{-40}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{50} \right) \right]_0^{50} = \frac{-40}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(0)]$$

$$= \frac{-40}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \text{ for par} \\ \frac{80}{n\pi} & , \text{ se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40}{n\pi} [(-1)^n - 1] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right) , \quad \forall x \in (0, 50) ,$$

escrevendo termo a termo, obtemos

$$f(x) = \frac{80}{\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{50} \right) + 0 + \frac{80}{3\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi x}{50} \right) + 0 + \frac{80}{5\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi x}{50} \right) + \dots$$

ou escrevendo apenas os termos onde n é ímpar (já que os pares são nulos), segue que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{80}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{50} \right) .$$

Esboçando graficamente f e sua série de Fourier, temos:

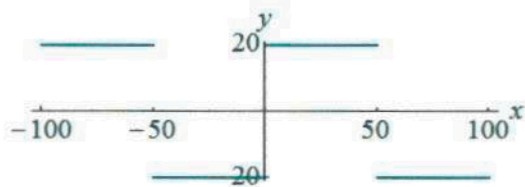


Figura 2.4: Gráfico de f

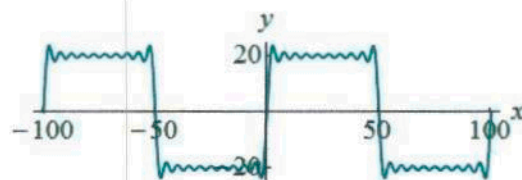


Figura 2.5: Série de f ($n = 20$)

A6

Por fim, obtemos $u(x, t)$ como sendo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40}{n\pi} [(-1)^n - 1] e^{-n^2\pi^2 0,228t/2500} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right) ,$$

escrevendo apenas os termos onde n é ímpar (já que os pares são nulos), temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{80}{(2n-1)\pi} e^{-(2n-1)^2\pi^2 0,228t/2500} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{50} \right) .$$

O gráfico abaixo mostra curvas que representam a temperatura (em °C) ao longo da barra, em instantes de tempo fixados (em segundos), onde é usado $n = 50$.

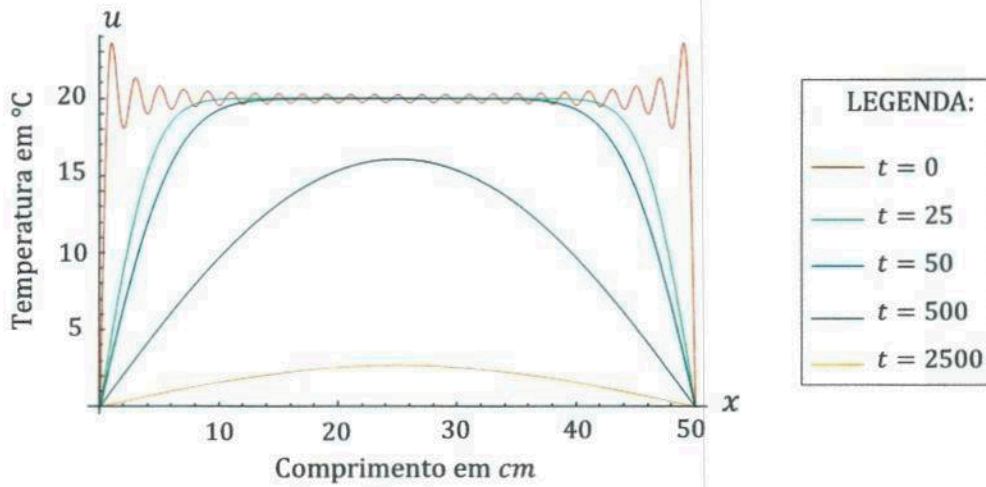


Figura 2.6: Distribuição de temperatura ao longo da barra de ferro

A6

Observe que a temperatura vai diminuindo sempre, à medida que a barra perde calor pelas extremidades. Destacamos ainda que para $t = 0$ a convergência da série é lenta.

Exemplo 2.4. Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma parede de alumínio com 40cm de comprimento cujas extremidades são mantidas a $0\text{ }^\circ\text{C}$ para todo $t > 0$ e a distribuição de temperatura inicial, em $^\circ\text{C}$ é dada pela função:

$$f(x) = u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

(Solução:)

Devemos encontrar $u(x,t)$ que satisfaça ao PVIF:

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 40 ; t > 0 \\ u(0,t) = u(40,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

onde a condutividade do alumínio é $\alpha = 0,975\text{ cm}^2/\text{s}$.

Ampliando f para todos os reais de modo a ser ímpar e periódica de período

$2L = 80$, temos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 40, & -40 \leq x \leq -20 \\ x, & -20 \leq x < 20 \\ 40 - x, & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}, \quad f(x + 80) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calculando a série de Fourier de f obtemos,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{40} \left[\int_0^{20} x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right) dx + \int_{20}^{40} (40 - x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right) dx \right] \\ &= \frac{2}{40} \left[\frac{-40x}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{40} \right) + \left(\frac{40}{n\pi} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right) \right]_0^{20} + \\ &\quad + \frac{2}{40} \left[\frac{-1600}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{40} \right) + \frac{40x}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{40} \right) - \left(\frac{40}{n\pi} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right) \right]_{20}^{40} \\ &= \frac{2}{40} \left[\frac{-800}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \left(\frac{40}{n\pi} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{1600}{n\pi} \cos(n\pi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1600}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1600}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{800}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \left(\frac{40}{n\pi} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{160}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Logo, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{160}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right), \quad \forall x \in [0, 40].$

Esboçando graficamente f e sua série de Fourier, temos:

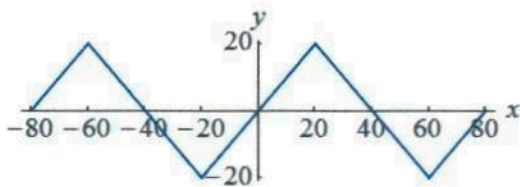


Figura 2.7: Gráfico de f

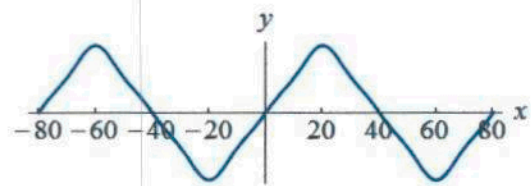


Figura 2.8: Série de f ($n = 5$)

Por fim, obtemos $u(x, t)$ como sendo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{160}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) e^{-n^2\pi^2 \cdot 0,975t/1600} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right).$$

Graficamente, temos as distribuições de temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) ao longo da barra, em instantes de tempo fixados (em segundos), onde é usado $n = 10$:

A7

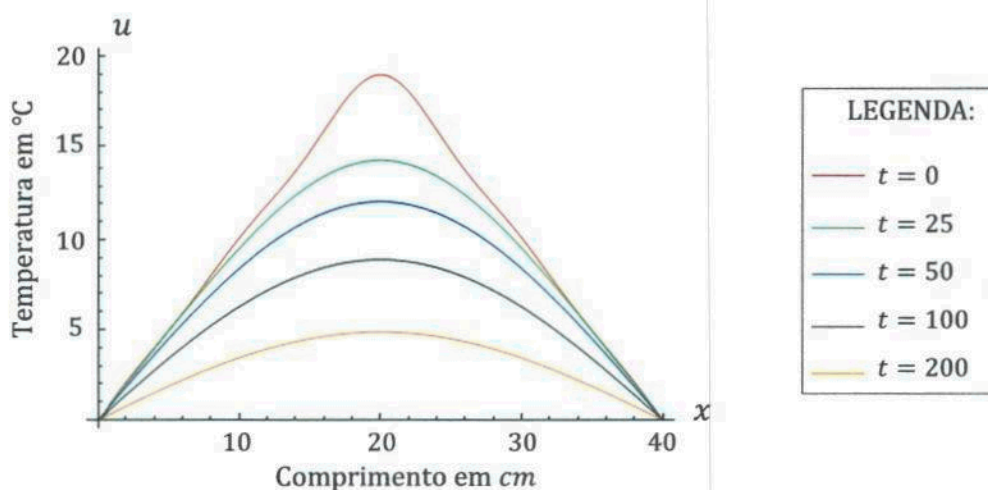


Figura 2.9: Distribuições de temperatura ao longo da parede de alumínio

A7

2.5 Condução do Calor em Regime Estacionário

No início da condução térmica ao longo de uma barra, uma certa quantidade de calor tenta passar de uma extremidade para a outra de modo que nesse processo ocorre desequilíbrios térmicos quando uma seção recebe esse calor de outra seção anterior e no mesmo instante ocorrem equilíbrios térmicos. Esses equilíbrios tendem a tornarem-se cada vez mais rápidos com o passar do tempo, pois as trocas de calor de uma seção para outra seção posterior são contínuas. Desse modo cada i -ésima seção transversal em $x_i \in [0, L]$ da barra tende a ter uma temperatura fixa quando o tempo decorrido for suficientemente grande, ou seja, a variação de temperatura da barra em relação ao tempo tende ser nula.

A equação do calor ao longo de uma barra descrita na seção 2.2 é

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

onde u denota a temperatura em função da posição x e do tempo t . Porém, é de se esperar que o tempo passe a influenciar cada vez menos na temperatura da barra quanto maior ele for. Desta forma podemos dizer que quando $t \rightarrow \infty$, então $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$. Neste caso, a condução do calor na barra ocorre em **Regime Estacionário** e isso significa que depois de muito tempo a temperatura em cada seção da barra permanece constante e a quantidade de calor que entra numa seção é a mesma quantidade que sai.

Quando a condução do calor ao longo da barra passa a ocorrer em regime estacionário, a equação do calor pode ser reescrita como

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (2.33)$$

e podemos expressar $u(x, t)$ sendo apenas $u(x)$.

Segue daí que a solução de 2.33 é dada por:

$$u(x) = ax + b, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.34)$$

Observação 2.6. Nos exemplos 2.3 e 2.4 fica claro a futura ocorrência do regime estacionário nas figuras 2.6 e 2.9, onde as curvas de temperatura ao longo da barra se aproximam do eixo x quanto maior é o valor de t .

2.6 Resolução da Equação do Calor: Barra com Temperaturas Não-nulas nas Extremidades

O modelo matemático que descreve a transferência de calor unidimensional ao longo de uma barra de comprimento L com as extremidades submetidas a temperaturas não nulas³, $u(0, t) = T_1$ e $u(L, t) = T_2$, tal que u satisfaça a equação do calor em R e a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ é:

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & \text{em } R \\ u(0, t) = T_1, u(L, t) = T_2, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases} \quad (2.35)$$

onde f é uma função dada.

Para resolver o PVIF 2.35 vamos reduzi-lo a um PVIF com condição de fronteira homogênea como o da seção 2.4 por meio de uma mudança da variável dependente u .

Inicialmente, suponhamos que é possível achar uma função $v(x, t)$ de classe C^2 definida em \bar{R} tal que

$$v(0, t) = T_1 \text{ e } v(L, t) = T_2. \quad (2.36)$$

³ Na definição da equação do calor, na seção 2.2, consideremos o calor fluindo da seção transversal $x = 0$ para a seção $x = L$. Assim, tomemos sempre $T_1 \geq T_2$.

Se u é solução do PVIF 2.35, considere $w = u - v$ e segue que

$$\begin{cases} w_t = u_t - v_t \\ w_{xx} = u_{xx} - v_{xx} \end{cases} \implies \begin{cases} u_t = w_t + v_t \\ u_{xx} = w_{xx} + v_{xx} \end{cases}$$

Daí,

$$u_t = \alpha u_{xx} \implies w_t + v_t = \alpha (w_{xx} + v_{xx}) \implies w_t = \alpha w_{xx} + (\alpha v_{xx} - v_t) .$$

Fazendo $g(x, t) = \alpha v_{xx} - v_t$, na última igualdade acima, obtemos

$$w_t = \alpha w_{xx} + g(x, t) \tag{2.37}$$

que é a equação do calor após a mudança da variável u para w , se $g \equiv 0$ em R . De fato, isso deve ocorrer pela escolha apropriada da função v , onde v é solução da equação do calor; para isso tomemos v sendo

$$v(x, t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1) x}{L} \tag{2.38}$$

e assim a equação 2.37 passa a ser

$$w_t = \alpha w_{xx} , \tag{2.39}$$

que é a equação do calor na variável dependente w .

Pelo fato de $w = u - v$ segue que $w(0, t) = u(0, t) - v(0, t) = T_1 - T_1$ e $w(L, t) = u(L, t) - v(L, t) = T_2 - T_2$ o que implica em

$$w(0, t) = w(L, t) = 0 , \text{ para } t > 0 \tag{2.40}$$

e segue também que $w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0)$, isto é,

$$w(x, 0) = f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1) x}{L} . \tag{2.41}$$

Usando 2.39, 2.40 e 2.41, temos que w é solução do seguinte PVIF

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}, & \text{em } R \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, & t > 0 \\ w(x, 0) = f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1) x}{L}, & 0 < x < L \end{cases} \tag{2.42}$$

que é um PVIF homogêneo como o PVIF 2.19. Desta forma, a solução de 2.42 é:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha t / L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad (2.43)$$

onde os c_n são os coeficientes da série de Fourier (de seno) da função $\left[f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)x}{L} \right]$ obtidos fazendo

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)x}{L} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx. \quad (2.44)$$

Não esquecendo que a função $\left[f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)x}{L} \right]$ deve ser ímpar, seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$.

Portanto, a solução do PVIF 2.35 é dada por $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, ou seja,

$$u(x, t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha t / L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right). \quad (2.45)$$

Observação 2.7. Note que quando $t \rightarrow \infty$, na equação 2.45, $u(x, t) \rightarrow v(x)$ (estado estacionário).

Observação 2.8. Análogamente ao PVIF 2.35, pode-se resolver o PVIF

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & \text{em } R \\ u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases} \quad (2.46)$$

onde as temperaturas nas extremidades não são constantes, mas sim funções em relação ao tempo. Para isso, é necessário determinar v de classe C^2 de modo que $v(0, t) = h_1(t)$, $v(L, t) = h_2(t)$ e que v seja solução da equação do calor em R , em seguida realizar a mudança de variável e reescrever o PVIF 2.46 em função de w de modo a ser homogêneo. Isso é possível para algumas escolhas de h_1 e h_2 .

Exemplo 2.5. Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em um fio de titânio com 20cm de comprimento cujas extremidades são mantidas a 55°C e 25°C para todo $t > 0$ e a distribuição de temperatura inicial, em $^\circ\text{C}$ é dada pela função $u(x, 0) = f(x) = 85 - 2x$, $0 < x < 20$.

(Solução:)

A solução do exemplo 2.5 consiste em resolver o PVIF abaixo, onde

$$R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 20; t > 0\}$$

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & \text{em } R \\ u(0, t) = 55, \quad u(L, t) = 25, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) = 85 - 2x, & 0 < x < 20 \end{cases} \quad (2.47)$$

Fazendo $v(x, t) = 55 + \frac{(25 - 55)x}{20}$, temos de 2.45 que a solução para $\alpha = 0,08$ é dada por:

$$u(x, t) = 55 + \frac{(25 - 55)x}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 0,08t/L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{20} \right), \quad (2.48)$$

onde os c_n são os coeficientes de Fourier da função $(f - v)$ expandida para todo \mathbb{R} de modo a ser ímpar de período $2L = 40$, são dados por:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{20} \int_0^{20} \left(85 - 2x - 55 - \frac{(25 - 55)x}{20} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{20} \right) dx \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{20} \left(30 - \frac{x}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{20} \right) dx \\ &= \frac{1}{10} \left[\frac{-30 \cdot 20}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{20} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{-20x}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{20} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{20}{n\pi} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{20} \right) \right]_0^{20} \\ &= -\frac{60}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{20}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{60}{n\pi} \\ &= -\frac{40}{n\pi} \cdot (-1)^n + \frac{60}{n\pi}. \end{aligned}$$

$$u(x, t) = 55 + \frac{-3x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{40}{n\pi} \cdot (-1)^n + \frac{60}{n\pi} \right] e^{-n^2 \pi^2 0,08t/L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{20} \right). \quad (2.49)$$

Esboçando graficamente f e v com três períodos, temos:

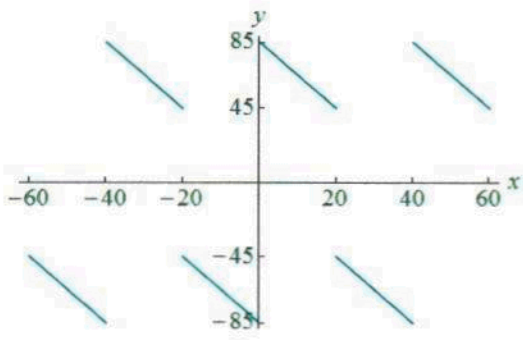


Figura 2.10: Gráfico de f

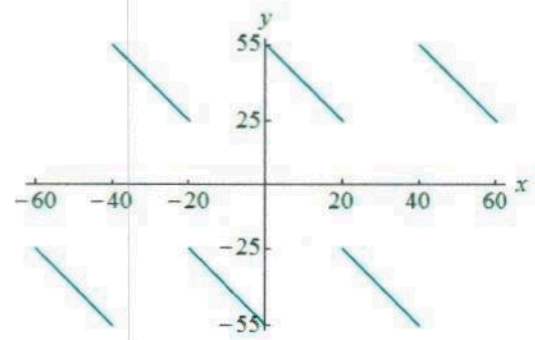


Figura 2.11: Gráfico de v

Já esboçando graficamente $(f - v)$ e sua série de Fourier para $n = 40$, temos

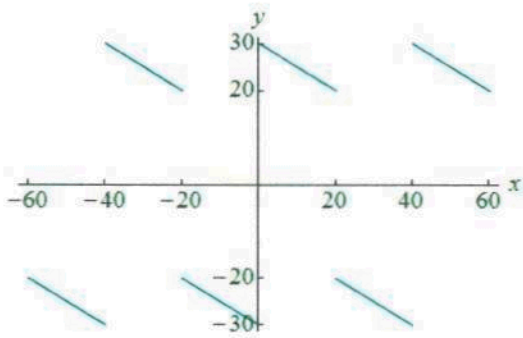


Figura 2.12: Gráfico de $f - v$

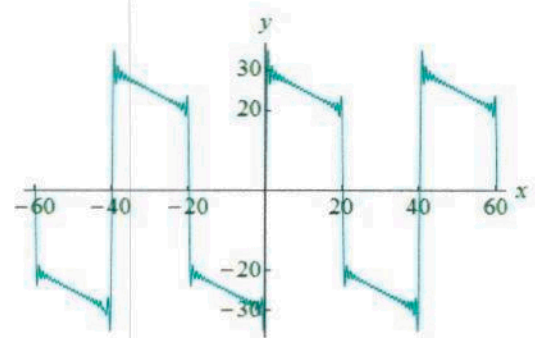


Figura 2.13: Série de $f - v$ ($n = 40$)

A8

Plotando $u(x, t)$ que representa a temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) ao longo do fio, em instantes de tempo fixados (em segundos), onde é usado $n = 40$, temos:

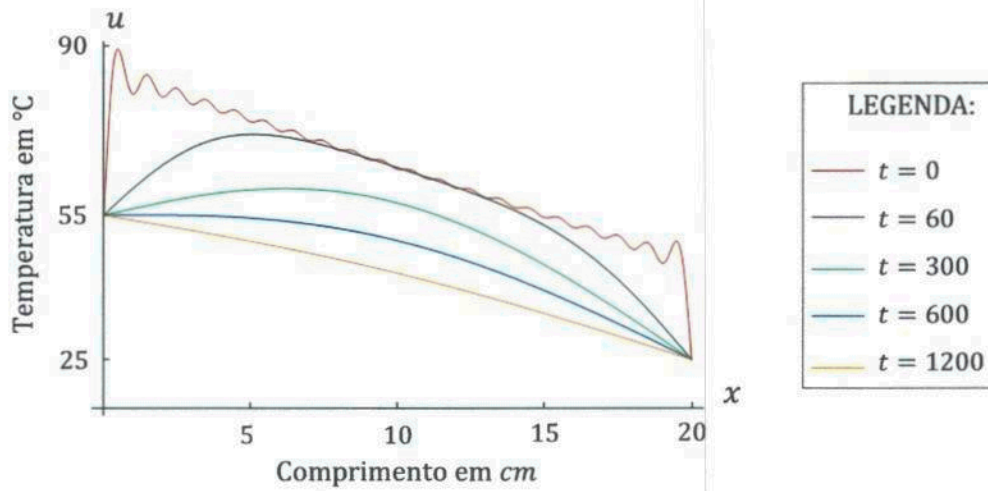


Figura 2.14: Distribuições de temperatura ao longo do fio de titânio

A8

No gráfico acima pode-se perceber $u(x, t)$ tendendo ao estado estacionário (quando t é suficientemente grande) que pela observação 2.7 $u(x, t) \rightarrow v(x)$, ou seja,

$$u(x, t) = v(x) = -\frac{3x}{2} + 55. \quad (2.50)$$

Capítulo 3

Equação de Laplace

3.1 Equação do Calor em Dimensões Maiores

Quando pensamos na condução do calor ao longo do comprimento de uma barra e da sua largura, o modelo matemático que descreve tal processo envolve a equação do calor bidimensional com três variáveis independentes (comprimento, largura e tempo). Assim, a temperatura $u(x, y, t)$ deve satisfazer a equação diferencial:

$$\alpha \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.1)$$

Em regime estacionário, u será função de x e y e $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Então,:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2)$$

Se analisarmos o calor fluindo em todas as direções de uma barra, então ele fluirá ao longo do comprimento, altura e largura da barra. Assim, a condução do calor é tridimensional e envolve quatro variáveis independentes (comprimento, altura, largura e tempo). Neste caso, a equação do calor em regime transiente é expressa como

$$\alpha \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.3)$$

e a equação do calor em regime estacionário passa a ser

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.4)$$

Óbvio que a equação do calor tridimensional modela a condução do calor em uma barra melhor que a equação do calor bidimensional; já a bidimensional representa

melhor que a unidimensional. Porém, quanto mais variáveis consideradas no modelo, mais difícil é obter a solução. Se pensarmos na condução do calor ao longo de um fio que tem área de seção transversal bastante pequena, então é suficiente tratarmos o problema como uma condução apenas ao longo do comprimento do fio (unidimensional). No problema da condução de calor em placas de pequena espessura podemos considerar o problema como bidimensional. Ou seja, a teoria da condução do calor em uma, duas ou três dimensões tem suas aplicações dependendo do fenômeno observado.

Em dimensões maiores, a equação do calor é escrita na forma:

$$\begin{cases} \text{Regime Transiente: } \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u \\ \text{Regime Estacionário: } \Delta u = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 u = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $u = u(X, t)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ é o laplaciano em \mathbb{R}^n nas variáveis espaciais e $\nabla^2 u$ é o gradiente de ordem 2.

3.2 Equação de Laplace e Problema de Dirichlet

Definição 3.1. (Função Harmônica) Uma função $u(x, y)$ contínua numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dita harmônica quando ela satisfaz a **Equação de Laplace**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3.6)$$

onde Ω é um conjunto aberto e conexo.

Denotaremos por $\partial\Omega$ a fronteira de Ω e, por $\bar{\Omega}$ o conjunto dos pontos aderentes a Ω . Sendo que $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Percebe-se que a *Equação de Laplace* é exatamente a *Equação do Calor Bidimensional* em estado estacionário (permanente) onde o laplaciano da função temperatura, $\Delta u(x, y)$, é nulo em Ω .

Exemplo 3.1. Dada a função $u(x, y) = x^2 - y^2$ definida no conjunto aberto e conexo Ω tal que $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 < x < 3 \text{ e } -2 < y < 2\}$, temos que:

$$\bullet \text{ } u \text{ é harmônica, pois } \begin{cases} u_x = 2x \\ u_y = -2y \end{cases} \implies \begin{cases} u_{xx} = 2 \\ u_{yy} = -2 \end{cases} \implies u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0.$$

- $\partial\Omega = \{(-3, y) \mid -2 \leq y \leq 2\} \cup \{(3, y) \mid -2 \leq y \leq 2\} \cup$
 $\cup \{(x, -2) \mid -3 \leq x \leq 3\} \cup \{(x, 2) \mid -3 \leq x \leq 3\} .$
- $\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 3 \text{ e } -2 \leq y \leq 2\} .$

O **Problema de Dirichlet** para a Equação de Laplace trata-se de, dada uma função contínua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, determinar uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- u é contínua em $\bar{\Omega}$,
- u é harmônica em Ω ,
- $u = f$ em $\partial\Omega$ (condição de fronteira).

Segundo [DJAIRO][3], desenvolvimentos marcantes na Matemática do século XIX estão ligados a tentativas de resolver esse problema. Além disso, para uma região qualquer Ω a solução é altamente não-trivial e algumas vezes não possui solução, mas mesmo assim há uma grande quantidade de regiões Ω onde o problema é solúvel.

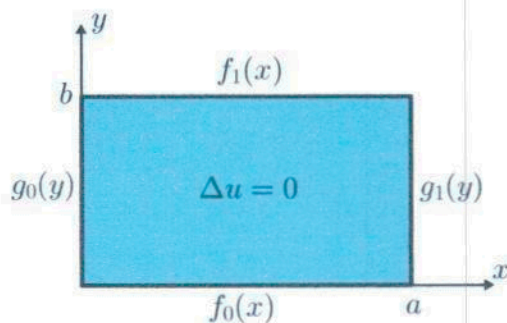
Três formulações e soluções do Problema de Dirichlet clássicos são sobre as regiões:

1. Retângulo: $\Omega = R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a \text{ e } 0 < y < b\}$,
2. Disco: $\Omega = D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \rho^2\}$ onde ρ é o raio,
3. Semiplano: $\Omega = H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty \text{ e } y > 0\}$.

3.3 Problema de Dirichlet no Retângulo

Para resolvermos o Problema de Dirichlet onde a região Ω é um retângulo R , consideremos $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a \text{ e } 0 < y < b\}$. Assim, a fronteira de R é composta de quatro segmentos de reta que compõem a f e podemos representá-los por:

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad u(x, b) = f_1(x), \quad u(0, y) = g_0(y), \quad u(a, y) = g_1(y). \quad (3.7)$$



Note que os dados de fronteira não podem ser arbitrários, já que f deve ser contínua na fronteira. Então as seguintes condições devem ser verificadas:

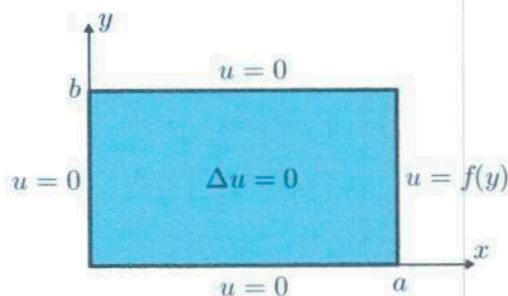
$$f_0(0) = g_0(0), \quad f_0(a) = g_1(0), \quad f_1(a) = g_1(b), \quad f_1(0) = g_0(b). \quad (3.8)$$

Afim de encontrar $u(x, y)$, resolvendo o problema de Dirichlet no retângulo, devemos decompô-lo em outros quatro problemas de Dirichlet onde em cada um deles fazemos três das funções em 3.7 iguais a zero. Resolve-se cada um desses quatro problemas separados e depois obtemos a solução do problema no retângulo como sendo a soma das quatro soluções parciais.

Em particular, vamos resolver o problema de Dirichlet no retângulo R tomando $u(x, 0)$, $u(x, b)$ e $u(0, y)$ como funções identicamente nulas, ou seja, vamos encontrar uma função $u(x, y)$ contínua em \bar{R} solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{em } R \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, & x \in [0, a] \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y), & y \in [0, b] \end{cases} \quad (3.9)$$

onde f é uma função definida em $[0, b]$ que satisfaz $f(0) = f(b) = 0$.



Pelo método da separação de variáveis, procuramos soluções do tipo

$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$. Daí:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Y \cdot \frac{dX}{dx} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Y \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (3.10)$$

$$\text{e } \frac{\partial u}{\partial y} = X \cdot \frac{dY}{dy} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2}. \quad (3.11)$$

Substituindo 3.10 e 3.11 na equação de Laplace, obtemos:

$$Y \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + X \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \implies \frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (3.12)$$

e, como X independe de Y (e vice-versa), existe uma constante σ (constante de separação) tal que:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = \sigma \implies \begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - \sigma X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \sigma Y = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Impondo as condições de contorno homogêneas, temos:

$$\begin{cases} u(x, 0) = X(x) \cdot Y(0) = 0 \\ u(x, b) = X(x) \cdot Y(b) = 0 \\ u(0, y) = X(0) \cdot Y(y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(b) = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

já que buscamos soluções não identicamente nulas.

Usando 3.13 e 3.14, chegamos aos problemas:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} Y''(y) + \sigma Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Semelhante ao exemplo 2.1, o problema de autovalores 3.16 só tem solução não nula se $\sigma > 0$, neste caso

$$\sigma = \sigma_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

e as soluções são da forma

$$Y_n(y) = B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e } y \in [0, b]. \quad (3.18)$$

Agora, para resolver o PVI 3.15 consideremos a equação característica de $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ dada por: $r^2 - \sigma = 0$, cuja solução é $r = \pm\sqrt{\sigma}$. Assim, a equação característica possui duas raízes reais e distintas ($r_1 = \sqrt{\sigma}$ e $r_2 = -\sqrt{\sigma}$) já que σ deve ser o mesmo dado por 3.17. Logo, a solução geral da equação em 3.15 é:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\sigma}x} + Ce^{-\sqrt{\sigma}x},$$

ou seja, $X_n(x) = A_n e^{\frac{n\pi x}{b}} + C_n e^{-\frac{n\pi x}{b}}, n = 1, 2, 3, \dots$ (3.19)

Impondo a condição $X(0) = 0$, obtemos

$$0 = A_n + C_n \implies C_n = -A_n. \quad (3.20)$$

Substituindo 3.20 em 3.19, obtemos a solução do PVI 3.15:

$$X_n(x) = A_n e^{\frac{n\pi x}{b}} - A_n e^{-\frac{n\pi x}{b}} = A_n (e^{\frac{n\pi x}{b}} - e^{-\frac{n\pi x}{b}}),$$

ou seja, $X_n(x) = 2A_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right).$ (3.21)

Então, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ tem-se uma solução da Equação de Laplace que satisfaz apenas as condições de contorno homogêneas:

$$u_n(x, y) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), D_n = 2A_n B_n. \quad (3.22)$$

Usando o princípio da superposição de soluções, temos que:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.23)$$

também é solução. Impondo a condição de contorno não-homogênea $f(y) = u(a, y)$, segue que:

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), y \in [0, b]. \quad (3.24)$$

Estendemos $f(y)$ de modo a ser ímpar e periódica de período $2L = 2b$. Segue que as constantes $\left(D_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\right)$ são os coeficientes de Fourier os quais denotaremos por b_n :

$$b_n = D_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

Desta forma, a solução do problema 3.9 é dada por 3.23, com

$$D_n = \frac{b_n}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.26)$$

Exemplo 3.2. Determine $u(x, y)$ definida em $\bar{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ tal que u seja harmônica em R , $u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = 0 \forall x, y \in \partial R$ e $u(2, y) = f(y) = -y^2 + y, y \in [0, 1]$.

(Solução:)

Os coeficientes de Fourier de $f(y)$ são dados por:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 (-y^2 + y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{1} \right) dy \\
 &= -2 \int_0^1 y^2 \operatorname{sen}(n\pi y) dy + 2 \int_0^1 y \operatorname{sen}(n\pi y) dy \\
 &= -2 \left[-\frac{y^2}{n\pi} \cos(n\pi y) + \frac{2y}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi y) + \frac{2}{n^3\pi^3} \cos(n\pi y) \right]_0^1 + \\
 &\quad + 2 \left[-\frac{y}{n\pi} \cos(n\pi y) + \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi y) \right]_0^1 \\
 &= -2 \left[-\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2}{n^3\pi^3} \cos(n\pi) - \frac{2}{n^3\pi^3} \right] + 2 \left[-\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) \right] \\
 &= \frac{4}{n^3\pi^3} [(-1)^{n+1} + 1], \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Daí,

$$b_n = D_n \operatorname{senh}(2n\pi) = \frac{4}{n^3\pi^3} [(-1)^{n+1} + 1],$$

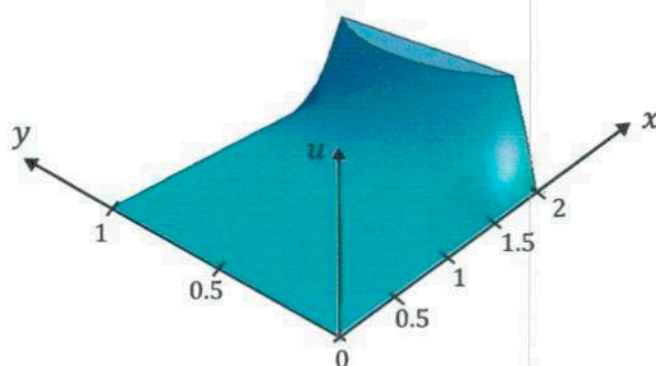
o que implica em

$$D_n = \frac{4 [(-1)^{n+1} + 1]}{n^3\pi^3 \operatorname{senh}(2n\pi)}. \tag{3.28}$$

Logo, $u(x, y)$ é dada por:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4 [(-1)^{n+1} + 1]}{n^3\pi^3 \operatorname{senh}(2n\pi)} \operatorname{senh}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y) \right]. \tag{3.29}$$

Plotando $u(x, y)$ em \bar{R} onde é usado $n = 100$, temos:

Figura 3.1: Distribuição de temperatura em R

A9

A partir de 3.29 pode-se calcular a temperatura $u(x, y)$ em qualquer ponto do interior da placa de dimensões $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ no problema de condução do calor bidimensional em regime permanente com as condições de contorno $u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = 0$ e $u(2, y) = -y^2 + y$. Por exemplo, considerando $n = 100$, temos:

$$\begin{array}{l} u(1, 1/2) = 0.0111282 \\ u(1, 1/5) = 0.00654216 \\ u(3/2, 1/4) = 0.0379832 \end{array} \quad \begin{array}{l} u(1/2, 1/4) = 0.00156812 \\ u(1/2, 1) = 0 \\ u(2, 1/2) = 0.25 \end{array}$$

Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Tradução: Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] CARDOZO, Marcelo dos Santos. *Equação de Onda: Um Fenômeno Físico Resolvido com Ideias da Matemática*. UNIFRA, 2010. Disponível em: <http://www.unifra.br/cursos/matematica/downloads/Marcelo%20dos%20Santos%20Cardozo.pdf>. Acesso em: 01 de novembro de 2013.
- [3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [4] Grupo Virtuous (Tecnologia Educacional). *Só Física: Calorimetria*. Disponível em: <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Termologia/Calorimetria/calor.php>. Acesso em: 02 de março de 2014.
- [5] KREITH, Frank; BOHN, Mark S. *Princípios de Transferência de Calor*. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2003.
- [6] LIMA, Elon Lages. *Análise Real vol. 1 - Funções de uma Variável Real*. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA – Coleção Matemática Universitária, 2012.
- [7] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise vol. 1*. 13 ed. Rio de Janeiro: IMPA – Coleção Projeto Euclides, 2011.
- [8] PROTOLAB (Laboratório de Propriedades Termofísicas). *Difusividade termica*. Disponível em: <http://www.protolab.com.br/Difusividade.htm>. Acesso em: 04 de março de 2014.

- [9] RESNICK, Robert; HALLIDAY, David; KRANE, Kenneth S. *Física 2*. 1 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [10] SANTOS, Fabiano J. *Introdução às Séries de Fourier*. 2004. Disponível em: http://www.matematica.pucminas.br/profs/web_fabiano/calculo4/sf.pdf. Acesso em: 17 de dezembro de 2013.
- [11] SANTOS, Reginaldo J. *Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais* (Apostila de 22 de novembro de 2007). Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da UFMG. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi/>. Acesso em: 10 de julho de 2014.
- [12] SILVA, Marco Aurélio. *Calor Latente e Calor Sensível*. Disponível em: <http://www.brasilecola.com/fisica/calor-sensivel-calor-latente.htm>. Acesso em: 02 de março de 2014.
- [13] SODRÉ, Ulysses. *Séries de Fourier (Notas de Aulas Compiladas no dia 06 de maio de 2003)*. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/sfourier.pdf>. Acesso em: 15 de fevereiro de 2014.
- [14] UFRGS (Instituto de Física). *FISICA NET: Condutividade Térmica*. Disponível em: [http://www.fisica.net/constantes/condutividade-termica-\(k\).php](http://www.fisica.net/constantes/condutividade-termica-(k).php). Acesso em: 04 de março de 2014.
- [15] WEIR, Maurice D.; HASS, Joel; GIORDANO, Frank R. *Cálculo (George B. Thomas Jr.), volume II*. 11 ed. Tradução: Luciana do Amaral Teixeira, Leila Maria Vasconcelos Figueiredo; Revisão Técnica: Cláudio Hirofume Asano. São Paulo: Pearson, 2009.

Apêndice A

Comandos no Mathematica 7

A.1 Gráficos do Exemplo 1.15

Para plotar a Figura 1.9:

```
f = Piecewise[{{-x - 4, -5 <= x < -4}, {x + 4, -4 <= x < -3},  
  {-x - 2, -3 <= x < -2}, {x + 2, -2 <= x < -1}, {-x, -1 <= x < 0},  
  {x, 0 <= x < 1}, {-x + 2, 1 <= x < 2}, {x - 2, 2 <= x < 3},  
  {-x + 4, 3 <= x < 4}, {x - 4, 4 <= x < 5}}]  
Plot[f, {x, -3, 3}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,  
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},  
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},  
  Ticks -> {{-2, -1, 0, 1, 2}, {0, 1}}]
```

Para plotar a Figura 1.10:

```
u = FourierTrigSeries[f, x, 1, FourierParameters -> {1, Pi}]  
Plot[u, {x, -3, 3}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,  
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},  
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},  
  Ticks -> {{-2, -1, 0, 1, 2}, {0, 1}}]
```

Para plotar a Figura 1.11:

```
g = FourierTrigSeries[f, x, 3, FourierParameters -> {1, Pi}]  
Plot[g, {x, -3, 3}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,  
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},  
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},  
  Ticks -> {{-2, -1, 0, 1, 2}, {0, 1}}]
```

Para plotar a Figura 1.12:

```
h = FourierTrigSeries[f, x, 5, FourierParameters -> {1, Pi}]
Plot[h, {x, -3, 3}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-2, -1, 0, 1, 2}, {0, 1}}]
```

Para plotar a Figura 1.13:

```
w = FourierTrigSeries[f, x, 10, FourierParameters -> {1, Pi}]
Plot[w, {x, -3, 3}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-2, -1, 0, 1, 2}, {0, 1}}]
```

Para plotar a Figura 1.14:

```
v = FourierTrigSeries[f, x, 20, FourierParameters -> {1, Pi}]
Plot[v, {x, -3, 3}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-2, -1, 0, 1, 2}, {0, 1}}]
```

A.2 Gráficos do Exemplo 1.19

Para plotar a Figura 1.20:

```
f = Piecewise[{{(x + 4)^2, -6 <= x < -2}, {x^2, -2 <= x < 2},
{(x - 4)^2, 2 <= x < 6}}]
Plot[f, {x, -6, 6}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {0, 2, 4}}]
```

Para plotar a Figura 1.21:

```
g = FourierTrigSeries[f, x, 1, FourierParameters -> {1, Pi/2}]
Plot[g, {x, -6, 6}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {0, 2, 4}}]
```

Para plotar a Figura 1.22:

```
h = FourierTrigSeries[f, x, 2, FourierParameters -> {1, Pi/2}]
Plot[h, {x, -6, 6}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {0, 2, 4}}]
```

Para plotar a Figura 1.23:

```
u = FourierTrigSeries[f, x, 3, FourierParameters -> {1, Pi/2}]
Plot[u, {x, -6, 6}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {0, 2, 4}}]
```

Para plotar a Figura 1.24:

```
v = FourierTrigSeries[f, x, 5, FourierParameters -> {1, Pi/2}]
Plot[v, {x, -6, 6}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {0, 2, 4}}]
```

Para plotar a Figura 1.25:

```
w = FourierTrigSeries[f, x, 10, FourierParameters -> {1, Pi/2}]
Plot[w, {x, -6, 6}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {0, 2, 4}}]
```


A.3 Gráficos do Exemplo 1.20

Para plotar a Figura 1.26:

```
f = Piecewise[{{(x + 5, -5 ≤ x < -3), {2, -3 ≤ x < -1},
  (x + 1, -1 ≤ x < 1), {2, 1 ≤ x < 3}, {x - 3, 3 ≤ x < 5},
  (2, 5 ≤ x < 7)}}]
Plot[f, {x, -5, 7}, AspectRatio → 1/5,
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel → {x, y}, AxesStyle → {21, 21},
  Ticks → {{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {0, 1}}]
```

Para plotar a Figura 1.27:

```
u = FourierTrigSeries[f, x, 1, FourierParameters → {1, Pi/2}]
Plot[u, {x, -5, 7}, AspectRatio → 1/5,
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel → {x, y}, AxesStyle → {21, 21},
  Ticks → {{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},
  (0, 1, 2)}}]
```

Para plotar a Figura 1.28:

```
g = FourierTrigSeries[f, x, 3, FourierParameters → {1, Pi/2}]
Plot[g, {x, -5, 7}, AspectRatio → 1/5,
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel → {x, y}, AxesStyle → {21, 21},
  Ticks → {{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},
  (0, 1, 2)}}]
```

Para plotar a Figura 1.29:

```
h = FourierTrigSeries[f, x, 5, FourierParameters → {1, Pi/2}]
Plot[h, {x, -5, 7}, AspectRatio → 1/5,
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel → {x, y}, AxesStyle → {21, 21},
  Ticks → {{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},
  (0, 1, 2)}}]
```

Para plotar a Figura 1.30:

```
w = FourierTrigSeries[f, x, 10,
  FourierParameters → {1, Pi/2}]
Plot[w, {x, -5, 7}, AspectRatio → 1/5,
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel → {x, y}, AxesStyle → {21, 21},
  Ticks → {{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},
  (0, 1, 2)}}]
```

Para plotar a Figura 1.31:

```
v = FourierTrigSeries[f, x, 20,
  FourierParameters -> {1, Pi/2}]
Plot[v, {x, -5, 7}, AspectRatio -> 1/5,
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {21, 21},
  Ticks -> {{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},
    {0, 1, 2}}]
```

A.4 Gráficos do Fenômeno de Gibbs

Para plotar a Figura 1.32:

```
f = Piecewise[{{(2, -2 ≤ x < -1), (x + 1, -1 ≤ x < 1), (2, 1 ≤ x < 3),
  (x - 3, 3 ≤ x < 4)}}]
Plot[f, {x, -2, 4}, AspectRatio -> 1/2,
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {21, 21},
  Ticks -> {{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, {0, 1, 2}}]
```

Para plotar a Figura 1.33:

```
z = FourierTrigSeries[f, x, 40, FourierParameters -> {1, Pi/2}]
Plot[z, {x, -2, 4}, AspectRatio -> 1/2,
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {21, 21},
  Ticks -> {{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, {0, 1, 2}}]
```

A.5 Gráficos dos Exemplos 1.21 e 1.22

Para plotar a Figura 1.38:

```
f = Piecewise[{{(-4 x / Pi) - 8, -3 Pi ≤ x < -2 Pi},
  {(4 x / Pi) + 8, -2 Pi ≤ x < -Pi}, {-4 x / Pi, -Pi ≤ x < 0},
  {4 x / Pi, 0 ≤ x < Pi}, {(-4 x / Pi) + 8, Pi ≤ x < 2 Pi},
  {(4 x / Pi) - 8, 2 Pi ≤ x < 3 Pi}}]
Plot[f, {x, -3 Pi, 3 Pi}, AspectRatio -> 0.3,
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {25, 25},
  Ticks -> {{-3 Pi, -2 Pi, -Pi, 0, Pi, 2 Pi, 3 Pi}, {2, 4}}]
```

Para plotar a Figura 1.39:

```
m = FourierTrigSeries[f, x, 50, FourierParameters -> {1, 1}]
Plot[m, {x, -3 Pi, 3 Pi}, AspectRatio -> 0.3,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {25, 25},
Ticks -> {{-3 Pi, -2 Pi, -Pi, 0, Pi, 2 Pi, 3 Pi},
{-4, -2, 2, 4}}]
```

Para plotar a Figura 1.40:

```
f = Piecewise[{{(4 x / Pi) + 8, -3 Pi ≤ x < -Pi}, (4 x / Pi, -Pi ≤ x < Pi),
{(4 x / Pi) - 8, Pi ≤ x < 3 Pi}}]
Plot[f, {x, -3 Pi, 3 Pi}, AspectRatio -> 0.4,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {25, 25},
Ticks -> {{-3 Pi, -2 Pi, -Pi, 0, Pi, 2 Pi, 3 Pi}, {-4, -2, 2, 4}}]
```

Para plotar a Figura 1.41:

```
m = FourierTrigSeries[f, x, 50, FourierParameters -> {1, 1}]
Plot[m, {x, -3 Pi, 3 Pi}, AspectRatio -> 0.4,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.5]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {25, 25},
Ticks -> {{-3 Pi, -2 Pi, -Pi, 0, Pi, 2 Pi, 3 Pi}, {-4, -2, 0, 2, 4}}]
```

A.6 Gráficos do Exemplo 2.3

Para plotar a Figura 2.4:

```
f = Piecewise[{{(20, -100 ≤ x < -50), (-20, -50 ≤ x < 0),
(20, 0 ≤ x < 50), (-20, 50 ≤ x < 100)}}]
Plot[f, {x, -100, 100}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.8]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-100, -50, 0, 50, 100}, {-20, 0, 20}}]
```

Para plotar a Figura 2.5:

```
v = FourierTrigSeries[f, x, 20, FourierParameters -> {1, Pi / 50}]
Plot[v, {x, -100, 100}, AspectRatio ->  $\frac{3}{10}$ ,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.8]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-100, -50, 0, 50, 100}, {-20, 0, 20}}]
```


Para plotar a Figura 2.6:

$$T[x_, t_] = \frac{-40}{\pi} \sum_{n=1}^{50} ((-1)^n - 1) \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{50}\right] e^{-((0.228 n^2 \pi^2)/2500) t}}{n}$$

$$a[x_] = \frac{-40}{\pi} \sum_{n=1}^{50} ((-1)^n - 1) \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{50}\right] e^{-((0.228 n^2 \pi^2)/2500) 0}}{n}$$

$$b[x_] = \frac{-40}{\pi} \sum_{n=1}^{50} ((-1)^n - 1) \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{50}\right] e^{-((0.228 n^2 \pi^2)/2500) 25}}{n}$$

$$c[x_] = \frac{-40}{\pi} \sum_{n=1}^{50} ((-1)^n - 1) \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{50}\right] e^{-((0.228 n^2 \pi^2)/2500) 50}}{n}$$

$$d[x_] = \frac{-40}{\pi} \sum_{n=1}^{50} ((-1)^n - 1) \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{50}\right] e^{-((0.228 n^2 \pi^2)/2500) 500}}{n}$$

$$e[x_] = \frac{-40}{\pi} \sum_{n=1}^{50} ((-1)^n - 1) \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{50}\right] e^{-((0.228 n^2 \pi^2)/2500) 2500}}{n}$$

```
<< PlotLegends` ; Plot[{a[x], b[x], c[x], d[x], e[x]}, {x, 0, 50},
PlotStyle -> {Red, Green, Blue, Black, Orange, AbsoluteThickness[1.2]},
AxesLabel -> {x, u}, AxesStyle -> {18, 18}, LabelStyle -> {GrayLevel[0], 16},
PlotLegend -> {"t = 0", "t = 25", "t = 50", "t = 500", "t = 2500"},
LegendLabel -> "Tempo em Segundos", LegendPosition -> {1, -0.45}]
```

A.7 Gráficos do Exemplo 2.4

Para plotar a Figura 2.7:

```
f = Piecewise[{{(80 + x, -80 <= x < -60), (-x - 40, -60 <= x < -40),
(-40 - x, -40 <= x < -20), {x, -20 <= x < 0}, {x, 0 <= x < 20},
(40 - x, 20 <= x < 40), {-x + 40, 40 <= x < 60}, {-80 + x, 60 <= x < 80}}]
Plot[f, {x, -80, 80}, AspectRatio -> 3/10,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.8]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-80, -60, -40, -20, 0, 20, 40, 60, 80}, {-20, 0, 20}}]
```

Para plotar a Figura 2.8:

```
h = FourierTrigSeries[f, x, 5, FourierParameters -> {1, Pi/40}]
Plot[h, {x, -80, 80}, AspectRatio -> 3/10,
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[2.3]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-80, -60, -40, -20, 0, 20, 40, 60, 80}, {-20, 0, 20}}]
```

UFCCV BIBLIOTECA

Para plotar a Figura 2.9:

$$T[x_, t_] = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{10} \text{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right] \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{40}\right] e^{-((0.975 n^2 \pi^2)/1600) t}}{n^2}$$

$$a[x_] = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{10} \text{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right] \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{40}\right] e^{-((0.975 n^2 \pi^2)/1600) 0}}{n^2}$$

$$b[x_] = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{10} \text{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right] \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{40}\right] e^{-((0.975 n^2 \pi^2)/1600) 25}}{n^2}$$

$$c[x_] = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{10} \text{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right] \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{40}\right] e^{-((0.975 n^2 \pi^2)/1600) 50}}{n^2}$$

$$d[x_] = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{10} \text{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right] \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{40}\right] e^{-((0.975 n^2 \pi^2)/1600) 100}}{n^2}$$

$$e[x_] = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{10} \text{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right] \frac{\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{40}\right] e^{-((0.975 n^2 \pi^2)/1600) 200}}{n^2}$$

```
<< PlotLegends` ; Plot[{a[x], b[x], c[x], d[x], e[x]}, {x, 0, 40},
PlotStyle -> {Red, Green, Blue, Black, Orange, AbsoluteThickness[1.2]},
AxesLabel -> {x, u}, AxesStyle -> {18, 18}, LabelStyle -> {GrayLevel[0], 16},
PlotLegend -> {"t = 0", "t = 25", "t = 50", "t = 100", "t = 200"},
LegendLabel -> "Tempo em Segundos", LegendPosition -> {1, -0.45}]
```

A.8 Gráficos do Exemplo 2.5

Para plotar a Figura 2.10:

```
f = Piecewise[{{(-165 - 2 x, -60 < x < -40), (5 - 2 x, -40 < x < -20),
(-85 - 2 x, -20 < x < 0), (85 - 2 x, 0 < x < 20),
(-5 - 2 x, 20 < x < 40), (165 - 2 x, 40 < x < 60)}}]
Plot[f, {x, -60, 60},
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.8]},
AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
Ticks -> {{-60, -40, -20, 0, 20, 40, 60}, {-85, -45, 45, 85}}]
```

Para plotar a Figura 2.11:

```
v = Piecewise[{{(-115 + (25 - 55) x / 20, -60 < x < -40),
  (-5 + (25 - 55) x / 20, -40 < x < -20),
  (-55 + (25 - 55) x / 20, -20 < x < 0),
  (55 + (25 - 55) x / 20, 0 < x < 20),
  (5 + (25 - 55) x / 20, 20 < x < 40),
  (115 + (-55 + 25) x / 20, 40 < x < 60)}}]
Plot[v, {x, -60, 60},
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.8]},
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
  Ticks -> {{-60, -40, -20, 0, 20, 40, 60},
  {-55, -25, 0, 25, 55}}]
```

Para plotar a Figura 2.12:

```
Plot[f - v, {x, -60, 60},
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.6]},
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
  Ticks -> {{-60, -40, -20, 0, 20, 40, 60},
  {-30, -20, 0, 20, 30}}]
```

Para plotar a Figura 2.13:

```
G = Piecewise[{{(f - v, -60 < x < 60)}}]
g = FourierTrigSeries[G, x, 40,
  FourierParameters -> {1, Pi / 20}]
Plot[g, {x, -60, 60},
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], AbsoluteThickness[1.5]},
  AxesLabel -> {x, y}, AxesStyle -> {20, 20},
  Ticks -> {{-60, -40, -20, 0, 20, 40, 60},
  {-30, -20, 0, 20, 30}}]
```

Para plotar a Figura 2.14:

```

T[x_, t_] = 55 + (25 - 55) x / 20 +
  Sum[ ((-40 / (n pi) (-1)^n + 60 / (n pi)) Sin[n pi x / 20] e^{-((0.08 n^2 pi^2) / 400) t} ),
  {n, 1, 40} ]
a[x_] = 55 + (25 - 55) x / 20 +
  Sum[ ((-40 / (n pi) (-1)^n + 60 / (n pi)) Sin[n pi x / 20] e^{-((0.08 n^2 pi^2) / 400) 0} ),
  {n, 1, 40} ]
b[x_] = 55 + (25 - 55) x / 20 +
  Sum[ ((-40 / (n pi) (-1)^n + 60 / (n pi)) Sin[n pi x / 20] e^{-((0.08 n^2 pi^2) / 400) 60} ),
  {n, 1, 40} ]
c[x_] = 55 + (25 - 55) x / 20 +
  Sum[ ((-40 / (n pi) (-1)^n + 60 / (n pi)) Sin[n pi x / 20] e^{-((0.08 n^2 pi^2) / 400) 300} ),
  {n, 1, 40} ]
e[x_] = 55 + (25 - 55) x / 20 +
  Sum[ ((-40 / (n pi) (-1)^n + 60 / (n pi)) Sin[n pi x / 20] e^{-((0.08 n^2 pi^2) / 400) 600} ),
  {n, 1, 40} ]
k[x_] = 55 + (25 - 55) x / 20 +
  Sum[ ((-40 / (n pi) (-1)^n + 60 / (n pi)) Sin[n pi x / 20] e^{-((0.08 n^2 pi^2) / 400) 1200} ),
  {n, 1, 40} ]
<< PlotLegends` ; Plot[{a[x], b[x], c[x], e[x], k[x]},
  {x, 0, 20},
  PlotStyle -> {Red, Black, Green, Blue, Orange},
  AbsoluteThickness[1.2], AxesOrigin -> {0, 15},
  AxesLabel -> {x, u}, AxesStyle -> {18, 18},
  LabelStyle -> {GrayLevel[0], 16},
  Ticks -> {{0, 5, 10, 15, 20}, {0, 25, 55, 90}},
  PlotLegend -> {"t = 0", "t = 60", "t = 300", "t = 600",
  "t = 1200"}, LegendLabel -> "Tempo em Segundos",
  LegendPosition -> {1, -0.45}]
  
```

A.9 Gráficos do Exemplo 3.2

Para plotar a Figura 3.1:

$$T[x_, y_] = \sum_{n=1}^{40} \frac{4((-1)^{n+1} + 1)}{n^3 \pi^3 \text{Sinh}[2 n \pi]} \text{Sinh}[n \pi x] \text{Sin}[n \pi y]$$

```

Plot3D[{T[x, y]}, {x, 0, 2}, {y, 0, 1}, Mesh -> None,
  Axes -> True,
  PlotStyle -> Directive[Cyan, Opacity[0.8],
    Specularity[White, 50], Mesh -> None, PlotPoints -> 10],
  Boxed -> False, AxesOrigin -> {0, 0, 0},
  AxesStyle -> {22, 22, 22}, AxesLabel -> {x, y, u},
  LabelStyle -> {GrayLevel[0], 20},
  Ticks -> {{0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {0.5, 1}, {0.25}}]

```