



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

# Localização de Gravidade e Defeitos em Branas

Priscila da Silva Santos

CAMPINA GRANDE

- Março 2015 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

# Localização de Gravidade e Defeitos em Branas

**Priscila da Silva Santos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

CAMPINA GRANDE

- Março 2015 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S2371 Santos, Priscila da Silva.  
Localização de gravidade e defeitos em Branas / Priscila da Silva Santos.  
– Campina Grande, 2015.  
60 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".  
Referências.

1. Dimensões Extras. 2. Branas. 3. Localização de Gravidade. 4. Paredes de Domínios. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.

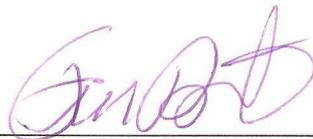
CDU 531-4(043)

**PRISCILA DA SILVA SANTOS**

**LOCALIZAÇÃO DE GRAVIDADE E DEFEITOS EM BRANAS**

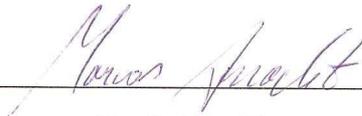
Dissertação aprovada em 27/03/2015

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG  
(Presidente)



---

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG  
(Membro interno)



---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Morgana Lígia de Farias Freire  
Departamento de Física – UEPB  
(Membro externo)

“Feliz o homem que achou sabedoria e o homem  
que obtém discernimento” (Provérbios 3:13)

# Agradecimentos

À Deus, por sua grandiosidade; por me direcionar nas minhas escolhas e por me dar a força de que eu necessito para a superação dos obstáculos.

Ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, sem o qual o desenvolvimento deste trabalho não seria possível. Por sua paciência, presteza, sabedoria, e por seu exemplo de humanidade.

À minha família, que sempre está ao meu lado, me apoiando e cuidando sempre de mim. Em especial à minha mãe (Irene), meu porto seguro, por seu zelo, suas orações e seu exemplo de mulher forte e guerreira. Aos meus irmãos Ericleton e Eudes, por me incentivar a perseguir os meus sonhos e objetivos. Ao meu esposo Hémerson pelo carinho e companheirismo. À Maria da Guia por seu incentivo, sua amizade e pela força concedida a mim em momentos difíceis.

Aos funcionários e Professores do Programa de Pós-Graduação em Física da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande pelo aprendizado e colaboração na minha formação. Aos meus colegas e amigos do mestrado pelas horas de estudo, companheirismo e amizade. Em especial à Desiane Gomes, Fabiano Santos, Leide Priscila, Maria Aparecida e Simony Santos.

Aos amigos e professores do curso de Licenciatura em Física do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, em nome de Acácio Silveira e dos Professores Fábio Ferreira e Joseclécio Dantas, pelo apoio e diálogos edificantes.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

À todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

# Lista de Figuras

2.1	<i>Orbifold</i> $S_1/\mathbb{Z}_2$ (extraído de [24]). . . . .	12
2.2	Modelo Randall-Sundrum (extraído de [24]). . . . .	13
2.3	Potencial vulcão (extraído de [24]). . . . .	19
3.1	Curvatura da superfície de simultaneidade: (a) o modelo esférico tem $k = 1$ , (b) o modelo plano tem $k = 0$ e (c) o modelo hiperbólico tem $k = -1$ (adaptado de [30]). . . . .	23
3.2	O fator de empenamento $a(y)$ para $\sigma = 1/2$ (linha azul) e para $\sigma = 1$ (linha vermelha). . . . .	37
3.3	O fator de empenamento $a_-$ para $\sigma = 1/2$ (linha vermelha) e para $\sigma = 1$ (linha azul). . . . .	38
4.1	O fator de empenamento dado pela Eq. (4.26), para $\sigma = 0.1$ . . . . .	45
4.2	O potencial gravitacional dado pela Eq. (4.27), para $\sigma = 0.1$ . . . . .	45
4.3	O fator de empenamento dado pela Eq. (4.28), para $\sigma = 0.1$ . . . . .	46
4.4	O potencial gravitacional dado pela Eq. (4.29), para $\sigma = 0.1$ . . . . .	46
4.5	O fator de empenamento dado pela Eq. (4.32), para $\sigma = 1$ e $\gamma = 1$ . . . . .	47
4.6	O potencial gravitacional dado pela Eq. (4.33), para $b = 0.1$ e $\gamma = 1/2$ . . . . .	47

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo</b>	<b>x</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Teorias de Dimensões Extras</b>	<b>4</b>
2.1 Teoria de Kaluza-Klein . . . . .	5
2.1.1 A Condição Cilíndrica . . . . .	6
2.1.2 Mecanismo de Compactificação de Klein . . . . .	7
2.2 O Modelo Arkani-Hamed–Dimopoulos–Dvali (ADD) . . . . .	7
2.2.1 Escala Fundamental da Dimensão Extra e o Problema de Hierarquia	8
2.2.2 Potencial Gravitacional em Dimensões Extras . . . . .	10
2.3 Modelos de Randall-Sundrum . . . . .	11
2.3.1 O Modelo RSI . . . . .	12
2.3.2 O Modelo RSII . . . . .	19
<b>3 Cosmologia de Branas/Paredes de Domínios</b>	<b>21</b>
3.1 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	22
3.2 As Equações de Friedmann . . . . .	23
3.3 Formalismo de Primeira Ordem . . . . .	27
3.4 Formalismo de Primeira Ordem em Cosmologia de Branas . . . . .	30
3.5 Correspondência entre Cosmologia de Branas e Paredes de Domínios . . .	34

3.5.1	Exemplos de Paredes de Domínios . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Localização de Gravidade em Branas 4D</b>	<b>39</b>
4.1	Linearização da Gravidade . . . . .	40
4.1.1	Exemplos de Potenciais para Paredes de Domínios . . . . .	44
4.2	O Gráviton Quadridimensional . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>49</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>O Limite Newtoniano não Relativístico</b>	<b>56</b>
<b>B</b>	<b>Equação de Einstein para a Métrica não Perturbada</b>	<b>59</b>

# Resumo

Neste trabalho analisamos as flutuações de gravidade em um defeito topológico, tipo parede de domínio, acoplada à uma gravidade quadridimensional em uma 3-brana no espaço de Minkowski ( $\mathbb{M}_4$ ) ou anti de Sitter ( $AdS_4$ ). Introduzimos o conceito de dimensões extras, no qual abordamos o modelo de dimensões extras de Randall-Sundrum, cujo modelo descreve a gravidade em cinco dimensões na presença de campos escalares dinâmicos em um *bulk*. Depois fizemos uma correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínios através da utilização do formalismo de primeira ordem e do processo de continuação analítica. Investigamos então as flutuações da gravidade na métrica que representa soluções no plano bidimensional dentro de paredes de domínios assintoticamente quadridimensional no espaço de Minkowski ( $\mathbb{M}_4$ ) ou anti de Sitter ( $AdS_4$ ) e a partir da linearização da gravidade obtemos então o potencial gravitacional referente à parede de domínio na 3-brana, o qual descreve um potencial do tipo Schrödinger. Por fim, determinamos o modo zero da equação Schrödinger, o qual fornece a gravidade newtoniana em quatro dimensões.

**Palavras-chave:** Dimensões Extras, Branas, Localização de Gravidade, Paredes de Domínios.

# Abstract

In This study we analyzes the gravity fluctuations in a topological defect, domain wall type, coupled to a four-dimensional gravity on a 3-brane in Minkowski space ( $\mathbb{M}_4$ ) or anti de Sitter ( $AdS_4$ ). Introduced the concept of extra dimensions, in which we approach the model of extra dimensions Randall-Sundrum, whose model describes gravity in five dimensions in the presence of dynamic scalar fields in a *bulk*. After we make a correspondence between brane cosmology and domain walls by using the formalism of the first order and the analytic continuation process. Then investigated the fluctuations of gravity on the metric that represents solutions in two-dimensional flat domain walls within asymptotically in Minkowski space ( $\mathbb{M}_4$ ) or anti de Sitter ( $AdS_4$ ) and from the linearization of gravity then we obtain the gravitational potential on the domain wall in the 3- brane, which describes a potential type Schrödinger. Finally, we determine the zero mode of the equation Schrödinger, the which provides Newtonian gravity in four-dimensional.

**Keywords:** Dimensions Extras, Branas, Gravity Location, Domain Walls.

# Capítulo 1

## Introdução

A Teoria Quântica de Campos surge no início da década de 1920 e envolve a Mecânica Quântica com a Relatividade Restrita [1]. A partir dessa teoria o modelo padrão das interações fundamentais explica uma grande quantidade de fenômenos com precisão, no entanto, a obtenção de soluções analíticas para as equações clássicas em um contexto que envolva escalares acoplados à gravidade incide grandes desafios à teoria [2]. Diante disto, a partir da década de 1980 surge uma nova teoria que traz como entes fundamentais não partículas, mas objetos extensos denominados *cordas* [3], os quais vibram no espaço-tempo. A proposta da teoria é que toda matéria e todas as forças provém de um único componente básico: cordas oscilantes [4]. Acredita-se que a corda fundamental, de onde todas as partículas aparecem como modos vibrantes seja da ordem de  $10^{-33}$  cm, o que justifica a não observação direta de sua existência [5]. Essa teoria denominada *Teoria de Cordas*, é uma excelente candidata para uma teoria unificada de todas as forças da natureza [6], mesmo longe de sua formulação final prevê que a gravidade, à semelhança das outras forças fundamentais, pode ser mediada por uma partícula denominada *gráviton* [2]. O nosso espaço-tempo é de 4 dimensões (3 dimensões espaciais e uma dimensão temporal), na Teoria de Cordas o número de dimensões do espaço-tempo são 10 [6].

A Teoria de Cordas, na verdade, tem cinco diferentes formas, que podem ser conectadas uma à outra por artifícios matemáticos, tornando-se faces de uma única teoria: a Teoria M. Para conectá-las o físico-matemático Edward Witten introduziu outra dimensão extra, ficando assim a teoria com 11 dimensões [5]. Nesse contexto emerge a ideia de branas ou  $p$ -branas, que são objetos extensos utilizados para fixar uma ou duas extremidades de uma corda aberta em  $p$ -dimensões. Dessa forma uma brana com  $p = 1$  é uma

corda, com  $p = 2$  é uma membrana e com  $p = 3$  possui 3 dimensões estendidas [1].

A ideia de dimensões espaciais extras foi introduzida primeiramente por Kaluza em 1921 [7] e por Klein [8] em 1926, com o objetivo de unificar o campo gravitacional e o eletromagnetismo. Na teoria de Kaluza-Klein a dimensão extra estaria compactificada em um círculo com raio da ordem do comprimento de Planck ( $10^{-35}$  m) de modo que o nosso Universo visível fosse realmente quadridimensional [1].

O conceito de dimensões extras foi abandonado por um tempo, contudo tais estudos foram resgatados com o objetivo de resolver o Problema de Hierarquia, que consiste na enorme diferença entre a escala de Planck ( $10^{18}$  GeV) e a escala eletrofraca ( $10^3$  GeV). Na década de 1980 Rubakov [9] e outros retomaram os estudos sobre dimensões extras que culminou em um dos principais componentes na Teoria de Cordas. Nesse contexto, surgem as teorias de branas onde o Universo é tratado como uma hipersuperfície imersa em um espaço ambiente com dimensões superiores denominado de *bulk*. Neste tipo de modelo, a hipersuperfície, também chamada de brana, contém a matéria e os campos quadridimensionais usuais em um estado de confinamento, no entanto a gravidade é capaz de se propagar na direção das dimensões extras [10, 11]. No final da década de 1990 o conceito de mundo-brana foi utilizado por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali [12], como uma possível solução para o Problema de Hierarquia em física de partículas. Posteriormente Lisa Randall e Raman Sundrum resolveram o Problema de Hierarquia com a inserção de duas 3-branas em um espaço Anti de Sitter ( $AdS_5$ ) onde uma das branas seria o nosso Universo e a outra conteria a gravidade [13]; Randall-Sundrum ainda exploram a gravidade em uma 3-brana em um espaço-tempo  $AdS_5$ , onde a dimensão extra poderia ter um tamanho infinito [14].

Neste trabalho analisamos as flutuações de gravidade em um defeito topológico, tipo parede de domínio, acoplada à uma gravidade quadridimensional em uma 3-brana no espaço de Minkowski ( $M_4$ ) ou anti de Sitter ( $AdS_4$ ). O estudo de defeitos topológicos, é muito vasto e rico e tem uma relação profunda com a Teoria de Cordas [2]. Os defeitos topológicos estão intimamente associados com algum tipo de quebra de simetria no sistema físico. Denomina-se defeito porque aparece em lugares onde a simetria sofre alteração, e topológico, pois uma descrição exata dele está nas ideias de simetria consagradas na topologia [15]. Paredes de domínios correspondem a um tipo específico de defeito topológico [16]. As paredes de domínios são superfícies de interpolação entre regiões se-

paradas do potencial escalar com diferentes valores esperados de vácuo de algum campo escalar [17].

No capítulo 2 apresentamos um resumo dos modelos de dimensões extras mencionados, e suas principais características. Inicialmente vamos tratar do modelo de Kaluza-Klein, depois trataremos dos modelos ditos de imersão: ADD, Randall-Sundrum I e Randall-Sundrum II. Os modelos de Randall-Sundrum, descrevem a gravidade em cinco dimensões na presença de campos escalares dinâmicos em um *bulk*, o cenário mundo-brana tem cinco dimensões em uma geometria *AdS* (ou mesmo Minkowski), e é permitida à 3-brana ter quatro dimensões do espaço-tempo com geometria Minkowski ou de Sitter. Este modelo apresenta os espectros de flutuações gravitacionais, que consiste em um modo zero, que dá origem a Lei de Newton 4D na brana, além de um contínuo de estados de energia, que correspondem às pequenas correções para o potencial newtoniano 4D.

No capítulo 3 abordamos, uma correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínios de acordo com [18]. Para isso, consideramos a evolução cosmológica de uma 3-brana na presença de um campo escalar real. Utilizamos um método para resolver equações de primeira ordem que satisfazem as equações de movimento através da escolha do potencial do campo escalar escrito em termos de um superpotencial, em que no regime de baixas energias o potencial escalar convencional quadridimensional de uma teoria de supergravidade é recuperado. Veremos o modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Depois discutiremos o formalismo de primeira ordem em cosmologia de branas e também utilizando um outro procedimento, conhecido como continuação analítica, obtemos soluções que descrevem paredes de domínios.

Nossa contribuição é apresentada no capítulo 4. Na primeira parte, inspirados no modelo Randall-Sundrum, analisamos a localização da gravidade em um cenário de dimensões extras, porém faremos uma abordagem em 4 dimensões, cujo principal objetivo é analisar as flutuações da gravidade na métrica que representa soluções no plano bidimensional dentro de paredes de domínios assintoticamente quadridimensional no espaço de Minkowski ( $\mathbb{M}_4$ ) ou anti de Sitter ( $AdS_4$ ) [18]. Com isto, obteremos o potencial gravitacional tipo Schrödinger, referente à parede de domínio na 3-brana. Apesar de planas, estas paredes modificam o espaço-tempo ao seu redor e influenciam diretamente na localização de gravidade sobre a brana [1]. Por fim, calculamos o modo zero da equação tipo Schrödinger obtida a partir da linearização da gravidade.

## Capítulo 2

# Teorias de Dimensões Extras

A unificação entre gravidade e o eletromagnetismo remota ao início do século passado. Mais precisamente após a Teoria da Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein em 1916, a gravidade antes vista como uma força, passava a ser considerada como pura propriedade geométrica do espaço. Neste cenário a busca pela unificação das interações fundamentais da natureza fez surgir as teorias de dimensões extras [10].

Em 1921 Theodor Kaluza apresentou um modelo, em que o campo gravitacional é unificado com o eletromagnetismo, admitindo a existência de uma dimensão extra do espaço-tempo. Posteriormente, em 1926, o físico sueco Oscar Klein introduz algumas modificações, ficando assim o modelo conhecido por Teoria de Kaluza-Klein. Nessa teoria, o tamanho da dimensão extra é da ordem do comprimento de Planck ( $10^{-35}$  m). Portanto a dimensão extra não pode ser detectada dentro da escala de energia disponível atualmente [10, 19].

Após a formulação da Teoria de Kaluza-Klein, foram descobertas mais duas forças fundamentais: a força nuclear forte e a força nuclear fraca. A força eletromagnética foi unificada com a força nuclear fraca com sucesso, denominada força eletrofraca. Grande parte dos modelos de dimensões extras, tenta resolver o problema entre a diferença entre as escalas de energia das forças eletrofraca e gravitacional. Para tentar resolver essa enorme diferença entre a escala de Planck  $10^{18}$  GeV e a escala eletrofraca  $10^3$  GeV, conhecido como Problema de Hierarquia, surge as teorias de branas, onde o universo é tratado como uma hipersuperfície imersa em um espaço ambiente, denominado *bulk*. Nesse tipo de modelo a hipersuperfície, chamada membrana ou apenas brana, contém a matéria e os campos quadridimensionais usuais em um estado de confinamento, no entanto, a gravidade é capaz

de se propagar na direção das dimensões extras [10, 11, 20].

Neste capítulo iremos apresentar alguns modelos de dimensões extras. Inicialmente vamos tratar do modelo de Kaluza-Klein, que introduz a ideia inicial de dimensões extras. Depois trataremos dos modelos de imersão: ADD, RSI e RSII. A principal diferença entre estes modelos está na forma de como a dimensão extra é escondida das observações.

## 2.1 Teoria de Kaluza-Klein

Nordstron em 1914 e Kaluza em 1921 foram os primeiros a tentar unificar a gravidade com o eletromagnetismo em uma teoria de cinco dimensões. Nordstron assumiu um potencial gravitacional escalar, enquanto Kaluza usou o potencial de Einstein, assumindo que o conjunto completo das coordenadas em um espaço-tempo  $(4+1)$ -dimensional seria  $(x^\mu, z)$  [10].

A equação de Einstein em 5 dimensões sem o tensor energia-momento 5D é dada por [21]:

$$G_{AB} = 0, \quad (2.1)$$

ou equivalentemente,

$$R_{AB} = 0, \quad (2.2)$$

onde  $G_{AB} = R_{AB} - Rg_{AB}/2$  é o tensor de Einstein,  $R_{AB}$  e  $R = g_{AB}R_{AB}$  são o tensor e o escalar de Ricci, respectivamente e  $g_{AB}$  é o tensor métrico em 5 dimensões.

A ausência de matéria nessas equações inspiradas por Einstein, reflete a posição adotada por Kaluza de que o “universo em dimensões superiores está vazio”. A intenção é explicar a matéria (em quatro dimensões) como uma manifestação de pura geometria, em níveis mais altos [21].

O tensor de Ricci e os símbolos de Christoffel em termos da métrica em 5 dimensões são definidos como em 4 dimensões, respectivamente da seguinte forma [22]:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma, \quad (2.3)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

Tudo depende de uma escolha para a forma da métrica em 5 dimensões. Em geral, se identifica a parte  $\mu\nu$  de  $g_{AB}$  com  $g_{\mu\nu}$  (o tensor métrico em 4 dimensões), a parte  $g_{\mu 4}$

com  $A_\mu$  (o potencial eletromagnético) e a parte  $g_{44}$  com  $\phi$  (um campo escalar). Podemos parametrizar  $g_{AB}$ , escrevendo-o na forma [10]

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & \kappa^2 \phi^2 A_\mu \\ \kappa \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

A assinatura da métrica quadridimensional é tomada como sendo  $(+ - - -)$ . Utilizamos ainda as unidades  $c = \hbar = 1$ .

### 2.1.1 A Condição Cilíndrica

A condição cilíndrica de Kaluza exige que todas as derivadas com respeito à quinta componente da métrica seja nula. Aplicando a condição cilíndrica de Kaluza concomitantemente com as Eqs. (2.3) e (2.4), e ainda utilizando a métrica dada pela Eq. (2.5), sendo  $g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\alpha 4}$  e  $g_{44}$  componentes da equação de campo 5D (Eq. (2.2)), encontra-se as seguintes equações de campo em 4 dimensões [21]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{EM} - \frac{1}{\phi} [\nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \square \phi], \quad (2.6a)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3 \frac{\partial^\mu \phi}{\phi}, \quad (2.6b)$$

$$\square \phi = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.6c)$$

onde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$  é o tensor de Einstein,  $T_{\mu\nu}^{EM} = g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4 - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}$  é o tensor energia-momento eletromagnético e  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ , corresponde ao tensor eletromagnético de Maxwell. Se o campo escalar  $\phi$  é constante em todo o espaço-tempo as Eqs. (2.6a) e (2.6b) são as equações de Einstein e Maxwell respectivamente, dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \phi^2 T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (2.7a)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.7b)$$

onde modificamos o parâmetro  $\kappa$  em termos da constante de gravidade  $G$  (em quatro dimensões), ou seja:

$$\kappa = 4\sqrt{\pi G}. \quad (2.8)$$

Este resultado foi obtido originalmente por Kaluza e Klein, definindo  $\phi = 1$ . No entanto, só é consistente com a Eq. (2.6c), quando  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$ , como foi assinalado pela primeira vez por Jordan e Thiry [21].

## 2.1.2 Mecanismo de Compactificação de Klein

A teoria de Kaluza, com sua condição de cilindro é apenas um dos mecanismos pelo qual se explica a aparente natureza quadridimensional do Universo. O pressuposto de Kaluza quanto à existência de uma quinta dimensão existe, mas não traduz que grandezas físicas dependem dela. Klein explica a falta de dependência, tomando a dimensão extra muito pequena. Ele atribui duas propriedades para a dimensão extra: (i) uma topologia circular ( $S^1$ ); (ii) uma escala pequena [21].

Em decorrência da propriedade (i) qualquer quantidade  $f(x^\mu, y)$  deve ser periódica com respeito à quinta dimensão da seguinte forma:

$$f(x^\mu, y) = f(x^\mu, y + 2\pi r), \quad (2.9)$$

onde  $y$  é o parâmetro de escala ou “raio” da quinta dimensão. Portanto, todos os campos podem ser expandidos em uma série de Fourier na forma [10]

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, y) = \sum_n g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{iny/r}, \quad (2.10a)$$

$$\phi(x^\mu, y) = \sum_n \phi^{(n)}(x^\mu) e^{iny/r}, \quad (2.10b)$$

$$A_\mu(x^\mu, y) = \sum_n A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{iny/r}, \quad (2.10c)$$

onde o índice ( $n$ ) refere-se ao  $n$ -ésimo modo de Fourier. Devido a teoria quântica esses modos levam um impulso na direção  $y$  da ordem de  $n/r$ .

Da propriedade (ii) advém que: se  $y$  é suficientemente pequeno, em seguida, o  $y$ -momentos, mesmo dos modos  $n = 1$  serão tão grandes, quanto colocá-los fora da experiência. Portanto, apenas os modos  $n = 0$ , que são independentes de  $y$ , serão observáveis. Tal como exigido na condição de cilindro de Kaluza [10, 19, 21].

## 2.2 O Modelo Arkani-Hamed–Dimopoulos–Dvali (ADD)

Aparentemente há pelo menos duas escalas fundamentais de energia na natureza: a escala eletrofraca ( $M_{EW} \sim 10^3$  GeV) e a escala de Planck ( $M_{Pl} = 1/\sqrt{G} \sim 10^{18}$  GeV), onde a gravidade se torna tão forte quanto às outras interações de calibre (*gauges*) [12]. Nas últimas décadas, as tentativas de explicar a enorme diferença entre estas escalas de energias, conhecido como Problema de Hieraquia, foi um dos grandes motivadores para a

construção de teorias além do modelo padrão. O modelo de Nima Arkani-Hamed, Saras Dimopoulos e Gia Dvali (ADD), proposto em 1998, mostra que existem  $n$ -dimensões espaciais compactas de Raio  $R$  [1, 10].

No modelo ADD as dimensões extras estão confinadas em uma hipersuperfície (quadridimensional) imersa em um espaço maior, comumente chamado de *bulk*, de forma que apenas a gravidade se propaga ao longo da dimensão extra. Diferentemente do modelo proposto por Kaluza, cuja as dimensões extras são compactas com comprimentos da ordem de Planck, no modelo ADD as dimensões extras são compactas, porém a escala de comprimento pode ser submilimétrica, sem entrar em conflito com a experiência [10].

### 2.2.1 Escala Fundamental da Dimensão Extra e o Problema de Hierarquia

No estudo de gravitação, às vezes é conveniente utilizar o sistema de unidades de Planck. Nesse sistema temos três unidades básicas, comprimento de Planck  $l_p$ , massa de Planck  $m_p$  e tempo de Planck  $t_p$  definidas em termos das três constantes fundamentais  $c$ ,  $\hbar$  e  $G$  [6]:

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}, \quad t_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \quad \text{e} \quad m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}. \quad (2.11)$$

É possível obter uma relação entre o comprimento de Planck e a constante gravitacional em um espaço-tempo de qualquer dimensão, por meio de uma combinação entre as três constantes fundamentais  $c$ ,  $\hbar$  e  $G^{(n)}$  [6],

$$(l_p^{(n)})^{n-2} = \frac{G^{(n)}\hbar}{c^3} = l_p^2 \frac{G^{(n)}}{G}. \quad (2.12)$$

Consideremos um espaço-tempo em cinco dimensões, com a dimensão extra compacta e topologia de um pequeno círculo de raio  $l$ , onde o comprimento da dimensão é igual a  $2\pi l$ . As constantes gravitacionais em cinco e em quatro dimensões se relacionam da seguinte forma [6, 10]:

$$\frac{G^{(5)}}{G} = 2\pi l \equiv l_c. \quad (2.13)$$

onde  $l_c$  é o comprimento da dimensão extra. Observamos que as constantes gravitacionais diferem por um fator da ordem de comprimento da dimensão extra compacta. A generalização da Eq. (2.13) para o caso em que existe mais de uma dimensão extra, considerando

que o comprimento de todas as dimensões extras é o mesmo, é dada por

$$\frac{G^{(n)}}{G} = (l_c)^{n-4}. \quad (2.14)$$

A relação entre o comprimento de Planck em 4D ( $l_p$ ) e o comprimento de Planck em  $n$ -dimensões ( $l_p^{(n)}$ ), pode ser obtido utilizando as Eqs. (2.12) e (2.13):

$$(l_p^{(5)})^3 = (l_p)^2 \frac{G^{(5)}}{G} = (l_p)^2 l_c, \quad (2.15)$$

a qual, resolvendo para  $l_p$ , obtém-se

$$l_p = l_p^{(5)} \sqrt{\frac{l_p^{(5)}}{l_c}}. \quad (2.16)$$

Esta relação nos permite explorar o fato de que o Universo, na verdade, contém 5 dimensões com um comprimento de Planck fundamental  $l_p^{(5)}$  maior que  $10^{-33}$  cm. Afinal, este é o comprimento de Planck em 4 dimensões, cujo valor é encontrado pela Eq. (2.11) [6].

Os aceleradores atuais exploram a física até distâncias da ordem de  $10^{-16}$  cm. Se esta distância ou um pouco menor, é a escala de comprimento fundamental, para resolver o Problema de Hierarquia, podemos escolher  $l_p^{(5)} \sim 10^{-18}$  cm, ou seja da mesma ordem da escala eletrofaca. Dessa forma, com  $l_p^{(5)} \sim 10^{-18}$  cm e  $l_p \sim 10^{-33}$  cm, a Eq. (2.16) nos fornece  $l_c \sim 10^{12}$  cm  $\sim 10^7$  km. Isso é mais de 20 vezes a distância da Terra à Lua. Seria uma grande dimensão extra, que falha em produzir um cenário realista em 5 dimensões. Dessa forma, considerando 6 dimensões do espaço-tempo para  $n$  arbitrário, as Eqs. (2.12) e (2.14) fornecem [6]:

$$(l_p^{(n)})^{n-2} = (l_p)^2 \frac{G^{(n)}}{G} = (l_p)^2 (l_c)^{n-4}. \quad (2.17)$$

Resolvendo a equação anterior para  $l_c$ , obtemos

$$l_c = l_p^{(n)} \left( \frac{l_p^{(n)}}{l_p} \right)^{\frac{2}{n-4}}. \quad (2.18)$$

Assim, para  $n = 6$  e  $l_p^{(6)} \sim 10^{-18}$  cm, obtemos

$$l_c = \frac{(l_p^{(6)})^2}{l_p} \sim 10^{-3} \text{ cm}. \quad (2.19)$$

Esta é a distância até onde as Leis de Newton foram testadas [10]. Por outro lado, para distâncias menores que  $l_c$  o mundo seria efetivamente de dimensões superiores. Uma força entre duas massas com  $1/r^4$  ( $r$  é a separação), é consistente com a existência de duas outras dimensões extras compactas [6].

## 2.2.2 Potencial Gravitacional em Dimensões Extras

O campo gravitacional é o único campo capaz de se propagar ao longo da dimensão extra [12]. Vamos discutir como a dimensão extra afeta a gravidade, para isso necessitamos obter o potencial gravitacional newtoniano gerado por um corpo de massa  $m$  em um espaço-tempo com  $(4 + n)$ -dimensões espaciais. Assumindo que o campo gravitacional em  $n$  dimensões é conservado e a equação de campo tem a mesma forma que a sua correspondente quadridimensional [10].

Uma massa  $m'$ , a uma distância  $r \ll R$  de uma outra massa  $m$ , sentirá a influência de um potencial gravitacional dado pela Lei de Gauss em  $(4 + n)$ -dimensões [2]:

$$\nabla^2 V^{(4+n)} = 4\pi\rho_m, \quad (2.20)$$

onde  $\rho_m$  é a densidade de massa da matéria. A Eq. (2.20) tem por solução

$$V^{(4+n)}(r) = -\Gamma \left[ \frac{(3+n)}{2} \right] \frac{G_N^{(4+n)} m}{2\pi^{(3+n)/2} r^{n+1}}, \quad r \ll R, \quad (2.21)$$

onde  $G_N$  é a constante gravitacional em  $n$  dimensões do espaço-tempo.

Para  $r \gg R$  o potencial quadridimensional é recuperado, uma vez que as linhas de fluxo gravitacional não permeiam o espaço das dimensões extras. Dessa forma [3],

$$V^{(4+n)}(r) = G_N^{(4+n)} \frac{m}{r^{n+1}}, \quad r \gg R. \quad (2.22)$$

Assim, obtemos

$$\frac{G^{(4+n)}}{G} \sim R^n. \quad (2.23)$$

Considerando novamente que, as unidades em todas as dimensões são as mesmas, obtemos

$$\frac{G^{(4+n)}}{G} = \frac{\left( l_p^{(4+n)} \right)^{2+n}}{\left( l_p \right)^2}, \quad (2.24)$$

o que leva a

$$R \sim l_p^{(4+n)} \left( \frac{l_p^{(4+n)}}{l_p} \right)^{2/n}. \quad (2.25)$$

Como vimos anteriormente,  $l_p \sim 10^{-33}$  cm e  $l_p^{(5)} \sim 10^{-18}$  cm, o que nos fornece novamente para  $n = 1$ ,  $R \sim 10^7$  km, valor excluído pelas observações experimentais.

No entanto, para  $n = 2$ , temos  $R \sim 10^{-3}$  cm, o que resolveria o Problema de Hierarquia; desde que tenhamos um *bulk*, com duas dimensões extras encurvadas da ordem de 1 mm [3]. O raio de compactificação não é um parâmetro livre da Teoria de Cordas, mas um parâmetro de um espaço-tempo permitido pela teoria. Trata-se de um parâmetro ajustável, comumente chamado de *moduli*. Os campos de *moduli* geram forças com intensidades comparáveis a da gravidade quadridimensional usual e, chegamos à forma do potencial newtoniano dado pela Eq. (2.26) entre dois corpos de densidades  $\rho_1$  e  $\rho_2$  por meio de correções dadas por um termo de Yukawa, que caracteriza a intensidade e alcance da força causada pelo *modulus* [2].

$$V = - \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \frac{G_N \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2)}{r_{12}} [1 + \alpha \exp(-r_{12}/\lambda)], \quad (2.26)$$

onde  $\alpha$  é a intensidade da força de alcance,  $G_N$  é a constante gravitacional e o parâmetro  $\lambda$  é devido ao campo *modulus*.

## 2.3 Modelos de Randall-Sundrum

Os modelos de Randall-Sundrum (RS) foram formulados em 1999 por Lisa Randall e Raman Sundrum [13, 14] e oferece uma nova abordagem para o Problema de Hierarquia. Diferentemente do modelo ADD, mostra que um modelo de 5 dimensões não é incompatível com os dados experimentais; pois admite que o *bulk* possui uma constante cosmológica negativa ajustada à tensão da brana.

Há dois modelos Randall-Sundrum: o modelo Randall-Sundrum I (RSI) que consiste em duas branas quadridimensionais num *bulk* de 5 dimensões, com a dimensão extra de tamanho finito e o modelo Randall-Sundrum II (RSII) que consiste em uma brana quadridimensional também imersa em um *bulk* de 5 dimensões, porém o tamanho da dimensão extra pode ser infinito, ou seja, a dimensão extra não é compacta. Em ambos os modelos a escala de Planck em 5 dimensões é da ordem da escala eletrofaca [23].

### 2.3.1 O Modelo RSI

Neste modelo, o espaço-tempo tem uma única dimensão extra compacta por meio da existência de duas branas. Admite-se que a dimensão extra possui a topologia do espaço localmente dado pelo *orbifold*  $S_1/\mathbb{Z}_2$ , onde  $S_1$  trata-se de um círculo de raio unitário e  $\mathbb{Z}_2$  é o grupo multiplicativo  $\{-1, 1\}$ , cuja operação usual de multiplicação de números inteiros estabelece uma estrutura de grupo abeliano.

As duas branas estão localizadas em dois pontos fixos do *bulk* [10]. Uma brana com tensão positiva  $\lambda_1$  localizada na origem ( $y = 0$ ) e outra brana com tensão negativa ( $\lambda_2$ ), localizada bem na extremidade do círculo, na posição  $y = \pi R$ , que representa um comprimento total  $L$ , como ilustrado na Fig. 2.1 [24].

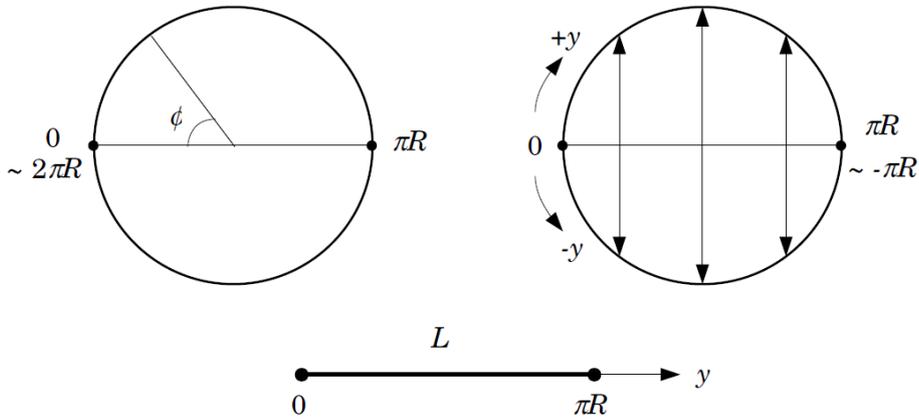


Figura 2.1: *Orbifold*  $S_1/\mathbb{Z}_2$  (extraído de [24]).

Em cada um desses pontos limites teremos um Universo em 4 dimensões, como o que conhecemos. Por analogia com branas inseridas em espaços com dimensões superiores, esses modelos com  $(3 + 1)$ -dimensões envolvem e limitam um volume 5D como ilustrado na Fig. 2.2 [2].

Os modelos RS foram desenvolvidos, motivados pelo Problema de Hierarquia. Nesses a gravidade é mais forte perto da brana e diminui exponencialmente quando nos afastamos dela, na dimensão extra. Por esse motivo, a métrica no *bulk* tem um fator exponencial que depende da nova dimensão, ou seja, a métrica é função da coordenada extra. O fator de empenamento (*warp factor*) na métrica atenua a gravidade e corrige o Problema de Hierarquia [23].

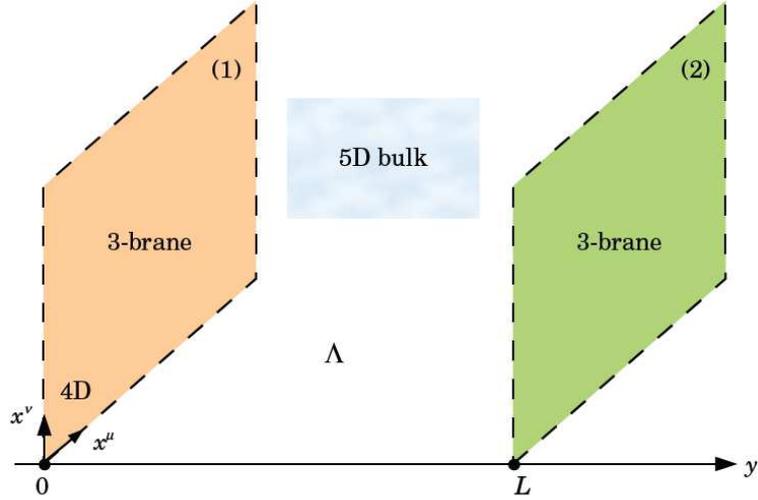


Figura 2.2: Modelo Randall-Sundrum (extraído de [24]).

### Empenamento da Métrica

Esta subseção teve influência direta de [24]. Assumindo que a métrica induzida na brana é proporcional a métrica de Minkowski e com a exigência de que a métrica deve preservar a invariância de Poincaré, temos o seguinte *ansatz* [13]:

$$ds^2 = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.27)$$

onde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  é a métrica de Minkowski em 4 dimensões. A dependência do fator  $e^{-2A(y)}$  faz com que a métrica seja não fatorizada, ou seja, não pode ser expressa como um produto da métrica de Minkowski em 4 dimensões e uma variedade de dimensões extras. Para determinar a função  $A(y)$ , devemos calcular as equações de Einstein em 5 dimensões [24]:

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \kappa^2 T_{MN}, \quad (2.28)$$

onde os índices  $M$  e  $N$  variam de 1 à 5. A constante  $\kappa$  em cinco dimensões é definida como

$$\kappa = \left( \frac{1}{2m^3} \right)^{1/2}, \quad (2.29)$$

e o tensor de energia-momento é definido como

$$T_{MN} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{MN}}, \quad (2.30)$$

onde  $S_M$  é a ação correspondente à métrica.

Calculando as componentes  $M = N = 5$  do tensor de Einstein (Eq. (2.28)), obtemos [24],

$$G_{55} = 6A'^2 = -\frac{\Lambda}{2m^3}. \quad (2.31)$$

Observe que uma solução real para  $A$  só existe se a constante cosmológica em 5D for negativa, o que significa que o *bulk* é Anti de Sitter, denotado por  $AdS_5$ . A partir dessa equação, observamos que  $A$  é uma constante, denotada por  $k^2$  na forma

$$A'^2 = -\frac{\Lambda}{12m^3} \equiv k^2. \quad (2.32)$$

Integrando a equação anterior em relação a  $y$ , obtemos

$$A(y) = \pm ky. \quad (2.33)$$

Para conservar a invariância sob a transformação  $y \rightarrow -y$ , escolhe-se:

$$A(y) = k|y|. \quad (2.34)$$

Assim, a métrica no modelo de Randall-Sundrum é parametrizada por:

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.35)$$

com  $-L \leq y \leq L$ .

A componente  $\mu\nu$  das equações de Einstein em 5 dimensões é dada por [24]

$$G_{\mu\nu} = (6A'^2 - 3A'') g_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Da Eq. (2.34), temos que a primeira e a segunda derivada de  $A$ , respectivamente são dadas por

$$A' = \text{sgn}(y)k \quad \text{e} \quad A'' = 2k\delta(y). \quad (2.37)$$

O termo  $\text{sgn}(y)$  pode ser escrito como uma componente de funções *Heavisid*:  $\text{sgn} = \theta(y) - \theta(-y)$ . A função delta surgiu a partir da torção (kink) de  $A$  em  $y = 0$ . Da mesma forma, a torção em  $y = L$  dá origem a outra função delta e a expressão completa para  $A''$  é

$$A'' = 2k(\delta(y) - \delta(y - L)). \quad (2.38)$$

Utilizando esses resultados para a expressão do tensor de Einstein, dado pela Eq. (2.36), obtemos

$$G_{\mu\nu} = 6k^2 g_{\mu\nu} - 6k(\delta(y) - \delta(y - L))g_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

O primeiro termo é igual a componente  $\mu\nu$  do tensor momento-energia multiplicada pela constante em 5 dimensões de Newton,

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{2m^3} g_{\mu\nu} = 6k^2 g_{\mu\nu}. \quad (2.40)$$

Para o segundo termo, no entanto, deve-se levar em consideração as densidades de energia das próprias branas, chamadas tensões brana. Isto é feito adicionando um termo à ação para cada brana, correspondentes as tensões  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$S_1 = - \int d^4x \sqrt{-g_1} \lambda_1 = - \int d^4x dy \sqrt{-g} \lambda_1 \delta(y), \quad (2.41)$$

$$S_2 = - \int d^4x \sqrt{-g_2} \lambda_2 = - \int d^4x dy \sqrt{-g} \lambda_2 \delta(y - L). \quad (2.42)$$

Os termos  $g_1$  e  $g_2$  são os determinantes das métricas induzidas na primeira e na segunda brana, respectivamente. As métricas induzidas definem as distâncias ao longo das branas:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}^i dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu}(x, y_i) dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde  $i = 1, 2$ ,  $y_1 = 0$  e  $y_2 = L$ . Com a métrica dada pela Eq. (2.35),  $g_1 = g\delta(y)$  e  $g_2 = g\delta(y - L)$ , pois  $g_{55} = 1$ .

Para satisfazer as equações de Einstein, precisamos impor a relação

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = 12km^3. \quad (2.44)$$

Pela definição de  $k$ , temos ainda

$$\Lambda = -\frac{\lambda_1^2}{12m^3}. \quad (2.45)$$

Essas duas relações são consequências da exigência de que o Universo quadridimensional seja plano e estático.

É conveniente trabalhar com uma métrica conformalmente plana. Por esse motivo é definida uma nova variável  $z$  relacionada com a dimensão extra  $y$  através de [24]

$$dy^2 = e^{-2k|y|} dz^2. \quad (2.46)$$

A integração desta equação produz uma constante, que foi ajustada de modo a ter o valor zero de  $y$  correspondente ao valor zero de  $z$ . Assim, obtemos:

$$k|z| = e^{k|y|} - 1, \quad (2.47)$$

e ainda temos,

$$e^{-2k|y|} = \frac{1}{(k|z| + 1)^2}. \quad (2.48)$$

Dessa forma a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = \frac{1}{(k|z| + 1)^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (2.49)$$

Para enfatizar o fato de que a métrica é conformalmente plana, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$ds^2 = e^{-2A(z)} \eta_{MN} dx^M dx^N, \quad (2.50)$$

onde  $e^{-2A(z)} = \frac{1}{(k|z| + 1)^2}$ ,  $A(z) = \ln(k|z| + 1)$  e usamos a notação  $x^5 = z$ . Dessa forma, obtemos

$$A'(z) = \frac{\text{sgn}(z)k}{k|z| + 1} \quad e \quad (2.51a)$$

$$A''(z) = \frac{2k(\delta(z) - \delta(z - L_z))}{k|z| + 1} - \frac{k^2}{(k|z| + 1)^2}, \quad (2.51b)$$

onde usamos novamente o fato de que  $\text{sgn}' = 2\delta(z)$ .

Se alguma métrica  $g_{MN}$  é uma transformação conforme de outra métrica  $\tilde{g}_{MN}$ , como por exemplo

$$g_{MN} = e^{-2A} \tilde{g}_{MN}, \quad (2.52)$$

o respectivo tensor de Einstein está relacionado por [24]

$$G_{MN} = \tilde{G}_{MN} + (n-2) \left[ \tilde{\nabla}_M A \tilde{\nabla}_N A + \tilde{\nabla}_M \tilde{\nabla}_N A - \tilde{g}_{MN} \left( \tilde{\nabla}_R \tilde{\nabla}^R A - \frac{n-3}{2} \tilde{\nabla}_R A \tilde{\nabla}^R A \right) \right]. \quad (2.53)$$

Nesse caso a métrica perturbada tem a forma

$$g_{MN} = e^{-2A} (\eta_{MN} + h_{MN}), \quad (2.54)$$

onde  $|h_{MN}| \ll 1$ . Considerando os símbolos de Christoffel contido no interior das derivadas covariantes, para  $n = 5$ , obtemos

$$G_{MN} = \tilde{G}_{MN} + 3 \left[ \partial_M A \partial_N A + \partial_M \partial_N A - \tilde{\Gamma}_{MN}^R \partial_R A - \tilde{g}_{MN} \left( \partial_R \partial^R A - \tilde{\Gamma}_{RS}^R \partial^S A - \partial_R A \partial^R A \right) \right]. \quad (2.55)$$

Para ordem linear os símbolos de Christoffel são:

$$\tilde{\Gamma}_{MN}^R = \frac{1}{2} \left( \partial_M h_N^R + \partial_N h_M^R - \partial^R h_{MN} \right), \quad (2.56)$$

onde  $\eta^{MN}$  foi usado para subir os índices. É conveniente nesse tipo de cálculo trabalhar com *gauges* no qual as flutuações não tem qualquer componente com a dimensão extra. De modo que [25],

$$h_{M5} = 0, \quad \partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu = 0. \quad (2.57)$$

Com essa fixação de *gauge* o segundo símbolo de Christoffel desaparece, enquanto que o primeiro se reduz a  $-\partial^5 h_{MN}/2$ , dado que é contraído com  $\partial_R A$ . Assim, a expressão do tensor de Einstein para flutuações em torno da métrica plana fica [24]:

$$\tilde{G}_{MN} = -\frac{1}{2} \partial_R \partial^R h_{MN}. \quad (2.58)$$

A componente linear  $\mu\nu$  do tensor de Einstein é dado por:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial_R \partial^R h_{\mu\nu} + \frac{3}{2} h'_{\mu\nu} A' - 3(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(A'' - A'^2). \quad (2.59)$$

A componente  $\mu\nu$  do tensor de energia-momento multiplicado pela constante de Newton em 5 dimensões para a métrica perturbada é

$$\begin{aligned} \kappa^2 T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2m^3} \left[ -\Lambda - \lambda_1 e^A \delta(z) - \lambda_2 e^A \delta(z - L_z) \right] g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2m^3} \left[ -\Lambda e^{-2A} - \lambda_1 e^{-A} \delta(z) - \lambda_2 e^{-A} \delta(z - L_z) \right] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Utilizando as Eqs. (2.32) e (2.44), e as derivadas primeira e segunda de  $A(z)$ , dadas pelas Eqs. (2.51a) e (2.51b) respectivamente, podemos reescrever a equação anterior como [24]:

$$\begin{aligned} \kappa^2 T_{\mu\nu} &= \left[ 6k^2 e^{-2A} - 6k(\delta(z) - \delta(z - L_z)) e^{-A} \right] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= \left[ 6A'^2 - 3(A'' + A'^2) \right] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= (3A'^2 - 3A'') (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Substituindo os dois termos linearizados dados pelas Eqs. (2.59) e (2.61) na equação de Einstein, temos que a parte devido à perturbação é dada por

$$-\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{\mu\nu} + \frac{3}{2}A'h'_{\mu\nu} = 0. \quad (2.62)$$

Para resolver essa equação, vamos reescrevê-la na forma de uma equação de Schrödinger. Para isso, vamos reescrever  $h_{\mu\nu}$  na forma

$$h_{\mu\nu} \rightarrow e^{\alpha A} h_{\mu\nu}, \quad (2.63)$$

onde  $\alpha$  é uma constante. Assim, depois de alguma álgebra, as equações de Einstein podem ser escritas da seguinte forma:

$$-\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{\mu\nu} + \left(\frac{3}{2} - \alpha\right) A'h'_{\mu\nu} + \left[\left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2\right) A'^2 - \frac{1}{2}\alpha' A'\right] h_{\mu\nu} = 0. \quad (2.64)$$

Fazendo  $\alpha = 3/2$ , ficamos com a equação

$$-\frac{1}{2}\partial_R\partial^R h_{\mu\nu} + \left[\frac{9}{8}A'^2 - \frac{3}{4}A''\right] h_{\mu\nu} = 0. \quad (2.65)$$

Realizando uma composição Kaluza-Klein, obtemos

$$h_{\mu\nu}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\mu\nu}^n(x) \Psi_n(z), \quad (2.66)$$

onde  $h_{\mu\nu}^n \equiv \partial_\rho\partial^\rho h_{\mu\nu}^n = m_n^2 h_{\mu\nu}^n$ . Assim, temos que

$$-\Psi_n'' + \left[\frac{9}{4}A'^2(z) - \frac{3}{2}A''(z)\right] \Psi_n(z) = m_n^2 \Psi_n(z). \quad (2.67)$$

Essa é a equação de Schrödinger com potencial

$$V(z) = \left[\frac{9}{4}A'^2(z) - \frac{3}{2}A''(z)\right]. \quad (2.68)$$

O potencial dado pela equação anterior ainda pode ser escrito explicitamente, utilizando as Eqs. (2.51a) e (2.51b). Assim, obtemos

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{9}{4} \frac{k^2}{(k|z|+1)^2} - \frac{3}{2} \left( \frac{2k(\delta(z) - \delta(z-L_z))}{k|z|+1} - \frac{k^2}{(k|z|+1)^2} \right) \\ &= \frac{15}{4} \frac{k^2}{(k|z|+1)^2} - \frac{3k(\delta(z) - \delta(z-L_z))}{k|z|+1}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Esse potencial é comumente denominado na literatura de potencial vulcão, devido à sua forma (veja a Fig. 2.3) [24, 25, 26].

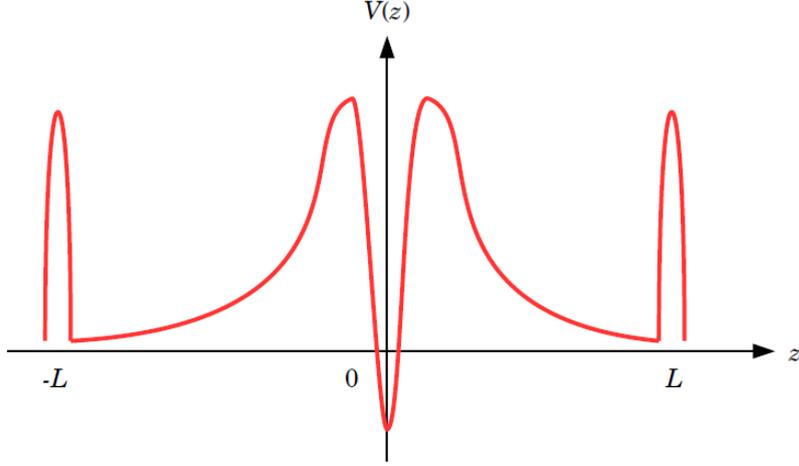


Figura 2.3: Potencial vulcão (extraído de [24]).

### 2.3.2 O Modelo RSII

Nesse modelo, o Problema de Hierarquia não é resolvido, porém fornece um quadro interessante para explorar os efeitos gravitacionais de uma dimensão extra. O modelo RSII consiste de uma única brana e como no modelo RSI o *bulk* tem uma geometria Anti de Sitter ( $AdS_5$ ), com simetria  $\mathbb{Z}_2$ . A coordenada  $y$  pode tender ao infinito, ou seja, ao contrário do modelo anterior, o modelo RSII não utiliza uma dimensão extra compacta. A métrica é a mesma que no modelo RSI [27, 28]:

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.70)$$

A vantagem do modelo RSII reside no fato de que a única brana, tem tensão positiva, ou seja, possui uma gravidade atrativa. Fazendo  $k = 1/l$  a métrica torna-se

$$ds^2 = e^{-2|y|/l} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.71)$$

onde  $l$  é o raio  $AdS$ . Foi mantido a simetria  $\mathbb{Z}_2$  através da brana, que reside em  $y = 0$ . A tensão na brana é contrária à constante cosmológica do *bulk* que nesse caso é dada por:

$$\Lambda_5 = -\frac{32\pi^2 \sigma^2 k^2}{3}. \quad (2.72)$$

Dessa forma a tensão é

$$\sigma = \frac{3}{4\pi l k}, \quad (2.73)$$

onde a constante cosmológica no *bulk* pode ser expressa em termos da curvatura de comprimento  $AdS_5$   $l$ ,

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{l}. \quad (2.74)$$

A tensão dada pela Eq. (2.73) assegura que a brana tem a geometria plana do espaço-tempo de Minkowski. Uma vez que a dimensão extra não é compacta, existe um contínuo de massas modo KK do gráviton 5D. No entanto, esses modos KK são suprimidos perto da brana pela curvatura do *bulk*, com o resultado de que a gravidade padrão 4D é recuperada à primeira ordem na brana [28].

# Capítulo 3

## Cosmologia de Branas/Paredes de Domínios

Neste capítulo, consideraremos a evolução cosmológica de uma 3-brana na presença de um campo escalar real. Utilizaremos um método para resolver equações de primeira ordem que satisfazem as equações de movimento através da escolha do potencial do campo escalar escrito em termos de um “superpotencial” de uma forma não convencional. No regime de baixas energias o potencial escalar convencional quadridimensional de uma teoria de supergravidade é recuperado [18].

Iniciaremos com uma abordagem da cosmologia em seus aspectos mais básicos. Veremos o modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), já que o princípio cosmológico desempenha um papel fundamental nesse modelo. A métrica de FRW é construída sobre a homogeneidade e isotropia do espaço. Depois discutiremos o formalismo de primeira ordem em cosmologia de branas e paredes de domínios a partir das soluções cosmológicas obtidas com o uso do formalismo de primeira ordem. Além disto, mostramos como utilizar um outro procedimento, conhecido como continuação analítica, para obter soluções que descrevem paredes de domínios a partir das soluções cosmológicas obtidas com o uso do formalismo de primeira ordem, estabelecendo assim, uma correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínios [29].

### 3.1 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

A Cosmologia Moderna está baseada em três pressupostos teóricos: a Teoria da Relatividade Geral, o Princípio Cosmológico e o Postulado de Weyl. Em larga escala, apenas a interação gravitacional se mostra relevante, por isso justifica-se a utilização da Teoria da Relatividade Geral. O Princípio Cosmológico foi enunciado pelo astrofísico britânico Edward Arthur Milne em 1933, que admite um Universo homogêneo e isotrópico em largas escalas. Segundo Milne diferentes observadores, que estejam participando da expansão cosmológica, devem ter a mesma interpretação sobre as propriedades do Universo [1]. O terceiro pressuposto da Cosmologia Moderna é conhecido como Postulado de Weyl. Em essência, este postulado considera que um fluido permeia o espaço-tempo e que as galáxias se movem nele como “partículas fundamentais”. Tal postulado requer que as geodésicas destas “partículas” sejam ortogonais a uma família de hipersuperfícies espaciais. Isto permite que tal substrato possa ser descrito como um fluido perfeito. Apesar do movimento das galáxias não seguirem este movimento exatamente, o postulado de Weyl reflete aproximadamente a situação atual do nosso Universo [29].

O modelo geométrico a ser considerado é uma generalização do espaço euclidiano, escrito em coordenadas esféricas e corrigido por um fator de escala [1]. A métrica que descreve o espaço-tempo em larga escala é a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, dada por [29]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (3.1)$$

onde  $a(t)$  é uma função que age como coeficiente da parte espacial da métrica, denominada *fator de escala* e  $k$  representa a curvatura da superfície de simultaneidade e define três geometrias: plana, esférica e hiperbólica.

A geometria plana, onde  $k = 0$ , é baseada nos axiomas da geometria euclidiana, sua linha geodésica é uma reta. O Universo descrito nessa geometria deve ter dimensão infinita e é por vezes denominado *Universo Plano*. Atuais pesquisas observacionais apontam essa geometria como a que mais se aproxima da geometria do Universo, diferentemente da geometria esférica que, viola os Postulados de Euclides. A geometria esférica descreve um *Universo Fechado*, com  $k = 1$ ; os ângulos internos de um triângulo somam mais que  $180^\circ$  e o comprimento de uma circunferência é menor que  $2\pi r$ . Linhas paralelas no equador se cruzam nos pólos e, embora de dimensão finita, esse tipo de Universo não tem limites

ou barreiras. Na geometria hiperbólica, onde  $k = -1$ , também não-euclidiana; as linhas paralelas sempre se distanciam umas das outras, caracterizando um *Universo Aberto* e de tamanho infinito, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que  $180^\circ$  e o comprimento de uma circunferência mede mais que  $2\pi r$  [1]. As prováveis geometrias do Universo são ilustradas na Fig. 3.1.

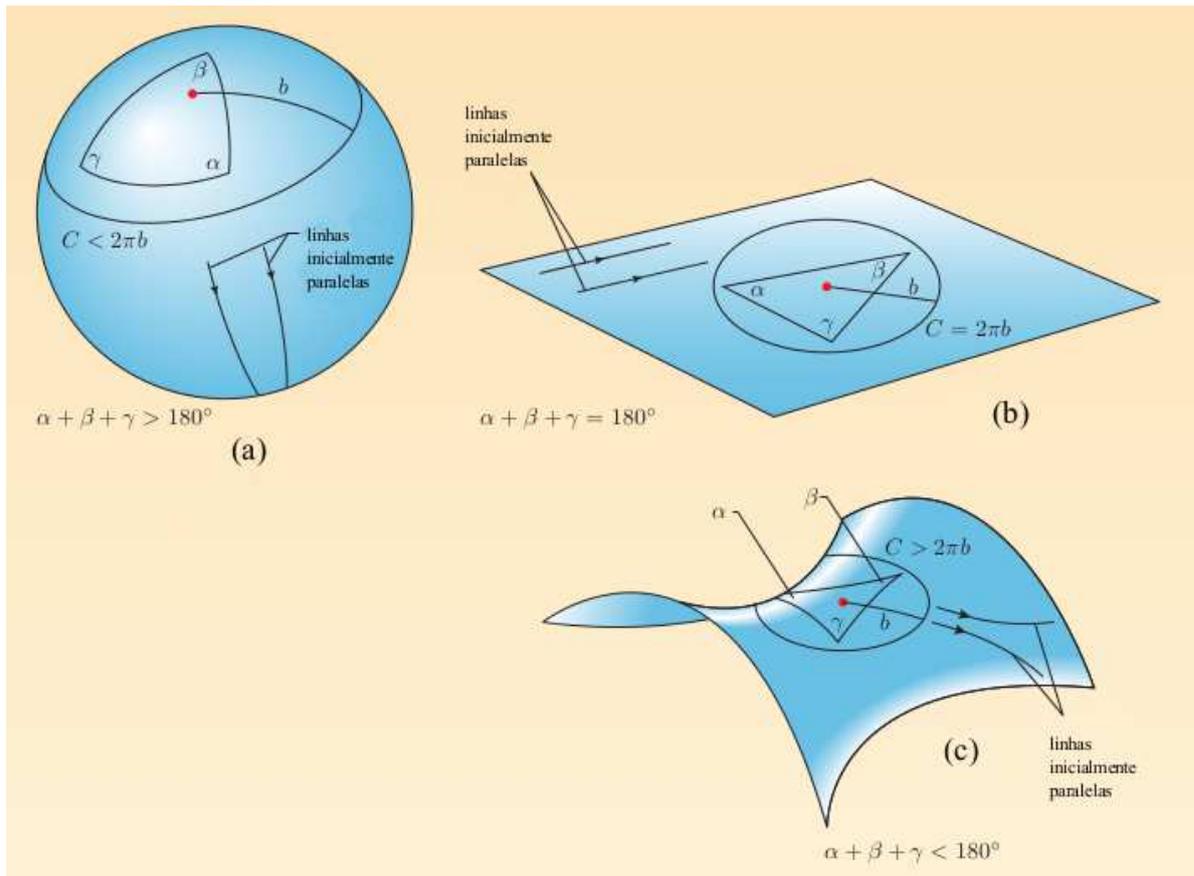


Figura 3.1: Curvatura da superfície de simultaneidade: (a) o modelo esférico tem  $k = 1$ , (b) o modelo plano tem  $k = 0$  e (c) o modelo hiperbólico tem  $k = -1$  (adaptado de [30]).

## 3.2 As Equações de Friedmann

Uma vez conhecida a métrica FRW; independente da curvatura  $k$ , existe apenas uma função do tempo (fator de escala) que determina a evolução dos modelos, agindo como coeficiente da parte espacial da métrica. Procuraremos estabelecer equações que nos permitam determinar a evolução desta função e conseqüentemente, a evolução dos modelos [1]. Essas equações são baseadas na Teoria da Relatividade Geral e foram apre-

sentadas pela primeira vez por Friedmann-Robertson-Walker em 1922 e obtidas a partir das equações de campo de Einstein para a métrica FRW. A equação de campo em sua forma mais geral, isto é, com o termo cosmológico ( $\Lambda g_{\mu\nu}$ ) é dada por [29]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente (os quais estão associados ao tensor de Riemann  $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$  que descreve a curvatura do espaço),  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento, que descreve a distribuição de energia do Universo,  $G$  é a constante gravitacional newtoniana e  $\Lambda$  é a constante cosmológica.

Podemos ainda reescrever tal equação simulando o termo cosmológico por meio de um tensor energia-momento de um fluido perfeito. Com isto temos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}), \quad (3.3)$$

onde  $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} = -\rho_{\Lambda}g_{\mu\nu}$ , sendo  $\rho_{\Lambda}$  a densidade de energia da constante cosmológica.

A partir de agora escreveremos então a equação de Einstein da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

admitindo que o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  inclui o termo cosmológico.

Do mesmo modo que as equações de Maxwell revelam como os campos elétrico e magnético respondem às cargas e correntes, a equação de campo de Einstein nos mostra como a métrica responde à distribuição de energia e momento. Tal equação foi uma enorme contribuição de Einstein, uma vez que ela possui um tensor  $T_{\mu\nu}$  que cumpre um papel de fonte da energia. Quanto aos tipos de fontes, destacam-se três como principais: Matéria, Radiação e Constante Cosmológica [29]. Tais fontes podem ser descritas como fluidos perfeitos. O tensor energia-momento que descreve um fluido perfeito pode ser escrito na forma [22]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} + pg_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

onde  $U_{\mu}$  é o campo de quadri-velocidade do fluido,  $\rho$  é a densidade de energia e  $p$  a pressão do fluido.

Sabemos que num sistema de coordenadas comóveis, as componentes da quadri-velocidade assumem os valores [29]

$$U^{\mu} = (1, 0, 0, 0). \quad (3.6)$$

Com isto, o tensor energia-momento torna-se:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}p & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

com o correspondente traço dado por

$$T = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p \quad (3.8)$$

Por outro lado, ao multiplicarmos a Equação de Einstein (3.4), pela métrica inversa  $g^{\mu\nu}$ , obtemos o seguinte resultado:

$$R = -8\pi GT, \quad (3.9)$$

onde  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  é o escalar de Ricci e  $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  é o traço do tensor energia-momento, dado pela Eq. (3.8). Substituindo o resultado anterior na Eq. (3.4), obtemos uma equação para o tensor de Ricci em termos do tensor energia-momento e seu traço,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right). \quad (3.10)$$

Esta equação é equivalente à Eq. (3.4), apenas escrita de forma ligeiramente diferente.

Podemos determinar as componentes do tensor de Ricci, dado pela Eq. (2.3), utilizando a métrica FRW para calcular o tensor de Riemann. A partir de tal procedimento se obtém as seguintes componentes não nulas do tensor de Ricci [29]:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.11a)$$

$$R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (3.11b)$$

onde  $i = 1, 2, 3$ .

Comparando agora a Eq. (3.10) com os respectivos índices 00 e  $ii$ , com as Eqs. (3.11), obtemos

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left( T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right), \quad (3.12a)$$

$$R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) = 8\pi G \left( T_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}T \right). \quad (3.12b)$$

Sustituindo os devidos valores das componentes do tensor energia-momento e seu traço na equação anterior, obtemos respectivamente as equações [29]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (3.13a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho + p). \quad (3.13b)$$

Dessa forma, das Eqs. (3.13) obtemos finalmente a chamada Equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.14)$$

Temos ainda que o *Parâmetro de Hubble*, é definido como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.15)$$

onde  $a = a(t)$ .

Para resolver a Eq. (3.14), precisamos de um vínculo entre a pressão  $p$  e a densidade de energia  $\rho$ . Para isso, consideraremos a componente zero da equação da conservação da energia, dada pela derivada covariante do tensor energia-momento [29, 31]:

$$\nabla_{\mu}T_0^{\mu} = 0 \quad (3.16a)$$

$$\partial_{\mu}T_0^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu}T_0^{\lambda} - \Gamma_{\mu 0}^{\lambda}T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (3.16b)$$

$$-\partial_0\rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (3.16c)$$

Além disto, sabemos que as fontes de energia consideradas podem ser tratadas como fluidos ideais, que se diferenciam por suas equações de estado. O vínculo entre pressão  $p$  e densidade de energia  $\rho$  é incluído como uma equação de estado do tipo

$$p = \omega\rho, \quad (3.17)$$

onde  $\omega$  é uma constante que pode assumir os seguintes valores para cada tipo de fluido [32]:

- (i) Para a matéria não-relativística ou “fria”:  $\omega = 0 \Rightarrow p = 0$ ;
- (ii) Para a radiação:  $\omega = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}\rho$ ;
- (iii) Para a constante cosmológica:  $\omega = -1 \Rightarrow p = -\rho$ .

Substituindo a equação de estado, dada pela Eq. (3.17), na Eq. (3.16c), obtemos

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega). \quad (3.18)$$

Integrando a equação anterior, encontramos

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (3.19)$$

admitindo  $a_0 = 1$  em  $t_0$ .

Podemos assim, encontrar o comportamento da densidade de energia para cada tipo de fonte:

(i) Para a matéria:  $\rho_M = \rho_{0M} a^{-3}$ ;

(ii) Para a radiação:  $\rho_R = \rho_{0R} a^{-4}$ ;

(iii) Para a constante cosmológica:  $\rho_\Lambda = \rho_{0\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ .

Utilizando as equações obtidas das densidades de energia das diferentes fontes, podemos reescrever a equação de Friedmann como [29]:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho_{0M} a^{-3} + \rho_{0R} a^{-4} + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.20)$$

### 3.3 Formalismo de Primeira Ordem

Consideraremos modelos do tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW) descritos por campos escalares reais regidos por uma dinâmica padrão e que preenchem o Universo como um fluido globalmente isotrópico, como em modelos de quintessência<sup>1</sup> [18, 33]. Modelos deste tipo são descritos pela ação padrão

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right), \quad (3.21)$$

onde  $\phi$  descreve um campo real,  $g$  é o determinante da métrica,  $R$  é o escalar de curvatura e usamos ainda  $4\pi G = 1$ . Utilizando o elemento de linha dado pela Eq. (3.1) e o tensor energia-momento dado por  $T_\nu^\mu = (-\rho, p, p, p)$ , juntamente com a Equação de Einstein (3.4), obtemos as seguintes equações [33]:

$$H^2 = 2\rho/3 - k/a^2, \quad (3.22a)$$

$$\ddot{a}/a = -(\rho + 3p)/3. \quad (3.22b)$$

---

<sup>1</sup>Quintessência é uma forma de energia dinâmica, que evolui com o tempo e depende do espaço, com pressão negativa o suficiente para acelerar a expansão do Universo. Enquanto a constante cosmológica é uma forma específica de energia (energia do vácuo), a quintessência se refere a uma extensa classe de possibilidades [34].

Essas equações são justamente as equações de Friedmann. A contante  $k$  assume os valores  $-1, 0$  e  $1$  de acordo com a geometria do espaço.

A equação de movimento do campo escalar pode ser obtida através da lagrangeana  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu)$ , cuja forma padrão é [18, 33, 35]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (3.23)$$

Sendo o tensor energia-momento do campo escalar descrito pela lagrangeana acima, dado por [29]

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.24)$$

Dessa forma, temos que

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.25)$$

O que nos permite determinar  $T_0^0$  e  $T_1^1$ , que estão relacionados respectivamente com a densidade de energia e a pressão do campo escalar. Dessa forma, obtemos

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.26a)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.26b)$$

Podemos então, utilizar a Equação da conservação da energia (Eq. (3.16c)) para determinar a equação de movimento do campo, dada por:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (3.27)$$

onde  $V_\phi = dV/d\phi$ .

Podemos portanto, reescrever a Eq. (3.22a) utilizando a Eq. (3.26a). Assim, a equação de Friedmann e sua respectiva derivada, são dadas por:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (3.28a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (3.28b)$$

As Eqs. (3.27) e (3.28) constituem as equações para resolver o problema especificado por um potencial  $V$ , o qual pode ser escrito como [29]

$$V = \frac{3}{2} H^2 + \frac{1}{2} \dot{H} + \frac{k}{a^2}. \quad (3.29)$$

Do ponto de vista padrão, uma vez que  $a = a(t)$  e  $\phi = \phi(t)$ , devemos ter  $H = H(t)$ , o que implica que devemos ter um potencial em função do tempo [33]. Mesmo utilizando o princípio cosmológico, do qual se obtém as equações de Friedmann, obtemos ainda equações diferenciais não-lineares, em geral, de difíceis resoluções. Além disto, considerando campos escalares no modelo, outras equações devem ser acrescentadas às equações de movimento para os diversos graus de liberdade introduzidos pelos campos escalares, dessa forma torna-se ainda mais difíceis as resoluções [29].

O ponto chave do formalismo de primeira ordem consiste em considerar o potencial  $V$  não como uma função do tempo  $t$ , como é esboçado no procedimento padrão e observado pela Eq. (3.29), mas sim como uma função do campo  $\phi$ , como pode ser constatado a partir da equação de movimento do campo (Eq. (3.27)). Esta consideração nos permite postular que a evolução do Universo regida por um campo escalar real pode ser determinada por uma função explícita do campo  $\phi$  [29, 33].

Deste modo, para manter uma equivalência entre este ponto de vista e o anterior, devemos considerar o parâmetro de Hubble não como uma função do tempo e sim como uma função do campo escalar. Para isso, introduzimos uma nova função  $W = W(\phi)$ , da qual se pode entender a dependência temporal do parâmetro de Hubble como uma função de  $W[\phi(t)]$ . Ou seja, escrevemos [29, 36]

$$H = W(\phi). \quad (3.30)$$

Consideremos um Universo com geometria plana, ou seja  $k = 0$ , por simplicidade. Dessa forma, as Eqs. (3.28) podem ser escritas como [29]

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V, \quad (3.31a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (3.31b)$$

Derivando a Eq. (3.30) e utilizando a Eq. (3.31b), obtemos uma outra equação, envolvendo o campo escalar na forma [36]

$$\dot{\phi} = -W_\phi, \quad (3.32)$$

que também é uma equação de primeira ordem. Deste modo, as Eqs. (3.30) e (3.32) nos permite escrever o potencial dado pela Eq. (3.29) como [36]

$$V = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (3.33)$$

Para o potencial acima, as soluções das equações de primeira ordem, dadas pelas Eqs. (3.30) e (3.32) também resolvem o conjunto de Eqs. (3.27) e (3.28).

### 3.4 Formalismo de Primeira Ordem em Cosmologia de Branas

Na seção anterior vimos o uso do formalismo de primeira ordem na cosmologia padrão com a presença de um campo escalar. Agora, estenderemos essa análise à equação de Friedmann modificada que aparece no estudo da cosmologia de branas de acordo com [1, 37].

O modelo de Randall-Sundrum do ponto de vista de cosmologia de branas é visto como o modelo mais simples, não trivial, de configuração de branas estáticas [1]. Neste caso, vamos considerar uma brana com tensão positiva, já que em primeira ordem é possível recuperar a gravidade ordinária.

A cosmologia de branas leva à equações de Friedmann muito diferente dos padrões [37]. A referida equação de Friedmann modificada possibilita o estudo da evolução cosmológica de uma 3-brana regida por um campo escalar real, imersa em um *bulk* 5D com constante cosmológica  $\Lambda_5$ . Tal equação é dada por [1, 29]:

$$H^2 = \left( \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{\kappa_5^4}{36} \sigma^2 \right) + \frac{\kappa_5^4}{18} \sigma \rho + \frac{\kappa_5^4}{36} \rho^2 + \frac{\mathcal{C}}{a^4} - \frac{k}{a_0^2}, \quad (3.34)$$

onde  $\sigma$  é a tensão na brana,  $\rho$  é a densidade de energia da matéria ordinária,  $k$  é a constante de curvatura e  $\mathcal{C}$  é uma constante de integração. O termo quadrático na densidade, fornece uma correção em regime de altas energias para a equação de Friedmann e surge devido a efeitos induzidos sobre a brana pela presença da constante cosmológica no *bulk*. O penúltimo termo se comporta como um componente de radiação e surge a partir da constante de integração  $\mathcal{C}$ .

Sendo a única contribuição do *bulk* dada através da densidade de energia do vácuo, a relação entre  $\Lambda_5$  e a tensão na brana  $\sigma$  é da forma

$$\Lambda_5 = -\frac{\kappa_5^4}{6} \sigma^2. \quad (3.35)$$

Desse modo, utilizando a equação anterior, a Eq. (3.34) torna-se

$$H^2 = \frac{\kappa_5^4}{36} \rho^2 + \frac{\kappa_5^4}{18} \rho \sigma + \frac{\mathcal{C}}{a^4} - \frac{k}{a_0^2}. \quad (3.36)$$

Temos ainda que  $\kappa_5^2 = \kappa_4^2/l$ , onde  $l$  é o comprimento *AdS*. No modelo Randall-Sundrum  $\Lambda_5 = -6/l$ , assim  $\sigma\kappa_5^4 = 6\kappa_4^2$ . Dessa forma a Eq. (3.36) pode ser escrita como

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3}\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{\mathcal{C}}{a^4} - \frac{k}{a_0^2}. \quad (3.37)$$

Utilizando a Eq. (3.35) e o fato de que  $\kappa_4^2 = 8\pi G \simeq \kappa_5^4\sigma/6 = 2$  e ainda considerando  $\mathcal{C} = 0$ , a Eq. (3.37) assume a forma

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) - \frac{k}{a_0^2}. \quad (3.38)$$

Esta última equação se assemelha à equação de Friedmann (3.14), diferindo por um termo quadrático na densidade. Para um regime de baixas energias, ou seja, nos dias atuais em que  $\rho^2/\sigma \ll 1$ , recuperamos o modelo cosmológico padrão quadridimensional, porém se esse termo se mostra significativo em um regime onde a densidade de energia é muito maior que a tensão na brana, de modo que  $\rho^2/\sigma \gg 1$ , a cosmologia se afasta do comportamento habitual de FRW [1, 29]. Considerando  $k = 0$  na Eq. (3.38), temos

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right). \quad (3.39)$$

Derivando a equação anterior, obtemos

$$2H\dot{H} = \frac{2}{3}\dot{\rho} \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{1}{3\sigma}\rho\dot{\rho}. \quad (3.40)$$

Utilizando a Eq. (3.40) e a equação de conservação de energia (Eq. (3.16c)), obtemos uma nova equação envolvendo pressão,

$$\dot{H} = -(\rho + p) \left(1 + \frac{\rho}{\sigma}\right). \quad (3.41)$$

Vamos ad admitir que a cosmologia na brana é conduzida por um campo escalar com uma densidade lagrangeana dada pela Eq. (3.23) (com  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Utilizando a densidade de energia e a pressão do campo escalar, dadas respectivamente pelas Eqs. (3.26a) e (3.26b) na Eq. de conservação de energia (3.16c), obtemos [29, 33]

$$\dot{\rho} = -3H\dot{\phi}^2. \quad (3.42)$$

Dessa forma, a equação que governa a dinâmica do campo escalar é dada pela Eq. (3.27). Consideraremos então, que  $\rho \equiv \rho(\phi)$  e, dessa forma  $\dot{\rho} = \rho'(\phi)\dot{\phi}$ , de modo que  $\rho' = d\rho/d\phi$ . Assim, a Eq. (3.42) pode ser escrita como

$$\dot{\phi} = -\frac{\rho'(\phi)}{3H} \quad (3.43)$$

Para chegarmos à equação de primeira ordem vamos utilizar o procedimento usado por [18]. Introduzimos uma função  $W = W(\phi)$  de tal modo que  $H = \dot{a}_0/a_0 = W(\phi)$ . Dessa forma podemos reescrever a Eq. (3.39) como

$$\rho^2 + 2\sigma\rho - 3\sigma W^2 = 0, \quad (3.44)$$

que tem por solução

$$\rho_{\pm} = -\sigma \pm \sigma \sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}}. \quad (3.45)$$

Consideraremos o sinal ‘+’ devido a condição de energia positiva. Derivando a equação anterior em relação a  $\phi$ , obtemos então

$$\rho'(\phi) = \frac{3WW_{\phi}}{\sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}}}, \quad (3.46)$$

onde a linha denota derivada em relação a  $\phi$ . Dessa forma a Eq. (3.43) pode ser escrita como uma equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{\phi} = -\frac{W_{\phi}}{\sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}}}. \quad (3.47)$$

Temos ainda que

$$H = W(\phi) = \frac{\dot{a}_0}{a_0}. \quad (3.48)$$

Pode-se verificar que as Equações de primeira ordem (3.47) e (3.48) satisfazem as Eqs. (3.27) e (3.41). Assim podemos utilizá-las para resolver o problema especificado por um potencial  $V(\phi)$ . Esse potencial pode ser encontrado substituindo as Eqs. (3.45) (sinal positivo) e (3.47) na Eq. (3.26a). Dessa forma o potencial é explicitado por [18]

$$V(\phi) = -\sigma + \sigma \sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}} - \frac{1}{2} \left( \frac{W_{\phi}^2}{1 + \frac{3W^2}{\sigma}} \right). \quad (3.49)$$

Para uma elevada tensão brana  $\sigma$ , de tal forma que  $W^2/\sigma \ll 1$ , pode-se expandir o potencial em uma série de potências como

$$V(\phi) = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_{\phi}^2 + \frac{3}{2}W_{\phi}^2 \frac{W^2}{\sigma} + \dots \quad (3.50)$$

Se considerarmos apenas os termos quadráticos da equação anterior recuperamos o potencial dado pela Eq. (3.33). Por outro lado, para uma pequena tensão na brana  $\sigma$ , tal que  $W^2/\sigma \gg 1$ , o potencial se aproxima de

$$V(\phi) \simeq \sigma \sqrt{\frac{3}{\sigma}} |W|. \quad (3.51)$$

Dessa forma, para uma pequena tensão na brana, a Equação de primeira ordem (3.47) pode ser escrita como

$$\dot{\phi} \simeq -\sqrt{\frac{\sigma}{3}} \frac{W_\phi}{|W|}. \quad (3.52)$$

Substituindo as Eqs. (3.51) e (3.52) na Equação de segunda ordem (3.27) encontra-se  $\ddot{\phi} \simeq 0$  para  $W > 0$ ; sendo  $\ddot{\phi} \simeq 0$ , devemos ter  $\dot{\phi} \simeq \text{const.}$  Dessa forma, é possível determinar a função  $W(\phi)$ , o campo escalar  $\phi(t)$  e o fator de escala  $a_0(t)$ , respectivamente dados por [18]

$$W(\phi) = V_0 e^{\alpha\phi}, \quad (3.53a)$$

$$\phi(t) = -\frac{\sigma}{3}\alpha(t - t_0), \quad (3.53b)$$

$$a_0(t) = a_0 \exp \left[ -\frac{V_0}{\alpha^2} \sqrt{\frac{3}{\sigma}} \exp \left( -\alpha^2 \sqrt{\frac{\sigma}{3}} (t - t_0) \right) \right], \quad (3.53c)$$

onde  $\alpha$  e  $V_0$  são constantes. Sendo  $V_0^2/\sigma \gg 1$  consistente com  $W^2/\sigma \gg 1$ .

Temos que  $V_0^2/\sigma$  conecta de forma assintótica as soluções do regime de altas energias com as soluções exatas do potencial (3.49) se o mesmo for escrito em termos de  $W$ , tal que

$$V(\phi) = -\sigma + \sigma \sqrt{1 + \frac{3V_0^2}{\sigma} e^{2\alpha\phi}} - \frac{1}{2} \left( \frac{V_0^2 \alpha^2 e^{2\alpha\phi}}{1 + \frac{3V_0^2}{\sigma} e^{2\alpha\phi}} \right). \quad (3.54)$$

Quando  $V_0^2/\sigma$  cresce o potencial do campo escalar se aproxima da forma dada pela Eq. (3.51). Por outro lado, quando  $V_0^2/\sigma$  diminui, o potencial do campo escalar (3.54), se aproxima da Eq. (3.33).

Podemos obter os limites assintóticos de um mesmo potencial escalar que governa a evolução da brana em ambos os regimes de alta e baixa energia com a Eq. (3.54), ou seja, quando  $V_0^2/\sigma$  varia obtemos potenciais que governam a dinâmica na brana em diferentes regimes de energias.

## 3.5 Correspondência entre Cosmologia de Branas e Paredes de Domínios

De acordo com a cosmologia padrão, o Universo iniciou a partir de um estado extremamente quente e denso, em que toda matéria e radiação estavam confinadas em um espaço infinitamente pequeno. Este modelo está de acordo com a ideia básica das Teorias de Grande Unificação (*Great Unification Theories-GUTs*), cujo objetivo é unificar as forças fundamentais da natureza: força gravitacional, força eletromagnética, força nuclear fraca e força nuclear forte. Nessas teorias, essas forças interagem entre si através de simetrias. A medida que o Universo expandiu, ele também esfriou, o que promoveu as condições necessárias para que algumas dessas simetrias fossem quebradas, o que deu origem ao que é denominado de defeitos topológicos [29, 34].

Defeitos topológicos podem ocorrer em um sistema físico, quando o distribuidor de vácuo do sistema possui uma topologia não trivial. Paredes de domínios correspondem a um tipo específico de defeito topológico [16]. As paredes de domínios são superfícies de interpolação entre regiões separadas do potencial escalar com diferentes valores esperados de vácuo de algum campo escalar [17].

Paredes de domínios induzem uma métrica no espaço-tempo. Esta métrica pode ser determinada a partir de algumas restrições simétricas consistentes com as propriedades do espaço-tempo induzido pelas paredes nas equações de Einstein [29]. A métrica do espaço-tempo pode ser escrita na forma [16]

$$ds^2 = A(w) \left\{ -dt^2 + dw^2 + S^2(t) \left[ (1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \right] \right\}, \quad (3.55)$$

de modo que as funções  $A(w)$  e  $S(t)$  também podem ser obtidas através das equações de Einstein.

Considerando paredes de domínios planas ( $k = 0$ ) e estáticas, a métrica dada pela Eq. (3.55), torna-se

$$ds^2 = A(w) \left\{ -dt^2 + dw^2 + dr^2 + rd\phi^2 \right\}, \quad (3.56)$$

onde  $S(t) = 1$  para  $k = 0$  [17].

Podemos ainda escrever a métrica (3.56) em coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = A(w) \left\{ -dt^2 + dw^2 + dx^2 + dz^2 \right\}. \quad (3.57)$$

Faremos então uma mudança de coordenadas na métrica através da relação

$$y = \int A^{1/2}(w)dw. \quad (3.58)$$

Sendo  $y = y(w)$  e  $w = w(y)$  e reescrevendo  $A^{1/2}(w) = a_0(y)$ , obtemos a métrica que representa soluções tipo paredes de domínios planas bidimensionais dentro de um espaço-tempo quadridimensional que se comporta assintoticamente tipo Minkowski ( $\mathbb{M}_4$ ) ou anti-de Sitter ( $AdS_4$ ):

$$ds^2 = dy^2 + a_0^2(y) (-dt^2 + dx^2 + dz^2). \quad (3.59)$$

Podemos encontrar soluções tipo paredes de domínios a partir de soluções cosmológicas, e vice-versa, através de um processo conhecido como continuação analítica [17, 18, 38]. Deste modo, vamos obter soluções que descrevam paredes de domínios que vivem numa 3-brana, e assim, consolidar uma correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínio. A continuação analítica é feita através da seguinte correspondência [18]:

$$W \rightarrow i\tilde{W}, \quad (3.60a)$$

$$H \rightarrow i\tilde{H}, \quad (3.60b)$$

$$t \rightarrow iy, \quad (3.60c)$$

$$y \rightarrow it. \quad (3.60d)$$

Dessa forma aplicando a continuação analítica às Eqs. (3.47) e (3.48), as mesmas tornam-se [18]

$$\phi' = \frac{\tilde{W}_\phi}{\sqrt{1 - \frac{3\tilde{W}^2}{\sigma}}}, \quad (3.61a)$$

$$\frac{a_0'}{a_0} = -\tilde{W}. \quad (3.61b)$$

Estas equações de primeira ordem satisfazem as Equações de segunda ordem (3.27) e (3.41). Dessa forma o potencial escalar, dado pela Eq. (3.49), com o processo de continuação analítica é dado por:

$$\tilde{V}(\phi) = -\sigma + \sigma \sqrt{1 - \frac{3\tilde{W}^2}{\sigma}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{W}_\phi^2}{1 - \frac{3\tilde{W}^2}{\sigma}} \right). \quad (3.62)$$

No regime de baixas energias, em que  $\tilde{W}^2/\sigma \ll 1$ , o potencial pode ser expandido em uma série de potências. Assim obtemos,

$$\tilde{V}(\phi) \simeq \frac{1}{2}\tilde{W}_\phi^2 - \frac{3}{2}\tilde{W}^2. \quad (3.63)$$

Podemos observar que as funções  $W$  e  $\tilde{W}$  estão relacionadas por  $W^2 \longleftrightarrow -\tilde{W}^2$  e  $W_\phi^2 \longleftrightarrow -\tilde{W}_\phi^2$ . Notamos ainda que no limite de baixas energias, em que  $W^2/\sigma \ll 1$  ou  $\tilde{W}^2/\sigma \ll 1$ , os potenciais, dados pelas Eqs. (3.33) e (3.63), estão relacionados por  $V(\phi) \longleftrightarrow -\tilde{V}(\phi)$  na brana, porém para os potenciais exatos, de acordo com as Eqs. (3.49) e (3.62) isto não se verifica. Para que essa identificação seja possível, devemos fazer  $\sigma = -\sigma$ , o que exigiria outra brana. Isso seria possível apenas entre branas com tensões opostas. Visto que os potenciais exatos abrangem ambos os regimes de baixas e altas energias, considere os seguintes argumentos: em um regime de altas energias, ocorre uma grande quantidade de branas ( $\sigma$ ) e antibranas ( $-\sigma$ ), de tal forma que a correspondência para um par  $(-\sigma, \sigma)$  deve ser dada para um potencial exato  $V(\phi)$  em uma brana e  $-\tilde{V}(\phi)$  na outra. No regime de baixas energias pode ocorrer uma assimetria no número de branas e antibranas, já que as mesmas tendem a aniquilar-se nesse regime. Isso favorece a correspondência em apenas uma brana  $\sigma$  (ou  $-\sigma$ ), no entanto essa correspondência é exatamente a identificação para potenciais exatos no limite de baixas energias [18].

Para paredes de domínios, de acordo com a Eq. (3.62), a função  $\tilde{W}$  deve ser limitada, ou seja,  $|\tilde{W}| \leq \sqrt{\sigma/3}$ . Assim, no vácuo  $\tilde{W}_\phi = 0$ , o potencial só pode assumir os valores  $\tilde{V}(\phi_{vac}) < 0$  (espaço-tempo  $AdS_4$ ) ou  $\tilde{V}(\phi_{vac}) = 0$  (espaço-tempo  $M_4$ ). Essa restrição nos possibilita reduzir o número de funções para  $\tilde{W}$ , de tal forma que sejam integráveis analiticamente.

### 3.5.1 Exemplos de Paredes de Domínios

Vejamos alguns exemplos de soluções tipo parede de domínio com o uso do formalismo de primeira ordem e o processo de continuação analítica. Para isto, consideremos como primeiro exemplo o caso em que a função  $\tilde{W}$  tem a forma

$$\tilde{W}(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \text{sen}(\phi). \quad (3.64)$$

Substituindo a função  $\tilde{W}(\phi)$  nas Equações de primeira ordem (3.61a) e (3.61b) e integrando-as, obtemos

$$\phi = \sqrt{\frac{\sigma}{3}} (y - y_0), \quad (3.65)$$

e o fator de empenamento

$$a_0(y) = \exp \left[ \cos \sqrt{\frac{\sigma}{3}} (y - y_0) \right]. \quad (3.66)$$

A solução para o fator de empenamento é representado na Fig. 3.2. Note que tal solução representa um grupo de paredes de domínios aproximadamente centradas em torno de  $y_0 = 10, 20, \dots$

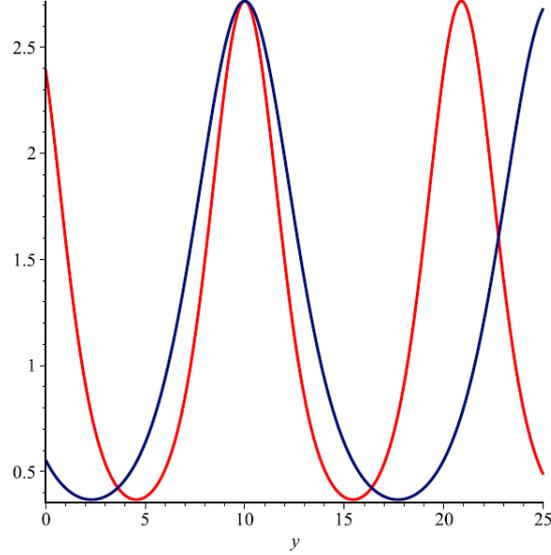


Figura 3.2: O fator de empenamento  $a(y)$  para  $\sigma = 1/2$  (linha azul) e para  $\sigma = 1$  (linha vermelha).

Consideremos outro exemplo, em que a função  $\tilde{W}$  é dada por

$$\tilde{W}(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \tanh(\phi). \quad (3.67)$$

Nesse caso, as soluções para as Eqs. (3.61a) e (3.61b) são

$$\phi = \pm \arcsen \left( \sqrt{\frac{\sigma}{3}} (y - y_0) \right), \quad (3.68)$$

e

$$a_{0\mp} = \exp \left[ \mp \sqrt{\frac{\sigma}{3}} (y - y_0)^2 + 1 \right]. \quad (3.69)$$

O par kink/anti-kink, dado pela Eq. (3.68) conecta o mesmo vácuo. Apesar disto, a Eq. (3.69) tem comportamento assintótico diferente para  $a_{0+}$  (que diverge) e  $a_{0-}$  (que não diverge). Veja a Fig. 3.3.

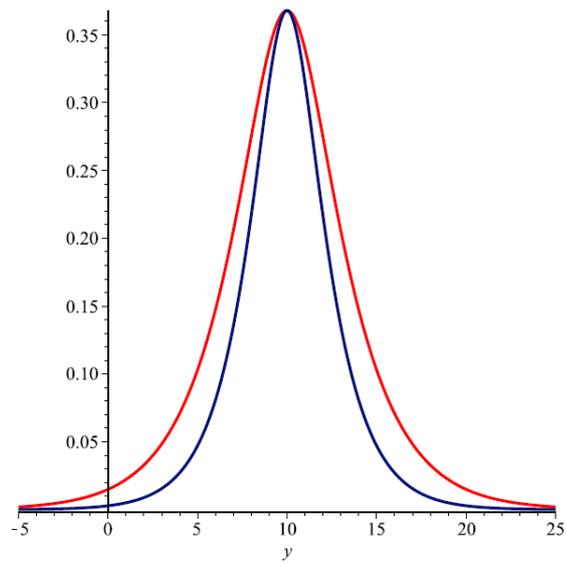


Figura 3.3: O fator de empenamento  $a_-$  para  $\sigma = 1/2$  (linha vermelha) e para  $\sigma = 1$  (linha azul).

# Capítulo 4

## Localização de Gravidade em Branas 4D

Discutimos anteriormente os modelos de dimensões extras e vimos que a localização da gravidade em uma brana (membrana) [14] surgiu como uma alternativa à compactificação envolvendo uma dimensão extra infinita [39]. Os modelos Randall-Sundrum, especificamente o modelo RSII, explora os efeitos da gravidade em uma 3-brana imersa em um *bulk* Anti de Sitter ( $AdS_5$ ). Propostas que parte ou todas as interações gravitacionais são resultados de grávitons massivos tem sido enfatizadas [40]. No cenário Randall-Sundrum, existem os grávitons sem massa (modos 0) e os grávitons massivos (modos de Kaluza-Klein). O gráviton sem massa produz a gravidade newtoniana sobre a 3-brana e os modos Kaluza-Klein fornecem a correção da gravidade newtoniana [41]. A condição de localização de gravidade em branas depende de sua geometria. Para uma brana  $M_4$ , o espectro é caracterizado por um modo zero seguido de um contínuo de modos KK, estes modos massivos são suprimidos. O modo zero é localizado na brana se a função de onda for normalizável. A condição de localização depende do comportamento da métrica em todo o espaço, outras alternativas podem ser consideradas para que esta condição dependa apenas de propriedades locais do espaço [3].

Na primeira parte deste capítulo analisaremos a localização da gravidade, porém diferentemente do que foi feito no modelo de Randall-Sundrum, faremos uma abordagem em 4 dimensões, cujo principal objetivo é analisar as flutuações da gravidade em defeitos topológicos, tipo parede de domínio, na brana. Dessa forma estudaremos as flutuações da métrica que representa soluções no plano bidimensional dentro de paredes de domí-

nios assintoticamente quadridimensional no espaço de Minkowski ( $\mathbb{M}_4$ ) ou anti de Sitter ( $AdS_4$ ) [18]. Com isto, obtemos o potencial gravitacional referente à parede de domínio na 3-brana e observamos que diferentemente do que ocorre para um único campo gravitacional, no caso de cosmologia de branas, onde o campo escalar cria uma parede de domínio, o potencial gravitacional não recai no limite newtoniano (veja o Apêndice A) e sim em um potencial tipo Schrödinger. Ainda, com o exposto no capítulo anterior em que demonstramos que soluções cosmológicas podem ser aplicadas em soluções tipo paredes de domínios e vice-versa com o uso do formalismo de primeira ordem e do processo de continuação analítica, calculamos o potencial para a métrica que representa as flutuações gravitacionais em uma parede de domínio imersa em uma 3-brana utilizando os fatores de empenamento ou *warp factors* para os exemplos considerados anteriormente. Por fim, calculamos o modo zero da equação tipo Schrödinger obtida a partir da linearização da gravidade descrita neste capítulo.

## 4.1 Linearização da Gravidade

No cenário RS as branas e suas generalizações estão incluídas como fontes fixas semelhantes a pontos externos nas dimensões extras, sem nenhuma dinâmica para produzi-las. Pode-se encontrar soluções para a Equação de Einstein, com um único campo escalar acoplado, onde o campo escalar cria uma parede de domínio. Tais soluções de parede de domínio são obtidas se o potencial escalar se origina de um superpotencial, o que não implica necessariamente que a teoria é incorporável em uma teoria de supergravidade [25].

Nesta seção, vamos obter uma equação para as flutuações gravitacionais quadridimensionais descritas por uma geometria conformalmente plana. Nós estudaremos as flutuações da métrica (Eq. (3.59)), que representa soluções no plano bidimensional dentro de uma parede de domínio assintoticamente quadridimensional no espaço de Minkowski ( $\mathbb{M}_4$ ) ou anti de Sitter ( $dS_4$ ), dada por [18]:

$$ds_4^2 = dy^2 + a_0^2(y) (-dt^2 + dx^2 + dz^2). \quad (4.1)$$

Vamos reescrever a Eq. (4.1) na forma

$$ds_4^2 = a_0^2(y) (-dt^2 + dx^2 + a_0^{-2} dy^2 + dz^2), \quad (4.2)$$

e fazamos uma mudança de coordenadas, tal que

$$a_0^{-2}(y)dy^2 = dw^2. \quad (4.3)$$

Assim, a Eq. (4.2) torna-se

$$ds_4^2 = a_0^2(w) (-dt^2 + dx^2 + dw^2 + dz^2) = a_0^2(w)\eta_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski com assinatura  $(-, +, +, +)$  e  $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$ .

O campo gravitacional estático nos permite decompor a métrica de Minkowski plana, dada pela Eq. (4.4), na forma de uma pequena perturbação [25]:

$$ds_4^2 = [a_0^2(w)\eta_{ab} + h_{ab}] dx^a dx^b - dw^i dw^i. \quad (4.5)$$

A flutuação do tensor de Ricci (Eq. (2.3)) sobre o espaço-tempo plano, utilizando a métrica perturbada (4.5), com o auxílio da Eq. (2.4) torna-se

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\nu (a_0^2(w)\eta^{\lambda\rho} + h^{\lambda\rho}) [\partial_\mu (a_0^2(w)\eta_{\lambda\rho} + h_{\lambda\rho}) + \partial_\lambda (a_0^2(w)\eta_{\mu\rho} + h_{\mu\rho}) \right. \\ \left. - \partial_\rho (a_0^2(w)\eta_{\mu\lambda} + h_{\mu\lambda}) \right] - \partial_\lambda (a_0^2(w)\eta^{\lambda\rho} + h^{\lambda\rho}) [\partial_\mu (a_0^2(w)\eta_{\nu\rho} + h_{\nu\rho}) \\ \left. + \partial_\nu (a_0^2(w)\eta_{\mu\rho} + h_{\mu\rho}) - \partial_\rho (a_0^2(w)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \right] \right\}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

onde o terceiro e quarto termos são da forma  $\Gamma^2$  e desde que  $\Gamma$  é de primeira ordem na perturbação da métrica, esses contribuem apenas em segunda ordem e portanto, podem ser negligenciados. Estamos considerando apenas os termos referentes à perturbação linear, os termos do tensor de Ricci, assim como os outros termos da equação de campo de Einstein referentes à métrica não perturbada (4.1), são demonstrados no Apêndice B.

Será conveniente definir uma flutuação  $h_{\mu\nu}$ , de forma que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Vamos utilizar para essas flutuações, os *gauges* dados pelas Eqs. (2.57), isto é,  $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$  e  $h^\mu_\mu = 0$ . Assim, desconsiderando termos em segunda ordem de  $h$ , a Eq. (4.6) torna-se

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} [\partial_\lambda a_0^2 \partial_\rho h_{\mu\nu} + a_0^2 \partial_\lambda \partial_\rho h_{\mu\nu}], \quad (4.7)$$

em que os índices são levantados e abaixados com  $\eta_{\mu\nu}$ .

Devemos ainda calcular o escalar de Ricci, cuja definição é dada por [22]:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (4.8)$$

Dessa forma, utilizando a flutuação do tensor de Ricci, dada pela Eq. (4.7), e a métrica perturbada (4.5), obtemos que a flutuação do escalar de Ricci é nula, de acordo com

$$\delta R = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} (a_0^2\eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}) [\partial_\lambda a_0^2\partial_\rho h_{\alpha\beta} + a_0^2\partial_\lambda\partial_\rho h_{\alpha\beta}] = 0, \quad (4.9)$$

onde novamente, os índices são levantados e abaixados com  $\eta_{\alpha\beta}$ .

Assim, substituindo a Eq. (4.7) e a flutuação do escalar de Ricci, dada pela Eq. (4.9), na equação de campo de Einstein [22]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (4.10)$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} (\partial_\lambda a_0^2\partial_\rho h_{\mu\nu} + a_0^2\partial_\lambda\partial_\rho h_{\mu\nu}) = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

Utilizando ainda  $\eta^{\lambda\rho}$  para subir índices, podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{\partial^\rho a_0}{a_0}\partial_\rho h_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{a_0^2}\delta T_{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

onde  $\square = \square_{(4)} = \partial^\rho\partial_\rho = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} = \square_3 + \frac{\partial^2}{\partial w^2}$ .

Faremos então uma mudança de variável, da seguinte forma:

$$a_0^2(w) = e^{-A(w)} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0'}{a_0} = -\frac{1}{2}A', \quad (4.13)$$

onde, por simplificação  $a_0' = a_0'(w)$ ,  $a_0 = a_0(w)$  e  $A' = A'(w)$ . Temos que a linha denota derivada em relação a  $w$ .

Dessa forma, fazendo a mudança de variável, dada pela Eq. (4.13), na Eq. (4.12) obtemos

$$\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}A'\partial_\rho h_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{a_0^2}\delta T_{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

Se considerarmos que o campo gravitacional esteja se propagando no vácuo, o tensor de energia-momento será nulo [42]. Dessa forma, a equação anterior torna-se

$$-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}A'\partial_\rho h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.15)$$

Procuraremos então, soluções para a forma em que

$$h_{\mu\nu} = \Phi(x^a)\Psi(w); \quad a = 0, 1, 2. \quad (4.16)$$

Dessa forma, substituindo a equação anterior na Eq. (4.15), obtemos

$$-\frac{1}{2} \left( \square_{(3)} \Phi(x^a) \Psi(w) + \Phi(x^a) \frac{\partial^2 \Psi(w)}{\partial w^2} \right) + \frac{1}{2} A' \Phi(x^a) \Psi'(w) = 0. \quad (4.17)$$

De acordo com a equação de Klein-Gordon:

$$\square_{(3)} \Psi(x^a) = m^2 \Psi(x^a), \quad (4.18)$$

onde  $m$  é a massa para flutuações de Kaluza-Klein. Assim, a Eq. (4.17) torna-se

$$-\frac{d^2 \Psi}{dw^2} + A'(w) \Psi'(w) = m^2 \Psi(w). \quad (4.19)$$

Faremos uma transformação conforme de acordo com

$$\Psi(w) \rightarrow \tilde{\Psi}(w) e^{\frac{1}{2} A(w)}. \quad (4.20)$$

Assim, substituindo a nova transformação de variável, dada pela equação anterior na Eq. (4.19) e realizando um pouco de álgebra, obtemos

$$-\tilde{\Psi}''(w) + \left[ \frac{1}{4} A'^2(w) - \frac{1}{2} A''(w) \right] \tilde{\Psi}(w) = m^2 \tilde{\Psi}(w). \quad (4.21)$$

A equação anterior tem a forma de uma equação do tipo Schrödinger para a função de onda  $\tilde{\Psi}(w)$ , “energia”  $m^2$  e potencial [25]

$$V(w) = \frac{1}{4} A'^2(w) - \frac{1}{2} A''(w). \quad (4.22)$$

Observe que o potencial dado pela Eq. (4.22), é semelhante ao potencial do modelo Randall-Sundrum, dado pela Eq. (2.68), diferenciando-se pelos coeficientes, como já esperado, pois no modelo RS, o potencial é obtido para uma teoria de 5 dimensões e aqui o potencial é encontrado para um teoria quadridimensional.

Podemos ainda reescrever o potencial em função do fator de empenamento através da Eq. (4.13). Assim, obtemos o potencial na forma

$$V(w) = \frac{a_0''(w)}{a_0(w)}. \quad (4.23)$$

### 4.1.1 Exemplos de Potenciais para Paredes de Domínios

No capítulo anterior, vimos o formalismo de primeira ordem e o processo de continuação analítica em cosmologia de branas e sua correspondência com defeitos topológicos, tipo paredes de domínios. Agora podemos calcular o potencial gravitacional, dado pela Eq. (4.23), para alguns casos específicos. Com esse objetivo, utilizaremos os fatores de empenamento (3.66) e (3.69) da métrica que descreve soluções tipo paredes de domínios, dada pela Eq. (3.59). Esses fatores estão em função da dimensão extra  $y$  e obtivemos o potencial em termos de  $w$ . Dessa forma, para obtermos o potencial gravitacional em termos da nova coordenada  $w$ , devemos primeiramente expressar os fatores de empenamento (3.66) e (3.69) em função de  $w$ . Para isso faremos uso da Equação (4.3). Assim, considerando primeiramente o fator de empenamento dado pela Eq. (3.66), podemos escrever a Equação (4.3) da seguinte forma:

$$w = \int \exp \left[ -\cos \left( \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) \right) \right] dy. \quad (4.24)$$

Dessa forma, considerando-se  $y_0 = 0$ , obtemos

$$y = we, \quad (4.25)$$

onde  $e$  é o número neperiano.

Substituindo a Equação (4.25) na Eq. (3.66), o fator de empenamento em termos de  $w$  é dado por

$$a_0(w) = \exp \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{\sigma}{3}}we \right) \right]. \quad (4.26)$$

Utilizando a equação anterior, obtemos o potencial gravitacional, dado pela Eq. (4.23), na forma

$$V(w) = -\frac{\sigma}{3}e^2 \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{\sigma}{3}}we \right)^2 + \cos \left( \sqrt{\frac{\sigma}{3}}we \right) - 1 \right]. \quad (4.27)$$

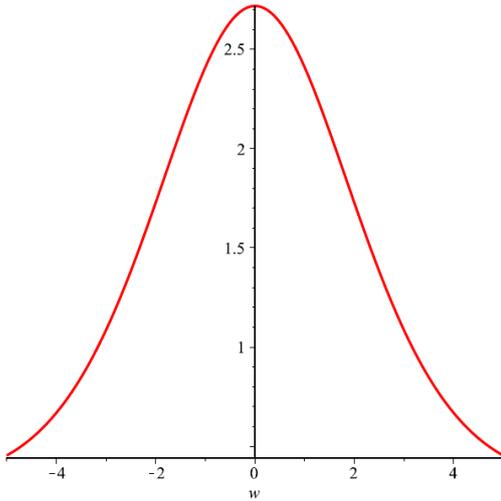


Figura 4.1: O fator de empenamento dado pela Eq. (4.26), para  $\sigma = 0.1$ .

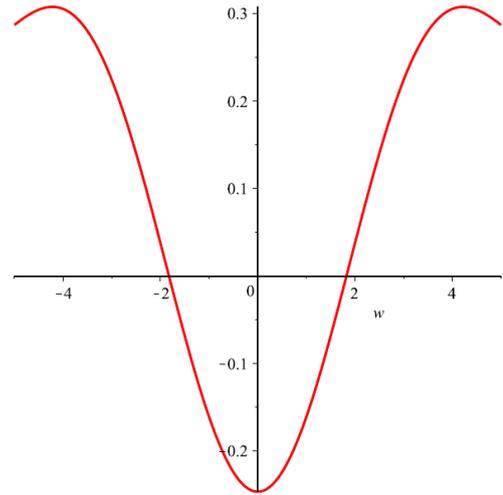


Figura 4.2: O potencial gravitacional dado pela Eq. (4.27), para  $\sigma = 0.1$ .

Analogamente, calcularemos o fator de empenamento em termos de  $w$  para  $a_-$  da Equação (3.69), o qual não diverge. Dessa forma, devemos dividir tal procedimento em duas soluções: uma solução para o limite em que  $\sigma \ll 1$  e outra solução para o caso em que  $\sigma \gg 1$ .

Consideraremos primeiro o limite em que  $\sigma \ll 1$  e  $y_0 = 0$ . Assim, através da Eq. (4.3), obtemos a relação entre  $y$  e  $w$  para esse caso, relação esta dada por  $y = w/e$ . Substituindo então, esta relação na Eq. (3.69) obtemos o fator de empenamento para a referida equação em termos de  $w$ :

$$a_{0-} = \exp \left[ -\sqrt{\frac{\sigma w^2}{3 e^2} + 1} \right]. \quad (4.28)$$

Assim, utilizando o fator de empenamento dado pela equação acima, encontramos o potencial gravitacional, dado pela Eq. (4.23) na forma

$$V(w)_- = \frac{\sigma (\sigma w^2 e^{-2} \sqrt{3\sigma w^2 e^{-2} + 9} - 9)}{3e^2 (\sigma w^2 e^{-2} + 3) \sqrt{3\sigma w^2 e^{-2} + 9}}. \quad (4.29)$$

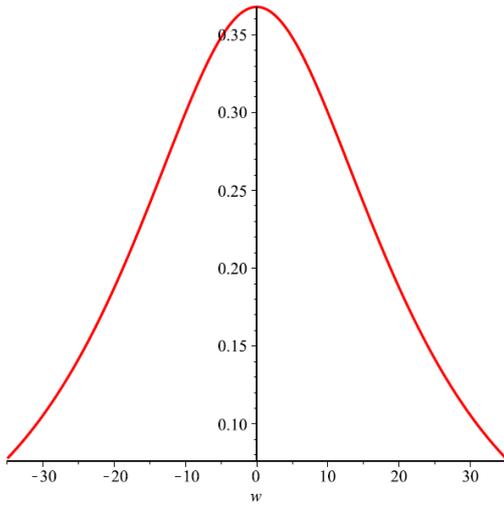


Figura 4.3: O fator de empenamento dado pela Eq. (4.28), para  $\sigma = 0.1$ .

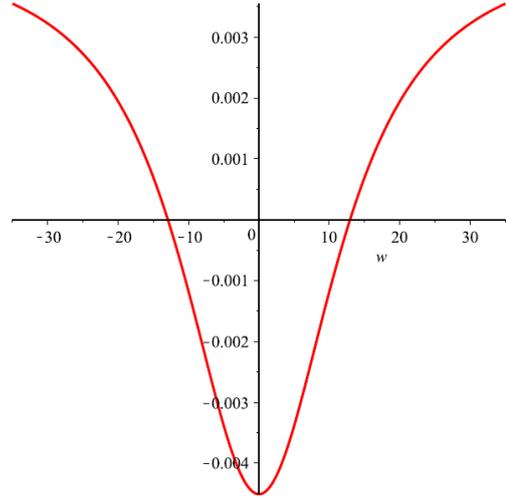


Figura 4.4: O potencial gravitacional dado pela Eq. (4.29), para  $\sigma = 0.1$ .

Calculemos agora o potencial para o limite em que  $\sigma \gg 1$ . Neste caso, temos duas soluções, uma para  $y \leq 0$  e outra para  $y > 0$ :

$$w = \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{\sigma}} e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{3}} y} + c_1; & y \leq 0, \\ \sqrt{\frac{3}{\sigma}} e^{\sqrt{\frac{\sigma}{3}} y} + c_2; & y > 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

Onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração. Consideramos ainda  $y_0 = 0$ .

Podemos unir as soluções da Eq. (4.30) e encontrar uma única solução para  $y$  na forma

$$|y| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\sigma}} \ln \left[ \frac{\sigma}{3} (|w| + \gamma)^2 \right], \quad (4.31)$$

onde as constantes  $c_1$  e  $c_2$  estão incluídas em  $\gamma$ .

Dessa forma, substituindo a equação anterior na Eq. (3.69) no limite em que  $\sigma \gg 1$ , obtemos o fator de empenamento em termos de  $w$ . Considerando  $y_0 = 0$ , o fator de empenamento é dado por:

$$a_{0-} = \sqrt{\frac{3}{\sigma}} \frac{1}{(|w| + \gamma)}, \quad (4.32)$$

e o potencial gravitacional dado pela Eq. (4.23) para esse fator de empenamento é

$$V(w)_- = \frac{2}{(|w| + \gamma)^2} - \frac{2\gamma\delta(w)}{(|w| + \gamma)^2}. \quad (4.33)$$

O potencial gravitacional quadridimensional, dado pela Eq. (4.33), é um potencial de Schrödinger do “tipo vulcão” [24, 25, 26]. Esse potencial é semelhante ao potencial gravitacional do modelo Randall-Sundrum em 5 dimensões, dado pela Eq. (2.69). Podemos escrever uma representação da função  $\delta(w)$  (entre as várias possíveis) para plotarmos o gráfico para o potencial vulcão, o qual é ilustrado na Fig 4.6. Escolhemos então uma função gaussiana que no limite em que o parâmetro  $b \rightarrow 0$  a função torna-se novamente  $\delta(w)$ . Dessa forma o potencial gravitacional, dado pela Eq. (4.33) torna-se:

$$V(w)_- = \frac{2}{(|w| + \gamma)^2} - \frac{2 e^{-\frac{w^2}{b^2}}}{\gamma \sqrt{\pi} b}. \quad (4.34)$$

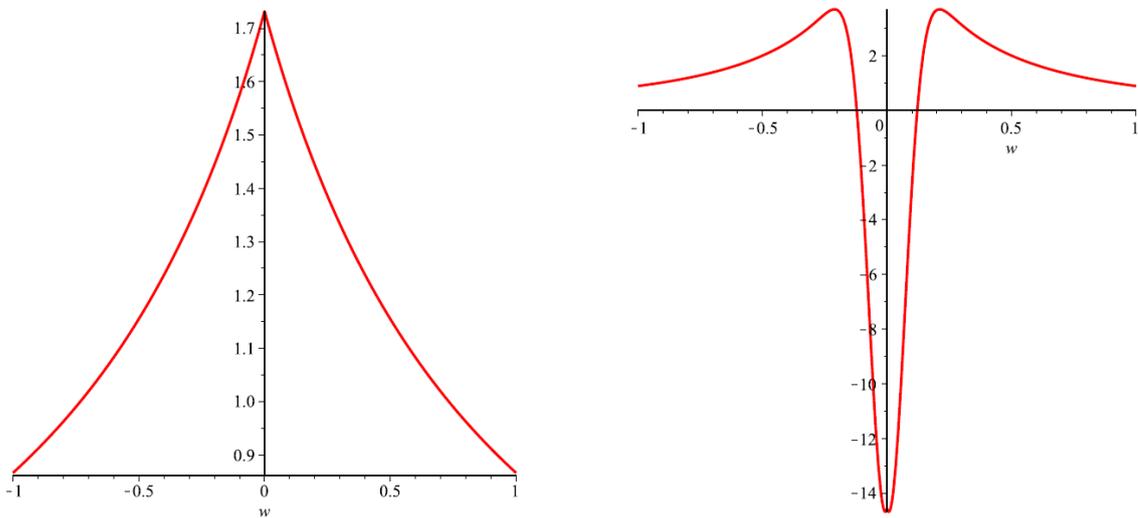


Figura 4.5: O fator de empenamento dado pela Eq. (4.32), para  $\sigma = 1$  e  $\gamma = 1$ .

Figura 4.6: O potencial gravitacional dado pela Eq. (4.33), para  $b = 0.1$  e  $\gamma = 1/2$ .

## 4.2 O Gráviton Quadridimensional

A questão da existência da gravidade localizada na vizinhança à brana torna-se dependente de propriedades do sistema mecânico quântico descrito pela Equação tipo Schrödinger (Eq. (4.21)). Para se ter uma teoria gravitacional quadridimensional eficaz, é imprescindível que a Eq. (4.21) admita um estado fundamental de energia zero normalizável. Com o intuito de encontrar este estado de energia zero, generalizamos a observação

para dimensões mais elevadas. Dessa forma, a Eq. (4.21) pode ser reescrita como um problema supersimétrico da mecânica quântica na forma [25]

$$Q^\dagger \cdot Q \tilde{\Psi}(w) = m^2 \tilde{\Psi}(w), \quad (4.35)$$

ou seja,

$$Q^\dagger \cdot Q = \mathcal{H} = -\frac{d^2}{dw^2} + V(w), \quad (4.36)$$

onde o  $n$ -vetor de carga supersimétrica é dado por

$$Q = \frac{d}{dw} + \frac{1}{2}A'(w) \quad \text{e} \quad Q^\dagger = -\frac{d}{dw} + \frac{1}{2}A'(w). \quad (4.37)$$

Assim, utilizando a equação anterior, a função de onda de energia zero, aniquilado por  $Q$  é dada por

$$\hat{\Psi}_0(w) = e^{-\frac{1}{2}A(w)}. \quad (4.38)$$

Uma vez que  $Q^\dagger \cdot Q$  é um operador hermitiano positivo, não existe modos gávitons com energia normalizada negativa. A condição para que haja gravidade quadridimensional localizada é que  $\hat{\Psi}_0(w)$  seja normalizável, ou seja:

$$\int d^4w e^{-\frac{1}{2}A(w)} < \infty. \quad (4.39)$$

A normalização da função de onda do estado fundamental é equivalente a condição de acoplamento gravitacional em quatro dimensões [25]. Devemos ter  $A(w) \rightarrow \infty$  rapidamente quando  $|w| \rightarrow \infty$ . A normalização da função de onda está ligada ao comportamento assintótico do potencial dado pela Eq. (4.22). Se  $V(w) > 0$  como  $|w| \rightarrow \infty$ , então  $\hat{\Psi}_0(w)$  é sempre normalizada, porém se  $V(w) < 0$  para  $|w| \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\Psi}_0(w)$  não é normalizável e portanto não descreve a gravidade quadridimensional localizada [25].

A função de onda do modo zero do gráviton localizada em torno da brana, permanece normalizada mesmo no limite de dimensão extra infinita, pois mesmo com o tamanho da dimensão extra sendo muito grande, uma vez que o modo zero permanece localizado em torno da brana, no limite de dimensão extra infinita haverá um contínuo de modos Kaluza-Klein para o gráviton, que são responsáveis por transformar gravidade em uma gravidade de dimensões extras mais elevadas, porém isso possivelmente não ocorre, pois suas funções de onda serão reprimidas na brana por meio de uma grande barreira, de acordo com o potencial tipo vulcão ilustrado na Fig. 4.6 [43].

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Apresentamos uma correspondência entre cosmologia de branas e defeitos topológicos, tipo paredes de domínios, através do formalismo de primeira ordem e do processo de continuação analítica das soluções do tipo paredes de domínios bidimensionais ou 2-brana, no interior da 3-brana, que tem sido explorada na literatura recente.

Descrevemos a localização da gravidade em um cenário mundo-brana em quatro dimensões a partir de uma métrica *ansatz* que descreve soluções no plano bidimensional dentro de paredes de domínios assintoticamente quadridimensional no espaço de Minkowski ( $M_4$ ) ou anti de Sitter ( $AdS_4$ ). Através das flutuações da gravidade em defeitos topológicos (tipo parede de domínio) na brana obtivemos uma equação do tipo Schrödinger, semelhante à equação encontrada no modelo RS em cinco dimensões. Os potenciais dados pela equação tipo Schrödinger em função do fator de empenamento são conhecidos na literatura, como por exemplo, obtivemos o potencial do “tipo vulcão”. Com isto, observamos que a gravidade no plano bidimensional tipo parede de domínio que “vive” em uma 3-brana em um *bulk* quadridimensional tem o comportamento similar a de uma teoria 5-dimensional.

Quanto a questão da existência da gravidade localizada na vizinhança à brana torna-se dependente de propriedades do sistema mecânico quântico descrito pela equação do tipo Schrödinger obtida a partir das flutuações da gravidade em 4D, sendo imprescindível que a equação admita um estado fundamental de energia zero normalizável. Neste trabalho determinamos, ou seja, localizamos o estado de energia zero ou simplesmente modo zero, o qual é suficiente para descrever a gravidade newtoniana em 4D.

Os modos de Kaluza-Klein, ou modos massivos contribuem com a Lei de Newton

à grandes distâncias e são os responsáveis por fornecer as correções da gravidade newtoniana. Como perspectiva futura podemos obter os modos massivos para uma teoria quadridimensional. Para regiões próximas de um defeito topológico, tipo parede de domínio, poderia haver possíveis modificações da Lei de Newton e o potencial assumiria uma forma logarítima que seria referente ao potencial da 2-brana, ou parede de domínio, além de outros termos da ordem de  $1/r$ , os quais seriam correspondentes às demais dimensões de ordem superior. Além disso, a análise forneceria mais uma possibilidade no estudo de matéria escura.

# Referências Bibliográficas

- [1] COSTA, F. G. *Formalismo de primeira ordem em cosmologia de branas*. 2009. 67 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.
- [2] FONSECA, R. C. *Localização de Gravidade 4D em Branas SUZY*. 2013. 98 f. Tese (Doutorado em Física) – Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [3] GOMES, A. R. *Estrutura interna e localização de gravidade em branas*. 2005. 123 f. Tese (Doutorado em Física) – Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2005.
- [4] GREENE, B. *O Universo elegante: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria definitiva*. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.
- [5] CUADROS-MELGAR, B. Nosso Universo como uma Membrana. *REVISTA USP*, São Paulo, n. 62, p. 200-205, jun./ago. 2004.
- [6] ZWIEBACH, B. A. *First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [7] KALUZA, T. On The Unification Problem In Physics. Tradução para o inglês. In: *Sitzungsberichte of the Prussian Acad. of Sci.*, p. 966, 1921.
- [8] KLEIN, O. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. *Z. F. Phys.*, v. 37, n. 12, p. 895-906, 1926.
- [9] RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Do we live inside a domain wall? *Phys. Lett. B*, v. 125, n. 2-3, p. 136-138, 1983.

- [10] SILVA, A. A. *Um estudo sobre dimensões extras*. 2009. 91 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2009.
- [11] DVALI, G. R.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space. *Phys. Lett. B*, v. 485, n. 1-3, p. 208-214, 2000; [hep-th/0005016v2].
- [12] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter. *Phys. Lett. B*, v. 429, n. 3-4, p. 263-272, 1998; [hep-ph/9803315v1].
- [13] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, n. 17, p. 3370-3373, 1999; [hep-ph/9905221].
- [14] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to Compactification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, n. 23, p. 4690-4693, 1999; [hep-th/9906064].
- [15] MEZA, L. E. A. *Modelos não-lineares com campos escalares: ladrilhamento e mundos-brana*. 2011. 90 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2011.
- [16] CVETIC, M.; SOLENG, H. H. Supergravity Domain Walls. *Phys. Rep.*, v. 282, n. 4, p. 159-223, 1997; [hep-th/9604090].
- [17] CVETIC, M.; GRIFFIES, S.; SOLENG, H. H. Local and global gravitational aspects of domain wall space-times. *Phys. Rev. D*, v. 48, n. 6, p. 2613-2634, 1993; [gr-qc/9306005].
- [18] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; COSTA, F. G. First-order framework and domain-wall/brane-cosmology correspondence. *Phys. Lett. B*, v. 661, n. 2-3, p. 179-185, 2008; [hep-th/0707.0680].
- [19] DUFF, M. J. Kaluza-Klein Theory in perspective. In: Oskar Klein Centenary Nobel Symposium, 1994, Stockholm. *Anais do simpósio Oskar Klein Centenary Nobel Symposium*, Suécia: [s.n.], 19-21 de set., 1994, p. 22-35; [hep-th/9410046].
- [20] DVALI, G.; GABADADZE, G. Gravity on a Brane in Infinite-Volume Extra Space. *Phys. Rev. D*, v. 63, n. 6, p. 065007, 2001; [hep-th/0008054].

- [21] OVERDUIN, J. M.; WESSON, P. S. Kaluza-Klein Gravity. *Phys. Rept.*, v. 283, n. 5-6, p. 303-378, 1997; [gr-qc/9805018].
- [22] CARROLL, S. M. *Lectures Notes on General Relativity*. Institute for Theoretical Physics, California, 1997; [gr-qc/9712019].
- [23] NEVES, J. C. S. *Mundos Brana: Buracos Negros e Buracos de Minhoca*. 2012. 131 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- [24] GABELLA, M. *The Randall-Sundrum Model*. Escola Politécnica Federal de Lausanne, Suíça, 2006.
- [25] CSÁKI, C.; ERLICH, J.; HOLLOWOOD, T. J.; SHIRMAN, Y. Universal aspects of gravity localized on thick branes. *Nucl. Phys. B*, v. 581, n. 1-2, p. 309-338, 2000; [hep-th/0001033].
- [26] KARCH, A.; RANDALL, L. Locally Localized Gravity. *JHEP*, v. 8, n. 5, p. 008, 2001; [hep-th/0011156].
- [27] NEVES, J. C. S. *Buracos Negros em Universos Brana com Constante Cosmológica*. 2008. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- [28] CHAMBLIN, A.; HAWKING, S. W.; REALL, H. S. Brane-world black holes. *Phys. Rev. D*, v. 61, n. 6, p. 065007, 2000; [hep-th/9909205].
- [29] SILVA, J. L. *Soluções escalares em cosmologia de branas*. 2011. 62 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2011.
- [30] SERJEANT, S. *Observational Cosmology*. Cambridge University Press, 2010.
- [31] SECCO, L. F. *Um modelo de energia escura na determinação da dinâmica do universo*. 2012. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Bacharelado em Física) – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

- [32] HOLANDA, R. F. L. *Cosmologia*. Disciplina de Cosmologia: Programa de Pós-Graduação em Física, Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Ago./Dez. de 2013. Notas de aula.
- [33] BAZEIA, D.; GOMES, C. B.; LOSANO, L.; MENEZES, R. First-order formalism and dark energy. *Phys. Lett. B*, v. 633, n. 4-5, p. 415-419, 2006; [astro-ph/0512197].
- [34] BERGMANN, T. S. *Cosmologia e Relatividade*. Disciplina de Cosmologia: Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003. Notas de aula. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/thaisa/>>. Acesso em: dez. 2013.
- [35] BRITO, F. A. *Teoria Quântica de Campos*. Disciplina de Teoria Quântica de Campos: Programa de Pós-Graduação em Física, Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Mar./Jul. de 2013. Notas de Aula.
- [36] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; RODRIGUES, J. J.; ROSENFELD, R. First-order formalism for dark energy and dust. *Eur. Phys. J. C*, v. 55, n. 1, p. 113-117, 2008; [astro-ph/0611770].
- [37] BINETRUY, P.; DEFFAYET, C.; LANGLOIS, D. Non-conventional cosmology from a brane-universe. *Nucl. Phys. B*, v. 565, n. 1-2, p. 269-287, 2000; [hep-th/9905012].
- [38] DEWOLFE, O.; FREEDMAN, D. Z.; GUBSER, S. S.; KARCH, A. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Phys. Rev. D*, v. 62, n.4, p. 046008, 2000; [hep-th/9909134].
- [39] BAZEIA, D.; BRITO, F.A.; GOMES, A.R. Locally localized gravity and geometric transitions. *JHEP*, v. 4, n. 11, p. 070, 2004; [hep-th/0411088].
- [40] KOGAN, I.I.; MOUSLOPOULOS, S.; PAPAZOGLU, A. A new bigravity model with exclusively positive branes. *Phys. Lett. B*, v. 501, n. 1-2, p. 140-149, 2001; [hep-th/0011141].
- [41] KOBAYASHI, S.; KOYAMA, K.; SODA, J. Thick Brane Worlds and Their Stability. *Phys. Rev. D*, v. 65, n. 6, p. 064.014, 2002; [hep-th/0107025].

- [42] CARVALHO, N. C. *Construção de uma nova geração de transdutores paramétricos para o detector de ondas gravitacionais Mario Schenberg*. 2012. 109 f. Dissertação (Mestrado em Astrofísica) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2012.
- [43] CSÁKI, C. *TASI Lectures on Extra Dimensions and Branes*. Palestras no Instituto Avançado de Estudo Teóricos, Universidade do Colorado, Boulder, 2002. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0404096>>. Acesso em: mar. 2014.
- [44] COLLINS, P. D. B. *Particle physics and cosmology*. John Wiley & Sons, 1989.
- [45] CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry*. Pearson Education, 2004.

# Apêndice A

## O Limite Newtoniano não Relativístico

Neste apêndice ilustraremos a relação entre a Relatividade Geral e a Teoria da gravidade de Newton [44]. Vamos considerar o campo gravitacional em um limite fraco e estático. O limite de campo gravitacional fraco descrito aqui, é menos restritivo, ou seja, vamos assumir que o campo gravitacional é fraco, porém ainda pode variar com o tempo. Dessa forma, podemos decompor a métrica para uma métrica de Minkowski mais uma perturbação [45]. Para calcularmos o limite não relativístico das equações para o campo gravitacional:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv G_{\mu\nu} \equiv 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

consideremos a métrica no limite não relativístico do campo gravitacional estático

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.2})$$

O campo gravitacional estático nos permite decompor a métrica de Minkowski plana (A.2) na forma de uma pequena perturbação [45]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

onde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Vamos nos limitar à coordenadas em que  $\eta_{\mu\nu}$  toma sua forma canônica,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ . A suposição de que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , permite ignorar qualquer fator maior do que a primeira ordem nesta quantidade.

Substituindo a Eq. (A.3) nas definições dadas pelas Eqs. (2.3) e (2.4), o tensor de Ricci pode ser escrito como

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\nu (\eta^{\lambda\rho} + h^{\lambda\rho}) [\partial_\mu (\eta_{\lambda\rho} + h_{\lambda\rho}) + \partial_\lambda (\eta_{\mu\rho} + h_{\mu\rho}) - \partial_\rho (\eta_{\mu\lambda} + h_{\mu\lambda})] \right. \\ \left. - \partial_\lambda (\eta^{\lambda\rho} + h^{\lambda\rho}) [\partial_\mu (\eta_{\nu\rho} + h_{\nu\rho}) + \partial_\nu (\eta_{\mu\rho} + h_{\mu\rho}) - \partial_\rho (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})] \right\}, \quad (\text{A.4})$$

onde o terceiro e quarto termos são da forma  $\Gamma^2$  e desde que  $\Gamma$  é de primeira ordem na perturbação da métrica, esses contribuem apenas em segunda ordem e portanto, podem ser negligenciados. Após alguma álgebra e desconsiderando termos de segunda ordem em  $h$ , obtemos o tensor de Ricci na forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} [\partial_\nu \partial_\mu h_{\lambda\rho} + \partial_\lambda \partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \partial_\mu h_{\nu\rho}]. \quad (\text{A.5})$$

Temos ainda que o escalar de Ricci é definido por

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.6})$$

Assim, substituindo as Eqs. (A.3) e (A.5) na equação anterior, obtemos o escalar de Ricci na forma:

$$R = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \eta^{\alpha\beta} [\partial_\beta \partial_\alpha h_{\lambda\rho} + \partial_\lambda \partial_\rho h_{\alpha\beta} - \partial_\beta \partial_\rho h_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda \partial_\alpha h_{\beta\rho}]. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo as Eqs. (A.5) e (A.7) na Equação de campo de Einstein (Eq. (A.1)), obtemos

$$\square h_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu} - 8\pi G \eta_{\mu\nu} T, \quad (\text{A.8})$$

onde  $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$ . Nesta expressão, usamos um *gauge* (sistema de coordenadas) no qual  $h_{\mu\nu}$  é transverso para essas flutuações (Eq. (2.57)), e o d'Alembertiano é definido como  $\square = \partial^i \partial_i$ . Devemos ainda ressaltar, que os índices são levantados e abaixados usando a métrica plana  $\eta^{\mu\nu}$ .

No caso particular em que  $\mu = \nu = 0$ , temos que a Eq. (A.8) para condição de pressão nula, torna-se

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G \rho \quad (\text{A.9})$$

A Equação (A.9) pode ser solucionada através do teorema da divergência. Dessa forma, obtemos

$$h_{00} = \frac{2GM}{r} - 1, \quad (\text{A.10})$$

onde a constante de integração é  $c = -1$ .

O potencial gravitacional é dado por [45]

$$\Phi(r) = h_{00} + 1. \quad (\text{A.11})$$

Assim finalmente obtemos,

$$\Phi(r) = \frac{2GM}{r}. \quad (\text{A.12})$$

Observamos então que,

$$h_{00} = -2\phi, \quad (\text{A.13})$$

onde  $\phi$  é o potencial no limite newtoniano dado por:

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (\text{A.14})$$

Podemos ainda encontrar a métrica na forma de uma pequena perturbação para as componentes 00, através da Eq. (A.3)

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left( -1 + \frac{2GM}{r} \right) \\ &= -(1 + 2\phi). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A curvatura do espaço-tempo é de fato suficiente para descrever a gravidade no limite newtoniano, contanto que a métrica seja da forma da Eq. (A.15). Para um único campo recupera-se a fórmula para o limite newtoniano dado pela Eq. (A.14).

# Apêndice B

## Equação de Einstein para a Métrica não Perturbada

Neste apêndice calcularemos os termos da equação de Einstein referentes à métrica não perturbada, dada pela Eq. (4.4):

$$ds_4^2 = a_0^2(w) (-dt^2 + dx^2 + dw^2 + dz^2) = a_0^2(w)\eta_{\mu\nu}, \quad (\text{B.1})$$

Essa métrica representa soluções no plano bidimensional dentro de paredes de domínios assintoticamente dentro do espaço de Minkowski ( $\mathbb{M}_4$ ). Dessa forma, temos a definição da equação de Einstein dada por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv G_{\mu\nu} \equiv 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (\text{B.2})$$

Primeiramente vamos calcular o tensor de Ricci, cuja definição é

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma, \quad (\text{B.3})$$

onde os símbolos de Christoffel são definidos por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (\text{B.4})$$

Substituindo a definição anterior na Eq. (B.3), o tensor de Ricci fica expresso por:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\nu g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}) - \partial_\lambda g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})]. \quad (\text{B.5})$$

Assim, substituindo a métrica dada pela Eq.(B.1) na equação anterior, obtemos o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (18a_0^2 \partial_\nu a_0 \partial_\mu a_0 + 6a_0^3 \partial_\nu \partial_\mu a_0). \quad (\text{B.6})$$

Temos ainda que o escalar de Ricci é definido como

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.7})$$

Dessa forma, substituindo a métrica (Eq. (B.1)) e o tensor de Ricci (Eq. (B.6)) na equação anterior, obtemos o escalar de Ricci:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} a_0^2 \eta^{\alpha\beta} (18a_0^2 \partial_\beta a_0 \partial_\alpha + 6a_0^3 \partial_\beta \partial_\alpha a_0) \\ &= \frac{1}{2} a_0^2 (18a_0^2 \partial^\alpha a_0 \partial_\alpha a_0 + 6a_0^3 \partial^\alpha \partial_\alpha a_0). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Substituindo as Equações (B.6) e (B.8) na Eq. (B.2), obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (18a_0^2 \partial_\nu a_0 \partial_\mu a_0 + 6a_0^3 \partial_\nu \partial_\mu a_0) \\ &\quad - \frac{1}{4} a_0^4 \eta_{\mu\nu} (18a_0^2 \partial^\alpha a_0 \partial_\alpha a_0 + 6a_0^3 \partial^\alpha \partial_\alpha a_0) = 8\pi GT_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Multiplicando a equação anterior por  $\eta^{\mu\nu}$ , obtemos finalmente a expressão referente à Equação de Einstein para a métrica não perturbada:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (18a_0^2 \partial^\mu a_0 \partial_\mu a_0 + 6a_0^3 \partial^\mu \partial_\mu a_0) \\ &\quad - a_0^4 (18a_0^2 \partial^\alpha a_0 \partial_\alpha a_0 + 6a_0^3 \partial^\alpha \partial_\alpha a_0) = 8\pi GT. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$