UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE

UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática

Ivanielma Santos de Souza

# Uma Proposta de Ensino de Função Afim com o Auxílio do Geogebra

Cuité - PB

2014

Ivanielma Santos de Souza

# Uma Proposta de Ensino de Função Afim com o Auxílio do Geogebra

TCC apresentado ao curso Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Anselmo Ribeiro Lopes

Cuité-PB

2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S729p Souza, Ivanielma Santos de.

Uma proposta de ensino de função afim com auxílio do geogebra. / Ivanielma Santos de Souza – Cuité: CES, 2014.

116 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2014.

Orientador: Anselmo Ribeiro Lopes.

1. TIC's. 2. Geogebra. 3. Função afim. I. Título.

CDU 517.55

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG**
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO – UAE

Ivanielma Santos de Souza

**Uma Proposta de Ensino de Função Afim com o Auxílio do Geogebra**

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso submetida à banca examinadora como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de Graduação em Licenciatura em Matemática.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas de ética científica.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprovado em 10 de abril de 2014.

**Banca Examinadora**

Anselmo Ribeiro Lopes
Prof. Anselmo ribeiro Lopes
(Orientador)

Maria de Jesus Rodrigues da Silva
Profª. Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Luciano Martins Barros
Prof. Luciano Martins Barros

Aos meus pais Zelma Ferino e Francisco Henrique, sendo para mim exemplos de perseverança, caráter e amor. Amo vocês!.

# Agradecimentos

Existem situações na vida que é de fundamental importância poder contar com o apoio e a ajuda de algumas pessoas. Para a realização deste trabalho de conclusão de curso, pude contar com algumas. E a essas pessoas prestarei, através de poucas palavras, os meus sinceros agradecimentos.

Em primeiro lugar agradeço a Deus, que com sua sabedoria e com o seu poder infinito, sempre esteve ao meu lado, dando-me força para continuar lutando por meus objetivos e ideais. A Ele toda honra, toda glória e todo louvor. Obrigada meu Deus pela oportunidade de concluir mais esta etapa da minha vida.

Um agradecimento mais que especial a todas às pessoas maravilhosas que, orientados por Deus contribuíram para realização deste trabalho e que fazem parte de minha vida, além de contribuem significativamente para o meu sucesso, são eles:

Minha família: irmãos, sobrinhos e principalmente a meus pais, pela compreensão nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior. Agradeço ainda, por sempre me fazerem entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente! Agradeço por toda confiança e expectativa depositadas em mim, e espero ter correspondido a altura. Agradeço especialmente e grandiosamente à minha mãe, heroína, que me deu apoio e incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço durante esta jornada, que sofreu comigo nas dificuldades e também se alegrou a cada vitória. Obrigada pela ajuda sempre tão importante e indispensável em minha vida. Compartilho com vocês o meu sucesso.

Gostaria de Agradecer e compartilhar ainda o meu sucesso com uma pessoa de extrema importância em minha vida. Alguém que apesar das decepções se fez extremamente especial pra mim, e de forma única e carinhosa contribuiu para meu sucesso e para meu crescimento como pessoa. A ele agradeço pelas confidências e pela confiança depositada em mim, e que posso afirmar que é recíproca. Obrigada pelo apoio e incentivo constantes, pela atenção, pelos conselhos sábios, apesar de alguns deles egoístas que eu sei, pela paciência, pela amizade, pelo companheirismo, em fim pelo "amor-amigo" e por participar mais intensamente da minha vida, se tornando único e necessário pra mim. Obrigada Rafael Bruno, pelo elogio que só vem de quem ama e ainda por te importares comigo e por te orgulhares de mim. Amo você.!

Agradeço aos colegas Luana, Vanessa Lays, Sérgio, Wellison, Izídio, Jaldir, Gerivaldo e Franklim Kaic, pelo incentivo, apoio e ajuda. As aulas e os projetos ao longo do curso com certeza foram muito agradáveis por poder compartilhar e aprender com todos vocês. A vocês meu muito obrigado pela amizade conquistada que se deu não por elogios mas por atitudes de ajuda mutua.

Um agradecimento especial a professora Maria de Jesus Rodrigues, pela atenção dedicada, pelo apoio, incentivo e paciência, e ainda por acreditar no meu potencial. Você contribuiu diretamente para o meu sucesso nesse curso, sendo para mim um dos melhores exemplo de profissional e de pessoa. Obrigada por compartilhar de sua sabedoria na tarefa de ensinar e orientar, por sua generosidade e ainda por fazer parte da minha banca examinadora. Sou muito grata e que Deus a abençoe sempre.

Agradeço ao Prof. Luciano Martins Barros por toda contribuição para minha formação durante o ensino fundamental e médio sendo um excelente exemplo de professor, obrigada pelo incentivo professor. Foi um prazer tê-lo na banca examinadora.

Agradeço ao Prof. Anselmo Ribeiro Lopes pela orientação.

Meu muito obrigada as professoras Márcia Cristina Brito e Gisélia Vasconcelos pelos conselhos e orientações ao longo da disciplina e principalmente pelos ensinamentos transmitidos ao longo do curso.

Agradeço ainda a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática que tanto contribuíram para minha formação acadêmica, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender.

*Quanto a mim... Eu não sei o que me espera amanhã ou depois, mas estou em paz, porque eu sei que todas as energias positivas do Universo, conspiram para dar o melhor pra mim.*

À todos, meus sinceros agradecimentos !!.

*Se o ensino da Matemática nos cursos básicos fosse feito realmente como deveria ser, com vivo interesse, clareza e simplicidade, essa fabulosa ciência exerceria sobre todos os homens estranha e desmedida fascinação.*

Rey Pastor

# Resumo

Neste trabalho tem-se como propósito apresentar as contribuições de uma abordagem pedagógica, pautada na articulação entre a visualização e a experimentação proporcionada pelo ambiente informatizado, temática atualmente em evidência e que se refere ao uso de novas tecnologias de informação e comunicação na educação básica, a fim de proporcionar aos alunos um aprendizado mais rico, claro e atualizado no que se refere às ferramentas tecnológicas disponíveis ao processo de ensino/aprendiagem, mais especificamente os recursos computacionais e em particular o uso de softwares que se encontram disponíveis para o ensino dos conceitos de funções. Os elementos observados emergiram da manipulação do *software Geogebra*, nesse ambiente, desenvolveu-se e construíu-se esta proposta de estudo. Esse software nos oferece uma linguagem dinâmica, uma interface simples, facilitando assim o manuseio do mesmo pelos alunos em sala de aula ou em casa. É válido ressaltar que o uso deste tipo de ferramenta tecnológica não tem a intenção de substituir as aulas conceituais, desta forma faz-se necessário apresentar a formalidade exigida por essa ciência, nem tão pouco, substituir o professor, muito pelo contrário, esse tipo de ferramenta tem um papel muito importante e atualmente indispensável na construção do conhecimento, auxiliando o professor a explorar os conceitos e tornar o processo de ensino aprendizagem do conteúdo de funções, e em particular de funções afins mais dinâmico e atrativo aos olhos dos alunos. Contudo, além das discussões sobre as TIC's, e a abordagem do software Geogebra, se faz necessário constituir as atividades desenvolvidas com auxílio do software que são propostas para os alunos e profexssores bem como somente para o professor.

**Palavras-chave:** TIC's; Geogebra; Função Afim.

# Abstract

This paper aims to present the contributions of a pedagogical approach, based on the relationship between visualization and experimentation afforded by computerized environment, thematic currently in evidence and which refers to the use of new information and communication technologies in basic education, the order to provide students with a richer, clearer and updated in regard to learning technological tools available to the teaching/learning, more specifically the computational resources and in particular the use of software that are available for teaching the concepts of functions. The observed elements emerged manipulating the *Geogebra software*, in this environment, developed and built up this proposed study. This software offers us a dynamic language, a simple interface, thus facilitating its handling by the students in the classroom or at home. It is worth noting that the use of this type of technological tool is not intended to replace the conceptual classes, thus it is necessary to submit the formality required by this science, nor replace the teacher, quite the contrary, this type of tool has a very important and currently indispensable role in building knowledge, assisting the teacher to explore the concepts and make the process of teaching and learning of the content of tasks, and in particular more dynamic and appealing to the students related functions. However, besides discussing TIC's, and the approach of the Geogebra software, it is necessary to constitute the activities with the help of software that are proposed for students and profexssores and only for the teacher.

**Keywords:** TIC's; Geogebra; In Order Function.

# Sumário

**Introdução** **11**

**1 Tecnologias no Ensino** **13**

1.1 O Uso de TIC's na Educação . . . . . . 13

1.2 Motivação . . . . . . 15

1.3 O Estudo de Funções Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: PCNEM . . . . . . 20

1.4 O Uso de Softwares no Ensino de Funções . . . . . . 23

**2 Funções** **25**

2.1 Breve Abordagem Histórica Acerca do Conceito de Funções . . . . . . 25

2.2 Noção Intuitiva de Função . . . . . . 32

2.3 Conceitos Preliminares: Par Ordenado, Produto Cartesiano e Relação . 34

2.4 Maneiras de Representar uma Função . . . . . . 40

2.5 Definindo Função . . . . . . 40

2.6 Domínio, Contradomínio e Imagem . . . . . . 44

2.7 Gráfico de uma Função . . . . . . 45

**3 Função Afim** **51**

3.1 Definição . . . . . . 51

3.2 A Função Afim no Cotidiano . . . . . . 53

3.3 Casos Particulares da Função Afim . . . . . . 56

3.4 Taxa de Variação . . . . . . 58

3.5 Gráfico da Função Afim . . . . . . 58

3.5.1 Como Construir o Gráfico de uma Função Afim . . . . . . 64

3.6 Zero da Função Afim . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65

3.7 Crescimento e Decrescimento da Função Afim . . . . . . . . . . . . . . 66

3.8 Estudo do Sinal da Função Afim . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68

**4 Ensino de Função Afim com Auxílio do Geogebra** **71**

4.1 O software Geogebra . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

4.1.1 Conhecendo o Geogebra . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72

4.1.2 Características do Software . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73

4.1.3 Pontos: livres ou dependentes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

4.1.4 Funções da Barra de Ferramentas . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

4.2 Função Afim com o Uso do Geogebra . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77

4.2.1 Gráfico da Função Afim no Geogebra . . . . . . . . . . . . . . . . 78

4.2.2 Zero da Função Afim no Geogebra . . . . . . . . . . . . . . . . . 84

4.2.3 O Ponto em que o Gráfico Intersepta o Eixo das Ordenadas . . 86

4.2.4 Crescimento e Decrescimento da Função Afim no Geogebra . . . 87

4.2.5 Sinal da Função Afim no Geogebra . . . . . . . . . . . . . . . . . 91

4.2.6 Lei da Função Afim no Geogebra . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95

**5 Considerações Finais** **108**

**Referências Bibliográficas** **111**

# Introdução

Ao longo dos anos a Matemática vem se tornando uma disciplina cada vez mais evoluída e dinâmica, apesar de que em sua maioria não é vista de tal forma pelos discentes. A capacidade de estabelecer relações entre as diferentes áreas do conhecimento é uma habilidade desejável para o bom desempenho, no mundo globalizado de hoje.

Nesse contexto, o estudo das funções em particular, percorre o conhecimento escolar desde as primeiras noções de proporcionalidade nas séries iniciais até as séries finais do ensino básico e no nosso cotidiano. Esse conceito desempenha um papel importante na formação dos estudantes, visto que, está entre as mais úteis noções em toda a matemática e se faz presente em quase todas as atividades desenvolvidas tanto na matemática quanto em várias outras ciências. Este conteúdo é de fundamental importância para que possamos entender e expressar situações e fenômenos do nosso dia a dia, ou seja, as funções são as melhores ferramentas para descrever o mundo real em termos matemáticos. A capacidade de sintetizar uma grande quantidade de informações através de uma equação matemática ou da representação gráfica pode ser um grande diferencial.

Por vezes, conseguimos cativar a atenção dos alunos para a aula de Matemática, a partir do momento em que introduzimos algo de novo na aula, como por exemplo, uma ferramenta tecnológica para aprender Matemática. É fato, que no ensino do conteúdo de funções na Educação Básica, os professores demandam muito tempo no que diz respeito aos procedimentos e técnicas relativas às construções gráficas. E para realizar a análise do comportamento do gráfico de uma função a partir da variação da lei da função, tem-se apenas ensinado técnicas de construção de gráficos.

Visando esta realidade, o presente trabalho consisti em elaborar uma proposta para a introdução e exploração dos principais conceitos presentes no estudo de funções afins, promovida em um ambiente informatizado. A proposta foi desenvolvida tendo em particular como público alvo, alunos do 1ª ano do ensino médio.

Afim de explanar bem a importância da inclusão de novas tecnologias no ensino de Matemática; no capítulo 1, trazemos uma abordagem sobre as TIC's - (Tecnologias de Informação e Comunicação) no ensino, no nosso caso, no estudo de funções. No capítulo 2 faz-se uma abordagem histórica acerca do surgimento do conceito de funções, procurando identificar as diversas interpretações/representações que estiveram presentes na criação e no desenvolvimento do conceito. No capítulo 3, tratará de uma abordagem formal e aplicativa do conteúdo a ser explorado no Geogebra, aperfeiçoando a Função Afim e sua aplicabilidade em nosso dia a dia. No capítulo 4, abordar-se-á a importância da utilização do software Geogebra para compreender o estudo das funções e suas características. Por fim, no capítulo 5, as considerações finais que apontam para importância do uso das TIC's no ensino de matemática.

# Capítulo 1

# Tecnologias no Ensino

Nas seções que seguem neste capítulo, abordaremos alguns aspectos relevantes que levaram a motivação e construção apresentada.

## 1.1 O Uso de TIC's na Educação

Atualmente, os modernos recursos didáticos e demais equipamentos relacionados ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação - TIC's se tornaram fundamentais para a vida contemporânea, sobretudo, para a Educação. As TIC's podem ser definidas como um conjunto de recursos tecnológicos utilizados de forma integrada, com um objetivo comum, a concepção que devemos ter é de que são recursos excelentes para ensinar e aprender matemática, além de outras áreas de conhecimento.

Na educação presencial, as TIC's são vistas como potencializadoras dos processos de ensino-aprendizagem. Essas ferramentas, por sua vez, quando usadas corretamente mudam a forma de fazer, compreender e ensinar a matemática ajudando o professor a enriquecer suas aulas, proporcionando assim uma aprendizagem significativa para os alunos. Da mesma maneira que não se questiona o papel alfabetizador, não podemos mais abrir mão da presença das Tecnologias da Informação e Comunicação no âmbito escolar. O uso de tecnologias nas escolas vem rompendo barreiras e se tornando cada vez mais efetivo, para isso conta com dois fatores que precisam ocorrer em paralelo: primeiramente o professor munido de uma incorporação tecnológica e segundo o fornecimento de tecnologias para a escola pelo Sistema Educacional.

A maneira mais coerente de se trabalhar as TIC's em sala de aula é com o uso do computador que auxilia o aluno no processo de aprendizagem e ainda na independência e autonomia no uso dos softwares que possibilitam o pensamento, a reflexão e capacidade de resposta na resolução de problemas. Esta ferramenta desenvolve uma influência poderosa sobre o aluno, pois permite desenvolver diversas competências que, por vezes, se encontram esquecidas no currículo educacional. Sem dúvida o uso do computador tem ocupado um papel ativo na educação, referindo-se a sala de aula, não é mais uma opção do professor, mas uma necessidade na formação do mesmo, aprimorar a qualidade do ensino transmitido ao aluno.

Os profissionais da docência vêm buscando cada vez mais se capacitar em relação ao uso das TIC's, espera-se do professor que não somente se aprenda sobre elas, mas que as incorpore em suas atividades de ensino como uma ferramenta para aprendizagem dos alunos. Isso requer conhecimento e capacidade de planejar, criar e recriar ambientes de aprendizagem, para que assim caminhem em paralelo aos discentes, que em sua maioria, já estão familiarizados com as marcas da evolução digital do mundo contemporâneo, visto que atualmente, a maioria deles já utiliza o computador como ambiente de entretenimento (jogos) ou de comunicação e convívio social (redes sociais). Ao aplicar as TIC's em sala de aula, os professores deixam de ser os transmissores do conhecimento, os detentores do saber e passam a desempenhar o papel de mediadores do conhecimento, de orientadores frente ao aluno.

Diante deste cenário, a inclusão das tecnologias em sala de aula tem ocorrido de modo muito acentuado através da utilização de softwares educativos, os quais ao serem utilizados vêm garantindo uma melhor aprendizagem dos conteúdos matemáticos, com inúmeras opções disponíveis. O uso dessas ferramentas computacionais promove um enriquecimento dos ambientes de aprendizagem no qual o aluno, interagindo com os objetos, tem chance de construir o seu conhecimento. Porém, esta construção deve ser mediada diante o professor, porque às vezes, os conceitos são aprendidos de forma incorreta.

Essas ferramentas vêm garantindo, por meio da construção interativa de "figuras"e "objetos", uma melhora significativa da compreensão dos alunos, através da visualização, percepção dinâmica de propriedade e realização de investigações matemáticas. Neste caso, é possível enxergar através de tarefas ligadas às novas tecnologias o fato de que o aluno aprende a ser o verdadeiro construtor do seu conhecimento, acarretando em um melhor e mais rico processo de ensino-aprendizagem. Por esses e outros motivos é necessário inserir o uso de tecnologias nas aulas de matemática.

Atualmente, a tecnologia influencia a sociedade e as relações entre todos os indivíduos. É perceptível a presença das tecnologias a nossa volta, elas estão inseridas diretamente ou indiretamente, no cotidiano das pessoas, em particular no cotidiano dos nossos alunos, a presenças das tecnologias na Educação é evidente, não tendo mais sentido a discussão sobre usar ou não o computador, os softwares e os demais recursos disponíveis nas escolas. Assim, a aprendizagem matemática através de softwares depende de ações como, experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. Por meio da informática na educação, o conhecimento é construído a partir de investigação e exploração, potencializando o processo ensino-aprendizagem.

## 1.2 Motivação

Em pleno século XXI, são inúmeros os avanços encontrados em várias áreas do conhecimento e em diversos setores da sociedade, como a tecnologia nas técnicas e procedimentos nos processos cirúrgicos no campo da saúde, as sofisticadas máquinas de automação, no campo da indústria, no gerenciamento, nas diversas formas de publicidade no campo do comércio, na informação simultânea e comunicação imediata no setor de investimentos, e no campo da educação não pode ser diferente, no que se refere ao processo de ensino-aprendizagem. Sem dúvida, de todos os recursos tecnológicos, o computador é o que mais avança e possibilita a maior variedade de utilização nos meios educacionais.

Segundo (GONÇALVES e NUNES, [12]) As TIC's, em particular, são tecnologias que possibilitam a veiculação da informação e da comunicação com rapidez, dinamismo, com difusão de imagem e som. Reconhecemos o papel de outras tecnologias, como o rádio, o videocassete, a televisão etc., porém, limitamos nosso trabalho às TIC's mais recentes, como o computador e os softwares.

No campo da educação, o ensino da Matemática na perspectiva das tecnologias deve ter como objetivos o estímulo à curiosidade, à imaginação, à comunicação, à construção de diferentes possibilidades para a resolução de problemas e o desenvolvimento das capacidades cognitivas. Essas tecnologias, como a calculadora, o retroprojetor, o datashow, e o computador são ferramentas que conseguem possibilitar situações de aprendizagem mais significativas para os alunos.

Neste cenário, é possível para o professor aliar os conteúdos matemáticos às novas tecnologias. Para tanto, levantamos algumas indagações:

- Como as TIC's influenciam o ensino de matemática atualmente?

  Essas ferramentas têm garantido um melhor rendimento no processo de ensino-aprendizagem do alunado. Sabemos que as TIC's estabelecem ligações entre a Matemática e os conteúdos de outras áreas do conhecimento, utilizando-as como elemento interdisciplinar, podemos dinamizar o processo de ensino-aprendizagem, viabilizando potencialidades inerente a atuação de um cidadão protagonista na sociedade tecnológica vigente. No mundo de hoje, as tecnologias são indispensáveis na educação das crianças e dos adolescentes, visto que estes se encontram rodeados de tecnologias por toda parte. O estudante do futuro será cada vez mais interativo e participará da construção do próprio saber utilizando as novas tecnologias.

- Quais as implicações educacionais decorrentes da inserção dos recursos tecnológicos no ensino da Matemática?

  Espera-se que os alunos familiarizados com esses recursos possam demonstrar mais interesse e, possivelmente, melhores desempenhos fazendo uso de tais ferramentas voltadas ao ensino da matemática. A apropriação das TIC's, no espaço escolar contribui para uma ressignificação do conceito de conhecimento e do processo de transmissão do mesmo. Essas ferramentas tecnológicas são recursos poderosos, por sua vez, quando usadas corretamente mudam a forma de fazer, compreender e ensinar a matemática, e é através destas que vemos aflorar as potencialidades do ensino, onde o tempo e espaço, já não são mais problemas, o que proporciona uma educação sem distância, sem tempo, levando o sistema educacional a assumir um papel, não só de formação de cidadãos pertencentes aquele espaço, mas a um espaço de formação inclusiva em uma sociedade de diferenças.

- O uso de softwares matemáticos pode auxiliar no ensino-aprendizagem?

  Certamente, no entanto, a maneira adequada de se fazer uso das TIC's no ambiente educacional depende da proposta que será utilizada e da postura dos profissionais envolvidos. É fato que, despertar a curiosidade e motivação nos alunos nem sempre é tarefa fácil. Já se faz necessário cativar a atenção dos alunos para as aulas, principalmente para as aulas de Matemática, mas a partir do momento em que introduzimos algo de novo na aula, como por exemplo, atividades ou experiências interessantes com recursos tecnológicos, fazendo uso de software para aprender-se Matemática, conseguimos com isto, motivar esses alunos a aprender a matemática ensinada.

- Quais são as maiores dificuldades enfrentadas pelo professor de matemática para utilização desses recursos tecnológicos como ferramentas didáticas em suas práticas pedagógicas?

  Existem alguns problemas no sistema educacional, poucos são os professores que fazem uso desses recursos tecnológicos em atividades voltadas para a sala de aula. Em especial, são inúmeros recursos disponíveis para o ensino da matemática, porém, ainda falta capacitação por parte dos professores dessa área para que melhor utilizem esses recursos. Para isso, são exigidos dos professores o interesse e a percepção dessa nova realidade, sendo necessária uma grande mudança na concepção e forma de ensinar dos atuais professores. É importante, ou melhor, é imprescindível que o professor esteja capacitado em relação a essa nova realidade educacional, e que cada vez mais invistam em processos de capacitação, de tal forma que os professores possam integrar a tecnologia à sua proposta pedagógica, para que dessa forma, sejam implementadas propostas mais eficazes que contribuam para o aprendizado do aluno. Portanto, o papel do professor não pode ser mais o de apenas transmitir conhecimento. Nesse novo cenário, espera-se estabelecer uma nova relação entre aluno e professor, uma vez que os alunos fazem parte de uma geração mais ligada às tecnologias e mostram-se mais abertos e envolvidos com o seu uso. Sendo assim, cabe ao professor a tarefa de inteirar-se dessas ferramentas, sendo mediador, motivador e organizador das situações de ensino e aprendizagem.

No panorama educacional brasileiro, o livro didático é importante e essencial instrumento de apoio ao trabalho do Professor, ele exerce uma grande influência na prática do mesmo, no que se refere ao desenvolvimento do conteúdo, linguagem e profundidade e ainda é referência na formação dos alunos. É relevante seu papel na difusão do hábito e do gosto pela leitura. As mudanças que acontecem atualmente em sala de aula, como a utilização de novas tecnologias, revisões nas diretrizes curriculares e expectativas de aprendizagem, impõem desafios constantes à produção do livro Escolar para que esse seja cada vez mais rico no que se refere aos avanços metodológicos, recursos gráficos, visando acompanhar as novas dinâmicas em sala de aula e contribuir para uma aprendizagem cada vez mais significativa. O que se espera do livro didático é que este acompanhe com sucesso as transformações da Educação nacional.

O que se almeja neste sentido, é que dentro em breve essas práticas pedagógicas, que hoje são apenas esporádicas, passem a constituir uma prática corriqueira no cotidiano dos professores, ou seja, que o uso dos recursos tecnológicos passe a ser uma prática natural. "Acredita que essa mudança de paradigma não será para o professor uma escolha, mas um fato, uma vez que, as inovações tecnológicas fazem parte de quase todo o resto das atividades da sociedade atual"(JESUS, [16], pg. 15). Além disso, é papel da escola fazer efetivo uso do aparato de recursos tecnológicos que a mesma possui, tornando viável a utilização desses recursos no ensino, a fim de obter resultados significativos no que tangem o ensino da matemática.

É incômodo para qualquer professor de matemática que esteja comprometido com a melhoria do ensino, o fato de surgirem nas últimas décadas tantos avanços e novidades em relação as ferramentas tecnológicas voltadas ao campo da educação, disponibilizados como recursos didáticos que podem ampliar e renovar o processo de ensino-aprendizagem, não estarem sendo explorados.

Crescem os estudos acerca do ensino-aprendizagem do conteúdo de funções, tais estudos têm traduzido vários olhares para subsidiar a discussão acerca dos problemas no processo de ensino-aprendizagem desse tema. E os resultados que seguem dessa gama de estudos sugerem variadas formas de abordar o conteúdo. As possibilidades dos recursos, a praticidade e o aumento do acesso dos mesmos, fizeram surgir práticas educacionais voltadas ao uso das tecnologias.

Assim, durante o período referente ao processo de formação em Licenciatura Plena em Matemática, é buscado explorar ao máximo todas as potencialidades oferecidas pelo curso e com isso alcançar uma excelente formação acadêmica. O licenciando ao cursar as disciplinas decorrentes do curso, tem a oportunidade de conhecer alguns recursos computacionais apresentados como ferramentas didáticas voltados para o ensino da matemática do Ensino Médio, são exemplos desses recursos alguns softwares, a saber, o Winplot, Wimat, Kalgebra entre outros. O software Geogebra porém, é um dos que mais se destaca dentre esses. Realizando um estudo mais acentuado a respeito do Geogebra, e então conhecendo suas potencialidades, foi de imediata percepção o quão rico é este recurso didático, e como este pode se tornar um grande e valioso aliado no ensino de matemática, em especial, para trabalhar alguns conteúdos específicos do Ensino Médio, como: função afim, quadrática e equações polinomiais, além de geometria plana e espacial, por exemplo.

Todavia, buscando melhorar cada vez mais meu processo de formação, acabei por me deparar com o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência - PIBID, no qual tive a oportunidade de participar durante o período de dois anos e meio. Através do PIBID pude ter acesso ao cotidiano da comunidade escolar de ensino básico a qual atuava como escola parceira do programa, e nesta tínhamos a oportunidade de observar e analisar as metodologias adotadas pela professora supervisora e assim favorecer ações pedagógicas que promovam metodologias inovadoras que venham a garantir uma significativa melhoria no processo de ensino-aprendizagem. Nessas oportunidades busquei formas de aprimorar e melhorar minha prática pedagógica, conhecer e aplicar novas propostas metodológicas relacionadas a vários conteúdos, em especial, me chamou a atenção às propostas voltadas para a utilização de tecnologias na Educação Básica. Portanto, posso afirmar que foi através ou em meio da minha participação neste programa que surgiu a motivação para realização desta proposta de trabalho. Neste contexto, objetiva-se a busca pela utilização de ferramentas tecnológicas, em especial o método sugerido pela proposta deste trabalho de conclusão de curso recai na utilização de recursos computacionais: os softwares, em particular, o Software Geogebra para o ensino do conteúdo de Função Afim no ensino básico, com o intuito de facilitar o processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo do Ensino Médio. Essa proposta de atividade se deve ainda, as minhas experiências próprias e inquietações em meio ao ambiente de sala de aula, e ainda em buscas visando melhorar a aprendizagem dos alunos e obter melhores resultados com a disciplina de matemática.

## 1.3 O Estudo de Funções Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: PCNEM

Em meio a uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Já no que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional (Brasil, [7]). Sendo assim, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias, necessária ao seu processo de desenvolvimento, e que ainda contribui para que o mesmo construa uma visão de mundo, que lhe permita ler, compreender, analisar, e enfim, modelar a realidade e interpretá-la.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, ao apresentarem as novas diretrizes para o Ensino de Matemática ressaltam, entre outros aspectos, a discussão e argumentação de temas de interesse de ciência e tecnologia, neste contexto se faz uso da interconexão tecnológica e matemática.

Segundo os PCN's durante a etapa final da educação básica, o ensino médio, o processo de formação do aluno deve contemplar a aquisição dos conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação (Brasil, [7]).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III - Ciências da

Natureza, Matemática e suas Tecnologias, apresentam algumas recomendações no que se refere as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática:

Tabela 1.1: Recomendações dos PCN's acerca das competências.

| |
|---|
| Interpretar e utilizar diferentes formas de representação (tabelas, gráficos, expressões, ícones...) |
| Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para a produção, análise e interpretação de resultados de processos e experimentos científicos e tecnológicos. |
| Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade. |
| Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações, interpolações e interpretações. |
| Analisar qualitativamente dados quantitativos representados gráfica ou algebricamente relacionados a contextos socioeconômicos, científicos ou cotidianos. |

Fonte: (Brasil, [7]).

Seguindo essas recomendações é possível promover condições para que os alunos possam buscar o aprimoramento do saber, e selecionar informações, desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, desenvolver o raciocínio, avaliar, argumentar, tirar suas próprias conclusões, ou seja, ser capaz de aprender, criar e formular, ao invés do simples exercício de memorização de conteúdos. O aluno deve ter a visão de que o conhecimento matemático é necessário para a compreensão de uma grande diversidade de situações referentes à sua formação e ao seu cotidiano, servindo ainda, como instrumento de investigação e apoio a outras áreas do conhecimento.

Em relação ao estudo do conteúdo de funções, os PCN's consideram este como sendo articulador de diferentes conteúdos, dentro e fora da própria matemática. Além disso, o documento afirma que o ensino de funções permite ao aluno o desenvolvimento da linguagem algébrica, indispensável para estabelecer/expressar a relação entre as grandezas e modelar situações problemas.

Desta maneira, os problemas de aplicação devem introduzir o estudo de funções, servindo de contexto e motivação para a aprendizagem dos conceitos envolvidos neste tema. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. O conceito de função desempenha um papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos estudados em áreas do conhecimento, como a Química, a Física, Geografia, Economia entre outras.

MAGARINUS [21], aborda segundo os PCNEM o fato de que, após a definição de função, o estudo de conjuntos e relações é abandonado, uma vez que para a análise dos diferentes tipos de função este estudo é desnecessário. Portanto, destacam que:

> *"o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente."(BRASIL, 2000, p.121)*

Além disso, salientam que a linguagem excessivamente formal deve ser moderada e, em determinados momentos, deixada de lado. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas.

O uso das tecnologias de informação e comunicação contribui significativamente para um ensino mais eficaz, interessante e prazeroso deste conteúdo. O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. Portanto é de fundamental importância a inserção das tecnologias no ensino de funções, assim como, a percepção por parte do aluno a cerca do papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia.

## 1.4 O Uso de Softwares no Ensino de Funções

É fato que a maioria dos programas curriculares tem recomendado mais atenção ao ensino de funções, uma vez que este conteúdo tem aplicação em várias áreas do conhecimento. O impacto da tecnologia, sobre a maneira como as funções matemáticas podem ser representadas e manipuladas, está conduzindo educadores matemáticos a repensarem o modo como às funções são ensinadas. Entretanto, trabalhar funções sem que os alunos construam o conhecimento a partir de situações-problema, visualizem adequadamente as situações gráficas ou manipulem os objetos de aprendizagem, não propicia uma aprendizagem significativa para os mesmos.

É sabido que o ensino de funções presente no ensino médio remetem a características do ensino tradicional, além de outros fatores, como a falta de estrutura física de muitas escolas, e ainda, a falta de professores capacitados no uso de tecnologias. É notório que a abordagem desse tema no ensino básico, geralmente, tem deixado muito a desejar, visto que este conteúdo é dirigido em sua maioria somente a partir das abordagens apresentadas pelos livros didáticos.

O que observa-se na maioria dos casos é que este conteúdo é lecionado fazendo muito pouca relação com o cotidiano e de maneira bastante abstrata. O que leva ao extremo desinteresse por parte do aluno, e o leva a aprender o conteúdo apenas por aprender, tendo em vista que posteriormente lhes será cobrado.

Porém, para realizarmos um ensino-aprendizagem de qualidade referente ao conteúdo de funções devemos utilizar todo aparato de ferramentas disponíveis, com o intuito de facilitar à compreensão dos alunos, em relação a certos elementos presentes no conteúdo de funções, ou ainda, dar significado as teorias apresentadas nos livros didáticos, como: Interpretação geométrica da raiz ou zero da função, coeficientes angular e linear, crescimento e decrescimento das funções (DANTE, [8]; RIBEIRO, [24]; SOUZA, [27]). Caso contrário não passará de uma abordagem ineficaz que não leva a uma análise da relação entre as variáveis ou grandezas envolvidas. Perdendo assim a oportunidade de mostrar a importância do aprendizado em Matemática para as demais áreas do conhecimento, ao não mostrar a sua aplicabilidade.

Os softwares são importantes ferramentas no ensino de Matemática, eles podem ser usados pra uma melhor aprendizagem dos conteúdos, atualmente, é possível encontrar aplicativos dos mais diversos tipos que atendem desde a educação infantil até o ensino superior. A Matemática é uma das disciplinas mais privilegiadas, pois possui um número significativo de softwares educativos. Um motivo pode ser a tentativa de encontrar estratégias que tornem a matéria mais atraente e de melhor compreensão. Muitos desses softwares são gratuitos, há versões para vários sistemas operacionais e podem ser adquiridos na internet de forma rápida.

Entre os que oferecem possibilidade de trabalhar com gráficos de funções destacam-se *Cabri-Géomètre, Graphequation, Graphmática, Winplot, Aplusix, Winfun, Modelus, Régua e Compasso, Poly, Thales, WinMat, Geogebra*, entre outros (LOPES JÚNIOR, [20]). Destacamos em particular, este último, pois este pode ser usado tanto no ensino Fundamental e Médio como no ensino Superior, dependendo dos objetivos estabelecidos. Escolhido de antemão como objeto para realização da nossa proposta de ensino, o software Geogebra será utilizado para estudarmos o conteúdo de funções. Este software nos proporciona um ensino mais dinâmico e inovador deste conteúdo, além de motivadores do interesse e curiosidade pelas aulas por parte do alunado, os softwares são usados para promover uma metodologia diferenciada, e atividades exploradoras envolvendo o estudo de funções. É possível, ainda, explorar as relações entre as propriedades algébricas e o comportamento qualitativo de gráficos dependendo de parâmetros (ARAÚJO, [2]).

Com o uso do software Geogebra, é possível promover naturalmente uma conexão entre as várias representações que, geralmente, não são articuladas quando apresentadas nos livros didáticos do ensino básico. Este software permite ainda, uma melhor articulação do conteúdo e melhor escolha de atividades. Agiliza processos de cálculo e construção com lápis e papel. Com a construção gráfica, as propriedades das funções são mais bem compreendidas, pois são percebidas pelos próprios alunos por experimentação, propiciando maior tempo para assimilação das características das funções. "É lógico que há desafios, mas é necessário enfrentá-los a fim de se interagir com o mundo moderno, ainda mais quando o resultado é um aprendizado mais significativo, participativo e gratificante", ressalta (LOPES JÚNIOR, [20]).

Muitos professores já vêm adotando esta ferramenta em sala de aula para explorar geometria, álgebra e planilhas de cálculo interativas. Em particular vamos explorar neste estudo o conteúdo de função Afim.

# Capítulo 2

# Funções

Neste capítulo faremos uma abordagem histórica acerca do surgimento de um dos mais fundamentais conceitos da matemática - o de função. Procurando apresentar as diversas interpretações e representações que estiverem presentes na construção e no seu desenvolvimento do mesmo. Introduziremos a definição de função, tal qual conhecemos hoje, bem como, alguns aspectos relevantes associados ao seu estudo. Enfatizando a importância da representação gráfica de uma função, e ainda, observar as formas de se representar uma função. Em nosso estudo, os conjuntos envolvidos sempre serão subconjuntos de $\mathbb{R}$.

## 2.1 Breve Abordagem Histórica Acerca do Conceito de Funções

A História da Matemática constitui um dos capítulos mais interessantes do conhecimento, permitindo-nos compreender a origem das idéias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento, e ainda, enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram.

Assim como as noções de espaço e geometria, o surgimento e o desenvolvimento do conceito de função deu-se através de um processo lento, passando por evoluções acentuadas ao longo dos séculos até então alcançar a forma que é apresentada nos livros didáticos da atualidade. Essas evoluções podem ser percebidas pelos estudantes de matemática ao atentarem para o estudo deste processo durante seus progressos escolares desde as séries da educação básica até o ensino superior.

De acordo com BIANCHINI [4], não é de conhecimento preciso o surgimento do conceito de função, até onde se sabe não se tem conhecimento ao certo de quando este conceito foi usado pela primeira vez, mais se tem conhecimento das primeiras abordagens desse conceito através dos povos babilônios, que em cerca de 2000 a.C., construíram tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, as quais podem ser consideradas tabelas de funções.

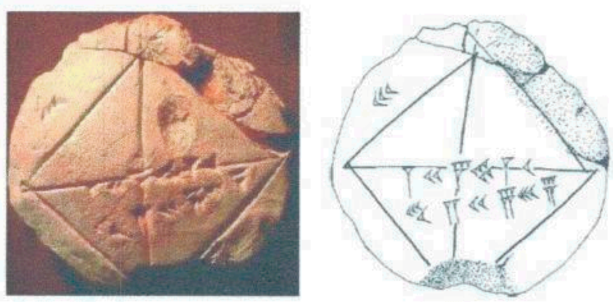


Figura 2.1: Tableta Yale contendo o cálculo da raiz quadrada de 2.

Antigos registros mesopotâmicos sobre lunações (espaços entre duas luas novas consecutivas) representavam, por meio de tabelas, a relação entre as fases da lua e o período de tempo solar. Os babilônicos valorizavam essas tabelas na medida em que elas estabeleciam uma correspondência de valores. Eles a utilizavam não somente para obter as informações que continham, mas também para avaliar os resultados correspondentes a valores intermediários, o que faziam através de aproximações por segmentos de reta (BIANCHINI, [4]).

O conceito de função, presente nos mais diversos ramos da ciência é relativamente novo, visto que a maior parte de seu desenvolvimento ocorreu nos séculos XVIII e XIX (SOUZA, [27]). A história do termo função nos remete a mais um exemplo do interesse dos matemáticos em relação à questão de generalizar e ampliar conceitos. Os papiros egípicios apresentavam problemas práticos ligados às necessidades cotidianas e não tinham o objetivo de analisar o comportamento dos fenômenos. Desafiando a mente humana, as situações sugeridas provocam o pensamento lógico, direcionandoo aos resultados numéricos. Mas o caráter de generalização, própio da matemática, levou os estudiosos a avanços grandiosos (DANTE, [8]). A partir da observação de modelos presentes nos fenômenos que ocorriam no mundo que os cercava, como por exemplo, a trajetória da bala de um canhão, os estudiosos procuravam dar explicações mais racionais para os eventos, o que fazia os mesmos investigarem e descobrir leis que regiam esses modelos. Podemos intuir que o conceito de função surgiu a partir de uma necessidade de expressar racional e matematicamente uma ação que ocorre naturalmente em virtude de uma outra.

Este tipo de relação ocorre a nossa volta o tempo inteiro, como por exemplo: o preço das passagens de um ônibus depende, dentre outros fatores, da distância entre a cidade do embarque e a de destino; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura; a pressão do mar depende da profundidade; o crescimento de uma planta ocorre em função do tempo, do clima, das condições de adubagem do solo, são inúmeros fatores que podem acarretar no crescimento de uma planta, assim podemos observar que ela se desenvolve em função de todos esses fatores juntos. Entretanto os primeiros pensadores puderam perceber que seria impossível compreender em sua totalidade de uma única vez, a dimensão de uma realidade plural a qual eles objetivavam dominar. Perceberam ainda que para realizarem seus estudos deveriam selecionar esses fenômenos ao qual buscavam a compreensão, em conjuntos significativos de elementos.

Segundo BOTELHO [5], para Caraça (1989) surgem a partir de então explicações dos fenômenos naturais, assim a realidade que aqueles cientistas buscaram compreender, apresenta duas características essenciais: fluência e interdependência. A primeira diz respeito a um movimento natural e constante do mundo que não para de se transformar, de evoluir. A segunda nos leva a perceber sua verificação no momento em que se observa que, no universo os fatos não ocorrem de maneira isolada, em todos eles há compartimentos que se comunicam e participam da vida uns dos outros. No exemplo anteriormente citado, da planta, se tomarmos o crescimento da mesma, condicionado as condições de adubagem do solo, as mesmas proporcionaram um melhor desenvolvimento do vegetal, o que caracteriza a interdependência.

Assim, podemos dizer que partindo da necessidade de resolver um problema de ordem prática, entre duas grandezas diferentes em diversas situações, brotou de forma intuitiva o conceito de função em seu mais originário sentido.

Segundo ROSSINI [26], o historiador Youschkevitch (1981) considera três etapas no desenvolvimento do conceito de função, até a metade do século XIX, sendo elas:


Figura 2.2: As três etapas do desenvolvimento da noção de função.

Diferentemente da ideia intuitiva de funcionalidade da Idade Antiga, o conceito de função no período Moderno era uma conjectura puramente abstrata e inteiramente voltada para o campo da matemática pura.

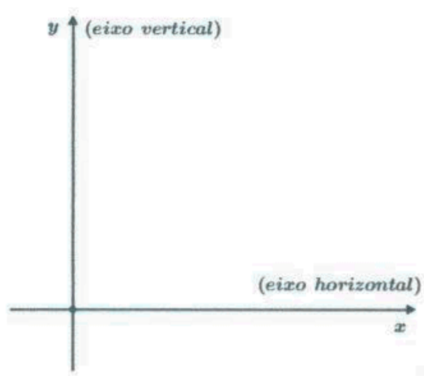
O desenvolvimento do conceito de função contou com as contribuições significativas de vários matemáticos. O emprego das aproximações na antiguidade significa a aplicação de uma relação funcional elementar, pois é uma simples proporcionalidade e constituiu o primeiro passo em rumo ao desenvolvimento posterior de noções mais gerais de função.

Novas contribuições, ainda implícitas, para o desenvolvimento do conceito de função surgiram muito depois, no final da Idade Média, por exemplo, as do matemático francês Nicole Oresme (1323-1382), (BIANCHINI, [4] e BOYER, [6]). Com este, sugeriu a representação dos diferentes graus de intensidade das variáveis velocidade e tempo relacionados ao fenômeno: movimento de um corpo com aceleração uniforme.

Segundo (BOYER, [6]), Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727), por exemplo, utilizaram em seus trabalhos algumas noções de lei e dependência, como hoje sabemos, fortemente ligadas ao conceito de função.

Galilei contribuiu para a evolução da ideia de função, ao introduzir o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Nessas época, o aprimoramento dos instrumentos de medida proporcionou a busca de resultados inspirados na experiência e na observação.

Segundo (BIANCHINI, [4]), as ideias mais explícitas de função parecem ter surgido somente na época de René Descartes (1596-1650), matemático francês que adotou equações em $x$ e em $y$ para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo que permitisse o cálculo de valores de uma delas por meio do valor da outra. Em outras palavras, uma equação em $x$ e $y$ podia representar uma dependência funcional entre quantidades variáveis, podendo-se determinar uma variável a partir da outra, dando um caráter mais amplo à ideia de função. Descartes apresentou ainda, o método das coordenadas para a representação gráfica de relações entre variáveis, em modelo próximo ao que conhecemos nos dias atuais (EVES, [10]).




Foi somente a partir dos trabalhos do físico e matemático inglês Isaac Newton que em sua teoria sobre fluentes, termo usado por ele para descrever as suas ideias sobre funções, as considerava intimamente ligadas à noção de curva e as taxas de mudança de qualidade variando continuamente. E ainda, restringiam-se a imagens de uma função real, de variável real Caraça (1952). Newton também desenvolveu uma grande habilidade em expressar estes fluentes em termos de séries infinitas. Tentou definir limite de uma função, falando em quantidades e taxas de quantidades (BOYER, [6]).

Quanto ao matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ele não é o responsável pela notação de função, porém segundo Eves [10] a palavra função, na sua forma latina equivalente, foi empregada pela primeira vez por Leibniz em 1694. Ele usou o termo função pela primeira vez, para designar um tipo de fórmula matemática, para se referir a certos seguimentos de retas cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas. Mais tarde, viu-se que a ideia de função desenvolvida por Leibniz tinha um alcance muito reduzido, e posteriormente, o significado da palavra função foi experimentando generalizações sucessivas, até chegar à conceituação atual (BOYER, [6]).

No século XVIII, o matemático suíço Jean Bernoulli (1667-1748), adota a terminologia de Leibniz para função de $x$. Ele estava interessado em funções que fossem bem comportadas, devido à natureza dos problemas para os quais contribuiu, como por exemplo, o aprimoramento da regra de L'Hospital para formas indeterminadas de limite, que envolvia funções diferenciáveis. Bernoulli utilizou o termo função, assim designando os valores obtidos por operações entre variáveis e constantes. Ele chegou a considerar uma função como uma expressão qualquer, formada de uma variável e algumas constantes (BOYER, [6]).

Segundo ROSSINI [26], a primeira definição explícita de uma função como expressão analítica apareceu num artigo de Jean Bernoulli, publicado nas memórias da Academia Real de Ciências de Paris, em 1718. "Definição. Chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de alguma maneira que seja desta grandeza variável e de constantes"(BERNOULLI, J. 1742, p.241 apud YOUSCHKEVITCH, 1981, p.35).

Posteriormente, o suíço Leonard Euler (1707-1783), um dos maiores matemáticos de sua época, também trabalhou com funções e considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. Foi Euler quem aplicou a ideia de fluentes de Newton para a análise que é o ramo mais abrangente da matemática. Euler apresentou como exemplo uma função contendo raízes quadradas, mostrando que ainda não se considerava a unicidade para o valor da função. Não se falava em domínio nem em contradomínio. Para Euler as funções só eram contínuas, também não era somente a expressão analítica, mais a curva traçada a mão livre, sem cantos. Seus estudos foram essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, trazendo grandes contribuições para a linguagem simbólica e introduzindo ainda a notação $f(x)$, padronizada nos dias de hoje (BOYER, [6]).

Eves [10] ressalta ainda, que outros matemáticos também deram sua parcela de contribuição para a construção e o desenvolvimento do conceito de função. Matemáticos como Dedekind, Cauchy e Joseph Fourier.

Joseph Fourier (1768-1830) foi talvez o mais influente da nova geração de matemáticos ativos em 1820 em Paris. Sua principal contribuição foi à ideia, percebida por Daniel Bernoulli, de que qualquer função $y = f(x)$ pode ser representada por uma série da forma conhecida na atualidade como série de Fourier. Tal representação fornece uma generalidade muito maior que a série de Taylor, quanto ao tipo de funções que podem ser estudadas.

Dentre tantos que contribuíram para o desenvolvimento do conceito de função a definição de Lejeune Dirichlet (1805-1859) é a mais próxima do que temos hoje. Dirichlet chegou a formular a seguinte definição:

> *Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis $x$ e $y$ estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a $x$, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a $y$, então se diz que $y$ é uma função (unívoca) de $x$. A variável $x$, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável $y$, cujos valores dependem dos valores de $x$, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que $x$ pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por $y$ constituem o campo de valores da função (EVES, 2004, p.661).*

EVES [10] discute também que essa definição é tão ampla que dispensa a necessidade de qualquer forma de expressão analítica a relação que há entre $x$ e $y$, essa definição acentua a ideia de relação entre dois conjuntos de números. Destaca também que, no século XX foi apresentada uma nova definição para o conceito de função através da linguagem da Teoria dos Conjuntos, criada pelo matemático alemão Georg Cantor, essa teoria abrangeu relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa. Essa nova definição deu maior ênfase à área da álgebra abstrata. Desta forma, de acordo com a Teoria dos Conjuntos, uma função $f$ é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à seguinte condição:

> *Se* $(a_1, b_1) \in f, (a_2, b_2) \in f$ *e* $a_1 = a_2$, *então* $b_1 = b_2$ . *O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se domínio da função e conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz imagem da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano* $A \times B$. *(EVES, 2004, p.661).*

A Teoria dos Conjuntos despertou grande interesse por parte de todos os estudiosos da época, podendo-se perceber que hoje é utilizada em todos os campos da matemática, visto que não há nenhum campo da matemática na atualidade que não tenha recebido seu impacto. E ainda propiciou ampliar o conceito de função, contribuindo substancialmente para se chegar à definição conhecida atualmente.

Podemos verificar através do histórico apresentado que o conceito de função foi um processo bastante lento e que passou por várias mudanças ao longo do seu desenvolvimento. Identificamos ainda que, algumas abordagens mais significativas que surgiram durante sua evolução ao longo da história, como por exemplo: função como relação entre quantidades variáveis, função como expressão analítica, função como relação entre conjuntos e função como transformação. Mas a abordagem do conceito que mais se destacou entre as demais, se tornando a idéia central do conceito de função, presente tanto no nascimento da física quantitativa quanto em nosso cotidiano, é a de relação entre quantidades variáveis. Atualmente, expressamos as funções de várias maneiras para poder analisá-las, fazer previsões e até interferir em alguns processos de mudanças.

## 2.2 Noção Intuitiva de Função

A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis, e pode ser observada em diversas situações no cotidiano, como por exemplo, o número de litros de combustível e o preço a pagar; velocidade de um carro em função do tempo; a produção de automóveis em relação ao período de tempo; a distância percorrida é dada em função do tempo; o consumo de combustível de um avião em função da velocidade.

Na Figura 2.3 observamos um salto de paraquedas, a velocidade do paraquedista sofre influência de vários fatores como, por exemplo, a ação da gravidade e a resistência do ar. Enquanto o paraquedas estiver fechado, podemos considerar que o corpo está em queda livre. Quanto mais tempo, após o salto, ele permanecer fechado, maior será a velocidade com que o paraquedista cairá: a velocidade, depende, entre outros fatores, do tempo. Ficando assim evidente, a presença constante de relações existentes entre as várias grandezas presentes a nossa volta. Podemos observar várias outras situações parecidas com esta ou ainda tão mais comum aos nossos olhos, são situações corriqueiras e passam despercebidas em meio a correria na qual grande maioria de nós vivemos.

Figura 2.3: Salto de paraquedas

Realizamos uma segunda observação, ao abastecer um automóvel, o preço a ser pago no final do abastecimento está diretamente relacionado a quantidade de litros que o dono do automóvel pretende comprar, ou seja, o preço a pagar depende do número de litros comprados. Note que estão sendo relacionadas duas grandezas: a quantidade de litros de combustível $x$ e a quantia em reais $y$. Veja na tabela abaixo, que cada quantidade de litros de combustível corresponde a um único valor em reais a ser pago, ou seja, a cada valor que atribuímos a variável $x$, obtemos um único valor para a variável $y$.

Observando a tabela 2.1, podemos ver claramente, que o preço a pagar é dado em função do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar é igual a R\$ 3,10 vezes o número de litros comprados. Representando por $y$ o preço a ser pago e por $x$ o número de litros de gasolina comprados, podemos assim escrever uma fórmula para $y$ em função de $x$ dada da seguinte forma: $y = 3,10 \cdot x$.

| Números de Litros | Preço a pagar (R$) |
|---|---|
| 0 | 0,00 |
| 1 | 3,10 |
| 2 | 6,20 |
| 3 | 9,30 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| 40 | 124,00 |
| $x$ | $3,10 \cdot x$ |

Tabela 2.1: Relação entre litros de combustível e preço a pagar.

Intuitivamente, não pensamos em fórmulas matemáticas quando compramos um produto. O que fazemos é relacionar a quantidade comprada com o preço a ser pago através do conhecimento que temos sobre a maneira com que estas grandezas, quantidade e preço variam.

Trabalhar com funções é comum, visto que estabelecemos relações para quase tudo que costumamos ter, fazer ou adquirir. Praticamente tudo a nossa volta está relacionado ou associado de alguma maneira. No conceito de função uma das formas de se representar uma relação entre grandezas é por meio de uma regra ou fórmula, afim de simplificar o entendimento e a resolução do problema proposto.

## 2.3 Conceitos Preliminares: Par Ordenado, Produto Cartesiano e Relação

Chama-se *par* todo conjunto formado por dois elementos, dentro de um parentese, exemplo: (1,2), (3,4) e (-1, 3) indicam pares. Para cada elemento $a$ e cada elemento $b$, onde $a$ é a primeira coordenada e $b$ é a segunda coordenada, admitiremos a existência de um terceiro elemento denotado por $(a, b)$, que denominaremos *par ordenado*, de modo que dois pares ordenados $(a, b)$ e $(c, d)$ são iguais se, e somente se, $a = c$, e $b = d$, ou seja,

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \iff a = c \quad \text{e} \quad b = d.}$$

Chamamos de *Sistema Cartesiano Ortogonal*, figura 2.4, um sistema de eixos ortogonais constituídos por dois eixos, $x$ e $y$ perpendiculares na origem **O**, os quais determinam o plano $\alpha$ que é chamado de *Plano Cartesiano*. O eixo horizontal $x$ é denominado **eixo das abscissas** e o eixo vertical $y$, é denominado **eixo das ordenadas**. Todos os pontos do plano podem ser identificados por um par ordenado. Assim, para todo ponto do plano temos um par ordenado e para todo par ordenado temos um ponto correspondente no plano.

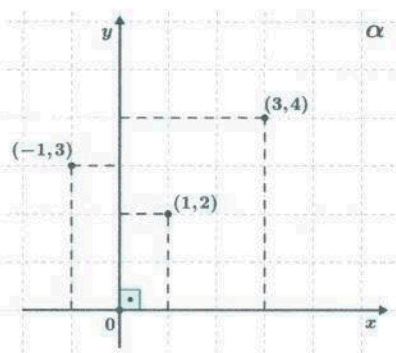



Figura 2.4: Sistema Cartesiano Ortogonal

O plano cartesiano permite representar graficamente expressões algébricas. Por exemplo, um ponto $P$ do plano cartesiano é a representação gráfica de um par ordenado de números reais $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e é denotado por $P = (x, y)$, onde $x$ e $y$ são suas coordenadas. A coordenada $x$ indica a medida do deslocamento a partir da origem, para a direita (se positivo) ou para a esquerda (se negativo), e a coordenada $y$ indica o deslocamento a partir da origem, para cima (se positivo) ou para baixo (se negativo), conforme a figura a seguir.

**Definição 2.1 (Produto Cartesiano).** *Considere dois conjuntos $A$ e $B$ não vazios. Denominamos produto cartesiano de $A$ por $B$, (denotado por $A \times B$), o conjunto formado por todos os pares ordenados $(x, y)$, em que $x \in A$ e $y \in B$, ou seja,*

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \quad e \quad y \in B\}.$$

$$\begin{cases} \textbf{Notação:} & A \times B; \\ \textbf{Leitura:} & A \quad \textit{cartesiano} \quad B \quad e \\ \textbf{Elemento:} & \textit{par ordenado} \quad (x, y). \end{cases}$$

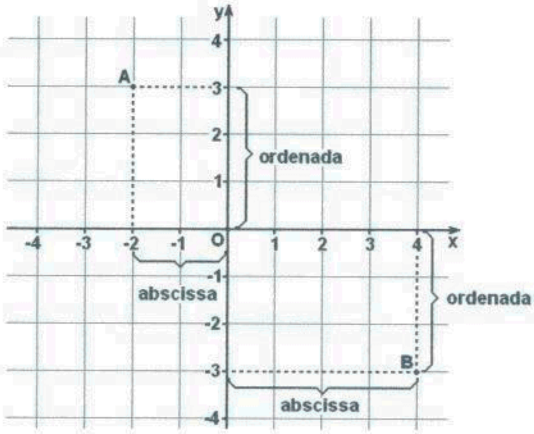



Figura 2.5: Sistema Cartesiano Ortogonal

**Exemplo 2.1.** *Considere* $A = \{-1, 2\}$ *e* $B = \{-2, 1, 2\}$. *Temos que,*
$A \times B = \{(-1, -2), (-1, 1), (-1, 2), (2, -2), (2, 1), (2, 2)\}$
*O qual pode ser representado no sistema cartesiano da seguinte forma:*

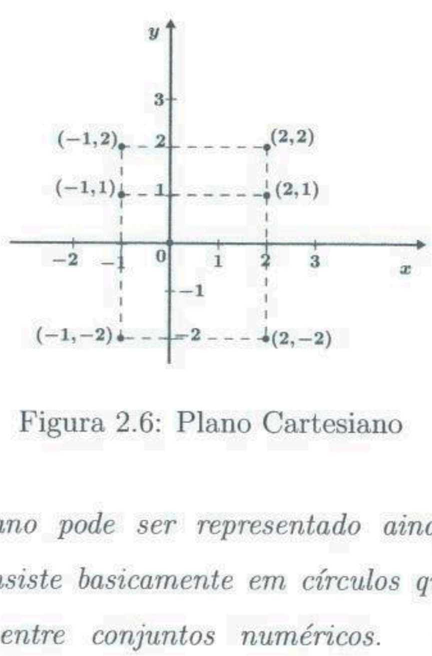



Figura 2.6: Plano Cartesiano

*Um produto cartesiano pode ser representado ainda por um Diagrama de Venn, Figura 2.7, que consiste basicamente em círculos que possuem a propriedade de representar relações entre conjuntos numéricos. Eles podem ser usados na representação de quaisquer conjuntos, no intuito de estabelecer uma melhor demonstração e compreensão dos elementos pertencentes ao conjunto.*

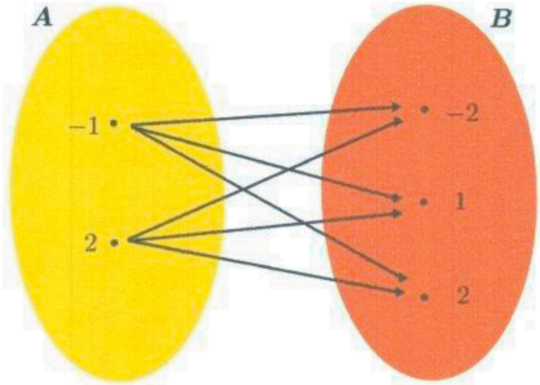



Figura 2.7: Diagrama

**Exemplo 2.2.** *Sejam* $A, B \subset \mathbb{Z}$, *com* $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, *temos que,* $A \times B = \{(-4, -2), (-4, -1), (-4, 0), (-4, 1), (-4, 2), (-3, -2), (-3, -1), (-3, 0), (-3, 1), (-3, 2), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, -2), (4, -1), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$.

*O produto cartesiano pode ainda ser representado por uma estrutura de linhas e colunas, usando pontos, como ilustrado abaixo para esse exemplo.*

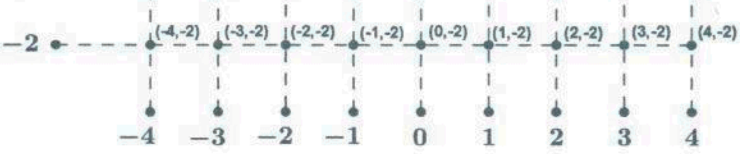


Figura 2.8: Representação geométrica do produto cartesiano $A \times B$.

**Exemplo 2.3.** *Notemos ainda que se considerarmos* $A, B \subset \mathbb{R}$ *com* $A = [-4, 4]$, $B = [-2, 2]$, *então* $A \times B = \{(x, y); -4 \leq x \leq 4 \quad e \quad -2 \leq y \leq 2\}$.

*Neste caso o produto cartesiano pode ser representado, geometricamente, por um retângulo como mostra a figura abaixo:*

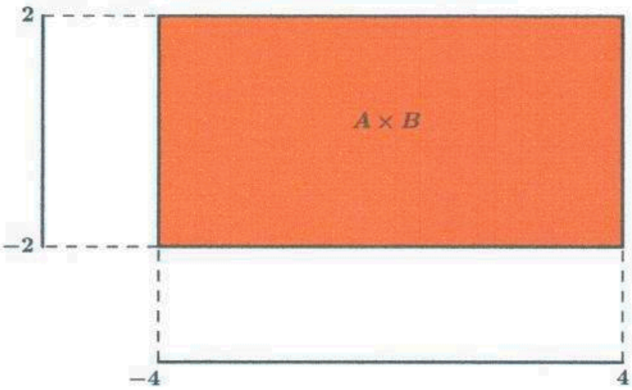



Figura 2.9: Representação geométrica do produto cartesiano $A \times B$

**Definição 2.2 (Relação).** *Dados dois conjuntos $A$ e $B$ não vazios, chama-se relação binária ou relação de $A$ em $B$, qualquer subconjunto de $A \times B$ o qual será denotado por $R$. Portanto $R \subset A \times B$, ou seja,*

$$\boxed{R \text{ é relação de } A \text{ em } B \iff R \subset A \times B}$$

Podemos escrever uma relação de $A$ em $B$ das seguintes formas:

- Nomeando seus pares ordenados. Por exemplo:
  $R_1 = \{(3,-1),(4,2),(5,\frac{-1}{2})\}$, ou

- Através de uma sentença matemática.
  Consideremos $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{1,3,4,9\}$ e seja $R_2 = \{(x,y) \in A \times B; y = x+1\}$,

Podemos representar uma relação ou por meio de um diagrama de Venn ou por meio do plano cartesiano, vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.4.** *Dados os conjuntos $A = \{-1,0,1,2,3\}$ e $B = \{1,0,4,5\}$ e a relação $R = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2\}$, vamos determinar $R$.*

*Temos,*

| $x$ | $y = x^2$ |
|---|---|
| -1 | $y = (-1)^2 = 1$ |
| 0 | $y = 0^2 = 0$ |
| 1 | $y = 1^2 = 1$ |
| 2 | $y = 2^2 = 4$ |
| 3 | $y = 3^2 = 9 \notin B$ |

*Então,* $R = \{(-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$, *e sua representação pode ser vista nas figuras:*

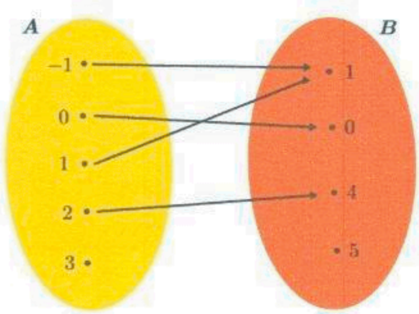



Figura 2.10: Diagrama de Venn para $R$

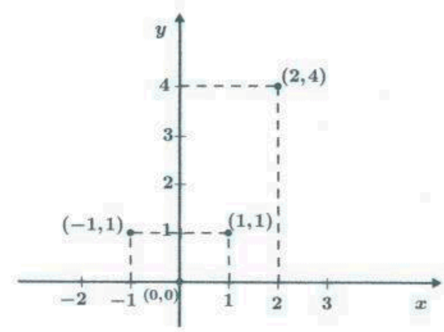



Figura 2.11: Representação de $R$ no Plano Cartesiano

**Exemplo 2.5.** *O time de futebol de uma escola precisa escolher as cores do uniforme, que será composto por uma camiseta e uma bermuda. Para isso, ele tem as seguintes opções:*

*Camiseta:* $\{azul, amarela, branca, verde\}$;

*Bermuda:* $\{azul, preta\}$.

**a)** *Represente as opções que esse time terá para compor seu uniforme, estabelecendo uma relação $R$ por meio de um conjunto de pares ordenados.*

**b)** *De quantas maneiras diferentes esse time poderá compor seu uniforme?*

**c)** *Se houvesse mais uma cor de bermuda, de quantas maneiras eles poderiam compor o uniforme?*

**Respostas:**

**a)** $R = \{(azul, azul), (azul, preta), (amarela, azul), (amarela, preta), (branca, azul), (branca, preta), (verde, azul), (verde, preta)\}$.

**b)** *Oito maneiras.*

**c)** *Doze maneiras.*

## 2.4 Maneiras de Representar uma Função

A noção de função pode ilustrar-se esquematicamente de várias maneiras. As quatro maneiras usuais de representar uma função são:

- Algebricamente: por uma equação ou fórmula explicita;
- Numericamente: por meio de uma tabela de valores;
- Visualmente: por meio de um gráfico ou através de um diagrama;
- Verbalmente: descrevendo por meio de palavras.

## 2.5 Definindo Função

Em matemática, algumas relações recebem um nome especial, a saber, **função**. As funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois elementos.

**Definição 2.3 (Função).** *Dados dois conjuntos $A$ e $B$ não vazios, uma relação $f$ de $A$ em $B$ é uma função quando associa cada elemento $x \in A$, a um único elemento $y \in B$, ou seja,*

$$\boxed{f \text{ é função de } A \text{ em } B \iff \forall x \in A, \exists y \in B, \text{ tal que } \quad f(x) = y}$$

*Podemos representar uma função $f$ de $A$ em $B$ com as seguintes notações:*

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad y = f(x) \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B$$

*Ou ainda,*

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

A variável $x$ é denominada variável independente ou argumento de $f$, e a variável $y$ é denominada variável dependente de $f$. Essa terminologia tem o objetivo de sugerir que $x$ está livre para variar, mas, uma vez dado um valor específico para $x$, o valor de $y$ está determinado.

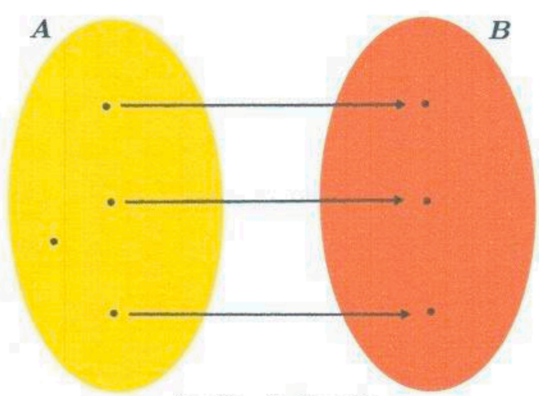
**Observação 2.1.** *De acordo com a definição acima devemos observar que:*

*a) Todos os elementos de $A$ devem se relacionar;*

*b) Além disso, cada elemento $x \in A$ deve se relacionar uma única vez, visto que deve existir um único $y \in B$ tal que $f(x) = y$.*

No Diagrama de Venn, podemos visualizar melhor estas observações:

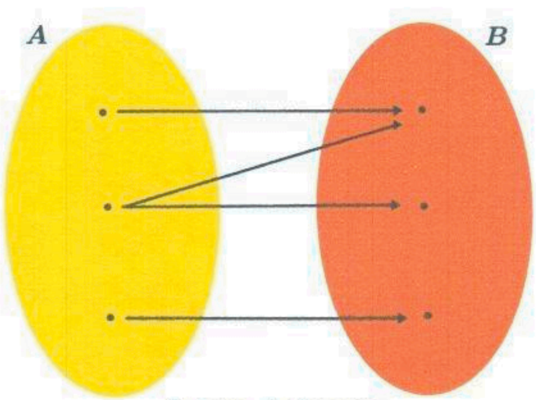
**A)** Se existir um elemento de $A$ do qual não parta flecha alguma, como mostra a figura abaixo, $f$ não será uma função, pois não satisfaz a *Observação 2.1 item a)*.




***f* não é função**

Ou ainda,

**B)** Se existir um elemento de $A$, do qual partam duas ou mais flechas, como mostra a figura a seguir, $f$ também não será uma função, pois não satisfaz a *Observação 2.1 item b)*.

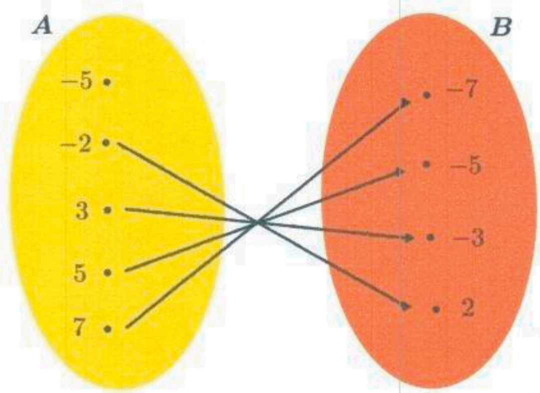



***f* não é função**

De acordo com a definição acima, podemos citar como exemplo de função, o exemplo 2.2. E ainda o exemplo 2.4 será uma função, desde que acrescentemos o elemento 9 ao conjunto $B$, de modo que $3 \in A$ se relacione com algum elemento de $B$, neste caso, 9.

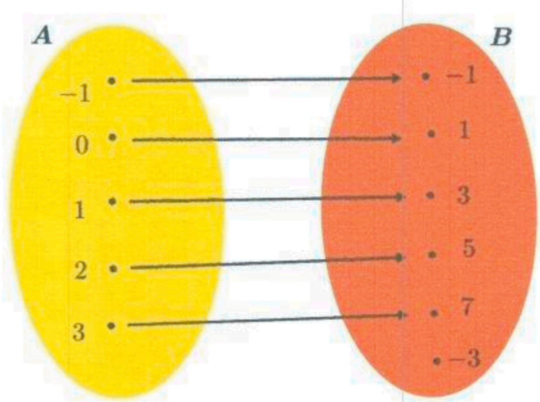
Vejamos, mais alguns exemplos:

**Exemplo 2.6.** *Vamos relacionar os conjuntos* $A = \{-5, -2, 3, 5, 7\}$ *e* $B = \{-7, -5, -3, 2\}$ *utilizando a fórmula* $y = -x$, *com* $x \in A$ *e* $y \in B$.




*Observando o diagrama acima ilustrado, podemos notar que há um elemento de* $A$ *que não possui correspondente em* $B$. *Temos, neste caso, uma relação que não representa uma função de* $A$ *em* $B$.

**Exemplo 2.7.** *Observe o diagrama abaixo ilustrado.*




*O diagrama mostra que conjunto* $A$ *está relacionado com o* $B$ *por meio da fórmula* $y = 2x + 1$, *sendo* $x \in A$ *e* $y \in B$.

*Notemos que:*

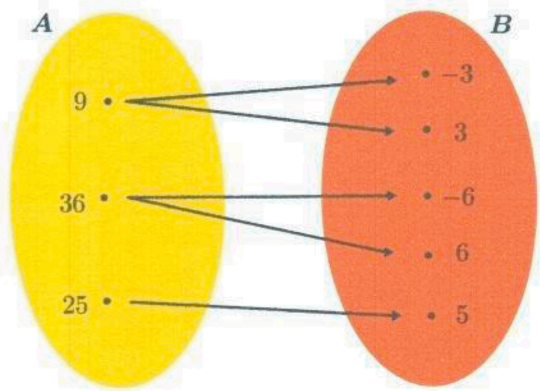
- *todos os elementos de $A$ têm correspondentes em $B$, satisfazendo a observação a);*

- *cada elemento de $A$ está associado a um único de $B$.*

*Neste caso, essa relação é uma função a qual pode ser expressa pela seguinte lei de correspondência ou fórmula:*

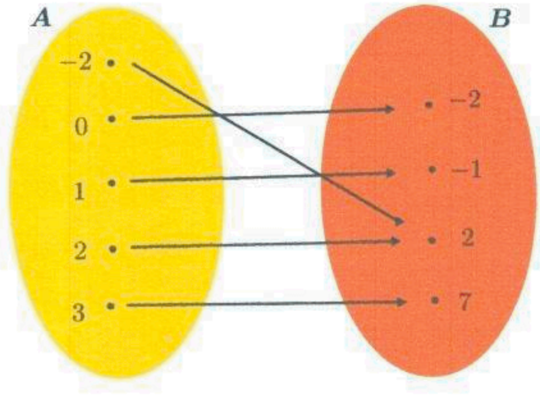
$$y = 2x + 1, \quad ou \quad f(x) = 2x + 1.$$

**Exemplo 2.8.** *Vamos relacionar os conjuntos $A = \{9, 25, 36\}$ e $B = \{-6, -3, 3, 5, 6\}$ utilizando a fórmula $y^2 = x$, com $x \in A$ e $y \in B$.*




*Observando o diagrama, podemos notar que há elementos de $A$ que estão associados a mais de um elemento de $B$. Temos, neste caso, uma relação que não representa uma função de $A$ em $B$, pois isso contraria a letra b) da Observação 2.1.*

**Exemplo 2.9.** *Relacionando os conjuntos $A = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 2, 7\}$ utilizando a fórmula $y = x^2 - 2$, com $x \in A$ e $y \in B$, temos o diagrama,*



*Notemos que:*

- *todos os elementos de $A$ têm correspondentes em $B$, satisfazendo a observação a);*
- *cada elemento de $A$ está associado a um único de $B$.*

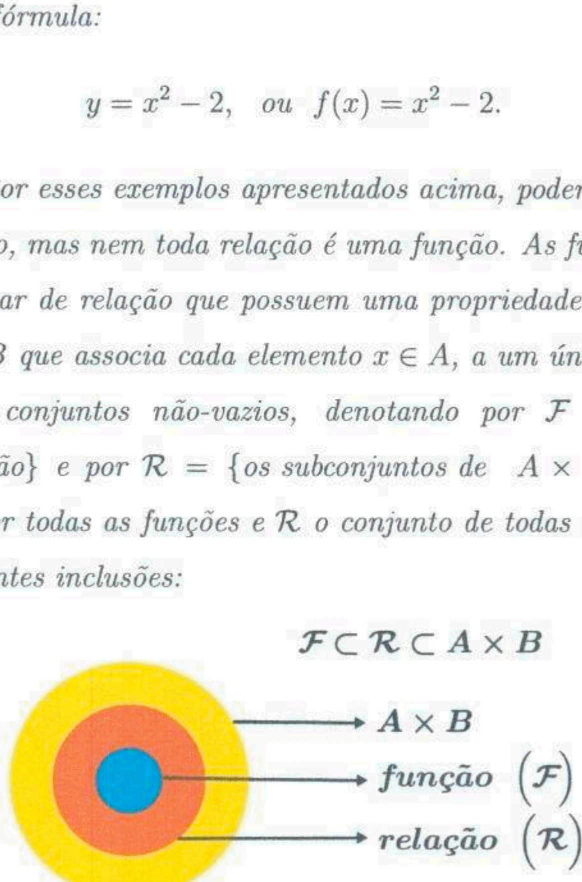
*Neste caso, temos uma função e expressamos esta, pela seguinte lei de correspondência ou fórmula:*

$$y = x^2 - 2, \quad ou \quad f(x) = x^2 - 2.$$

**Observação 2.2.** *Por esses exemplos apresentados acima, podemos concluir que toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função. As funções nada mais são que um tipo particular de relação que possuem uma propriedade específica, dada pela relação $f$ de $A$ em $B$ que associa cada elemento $x \in A$, a um único elemento $y \in B$.*

*Sejam $A$, $B$ conjuntos não-vazios, denotando por $\mathcal{F} = \{f : A \longrightarrow B;\ f \text{ é uma função}\}$ e por $\mathcal{R} = \{\text{os subconjuntos de } A \times B\}$, ou seja, $\mathcal{F}$ é o conjunto formado por todas as funções e $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as relações entre $A$ e $B$, obtemos as seguintes inclusões:*

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{R} \subset A \times B$$




## 2.6 Domínio, Contradomínio e Imagem

Levando em consideração a definição de função dada na **Definição 2.3**, é importante abordar sobre os conjuntos $A$ e $B$, bem como o conjunto formado pelas variáveis dependentes. Assim, temos:

**Definição 2.4.** *Sejam $A, B$ dois conjuntos não-vazios e $f : A \longrightarrow B$ uma função. O conjunto $A$ é chamado* **domínio** *de $f$ e o conjunto $B$ é chamado de* **contra-domínio**

*de $f$. Além disso, o conjunto dos valores dependentes de $f$*

$$Im(f) = \{y \in B; \quad y = f(x), \quad x \in A\},$$

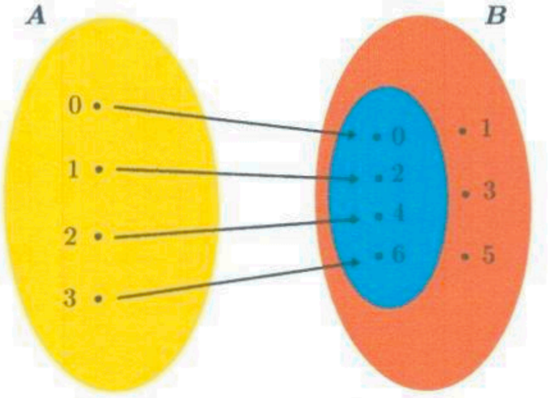
*é chamado de* **imagem** *de $f$.*

Denotamos também o domínio de $f$ por $D(f)$, isto é, $A = D(f)$. Portanto, $D(f)$ é o conjunto dos valores da variável independente para os quais $f$ é definida e $Im(f)$ é o conjunto dos valores da variável dependente calculados a partir dos elementos do domínio.

**Exemplo 2.10.** *Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, vamos considerar a função $f : A \longrightarrow B$ que transforma $x \in A$ em $2x \in B$, ou seja,*

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) = 2x. \end{aligned}$$

*O diagrama de Veen tem a eguinte configuração:*




*Veja que para caracterizar uma função é necessário conhecer seus três componentes: o domínio* **A**, *o contradomínio* **B** *e uma regra que associa cada elemento de $A$ a um único elemento $y = f(x) \in B$. Neste exemplo o domínio é $A = \{0, 1, 2, 3\}$, o contradomínio é $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a regra é dada por $y = 2x$ (ou $f(x) = 2x$) e a imagem de $f$ é $Im(f) = \{0, 2, 4, 6\}$. Notemos que $Im(f) \subset B$.*

## 2.7 Gráfico de uma Função

Em nosso dia a dia podemos observar a presença de representações gráficas, por exemplo, em livros, ao lermos uma revista ou um jornal, ou quando assistimos a um programa ou noticiário na televisão, ou ainda quando acessamos sites na internet. É possível perceber a presença de gráficos nas suas mais variadas formas, utilizados para divulgar os mais variados tipos de informações.

Nos gráficos aparecem a representação visual de informações relacionando grandezas. Além de proporcionar, de maneira eficaz, uma síntese de informações, os recursos gráficos facilitam a exposição e compreensão das informações, pois permitem uma rápida leitura da mesma. A linguagem gráfica é cada vez mais utilizada como meio de comunicação.

Na figura que segue, observamos um gráfico que descreve a variação do volume de água do açude Boqueirão do Cais localizado na cidade de Cuité nesta última década.


Figura 2.12: Volume de água do açude na última década.

O gráfico acima é conhecido como **gráfico de linhas**. Podemos obter uma simples leitura do gráfico acima, pois o mesmo nos fornece uma variedade de informações; por exemplo: a medida do volume de água em milhões de metros cúbicos, a capacidade máxima e a mínima que o açude alcançou, e o ano que o açude alcançou essas capacidades, e ainda perceber o fato que o volume atual do açude Boqueirão do Cais é o segundo menor da última década.

É de fundamental importância para formação do aluno, os conhecimentos matemáticos básicos para uma correta interpretação da linguagem gráfica nos dias de hoje, visto que esta linguagem está presente constantemente em nosso cotidiano. Associado ao conceito formalizado anteriormente para o conceito de funções, os gráficos podem fornecer informações visual importantes sobre uma função.

**Definição 2.5.** *O conjunto*

$$G(f) = G_f = \{(x, f(x)); x \in A\}$$

*denomina-se gráfico de $f$. Assim, o gráfico de $f$ é um subconjunto de $A \times B$. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de $f$ pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ quando $x$ percorre o domínio de $f$.*

**Exemplo 2.11.** *Vamos construir no plano cartesiano o gráfico de uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$, com $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.*
*Para isto, atribuímos valores a $x$ e encontramos valores correspondentes para $y$, obtendo pares ordenados $(x, y)$, como mostra a tabela.*

| $x$ | $y = x + 3$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| -2 | $y = -2 + 3 = 1$ | $(-2, 1)$ |
| -1 | $y = -1 + 3 = 2$ | $(-1, 2)$ |
| 0 | $y = 0 + 3 = 3$ | $(0, 3)$ |
| 1 | $y = 1 + 3 = 4$ | $(1, 4)$ |
| 2 | $y = 2 + 3 = 5$ | $(2, 5)$ |

*Em seguida, associamos cada par ordenado da tabela a um ponto no plano cartesiano, Figura 2.13, ligando os pontos por uma linha contínua, obtemos o gráfico da função $f$, Figura 2.14.*

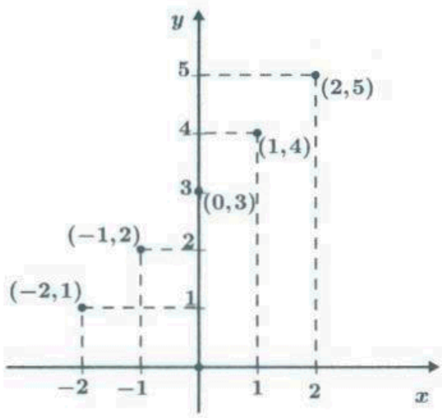



Figura 2.13: Representação de $(x, y)$ no Plano Cartesiano

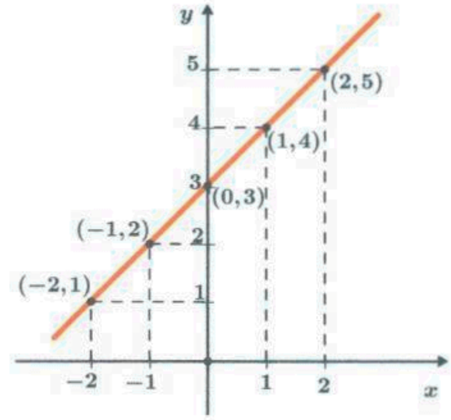
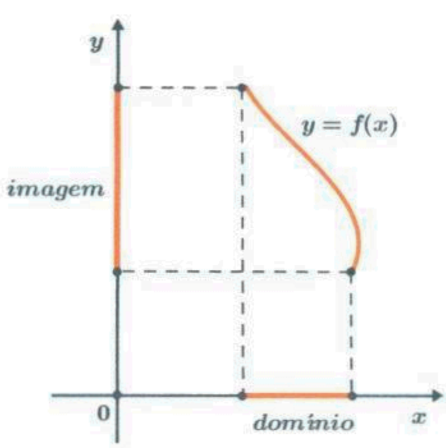
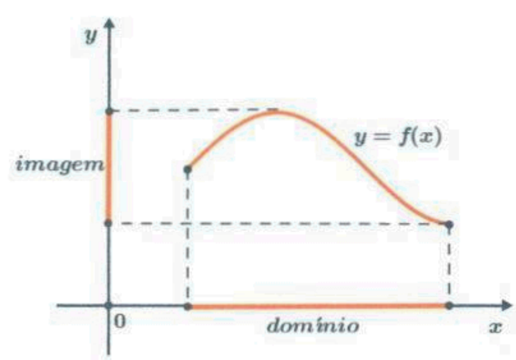



Figura 2.14: Gráfico de $f(x) = x + 3$

O domínio e a imagem de uma função $f$ podem ser identificados projetando o gráfico de $y = f(x)$ sobre os eixos coordenados, como mostram as figuras a seguir.




A projeção de $y = f(x)$ sobre o eixo $x$ é o conjunto de valores $x$ permissíveis para $f$ e a projeção sobre o eixo $y$ é o conjunto de valores $y$ correspondentes.

Para esboçar o gráfico de uma função $f$, utilizamos o fato de que os pontos do gráfico são pares ordenados $(x, y)$ em um plano cartesiano, com $x \in D(f)$ e $y \in Im(f)$.

É importante ressaltar que pela análise de um gráfico podemos conhecer se a relação é uma função ou não, já que para $y$ ser função de $x$, devemos ter que para cada valor de $x$, existe um único valor de $y$. Para isto, basta verificarmos se a *reta paralela ao eixo* $y$ conduzida pelo ponto $(x, 0)$, em que $x \in A$, *encontra sempre o gráfico de f em um só ponto.* Em outras palavras, basta traçar perpendiculares ao eixo $x$ por valores pertencentes ao domínio. Se todas as perpendiculares traçadas cortam o gráfico em apenas um ponto, a relação representada por esse gráfico é uma função. Caso contrário o gráfico não representa uma função, esse processo é conhecido como **teste da reta vertical**.

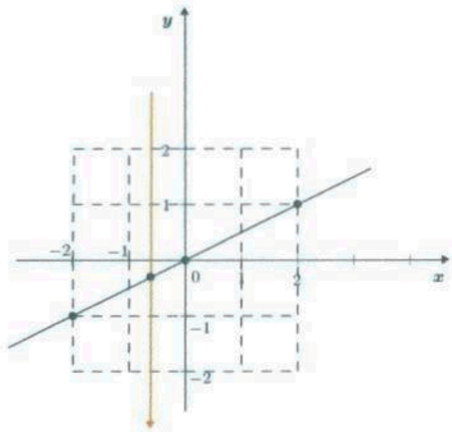


Figura 2.15: Representação de $R_1$

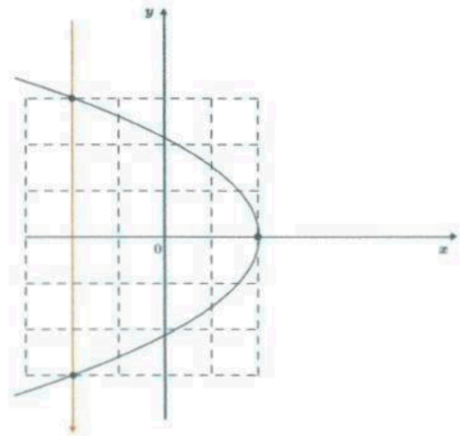


Figura 2.16: Representação de $R_2$

A relação $R_1$ como mostra a Figura 2.15 é uma função, pois qualquer reta perpendicular ao eixo $x$ corta o gráfico de $R_1$ em um só ponto. Isso significa que qualquer $x$ do domínio possui uma única imagem.

No caso de $R_2$ como mostra a Figura 2.16, isso já não acontece, pois a perpendicular traçada cortou o gráfico em dois pontos, o que significa que existe $x$ no domínio que tem duas imagens. Portanto $R_2$ não é uma função.

Uma outra característica importante sobre o estudo de funções é identificar quais são os valores no eixo da abscissa que o gráfico passa, ou seja, quando a função se anula. Desta forma, temos a seguinte:

**Definição 2.6 (Zero da função).** *Em uma função $f$, todo valor $x \in D(f)$ cuja imagem é nula, isto é, $f(x) = 0$, é denominado* **zero da função**, *ou ainda, ponto de corte de $y = f(x)$ com o eixo $x$, ou seja,*

$$\boxed{x \quad \text{é} \quad \text{zero} \quad \text{de} \quad y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0}$$

*Graficamente, os zeros da função correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico de $f$ intersecta o eixo $x$. Na função $f$, cujo gráfico está representado na figura ilustrada abaixo, temos $f(x_1) = f(0) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, donde $x_1, 0, x_2$ e $x_3$ são zeros dessa função.*

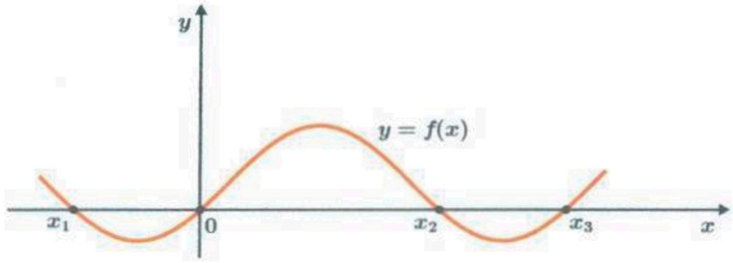



Figura 2.17: Representação gráfica dos zeros da função $y = f(x)$.

**Exemplo 2.12.** *Seja* $f : \mathbb{R} - \{11\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função cujo gráfico está representado abaixo.*

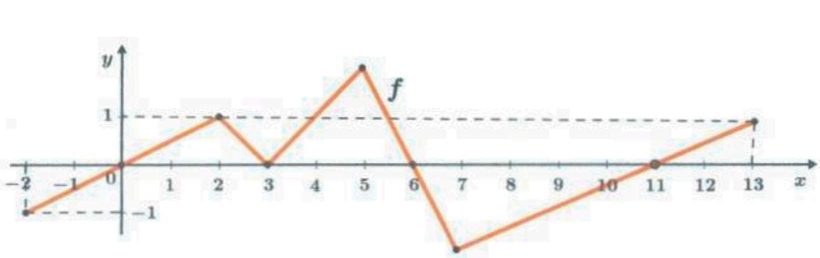



Figura 2.18: Representação gráfica dos zeros da função $f$.

*Observando esse gráfico identificamos que os zeros da função* $f$ *são:* $x = 0$, $x = 3$ *e* $x = 6$. *Além disso, mesmo o gráfico cortando o eixo das abscissas em* $x = 11$, *ele não é zero da função, pois esse valor não pertencer ao domínio de* $f$.

# Capítulo 3

# Função Afim

Segundo (LOPES JÚNIOR, [20]), para Elon Lages Lima (1999), o ensino de matemática se alicerça em dois conceitos primordiais, "Teoria de Conjuntos"e "Funções". Compreendê-los é de grande importância para outras áreas da matemática e contribuem para o avanço em conceitos mais profundos e abstratos dessa ciência.

## 3.1 Definição

**Definição 3.1 (Função Afim).** *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se* **função afim** *quando existem dois números reais* **a** *e* **b** *tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

**Exemplo 3.1.** *O preço de uma corrida de táxi, em geral, é constituído de uma parte fixa, chamada bandeirada, e de uma parte variável, que depende do número de quilômetros rodados. O taxímetro é um aparelho de medição utilizado nos táxis para calcular quanto o passageiro vai pagar pela corrida. Este aparelho adiciona o valor da bandeirada mais a quantidades de quilômetros rodados.*

Figura 3.1: Táxi

*Suponhamos que em certa cidade um motorista de táxi cobra uma taxa fixa de*

*R\$ 3,20 pela "bandeirada" mais R\$ 1,80 por quilômetro rodado. Dessa forma temos para cada quilômetro rodado a seguinte situação:*

| Quilômetros | Preço a pagar (R\$) |
|---|---|
| 1 | 1,80+3,20=5,00 |
| 2 | 3,60+3,20=6,80 |
| 3 | 5,40+3,20=8,60 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| 100 | 180,00+3,20=183,20 |
| $x$ | $1,80 \cdot x + 3,20$ |

Tabela 3.1: Relação entre quilômetros rodados e preço a pagar.

*Assim, intuitivamente saberemos que o preço de uma corrida de $x$ quilômetros é dado, em reais por: $p(x) = 1,80 \cdot x + 3,20$.*

Segundo a **Definição 3.1** observamos então que o preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f(x) = ax + b$, de modo que no exemplo dado $x$ é a distância percorrida, o valor inicial $b =$ R\$ 3,20 e o coeficiente $a =$ R\$ 1,80.

Assim podemos utilizar para as variáveis envolvidas, a notação a seguir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \text{preço da corrida de táxi;} \\ a &= \text{preço do quilômetro rodado;} \\ b &= \text{bandeirada;} \\ x &= \text{número de quilômetros rodados.} \end{aligned}$$

Vejamos mais alguns exemplos onde encontramos a função afim como uma modelagem de fenômenos que nos cercam diariamente.

**Exemplo 3.2.** *Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R\$ 1 500,00 e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6%, ou seja (0,06) sobre o total das vendas que ele faz durante o mês. Nessas condições, podemos dizer que:*

$$\textit{salário mensal} = 1500,00 + 0,06 \cdot \textit{(total das vendas por mês)}$$

*Observe então que o salário mensal desse vendedor é dado em função do total de vendas que ele faz durante o mês, ou seja:*

$s(x) = 1500,00 + 0,06 \cdot x$ *ou* $s(x) = 0,06 \cdot x + 1500,00$ *ou ainda* $y = 0,06 \cdot x + 1500,00$ *em que* $x$ *é o total das vendas do mês.*

**Exemplo 3.3.** *A empresa de TV a cabo Cab cobra de seus assinantes uma mensalidade de R$ 95,00 e mais R$ 5,00 por programa extra comprado. Desse modo, o valor a ser pago (preço) no final de cada mês depende do número de programas comprados pelo assinante.*

*Organizemos em uma tabela a relação existente entre o número de programas extras comprados e o total a ser pago. Usando* $x$ *para indicar o número de programas*

| Número de programas extras | Preço a pagar (R$) |
|---|---|
| 0 | $95 + 0 \cdot 5 = 95$ |
| 1 | $95 + 1 \cdot 5 = 100$ |
| 2 | $95 + 2 \cdot 5 = 105$ |
| 3 | $95 + 3 \cdot 5 = 110$ |
| 4 | $95 + 4 \cdot 5 = 115$ |

*extras comprados e por* $y$ *o preço a pagar, podemos relacionar essas duas grandezas pela sentença a seguir:*

$$y = 95 + x \cdot 5$$

## 3.2 A Função Afim no Cotidiano

Suponhamos que em uma propriedade rural a água potável que se utiliza é retirada de poços com o auxílio de uma bomba d'água com capacidade para bombear 15 litros por minuto. Essa bomba é ligada automaticamente quando o reservatório está com 250 litros de água e desligada ao enchê-lo.

Com essas informações, podemos escrever uma fórmula que permite calcular a quantidade de água contida no reservatório em função do tempo em que a bomba permanece ligada, considerando que não haja consumo de água durante esse período.

Para isso, representamos por:

- $y$ a quantidade de litros de água no reservatório enquanto a bomba permanece ligada e

- $x$ o tempo, em minutos, que a bomba permanece ligada.

Desta forma, a fórmula que modela essa situação é

$$y = 15 \cdot x + 250,$$

onde multiplicamos $x$ por 15, que é a quantidade de litros de água bombeada por minuto e acrescentamos 250 que é a quantidade de litros de água no reservatório necessária para a ativação da bomba.

Utilizando essa fórmula, vamos calcular, por exemplo, a quantidade de água no reservatório 25 minutos após a bomba entrar em funcionamento, ou seja, calcular o valor de $y$ para $x = 25$. Temos,

$$y = 15 \cdot x + 250 \quad \Rightarrow \quad y = 15 \cdot 25 + 250 = 375 + 250 \quad \Rightarrow \quad y = 625$$

Portanto, após 25 minutos de funcionamento da bomba, o reservatório estará com 625 litros de água.

Representando graficamente essa situação, temos o gráfico a seguir:

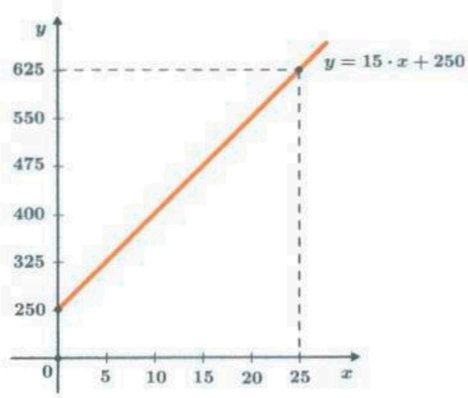



Figura 3.2: Gráfico do nível de elevação de água do reservatório.

**Exemplo 3.4.** *Uma pessoa tinha no banco um saldo positivo de R\$ 230,00. Após um saque no caixa eletrônico que fornece apenas notas de R\$ 50,00, o novo saldo é dado em função do número $x$ de notas retiradas. A lei da função é dada por $f(x) = 230 - 50 \cdot x$ ou, $f(x) = -50 \cdot x + 230$, ou ainda, $y = -50 \cdot x + 230$.*

**Exemplo 3.5.** *Algumas empresas fornecem serviços de aluguel de carros. Numa locadora de automóveis as tarifas do aluguel, correspondem ao tipo de carro que o cliente deseja alugar, que variam da seguinte forma:*

- **Carro popular:** *R$ 70,00 por dia mais R$ 0,60 por quilômetro rodado.*
- **Carro de luxo:** *R$ 120,00 por dia mais R$ 1,10 por quilômetro rodado.*

*De acordo com as informações, podemos escrever uma fórmula que permite calcular a quantia a ser paga pela locação do carro, por dia, em função da quantidade de quilômetros rodados. Para escrever esta fórmula, vamos representar por $y$ a quantia a ser paga, em reais, pela locação de um dia e por $x$ a quantidade de quilômetros rodados.*

$$\textit{quantia a ser paga} \longrightarrow \boldsymbol{y = \underbrace{0,6}_{\textit{preço do quilômetro rodado}} \cdot \overset{\textit{quantidade de quilômetros rodados}}{x} + \underbrace{70}_{\textit{preço da diária}}}$$

*Utilizando esta fórmula com as tarifas para o carro popular, vamos calcular a quantia a ser paga por uma pessoa que percorreu $40km$ em uma dia. Para $x = 40$, temos*

$$y = 0,6 \cdot 40 + 70 = 24 + 70 \Rightarrow y = 94.$$

*Portanto, a quantia a ser paga por essa pessoa é R$ 94,00. Para este caso temos o seguinte gráfico:*

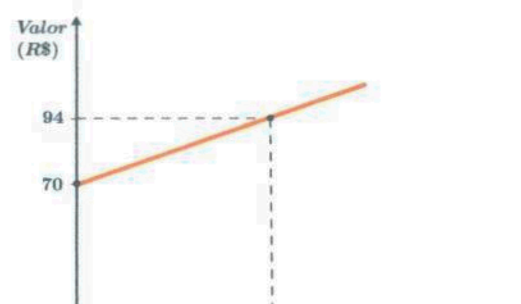



Figura 3.3: Gráfico da relação entre quilômetros rodados e preço a pagar.

## 3.3 Casos Particulares da Função Afim

Dada uma função afim qualquer $f(x) = ax + b$, vejamos alguns casos particulares que de acordo com os valores dos coeficientes recebem uma nomenclatura especial.

- **Função Identidade:** Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ recebe o nome de *função identidade* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio $x$, ou seja, $f(x) = x$, que é um caso particular de uma função afim escolhendo $a = 1$ e $b = 0$. O gráfico da função identidade é

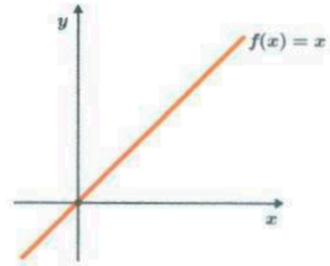



Figura 3.4: Gráfico da Função Identidade.

Observemos que o gráfico da função identidade, acima ilustrado, é a bissetriz do 1º e 3º quadrantes. E a imagem da função é $Im(f) = \mathbb{R}$.

- **Função Linear**

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ recebe o nome de *função linear* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$ é um número real dado, isto é, $f(x) = ax$, que é uma função afim, nos casos em que $b = 0$ e $a$ é um valor dado não-nulo.

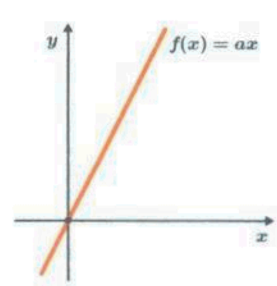



Figura 3.5: Gráfico da Função Linear.

O gráfico da função linear é uma reta não vertical que passa pela origem $(0, 0)$, pois $f(0) = a \cdot 0 = 0$, como mostra a figura acima. A imagem da função é $Im(f) = \mathbb{R}$.

- **Função Constante**

  Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ recebe o nome de *função constante* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$, isto é: $f(x) = c$. A qual também é uma função afim pelas escolhas de $a = 0$ e $b = c$.

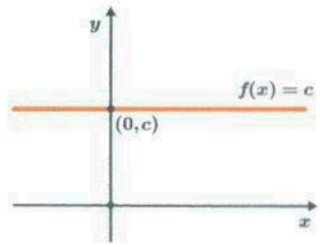



Figura 3.6: Gráfico da Função Constante.

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo $x$ que passa pelo ponto $(0, c)$. Como mostra a figura acima. E a imagem da função é o conjunto $Im(f) = \{c\}$.

- **Translação** *(da função identidade)*

  Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + b$, com $b \neq 0$ recebe o nome de *função translação*. Graficamente transladamos o gráfico da função identidade sobre o eixo $y$, passando pelo valor $b$, isto é, pelo ponto $(0, b)$, já que $f(0) = b$. A

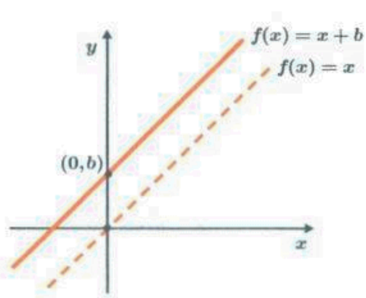



Figura 3.7: Gráfico da Translação da Função Identidade.

imagem dessa função é $Im(f) = \mathbb{R}$.

## 3.4 Taxa de Variação

Uma *função de uma variável real a valores reais*, ou apenas *função real* é uma função do tipo $f : A \to B$, onde $A$ e $B$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$. A taxa de variação de uma função real $f$, em relação a sua variável independente $x$, é a razão entre a variação da função quando $x$ sofre uma variação.

Em outras palavras, consideremos dois valores reais quaisquer, $x_1$ e $x_2$, e denotemos por $\Delta x = x_2 - x_1$ a variação de $x$. Agora, sendo $y = f(x)$ uma função, a variação da função $f$, quando $x$ varia de $x_1$ a $x_2$ é dada pela diferença $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$, onde $y_2 = f(x_2)$ e $y_1 = f(x_1)$ e denotamos essa variação por $\Delta y$. Assim, taxa de variação da função $f$ em relação a $x$ quando $x$ varia de $x_1$ à $x_2$ é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

onde devemos supor que $\Delta x \neq 0$, ou seja, $x_1 \neq x_2$

Vamos mostrar que a taxa de variação de uma função afim é constante e igual ao coeficente $a$.

De fato, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tal que $x_1 \neq x_2$ e $f(x) = ax+b$ uma função afim. Calculando a taxa de variação para $f$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a. \tag{3.1}$$

**Observação 3.1.** *O coeficiente a da função afim $f(x) = ax + b$ também é chamado de taxa de crescimento ou decrescimento da função afim. Na seção 3.8, apresentamos a explicação do porque dessas nomenclaturas.*

## 3.5 Gráfico da Função Afim

Estudamos no capítulo anterior que, uma das maneiras de construir o gráfico de uma função $f$, é atribuindo valores à variável independente, obtendo pares ordenados e representando-os em um plano cartesiano. Porém, se o domínio da função for o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, podemos atribuir infinitos valores para variável independente, obtendo infinitos pares ordenados. Esse é o caso de uma função afim,

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=ax+b. \end{aligned}$$

Desta forma podemos nos indagar:

> É possível construir o gráfico de uma função afim sem precisarmos ficar atribuindo muitos valores a $x$?

A respeito desse questionamento, convém observar que o gráfico de uma função, a princípio é representado em um plano. Assim, somos levados a conjecturar se os gráficos de funções podem ser identificados com elementos da Geometria Plana, como por exemplo, a reta, a parábola, etc. Por outro lado, nos exemplos de funções afins dados acima observamos que suas representações gráficas são retas. E eis que surge então uma nova questão, a saber:

$\boxed{\text{Será o gráfico de uma função afim uma reta?}}$

Felizmente, a resposta é sim. Vejamos como demonstrar esse resultado.

**Teorema 3.1.** *O gráfico de uma função afim é uma reta não vertical.*

**Demonstração:** *Para mostrar que o gráfico de uma função afim $f(x)=ax+b$ é uma reta, vamos usar a condição de colinearidade de três pontos, ou seja, que eles estão numa mesma reta, condição essa, dada pela distância entre os pontos: "Três pontos são colineares se a maior distância entre eles é igual à soma das outras duas menores".*

*Sejam, $P_1(x_1, ax_1+b)$, $P_2(x_2, ax_2+b)$ e $P_3(x_3, ax_3+b)$, três pontos quaisquer pertencentes ao gráfico de uma função afim. Observemos que como queremos que a reta seja não vertical, podemos supor, sem perda de generalidade, que as abscissas $x_1, x_2$ e $x_3$ são tais que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá que a distância entre $P_1$ e $P_2$ é:*

$$\begin{aligned} d(P_1,P_2) &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+[(ax_2+b)-(ax_1+b)]^2}, \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+a^2(x_2-x_1)^2}, \\ &= (x_2-x_1)\sqrt{1+a^2}. \end{aligned}$$

*Fazendo o mesmo processo para $d(P_1, P_3)$ e $d(P_2, P_3)$ obtemos*

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1+a^2} \quad e \quad d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1+a^2}.$$

*Daí, segue que*

$$\begin{aligned} d(P_1, P_3) &= (x_3 - x_1)\sqrt{1+a^2} \\ &= (x_3 - x_2 + x_2 - x_1)\sqrt{1+a^2}, \\ &= (x_3 - x_2)\sqrt{1+a^2} + (x_2 - x_1)\sqrt{1+a^2}, \\ &= d(P_2, P_3) + d(P_1, P_2). \end{aligned}$$

*Mostrando assim que os pontos $P_1$, $P_2$ e $P_3$ são colineares e portanto, o gráfico de qualquer função afim é uma reta não vertical.* □

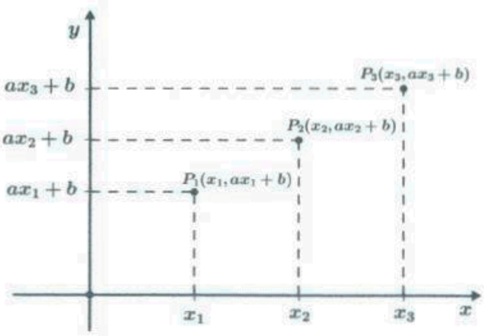



Figura 3.8: Pontos colineares $P_1, P_2$ e $P_3$.

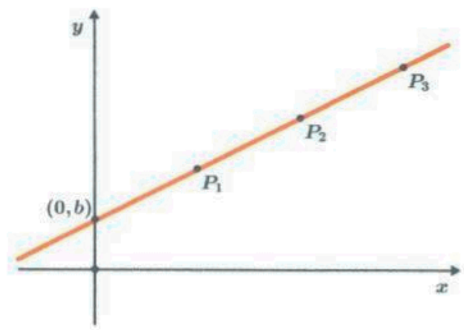



Figura 3.9: Reta passando por $P_1, P_2$ e $P_3$.

Além disso, sabemos da Geometria Plana que uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos. De posse dessa informação e do Teorema 3.1, concluímos que para construirmos o gráfico de uma função afim $f$, basta conhecermos dois valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que $f$ assume em dois valores independentes $x_1 \neq x_2$ e traçar uma reta passando pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

**Exemplo 3.6.** *Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 1$. Como para traçarmos o gráfico de uma função afim basta conhecermos dois pontos, $x_1 \neq x_2$, sejam eles 0 e 1 respectivamente. Deste modo, aplicamos esses pontos na função, da seguinte maneira:*

- *para $x = 0$, temos $f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1$ e*

- *para* $x = 1$, *temos* $f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$.

*Logo, temos os pontos* $(0, 1)$ *e* $(1, 4)$. *Agora, traçando no plano a reta que passa por esses pontos, temos o gráfico abaixo:*

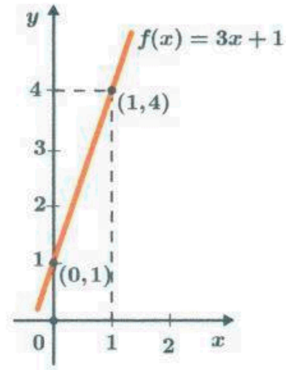



Figura 3.10: Representação gráfica de $f(x) = 3x + 1$.

Sabendo que o gráfico de uma função afim é uma reta, resta ainda nos perguntarmos sobre a localização desta reta no plano cartesiano. Isto está intimamente ligado aos coeficientes $a$ e $b$ da lei de formação de uma função afim. Assim, nos indagamos:

> Os coeficientes $a$ e $b$ de uma função afim nos fornecem informações a respeito do comportamento do seu gráfico?

Com relação ao gráfico, o coeficiente $a$ é denominado *coeficiente angular* ou *inclinação* da reta representada no plano cartesiano. A justificativa para essa nomenclatura é que este coeficiente indica a tangente do ângulo entre a reta e o eixo $x$.

De fato, consideremos uma reta $r$ passando pelos pontos distintos $A(x_1, f(x_1))$ e $B(x_2, f(x_2))$ e denotemos por $\alpha$ o ângulo formado entre a reta $r$ e o eixo $x$, como na figura abaixo.

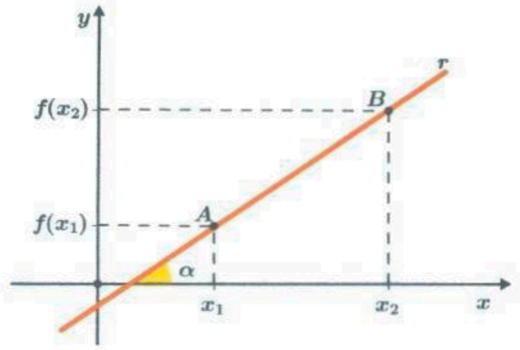



Figura 3.11: Ângulo $\alpha$ formado por $r$ e o eixo $x$.

Prolongando a semi-reta que passa pelo ponto $A$ e é paralela ao eixo $x$, formaremos um triângulo retângulo no ponto $C$, como mostra a figura 3.12. O ângulo $\widehat{A}$ do triângulo $BCA$ será igual ao ângulo da inclinação da reta, pois, pelo Teorema de Tales, duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes iguais.

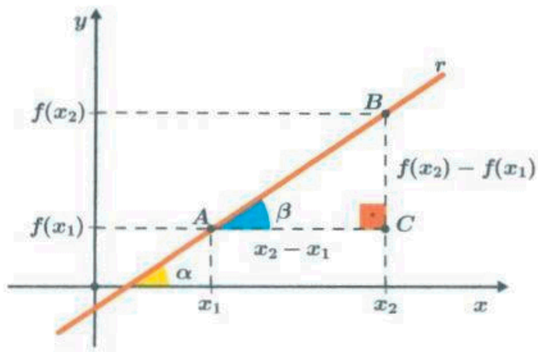



Figura 3.12: Representação da $\tan\alpha$.

Levando em consideração o triângulo $BCA$ temos que a tangente de $\alpha$ é dada pela razão:

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ \ oposto}{cateto\ \ adjacente} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

como vimos na fórmula (3.1).

No caso do coeficiente $b$, geometricamente, ele é a ordenada do ponto $(0, b)$, onde a reta intersecta o eixo $y$, pois para $x = 0$ temos $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. Neste sentido, o coeficiente $b$ é denominado *coeficiente linear*.

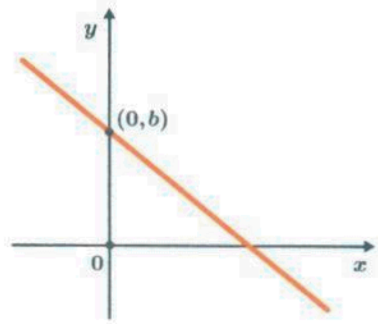



Figura 3.13: Representação geométrica do coeficiente $b$.

Na prática, sabendo que $f$ é afim e que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$, podemos determinar os coeficientes $a$ e $b$ de modo que se tenha $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto corresponde a resolver o sistema abaixo cuja as incógnitas são $a$ e $b$:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) & = ax_1 + b \\ y_2 = f(x_2) & = ax_2 + b \end{cases}$$

Fazendo a diferença entre a primeira equação e a segunda, obtemos:

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Substituindo esse valor de $a$ em $y_1 = ax_1 + b$, obtemos o valor de $b$:

$$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1 + b \quad \Longrightarrow \quad y_1(x_2 - x_1) = y_2x_1 - y_1x_1 + b(x_2 - x_1) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y_1x_2 - y_1x_1 - y_2x_1 + y_1x_1 = b(x_2 - x_1) \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$$

Deste modo, temos que $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $b = \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$.

Assim, bastam dois pontos quaisquer, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tais que $x_1 \neq x_2$, para que exista uma, e somente uma, função afim, definida por $f(x) = ax + b$, tal que, $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, ou seja, cujo gráfico contém os pontos dados.

Uma pergunta natural que surge é se a recíproca do **Teorema 3.1** é verdadeira, isto é, podemos fazer a seguinte

**Conjectura 3.1.** *Toda reta não vertical $r$ é o gráfico de uma função afim.*

Para responder a essa conjectura, consideremos uma reta $r$ e dois pontos distintos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, pertencentes a ela. Vimos acima que dados dois pontos distintos existe uma única função afim, cujo gráfico contém esses dois pontos. Como o gráfico da função afim é uma reta que contém os pontos $P_1$ e $P_2$ dados, então esta reta coincide com a reta $r$ dada. Portanto, podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 3.2.** *Toda reta $r$, não paralela ao eixo $y$, é o gráfico de uma função afim.*

### 3.5.1 Como Construir o Gráfico de uma Função Afim

De posse dessas informações vejamos como fica simples e prático construir o gráfico de uma função afim. Consideremos por exemplo, a seguinte função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - 1$.

Inicialmente, atribuímos valores para $x$, obtendo os valores correspondentes para $y = f(x)$, e dessa forma, determinamos os pares ordenados $(x, y)$. Como visto acima são precisos apenas dois pontos para se determinar uma reta e como cada par ordenado corresponde a um ponto no plano cartesiano, podemos encontrá-los atribuindo apenas dois valores distintos para a variável independente $x$, por exemplo $x = 0$ e $x = 2$, como na tabela abaixo:

| $x$ | $f(x) = 2x - 1$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $f(0) = 2 \times (0) - 1 = -1$ | (0,-1) |
| 2 | $f(2) = 2 \times (2) - 1 = 3$ | (2,3) |

Para representar graficamente essa função, vamos marcar num plano cartesiano os pontos $(0, -1)$ e $(2, 3)$ e traçar uma reta passando por eles, já que pelo **Teorema 3.1** o gráfico de uma função afim sempre será uma reta. Temos o seguinte gráfico:

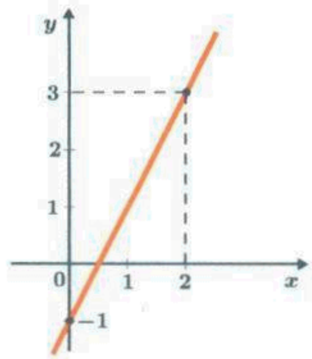



Figura 3.14: Gráfico de $f(x) = 2x - 1$

## 3.6 Zero da Função Afim

Dada uma função, vimos pela **Definição 2.6** do capítulo 2 que, para que um valor $x$ seja *zero* da função, é preciso que tenhamos $f(x) = 0$.

Vamos realizar tal substituição na lei de formação da função afim definida por $f(x) = ax + b$, para determinar o zero de uma função afim. Para isto, basta então resolver a equação $ax + b = 0$, ou seja,

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax = -b \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}, \quad \forall a \neq 0.$$

Portanto, se $a \neq 0$ o zero da função afim $f(x) = ax + b$ é dado por

$$x = -\frac{b}{a}.$$

**Exemplo 3.7.** *Vamos determinar o zero da função $f(x) = 2x - 2$, construir seu gráfico e entender o significado geométrico do zero de uma função afim.*

*Como $f(x) = 2x - 2$ é uma função afim, com $a = 2$ e $b = -2$, temos que o zero da função é:*

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

*Logo, a reta dessa função intersepta o eixo $x$ no ponto $(1, 0)$ e o eixo $y$ em $(0, -2)$, já que seu coeficiente linear é $b = -2$.*

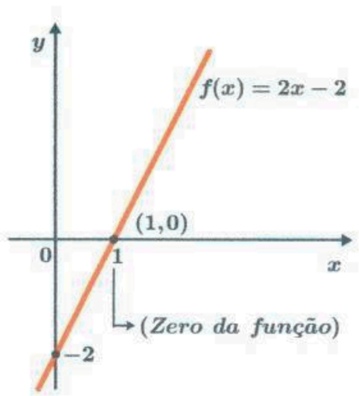



Figura 3.15: Gráfico da função $f(x) = 2x - 2$.

*Pelo gráfico, vemos geometricamente que o zero da função afim $f(x) = 2x - 2$ é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo $x$.*

Deste exemplo, podemos notar que uma forma ainda mais simples para se construir o gráfico de uma função afim, é encontrarmos o zero da função e observar qual é o valor do coeficiente linear $b$, ou seja, basta encontrar os pontos $\Big(-\dfrac{b}{a},0\Big)$ e $(0,b)$, e depois de identificados no gráfico traçar uma reta passando por eles.

No exemplo acima, temos

$$\Big(-\frac{(-2)}{2},0\Big) \quad \text{e} \quad (0,-2),$$

ou ainda, $(1,0)$ e $(0,-2)$, que são respectivamente, o zero da função e o ponto onde o gráfico intercepta o eixo $y$.

## 3.7 Crescimento e Decrescimento da Função Afim

**Definição 3.2 (Função crescente).** *Uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita crescente em um intervalo contido no domínio de $f$ se, e somente se, para todos $x_1$ e $x_2$ nesse intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$ (Neste caso conserva-se o sinal da desigualdade). Em outras palavras, podemos dizer que: Uma função é crescente, se na medida em que aumentamos o valor de $x$, então $f(x)$ também aumenta.*

*Portanto, $f$ é dita crescente se*

$$\forall x_1, x_2, \quad com \quad x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

*que também pode ser posto da seguinte maneira:*

$$\forall x_1, x_2, \quad com \quad x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0. \tag{3.2}$$

**Definição 3.3 (Função decrescente).** *Uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita decrescente em um intervalo contido no domínio de $f$ se, e somente se, para todos $x_1$ e $x_2$ nesse intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$ (Neste caso troca-se o sinal da desigualdade). Em outras palavras, podemos dizer que: Uma função é decrescente, se na medida em que aumentamos o valor de $x$, então $f(x)$ diminui. Portanto, $f$ é dita decrescente se*

$$\forall x_1, x_2, \quad com \quad x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$

*ou analogamente,*

$$\forall x_1, x_2, \quad com \quad x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0. \tag{3.3}$$

Das definições acima podemos então identificar quando uma função afim é crescente ou decrescente. Observemos as figuras abaixo:

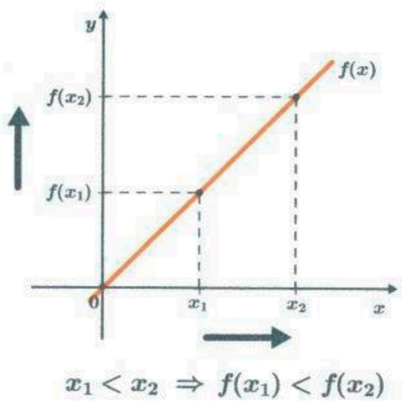



Figura 3.16

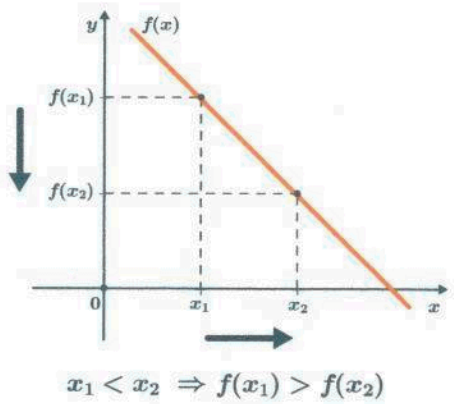



Figura 3.17

A figura 3.16 indica que na medida em que aumentamos o valor de $x$, então $f(x)$ também aumenta, e portanto seu gráfico corresponde a uma função afim crescente. Por outro lado, na figura 3.17 vemos que na medida em que aumentamos o valor de $x$, então $f(x)$ diminui, donde seu gráfico corresponde a uma função afim decrescente.

Logo, dada uma reta não vertical no plano cartesiano é simples identificar se uma função afim é crescente ou decrescente. E se não tivermos o gráfico de uma função afim, existe alguma forma de identificarmos seu crescimento ou decrescimento?

Neste caso, a lei de formação da função afim definida por $f(x) = ax + b$, vai nos ajudar a responder essa questão através do sinal do coeficiente angular $a$.

- Uma função afim, $f(x) = ax+b$ é *crescente* se, e somente se, o coeficiente angular $a$ for positivo, ou seja, se, e somente se, $a > 0$.

  De fato, por (3.1) e (3.2) temos que

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0,$$

  donde vemos que $f$ é crescente se, e somente se, $a > 0$.

- Uma função afim $f(x) = ax + b$ é *decrescente* se, e somente se, o coeficiente $a$ for negativo, ou seja, se, e somente se, $a < 0$.

  De fato, por (3.1) e (3.3) temos que

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0,$$

  donde vemos que $f$ é decrescente se, e somente se, $a < 0$.

## 3.8 Estudo do Sinal da Função Afim

O estudo do sinal de função consiste em determinar os valores de $x \in D_f$ para os quais $f(x) = 0, f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$. Para o nosso estudo consideremos $f$ uma função afim com $a \neq 0$.

- 1° Caso: $f(x) = 0$

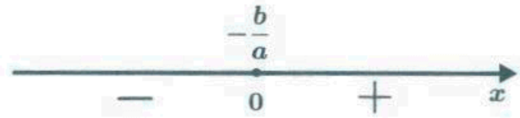
  Como já vimos, uma função afim, $f(x) = ax + b$ anula-se para $x = -\frac{b}{a}$, ou seja, no zero da função.

- 2° Caso: Se $a > 0$, ou seja, se $f$ é uma função crescente, temos que,

$$f(x) > 0 \iff f(x) = ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

  e

$$f(x) < 0 \iff f(x) = ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x < -\frac{b}{a}.$$




Se colocarmos os valores de $x$ sobre um eixo, veremos que o sinal da função $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, é:

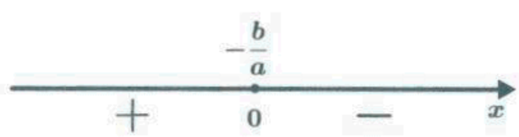
- 3º Caso: Se $a < 0$, ou seja, se $f$ é decrescente, então

$$f(x) > 0 \iff f(x) = ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

e

$$f(x) < 0 \iff f(x) = ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x > -\frac{b}{a}.$$

Se colocarmos os valores de $x$ sobre um eixo, veremos que o sinal da função $f(x) = ax + b$, com $a < 0$, é:




Também podemos analisar a variação do sinal de uma função afim observando seu gráfico. Para uma função crescente ($a > 0$) temos:

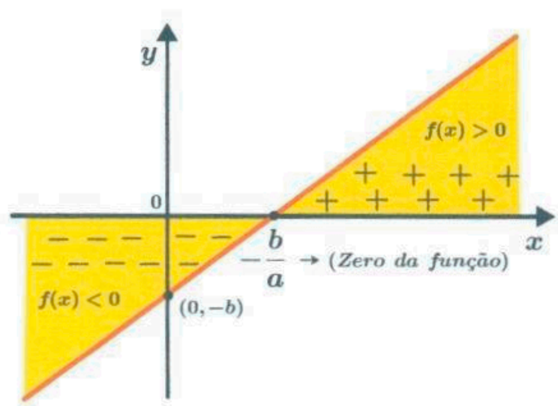



Figura 3.18: Gráfico da função afim com $a > 0$.

Observando o gráfico, podemos concluir que para $a > 0$:

- $x = -\frac{b}{a} \implies f(x) = 0,$

- $x > -\dfrac{b}{a} \implies f(x) > 0$ e
- $x < -\dfrac{b}{a} \implies f(x) < 0.$

Agora, construindo o gráfico de $f$ com $a < 0$, temos:

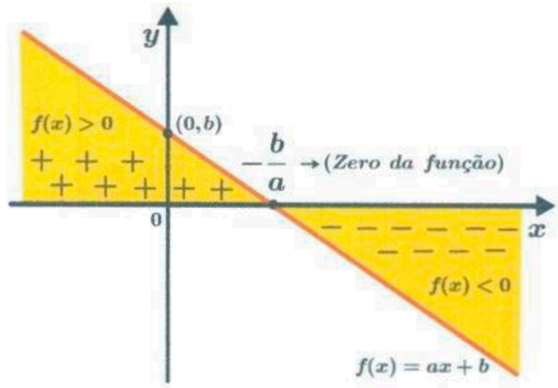



Figura 3.19: Gráfico da função afim com $a < 0$.

Observando o gráfico, podemos concluir que para $a < 0$, temos:

- $x = -\dfrac{b}{a} \implies f(x) = 0,$
- $x > -\dfrac{b}{a} \implies f(x) < 0$ e
- $x < -\dfrac{b}{a} \implies f(x) > 0.$

# Capítulo 4

# Ensino de Função Afim com Auxílio do Geogebra

Neste capítulo faremos uma breve apresentação do software Geogebra e apresentaremos propostas de como explorá-lo no ensino de funções afins dinamizando e facilitando assim o seu aprendizado.

## 4.1 O software Geogebra

É um programa computacional educativo gratuito de matemática dinâmica. Foi criado por Markus Hohenwarter como tese de doutorado da Universidade de Salzburg, Áustria, e traduzido para o português por J Geraldes (LOPES JÚNIOR [20]). Este software tem a finalidade de dinamizar o ensino de matemática. Possui, além das ferramentas básicas de geometria, a possibilidade de inserir equações e coordenadas no plano. Com o software Geogebra é possível trabalhar geometria, álgebra e cálculo, visto que, este software apresenta três diferentes janelas: a gráfica, a algébrica e a planilha de cálculos. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos e o ambiente visual em três diferentes representações: graficamente através de (pontos e gráficos de funções), algebricamente através de (coordenadas de pontos e equações) e na forma de tabelas através das células da planilha de cálculo.

Este software é uma ferramenta que pode auxiliar o professor na elaboração de estratégias metodológicas que evidenciem a participação ativa do aluno no processo de formação de conceitos matemáticos, pois propicia a manipulação e visualização de objetos matemáticos de forma integradora das subáreas desta disciplina.

Dentro as ferramentas pesquisadas que se encaixam na categoria de TIC's, o Geogebra destacou-se por sua interface interativa, agilidade, simplicidade, funcionalidade, e variedade de ferramentas. O Geogebra é uma ferramenta potencial que pode inovar no processo de ensino-aprendizagem de matemática, em muitos dos conteúdos dessa ciência.

Outro fato relevante é que o Instituto Geogebra no Brasil, com sede em algumas universidades, desenvolve materiais gratuitamente no treinamento do Geogebra como ferramenta para o ensino e aprendizagem da matemática. E o Instituto Geogebra Internacional São Paulo (IGISP) disponibiliza uma revista eletrônica *(http://www.pucsp.br/geogebra)*, a fim de oferecer um espaço para a divulgação de pesquisas e trabalhos desenvolvidos com o uso deste software.

### 4.1.1 Conhecendo o Geogebra

Há duas formas de fornecer instruções ao software: via barra de ferramentas ou pelo campo de entrada. A barra de ferramentas serve como um "atalho" para determinados tipos de comandos, já no campo de entrada (ou comando escrito) o usuário pode acessar a maioria dos comandos da barra de ferramentas com a vantagem de escrever em língua portuguesa.


Figura 4.1: Janela de visualização do Geogebra

Na janela de visualização (Área de trabalho), na parte superior ficam os objetos geométricos e na Janela de Álgebra à esquerda fica anotada toda informação algébrica dos objetos que estão na janela de visualização. Caso se pretenda conhecer como foi feito o passo a passo em uma construção, o programa oferece a função protocolo de construção que pode ser acessado no comando exibir. O software permite construir vários objetos: pontos, vetores, segmentos, retas, gráficos de funções e curvas parametrizadas, entre outras potencialidades do programa, os quais podem ser modificados dinamicamente, após a sua construção, sem perder as suas propriedades, permite também, a introdução de equações e coordenadas.

O Geogebra disponibiliza também opções para a visualização de eixos e malhas bastando apenas na janela de visualização clicar em exibir depois selecionar o que deseja ou não ver.

Outro ponto interessante no Geogebra é a possibilidade de formatação que o software proporciona como por exemplo: unidade do ângulo, pontos sobre a malha, tipo de arredondamento, estilo do ponto, opções para rotular objetos, estilo do ângulo reto e muitas outras facilidades. A maioria dos softwares não permite ao usuário moldar os objetos como o Geogebra, além disso, podemos criar animações usando parâmetros, para manipular com maior facilidade as figuras, tornando a Matemática mais acessível e menos abstrata.

### 4.1.2 Características do Software

| Características do software Geogebra: |
|---|
| Trabalha álgebra e geometria integradas. |
| Possui interface simples, facilitando assim o uso pelos alunos em sala de aula ou em casa. |
| Precisão em suas construções gráficas. |
| Escrito em linguagem Java. |
| Executado em qualquer sistema operacional, ou seja, possui a vantagem de funcionar em múltiplas plataformas operacionais (Windows, Linux, Macintosh, etc.). |
| É livre e disponível no seguinte endereço eletrônico: *http://www.geogebra.org/cms/*. |

### 4.1.3 Pontos: livres ou dependentes

Esta seção tem como objetivo trazer alguns esclarecimentos sobre a liberdade ou não na manipulação de pontos, pois dependendo da forma que o ponto foi definido podemos mover o ponto da forma que queremos, mas respeitando certas condições ou o ponto se torna imóvel.

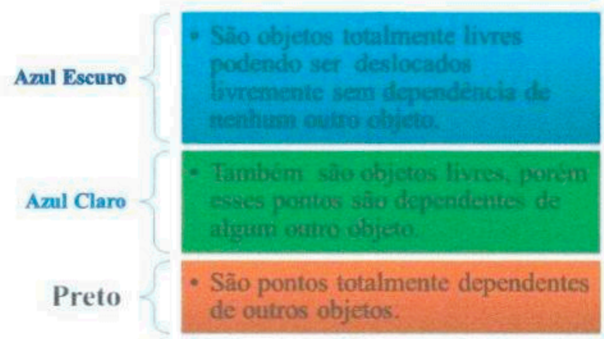



Figura 4.2: Pontos livres e dependentes

### 4.1.4 Funções da Barra de Ferramentas

A barra de ferramentas do Geogebra é esta que se apresenta abaixo:


Figura 4.3: Barra de ferramentas do Geogebra.

**Observação 4.1.** *Descreveremos apenas as ferramentas que serão utilizadas na construção das atividades. Quanto as demais ferramentas, caso deseje explorar todos os comandos, acesse o Manual do programa Geogebra que dispõe desde a Versão 4.2. até a versão 4.4. que se encontra disponível em: [22].*

Clicando nesta janela , da barra de ferramentas selecione a opção abaixo:

Com esta ferramenta pode-se selecionar, mover e manipular objetos já construídos. É uma das ferramentas mais usadas no programa. Também podemos selecioná-la, apertando a tecla "Esc"do teclado.

Clicando nesta janela , da barra de ferramentas você pode selecionar as opções a seguir:


**NOVO PONTO**

Cria um ponto em um espaço livre, em um objeto ou em uma interseção. No Geogebra a rotulação é automática, ou seja, ao criar um ponto automaticamente ele recebe as letras maiúsculas do nosso alfabeto (A,B, C...). Posteriormente, quando estivermos falando sobre o "CAMPO DE ENTRADA", você perceberá que existe outra forma de se criar pontos. Quando um ponto é criado, suas coordenadas aparecem na janela algébrica.

**INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS**

O ponto de interseção entre dois objetos pode ser criado de duas maneiras:
*i)* selecionando dois objetos: dessa forma todas as interseções existentes são marcadas (a ordem na qual clicamos nos dois objetos é indiferente);
*ii)* clicando, com o botão esquerdo do mouse, em uma interseção desses objetos: somente esse ponto de interseção será marcado.

Clicando nesta janela , da barra de ferramentas podemos selecionar a opção que segue:

**SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS**

Esta ferramenta cria o seguimento de reta capaz de unir dois pontos. Se os pontos já estiverem na área gráfica, basta clicar sobre eles seguidamente. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta em questão. Na janela algébrica é mostrado o comprimento do segmento traçado.

Clicando nesta janela, da barra de ferramentas selecione a seguinte opção:


Com esta ferramenta, pode-se construir uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Assim, para se criar uma perpendicular, você deverá clicar sobre um ponto e sobre uma direção (naturalmente representada por qualquer semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono). A ordem na qual clicamos nos dois objetos (reta e ponto ou ponto e reta) é indiferente.

Clicando nesta janela, da barra de ferramentas selecione a opção:


Com esta ferramenta, pode-se inserir qualquer texto na região gráfica. Tem-se toda a simbologia do *LATEX* a sua disposição. Caso não conheça o *LATEX* podemos usar textos simples. Clicando, com o botão esquerdo do mouse, na área de trabalho, o texto que você digitar, na janela que será aberta, aparecerá neste local.

Clicando nesta janela, da barra de ferramentas visualizamos o seguinte menu:


Um seletor é um pequeno segmento com um ponto que se movimenta sobre ele. Com esta ferramenta é possível modificar, de forma dinâmica, o valor de algum parâmetro. Selecionando essa ferramenta e clicando sobre qualquer lugar na janela geométrica com o botão esquerdo do mouse, você cria um seletor para um número ou para um ângulo. Aparecerá uma janela na qual você especificará o intervalo [min, max] do respectivo número ou ângulo e a largura do seletor (em pixel). Um seletor nada mais é do que uma representação gráfica de um número ou ângulos livres.

**ATIVAR A CAIXA PARA EXIBIR/ESCONDER OBJETO**

Essa ferramenta permite que você escolha quais são os objetos que quer mostrar, quando ela está ativada. Desmarcando-a, os objetos a ela vinculados desaparecem da janela de visualização. Clique na janela geométrica, com o botão esquerdo do mouse, para criar uma caixa de seleção.

## 4.2 Função Afim com o Uso do Geogebra

Nos livros, de Matemática do ensino médio de DANTE [8] e RIBEIRO [24] o conteúdo de funções é introduzido a partir de uma exploração intuitiva por meio de exemplos envolvendo situações práticas e comuns ao cotidiano dos alunos, para que eles possam associar o conteúdo a ser ministrado com o seu cotidiano e sua experiência de vida. É feita uma relação com a teoria de conjuntos e definidos os conceitos de domínio, contradomínio, imagem, representação algébrica através de fórmulas matemáticas e representação gráfica com uma comparação com os conceitos descritos anteriormente, e depois são definidos os tipos de funções e os conceitos relacionado a cada tipo. E assim, segue-se como na maioria dos livros didáticos. Este tipo de abordagem é, geralmente, a usada por todos os professores do ensino médio, em todo o país.

Neste contexto, o que se propõe à frente não é uma mudança nessa abordagem ou sequência, mas uma sugestão, de como inovar e enriquecer o ensino deste conteúdo, usando uma ferramenta que fará com que o aluno participe da construção de seu saber. Para que possa haver aprendizagem, é necessário que o aluno reflita durante a execução das atividades. Daí a importância do professor. O papel do professor é de fundamental importância nesse processo. Ele precisa fazer com que os alunos reflitam e percebam o que de fato está por trás das construções que eles estão fazendo, além de auxiliá-los nas justificativas das construções.

O Geogebra oferece alternativas de visualização animada para a melhor assimilação dos conceitos relacionados à função afim. Aqui serão expostas formas de abordar:

*i)* Gráfico da função;

*ii)* A importância dos coeficientes angular e linear;

*iii)* Crescimento e decrescimento da função;

*iv)* Zero da função;

*v)* Estudo do sinal;

*iv)* Lei da função.

De uma forma que o aluno terá a oportunidade de tirar suas próprias conclusões, e assim descubra e compreenda algebricamente e geometricamente os conceitos envolvidos, sendo orientados pelas perguntas do professor.

Esta atividade deverá ocupar de 3 a 6 horas/aula (50 minutos cada) do professor. E claro, que esta atividade deverá ser desenvolvida após a exposição dos conceitos envolvidos no conteúdo de função afim, abordados nos capítulos anteriores, tendo em vista que os alunos precisam dos conhecimentos prévios para poder desenvolver a mesma, a fim de que os alunos consigam explorar ao máximo as construções feitas, as interpretações presentes, enfim as potencialidades desta atividade.

Em relação ao professor, este precisa apresentar como conhecimentos prévios para o desenvolvimento desta atividade as noções básicas de utilização do software Geogebra, além do conteúdo de função afim abordado no livro didático.

Nas atividades aqui propostas o professor deverá conversar com os estudantes, repassando as informações gerais sobre a atividade e tendo em mente que os objetivos somente serão atingidos se todos caminharem juntos, ou seja, realizarem a atividade "passo a passo", a fim de que a concluam juntos.

### 4.2.1 Gráfico da Função Afim no Geogebra

O que se pretende com esta atividade é realizar uma construção na qual o objetivo é ilustrar o fato de que os pontos da forma $(x, ax + b)$ estão alinhados, de forma que representam uma reta. E explorar a relação existente entre o gráfico da função e os coeficientes *angular* e *linear*.

Ao iniciar o software aparecerá a janela ilustrada pela Figura 4.4. a seguir:

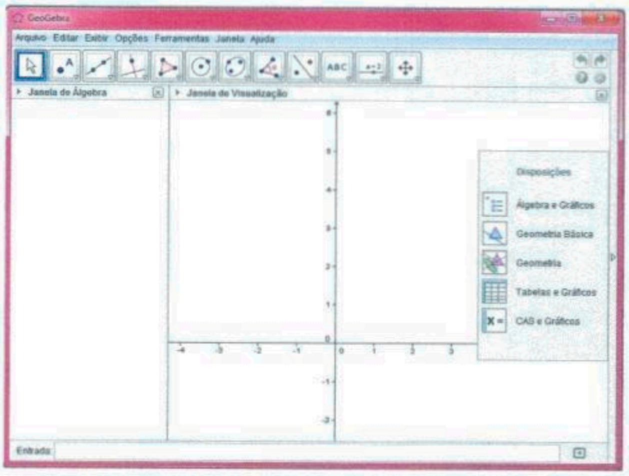
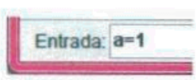


Figura 4.4: Janela de Visualização de Geogebra

Sugerimos os passos necessários para construção do gráfico da função afim, a saber:

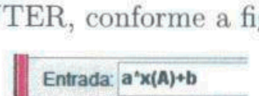
1º Passo: - NO CAMPO DE ENTRADA, digite $a = 1$ e aperte ENTER. Digite $b = 2$ e aperte ENTER. Chamamos esses pontos de seletores e eles representarão os valores dos coeficientes "$a$" e "$b$" da função afim que queremos analisar. Como mostra a figura abaixo.




2º Passo: - Observe se na JANELA DE ÁLGEBRA aparecem os valores de "$a$" e "$b$". Em seguida, clique sobre a bolinha branca ao lado do número "$a$". Faça o mesmo pra "$b$". Os valores de "$a$" e "$b$" aparecerão em segmentos que chamamos de seletores na área de visualização.

3º Passo: - NOVO PONTO: Ative esta ferramenta  na (2º janela da barra de ferramenta) e crie um ponto **A** sobre o eixo $x$. Para ter certeza que o ponto está sobre o eixo $x$ clique, segure e arraste o ponto **A**. Neste processo o ponto deverá se mover sobre o eixo.

4º Passo: - NO CAMPO DE ENTRADA: Digite a seguinte expressão: $a^*x(A) + b$. Depois de digitado, pressione ENTER, conforme a figura abaixo.

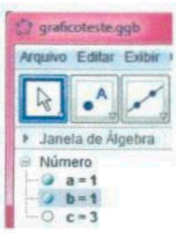


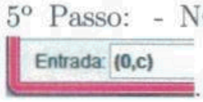
**Observação 4.2.** *:*

*(a) O símbolo "*" significa "multiplicado por". Você pode substituí-lo por um "espaço em branco".*

*(b) "$x(A)$" simboliza a abscissa do ponto* **A**.

*Após esses c na JANELA DE ÁLGEBRA. Esse número corresponde ao valor de $h(x)$ na função $h(x) = x + 2$, para $x$ igual ao valor da abscissa do ponto $A$. Lembre-se que assumimos inicialmente os valores $a = 1$ e $b = 2$. Agora vamos transferir o valor de c para o eixo $y$, clicando sobre a bolinha branca ao lado do valor. veja a figura ilustrada abaixo.*




5º Passo: - NO CAMPO DE ENTRADA: digite $(0, c)$. Como na figura ao lado: 

. Observe se aparece um ponto **B** no eixo $y$. Se não aparecer, talvez seja porque o valor de $c$ é grande ou pequeno demais. Se isso acontecer, selecione a opção MOVER na (1º janela na barra de ferramenta) e movimente o ponto **A** sobre o eixo $x$ até que o ponto **B** apareça na tela.

6º Passo: - Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR  na (4º janela na barra e ferramenta), a seguir trace uma perpendicular ao eixo $y$, passando pelo ponto **B**, e uma perpendicular ao eixo $x$, passando por **A**.

7º Passo: - Ative a ferramenta INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS  na (2º janela na barra de ferramenta) e marque a interseção dessas perpendiculares. Esse ponto será rotulado automaticamente com a letra **C**.

8º Passo: Selecione a opção EXIBIR/ESCONDER OBJETO  na (11º janela na barra de ferramenta) e clique sobre a reta que passa por **A** e **C** e, posteriormente, na reta que passa por **B** e **C**. Aperte ESC ou selecione a opção MOVER na (1º janela). Os objetos marcados ficarão ocultos.

9º Passo: Ative a ferramenta SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS  na (3º janela) e a seguir crie os segmentos que unem **A** a **C** e **B** a **C**. Esses segmentos serão rotulados automaticamente de "f"e "g".

Clique com o botão direito sobre o segmento "f". Selecione PROPRIEDADES e, posteriormente, a guia ESTILO. Mude o estilo do segmento para pontilhado, conforme as figuras abaixo. Faça o mesmo para o segmento g.

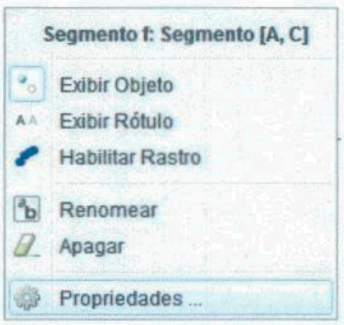



Figura 4.5: Ativar a opção: Propriedades.

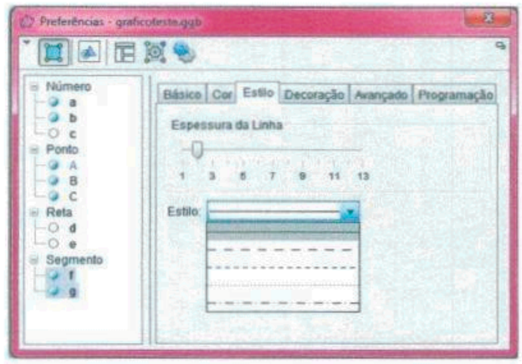



Figura 4.6: Escolha o estilo do seguimento: pontilhado.

Clique com o botão direito sobre o ponto **C**. Selecione a opção HABILITAR RASTRO. Essa opção fará com que o ponto **C** deixe um rastro, quando for movimentado.

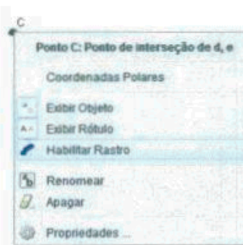
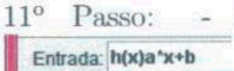



Figura 4.7: Selecione a opção: Habilitar Rastro.

Note que os pontos **B** e **C** são classificados como dependentes e assim, não é possível movimentá-los. Pense um pouco. Eles dependem de quem?

10° Passo: - Selecione a opção MOVER  na (1° janela) e movimente (devagar) o ponto **A** sobre o eixo $x$. O que você observa?

11° Passo: - NO CAMPO DE ENTRADA: Como ilustrado nesta figura 

, digite a seguinte expressão: $h(x) = a^{*}x + b$.

Clique com o botão direito sobre o ponto **C** e desabilite a opção HABILITAR RASTRO. Seguindo a ilustração da figura.

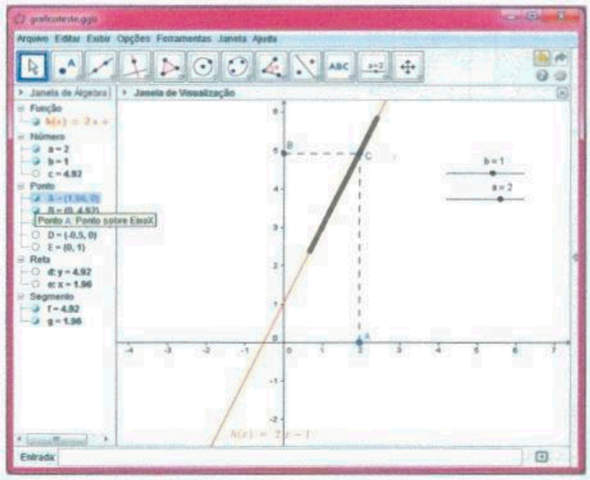


Figura 4.8: Gráfico da função $h(x) = a^{\star}x + b$ coincidindo com o rastro deixado.

O Geogebra construirá o gráfico da função $h(x) = a^{\star}x + b$. Esse gráfico coincidirá com o rastro deixado anteriormente. Consegue pensar no motivo? Por que houve essa "coincidência"?

12º Passo: Selecione a opção MOVER na (1º janela) e movimente (devagar) os pontos "a"e "b"que estão nos seletores. Quando movimentarmos o ponto, no seletor, modificamos o valor daquele parâmetro. Lembre-se que eles representam os coeficientes da nossa função afim definida inicialmente.

### Reflexões sobre a Atividade

O professor pode perguntar para os alunos o que eles acham que pode acontecer com o gráfico se alterar o valor do coeficiente angular. Deve-se orientar o pensamento deles para as alternativas de resposta, pois, o gráfico, não deixará de ser uma reta.

Depois disso deve-se solicitar que eles variem o coeficiente $a$ no seletor, para isso, basta clicar no ponto preto sobre o segmento e arrastá-lo para direita ou para esquerda.

1) O que acontece com a reta quando mudamos o valor de "a"para 2? E quando mudamos para 3?

A Figura 4.9, apresenta algumas das retas que serão visualizadas pelo aluno no programa ao variar o valor do coeficiente $a$.

Percebe-se, interativamente, que o comportamento da reta é alterado e pode-se salientar então a relação com o nome Coeficiente Angular.

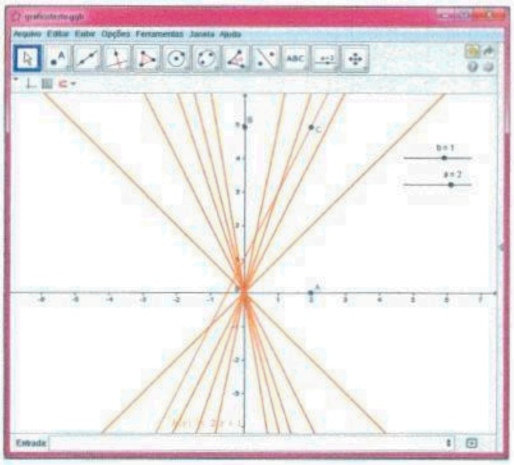


Figura 4.9: Posições relativas da reta que representa a função afim variando $a$.

2) Que comportamento da função permite identificar o papel do coeficiente linear no gráfico?

Quando se varia o coeficiente angular, o coeficiente linear tem um comportamento específico. Algumas perguntas podem direcionar os alunos a perceber esse comportamento.

3) Que ponto no gráfico está relacionado com o coeficiente linear?

4) Quais as coordenadas do ponto em torno do qual o gráfico gira?

5) Quando se varia o coeficiente angular tem-se mudanças na inclinação da reta em torno de um ponto, no caso do ponto $(0, b)$, o que pode se esperar ao fixar o coeficiente angular e variar o termo independente?

Ao variar o coeficiente $b$ da função, tem-se interativamente, o comportamento da reta, como mostra a figura abaixo:

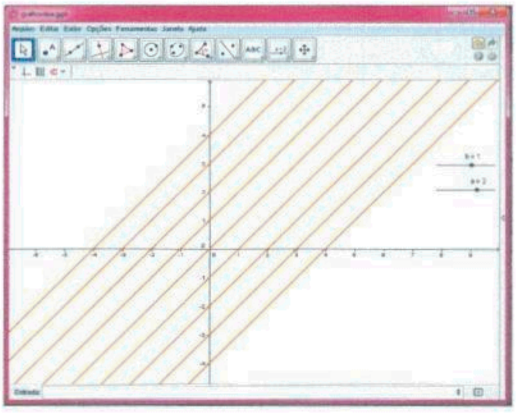


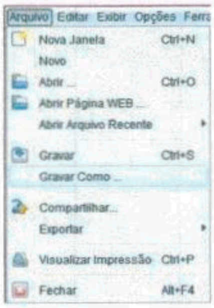
Figura 4.10: Posições relativas da reta que representa a função afim variando $b$.

Com respeito à última pergunta, é importante verificar se a visualização atendeu às suposições dos alunos, quando se varia o valor de $b$. Com esta tarefa pode-se concluir melhor que o coeficiente $b$ pode ser identificado como o ponto de interseção com o eixo $y$. Feito isso, é conveniente que aluno altere os dois parâmetros para concluir que $b$ está relacionado, também, com a translação, exclusivamente, vertical do gráfico da função.

A partir destas construções e questionamentos espera-se que os alunos sejam capazes de construir significados e extrair as relações existentes entre elas.

**Observação 4.3.** *Caso queira ver os valores de "a"e "b"sendo modificados automaticamente, basta clicar sobre o seletor com o botão do lado direito do mouse e selecionar a opção ANIMAÇÃO ATIVADA. A modificação dos valores do parâmetro associado ao seletor serão alterados automaticamente.*

*Selecione no Menu principal, a opção ARQUIVO, clique em GRAVAR COMO e salve seu arquivo. Todas as vezes que for sugerido que salve o arquivo, proceda dessa forma.*




## 4.2.2 Zero da Função Afim no Geogebra

**Observação:** *Vamos continuar utilizando a construção do gráfico que fizemos anteriormente. Caso tenha fechado, abra o arquivo novamente.*

Este processo de construção dar-se da seguinte forma:

1º Passo: - Ative a ferramenta INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS  e marque interseção da reta (gráfico da função) com o eixo $x$, clicando sobre os dois objetos. O ponto será rotulado automaticamente de **D**.

Aperte a tecla ESC e clique com o botão direito sobre o ponto **D**. Selecione a opção PROPRIEDADES. Na guia BÁSICO, mude o estilo do rótulo, alterando para

NOME & VALOR, feito isso, clique no botão FECHAR. conforme respectivas figuras abaixo.

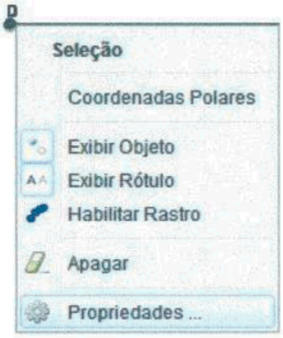



Figura 4.11: Ativar a opção: Propriedades.

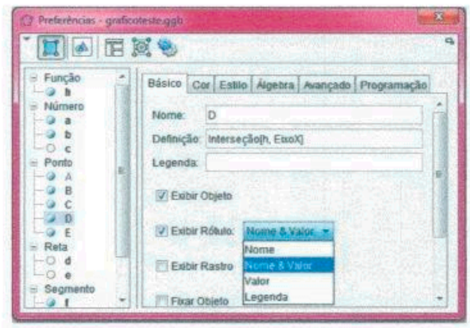



Figura 4.12: Alterar Nome & Valor na guia Básico

**Observação 4.4.** *É possível modificar outras propriedades, como a cor, o estilo e o tamanho do ponto.*

O passo a seguir é opcional.

2º Passo: - Ative a ferramenta INSERIR TEXTO  na (10º janela). Na janela que aparecer escreva o texto apresentado na Figura abaixo, marque a caixa *Fórmula Latex* e clique em OK.



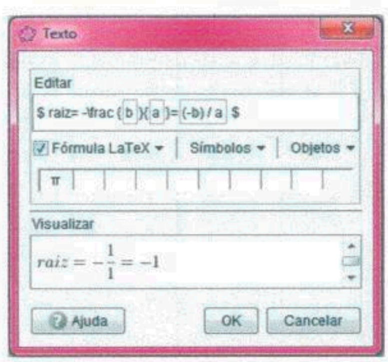



Figura 4.13: Criando texto dinâmico para raiz da função.

Aperte a tecla ESC e posicione o texto onde achar melhor. Clique e arraste qualquer dos seletores ("a"ou "b") e observe a relação entre o texto dinâmico e a abscissa do ponto **D**.

**Reflexões sobre a Atividade**

Graficamente podemos verificar o conceito de zero da função como o ponto de interseção da reta com o eixo $x$. A abscissa deste ponto é chamado de zero da função.

1) Altere os valores de "**a**"e "**b**"nos seletores. Altere o valor de "**a**"para 2 e de "**b**"para 0, e observe o que acontece.

2) Qual é o valor do zero da função? Escreva a equação da nova função.

3) Agora, altere o valor de "**a**"para -2 e de "**b**"para 5. Qual é o valor do zero da função? Escreva a equação da nova função.

Percebe-se que quando se varia os coeficientes geralmente a raiz também varia. Pode-se perguntar:

4) Como fazer para que a raiz seja fixa e exista uma família de funções afim que tem a mesma raiz?

Pode-se trabalhar ainda, com os casos particulares da função afim.

Quando $a = 1$ e $b = 0$, tem-se uma função identidade e verificar suas características.

Quando $a = \mathbb{R}$ e $b = 0$, tem-se uma função linear e estudar suas características gerais.

### 4.2.3 O Ponto em que o Gráfico Intersepta o Eixo das Ordenadas

**Observação:** *Ainda continuaremos utilizando a construção do gráfico anterior. Caso tenha fechado, abra o arquivo novamente.*

Ative a ferramenta INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS  e marque interseção da reta (gráfico da função) com o eixo $y$, clicando sobre os dois objetos. O ponto será rotulado automaticamente de **E**.

Ative a opção MOVER e clique com o botão direito sobre o ponto **E**. Selecione a opção PROPRIEDADES. Na guia BÁSICO, mude o estilo do rótulo, alterando para NOME & VALOR, conforme respectivamente nas Figuras 4.14 e 4.15. Feito isso, clique no botão FECHAR.

Em seguida, aperte ESC e mova o texto que apareceu ao lado do ponto **E**, para posição que achar melhor. Observe a relação entre a ordenada do ponto **E** e o valor do parâmetro "**b**"da função $h(x) = ax + b$.

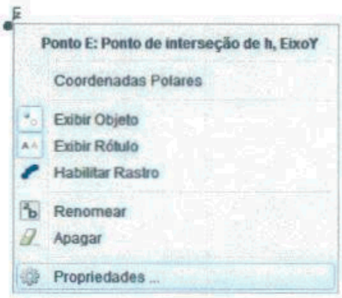



Figura 4.14: Ativar a opção: Propriedades.

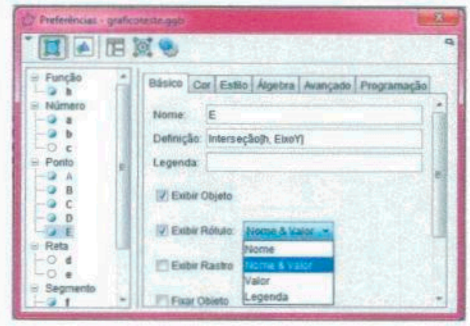



Figura 4.15: Alterar Nome & Valor na guia Básico.

**Reflexões sobre a Atividade**

1) O ponto **E** tem duas coordenadas. Quais são as coordenadas do ponto **E**?

2) Você consegue estabelecer uma relação entre a ordenada do ponto **E** e o coeficiente "**b**"da equação da função?

3) Altere o valor "**a**"para -2 e de "**b**"para -5. Escreva a equação da nova função? Quais são as coordenadas do ponto **E**?

### 4.2.4 Crescimento e Decrescimento da Função Afim no Geogebra

Continuaremos usando a construção do gráfico feita anteriormente. Neste processo seguiremos os seguintes passos:

1º Passo: - Ative a opção mover e clique com o botão direito sobre o ponto **A**. Selecione PROPRIEDADES, depois BÁSICO e mude o estilo do rótulo, alterando para NOME & VALOR. Mude também os estilos dos pontos **B** e **C**. Agora movimente (devagar) o ponto **A** sobre o eixo $x$. A função é crescente ou decrescente?

Altere o sinal da variável "**a**"mudando a posição do seletor. Movimente o ponto A (devagar). O que se observa agora? A função é crescente ou decrescente?

Que relação há entre ser crescente ou decrescente e o sinal do parâmetro "**a**"coeficiente de $x$ na função $h(x) = ax + b$?

Tentaremos relacionar o fato da função ser crescente ou decrescente e o sinal do parâmetro "**a**"na relação $y = ax + b$. Esse será o objeto de estudo do próximo tópico.

**Quando a Função Afim é crescente? E decrescente?**

Faremos uma construção a partir do que foi feito na seção anterior. O objetivo é fazer com que um texto dinâmico apareça, mostrando quando a função é crescente, quando é decrescente e quando é constante.

O processo de construção é da seguinte forma:

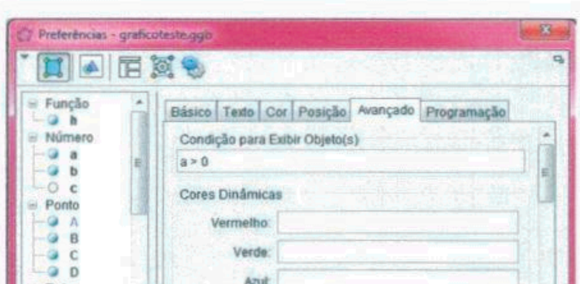
1º Passo: - Ative a ferramenta INSERIR TEXTO 

na (10º janela) e clique onde quer que o texto apareça.

2º Passo: - Uma janela como a que você pode observar na figura abaixo irá aparecer. Escreva CRESCENTE e aperte o botão OK.


Um texto como este: *CRESCENTE* aparecerá. Clique com o botão do lado direito sobre o texto CRESCENTE e selecione a opção PROPRIEDADES.

Na janela que aparecerá, (figura ilustrada abaixo), selecione a guia escrito AVANÇADO. No campo CONDIÇÕES PARA EXIBIR OBJETO escreva: $a > 0$, clique em Fechar.




Segundo o conceito de função crescente que vimos no capítulo anterior, sabemos que uma função é crescente se o coeficiente angular $a$ é positivo. Logo o procedimento feito acima nos mostrará quando a função é crescente através de um texto dinâmico, como mostra a Figura 4.16, sempre que o valor do seletor "a"for positivo.

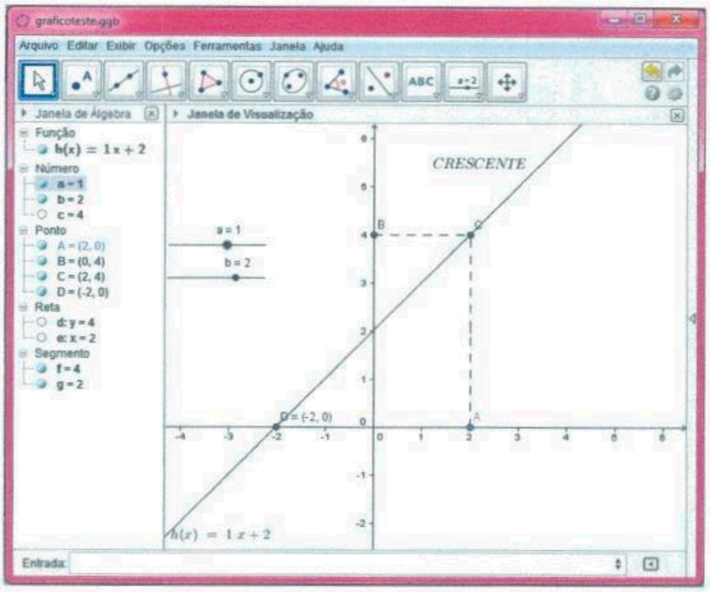
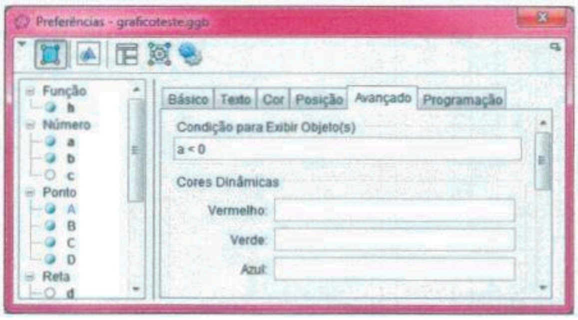



Figura 4.16: Texto que surgirá quando a função for Crescente.

Ative novamente a ferramenta INSERIR TEXTO  e clique na janela de visualização onde quer que o texto apareça, se preferir pode colocá-lo abaixo da palavra que já apareceu. Dessa vez, escreva DECRESCENTE e clique em OK.

Um texto como este: *DECRESCENTE* aparecerá. Clique com o botão do lado direito sobre o texto DECRESCENTE e selecione a opção PROPRIEDADES.

Na janela que aparecerá, (figura abaixo), selecione a guia AVANÇADO. No campo CONDIÇÕES PARA EXIBIR OBJETO escreva: $a < 0$, clique em Fechar.




Neste caso, segundo o conceito de função decrescente visto também no capítulo anterior, sabemos que uma função é decrescente se o coeficiente angular $a$ for negativo. Logo o procedimento feito acima nos mostrará quando a função é decrescente através de um texto dinâmico, como mostra a Figura 4.17, sempre que o valor do seletor "a" for negativo.

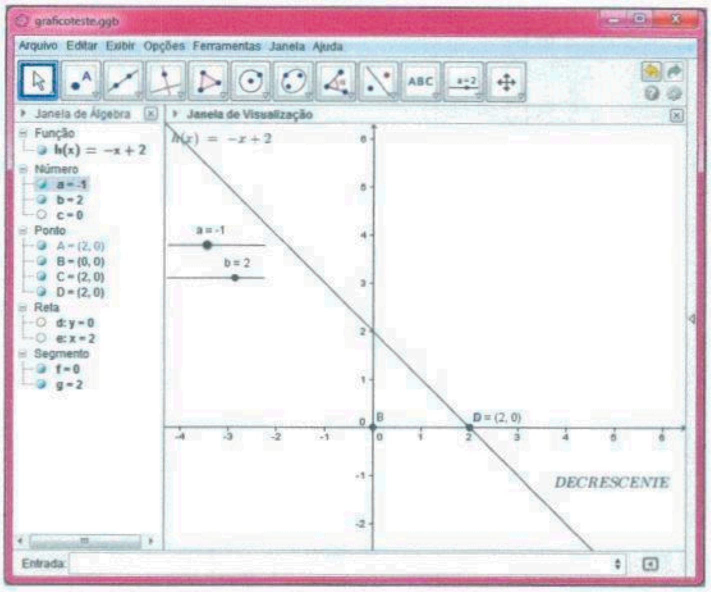



Figura 4.17: Texto que surgirá quando a função for Decrescente.

Ative mais uma vez a ferramenta INSERIR TEXTO ABC repetindo todo procedimento e desta vez escreva CONSTANTE e clique OK.

Um texto como este: *CONSTANTE* aparecerá. Clique com o botão do lado direito do mouse sobre o texto CONSTANTE e selecione a opção PROPRIEDADES.

Na janela que aparecerá, (Figura ilustrada abaixo), selecione a guia AVANÇADO. No campo CONDIÇÕES PARA EXIBIR OBJETO escreva: $a = 0$, clique em fechar.


Agora, segundo o conceito de função constante visto também no capítulo anterior, temos que se o coeficiente angular $a$ for igual a zero a função é constante. Logo o procedimento feito acima nos mostrará quando a função é constante através de um texto dinâmico, como mostra a Figura 4.18, sempre que o valor do seletor "a" for igual a zero.

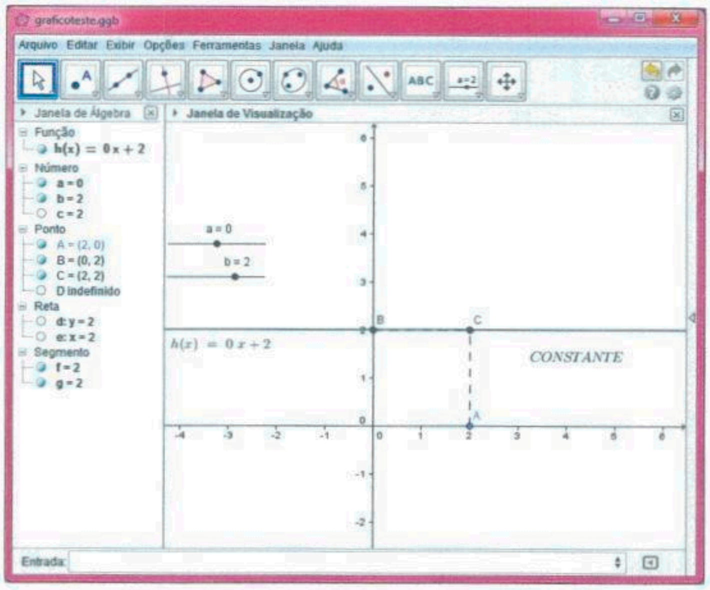



Figura 4.18: Texto que surgirá quando a função for Constante.

**Reflexões sobre a Atividade**

1) Na atividade acima, você teve a oportunidade de ver uma ilustração sobre a relação existente entre o sinal do parâmetro "**a**" de uma função do tipo $y = ax + b$ e o gráfico dessa função. Produza um pequeno texto, falando sobre o observado.

2)O que acontece com o gráfico da função se $a > 0$?

3) O que você observa com respeito ao gráfico se $a < 0$?

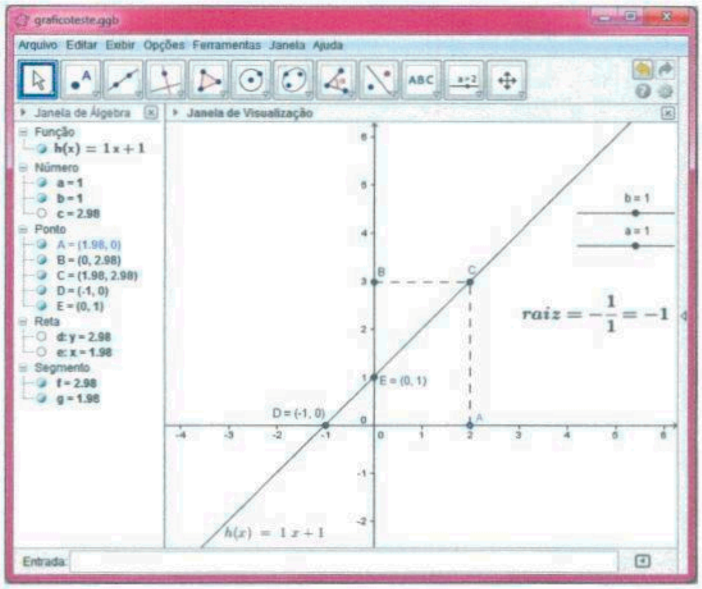
4) O que você observa com respeito ao gráfico se $a = 0$?

É importante que, na sala de aula, seja feita uma discussão sobre essas relações.

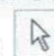
### 4.2.5 Sinal da Função Afim no Geogebra

Nesta atividade vamos estudar a variação do sinal de uma função afim, ou seja, identificar para quais valores de $x$ os valores da função serão *negativos*, *nulos* ou *positivos*.

Responder a essas perguntas é o que se faz quando se estuda *o sinal da função*. Usaremos a construção feita anteriormente. Assim, abra o arquivo e então você deverá se deparar com algo semelhante ao mostrado na figura a seguir.



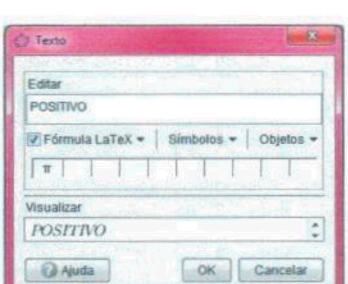

O objetivo da próxima atividade é criar uma ilustração que facilite o entendimento da ideia do estudo do sinal de função afim. Para isso siga os passos a seguir:

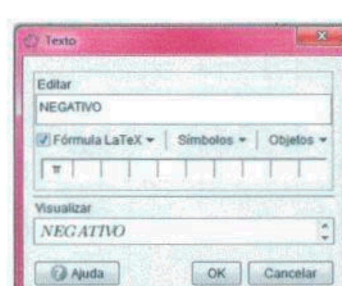
1º Passo: - Ative a ferramenta MOVER  na (1º janela), movimente o ponto A e observe C. Para quais valores da abscissa de A os valores da ordenada de **C** são positivos?

Agora, vamos acrescentar um texto dinâmico que mostre quando $h(x)$ passa a ser positiva e quando passa a ser negativa.

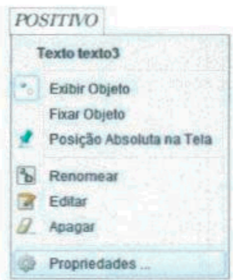
2º Passo: Vamos criar dois textos dinâmicos. Um texto com o nome POSITIVO e outro com o nome NEGATIVO. Para isso, selecione a ferramenta INSERIR TEXTO  na (10º janela) e clique em algum lugar da janela de visualização. Uma nova janela aparecerá.

Escreva POSITIVO, clique OK e, novamente clique em outro ponto da janela de visualização. Esta mesma janela aparecerá e dessa vez escreva NEGATIVO e clique OK. Como mostra as figuras abaixo:

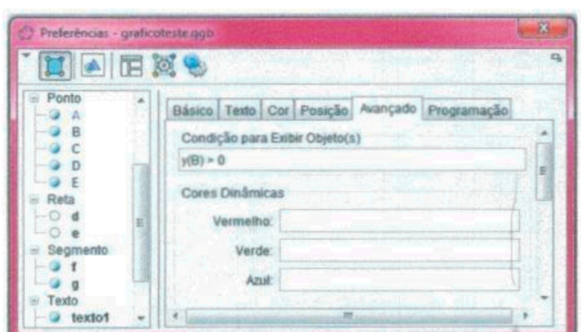


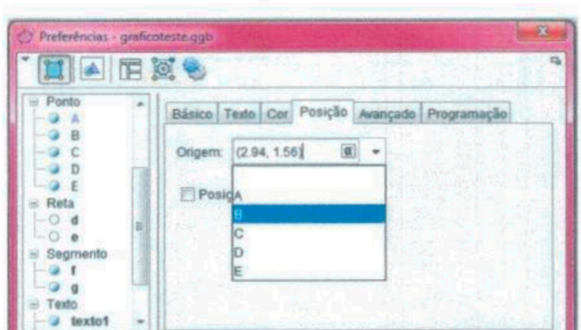
Clique com o botão direito do mouse sobre o texto POSITIVO e, em seguida, escolha a opção PROPRIEDADES. Como mostra a imagem:



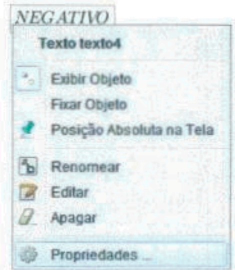

Selecione a guia AVANÇADO e escreva no campo CONDIÇÃO PARA EXIBIR OBJETO: $y(B) > 0$. Veja na figura:



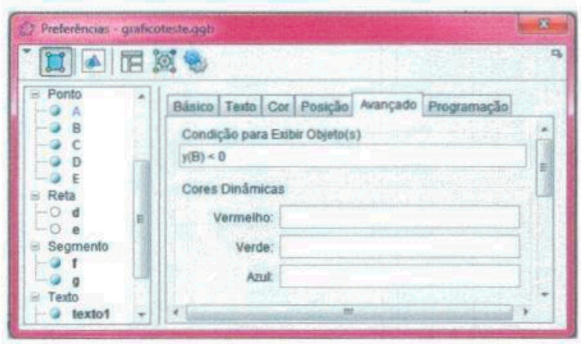

Selecione a guia POSIÇÃO (ilustrado na figura abaixo) e na caixa de seleção ORIGEM, selecione o ponto **B** (este é o ponto que marca a imagem de $x(A)$).



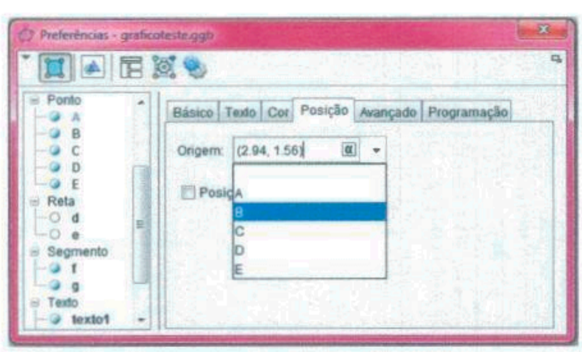

Selecione agora o botão direito do mouse sobre o texto NEGATIVO e, em seguida, escolha a opção PROPRIEDADES. Como mostra a imagem a seguir:

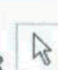



Selecione a guia AVANÇADO e escreva no campo CONDIÇÃO PARA EXIBIR OBJETO: $y(B) < 0$. Veja na figura abaixo:




Novamente clique na guia POSIÇÃO (ilustrado na figura abaixo) e na caixa de seleção ORIGEM, selecione o ponto **B** (este é o ponto que marca a imagem de $x(A)$).

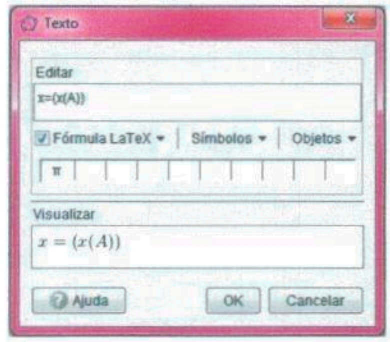



Selecione a ferramenta MOVER , em seguida clique sobre o ponto A e arraste-o (devagar) sobre o eixo $x$. Observe o texto dinâmico que está ao lado do ponto **B** sobre o eixo $y$.

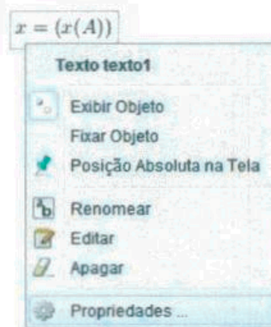
Selecione a ferramenta INSERIR TEXTO 

na (10º janela) e clique próximo do ponto A (o que está sobre o eixo $x$).

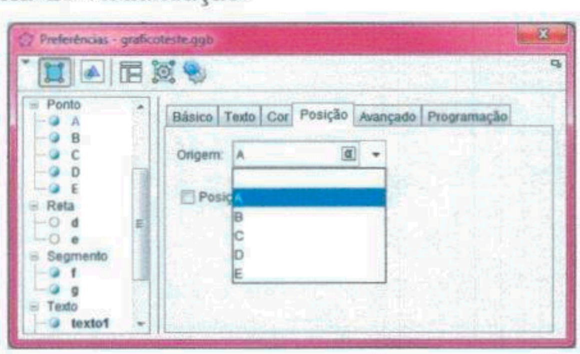
Na janela que aparecerá escreva x = (x(A)) e clique em OK. Como mostra a figura.




Um texto apareceu próximo do ponto A. Clique sobre esse texto com o botão do lado direito do mouse e selecione a Opção PROPRIEDADES.




Clique sobre a guia POSIÇÃO, na caixa seleção e vincule o texto ao ponto **A**. Feito isso, clique em FECHAR e arraste o texto criado para a posição que achar mais adequada na sua janela de visualização.




O mais importante é permitir que os educandos possam "brincar" com as figuras e a partir de sua manipulação, experimentação e dedução empírica descobrir as propriedades da função afim.

### 4.2.6 Lei da Função Afim no Geogebra

Nesta seção desenvolvemos uma atividade em que o professor levará o aluno a construir e através da observação descobrir qual é a lei de formação da função afim

$f(x) = ax + b$. Para tal, apresentamos primeiramente a construção feita no Geogebra para aplicar essa funcionalidade. A atividade proposta tem esta interface:

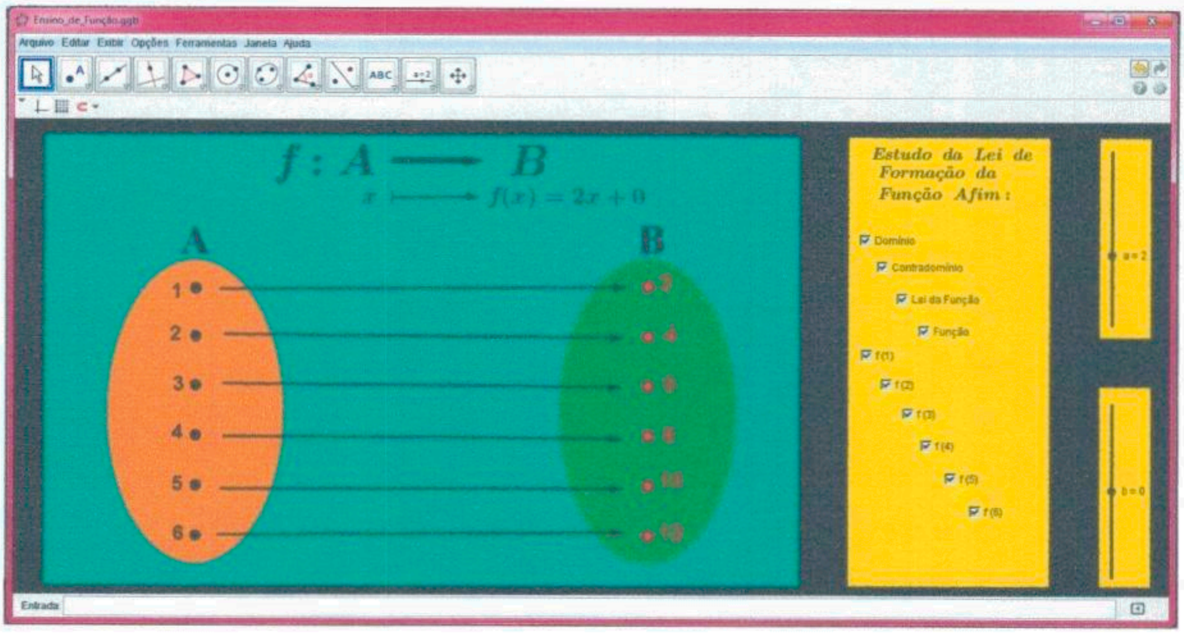
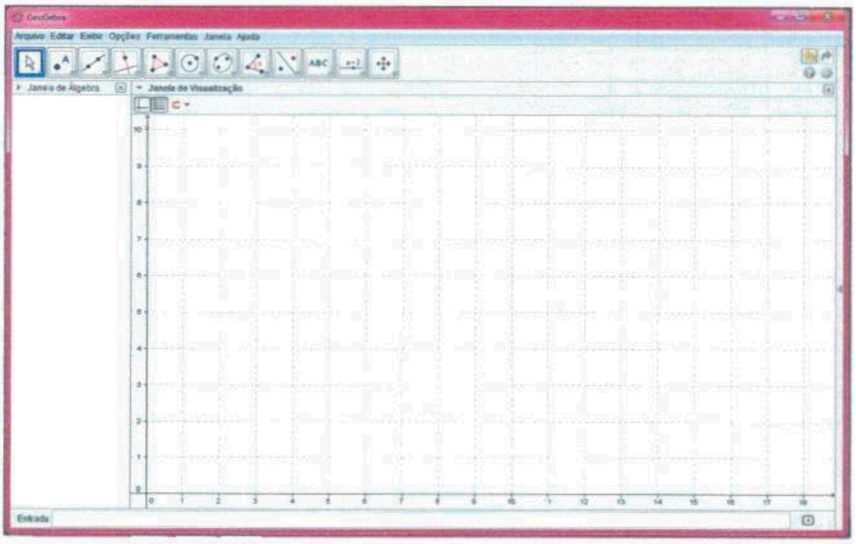



Figura 4.19: Interface da atividade proposta.

PASSO 1: Ao abrir a janela do Geogebra ative a malha e ajuste o eixo para o canto inferior da tela, como mostra a figura abaixo.




PASSO 2: Ative a ferramenta ELIPSE e construa uma elipse clicando nas coordenadas $(3, 7), (3, 1)$ e $(5, 3)$. Em seguida crie outra elipse clicando nas coordenadas $(12, 7), (12, 1)$ e $(14, 3)$.

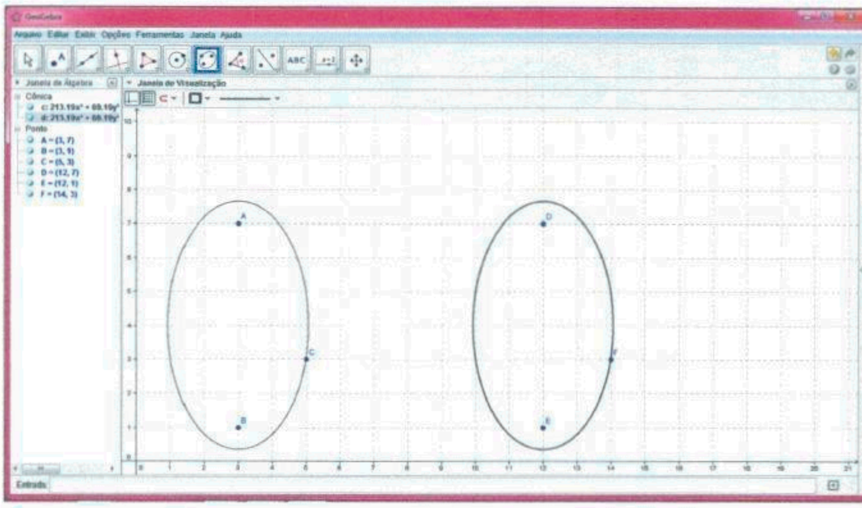


Figura 4.20: Início da construção dos diagramas **A** e **B**.

PASSO 3: Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie um seletor clicando nas coordenadas $(21, 1)$, na janela que surgirá o seletor já estará nomeado pela letra "a"e entre o intervalo de [-5,5], como mostra Figura 4.21. Em seguida na mesma janela como mostra a Figura 4.22 selecione a opção CONTTROLE DESLIZANTE e ative a opção VERTICAL e a LARGURA 200.

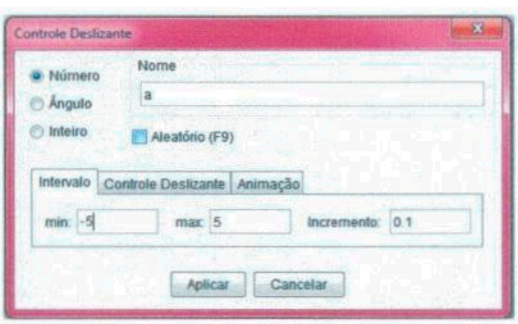



Figura 4.21: Criando o seletor a.

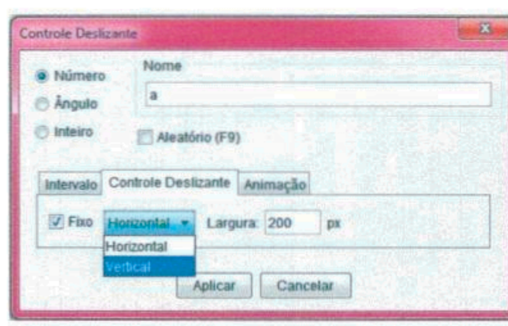



Figura 4.22: Mudando a posição.

Analogamente crie o outro seletor, para este clique nas coordenadas $(21, 6)$. Em seguida repita o mesmo procedimento adotado para o seletor "a"criado anteriormente. Após esses passos teremos:

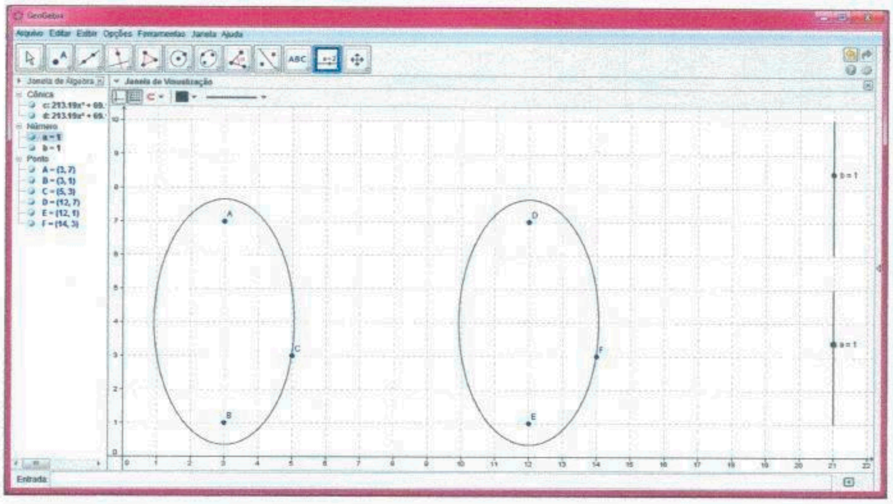


Figura 4.23: Criados os diagramas e os seletores.

PASSO 4: Selecione o ponto $A$, clique com o botão direito do mouse e ative a opção: EXIBIR OBJETO. Isso esconderá o ponto $A$. De forma análoga esconda os pontos $B, C, D, E$ e $F$.

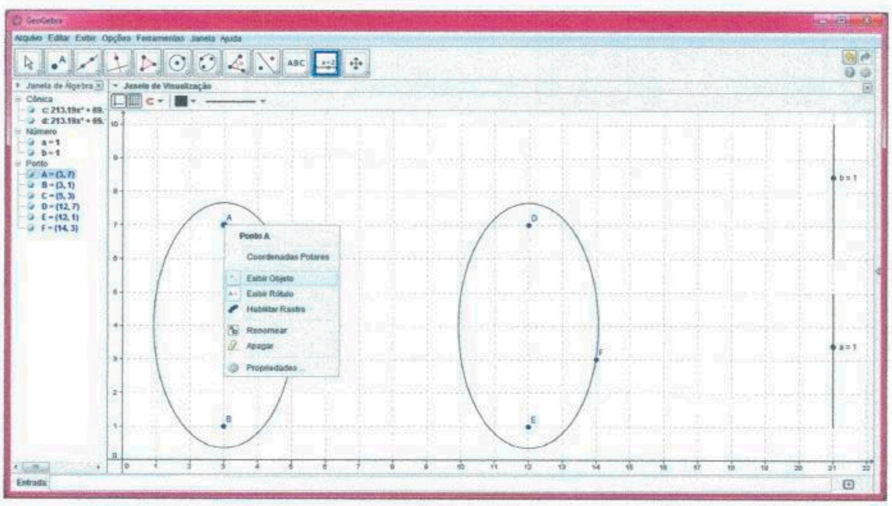


Figura 4.24: Escondendo os pontos $A, B, C, D, E$ e $F$.

PASSO 5: Ative a ferramenta NOVO PONTO e construa os pontos $G(3,6)$, $H(3,5)$, $I(3,4)$, $J(3,3)$, $K(3,2)$ na elipse da esquerda, e na elipse da direita construa os pontos $L(12,6)$, $M(12,5)$, $N(12,4)$, $O(12,3)$ e $P(12,2)$.

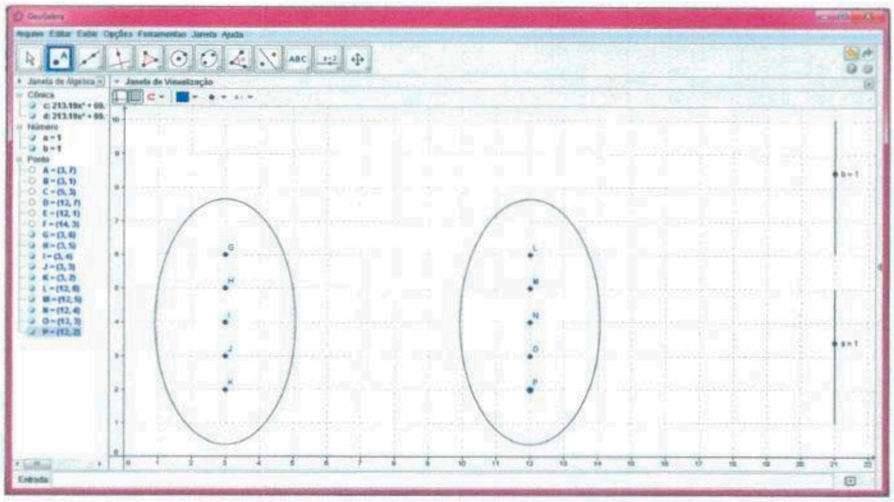


Figura 4.25: Criando pontos para os diagramas.

PASSO 6: Ative a ferramenta INSERIR TEXTO e crie o seguinte texto: 1 e ative a opção Fórmula Latex, Coloque-o a esquerda do ponto G, depois coloque o texto no tamanho (grande) e em negrito através dos ícones que aparecem na janela de visualização. Em seguida crie o texto: 2, colocando-o a esquerda do ponto $H$. Em seguida crie o texto: 3, colocando-o a esquerda do ponto $I$. Em seguida crie o texto: 4, colocando-o a esquerda do ponto $J$. Em seguida crie o texto: 5, colocando-o a esquerda do ponto $K$ e então repita o procedimento do primeiro texto, como mostra a figura abaixo:

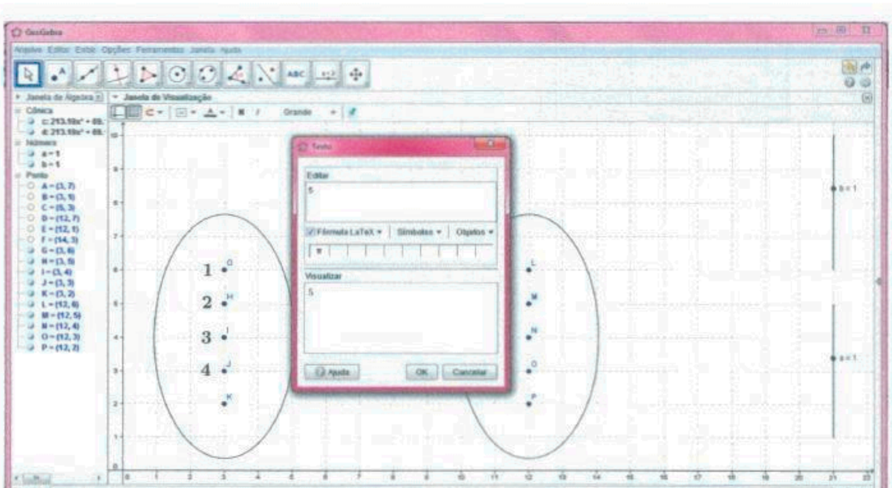


Figura 4.26: Criando os valores para os pontos do primeiro diagrama.

PASSO 7: Ative a ferramenta INSERIR TEXTO e clique a direita do ponto $L$, escolha a opção OBJETO e em seguida a opção (área vazia) como mostra a Figura 4.27. Depois dentro da área vazia digite o texto: $1a+b$, e ative a opção Fórmula Latex, como mostra a Figura 4.28. Em seguida coloque o texto no tamanho (grande) e em negrito através dos ícones que aparecem na janela de visualização. Em seguida clique em ok.


Figura 4.27: Criando texo para $L$.

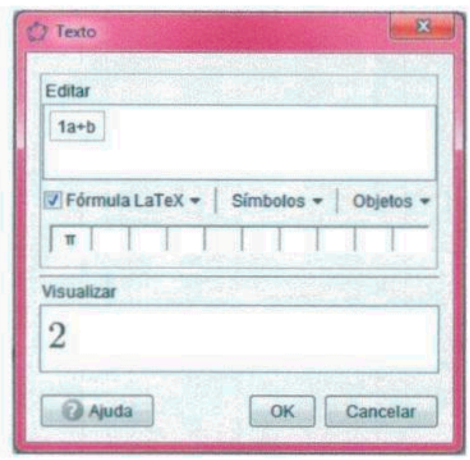



Figura 4.28: Criando texo para $L$.

Analogamente, crie a direita do ponto $M$ o texto: $2a+b$; crie a direita do ponto $N$ o texto: $3a+b$; crie a direita do ponto $O$ o texto: $4a+b$; crie a direita do ponto $P$ o texto: $5a+b$.

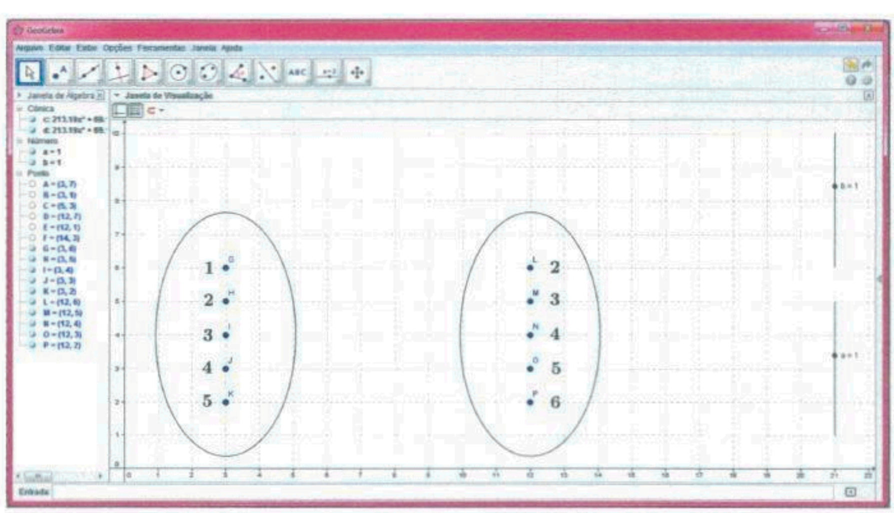



Figura 4.29: Criando os valores para os pontos do segundo diagrama.

PASSO 8: Ative a ferramenta VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS e construa um vetor que vai do ponto $G$ até o ponto $L$, como mostra a Figura 4.30.

Em seguida construa um vetor que vai do ponto $H$ ao ponto $M$. Depois um vetor que vai do ponto $I$ até o ponto $N$. Novamente construa um vetor que vai do ponto $J$ ao ponto $O$. E por último, um vetor que vai do ponto $K$ ao ponto $P$. Feito isso, de maneira análoga ao PASSO 4, esconda os pontos: $Q, R, S, T, U, V, W, Z, A_1, B_1$.

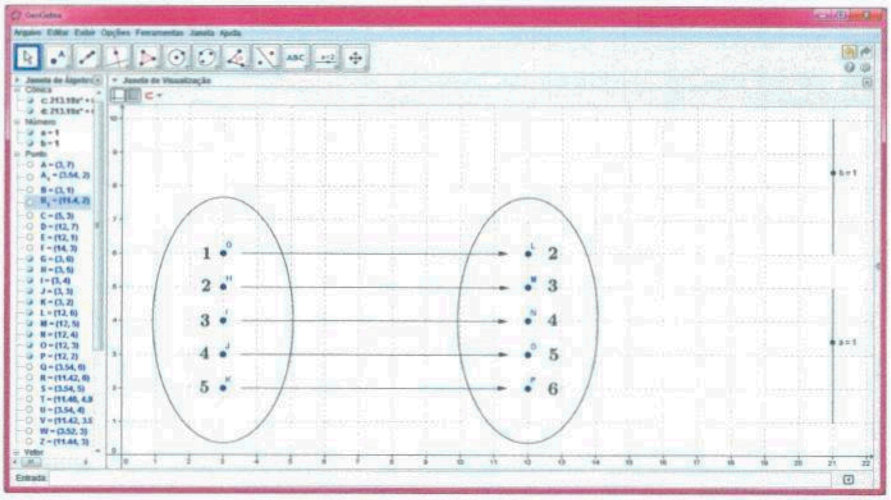



Figura 4.30: Criando os vetores que relacionam os pontos dos diagramas.

PASSO 9: Selecione o ponto $G$ e com o botão direito do mouse ative a opção: EXIBIR RÓTULO, esta opção esconderá o nome de cada ponto. Retire então o rótulo do pontos $G, H, I, J, K, L, M, N, O, P$, pertencentes as duas elipses. Agora ative a ferramenta INSERIR TEXTO e clicando acima das elipses crie os textos ilustrado nas figuras abaixo:

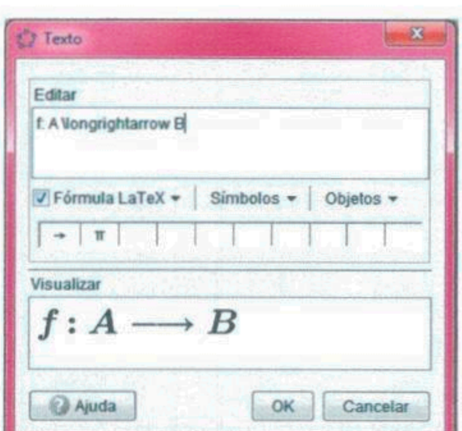



Figura 4.31: Criando texto para função.

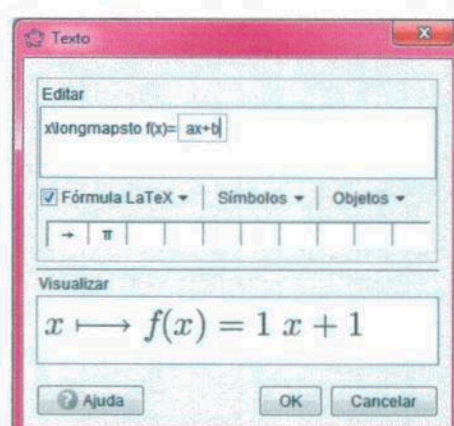



Figura 4.32: Criando texto para função.

Na parte superior da elipse esquerda crie o texto: **A**. Já na parte superior da elipse direita crie o texto: **B**, depois coloque o texto no tamanho (muito grande) e em negrito através dos ícones que aparecem na janela de visualização. Em seguida, a direita da elipse direita crie o texto: **Lei de Formação da Função Afim**, como mostra a figura abaixo:

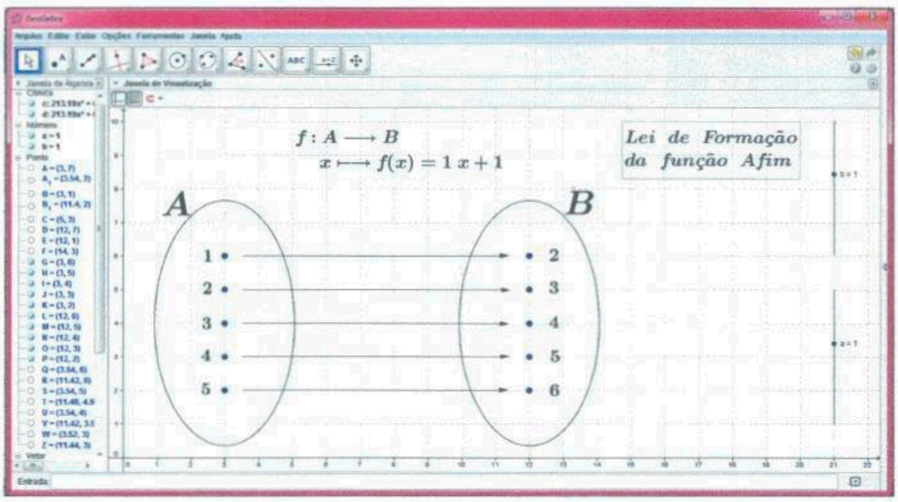



Figura 4.33: Diagramas nomeados e textos criados.

PASSO 10: Ative a ferramenta CAIXA PARA EXIBIR/ ESCONDER OBJETOS e clique a direita da elipse direita, depois ponha como legenda: Domínio. Em seguida clique no texto **A** que é o texto 12 e na elipse esquerda, Figura 4.34. Depois clique em Aplicar. Agora, crie outra CAIXA PARA EXIBIR/ ESCONDER OBJETOS. Ponha como legenda: Contradomínio. Clique no texto **B** que é o texto 13 e na elipse direita, Figura 4.35. Depois clique em aplicar.

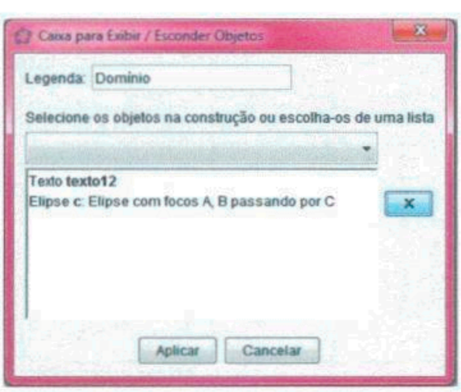



Figura 4.34: Criando Domínio.

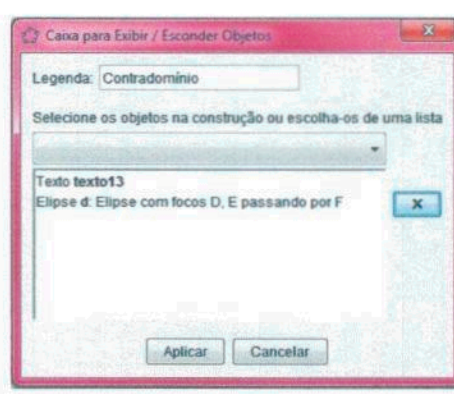



Figura 4.35: E Contradomínio.

Analogamente, crie mais uma CAIXA PARA EXIBIR/ ESCONDER OBJETOS que exiba (e esconda) o texto que mostra a Lei da função, tendo como legenda: **Lei da Função**. Em seguida clique no texto $x \longmapsto f(x) = ax + b$. Depois clique em aplicar. E dessa maneira, teremos:

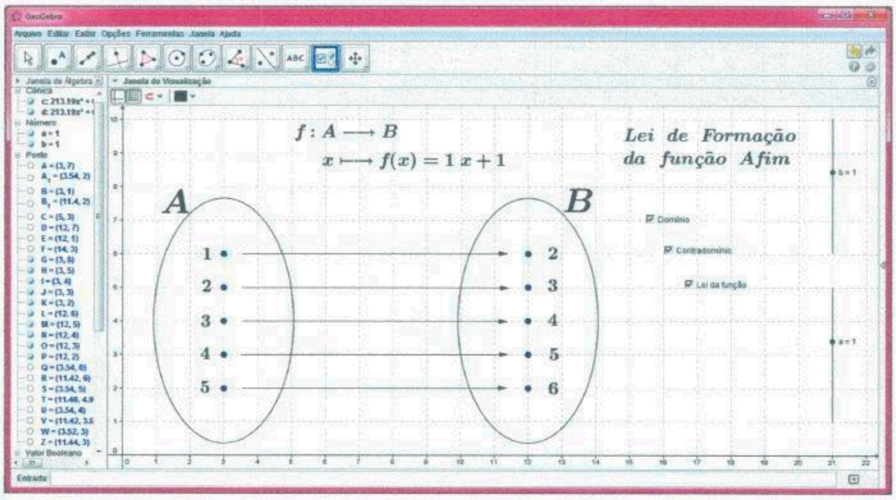



Figura 4.36: Caixas de texto dinâmicos criados.

PASSO 11: Para tornar a atividade mais atraente ative a ferramenta POLÍGONO e crie retângulos em torno dos seletores e em torno dos textos e dos objetos criados, como mostra a figura abaixo:

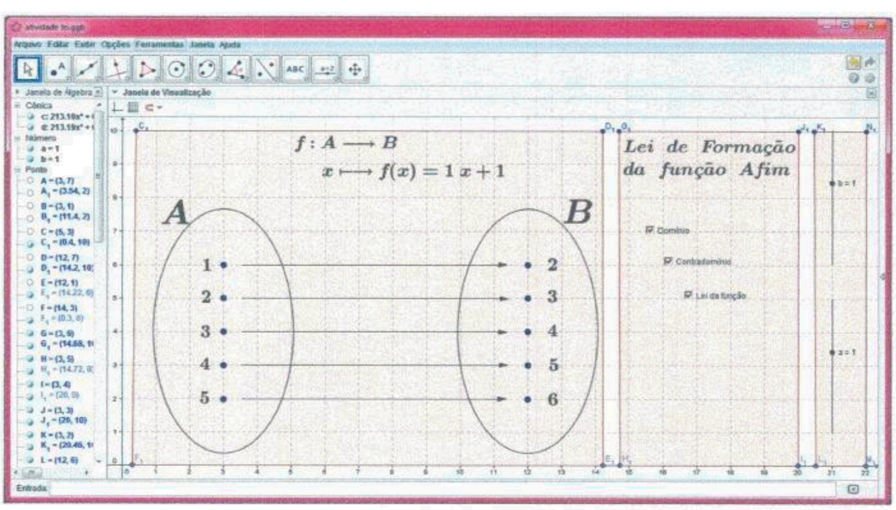



Figura 4.37: Criando as caixas de texto.

PASSO 12: Agora, desabilite os pontos: $C_1, D_1, E_1, F_1$ da primeira caixa, os pontos: $J_1, H_1, I_1, J_1$ da segunda caixa e os pontos: $K_1, L_1, M_1, N_1$ da terceira caixa.

Desabilite também, a malha e os eixos. Em seguida selecione a primeira elipse e ative a opção PROPRIEDADES, ative agora a guia COR e escolha uma de sua preferência, ajuste ainda, a transparência para 100, veja a figura ilustrada abaixo. Depois repita o processo para a segunda elipse:

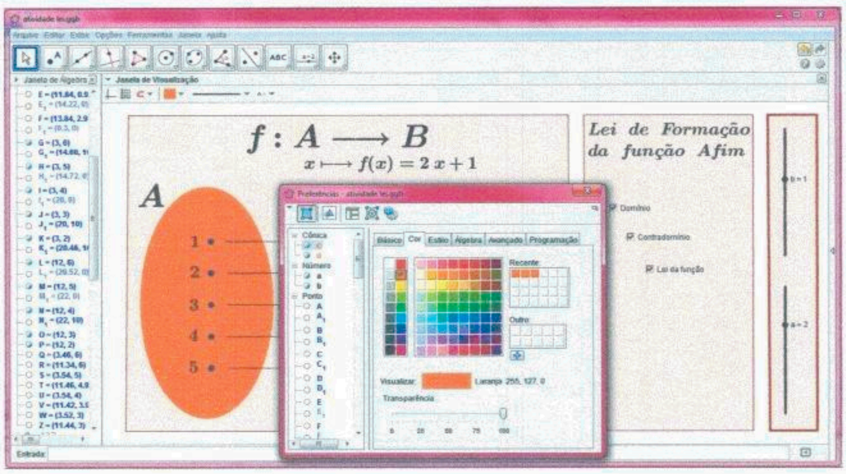



Figura 4.38: Configurando as elipses **A** e **B**.

PASSO 13: Através da opção PROPRIEDADES configure as cores e tamanhos dos textos e das caixas criadas para os textos. No segundo retângulo, ao repetir o processo sugerido os textos: Domínio, Contradomínio e Lei da função ficarão escondidos pela cor da caixa, sendo assim, selecione a caixa de texto: Domínio e através da opção propriedades na guia AVANÇADO altere a opção CAMADA para 1, como mostra a figura abaixo. E então repita o mesmo processo pra os outros dois textos.

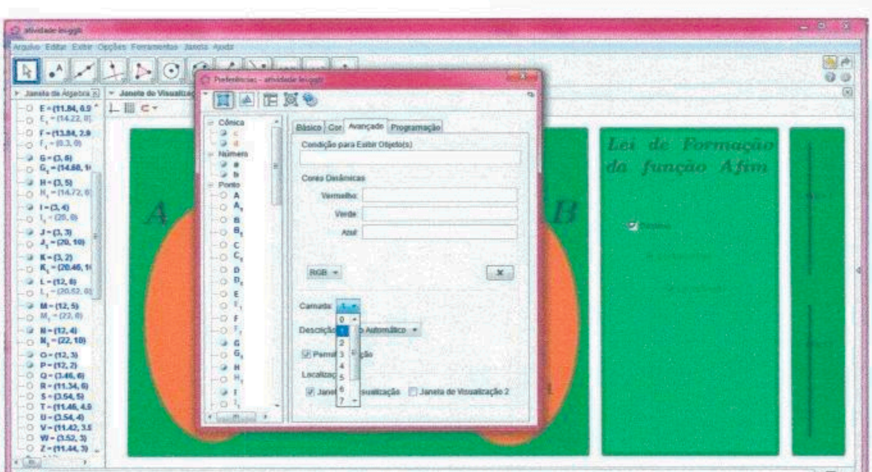



Figura 4.39: Configurando as caixas de texto.

PASSO 14: Escolha novamente a opção PROPRIEDADES e ative a opção FIXAR OBJETO e fixe todos os objetos. E ainda se preferir ajuste a cor do funda da janela de visualização. No final a atividade ficará como a imagem abaixo:

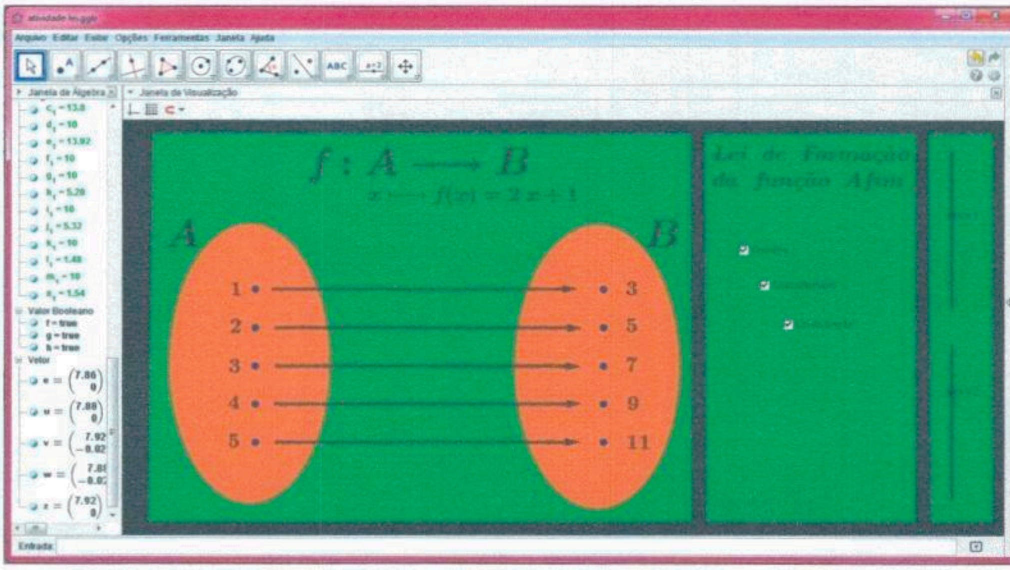



Figura 4.40: Interface da atividade pronta.

Se preferir ainda, trabalhar com apenas um ponto no domínio com seu respectivo no contradomínio, crie na caixa Lei de Formação da Função Afim algumas caixas para os pontos do domínio e seus respectivos do contradomínio, como mostra a Figura 4.19, caso contrário, não há necessidade de criar as caixas mostradas na referente figura, e dessa forma trabalha-se com todos os pontos de uma vez.

## Propósitos da Atividade

O professor pode usar esta atividade para trabalhar com os alunos a lei de formação de uma função, mais especificamente, neste estudo a função afim, por meio das etapas descritas a seguir. Para isso deverá estar desmarcada a caixa Lei da função.

- ETAPA 1: Esta atividade pode ser realizada primeiramente utilizando apenas um único ponto em cada conjunto, se assim o professor desejar. Inicialmente escolhemos valores para os seletores $a$ e $b$, escolhamos $a = 2$ e escolhamos $b = 0$. Então questionamos os alunos acerca da relação existente entre cada elemento do conjunto $A$ com seu correspondente (indicado pelo vetor) no conjunto $B$.

Os alunos deverão entender que os elementos do conjunto B são o dobro dos elementos do conjunto A.

- ETAPA 2: Escolhamos agora o valor 3 para o seletor $a$ e zero para o seletor $b$. Questiona-se novamente aos alunos qual a relação existente entre esses elementos de modo que eles respondam que cada elemento do conjunto $B$ é o triplo de cada elemento do conjunto $A$.

- ETAPA 3: Perguntar a relação entre os elementos quando atribuído o valor zero para o seletor $a$ e 2 para o seletor $b$.

- ETAPA 4: Perguntar a relação entre os elementos quando atribuído o valor 1 para o seletor $a$ e -2 para o seletor $b$.

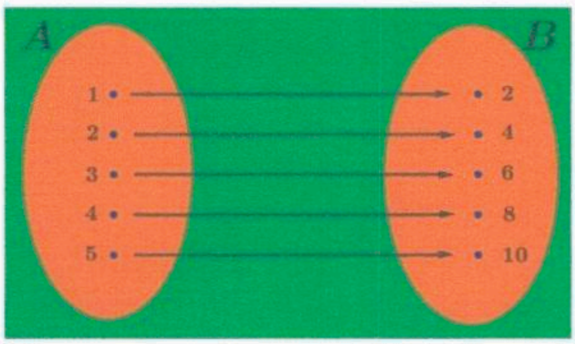
- ETAPA 5: Perguntar a relação entre os elementos quando atribuído o valor 2 para o seletor $a$ e -1 para o seletor $b$.

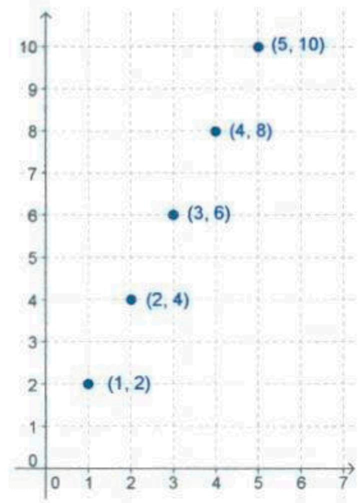
- ETAPA 6: Perguntar a relação entre os elementos quando atribuído o valor -1 para o seletor $a$ e zero para o seletor $b$.

- ETAPA 7: Marcar a caixa lei de função e explicar a função afim, realizando cálculos de valores da função no quadro para comprovar que os elementos de B dependem dos elementos de $A$.

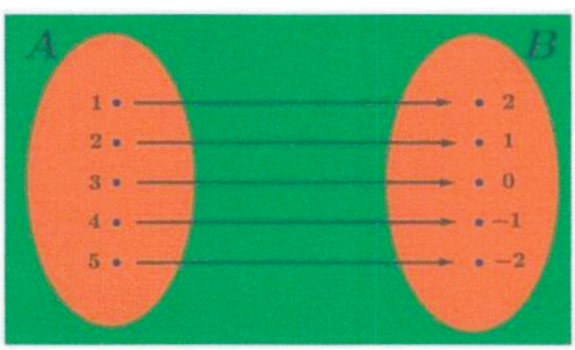
**Observação 4.5.** *Durante os exemplos em que os alunos tentam descobrir as leis de formação da função, pode-se também em outra janela do GeoGebra plotar os 5 pontos de pares ordenados $(x, y)$ com $x \in A$ e seu correspondente $y \in B$, já dando a ideia de que o gráfico da função afim é uma reta.*

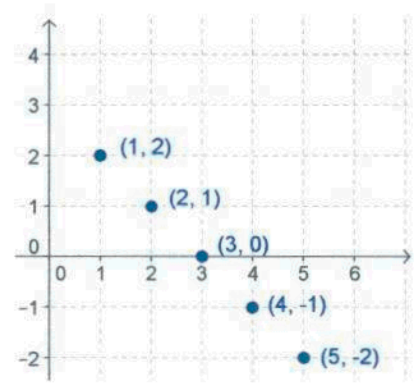
Assim refazendo a etapa 1, com $a = 2$ e $b = 0$, temos:




Agora, para o caso de $a = -1$ e $b = 3$, temos:



# Capítulo 5

# Considerações Finais

Aperfeiçoando as informações alem da tecnologia no ensino público, as escolas estão sendo equipadas com computadores, o professor, por sua vez, deve estar preparado para utilizar adequadamente estes recursos, promover não somente a inserção dos alunos no mundo tecnológico, mas acima de tudo garantir que estes promovam a aprendizagem de novos saberes. Dessa forma, nossa proposta enquadrou-se perfeitamente nesta perspectiva atendendo a estas necessidades, e assim contribuir efetivamente para a apropriação do saber matemático por parte dos alunos.

Ao decidir abordar o tema das TIC's, foi-se necessário uma pesquisa, levando em consideração principalmente os resultados de algumas pesquisas e alguns trabalhos publicados relacionados ao ensino e aprendizagem de funções, que apontaram as deficiências na compreensão dos conceitos referentes a este assunto, estão relacionados com a maneira como o estudo de funções é abordado em sala de aula. Considerando os resultados destas pesquisas e uma breve revisão teórica constatou-se a necessidade de um ensino da matemática mais significativo, voltado à participação do aluno na construção de seus conhecimentos.

O caráter diferenciado da proposta pôde ser comprovado em cada uma das atividades, principalmente em relação ao modo como os saberes foram introduzidos. As questões delinearam um caminho que leva, gradativamente, à formulação dos conceitos e definições. Encoraja o aluno a fazer conjecturas, organizar dados, realizar testes, avaliar um raciocínio e/ou resultados obtidos, propiciando ao aluno a oportunidade de dar significado aos conteúdos estudados, e assim, compreender com maior profundidade os conceitos trabalhados.

Apesar da proposta ter características diferenciadas, esta não pode ser concebida como uma receita que garante a aprendizagem. O processo de ensino e aprendizagem depende de muitas variáveis, a forma como o professor conduzirá as atividades, por exemplo, é crucial para que os objetivos da proposta sejam completamente atendidos. Esta proposta é, portanto, uma abordagem para o ensino de funções sujeito a adaptações, correções e reformulações.

Acredita-se que um trabalho apoiado nas novas tecnologias, com o emprego de softwares matemáticos educaticos e desenvolvido de maneira continuada, pode contribuir para a melhoria da qualidade do ensino nessa disciplina. A criação de ambientes de aprendizagem, usando o computador como ferramenta, ainda não é algo simples de se fazer na escola, devido a vários aspectos, entre eles, a maioria dos professores de matemática não está habituada com a forma de atuação que essas aulas exigem. Sendo assim, diante de algumas dificuldades ou imprevistos existentes a pergunta que fica é: Os professores estão dispostos a superá-las, saindo de seu estado de comodidade, de sua zona de conforto? Para alguns isto pode ser extremamente exaustivo e impossível de realizar, já para outros isto pode funcionar com elemento motivador. Contudo, ter realizado essa experiência me colocou num caminho sem volta, funcionando de forma muito positiva ao passo que aprendi as capacidades dessas ferramentas, assim não me vejo mais trabalhando alguns conteúdos matemáticos sem o uso das ferramentas tecnológicas.

Espera-se que a utilização do software Geogebra, com sua gama de ferramentas e algumas das dicas apresentadas no escopo desse trabalho, possa contribuir para um repensar e um planejamento de introdução das tecnologias como um recurso que produza conhecimento e torne as aulas de Matemática mais significativas, respaldadas por um conteúdo compreensível e construído pelo próprio aluno.

As atividades aqui propostas, ainda que singelas, mostram como o estudo da função afim pode ser tratado no ensino médio, e como são atividades adequadas ao uso de recursos computacionais, segue as recomendações dos PCNs, podem ser desenvolvidas muitas outras atividades a partir dessa ideia inicial e que estas sejam mais um recurso didático disponível, e também, sirvam como base para a elaboração de outras atividades adequadas ao uso de ambientes informatizados envolvendo outros conteúdos ou abordagens afim de serem trabalhadas paralelamente ao estudo algébrico desta função.

Espera-se que as propostas aqui apresentadas possam servir como estímulo aos professores que atuam no Ensino Médio, bem como aos futuros docentes que se formam nos cursos de licenciaturas em Matemática. Além disso, este estudo pode ser estendido para outras funções, devido as funcionalidades do software e o empenho do docente, para outros tipos de funções, como por exemplo: Funções Quadráticas, Funções Polinomiais, Funções Trigonométricas, Função Exponencial, Função Logarítmica, entre outras aplicações. Fica a sugestão para quem interessar, trabalhar outros aspectos envolvendo o conteúdo de funções, ou ainda trabalhar outros conteúdos dentro dessa dinâmica coletiva, interativa e lúdica.

Espara-se que este trabalho possa dar uma contribuição para a inserção do computador nas aulas de matemática, além de oferecer aos professores uma nova metodologia para o ensino de funções no ensino médio, e oportunizar por pequeno que possa ser, um momento de reflexão sobre a prática pedagógica e a busca de alternativas para a melhoria do ensino/aprendizagem de Matemática.

Entretanto, acredito que as TIC's, em especial os recursos computacionais, ao serem usados pedagogicamente e de maneira planejada, crítica e consciente, podem contribuir de forma indelével na melhoria do ensino de matemática, e por que não dizer da educação em geral. Portanto, este trabalho servirá para motivar, contribuir e apoiar professores de matemática que queiram utilizar algumas das ferramentas que a moderna tecnologia vem oferecendo. É interessante se apropriar do espaço da sala de aula como ambiente de desafios e de construção mútua do saber. Com isso, formar cidadãos que a sociedade atual exige e espera.

# Referências Bibliográficas


[1] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS Stephen. *Cálculo*. Volume 1. 8ª ed. Porto Alegre. Bookman, 2007.

[2] ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. *Aprendendo Matemática com o Geogebra*. São Paulo. Editora Exato, 2010.

[3] A sala de aula-aspectos práticos da gestão pedagógica e o uso de TIC's.

Disponível em: http://professordigital.wordpress.com

(Acessado em 21/10/2013.)

[4] BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática*. 6º ed. São Paulo: Moderna, 2006.

[5] BOTELHO, Leila Maria. *As funções polinomiais na educação básica: uma proposta*. Monografia de especialização, Pós-graduação em Matemática. Niterói, Rio de Janeiro. Universidade Federal Fluminense. 2005.

Disponível em:
http://www.professores.uff.br/wmrezende/uploads/Botelho.pdf

(Acessado em 23/12/2013.)

[6] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2ªed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[7] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA. Parâmetros Nacionais Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

[8] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto e Aplicações*. Volume 1. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

[9] DANTE, L.R. *Matemática, Volume único: livro do professor.* 1ª ed. São Paulo: Ática , 2005.

[10] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[11] Geogebra: software gratuito para o ensino e aprendizagem da matemática.

Disponível em: http://www.geogebra.org/cms

(Acessado em 28/03/2014.)

[12] GONÇALVES, Marluce Torquato Lima; NUNES, João Batista Carvalho. *Tecnologias de Informação E Comunicação: Limites na Formação E Prática dos Professores.* Educação e Comunicação/ n. 16. Agência Financiadora: FUNCAP. UECE.

Disponível em: http://29reuniao.anped.org.br/trabalhos/trabalho/GT16-2177--Int.pdf

(Acessado em 23/02/2014.)

[13] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* Volume 1. 5ª ed. Rio de Janeiro. LTC, 2008.

[14] IEZZI, Gelson; CARLOS Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar.* Volume 1. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

[15] INSTITUTO SÃO PAULO GEOGEBRA.

Disponível em: http://www.pucsp.br/geogebrasp/

(Acessado em 02/01/2013.)

[16] JESUS, Sílvio Márcio Costa De. *Estudo das Funções Afins, Quadráticas e Equações Polinomiais com o auxílio do software Winplot no Ensino Médio.* Vitória da Conquista. UESB. 2013.

Disponível em: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/399/2011_00269_SILVIO_MARCIO_COSTA_DE_JESUS.pdf

(Acessado em 19/01/2014.)

[17] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica.* Volume 1. 3ª ed. HARBRA ltda.

[18] LEMOS JUNIOR, José Alci Silva. *Estudo de Funções Afins e Quadráticas com o auxílio do Computador.* Dissertação de Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG. Campina Grande - PB, 2013.

Disponível em: http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/josealci.pdf

(Acessado em 21/02/2014.)

[19] LIMA, Elon L. *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 1. Coleção do Professor de matemática. 9ª ed. Rio de Janeiro. SBM, 2006.

[20] LOPES JÚNIOR, Geraldo. *Geometria Dinâmica Com o Geogebra no Ensino de Algumas Funções.* Dissertação de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática. VIÇOSA-MINAS GERAIS. Universidade Federal de Viçosa. 2013.

Disponível em: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/499/2011_00393_GERALDO_LOPES_JUNIOR.pdf

(Acessado em 18/12/2013.)

[21] MAGARINUS, Renata. *Uma Proposta para o Ensino de Funções Através da Utilização de Objetos de Aprendizagem.* Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. UFSM. Santa Maria - RS. 2013.

Disponível em: http://coral.ufsm.br/profmat/uploads/9/3/5/6/9356672/dissertao_renata_magarinus.pdf

(Acessado em 07/02/2014.)

[22] Manual do Geogebra 4.4.

Disponível em: http://wiki.geogebra.org/en/Manual:Main_Page

(Acessado em 28/03/2014.)

[23] OLIVEIRA, Jaqueline de. *Tópicos Selecionados de Trigonometria e sua História.* Monografia Graduação em Matemática. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, São Paulo. 2010.

Disponível em: http://www.dm.ufscar.br/profs/tcc/trabalhos/2010-2/313530.pdf

(Acessado em 01/03/2014.)

[24] RIBEIRO, Jackson. *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia.* Volume 1. 1º ed. São Paulo. Scipione, 2010.

[25] ROCHA, Marcos Dias da. *Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina de cálculo diferencial e integral I[Manuscrito]: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Ouro Preto. Universidade Federal de Ouro Preto. 2010.

Disponível em: http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Diss_Marcos_Dias_Rocha.PDF

(Acessado em 13/02/2014.)

[26] ROSSINI, Renata. *Os Professores e o Conceito De Função: Uma Investigação à Luz da Teoria Antropológica do Didático.* PUC-SP. Educação e Comunicação/ n. 19.

Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/professores.pdf

(Acessado em 29/03/2014.)

[27] SOUZA, Joamir Roberto de. *Matemática.* 1º ed. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção Novo Olhar; v.1).

[28] STEWART, James. *Cálculo.* Volume 1. 5ª ed. São Paulo. Thomsom Learning, 2008.

[29] Tic's: Uma tendência no ensino de matemática.

Disponível em: http://meuartigo.brasilescola.com/educacao/tics-uma-tendencia-no-ensino-matematica.htm

(Acessado em 06/03/14.)

[30] Figura 2.1: *Tableta Yale contendo o cálculo da raiz quadrada de 2.* Fonte: (OLIVEIRA, 2010, [23]).

[31] Figura 2.3: *Salto de paraquedas.* Fonte: http://www.google.com.br/imgres?imgurl=http

[32] Figura 2.3: *Táxi.* Fonte: http://www.google.com.br/imgres?imgurl=http

[33] Figura 2.12: *Volume de água do açude na última década.* Fonte: AESA / DNOCS / CAGEPA.

Disponível em: http://site2.aesa.pb.gov.br/aesa/volumesAcudes.do?metodo=preparaGraficos&codAcude=2997

(Acessado em 23/11/2013.)