



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**OSCILADORES PARAMETRICAMENTE FORÇADOS
NA PRESENÇA DE RUÍDO TÉRMICO**
Raoni Sávio de Negreiros Moreira

CAMPINA GRANDE

- 2012 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**OSCILADORES PARAMETRICAMENTE FORÇADOS
NA PRESENÇA DE RUÍDO TÉRMICO**
Raoni Sávio de Negreiros Moreira

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Adriano de Albuquerque Batista, Ph.D., apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2012 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

M835o Moreira, Raoni Sávio de Negreiros.
Osciladores parametricamente forçados na presença de ruído térmico
/Raoni Sávio de Negreiros Moreira. – Campina Grande, 2012.
82f.: il.col.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.
Orientador: Prof. Dr. Adriano de Albuquerque Batista.
Referências.

1. Oscilador Paramétrico. 2. Ressonância Paramétrica. 3. Equações
Diferenciais Estocásticas. 4. Razão Sinal Ruído. 1. Título.

CDU 621.373.8(043)

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO ALUNO RAONI SÁVIO DE NEGREIROS MOREIRA, CANDIDATO AO TÍTULO DE MESTRE EM FÍSICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO FÍSICA.

Aos cinco dias do mês de março do ano de dois mil e doze, na Sala de Reuniões da Unidade Acadêmica de Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal de Campina Grande, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar Raoni Sávio de Negreiros Moreira ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor Adriano de Albuquerque Batista (Orientador) – Doutor em Física, o professor Francisco de Assis de Brito – Doutor em Física e o professor Fernando Jorge Sampaio Moraes – Doutor em Física, sendo o primeiro integrante do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, o segundo integrante do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande e o terceiro integrante do corpo docente da Universidade Federal da Paraíba. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor Adriano de Albuquerque Batista, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato Raoni Sávio de Negreiros Moreira, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado “**Osciladores Parametricamente Forçados na Presença de Ruído Térmico**”. Após discorrer o referido tema, o candidato foi arguido pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado com Distinção. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o avaliado, legalmente habilitado a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o mesmo faz jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Hélio Pereira de Oliveira, secretário, lavrei a ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora.

Assinaturas

Secretário:

Hélio Pereira de Oliveira

Presidente:

Adriano de A. Albuquerque

Examinador:

Francisco de Assis de Brito

Examinador:

Fernando Moraes

Aluno:

Raoni Sávio de N. Moreira

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Física:

FPJ ()

*Dedico este trabalho a Deus,
nosso Pai Misericordioso
e à minha Mãe Celeste, Maria.*

*Aos educadores e homens da Ciência que
buscam em suas práticas uma
ferramenta para um mundo melhor.*

*À minha mãe, cujo amor e compreensão
me fizeram chegar até aqui.*

AGRADECIMENTOS

A Deus e Nossa Senhora, por todas as orações ouvidas e por mostrar amor por mim a cada dia de minha vida.

Aos meus pais, meus irmãos e minha noiva, por acreditarem nos meus sonhos e abdicarem dos próprios em favor dos meus, pela confiança, paciência e ternura que me acompanham sempre.

Ao Prof. Adriano de Albuquerque Batista, pela orientação, sugestão, estímulo, paciência e competência com que conduziu este trabalho.

Aos Profs. Francisco de Assis, Fábio Dahia, Rômulo Rodrigues, Jürgen Precker, Aécio de Lima, Diego Alejandro, Eduardo Marcos e José Suassuna pela colaboração que recebi durante a fase de preparação desta dissertação.

Aos professores constituintes da Banca Examinadora que contribuíram para que fosse alcançado o objetivo do trabalho.

Aos colegas de pós-graduação, graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.

A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

*Imaginação é tudo, é a prévia
das atrações futuras.
(Albert Einstein)*

*Você cria seu próprio universo de
acordo que caminha nele.
(Winston Churchill)*

RESUMO

Relatamos aqui um modelo teórico baseado em funções de Green e técnicas da teoria da média que descreve a dinâmica de um oscilador parametricamente forçado sob a ação de ruído térmico aditivo. Nosso modelo de dinâmica estocástica dá estimativas quantitativas para o aquecimento e o *squeezing* térmico próximo à primeira zona de instabilidade do oscilador. Especificamente, obtemos uma aproximação perturbativa da função de Green do oscilador e, posteriormente, das estimativas para as flutuações estatísticas $\langle x^2(t) \rangle$, onde $x(t)$ é a posição do oscilador, e $\langle v^2(t) \rangle$, onde $v(t)$ representa a velocidade do oscilador. Além disso, investigamos o fenômeno da amplificação paramétrica e propomos estimativas analíticas da razão sinal-ruído. Os resultados obtidos implicam que amplificadores paramétricos podem ser excelentes detectores, pois podem ter valores extremamente altos da razão sinal-ruído e também uma largura da banda estreita. Também observamos que o modelo pode ser aplicado para investigar a dinâmica de vários sistemas físicos, tais como, guias de íons, armadilhas de íons, e dispositivos microeletromecânicos axialmente forçados.

Palavras-chave: excitação paramétrica, oscilador paramétrico, ressonância paramétrica, amplificação paramétrica, equações diferenciais estocásticas, funções de Green, teoria da média, razão sinal-ruído.

ABSTRACT

Here we report a theoretical model based on Green's functions and on techniques of the theory of averaging that describes the dynamics of parametrically-driven oscillators under the action of additive thermal noise. Our stochastic dynamics model gives quantitative estimates for heating and quadrature thermal noise *squeezing* near the first parametric instability zone of the oscillator. Specifically, we obtain a perturbative approximation of the oscillator's Green's function and, subsequently, give estimates to the statistical fluctuations $\langle x^2(t) \rangle$, where $x(t)$ is the position of the oscillator, and $\langle v^2(t) \rangle$, where $v(t)$ represents the velocity of the oscillator. Furthermore, we investigate the phenomenon of parametric amplification and propose analytical estimates of the signal-to-noise ratio. The results imply that parametric amplifiers can be excellent detectors, because they can have extremely high values of the signal to noise ratio as well as a narrow bandwidth. We also observe that this model can be applied to investigate the dynamics of several other physical systems such as ion guides, ion traps, and axially loaded microelectromechanical devices.

Keywords: parametric excitation, parametric oscillator, parametric resonance, parametric amplification, stochastic differential equations, Green's functions, averaging theory, signal-to-noise ratio.

Conteúdo

Lista de Abreviaturas	p. iv
Lista de Símbolos	p. v
Lista de Figuras	p. vi
1 Introdução	p. 1
2 Sistemas dinâmicos lineares	p. 7
2.1 Equações diferenciais autônomas	p. 7
2.2 Equações diferenciais com coeficientes periódicos: teoria de Floquet	p. 10
2.3 Equação de Mathieu	p. 13
2.3.1 Método de Hill	p. 18
3 Funções de Green	p. 21
3.1 Oscilador harmônico	p. 21
3.1.1 Método de Fourier	p. 22
3.1.2 Método da integração	p. 26
3.2 Oscilador parametricamente forçado	p. 28
3.2.1 Método da média	p. 28
3.2.2 Solução exata	p. 32

3.2.3	Método numérico	p. 33
4	Ressonância paramétrica	p. 35
4.1	Limite entre zonas - teoria da média	p. 35
4.2	Limite entre zonas - método do balanço harmônico	p. 38
4.3	Multiplicadores de Floquet	p. 40
4.4	Método numérico	p. 41
5	Equação de Langevin	p. 43
5.1	Movimento Browniano	p. 44
5.2	O oscilador harmônico na presença de ruído térmico	p. 47
5.3	O oscilador parametricamente forçado com ruído térmico	p. 49
6	Amplificação paramétrica	p. 56
6.1	Cálculo do ganho na amplificação paramétrica	p. 57
6.1.1	Método da média	p. 57
6.1.2	Método do balanço harmônico	p. 58
6.1.3	Método numérico	p. 59
6.2	Amplificação para frequências diferentes $\omega \neq \omega_s$	p. 59
7	Razão sinal-ruído do oscilador paramétrico	p. 64
7.1	Razão sinal-ruído estacionária	p. 65
7.2	Razão sinal-ruído dinâmica	p. 66
8	Conclusão	p. 69

Apêndice A – Teoria da média	p. 71
A.1 Método da média: teorema	p. 71
Apêndice B – Rotinas utilizadas no MAPLE	p. 75
B.1 Resposta do oscilador paramétrico	p. 75
B.2 Multiplicadores de Floquet	p. 76
Apêndice C – Participações em encontros e trabalhos publicados	p. 78
Bibliografia	p. 79

Lista de Abreviaturas

EDO equação diferencial ordinária

MEMS sistemas micro-eleto-mecânicos

OHPF oscilador harmônico parametricamente forçado

RSR razão sinal-ruído

u. a. unidade adimensional

Lista de Símbolos

ω_0	Frequência natural do oscilador (positiva e constante)	1
$\Phi(t)$	Operador de evolução temporal	12
γ	Coefficiente de fricção	21
ρ	$\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$	23
F_p	Amplitude do bombeamento paramétrico	28
2ω	Frequência do bombeamento paramétrico	28
Ω	$\omega_0^2 - \omega^2$	28
β	$-F_p/4\omega$	30
δ	$\Omega/2\omega$	30
κ	$\sqrt{\beta^2 - \delta^2}$	30
$Ce(t)$	Cosseno de Mathieu	33
$Se(t)$	Seno de Mathieu	33
$A_{2\omega}$	Amplitude da quadratura do cosseno da compressão térmica	51
$B_{2\omega}$	Amplitude da quadratura do seno da compressão térmica	51
ω_s	Frequência do sinal externo	56
ϕ	Fase do sinal externo	56

Lista de Figuras

- 3.1 Contorno utilizado na avaliação da função de Green para o oscilador harmônico amortecido. p. 24
- 3.2 Funções de Mathieu $\text{MathieuC}(0.8, 0.06, t)$ e $\text{MathieuS}(0.8, 0.06, t)$ que estão presentes no programa MAPLE. p. 33
- 3.3 Comparação entre o resultado numérico fornecido pela integração numérica da Eq. (3.2.31) e os resultados analíticos aproximados pela Eq. (3.2.52). Os valores iniciais da função de Green são $G(t, t') = 0$ e $(\partial/\partial t)G(t, t') = 1.0$ quando $t = t' + 0^+$. Os parâmetros fixos de movimento são $F_p = 0.15$, $\gamma = 0.1$, $\omega_0 = 1.0$ p. 34
- 4.1 Comparação entre as previsões pelo método do balanço harmônico e a teoria de Floquet da linha de transição entre a zona estável e instável do oscilador paramétrico, próximo à primeira zona de ressonância paramétrica. A aproximação de primeira ordem é dada pela Eq. (4.2.11) e a de segunda ordem é dada pela Eq. (4.2.13). A obtida pela teoria de Floquet é quando pelo menos um dos multiplicadores de Floquet dado pela Eq. (4.3.16) tem módulo igual a um e período $2\pi/\omega$ p. 41

- 4.2 Comparação entre as previsões pelo método numérico e pela técnica da média da linha de transição entre a zona estável e instável do oscilador paramétrico, próximo à primeira zona de ressonância paramétrica. A aproximação de primeira ordem é dada pela Eq. (4.1.4) e a de segunda ordem é dada pela Eq. (4.1.7). Os resultados numéricos são obtidos pelo cálculo dos multiplicadores de Floquet numericamente quando pelo menos um deles tem módulo igual a um e período $2\pi/\omega$ p. 42
- 5.1 Desvio quadrático médio do oscilador harmônico obtido pela equação (5.2.22) com o banho térmico $T = 1$. Podemos observar que no limite $t \rightarrow \infty$ temos $\langle x^2(t) \rangle = 1.0$ p. 48
- 5.2 A evolução temporal do desenvolvimento quadrático médio $\langle x^2(t) \rangle$ versus o tempo. A linha contínua horizontal verde é obtida pela equação (5.2.22), dado através do teorema da equipartição da energia, indicando que o valor de equilíbrio esperado das flutuações (para $F_p = 0$) quando a temperatura de banho térmico é $T = 1.0$, enquanto que as demais retas representam os correspondentes valores médios de $\overline{\langle x^2(t) \rangle}$ dada pela equação (5.3.32) para $F_p = 0.15$ p. 53
- 5.3 Gráfico do log da comparação da componente do deslocamento quadrático médio $\overline{\langle x^2 \rangle}$, dada pela Eq. (5.3.32), com a temperatura T que é dada pela resposta do oscilador sem o bombeamento paramétrico. Podemos perceber que a temperatura cresce monotonicamente até que diverge no limite entre as zonas estável e instável. p. 53
- 5.4 Mapa de cores do deslocamento quadrático médio $\overline{\langle x^2(t) \rangle}$. O aquecimento ocorre nas regiões vermelhas e amarelas, enquanto que o resfriamento ocorre nas regiões á direita da linha de contorno de cor rosa $\overline{\langle x^2(t) \rangle} = 1.0$. p. 54

5.5	Mapa de cores da amplitude térmica em 2ω do deslocamento quadrático médio $\langle x^2(t) \rangle$ dado por $\sqrt{ A_{2\omega} ^2 + B_{2\omega} ^2}$. A amplitude de 4ω é muito pequena para as amplitudes de bombeamento F_p usadas neste trabalho.	p. 55
6.1	Comparação entre as estimativas numéricas e analíticas do ganho em função da fase. Os valores numéricos são dados pela Eq. (6.1.8) substituindo os valores numéricos dos pontos fixos do mapa de retorno de Poincaré, obtidos a partir da integração da Eq. (6.0.1) após cessar o transiente de acordo com a Eq. (6.1.3).	p. 60
6.2	Comparação entre as estimativas numéricas e analíticas do ganho em função de F_p . Os valores numéricos são dados pela Eq. (6.1.8) substituindo os valores numéricos dos pontos fixos do mapa de retorno de Poincaré, obtidos a partir da integração da Eq. (6.0.1) após cessar o transiente de acordo com a Eq. (6.1.3).	p. 61
6.3	Resposta do OPF na primeira ressonância paramétrica, $\omega = \omega_0 = 1.0$, à um sinal com frequência $\omega_s = 1.001$, superposto com uma outra resposta de um oscilador sem excitação (oscilador harmônico) ao mesmo sinal. A resposta do oscilador paramétrico na maior parte do tempo, apresenta uma amplitude mais elevada que a amplitude de resposta do oscilador harmônico.	p. 62
6.4	Resposta do OPF na primeira ressonância paramétrica, $\omega = \omega_0 = 1.0$, à um sinal com frequência $\omega_s = 1.01$, superposto com uma outra resposta de um oscilador sem excitação (oscilador harmônico) ao mesmo sinal. Podemos observar que para alguns tempos a amplificação paramétrica é alta, porém para outros é negativa.	p. 62

6.5	Resposta do OPF na primeira ressonância paramétrica, $\omega = \omega_0 = 1.0$, à um sinal com frequência $\omega_s = 1.1$, superposto com uma outra resposta de um oscilador sem excitação (oscilador harmônico) ao mesmo sinal. Em nenhum tempo, a amplitude de resposta do OPF é maior que a resposta do oscilador harmônico.	p. 63
7.1	Gráfico da razão sinal-ruído R_0 , tal como na Eq. (7.1.1) juntamente com a aproximação correspondente dada pela Eq. (7.1.2).	p. 66
7.2	Gráfico da razão sinal-ruído $R_{2\omega}$, definido na Eq. (7.2.3) com os pontos fixos u^* e v^* dados pela Eq. (6.1.7) e a amplitude do squeezing térmico $\langle x^2 \rangle$ dado por $\sqrt{ A_{2\omega} ^2 + B_{2\omega} ^2}$ definidos na Eq. (5.3.35). Comparamos com as aproximações da Eq. (7.2.6) e obtemos muito boas concordâncias.	p. 68

1 *Introdução*

Quando um parâmetro de um oscilador harmônico varia periodicamente no tempo, dizemos que esse oscilador é parametricamente forçado (ou bombeado). Em mecânica clássica isso ocorre, por exemplo, em pêndulos cujo comprimento varia periodicamente no tempo ou cujo ponto de suspensão é oscilante [1, 2]. Provavelmente, o sistema físico mais conhecido em que ocorre oscilações parametricamente excitadas é dado por uma criança brincando em um balanço. Mesmo sem pôr os pés no chão e sem ser empurrada por uma outra pessoa, ela consegue oscilar o balanço. Este feito é possível de ser realizado quando a criança eleva e abaixa o seu centro de massa de forma periódica, variando assim o comprimento do pêndulo $l(t)$ e, por consequência, modificando a frequência natural $\omega_0(t) = \sqrt{g/l(t)}$ [3]. Quando essas oscilações ocorrem, temos o fenômeno da ressonância paramétrica, ou seja, quando o estado de repouso do oscilador se torna instável. Isso ocorre de uma forma mais forte, quando a frequência de bombeamento é igual ou próxima a duas vezes a frequência natural do oscilador. Além desse caso, as oscilações também podem ocorrer em frequências de bombeamento iguais ou próximas à $\omega = 2\omega_0/n$, com $n = 1, 2, 3, \dots$ [4]. Em todos os casos há necessidade de uma amplitude mínima de bombeamento para que ocorra a ressonância paramétrica.

Problemas científicos e de engenharia que levam ao [oscilador harmônico parametricamente forçado \(OHPF\)](#) e à ressonância paramétrica, têm despertado crescente interesse desde o século XIX [1, 5]. Os primeiros sistemas investigados em que ocorria a ressonância

paramétrica envolviam geometrias elípticas como, por exemplo, nos modos de vibração de membranas elípticas estudadas por Faraday em 1831 [6] e em modos de propagação de ondas em tubos elípticos. Neste contexto, a equação do **OHPF** surge da solução por separação de variáveis da equação de onda em coordenadas elípticas [7]. As soluções não triviais da equação do oscilador paramétrico com o bombeamento senoidal (também conhecida como equação de Mathieu) podem ser escritas em termos de funções de Mathieu, que foram primeiramente discutidas por Émile Mathieu em 1868 no contexto de oscilações livres em uma membrana [8]. Equações semelhantes surgem também em problemas que envolvem potenciais periódicos em mecânica quântica, tais como, na função de onda do elétron em uma rede periódica de átomos [9], em que a ressonância paramétrica leva à teoria de bandas em semicondutores [10]. Oscilações paramétricas também ocorrem na análise da estabilidade do pêndulo invertido, de navios, balões e pára-quedas [1]. Recentemente, as equações do **OHPF** têm sido utilizadas para modelar sistemas de escala microscópica ou nanoscópica tais como guias de íons quadripolares e armadilhas de íons de Paul [11], magnetometria [12], cavidades opto-mecânicas [13] e **sistemas micro-eleto-mecânicos (MEMS)** axialmente forçados [14].

Amplificadores paramétricos são dispositivos que se utilizam da excitação paramétrica para aumentar a resposta devida a uma pequena força ou tensão ac externa aplicada [15]. Eles foram concebidos para detectar pequenos sinais e para aumentar a resposta dinâmica de um oscilador para pequenas excitações harmônicas, podendo melhorar a sensibilidade de um sensor na detecção de pequenas forças mesmo quando dominadas pelo ruído [16].

Os **MEMS** têm sido largamente utilizados em várias áreas da nanotecnologia, tais como em sensores de massa ou forças e na microscopia de força atômica [17]. A amplificação paramétrica degenerada (próximo à sua principal ressonância) é utilizada para melhorar a sensibilidade das medidas reduzindo o efeito do ruído [18]. Nesses sistemas, normalmente o oscilador paramétrico (ou ressonador) é representado pela deflexão máxima do modo fundamental das vibrações [19]. No caso da haste presa duplamente nas pontas e axialmente exci-

tada, o grau de liberdade representa a quantidade de deflexão do ponto médio de equilíbrio da barra [20].

Com o uso da amplificação paramétrica, Stowe *et al* [21], alcançaram uma resolução na medida de forças de $5.6 \times 10^{-18} N$ tendo uma sensibilidade na medida de massa de $10^{-12} g$. Rugar e Grütter [16] procurando meios de reduzir o ruído térmico e aumentar a precisão na detecção de ondas gravitacionais, utilizaram técnicas de perturbação para obter o ganho paramétrico linear, quando se depararam experimentalmente o squeezing termomecânico em quadratura. O fenômeno não foi analisado teoricamente levando a outras investigações posteriores [20].

DiFilippo *et al* [22, 23] tentaram explicar esse fenômeno utilizando uma distribuição gaussiana térmica de estados iniciais que evoluíam deterministicamente. Nessa evolução, eles obtiveram a amplitude do squeezing do sinal e observaram uma defazagem mais elevada. Na Ref. [23] eles propuseram um modelo teórico para explicar o squeezing termomecânico, no entanto, os parâmetros do sistema foram escolhidos para estar dentro da zona de instabilidade do oscilador paramétrico. Essa abordagem não considera a dinâmica estocástica na evolução dos estados iniciais e também não é correta, pois diverge exponencialmente com o tempo.

Na Ref. [24], Almog *et al* estudando a amplificação do sinal no oscilador de Duffing próximo a um ponto de bifurcação obtiveram experimentalmente o squeezing não linear. Eles criaram um sistema de amplificação nanomecânica, que consistia em uma haste microscópica duplamente presa e excitada capacitivamente por um eletrodo adjacente, mas o modelo teórico utilizado não trata o ruído de uma forma dinâmica.

Batista [20] usando uma abordagem com funções de Green, para resolver a equação de Langevin aliadas com as técnicas da média, obteve estimativas analíticas para as flutuações térmicas, fornecendo uma explicação para o squeezing termomecânico observado por Rugar e Grütter [16]. Ele mostrou que o squeezing térmico é um fenômeno da flutuação térmica

do oscilador paramétrico na presença do ruído térmico aditivo. Tal modelo criado foi capaz de estimar qualitativamente e quantitativamente o aquecimento e o squeezing térmico do oscilador. Vale ressaltar que este trabalho foi o primeiro a incluir dinâmica estocástica em um modelo teórico que explica o squeezing térmico em [OHPFs](#) na presença do ruído.

Os limites da amplificação paramétrica devido ao ruído termomecânico em sensores de pequenas massas construído com osciladores nanomecânicos foram estudados por Cleland [25]. Embora esse trabalho seja bastante amplo, o autor não fornece estimativas para a razão sinal-ruído em amplificadores paramétricos quando se aumenta a amplitude de bombeamento próxima à linha de transição da primeira zona de ressonância paramétrica.

Na Ref. [19] mostramos o efeito da adição do ruído em amplificadores paramétricos com o objetivo de estudar a eficácia da amplificação paramétrica na presença do ruído térmico. O modelo teórico é baseado em funções de Green e em técnicas da teoria da média. Propomos e calculamos dois tipos de [razão sinal-ruído \(RSR\)](#). O primeiro relaciona a amplitude do sinal com a média temporal da média estatística das flutuações térmicas da posição do oscilador paramétrico devido ao ruído térmico. Já o segundo relaciona a amplitude do sinal com a amplitude das oscilações da média estatística das flutuações na frequência do bombeamento paramétrico. Muito boa concordância entre as estimativas analíticas e os resultados numéricos foi encontrada.

Nesta dissertação, apresentamos um estudo do oscilador parametricamente forçado. Investigamos basicamente o efeito do ruído térmico próximo à primeira zona de ressonância paramétrica, mostramos como ocorre o fenômeno do squeezing térmico, aquecimento, amplificação paramétrica e, por fim, propomos e calculamos duas razões sinal-ruído. Vamos mostrar que podemos melhorar a amplificação do sinal mesmo quando o amplificador paramétrico é dominado pelo ruído térmico. Comparamos com resultados obtidos numericamente e obtivemos excelentes concordâncias.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Capítulo 2: Realizamos uma revisão sobre sistemas dinâmicos lineares. Iniciamos pelos sistemas autônomos apresentando o conceito da matriz fundamental, desenvolvemos a teoria de Floquet para sistemas não-autônomos com coeficientes que variam periodicamente com o tempo, obtemos os multiplicadores de Floquet que estão relacionados com a estabilidade do sistema, e por fim discutimos sobre a equação de Mathieu. Em seguida, utilizamos para sua solução o método de Hill. Apresentamos as funções MathieuC e MathieuS, que são soluções independentes da equação Mathieu. Essa revisão é extremamente importante para o embasamento dos estudos desenvolvidos nos capítulos seguintes.

Capítulo 3: Apresentamos as funções de Green, respectivamente, do oscilador harmônico e paramétrico. Para o primeiro caso, utilizamos dois métodos: o da transformada de Fourier e o da integração direta. Já para o segundo caso, obtemos primeiramente duas matrizes fundamentais, sendo uma aproximada pelas técnicas da média e outra exata obtida pela teoria de Floquet. Em seguida, encontramos as funções de Green correspondentes para que possamos obter as estimativas das flutuações em um capítulo posterior. Por fim, comparamos com o método numérico.

Capítulo 4: Fazemos um estudo da ressonância paramétrica. Obtemos a linha de transição da primeira zona de instabilidade por dois métodos aproximativos em 1^a e 2^a ordem: pela técnica da média e pelo método do balanço harmônico. Obtemos também a linha de transição de forma exata, via teoria de Floquet com as funções de Mathieu. Finalizando, novamente obtemos também a linha de transição por meio da integração numérica.

Capítulo 5: Inicialmente apresentamos uma revisão da equação de Langevin para uma partícula livre em um fluido e estudamos o movimento Browniano devida às flutuações térmicas. Em seguida, estudamos o oscilador harmônico em equilíbrio térmico. Por fim, obtemos estimativas para as flutuações térmicas do oscilador parametricamente forçado na presença do ruído aditivo, que é um exemplo de sistema fora do equilíbrio termodinâmico. Verificamos que o oscilador paramétrico pode aquecer e que a média estatística de suas

flutuações térmicas oscila com o tempo. Provemos estimativas quantitativas para o aquecimento e o squeezing térmico.

Capítulo 6: Aqui estudamos a amplificação paramétrica, obtendo uma relação para o ganho no oscilador pelas técnicas da média. Em seguida, obtemos o ganho pelo método do balanço harmônico que reforça o método da média. Verificamos que o ganho da amplificação do sinal depende sensivelmente da fase entre o bombeamento e a força externa ac, como também da dessintonia entre a frequência de bombeamento e a frequência natural do oscilador.

Capítulo 7: Aqui apresentamos duas estimativas para medidas da **RSR** do oscilador paramétrico. Com os resultados obtidos nos capítulos anteriores, fazemos uma comparação entre a amplificação do sinal ac externo com a amplificação das flutuações térmicas quando o oscilador paramétrico está sendo bombeado próximo à primeira zona de ressonância paramétrica. Observa-se uma forte dependência da **RSR** na fase e também na amplitude de bombeamento paramétrico. Para alguns intervalos da fase há um alto **RSR**, enquanto que para outros valores de fase a **RSR** diminui ou permanece o mesmo com o aumento da amplitude de bombeamento.

Capítulo 8: Finalizamos o trabalho apresentando nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2 *Sistemas dinâmicos lineares*

Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relação de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto [26]. É dito dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo.

A posição no futuro e no passado de muitos sistemas podem ser previstos até um certo ponto, pelo conhecimento de sua posição no presente e as leis que governam sua evolução. Com a condição de que as leis não mudem ao decorrer do tempo, o comportamento é tal que um sistema pode ser completamente definido por sua posição inicial. Deste modo, a noção de sistema dinâmico inclui o conjunto de suas possíveis posições e uma lei de evolução da posição no tempo [27].

O objetivo desse capítulo é estudar os sistemas autônomos, desenvolver a teoria de Floquet para sistemas não-autônomos com coeficientes periódicos, obter os multiplicadores de Floquet e, por fim, discutir sobre a equação de Mathieu e para sua solução o método de Hill.

2.1 **Equações diferenciais autônomas**

Podemos escrever soluções de equações diferenciais lineares em termos da função ex-

ponencial, que é ao mesmo tempo bem comportada e habitual [28]. Por exemplo, dada a equação diferencial autônoma

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1.1)$$

onde A é uma matriz constante $n \times n$. Com a condição inicial $x(0) = x_0$, tem solução

$$x(t) = e^{At}x_0. \quad (2.1.2)$$

Portanto, se somos capazes de escrever exponenciais de matrizes, a solução é simples.

Uma propriedade simples de equações lineares é que se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções, então $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$ também é uma solução, tendo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ [29]. Este princípio da superposição não se sustenta mais em geral para sistemas não-lineares, mas tem uma consequência importante para sistemas lineares. Se conseguirmos encontrar n soluções independentes para a equação diferencial linear em \mathbb{R}^n , então, qualquer outra solução pode ser escrita como uma combinação dessas soluções [28]. Em outras palavras, se $x_1(t), \dots, x_n(t)$ são soluções independentes, a solução geral pode ser escrita como

$$x = \Phi(t)x_0, \quad (2.1.3)$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sendo as constantes iniciais e $\Phi(t)$ uma matriz $n \times n$ cujas colunas são as soluções $x_i(t)$, ou seja, $\Phi(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ e satisfaz à $\Phi(0) = \mathbb{I}$. A mesma é chamada de matriz fundamental do problema, e e^{At} é simplesmente uma escolha natural da matriz fundamental para o problema $\dot{x} = Ax$ [28]. Então

$$\Phi(t) = e^{At}. \quad (2.1.4)$$

Para verificar que a exponencial e^{At} é uma matriz fundamental para a Eq. (2.1.1), onde $x \in \mathbb{R}^n$ e A é um mapa linear de \mathbb{R}^n para si mesmo, precisamos definir a exponencial de uma matriz e estabelecer algumas propriedades.

Definição 2.1.1.

Admitimos que A é uma matriz $n \times n$ com coeficientes constantes, então a exponencial e^{At} é definida pela série de potências

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \quad (2.1.5)$$

A exponencial de uma matriz tem propriedades muito semelhantes a exponencial de um número real.

Teorema 2.1.1. *Seja A uma matriz $n \times n$ com coeficientes constantes e $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, a solução única $x(t)$ de $\dot{x} = Ax$ com $x(0) = x_0$ é $x(t) = e^{At}x_0$.*

Prova. Primeiramente note que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At}.$$

Por isso,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At} = Ax(t),$$

e assim e^{At} é a solução da equação $\dot{x} = Ax$ com $x(0) = x_0$. Para provar a unicidade, suponhamos que $y(t)$ é uma outra solução para a equação diferencial com o mesmo valor inicial, $y(0) = x_0$ determinamos $z(t) = e^{-At}y(t)$, então

$$\dot{z} = -Ae^{-At}y(t) + e^{-At}\dot{y}(t) = -Ae^{-At}y(t) + Ae^{-At}y(t) = 0,$$

ou seja, $z(t)$ é uma constante. Porém $z(0) = y(0) = x_0$ e $z(t) = x_0$. Deste modo, a partir da definição de $z(t)$, isso implica que $y(t) = e^{At}x_0 = x(t)$, e, portanto, as soluções são únicas.

□

Este resultado mostra que podemos encontrar a solução de equações diferenciais li-

neares por matrizes exponencializadas, mais não nos diz como calcular a exponenciais de matrizes. Se queremos escrever a solução explicitamente, devemos tomar a exponencial da matriz. Se A é diagonal, $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, então $e^{At} = \text{diag}(e^{a_1 t}, \dots, e^{a_n t})$ e as soluções em forma de componente são $x_i = e^{a_i t} x_{0i}$, porém, para matrizes mais gerais as soluções não são tão óbvias [28].

2.2 Equações diferenciais com coeficientes periódicos: teoria de Floquet

Para o caso mais fácil, supomos que a equação diferencial é dada por

$$\dot{x} = a(t)x, \quad a(t) = a(t+T), \quad (2.2.6)$$

quando $x \in \mathbb{R}$. Integrando, encontramos que

$$x(t) = e^{\int_0^t a(s)ds} x_0. \quad (2.2.7)$$

Por isso $\varphi(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$ é a matriz fundamental para o problema $x(t) = \varphi(t)x_0$. Agora, desde que

$$\int_0^{t+T} a(s)ds = \int_0^T a(s)ds + \int_T^{t+T} a(s)ds,$$

e, usando a periodicidade de $a(s)$, $a(s) = a(s+T)$,

$$\int_T^{t+T} a(s)ds = \int_0^t a(s)ds,$$

temos

$$\varphi(t+T) = \left\{ \exp \left[\int_0^T a(s)ds \right] \right\} \left\{ \exp \left[\int_0^t a(s)ds \right] \right\},$$

ou ainda,

$$\varphi(t+T) = \varphi(T)\varphi(t).$$

Em caso particular

$$\varphi(nT) = \varphi(T)^n \quad n \in \mathbb{N}.$$

O número $\varphi(T) = e^{\sigma T}$ é chamado de multiplicador de Floquet, enquanto que σ é chamado de expoente de Floquet [28]. Observe que σ é determinado apenas por uma constante

$$\sigma = \frac{1}{T} \log \varphi(T) + \frac{2k\pi i}{T} \quad (2.2.8)$$

para qualquer inteiro k . Para determinar a estabilidade da origem (que é um ponto estacionário) definimos $y(t) = \varphi(t)e^{-\sigma t}$. Então

$$y(t+T) = \varphi(t+T)e^{-\sigma(t+T)} = \varphi(t)e^{-\sigma t}$$

desde que $\varphi(t+T)e^{-\sigma T} = \varphi(t)$. Por isso, $y(t) = y(t+T)$, ou seja, $y(t)$ é periódica e limitada. Assim

$$x(t) = \varphi(t)x_0 = y(t)e^{\sigma t}x_0. \quad (2.2.9)$$

Por isso, se $\text{Re}\sigma < 0$ as soluções convergem, caso contrário, $\text{Re}\sigma > 0$ as soluções divergem [30].

Segundo Wiesenfeld *et al* [31], a teoria de Floquet é uma teoria tão quanto mais geral, pois trata de equações diferenciais lineares com coeficientes periódicos do tipo

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.2.10)$$

Definição 2.2.1. *A matriz fundamental correspondente à equação (2.2.10), obedece a equação $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ e tem valor inicial $\Phi(0) = \mathbb{I}$. Φ é uma matriz $n \times n$, cujos os elementos estão em \mathbb{R} se os coeficientes de $A(t)$ são reais [30].*

Teorema 2.2.1. *Considere o sistema linear*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2.2.11)$$

onde $A(t)$ é uma matriz contínua $n \times n$ e periódica em T . A matriz fundamental $\Phi(t)$ dessa equação pode ser escrita como o produto de duas matrizes $n \times n$

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt}, \quad (2.2.12)$$

com $P(t+T) = P(t)$ e B uma matrix constante $n \times n$ [30].

Prova. Uma vez que há uma evolução temporal, a matriz fundamental admite uma inversa.

Então diferenciando o operador $\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = \mathbb{I}$ obtemos

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = -\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A(t)\Phi\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A(t). \quad (2.2.13)$$

Diferenciando o operador $\Phi^{-1}(t)\Phi(t+T)$ encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Phi^{-1}(t)\Phi(t+T)] &= -\Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t+T) + \Phi^{-1}(t)A(t+T)\Phi(t+T) \\ &= -\Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t+T) + \Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t+T) = 0, \end{aligned}$$

implicando que $\Phi^{-1}(t)\Phi(t+T)$ é uma constante no tempo. Podemos então escrever $\Phi^{-1}(t)\Phi(t+T) = e^{BT}$.

Finalmente podemos perceber que

$$P(t+T) = \Phi(t+T)e^{-B(t+T)} = \Phi(t)e^{BT}e^{-B(t+T)} = \Phi(t)e^{-Bt} = P(t).$$

□

Com isso, encontramos que $x(t) = \Phi(t)x_0 = \sum_i a_i e^{\lambda_i t} P(t) v_i$, onde λ_i e v_i são os autovalores e autovetores respectivos de B [28]. Como $\Phi(0) = \mathbb{I} = P(0)$, então $P(T) = \mathbb{I}$ e $\Phi(T)v_i = e^{\lambda_i T} v_i$, onde $e^{\lambda_i T}$ são os multiplicadores de Floquet, que definem o comportamento do sistema ao longo do tempo [30]. Portanto, se o módulo de algum multiplicador

de Floquet for maior que 1, no sistema (2.2.11), há instabilidade associada à direção do autovetor correspondente no espaço de fase [26].

2.3 Equação de Mathieu

Quando equações diferenciais parciais como a de Laplace, Poisson e a equação de onda são resolvidas com condições de contorno cilíndricas ou esféricas, encontramos soluções radiais, que são as funções de Bessel, e soluções angulares, que são $\sin(m\phi)$, $\cos(m\phi)$ em casos cilíndricos e harmônicos esféricos em casos esféricos [7].

Quando a condição de contorno circular se torna elíptica nesses problemas cilíndricos, somos levados às funções de Mathieu, que, portanto, podem ser denominadas funções cilíndricas elípticas [9]. A Equação geradora dessas funções é dada por

$$\ddot{x}(t) + [\lambda - 2q \cos(2t)]x(t) = 0. \quad (2.3.14)$$

Podemos perceber que o autovalor $\lambda(q)$ é uma função do parâmetro contínuo q na equação diferencial ordinária (EDO) de Mathieu. Segundo Weber e Arfken [7], é essa dependência de parâmetro que complica a análise de funções de Mathieu e as coloca entre as mais difíceis funções especiais usadas na Física.

Uma vez que a EDO de Mathieu é invariante sob paridade ($t \rightarrow -t$), as funções de Mathieu têm paridade definida. As de paridade ímpar que têm período 2π e, para q pequeno, começam com $\sin[(2n+1)t]$ são denominadas $\text{MathieuS}_{2n+1}(q, t)$, sendo n inteiro, $n = 0, 1, 2, \dots$. Funções de Mathieu de paridade ímpar e período π que começam com $\sin(2nt)$ para q pequeno são denominadas $\text{MathieuS}_{2n}(q, t)$, com $n = 1, 2, \dots$. Já as funções de Mathieu de paridade par, de período π , que começam com $\cos(2nt)$ para q pequeno, são denominadas $\text{MathieuC}_{2n}(q, t)$, enquanto as de período 2π que começam com $\cos[(2n+1)t]$, $n = 0, 1, \dots$ para q pequeno são denominadas $\text{MathieuC}_{2n+1}(q, t)$.

No limite, onde o parâmetro $q \rightarrow 0$, ou seja, a EDO de Mathieu tornando-se a EDO do

oscilador harmônico, as funções de Mathieu se reduzem as funções trigonométricas.

A condição de periodicidade $\phi(t + 2\pi) = \phi(t)$ é suficiente para determinar um conjunto de autovalores λ em termos de q . Uma analogia elementar desse resultado é o fato de que uma solução da EDO do oscilador harmônico clássico $\ddot{u}(t) + \lambda u(t) = 0$ tem período 2π se, e somente se, $\lambda = n^2$ for o quadrado de um inteiro.

Queremos mostrar que as funções de Mathieu são:

- par em t e de período π se, e somente se, $\dot{\phi}_1(\pi/2) = 0$;
- ímpar e de período π se, e somente se, $\phi_2(\pi/2) = 0$;
- par e de período 2π , se, e somente se, $\phi_1(\pi/2) = 0$;
- ímpar e de período 2π , se, e somente se, $\dot{\phi}_2(\pi/2) = 0$,

em que $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são duas soluções linearmente independentes da EDO, de modo que

$$\phi_1(0) = 1, \quad \dot{\phi}_1(0) = 0, \quad \phi_2(0) = 0, \quad \dot{\phi}_2(0) = 1. \quad (2.3.15)$$

O primeiro caso corresponde a $\text{MathieuC}_{2n}(q, t)$, com $\dot{\phi}_1(\pi/2) = -2n \text{sen} 2nt|_{t=\pi/2} + \dots = 0$ para $n = 1, 2, \dots$. O segundo é $\text{MathieuS}_{2n}(q, t)$, com $\phi_2(\pi/2) = \text{sen} 2nt|_{t=\pi/2} + \dots = 0$. O terceiro caso é o $\text{MathieuC}_{2n+1}(q, t)$, com $\phi_1(\pi/2) = \cos(2n+1)t|_{t=\pi/2} + \dots = 0$. O quarto caso é o $\text{MathieuS}_{2n+1}(q, t)$.

A chave da prova é a abordagem de Floquet para as EDOs lineares de segunda ordem com funções de coeficientes periódicos, tal como a EDO de Mathieu [7]. Se $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são duas soluções linearmente independentes da EDO, qualquer outra solução ϕ pode ser expressa como

$$\phi(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t), \quad (2.3.16)$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Agora, $\phi_k(t + 2\pi)$ também são soluções porque uma EDO como

essa é invariante sob a translação $t \rightarrow t + 2\pi$ e, em particular,

$$\begin{aligned}\phi_1(t + 2\pi) &= a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t), \\ \phi_2(t + 2\pi) &= b_1\phi_1(t) + b_2\phi_2(t),\end{aligned}\tag{2.3.17}$$

com constantes a_i, b_j . Substituindo a Eq. (2.3.17) na (2.3.16), obtemos

$$\phi(t + 2\pi) = (c_1a_1 + c_2b_1)\phi_1(t) + (c_2b_2 + c_1a_2)\phi_2(t),\tag{2.3.18}$$

em que as constantes c_i podem ser escolhidas como soluções das equações de autovalor

$$\begin{aligned}a_1c_1 + b_1c_2 &= \lambda c_1, \\ a_2c_1 + b_2c_2 &= \lambda c_2.\end{aligned}\tag{2.3.19}$$

Então, o **teorema de Floquet** afirma que $\phi(t + 2\pi) = \lambda\phi(t)$, em que λ é uma raiz da

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.\tag{2.3.20}$$

Obtemos um **corolário** útil se definirmos μ e y por $\lambda = \exp(2\pi\mu)$ e $y(t) = \exp(-\mu t)\phi(t)$, portanto

$$y(t + 2\pi) = e^{-\mu t} e^{-2\pi\mu} \phi(t + 2\pi) = e^{-\mu t} \phi(t) = y(t).\tag{2.3.21}$$

Assim, $\phi(t) = e^{\mu t}y(t)$, sendo y uma função periódica em t com período 2π .

Vamos aplicar o argumento de Floquet às $\phi_k(t + \pi)$, que também são soluções da **EDO** de Mathieu porque a última é invariante sob a translação $t \rightarrow t + \pi$. Usando valores especiais na Eq. (2.3.15), sabemos que

$$\begin{aligned}\phi_1(t + \pi) &= \phi_1(\pi)\phi_1(t) + \dot{\phi}_1(\pi)\phi_2(t), \\ \phi_2(t + \pi) &= \phi_2(\pi)\phi_1(t) + \dot{\phi}_2(\pi)\phi_2(t),\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

pois essas combinações lineares de $\phi_k(t)$ são soluções da **EDO** de Mathieu com os valores

$\phi_i(t + \pi)$, $\dot{\phi}_i(t + \pi)$, para $t = 0$. Por conseguinte

$$\phi_i(t + \pi) = \lambda_i \phi_i(t), \quad (2.3.23)$$

em que λ_i são as raízes de

$$\begin{vmatrix} \phi_1(\pi) - \lambda & \phi_2(\pi) \\ \dot{\phi}_1(\pi) & \dot{\phi}_2(\pi) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.3.24)$$

O termo constante no polinômio característico é dado pela wronskiano

$$W(\phi_1(t), \phi_2(t)) = C, \quad (2.3.25)$$

uma constante porque o coeficiente de $\dot{\phi}$ na EDO angular de Mathieu desaparece, implicando que $dW/dt = 0$. De fato, usando a Eq. (2.3.15),

$$\begin{aligned} W(\phi_1(0), \phi_2(0)) &= \phi_1(0)\dot{\phi}_2(0) - \dot{\phi}_1(0)\phi_2(0) = 1, \\ &= W(\phi_1(\pi), \phi_2(\pi)), \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

portanto a equação de autovalores se torna

$$\begin{aligned} [\phi_1(\pi) - \lambda] [\dot{\phi}_2(\pi) - \lambda] - \phi_2(\pi)\dot{\phi}_1(\pi) &= 0, \\ \lambda^2 - [\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)]\lambda + 1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

com $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = \phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)$.

Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, então $\lambda_1 = \exp(i\alpha)$ e $\lambda_2 = \exp(-i\alpha)$, portanto $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos(\alpha)$. Para $\alpha \neq 0, \pi, 2\pi, \dots$ esse caso corresponde a $|\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)| < 2$, em que ambas as soluções permanecem ligadas, à medida que $t \rightarrow \infty$ em períodos de π usando a Eq. (2.3.23). Esses casos não resultam em funções periódicas de Mathieu, e isso também acontece quando $|\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)| > 2$. Se $\alpha = 0$, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ for uma raiz dupla, então as α_i têm período π e $|\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)| = 2$. Se $\alpha = \pi$, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ for, mais uma vez, uma raiz dupla, então $|\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)| = -2$ e ϕ_i têm período 2π com $\phi_i(t + \pi) = -\phi_i(t)$.

Como a EDO angular de Mathieu é invariante sob uma transformação de paridade $t \rightarrow$

$-t$, é conveniente considerar soluções

$$\phi_e(t) = \frac{1}{2} [\phi(t) + \phi(-t)] \quad \phi_o(t) = \frac{1}{2} [\phi(t) - \phi(-t)] \quad (2.3.28)$$

de paridade definida, que obedecem às mesmas condições iniciais que ϕ_i . Agora, renomeamos $\phi_e \rightarrow \phi_1$, $\phi_o \rightarrow \phi_2$, considerando que ϕ_1 seja par e ϕ_2 ímpar sob paridade. Essas soluções de paridade definida da EDO de Mathieu são denominadas **funções de Mathieu** e rotuladas de acordo com a nomenclatura que discutimos anteriormente.

Se $\phi_1(t)$ tiver período π , então $\dot{\phi}_1(t + \pi) = \dot{\phi}_1(t)$ também tem período π , mais é ímpar sob paridade. Substituindo $t = -\pi/2$, obtemos

$$\dot{\phi}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{\phi}_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\dot{\phi}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{então,} \quad \dot{\phi}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (2.3.29)$$

Para vermos que $\phi_1(t)$ tem período π usamos

$$\phi_1(t + \pi) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t). \quad (2.3.30)$$

Essa expressão é válida porque $\phi_1(t + \pi)$ é uma solução de EDO angular de Mathieu. Agora determinamos os coeficientes c_i , fazendo $t = -\pi/2$, e recordando que ϕ_1 e $\dot{\phi}_2$ são pares sob paridade, ao passo que ϕ_2 e $\dot{\phi}_1$ são ímpares. Isso resulta em

$$\begin{aligned} \phi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= c_1\phi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - c_2\phi_2\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ \dot{\phi}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -c_1\dot{\phi}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2\dot{\phi}_2\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Uma vez que $\dot{\phi}_1(\pi/2) = 0$, $\dot{\phi}_2(\pi/2) \neq 0$, ou o wronskiano desapareceria e resultaria $\phi_2 \sim \phi_1$. Daí, $c_2 = 1$ resulta da segunda equação e c_1 da primeira. Assim, $\phi_1(t + \pi) = \phi_1(t)$. Os outros casos que apresentamos antes podem ser provados de modo semelhante.

As funções de Mathieu representam sistemas ortogonais de funções [7]. Portanto, para m, n inteiros não-negativos, as relações de ortogonalidade e normalização são

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{MathieuC}_m \text{MathieuC}_n dt = \int_{-\pi}^{\pi} \text{MathieuS}_m \text{MathieuS}_n dt = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{MathieuC}_m \text{MathieuS}_n dt = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\text{MathieuC}_{2n}]^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} [\text{MathieuS}_{2n}]^2 dt = \pi \quad \text{se } n \geq 1 \quad \int_0^{\pi} [\text{MathieuC}_0]^2 dt = \pi.$$

Se uma função $f(t)$ for periódica com período π , então ela pode ser expandida em uma série de funções ortogonais de Mathieu como

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 \text{MathieuC}_0(q, t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{MathieuC}_{2n}(q, t) + b_n \text{MathieuS}_{2n}(q, t)],$$

com

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{MathieuC}_{2n}(q, t) dt & n \geq 0; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{MathieuS}_{2n}(q, t) dt & n \geq 1. \end{aligned}$$

2.3.1 Método de Hill

Com o teorema de Floquet, podemos assumir uma solução em série

$$w = e^{\mu t} \phi(t) = e^{\mu t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{2nit} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{(\mu+2ni)t}. \quad (2.3.31)$$

Quando colocamos essa solução na equação de Mathieu (2.3.14),

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} \left\{ (\mu + 2in)^2 + \lambda - 2q \left[\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} \right] \right\} e^{(\mu+2ni)t} = 0, \quad (2.3.32)$$

onde obtemos a equação

$$-qc_{2n-2} + [(\mu + 2in)^2 + \lambda] c_{2n} - qc_{2n+2} = 0. \quad (2.3.33)$$

multiplicando por $i^2 = -1$, e em seguida dividindo pelo termo do meio

$$\frac{q}{(2n - \mu i)^2 - \lambda} c_{2n-2} + c_{2n} + \frac{q}{(2n - \mu i)^2 - \lambda} c_{2n+2} = 0. \quad (2.3.34)$$

Vamos agora definir

$$\Gamma_{2n} = \frac{q}{(2n - \mu i)^2 - \lambda}. \quad (2.3.35)$$

Os coeficientes, c_i tem soluções não triviais quando o determinante infinito Δ é nulo

$$\Delta(i\mu) = \begin{vmatrix} \dots & & & & \\ \Gamma_{-2} & 1 & \Gamma_{-2} & & \\ & \Gamma_0 & 1 & \Gamma_0 & \\ & & \Gamma_2 & 1 & \Gamma_2 \\ & & & & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (2.3.36)$$

Considere a função

$$\Lambda = \frac{1}{\cos \pi i \mu - \cos \pi \sqrt{\lambda}}. \quad (2.3.37)$$

Tal como nosso determinante, Λ tem um pólo simples em um $\lambda = (2n - \mu i)^2$, de modo que a função

$$\xi = \Delta(i\mu) - \kappa \lambda, \quad (2.3.38)$$

não tem singularidade se κ for escolhida corretamente sendo ligado ao infinito [32]. O $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \Delta(\mu i) = 1$, uma vez que as funções Γ_{2n} desaparecem no infinito, restando apenas os termos da diagonal e $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \Lambda(\mu i) = 0$ pois o \cosh é infinito no limite. Pelo teorema de Liouville (de cálculo complexo) [7], isso limita à uma constante, e sempre uma constante. Por isso temos

$$\kappa = \frac{\Delta(i\mu) - 1}{\lambda}. \quad (2.3.39)$$

Em seguida, consideramos o caso em que $\mu = 0$ e encontramos

$$\kappa = (\Delta(0) - 1)(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) \rightarrow \frac{\Delta(i\mu) - 1}{\lambda} = (\Delta(0) - 1)(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}). \quad (2.3.40)$$

Em seguida, suponhamos que μ é escolhida para satisfazer a nossa exigência de que o

determinante é nulo. Assim

$$\cos \pi i \mu - \cos \pi \sqrt{\lambda} = (1 - \Delta(0))(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) \rightarrow i \mu = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left((1 - \Delta(0))(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) \right).$$

Lembrando que nossa solução é da forma $w = e^{\mu t} \phi(t)$, com $\phi(t+T) = \phi(t)$. Esta solução decai monotonicamente à zero quando μ tem parte real negativa. A transição de estabilidade para a instabilidade ocorre quando μ cruza o eixo imaginário [32], caso em que temos

$$\mu = \pm \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left((1 - \Delta(0))(1 - \cosh \pi \sqrt{a}) \right). \quad (2.3.41)$$

3 *Funções de Green*

Na matemática, uma função de Green é um tipo de função usada como núcleo de um operador linear integral na resolução de equações diferenciais não homogêneas com condições de contorno especificadas [33]. Tecnicamente a função de Green de um operador linear \mathcal{L}_t é qualquer das soluções de

$$\mathcal{L}_t G(t, t') = \delta(t - t'),$$

onde o δ -Dirac pode ser pensada como uma generalização da delta de Kronecker para o caso contínuo [7]. Toda função que obedece essa relação recebe o nome do matemático britânico George Green (1793–1841), que desenvolveu o conceito em 1830.

Neste capítulo temos por finalidade obter as funções de Green do osciladores harmônico amortecido e do oscilador parametricamente forçado.

3.1 Oscilador harmônico

Consideremos a equação de um oscilador harmônico forçado como sendo

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t), \tag{3.1.1}$$

onde γ é o coeficiente de fricção, ω_0 a frequência natural do oscilador (positiva e constante) e $F(t)$ é uma força externa dependente do tempo. Nesta seção vamos obter a função de

Green por dois métodos: pelo método de Fourier e pelo método da integral.

3.1.1 Método de Fourier

Assumimos que a força $F(t)$ tem uma transformada de Fourier,

$$\hat{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} F(t) dt. \quad (3.1.2)$$

Com isto, estamos supondo que $F(t)$ é nulo para $|t|$ grandes. Isso juntamente com a presença do amortecimento torna razoável supor que $x(t)$ e sua primeira derivada vai à zero para longos $|t|$, e, portanto sua transformada de Fourier existe [34]. Assim:

$$\hat{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)] e^{ikt} dt. \quad (3.1.3)$$

Admitimos que

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{ikt} dt. \quad (3.1.4)$$

Logo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} e^{ikt} dt + \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{ikt} dt + \omega_0^2 \hat{x}(k) = \hat{F}(k). \quad (3.1.5)$$

Integramos a primeira por parte uma vez e obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} e^{ikt} dt = \left[\frac{dx}{dt} e^{ikt} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} (e^{ikt}) dt = -ik \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{ikt} dt. \quad (3.1.6)$$

Assim a Eq. (3.1.5) se torna

$$\frac{(\gamma - ik)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{ikt} dt + \omega_0^2 \hat{x}(k) = \hat{F}(k). \quad (3.1.7)$$

Resolvendo a integral usando as condições de contorno, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{ikt} dt = -\frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{ikt} dt = -ik \hat{x}(k). \quad (3.1.8)$$

Daí a Eq. (3.1.7) se torna

$$(-k^2 - i\gamma k + \omega_0^2)\hat{x}(k) = \hat{F}(k). \quad (3.1.9)$$

Desde que $(-k^2 - i\gamma k + \omega_0^2)$ não tenha zero no eixo real

$$\hat{x}(k) = \frac{\hat{F}(k)}{(-k^2 - i\gamma k + \omega_0^2)}, \quad (3.1.10)$$

e pela transformada de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{F}(k)}{(-k^2 - i\gamma k + \omega_0^2)} e^{-ikt} dk. \quad (3.1.11)$$

Usando a definição de $\hat{F}(k)$, obtemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t') e^{-ik(t-t')}}{(-k^2 - i\gamma k + \omega_0^2)} dk. \quad (3.1.12)$$

Com a combinação linear da solução homogênea, podemos obter uma solução geral:

$$x(t) = x_h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') F(t'). \quad (3.1.13)$$

sendo

$$G(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(t-t')}}{(-k^2 - i\gamma k + \omega_0^2)} dk. \quad (3.1.14)$$

Para as duas soluções lineares independentes da equação homogênea, encontramos que

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \text{sen}(\rho t) + Be^{-\frac{\gamma}{2}t} \text{cos}(\rho t), \quad (3.1.15)$$

onde A e B devem ser escolhidos para satisfazer as condições de contorno e $\rho^2 \doteq \omega_0^2 - \gamma^2/4$.

Vamos agora calcular a função $G(t, t')$. Primeiro escrevemos

$$G(t, t') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(t-t')}}{(k - k_1)(k - k_2)} dk \quad (3.1.16)$$

onde $k_1 = \rho - i\gamma/2$ e $k_2 = -\rho - i\gamma/2$. Vamos supor que pela definição $\omega_0 > \gamma/2$, mas isso não é uma forma essencial para o que se segue. O fato importante sobre k_1 e k_2 é que suas

partes imaginárias são sempre negativas.

Realizamos a integral em um plano complexo cujo contorno pertinente será chamado de C , sendo executado ao longo do eixo real de $-K$ para $+K$ e em seguida, fechamos na parte inferior do plano com semicírculo de raio K sobre a origem (Fig. 3.1).

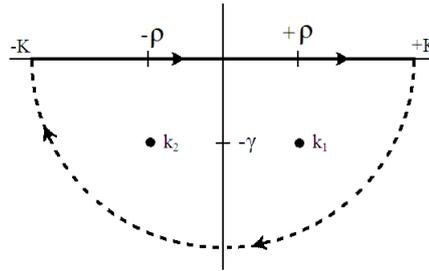


Figura 3.1: Contorno utilizado na avaliação da função de Green para o oscilador harmônico amortecido.

Vemos que, quando $t - t' > 0$, este é o contorno apropriado, pois se $t - t' < 0$ o contorno adequado será o semicírculo superior do plano. Logo:

$$\begin{aligned} I(t, t') &\doteq -\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{e^{-ik(t-t')}}{(k-k_1)(k-k_2)} dk & (3.1.17) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-K}^K \frac{e^{-ik(t-t')}}{(k-k_1)(k-k_2)} dk - \frac{1}{2\pi} \int_0^{-\pi} \frac{e^{-iK(t-t')e^{i\phi}}}{(Ke^{i\phi}-k_1)(Ke^{i\phi}-k_2)} iKe^{i\phi} d\phi. \end{aligned}$$

No primeiro termo do lado direito da Eq. (3.1.17), a integral é tomada ao longo do eixo real.

Já no segundo, integramos ao longo do semicírculo de raio K , em que

$$k = Ke^{i\phi}, dk = iKe^{i\phi} d\phi \quad (3.1.18)$$

onde ϕ é avaliado de 0 à $-\pi$. Agora vamos admitir que K , o raio de contorno, é muito grande. Então, desde que as partes imaginárias de k_1 e k_2 estejam na parte inferior do plano, o contorno C engloba ambos, podendo avaliar a integral pelo Teorema dos Resíduos [33].

Assim

$$-2\pi I(t, t') = \lim_{K \rightarrow \infty} \oint_C \frac{e^{-ik(t-t')}}{(k-k_1)(k-k_2)} dk = (-1)(2\pi i) \left[\frac{e^{-ik_1(t-t')}}{k_1 - k_2} + \frac{e^{-ik_2(t-t')}}{k_2 - k_1} \right].$$

O fator (-1) entra pelo fato do contorno ser fechado na parte inferior do semi-plano, e feita

no sentido horário. Logo

$$I(t, t') = \frac{1}{\rho} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \text{sen}[\rho(t-t')]. \quad (3.1.19)$$

Como $K \rightarrow \infty$, o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.1.7) torna exatamente $G(t, t')$.

Contudo

$$\frac{1}{\rho} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \text{sen}[\rho(t-t')] = G(t, t') + \lim_{K \rightarrow \infty} H, \quad (3.1.20)$$

onde

$$H = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{-\pi} \frac{e^{-iK(t-t')e^{i\phi}}}{(Ke^{i\phi} - k_1)(Ke^{i\phi} - k_2)} iKe^{i\phi} d\phi. \quad (3.1.21)$$

Com $K \rightarrow \infty$ essa integral desaparece pelo lema de Jordan. Por isso

$$G(t, t') = \frac{1}{\rho} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \text{sen}[\rho(t-t')], \quad \text{se } t > t' \quad (3.1.22)$$

Agora se $t < t'$, o argumento falha porque as integrais envolvidas em I crescem exponencialmente. Neste caso, teríamos que escolher uma linha de contorno que se fecha no semi-plano superior. Só que nesse contorno não vai existir singularidade, de modo que

$$G(t, t') = 0, \quad \text{se } t < t'. \quad (3.1.23)$$

Assim, podemos escrever a solução geral da Eq. (3.1.1) como

$$x(t) = x_h(t) + \int_{t_0}^t \frac{1}{\rho} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \text{sen}[\rho(t-t')] F(t') dt', \quad (3.1.24)$$

onde t_0 é o tempo em que as condições iniciais são aplicadas. Note que na Eq. (3.1.24) o termo envolvendo a integral desaparece em $t = t_0$ bem como a sua derivada. Assim, os coeficientes A e B , usados na Eq. (3.1.15), são determinados a partir das condições iniciais, $x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, da mesma forma que seria se não houvesse nenhum termo não homogêneo presente.

3.1.2 Método da integração

Olhando a Eq. (3.1.17) podemos perceber que $G(t, t')$ tem uma estreita semelhança com a solução da equação homogênea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.1.25)$$

Na verdade, se considerarmos $G(t, t')$ como uma função dependendo apenas de t para $t > t'$, ela pode ser reescrita por uma combinação linear das soluções da parte homogênea. Desta forma, os coeficientes desta combinação depende apenas de t' ,

$$G(t, t') = a(t')e^{-\frac{\gamma}{2}t} \text{sen}(\rho t) + b(t')e^{-\frac{\gamma}{2}t} \text{cos}(\rho t) \quad (3.1.26)$$

onde

$$a(t') = \frac{e^{\frac{\gamma}{2}t'}}{\rho} \text{cos}(\rho t'), \quad b(t') = -\frac{e^{\frac{\gamma}{2}t'}}{\rho} \text{sen}(\rho t').$$

Em todas as partes, exceto em $t = t'$, $G(t, t')$ deve satisfazer a Eq. (3.1.25). Logo para $t > t'$ a função de Green é uma combinação linear das duas soluções da Eq. (3.1.25).

Voltamos para o caso da Eq. (3.1.1). Supomos que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são duas soluções linearmente independentes de

$$\mathcal{L}_t x(t) = 0.$$

Queremos resolver

$$\mathcal{L}_t G(t, t') = \frac{d^2 G(t, t')}{dt^2} + \gamma \frac{dG(t, t')}{dt} + \omega_0^2 G(t, t') = \delta(t - t'). \quad (3.1.27)$$

Para $t > t'$, escrevemos

$$G(t, t') = a_1(t')x_1(t) + a_2(t')x_2(t), \quad (3.1.28)$$

e para $t < t'$, $G(t, t') = 0$. Em $t = t'$ $G(t, t')$ deve ser contínua. Se não fosse, dG/dt conteria o δ -Dirac e portanto d^2G/dt^2 conteria a derivada da mesma. No entanto, o lado direito da Eq. (3.1.27) existe apenas um $\delta(t - t')$, então podemos inferir que de fato $G(t, t')$ é contínua

em $t = t'$ [34].

Através de uma integração por partes em ambos os lados da Eq. (3.1.27), partindo de $t = t' - \varepsilon$ até $t = t' + \varepsilon$, podemos concluir que

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \frac{d^2 G(t, t')}{dt^2} dt + \gamma \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \frac{dG(t, t')}{dt} dt + \omega_0^2 \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} G(t, t') dt = 1.$$

Uma vez que $G(t, t')$ é contínua em $t = t'$ o domínio de integração pode ser feito arbitrariamente pequeno, logo o último termo do lado esquerdo desta equação desaparece. Assim

$$\left\{ \left[\frac{dG(t, t')}{dt} \right]_{t'+\varepsilon} - \left[\frac{dG(t, t')}{dt} \right]_{t'-\varepsilon} \right\} + \gamma [G(t'+\varepsilon, t') - G(t'-\varepsilon, t')] = 1$$

Como $G(t, t')$ é contínua em $t = t'$, o segundo termo do lado esquerdo desaparece, ficando apenas com

$$\left[\frac{dG(t, t')}{dt} \right]_{t'+\varepsilon} - \left[\frac{dG(t, t')}{dt} \right]_{t'-\varepsilon} = 1. \quad (3.1.29)$$

A partir da continuidade de $t = t'$, obtemos

$$a_1(t')x_1(t') + a_2(t')x_2(t') = 0,$$

enquanto que da Eq. (3.1.29), extraímos

$$a_1(t')\dot{x}_1(t') + a_2(t')\dot{x}_2(t') = 1.$$

Com isso,

$$a_1(t') = -\frac{x_2(t')}{W(t')}, \quad a_2(t') = \frac{x_1(t')}{W(t')},$$

onde $W(t')$ é o Wronskiano de $x_1(t')$ e $x_2(t')$, definido por

$$W(t') = \begin{vmatrix} x_1(t') & x_2(t') \\ \dot{x}_1(t') & \dot{x}_2(t') \end{vmatrix}.$$

Colocando os resultados acima na Eq. (3.1.28), vemos que,

$$G(t, t') = \frac{x_2(t)x_1(t') - x_1(t)x_2(t')}{W(t')}, \quad t > t'. \quad (3.1.30)$$

Este resultado é válido mesmo quando $\gamma = \gamma(t)$ e $\omega_0 = \omega_0(t)$ [34].

3.2 Oscilador parametricamente forçado

A função de Green da Eq. (2.2.11) pode ser obtida a partir do operador $H(t, t') = \Phi(t)\Phi^{-1}(t')$. Uma solução ansatz é $x(t) = H(t, t')x_i$, onde, por exemplo

$$x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são as condições iniciais para a função de Green de um oscilador. Podemos constatar que essa solução proposta é de fato correta, pois obedece a Eq. (2.2.11) com a condição inicial $x(t') = x_i$. Pela unicidade da solução da Eq. (2.2.11), podemos concluir que essa é a única solução e que $G(t, t') = H_{12}(t, t')$.

Nesta seção vamos obter a função de Green da equação do oscilador parametricamente forçado (em formato adimensional) que é dada por

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\gamma \dot{x}(t) + F_p \cos(2\omega t)x(t). \quad (3.2.31)$$

Primeiramente iremos obter de uma forma aproximada pelo método da média. Em seguida, de uma maneira exata utilizando as funções de Mathieu e, por fim, pela integração numérica utilizando o algoritmo Runge Kutta 4.

3.2.1 Método da média

Partimos do pressuposto que γ e $F_p \sim O(\varepsilon)$, onde $\varepsilon \ll 1$. Querendo aplicar o método de perturbação [20], podemos escrever a Eq. (3.2.31) de uma forma mais adequada para a aplicação do método da média com a notação $\Omega = \omega_0^2 - \omega^2$, onde $\Omega \sim O(\varepsilon)$. Com essa substituição obtemos $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\Omega x(t) - \gamma \dot{x}(t) + F_p \cos(2\omega t)x(t)$. Ainda podemos reescrever a Eq. (3.2.31) em forma de um sistema de equações diferenciais, $\dot{x} = y$, $\dot{y} =$

$-\omega^2 x(t) + f(x, y, t)$, onde $f(x, y, t) = -\Omega x(t) - \gamma \dot{x} + F_p \cos(2\omega t)x(t)$. Logo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, y, t) \end{pmatrix}. \quad (3.2.32)$$

Admitindo que

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Pi(x, y, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, y, t) \end{pmatrix}; \quad (3.2.33)$$

encontramos que

$$\dot{X} = AX + \Pi(x, y, t). \quad (3.2.34)$$

Fazendo a seguinte transformação

$$X = P(t)e^{Bt}X_0, \quad (3.2.35)$$

onde a matriz fundamental do sistema, $\Phi(t) = P(t)e^{Bt}$, tem a seguinte propriedade

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \quad \Phi(0) = 1, \quad (3.2.36)$$

e

$$e^{Bt}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}. \quad (3.2.37)$$

Podemos inferir que a matriz periódica do sistema é dada por

$$P(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t) \\ -\omega \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (3.2.38)$$

e mais [20]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) \\ -\omega \text{sen}(\omega t) & -\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}. \quad (3.2.39)$$

Substituindo a Eq.(3.2.39) em (3.2.34), encontramos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\frac{1}{\omega}\text{sen}(\omega t) \\ -\text{sen}(\omega t) & -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x,y,t) \end{pmatrix}; \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega}\text{sen}(\omega t)f(x,y,t) \\ -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)f(x,y,t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Aplicando o método das médias em primera ordem

$$\begin{pmatrix} \langle \dot{U} \rangle \\ \langle \dot{V} \rangle \end{pmatrix} = -\frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \langle \text{sen}(\omega t)f(x,y,t) \rangle \\ \langle \cos(\omega t)f(x,y,t) \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.2.41)$$

em que filtramos os termos oscilando em 2ω e 4ω , obtemos

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\omega} \left[\gamma\omega u + \left(\Omega + \frac{F_p}{2} \right) v \right], \quad (3.2.42)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{2\omega} \left[\left(-\Omega + \frac{F_p}{2} \right) u + \gamma\omega v \right], \quad (3.2.43)$$

onde $U(t)$ e $V(t)$ foram substituídas por suas respectivas médias $u(t)$ e $v(t)$. Resolvendo as Eqs. (3.2.42) e (3.2.43) obtemos

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\left(\frac{\beta - \delta}{\kappa} \right) v_0 \text{senh}(\kappa t) + u_0 \text{cosh}(\kappa t) \right], \quad (3.2.44)$$

$$v(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[v_0 \text{cosh}(\kappa t) + \left(\frac{\beta + \delta}{\kappa} \right) u_0 \text{senh}(\kappa t) \right], \quad (3.2.45)$$

com $\kappa = \sqrt{\beta^2 - \delta^2}$, onde $\beta = -F_p/4\omega$ e $\delta = \Omega/2\omega$, e mais, para $t = 0$ temos u_0 e v_0 .

Podemos ainda reescrever as equações acima na forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \begin{pmatrix} \text{cosh}(\kappa t) & \left(\frac{\beta - \delta}{\kappa} \right) \text{senh}(\kappa t) \\ \left(\frac{\beta + \delta}{\kappa} \right) \text{senh}(\kappa t) & \text{cosh}(\kappa t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.46)$$

Para $t = 0$ a Eq. (3.2.35) se torna

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.47)$$

Substituindo a Eq. (3.2.47) na (3.2.46), encontramos que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \begin{pmatrix} \cosh(\kappa t) & -\frac{1}{\omega} \left(\frac{\beta-\delta}{\kappa} \right) \sinh(\kappa t) \\ \left(\frac{\beta+\delta}{\kappa} \right) \sinh(\kappa t) & -\frac{1}{\omega} \cosh(\kappa t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.48)$$

Das Eqs. (3.2.37) e (3.2.48) infere-se que

$$e^{Bt} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \begin{pmatrix} \cosh(\kappa t) & -\frac{1}{\omega} \left(\frac{\beta-\delta}{\kappa} \right) \sinh(\kappa t) \\ -\omega \left(\frac{\beta+\delta}{\kappa} \right) \sinh(\kappa t) & \cosh(\kappa t) \end{pmatrix}, \quad (3.2.49)$$

e mais

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

onde $\Phi(t)$ será dada por

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \times \\ &\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \cosh(\kappa t) - \frac{\beta+\delta}{\kappa} \sin(\omega t) \sinh(\kappa t) & \frac{\delta-\beta}{\omega\kappa} \cos(\omega t) \sinh(\kappa t) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \cosh(\kappa t) \\ \frac{\omega\kappa}{\delta-\beta} \cos(\omega t) \sinh(\kappa t) - \omega \sin(\omega t) \cosh(\kappa t) & \frac{\beta-\delta}{\kappa} \sin(\omega t) \sinh(\kappa t) + \cos(\omega t) \cosh(\kappa t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

A solução homogênea aproximada será

$$\begin{aligned} x_h(t) &\approx e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\left(\cos(\omega t) \cosh(\kappa t) - \frac{\beta+\delta}{\kappa} \sin(\omega t) \sinh(\kappa t) \right) x_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\delta-\beta}{\omega\kappa} \cos(\omega t) \sinh(\kappa t) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \cosh(\kappa t) \right) y_0 \right]. \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

A função de Green aproximada é dada por

$$\begin{aligned} G(t, t') &\approx e^{-\gamma(t-t')/2} \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \cosh[\kappa(t-t')] \sin(\omega t') - \frac{\beta-\delta}{\kappa\omega} \cos(\omega t) \sinh[\kappa(t-t')] \cos(\omega t') \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta+\delta}{\kappa\omega} \sin(\omega t) \sinh[\kappa(t-t')] \sin(\omega t') + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \cosh[\kappa(t-t')] \cos(\omega t') \right], \end{aligned}$$

que satisfaz a equação

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 + \gamma \frac{\partial}{\partial t} - F_p \cos(2\omega t) \right] G(t, t') = \delta(t-t'), \quad (3.2.52)$$

em $O(\varepsilon)$ [20].

Se $|\beta| < |\delta|$ a respectiva função de Green será, usando as respectivas relações trigonométricas

$$G(t, t') \approx \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \left\{ \cos[|\kappa|(t-t')] \text{sen}[\omega(t-t')] + \frac{\delta}{|\kappa|} \text{sen}[|\kappa|(t-t')] \cos[\omega(t-t')] - \frac{\beta}{|\kappa|} \text{sen}[|\kappa|(t-t')] \cos[\omega(t-t')] \right\}. \quad (3.2.53)$$

Se fizermos a seguinte troca de variável $t' = t - \tau$, a Eq. (3.2.53) se torna

$$G(t, t - \tau) \approx \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \left\{ \cos(|\kappa|\tau) \text{sen}(\omega\tau) + \frac{\delta}{|\kappa|} \text{sen}(|\kappa|\tau) \cos(\omega\tau) - \frac{\beta}{|\kappa|} \text{sen}(|\kappa|\tau) [\cos(2\omega t) \cos(\omega\tau) + \text{sen}(2\omega t) \text{sen}(\omega\tau)] \right\}. \quad (3.2.54)$$

Se $F_p = 0$ e $\omega = \omega_0$, a função de Green se torna

$$G(t, t') \approx \frac{1}{\omega_0} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \text{sen}[\omega_0(t-t')] \quad (3.2.55)$$

e a solução homogênea

$$x_h(t) \approx e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{y_0}{\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t) \right]. \quad (3.2.56)$$

3.2.2 Solução exata

Fazendo $\dot{x} = y$, podemos reescrever a Eq. (3.2.31) de uma forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 + F_p \cos(2\omega t) & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.2.57)$$

cuja solução é dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Admitindo que

$$Ce(t) \doteq e^{-\frac{\gamma}{2}t} \text{MathieuC} \left(\frac{4\omega_0^2 - \gamma^2}{4\omega^2}, \frac{F_p}{2\omega^2}, \omega t \right), \quad (3.2.58)$$

$$Se(t) \doteq e^{-\frac{\gamma}{2}t} \text{MathieuS} \left(\frac{4\omega_0^2 - \gamma^2}{4\omega^2}, \frac{F_p}{2\omega^2}, \omega t \right), \quad (3.2.59)$$

a matriz fundamental será dada por

$$\Phi(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \begin{pmatrix} Ce(t) + \frac{\gamma}{2\omega} Se(t) & \frac{1}{\omega} Se(t) \\ \frac{\gamma}{2} \left[\frac{1}{\omega} \dot{Se}(t) - Ce(t) \right] - \frac{\gamma^2}{4\omega} Se(t) + \dot{Ce}(t) & -\frac{\gamma}{2\omega} Se(t) + \frac{1}{\omega} \dot{Ce}(t) \end{pmatrix}.$$

A função de Green que satisfaz a Eq. (3.2.52) é dada por

$$G(t, t') = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \{ Se(t)Ce(t') - Ce(t)Se(t') \}. \quad (3.2.60)$$

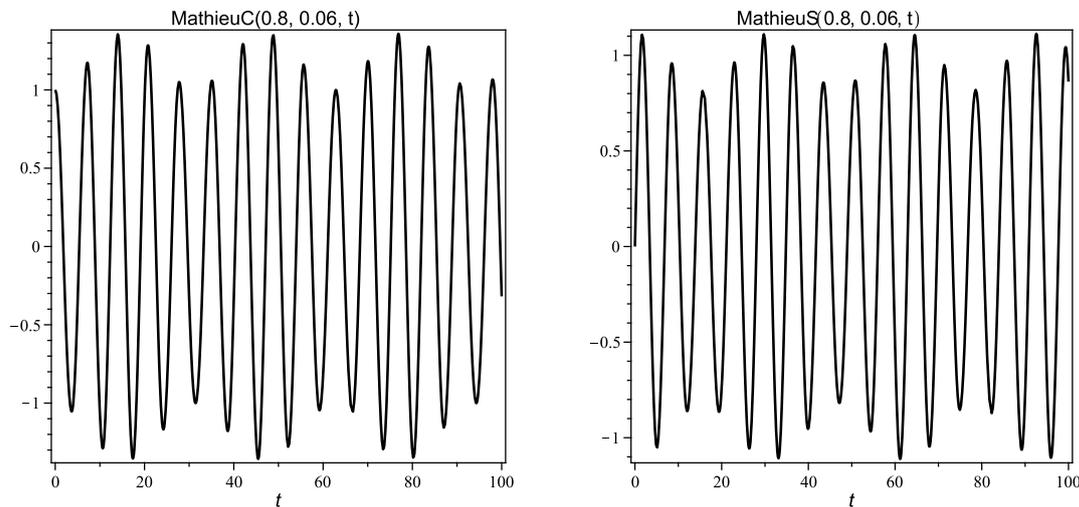


Figura 3.2: Funções de Mathieu $\text{MathieuC}(0.8, 0.06, t)$ e $\text{MathieuS}(0.8, 0.06, t)$ que estão presentes no programa MAPLE.

3.2.3 Método numérico

Nos vários quadros da Fig. (3.3) mostramos algumas funções de Green com tempos iniciais. Elas são espaçadas verticalmente de forma homogênea dentro de um período de π/ω , para uma melhor visibilidade. Todas as funções de Green são assintoticamente nulas quando $t \rightarrow \infty$. Os resultados numéricos foram obtidos via integração numérica pelo método

RK4 com um intervalo de tempo de integração dado por $\pi/(512\omega)$.

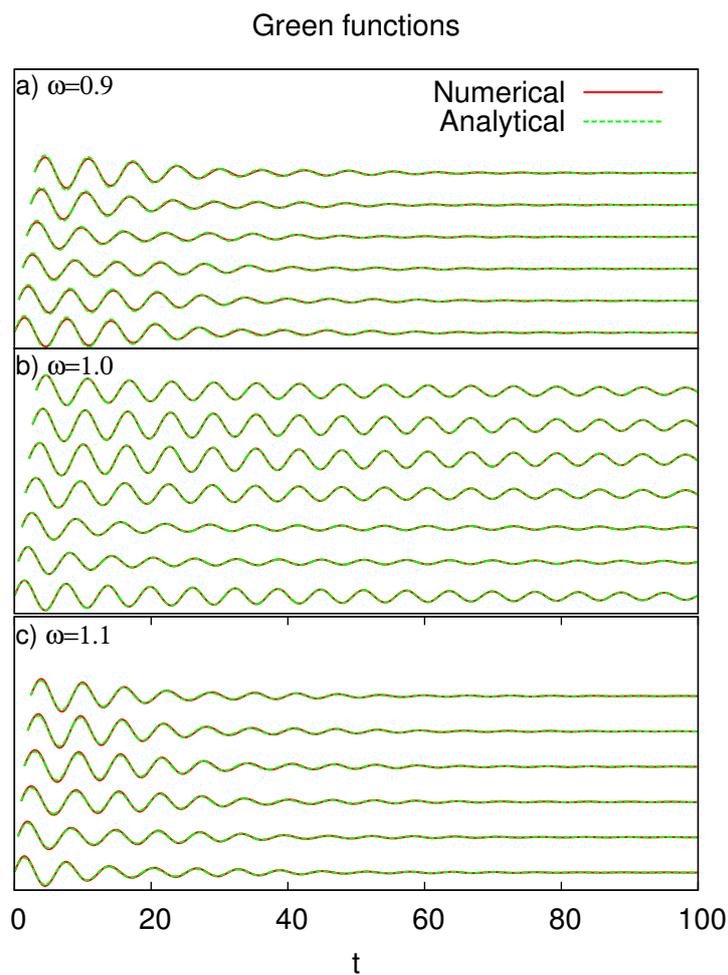


Figura 3.3: Comparação entre o resultado numérico fornecido pela integração numérica da Eq. (3.2.31) e os resultados analíticos aproximados pela Eq. (3.2.52). Os valores iniciais da função de Green são $G(t, t') = 0$ e $(\partial/\partial t)G(t, t') = 1.0$ quando $t = t' + 0^+$. Os parâmetros fixos de movimento são $F_p = 0.15$, $\gamma = 0.1$, $\omega_0 = 1.0$.

4 *Ressonância paramétrica*

Ressonância é a tendência de um sistema a oscilar em máxima amplitude em determinadas frequências, conhecidas como “frequências ressonantes” [35]. Nessas frequências, até mesmo forças periódicas pequenas podem produzir vibrações de grande amplitude, pois o sistema armazena energia vibracional [36]. Este fenômeno ocorre com todos tipos de vibrações ou onda: mecânicas, eletromagnéticas, e funções de onda quântica [10].

O fenômeno de ressonância paramétrica é a oscilação em frequências associadas a harmônicos, que são dadas por $\omega = 2\omega_0/n$, com $n = 1, 2, \dots$. A primeira ressonância paramétrica é mais evidente o aumento da amplitude [4]. A propriedade marginal de instabilidade é o expoente de Floquet nulo e, portanto, a solução é periódica em T .

Neste capítulo temos por objetivo encontrar a linha de transição entre as zonas de estabilidade e instabilidade do oscilador paramétrico. Iremos obter isso de várias forma: exata utilizando os multiplicadores de Floquet; outra pela teoria da média; uma terceira pelo método do balanço harmônico. Por fim, comparamos esses resultados com a linha de transição obtida pelo método numérico.

4.1 Limite entre zonas - teoria da média

Na seção (3.2.1) obtivemos, em primeira aproximação, a matriz fundamental da equação

que descreve o oscilador parametricamente forçado pelo método da média, dada pela Eq. (3.2.50). Para calcular os multiplicadores de Floquet que foram definidos na seção (2.2), resolvemos a equação característica

$$\det(\Phi(T) - \lambda \mathbb{I}) = \det(e^{BT} - \lambda \mathbb{I}) = 0, \quad (4.1.1)$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade 2×2 e λ é o autovalor correspondente. Assim, da Eq. (3.2.50), obtemos

$$\begin{vmatrix} -\cosh(\kappa T) - \lambda e^{\frac{\gamma}{2}T} & \frac{1}{\omega} \left(\frac{\beta - \delta}{\kappa} \right) \sinh(\kappa T) \\ \omega \left(\frac{\beta + \delta}{\kappa} \right) \sinh(\kappa T) & -\cosh(\kappa T) - \lambda e^{\frac{\gamma}{2}T} \end{vmatrix} = 0,$$

de onde encontramos a seguinte equação quadrática em λ

$$e^{\gamma T} \lambda^2 + 2e^{\frac{\gamma}{2}T} \cosh(\kappa T) \lambda + 1 = 0, \quad (4.1.2)$$

cujas soluções são dadas por

$$\lambda_{\pm} = -e^{(-\frac{\gamma}{2} \pm \kappa)T}. \quad (4.1.3)$$

Quando pelo menos um desses multiplicadores tem módulo é igual a um, encontramos a primeira zona de instabilidade paramétrica [20]. Ela é dada por

$$(\gamma\omega)^2 = (F_p/2)^2 - \Omega^2. \quad (4.1.4)$$

Querendo ir para uma aproximação de segunda ordem, devemos voltar à matriz da transformação (3.2.41)

$$\begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} = DF(U, V, t) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad (4.1.5)$$

onde o Jacobiano é dado por

$$DF(U, V, t) = -\frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} DF_{11} & DF_{12} \\ DF_{21} & DF_{22} \end{pmatrix},$$

com coeficientes

$$\begin{aligned}
 DF_{11} &= \gamma\omega(1 - \cos(2\omega t)) - \Omega\text{sen}(2\omega t) + \frac{F_p}{2}\text{sen}(4\omega t); \\
 DF_{12} &= -\Omega(1 - \cos(2\omega t)) + \frac{F_p}{2}(1 - 2\cos(2\omega t) + \cos(4\omega t)) + \gamma\omega\text{sen}(2\omega t); \\
 DF_{21} &= -\Omega(1 + \cos(2\omega t)) + \frac{F_p}{2}(1 + 2\cos(\omega t) + \cos(4\omega t)) + \gamma\omega\text{sen}(2\omega t); \\
 DF_{22} &= \Omega\text{sen}(2\omega t) + \gamma\omega(1 + \cos(2\omega t)) - \frac{F_p}{2}\text{sen}(4\omega t).
 \end{aligned}$$

Admitimos agora que $U(t)$ e $V(t)$ varia respectivamente pela transformação

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + W_1 \\ v + W_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1.6)$$

onde u , e v são dados pelas Eqs. (3.2.42) e (3.2.43). Conforme o teorema da média que demonstramos no apêndice (A), o vetor W obedece $\partial_t W(u, v, t) = g(u, v, t)$, onde

$$\begin{aligned}
 g(u, v, t) &= \frac{1}{2\omega} \times \\
 &\begin{pmatrix} [(\Omega + F_p)v + \omega\gamma u] \cos(2\omega t) + (\Omega u - \gamma\omega v) \text{sen}(2\omega t) - \frac{F_p}{2}[v \cos(4\omega t) + u \text{sen}(4\omega t)] \\ [(\Omega - F_p)u - \omega\gamma v] \cos(2\omega t) - (\Omega v + \gamma\omega u) \text{sen}(2\omega t) - \frac{F_p}{2}[u \cos(4\omega t) - v \text{sen}(4\omega t)] \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Após a integração encontramos

$$\begin{aligned}
 W(u, v, t) &= \frac{1}{4\omega^2} \times \\
 &\begin{pmatrix} [(\Omega + F_p)v + \omega\gamma u] \text{sen}(2\omega t) - (\Omega u - \gamma\omega v) \cos(2\omega t) - \frac{F_p}{2}[v \text{sen}(4\omega t) - u \cos(4\omega t)] \\ [(\Omega - F_p)u - \omega\gamma v] \text{sen}(2\omega t) + (\Omega v + \gamma\omega u) \cos(2\omega t) - \frac{F_p}{2}[u \text{sen}(4\omega t) + v \cos(4\omega t)] \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

em que as constantes de integração são definidas como zero. Pelo teorema da média em segunda ordem

$$\begin{aligned}
 \overline{DF(U, V, t)W(U, V, t)} &= \\
 -\frac{1}{8\omega^3} &\begin{pmatrix} -\gamma\omega F_p & -\gamma^2\omega^2 - \Omega(\Omega + F_p) - F_p^2/8 \\ \gamma^2\omega^2 + \Omega(\Omega - F_p) + F_p^2/8 & \gamma\omega F_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

assim, podemos obter as equações

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2\omega} \left[\gamma \left(\omega - \frac{F_p}{4\omega} \right) u + \left(\Omega + \frac{F_p}{2} - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\Omega(\Omega + F_p)}{4\omega^2} - \frac{F_p^2}{32\omega^2} \right) v \right], \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2\omega} \left[\left(-\Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\Omega(\Omega - F_p)}{4\omega^2} + \frac{F_p^2}{32\omega^2} \right) u + \gamma \left(\omega + \frac{F_p}{4\omega} \right) v \right]. \end{aligned}$$

Quando o determinante do Jacobiano do sistema acima é nulo, encontramos os pontos cuja a solução é periódica, ou melhor, a linha de transição entre as zonas estável e instável

$$\begin{aligned} \gamma^2 \left(\omega^2 - \frac{F_p^2}{16\omega^2} \right) &= \\ \left(\Omega + \frac{F_p}{2} - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\Omega(\Omega + F_p)}{4\omega^2} - \frac{F_p^2}{32\omega^2} \right) &\left(-\Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\Omega(\Omega - F_p)}{4\omega^2} + \frac{F_p^2}{32\omega^2} \right). \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Na Fig. (4.2) obtemos excelentes concordâncias entre as estimativas dadas pelo método da média e pela integração numérica da Eq. (3.2.31) de período $2\pi/\omega$.

4.2 Limite entre zonas - método do balanço harmônico

Este método possui a forma mais simples e direta de aplicação [37]. Admite-se uma solução periódica dada por um somatório de harmônicos, incluindo-se um termo constante, tal qual a série de Fourier expressa da seguinte forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \quad (4.2.8)$$

Como $x(t) \in \mathbb{R}$, os coeficientes c_{-k} são complexo conjugados dos c_k . Substitui-se então esta solução na equação diferencial (3.2.31). O passo seguinte é obter o coeficiente de cada harmônico em (4.2.8) e fazer o “balanço” dos harmônicos resultantes, isto é, igualar os coeficientes do lado esquerdo com os do lado direito da equação, pois a base $\{e^{ik\omega t}\}$ é linearmente independente.

Supondo uma solução periódica em primeira aproximação

$$x(t) = ce^{i\omega t} + c^*e^{-i\omega t} + c_0, \quad (4.2.9)$$

em que excluimos os termos contendo $3\omega, 5\omega, \dots$, encontramos que

$$\begin{pmatrix} \Omega + i\gamma\omega & -\frac{F_p}{2} \\ -\frac{F_p}{2} & \Omega - i\gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.10)$$

Esse sistema tem soluções não triviais se

$$\begin{vmatrix} \Omega + i\gamma\omega & -\frac{F_p}{2} \\ -\frac{F_p}{2} & \Omega - i\gamma\omega \end{vmatrix} = 0.$$

A solução desse determinante é a primeira aproximação para a primeira ressonância paramétrica

$$(\gamma\omega)^2 = (F_p/2)^2 - \Omega^2. \quad (4.2.11)$$

Esse resultado foi obtido na seção anterior nos mostrando que a técnica da média tem uma íntima relação com o método do balanço harmônico.

Se supormos um outro ansatz de solução periódica em segunda aproximação

$$x(t) = ce^{i\omega t} + c^*e^{-i\omega t} + c_3e^{i3\omega t} + c_3^*e^{-i3\omega t} + c_0, \quad (4.2.12)$$

e excluindo os termos contendo $5\omega, 7\omega, \dots$, encontramos que

$$\begin{pmatrix} \Omega + i\gamma\omega & -\frac{F_p}{2} & -\frac{F_p}{2} & 0 \\ -\frac{F_p}{2} & \Omega - i\gamma\omega & 0 & -\frac{F_p}{2} \\ -\frac{F_p}{2} & 0 & (\Omega - 8\omega^2) + i3\gamma\omega & 0 \\ 0 & -\frac{F_p}{2} & 0 & (\Omega - 8\omega^2) - i3\gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c^* \\ c_3 \\ c_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tendo soluções não triviais se

$$\begin{vmatrix} \Omega + i\gamma\omega & -\frac{F_p}{2} & -\frac{F_p}{2} & 0 \\ -\frac{F_p}{2} & \Omega - i\gamma\omega & 0 & -\frac{F_p}{2} \\ -\frac{F_p}{2} & 0 & (\Omega - 8\omega^2) + i3\gamma\omega & 0 \\ 0 & -\frac{F_p}{2} & 0 & (\Omega - 8\omega^2) - i3\gamma\omega \end{vmatrix} = 0.$$

De forma análoga, solução desde determinante é a segunda aproximação para a primeira ressonância paramétrica

$$\left(\frac{F_p}{2}\right)^4 - \frac{F_p^2}{2}[(\Omega - 8\omega^2)\Omega - 3\gamma^2\omega^2] + \left[\Omega^2 + \gamma^2\omega^2 - \left(\frac{F_p}{2}\right)^2\right][(\Omega - 8\omega^2)^2 + 9\gamma^2\omega^2] = 0. \quad (4.2.13)$$

À medida que aumentamos a ordem das aproximações podemos observar na Fig. (4.1) que os resultados se tornam melhores, convergindo para o resultado exato.

4.3 Multiplicadores de Floquet

Os multiplicadores de Floquet definem o comportamento do sistema ao longo do tempo [30, 28]. Se o módulo de algum multiplicador de Floquet for maior que 1, há instabilidade associada a alguma direção do espaço de fase. Para calcular os multiplicadores de Floquet, resolvemos a equação característica

$$\det(\Phi(T) - \lambda\mathbb{I}) = 0, \quad (4.3.14)$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade 2×2 e λ é o autovalor correspondente com período T .

Para a matriz fundamental dada pela Eq. (3.2.60), obtemos

$$\begin{vmatrix} \text{Ce}(T) + \frac{\gamma}{2\omega}\text{Se}(T) - \lambda e^{\frac{\gamma}{2}T} & \frac{1}{\omega}\text{Se}(T) \\ \frac{\gamma}{2}\left[\frac{1}{\omega}\dot{\text{Se}}(T) - \text{Ce}(T)\right] - \frac{\gamma^2}{4\omega}\text{Se}(T) + \dot{\text{Ce}}(T) & -\frac{\gamma}{2\omega}\text{Se}(T) + \frac{1}{\omega}\dot{\text{Se}}(T) - \lambda e^{\frac{\gamma}{2}T} \end{vmatrix} = 0,$$

de onde encontramos a seguinte equação quadrática em λ

$$e^{\gamma T}\lambda^2 - e^{\frac{\gamma}{2}T}\left[\text{Ce}(T) + \frac{1}{\omega}\dot{\text{Se}}(T)\right]\lambda + \frac{1}{\omega}[\text{Ce}(T)\dot{\text{Se}}(T) - \text{Se}(T)\dot{\text{Ce}}(T)] = 0. \quad (4.3.15)$$

As soluções são dadas por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}T}\left\{\text{Ce}(T) + \frac{1}{\omega}\dot{\text{Se}}(T) \pm \sqrt{\left[\text{Ce}(T) - \frac{1}{\omega}\dot{\text{Se}}(T)\right]^2 + \frac{4}{\omega}\text{Se}(T)\dot{\text{Ce}}(T)}\right\}, \quad (4.3.16)$$

e quando pelo menos um desses multiplicadores tem módulo igual a um, encontramos a primeira zona de instabilidade paramétrica [20, 19].

Na Fig. (4.1) comparamos o limite entre as zonas estável e instável obtido pela teoria de Floquet com outros obtidos pelo método do balanço harmônico, em primeira e segunda ordem. Podemos observar que existe uma excelente concordância entre as curvas próximo à primeira ressonância paramétrica.

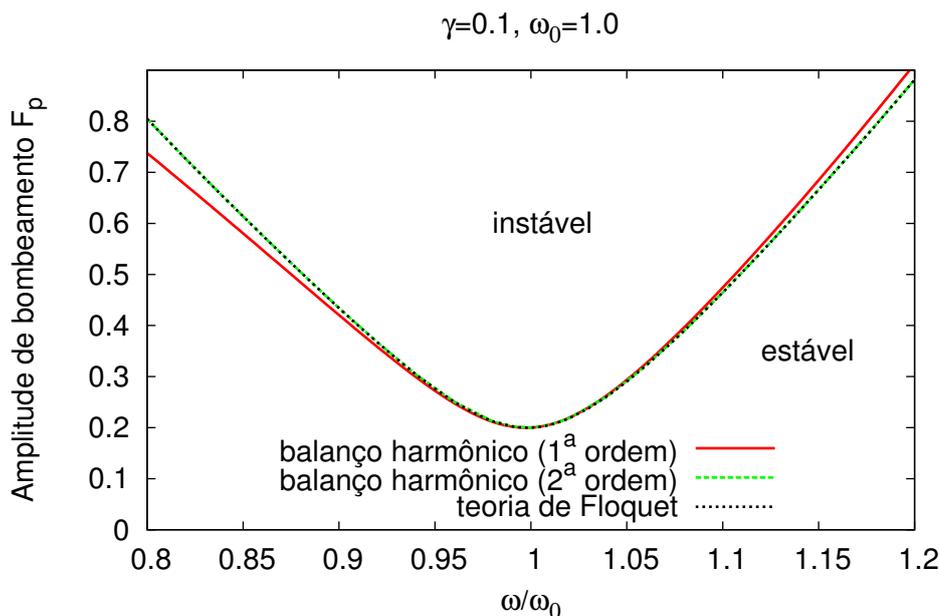


Figura 4.1: Comparação entre as previsões pelo método do balanço harmônico e a teoria de Floquet da linha de transição entre a zona estável e instável do oscilador paramétrico, próximo à primeira zona de ressonância paramétrica. A aproximação de primeira ordem é dada pela Eq. (4.2.11) e a de segunda ordem é dada pela Eq. (4.2.13). A obtida pela teoria de Floquet é quando pelo menos um dos multiplicadores de Floquet dado pela Eq. (4.3.16) tem módulo igual a um e período $2\pi/\omega$.

4.4 Método numérico

A linha de transição entre as zonas estável e instável é obtida pelo cálculo dos multiplicadores de Floquet numericamente [19] quando pelo menos um deles tem módulo igual a

um.

Na Fig. (4.2) comparamos o limite entre as zonas estável e instável obtido pela teoria de Floquet com os outros obtidos pela teoria da média, em primeira e segunda ordem. Acima das linhas fica a zona de instabilidade obtida por seus respectivos métodos, enquanto que abaixo fica a de estabilidade. Podemos observar que existe uma boa concordância entre as curvas próximo à primeira ressonância paramétrica.

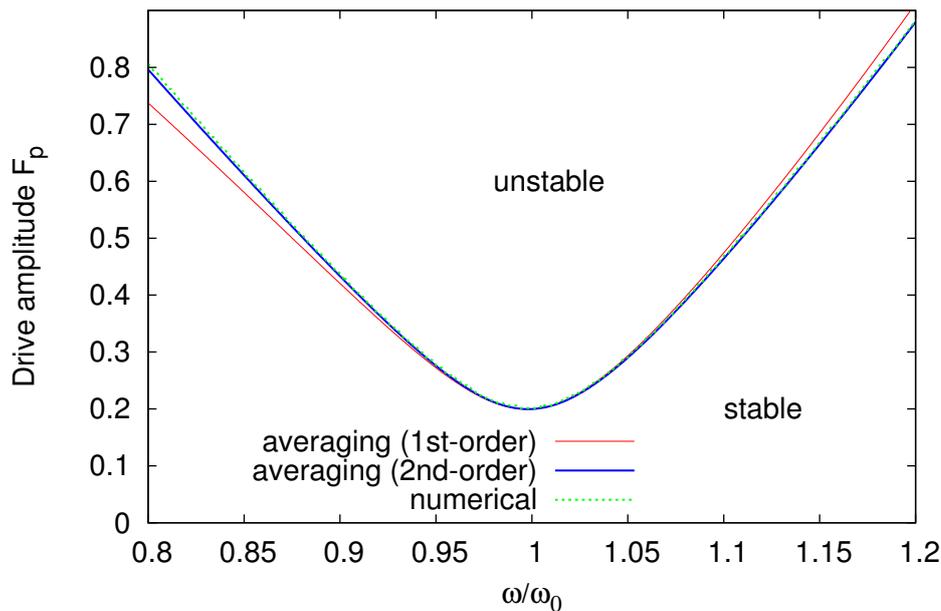


Figura 4.2: Comparação entre as previsões pelo método numérico e pela técnica da média da linha de transição entre a zona estável e instável do oscilador paramétrico, próximo à primeira zona de ressonância paramétrica. A aproximação de primeira ordem é dada pela Eq. (4.1.4) e a de segunda ordem é dada pela Eq. (4.1.7). Os resultados numéricos são obtidos pelo cálculo dos multiplicadores de Floquet numericamente quando pelo menos um deles tem módulo igual a um e período $2\pi/\omega$.

5 *Equação de Langevin*

O movimento irregular de partículas microscópicas imersas numa solução foi originalmente observado em 1828 pelo botânico inglês Robert Brown [38]. Ele percebeu que as partículas em suspensão adquiriam uma espécie de movimento errático que posteriormente ficaria popularmente conhecido pelo nome de movimento browniano [39].

Este movimento pode ser entendido com base numa equação diferencial estocástica tomando m como sendo a massa da partícula, que está imersa em um líquido sujeita a uma força viscosa (consideramos proporcional a velocidade), e a forças de caráter aleatório devidas aos impactos da partícula com as moléculas do líquido [40].

Neste capítulo vamos fazer uma revisão da equação de Langevin para uma partícula livre em um fluido e estudamos o movimento Browniano devida às flutuações térmicas. Em seguida, estudamos o oscilador harmônico em equilíbrio térmico. Por fim, obtemos estimativas para as flutuações térmicas do oscilador parametricamente forçado na presença do ruído aditivo, que é um exemplo de sistema fora do equilíbrio termodinâmico.

5.1 Movimento Browniano

Para o caso mais simples ao longo do eixo x essa equação será

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + F(t) \quad (5.1.1)$$

com

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (5.1.2)$$

onde v denota a velocidade da partícula e x a posição. Nesta equação, a influência do meio sobre o movimento da partícula é decomposta em duas partes. Em primeiro lugar existe uma força $F = -\alpha v$ que representa uma fricção dinâmica sobre o movimento da partícula, onde α é o coeficiente de viscosidade do meio. Existe também uma força aleatória, $F(t)$, que possui as seguintes propriedades:

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad (5.1.3)$$

pois, em média, a força devida aos impactos das moléculas é nula, e

$$\langle F(t)F(t') \rangle = \alpha \delta(t - t'), \quad (5.1.4)$$

pois estamos considerando que os impactos sejam independentes. Quando impomos as propriedades (5.1.3) e (5.1.4) sob equação (5.1.1), a mesma é cientificamente conhecida como equação de Langevin [40].

Dividindo a equação de Langevin por m , ela se torna

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + R(t), \quad (5.1.5)$$

onde $\gamma = \alpha/m$ e $R(t) = F(t)/m$. A função $R(t)$ é denominada de ruído, sendo também uma variável estocástica, isto é, uma variável aleatória dependente do tempo, que possui as

seguintes características:

$$\langle R(t) \rangle = 0 \quad (5.1.6)$$

e

$$\langle R(t)R(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t'), \quad (5.1.7)$$

onde $\Gamma \doteq \alpha/m^2$ [40].

Exemplo 1. A equação de Langevin para uma partícula carregada em um campo elétrico externo constante é dada por

$$\dot{v}(t) = -\gamma v + \frac{qE}{m} + R(t). \quad (5.1.8)$$

Podemos escrever a solução da equação acima como

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \frac{qE}{m} \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \int_0^t R(s) e^{-\gamma(t-s)} ds. \quad (5.1.9)$$

No limite em que $t \rightarrow \infty$ obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{qE}{m\gamma} + \int_0^t R(s) e^{-\gamma(t-s)} ds, \quad (5.1.10)$$

que após uma medida térmica encontramos $\langle v \rangle = qE/m\gamma$.

A solução da Eq. (5.1.5) é dada por:

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t dt' R(t') e^{-\gamma(t-t')}, \quad (5.1.11)$$

onde v_0 é a velocidade da partícula no instante $t = 0$ [38].

Através de uma mudança de variável, a função de correlação de velocidade é dada por

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \langle [v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t ds' R(s') e^{-\gamma(t-s')}][v_0 e^{-\gamma t'} + \int_0^{t'} d\tau' R(\tau') e^{-\gamma(t'-\tau')}] \rangle, \quad (5.1.12)$$

usando a propriedade (5.1.6), obtemos

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \langle v_0^2 \rangle e^{-\gamma(t+t')} + \int_0^t \int_0^{t'} ds d\tau \langle R(s)R(\tau) \rangle e^{-\gamma(t-s+t'-\tau)}. \quad (5.1.13)$$

Com a propriedade (5.1.7), podemos encontrar que

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \langle v_0^2 \rangle e^{-\gamma(t+t')} + \frac{\Gamma}{2\gamma} e^{-\gamma(t+t')} [e^{2\gamma t'} - 1] \quad (5.1.14)$$

Por outro lado, o teorema da equipartição da energia garante que a energia cinética média de uma partícula em movimento corresponde à $K_B T/2$ por grau de liberdade, ou melhor

$$\frac{1}{2} m \langle v_0^2 \rangle = \frac{1}{2} K_B T, \quad (5.1.15)$$

onde K_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta [41, 42]. Escolhendo $\Gamma = 2K_B T \gamma/m$ obtemos as seguintes funções de correlação

$$C_v(t-t') \doteq \langle v(t)v(t') \rangle = \frac{K_B T}{m} e^{-\gamma|t-t'|}, \quad (5.1.16)$$

$$C_R(t-t') \doteq \langle R(t)R(t') \rangle = \frac{2K_B T \gamma}{m} \delta(t-t'). \quad (5.1.17)$$

Esta última é conhecida como o teorema da dissipação [43]. Isto implica que

$$\gamma = \frac{m}{2K_B T} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_R(\tau). \quad (5.1.18)$$

Com o impacto entre as moléculas do fluido e a partícula, surgirá uma transferência de energia cinética para a mesma. Por sua vez, essa energia é dissipada devido à força viscosa e, ao mesmo tempo tem sua energia modificada. A taxa que a energia é transferida à partícula deve ser igual à soma da taxa com que a energia é dissipada e a variação da energia cinética da partícula. Esse balanço energético é obtido da seguinte forma. Multiplicamos a equação de Langevin por v , ou seja:

$$mv \frac{d}{dt} v = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} v^2 = -\gamma v^2 + vF(t)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) + \gamma v^2 = vF(t).$$

Tomando a média,

$$\frac{d}{dt}E_c + P_{dis} = P,$$

onde $E_c = \frac{m}{2}\langle v^2 \rangle$ é a energia média, $P_{dis} = \nu F_{at} = \gamma\langle v^2 \rangle$ é a taxa de dissipação de energia, ou potencia dissipada, e $P = \langle \nu F(t) \rangle$ é a taxa de energia da partícula, ou potência transferida.

Como resultado da Eq. (5.1.14), podemos inferir que

$$P = \frac{\gamma K_B T}{m}, \quad (5.1.19)$$

ou seja, a potencia tranferida é independente do tempo. Note que estamos no regime estacionário, entretanto, a variação de energia cinética é nula, de modo que $P_{dis} = P$, e, portanto toda energia transferida à partícula é dissipada [40].

5.2 O oscilador harmônico na presença de ruído térmico

A equação do oscilador harmônico na presença do ruído é dada por

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = R(t), \quad (5.2.20)$$

o que representa um oscilador sob a ação de um ruído. A solução geral é dada por

$$x(t) = x_h(t) + \int_0^t G(t-t')R(t')dt', \quad (5.2.21)$$

onde $x_h(t)$ é a solução homogênea que é dada pela Eq. (3.1.15) com respectiva função de Green dada pela Eq. (3.1.22).

O desvio quadrático médio como uma função do tempo é dada por

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= 2\gamma T \int_0^t G(t-t')^2 dt' = \frac{2\gamma T}{\rho^2} \int_0^t \sin^2(\rho(t-t')) e^{-\gamma(t-t')} dt' \\ &= \frac{\gamma T}{\rho^2} \left\{ \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} - \frac{\gamma - e^{-\gamma t} [\gamma \cos(2\rho t) - 2\rho \sin(2\rho t)]}{4\omega_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

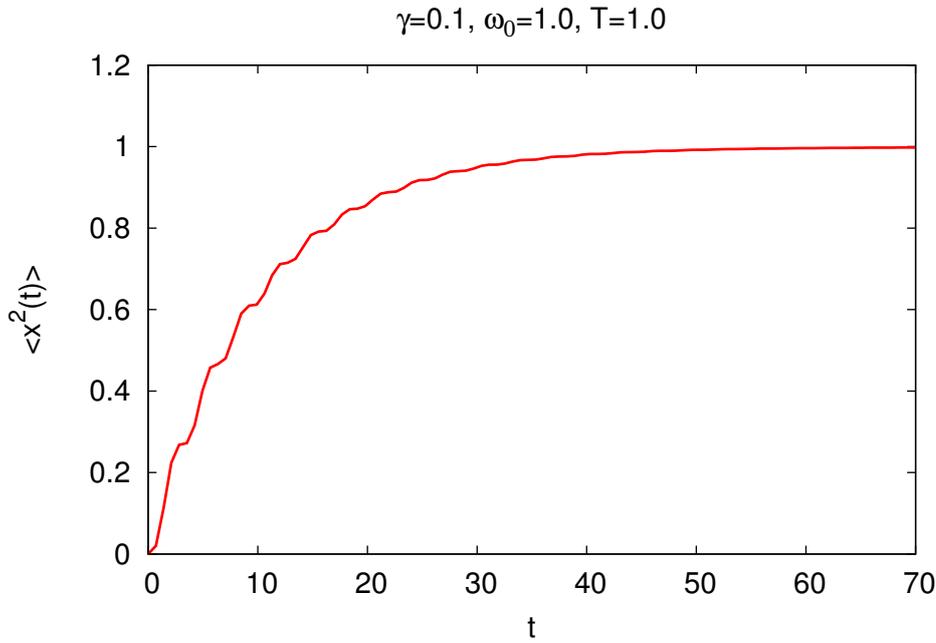


Figura 5.1: Desvio quadrático médio do oscilador harmônico obtido pela equação (5.2.22) com o banho térmico $T = 1$. Podemos observar que no limite $t \rightarrow \infty$ temos $\langle x^2(t) \rangle = 1.0$.

Já a velocidade quadrática média é dada por

$$\langle v^2(t) \rangle = 2\gamma T \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial t} G(t-t') \right]^2 dt'. \quad (5.2.23)$$

Usando o fato de que $(\partial/\partial t)G(t-t') = -(\partial/\partial t')G(t-t')$ e integrando a equação (5.2.23) por partes, onde $G(t,t) = 0$, obtemos

$$\langle v^2(t) \rangle = -2\gamma T \int_0^t dt' G(t-t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} G(t-t'). \quad (5.2.24)$$

Agora, usando a equação (5.2.20) obtemos

$$\begin{aligned} \langle v^2(t) \rangle &= -2\gamma T \int_0^t dt' G(t-t') \left[-\omega_0^2 - \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \right] G(t-t') \\ &= 2\omega_0^2 \gamma T \int_0^t G(t-t')^2 dt' = \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

No limite de $t \rightarrow \infty$, obtemos

$$\langle v_{eq}^2 \rangle = \omega_0^2 \langle x_{eq}^2 \rangle = \frac{\omega_0^2 \gamma T}{\rho^2} \left\{ \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{4\omega_0^2} \right\} = T, \quad (5.2.26)$$

como o esperado pelo teorema da flutuação-dissipação [43].

5.3 O oscilador parametricamente forçado com ruído térmico

Começamos por adicionar ruído à equação (3.2.31) e obter

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\gamma \dot{x}(t) + F_p \cos(2\omega t)x(t) + R(t), \quad (5.3.27)$$

onde $R(t)$ é a função aleatória dado na seção 2.3.1. Usando a função de Green obtida na seção (3.2.1) obtemos

$$x(t) = x_h(t) + \int_{-\infty}^t dt' G(t, t') R(t'), \quad (5.3.28)$$

$$\dot{x}(t) = v(t) = v_h(t) + \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial}{\partial t} G(t, t') R(t'), \quad (5.3.29)$$

onde $x_h(t)$ é a solução homogênea que decai exponencialmente com o tempo como vimos na seção 3.2.1, e portanto, para um tempo longo $x_h(t) = 0$. Aplicando uma média estatística nas flutuações dependente do tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \int \int_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' G(t, t') G(t, t'') \langle R(t') R(t'') \rangle, \\ &= 2T\gamma \int_{-\infty}^t dt' G(t, t')^2 = 2T\gamma \int_0^{\infty} d\tau G(t, t - \tau)^2, \\ \langle v^2(t) \rangle &= 2T\gamma \int_{-\infty}^t dt' \left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, t') \right]^2, \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

onde $\tau = t - t'$.

Da Eq. (3.2.54) podemos encontrar que

$$\begin{aligned} G(t, t - \tau)^2 &\approx \frac{e^{-\gamma\tau}}{\omega} \left\{ \left[\cos(|\kappa|\tau) \text{sen}(\omega\tau) + \frac{\delta}{|\kappa|} \text{sen}(|\kappa|\tau) \cos(\omega\tau) \right]^2 + \frac{\beta^2}{2|\kappa|^2} \text{sen}^2(|\kappa|\tau) \right. \\ &\quad - \frac{2\beta \text{sen}(|\kappa|\tau)}{|\kappa|} \left[\cos(|\kappa|\tau) \text{sen}(|\kappa|\tau) + \frac{\delta}{|\kappa|} \text{sen}(|\kappa|\tau) \cos(\omega\tau) \right] \\ &\quad \times [\cos(2\omega t) \cos(\omega\tau) + \text{sen}(2\omega t) \text{sen}(\omega\tau)] \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{2|\kappa|^2} \text{sen}^2(|\kappa|\tau) [\cos(2\omega\tau) \cos(4\omega t) + \text{sen}(2\omega\tau) \text{sen}(4\omega t)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

Uma estimativa da média temporal da flutuação térmica foi desenvolvida por Batista em

[20] e, quando $|\beta| < |\delta|$, é dada por

$$\begin{aligned} \overline{\langle x^2(t) \rangle} &= \frac{2T\gamma}{\omega^2} \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} \left\{ \left[\cos(|\kappa|\tau) \sin(\omega\tau) + \frac{\delta}{|\kappa|} \sin(|\kappa|\tau) \cos(\omega\tau) \right]^2 + \frac{\beta^2}{2|\kappa|^2} \sin^2(|\kappa|\tau) \right\} \\ &= \frac{2T\gamma}{\omega^2} \left\{ \frac{\beta^2}{\gamma(\gamma^2 + 4|\kappa|^2)} + \frac{\delta\gamma}{2|\kappa|} \left[\frac{1}{\gamma^2 + 4(|\kappa| - \omega)^2} - \frac{1}{\gamma^2 + 4(|\kappa| + \omega)^2} \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma^2 + 4|\kappa|^2} - \frac{\gamma}{\gamma^2 + 4\omega^2} - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2 + 4(|\kappa| - \omega)^2} + \frac{1}{\gamma^2 + 4(|\kappa| + \omega)^2} \right) \right] \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2}{4|\kappa|^2} \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma^2 + 4\omega^2} - \frac{\gamma}{\gamma^2 + 4|\kappa|^2} - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2 + 4(|\kappa| - \omega)^2} + \frac{1}{\gamma^2 + 4(|\kappa| + \omega)^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

e quando $|\beta| > |\delta|$

$$\begin{aligned} \overline{\langle x^2(t) \rangle} &= \frac{2T\gamma}{\omega^2} \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} \left\{ \left[\cosh(\kappa\tau) \sin(\omega\tau) + \frac{\delta}{\kappa} \sinh(\kappa\tau) \cos(\omega\tau) \right]^2 + \frac{\beta^2}{2\kappa^2} \sinh^2(\kappa\tau) \right\} \\ &= \frac{2T\gamma}{\omega^2} [I_1 + I_2 + \delta^2 I_3 + I_4], \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

onde as integrais são dadas por

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\beta^2}{2\kappa^2} \int_0^\infty e^{-\gamma\tau} \sinh^2(\kappa\tau) d\tau = \frac{\beta^2}{\gamma(\gamma^2 - 4\kappa^2)}, \\ I_2 &= \int_0^\infty e^{-\gamma\tau} \cosh^2(\kappa\tau) \sin^2(\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\gamma} - \frac{\gamma}{2(\gamma^2 + 4\omega^2)} + \frac{\gamma}{2(\gamma^2 - 4\kappa^2)} - \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\gamma - 2\kappa - 2i\omega} + \frac{1}{\gamma + 2\kappa - 2i\omega} \right] \right\}, \\ I_3 &= \frac{1}{\kappa^2} \int_0^\infty e^{-\gamma\tau} \sinh^2(\kappa\tau) \cos^2(\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \left\{ \frac{\kappa^2}{\gamma(\gamma^2 - 4\kappa^2)} - \frac{\gamma}{4(\gamma^2 + 4\omega^2)} + \frac{1}{8} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\gamma - 2\kappa - 2i\omega} + \frac{1}{\gamma + 2\kappa - 2i\omega} \right] \right\}, \\ I_4 &= \frac{1}{2\kappa} \int_0^\infty e^{-\gamma\tau} \sinh(2\kappa\tau) \sin(2\omega\tau) d\tau = \frac{1}{4} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\kappa(\gamma - 2\kappa - 2i\omega)} - \frac{1}{\kappa(\gamma + 2\kappa - 2i\omega)} \right\}. \end{aligned}$$

A estimativa da média temporal da flutuação estatística da velocidade, quando $|\beta| < |\delta|$,

é dada por

$$\begin{aligned}
\overline{\langle v^2(t) \rangle} &= \omega_0 \overline{\langle x^2(t) \rangle} + \frac{2F_p T \beta}{\kappa} \int_0^\infty e^{-\gamma\tau} \text{sen}(\kappa\tau) d\tau \\
&\times \left[\cosh(\kappa\tau) \text{sen}(\omega\tau) + \frac{\delta}{\kappa} \text{senh}(\kappa\tau) \cos(\omega\tau) \right] \cos(\omega\tau) \\
&= \omega_0 \overline{\langle x^2(t) \rangle} - 8\omega T \beta^2 (\delta I_3 + I_4),
\end{aligned} \tag{5.3.33}$$

e quando $|\beta| > |\delta|$ é preciso substituir κ por $i\kappa$ na expressão.

A estimativa da média estatística da flutuação térmica, quando $|\beta| < |\delta|$, é dada por

$$\langle x^2(t) \rangle \approx \overline{\langle x^2(t) \rangle} + A_{2\omega} \cos(2\omega t) + B_{2\omega} \text{sen}(2\omega t) + A_{4\omega} \cos(4\omega t) + B_{4\omega} \text{sen}(4\omega t), \tag{5.3.34}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{2\omega} &= -\frac{\beta\gamma T}{|\kappa|\omega^2} \left\{ \frac{\delta}{|\kappa|} \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{4\gamma(|\kappa|^2 - \omega^2)}{(\gamma^2 + 4\omega^2)(\gamma^2 + 4|\kappa|^2)} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma(1 - \delta/|\kappa|)}{\gamma^2 + 4(|\kappa| - \omega)^2} - \frac{\gamma(1 + \delta/|\kappa|)}{\gamma^2 + 4(|\kappa| + \omega)^2} \right] \right\}, \\
B_{2\omega} &= -\frac{2\beta\gamma T}{|\kappa|\omega^2} \left\{ \left[\frac{|\kappa|}{(\gamma^2 + 4|\kappa|^2)} + \frac{\delta}{|\kappa|} \frac{\omega}{(\gamma^2 + 4\omega^2)} \right] \right. \\
&\quad \left. - (1 + \delta/|\kappa|) \left[\frac{(|\kappa| - \omega)}{\gamma^2 + 4(|\kappa| - \omega)^2} + \frac{(|\kappa| + \omega)}{\gamma^2 + 4(|\kappa| + \omega)^2} \right] \right\}, \\
A_{4\omega} &= \frac{\beta^2\gamma T}{2\omega^2|\kappa|^2} \left\{ \frac{\gamma}{\gamma^2 + 4\omega^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma}{\gamma^2 + 4(\omega + |\kappa|)^2} + \frac{\gamma}{\gamma^2 + 4(\omega - |\kappa|)^2} \right] \right\}, \\
B_{4\omega} &= \frac{\beta^2\gamma T}{2\omega^2|\kappa|^2} \left\{ \frac{2\omega}{\gamma^2 + 4\omega^2} - \left[\frac{\omega + |\kappa|}{\gamma^2 + 4(\omega + |\kappa|)^2} + \frac{\omega - |\kappa|}{\gamma^2 + 4(\omega - |\kappa|)^2} \right] \right\},
\end{aligned}$$

e quando $|\beta| > |\delta|$

$$\langle x^2(t) \rangle \approx \overline{\langle x^2(t) \rangle} + A_{2\omega} \cos(2\omega t) + B_{2\omega} \text{sen}(2\omega t) + A_{4\omega} \cos(4\omega t) + B_{4\omega} \text{sen}(4\omega t), \tag{5.3.35}$$

onde

$$A_{2\omega} = -\frac{4\beta T \gamma}{\omega^2} (K_1 + K_2), \quad B_{2\omega} = -\frac{4\beta T \gamma}{\omega^2} (K_3 + K_4)$$

com

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{8} \text{Im} \left[\frac{1}{\kappa(\gamma - 2\kappa - 2i\omega)} - \frac{1}{\kappa(\gamma + 2\kappa - 2i\omega)} \right], \\
K_2 &= \frac{\delta}{\kappa^2} \left\{ \frac{\kappa^2}{\gamma(\gamma^2 - 4\kappa^2)} - \frac{\gamma}{4(\gamma^2 + 4\omega^2)} + \frac{1}{8} \text{Re} \left[\frac{1}{\gamma - 2\kappa - 2i\omega} - \frac{1}{\gamma + 2\kappa - 2i\omega} \right] \right\}, \\
K_3 &= \frac{1}{8\kappa} \left[\frac{4\kappa}{\gamma^2 - 4\kappa^2} + \text{Re} \left(\frac{1}{\gamma - 2\kappa - 2i\omega} - \frac{1}{\gamma + 2\kappa - 2i\omega} \right) \right], \\
K_4 &= \frac{\delta}{8\kappa^2} \text{Im} \left[\frac{1}{\gamma - 2\kappa - 2i\omega} + \frac{1}{\gamma + 2\kappa - 2i\omega} - \frac{2}{\gamma - 2i\omega} \right].
\end{aligned}$$

Os demais são dados por

$$\begin{aligned}
A_{4\omega} &= \frac{\beta^2 T \gamma}{4\omega^2 \kappa^2} \text{Re} \left[\frac{1}{\gamma - 2\kappa - 2i\omega} + \frac{1}{\gamma + 2\kappa - 2i\omega} - \frac{2}{\gamma - 2i\omega} \right]; \\
B_{4\omega} &= \frac{\beta^2 T \gamma}{4\omega^2 \kappa^2} \text{Im} \left[\frac{1}{\gamma - 2\kappa - 2i\omega} + \frac{1}{\gamma + 2\kappa - 2i\omega} - \frac{2}{\gamma - 2i\omega} \right].
\end{aligned}$$

Na Fig. 5.2 mostramos uma série temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ dada pela expressão (5.3.34) ou (5.3.35). Ao olhar os valores médios, vemos que o resfriamento ocorre em dessintonia positiva (aqui em $\omega/\omega_0 = 1.1$), aquecimento (em $\omega/\omega_0 = 0.9$ e 1.0), e a quadratura do ruído térmico aumenta em todos os parâmetros. É importante mencionar que o aquecimento e resfriamento estão relacionados com a taxa de decaimento das oscilações da função de Green [20]. Taxas de decaimento baixas implicam mais aquecimento, enquanto que taxas de decaimento maior implicam menos aquecimento, ou mesmo resfriamento.

Na Fig. 5.3 mostramos um gráfico logarítmico da componente dc do deslocamento quadrático médio sobre a temperatura do banho térmico. O aumento acentuado da curva acentuada com a amplitude de bombeamento indica que o ruído é amplificado pelo oscilador paramétrico.

Na Fig. 5.4 obtemos um gráfico de intensidades de cores em $2D$ informando que os fenômenos de aquecimento e resfriamento podem ocorrer, com base nas estimativas analíticas para o tempo médio de $\langle x^2(t) \rangle$ dada pela expressão (5.3.34) ou (5.3.35). Observa-se que no regime linear do nosso estudo, não há limite para o ruído aquecer ou resfriar,

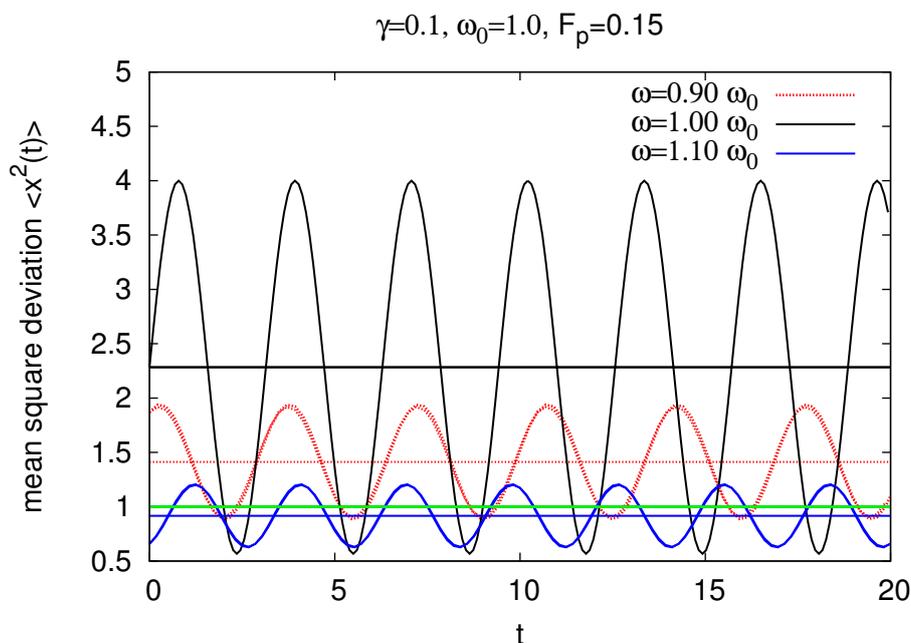


Figura 5.2: A evolução temporal do desenvolvimento quadrático médio $\langle x^2(t) \rangle$ versus o tempo. A linha contínua horizontal verde é obtida pela equação (5.2.22), dado através do teorema da equipartição da energia, indicando que o valor de equilíbrio esperado das flutuações (para $F_p = 0$) quando a temperatura de banho térmico é $T = 1.0$, enquanto que as demais retas representam os correspondentes valores médios de $\langle x^2(t) \rangle$ dada pela equação (5.3.32) para $F_p = 0.15$

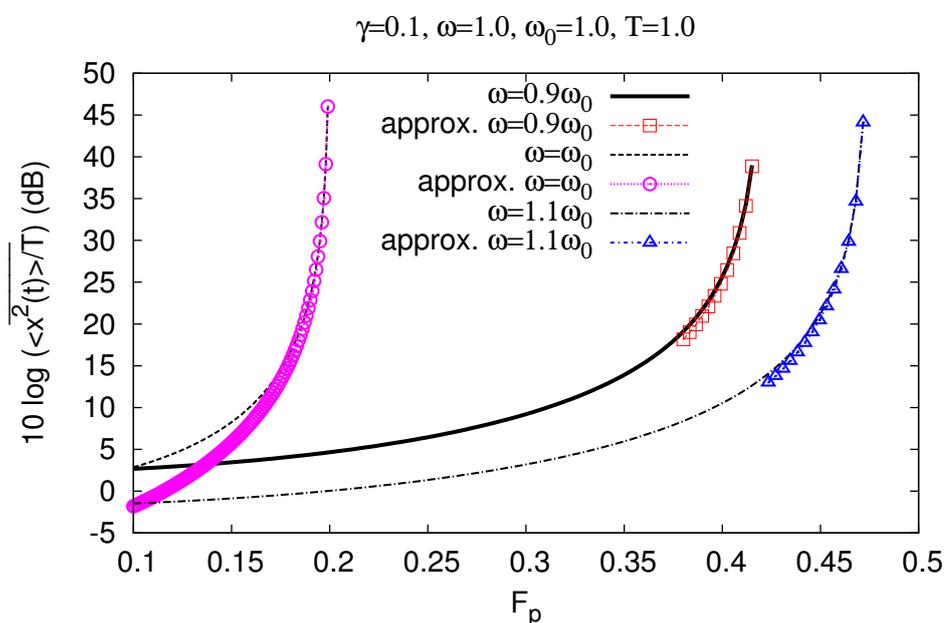


Figura 5.3: Gráfico do log da comparação da componente do deslocamento quadrático médio $\overline{\langle x^2 \rangle}$, dada pela Eq. (5.3.32), com a temperatura T que é dada pela resposta do oscilador sem o bombeamento paramétrico. Podemos perceber que a temperatura cresce monotonicamente até que diverge no limite entre as zonas estável e instável.

quanto mais perto da zona de instabilidade maior o aquecimento térmico. Em um modelo não-linear, porém com um bombeamento periódico (osciladores de Duffing parametricamente forçado) com ruído aditivo, essa divergência não irá ocorrer, o aquecimento e o ruído térmico será limitado [20].

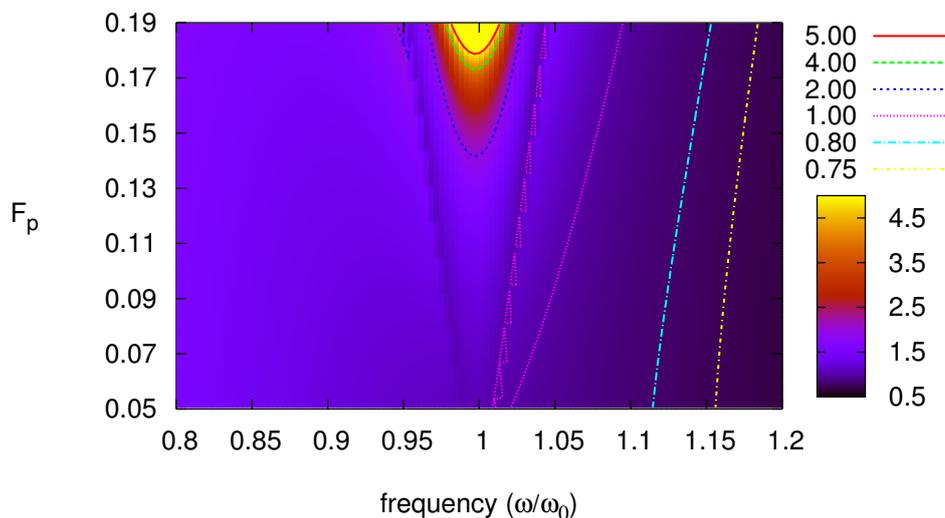


Figura 5.4: Mapa de cores do deslocamento quadrático médio $\langle x^2(t) \rangle$. O aquecimento ocorre nas regiões vermelhas e amarelas, enquanto que o resfriamento ocorre nas regiões à direita da linha de contorno de cor rosa $\langle x^2(t) \rangle = 1.0$.

Similarmente aos resultados das figuras anteriores, na Fig. 5.5, um gráfico 2D, a intensidade da cor mostra a amplitude do aquecimento do ruído térmico como uma função da frequência do bombeamento paramétrico, ou seja ω , com a amplitude de bombeamento. Notamos que há uma forte correlação com os resultados da Fig. 5.4. Quanto mais perto da linha de transição entre as zonas de estabilidade e instabilidade, maior o aquecimento e o squeezing térmico, ou seja, a amplitude das oscilações das flutuações térmicas $\langle x^2(t) \rangle$.

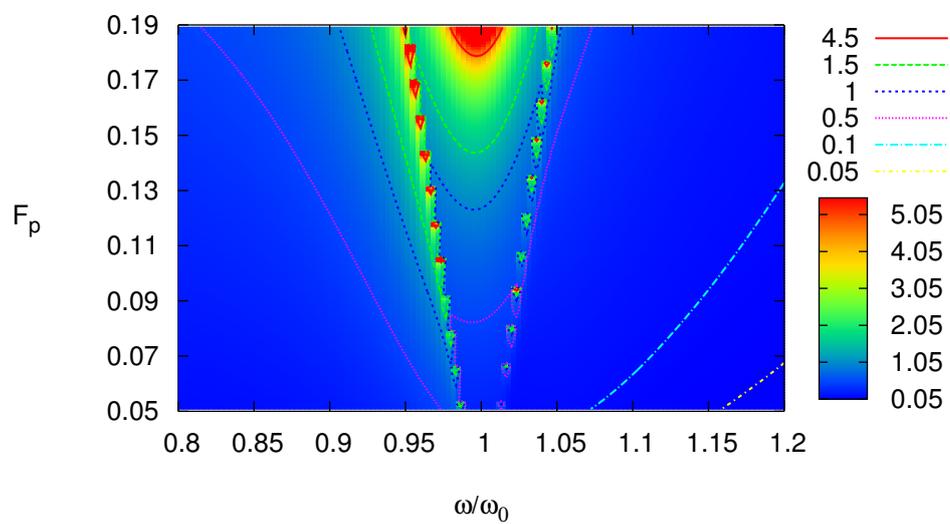


Figura 5.5: Mapa de cores da amplitude térmica em 2ω do deslocamento quadrático médio $\langle x^2(t) \rangle$ dado por $\sqrt{|A_{2\omega}|^2 + |B_{2\omega}|^2}$. A amplitude de 4ω é muito pequena para as amplitudes de bombeamento F_p usadas neste trabalho.

6 *Amplificação paramétrica*

Amplificação paramétrica se utiliza da excitação paramétrica para aumentar a resposta devida a uma pequena força ou tensão ac externa aplicada [15]. Elas são concebidas para detectar pequenos sinais e para aumentar a resposta dinâmica de um oscilador para pequenas excitações harmônicas [16].

Neste capítulo vamos estudar a amplificação paramétrica de uma força $F_0 \cos(\omega_s t + \phi)$, que também pode ser um sinal, próximo a primeira zona de ressonância paramétrica. A equação é dada por

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + [\omega_0^2 - F_p \cos(2\omega t)]x = F_0 \cos(\omega_s t + \phi), \quad (6.0.1)$$

sendo ω_s a frequência e ϕ a fase do sinal que deve ser amplificado.

Primeiramente trataremos a frequência do sinal como sendo a mesma da ressonância paramétrica, $\omega = \omega_s$, em sintonia e dessintonia, $\omega \approx \omega_0$. Em seguida, diferenciamos um pouco as frequências $\omega \neq \omega_s$ e analisaremos a resposta do OP frente aos sinais com o bombeamento ligado e desligado. Por fim, faremos um método numérico para comparar com as soluções analíticas.

6.1 Cálculo do ganho na amplificação paramétrica

6.1.1 Método da média

Para aplicar tal método, primeiramente reescrevemos a Eq. (6.0.1) na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x,y,t) \end{pmatrix}, \quad (6.1.2)$$

onde $f_2(x,y,t) = -\Omega x(t) - \gamma \dot{x} + F_p \cos(2\omega t)x(t) + F_0 \cos(\omega t + \phi)$. Admitindo que a equação acima varia lentamente com a seguinte transformação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) \\ -\omega \text{sen}(\omega t) & -\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad (6.1.3)$$

encontramos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{U}^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t) \\ -\text{sen}(\omega t) & -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x,y,t) \end{pmatrix}; \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t) f_2(x,y,t) \\ -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) f_2(x,y,t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Aplicando o método das médias

$$\begin{pmatrix} \langle \dot{U} \rangle \\ \langle \dot{V} \rangle \end{pmatrix} = -\frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \langle \text{sen}(\omega t) f_2(x,y,t) \rangle \\ \langle \cos(\omega t) f_2(x,y,t) \rangle \end{pmatrix}, \quad (6.1.5)$$

em que filtramos os termos oscilando em 2ω e 4ω , obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \gamma\omega & \Omega + \frac{F_p}{2} \\ -\Omega + \frac{F_p}{2} & \gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{F_0}{2\omega} \begin{pmatrix} \text{sen}(\phi) \\ -\cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (6.1.6)$$

Da mesma forma da seção (3.2.1), $U(t)$ e $V(t)$ foram substituídas por suas médias $u(t)$ e $v(t)$ respectivamente.

O ponto fixo da Eq. (6.1.6) será dado por

$$\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \frac{F_0}{\Omega^2 + (\gamma\omega)^2 - (F_p/2)^2} \begin{pmatrix} \gamma\omega & -\left(\Omega + \frac{F_p}{2}\right) \\ \Omega - \frac{F_p}{2} & \gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sen}(\phi) \\ -\cos(\phi) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \frac{F_0}{\Omega^2 + (\gamma\omega)^2 - (F_p/2)^2} \begin{pmatrix} \gamma\omega \text{sen}(\phi) + (\Omega + F_p/2) \cos(\phi) \\ (\Omega - F_p/2) \text{sen}(\phi) - \gamma\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (6.1.7)$$

O ganho de uma amplificação é definido em [44], sendo

$$\begin{aligned} G(\phi) &= 20 \log \left| \frac{X}{X_{F_p=0}} \right| & (6.1.8) \\ &= 10 \log \left\{ \frac{[(\gamma\omega)^2 + \Omega^2] [(\gamma\omega)^2 + \Omega^2 + F_p^2/4 + F_p[\Omega \cos(2\phi) + \gamma\omega \text{sen}(2\phi)]]}{[(\gamma\omega)^2 + \Omega^2 - F_p^2/4]^2} \right\}, \end{aligned}$$

onde $|X| = \sqrt{u^{*2} + v^{*2}}$. No artigo [16], Rugar e Grütter estudaram a amplificação paramétrica mecânica pelos métodos perturbativo e experimental. Embora os resultados teóricos concordaram bem com seus dados experimentais, nós aumentamos a aplicabilidade da amplificação de pequenos sinais, usando o método da média, e permitindo a dessintonia [19].

A Fig. 6.1 mostra que o ganho da amplificação paramétrica tem sensibilidade na fase. Para algumas fases o ganho é negativo, significando amortecimento na amplificação. Para outros ele é nulo, pois a resposta do oscilador paramétrico é a mesma do oscilador harmônico. No entanto, existem outras fases em que o ganho é muito alto.

Na Fig. 6.2 mostramos uma comparação entre as estimativas numéricas e analíticas do ganho em função da amplitude de bombeamento F_p é mostrado. São descritos diferentes valores de fase. Observa-se uma dependência muito forte entre o bombeamento e a força externa. É perceptível uma divergência no ganho no limite entre as regiões estável e instável.

6.1.2 Método do balanço harmônico

Da mesma forma da seção (4.2), supomos uma solução periódica em primeira aproximação para a Eq. (6.0.1)

$$x(t) = \tilde{u} e^{i\omega t} + \tilde{u}^* e^{-i\omega t}, \quad (6.1.9)$$

onde \tilde{u}^* é o conjugado complexo de \tilde{u} . Excluindo os termos contendo 3ω , encontramos que

$$\begin{pmatrix} \Omega + i\gamma\omega & -F_p/2 \\ -F_p/2 & \Omega - i\gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{u}^* \end{pmatrix} = \frac{F_0}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \quad (6.1.10)$$

O ponto fixo da Eq. (6.1.10) será dado por

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{u}^* \end{pmatrix} = \frac{F_0}{2[\Omega^2 + (\gamma\omega)^2 - (F_p/2)^2]} \begin{pmatrix} (F_p/2)e^{-i\phi} + (\Omega - i\gamma\omega)e^{i\phi} \\ (\Omega + i\gamma\omega)e^{-i\phi} + (F_p/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (6.1.11)$$

Apesar deste ponto fixo diferir do obtido na seção anterior, o ganho da amplificação é o mesmo dado pela Eq. (6.1.8). Assim, podemos perceber que ambos os métodos nos levam aos mesmos resultados, o que mostra a consistência entre as duas técnicas.

6.1.3 Método numérico

O ganho da amplificação obtido numericamente é dado pela Eq. (6.1.8) substituindo o valor numérico do ponto fixo do mapa de retorno de Poincaré, obtido a partir da integração da Eq. (6.0.1) após cessar o transiente de acordo com a Eq. (6.1.3). Os resultados mostram uma consistência entre o método da média e o numérico.

6.2 Amplificação para frequências diferentes $\omega \neq \omega_s$

Quando variamos um pouco a frequência do sinal da frequência de ressonância paramétrica, a resposta do OP devido ao sinal aplicado não será mais senoidal, ou melhor, a amplitude varia de forma periódica [3].

Na Fig. 6.3 plotamos a resposta do oscilador parametricamente forçado na primeira ressonância paramétrica devida à um sinal com frequência $\omega_s = 1.001$ e $\phi = 0$. Também plotamos uma outra resposta de um oscilador com o bombeamento paramétrico desligado (oscilador harmônico) devida ao mesmo sinal. Podemos verificar que quando $\Delta\omega \doteq \omega_s - \omega = 0.001\omega$, o pacote de onda apresenta um período de aproximadamente 3100 **unidade adimensional (u. a.)**.

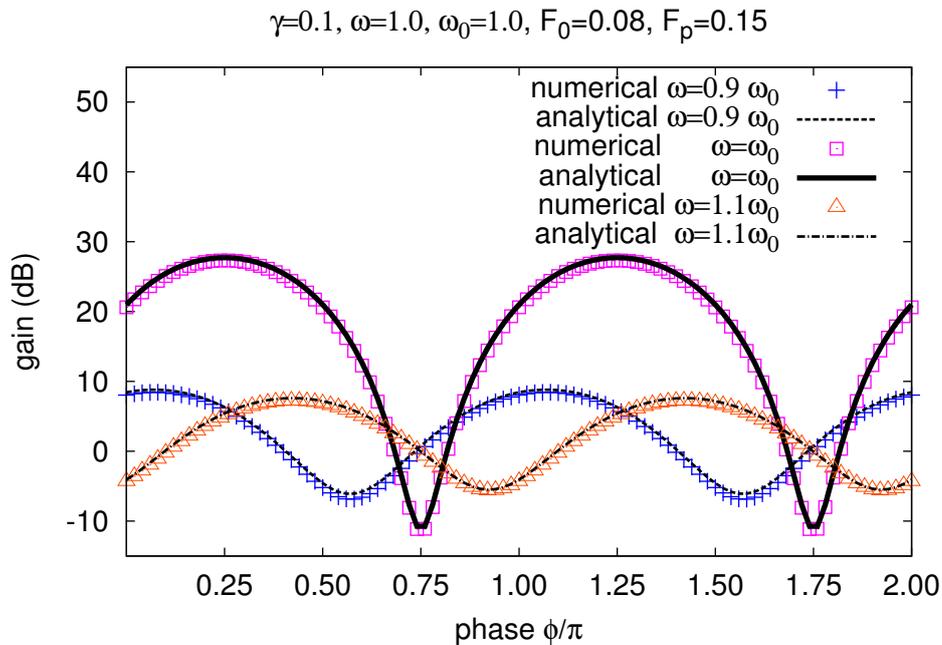


Figura 6.1: Comparação entre as estimativas numéricas e analíticas do ganho em função da fase. Os valores numéricos são dados pela Eq. (6.1.8) substituindo os valores numéricos dos pontos fixos do mapa de retorno de Poincaré, obtidos a partir da integração da Eq. (6.0.1) após cessar o transiente de acordo com a Eq. (6.1.3).

Na Fig. 6.4 plotamos a resposta do oscilador parametricamente forçado na primeira ressonância paramétrica devida à um sinal com frequência $\omega_s = 1.01$ e $\phi = 0$. Também plotamos uma outra resposta de um oscilador com o bombeamento paramétrico desligado (oscilador harmônico) devida ao mesmo sinal. Podemos verificar que quando $\Delta\omega \doteq \omega_s - \omega = 0.01\omega$, o pacote de onda apresenta um período de aproximadamente 340 u. a., sendo menor que o da Fig. (6.3).

Na Fig. 6.5 plotamos a resposta do oscilador parametricamente forçado na sua primeira ressonância paramétrica devida à um sinal com frequência $\omega_s = 1.1$ e $\phi = 0$. Também plotamos uma outra resposta de um oscilador com o bombeamento paramétrico desligado (oscilador harmônico) devida ao mesmo sinal. Podemos verificar que quando $\Delta\omega \doteq \omega_s - \omega = 0.1\omega$, a amplitude máxima da resposta do OPF não é maior que a amplitude da resposta do oscilador harmônico.

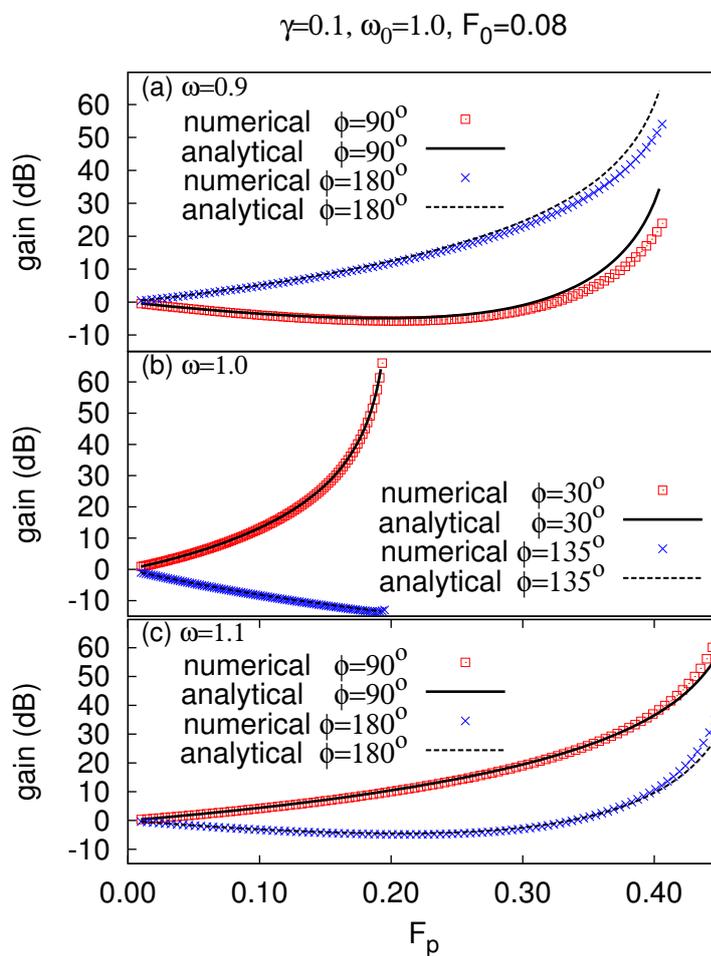


Figura 6.2: Comparação entre as estimativas numéricas e analíticas do ganho em função de F_p . Os valores numéricos são dados pela Eq. (6.1.8) substituindo os valores numéricos dos pontos fixos do mapa de retorno de Poincaré, obtidos a partir da integração da Eq. (6.0.1) após cessar o transiente de acordo com a Eq. (6.1.3).

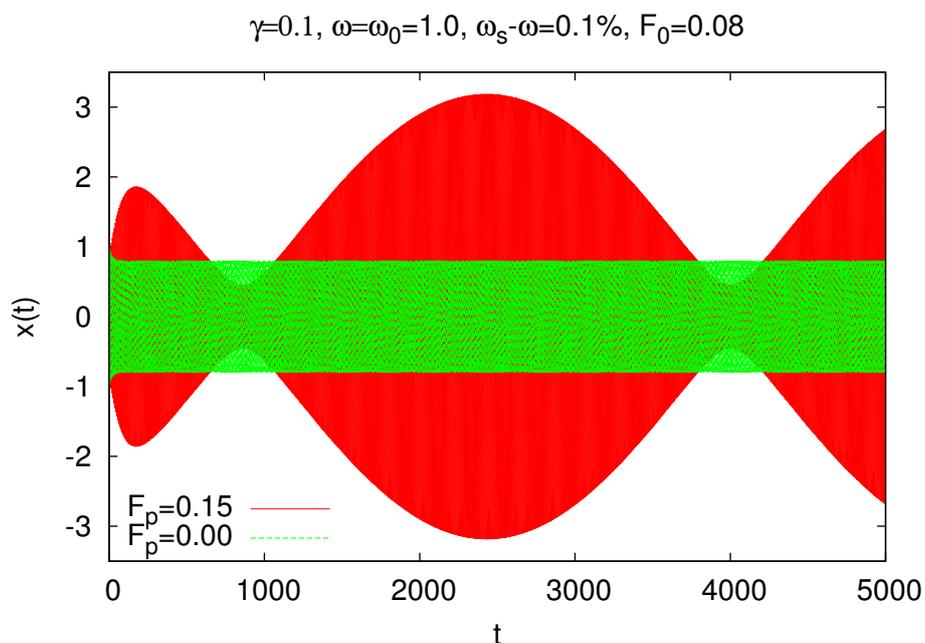


Figura 6.3: Resposta do OPF na primeira ressonância paramétrica, $\omega = \omega_0 = 1.0$, à um sinal com frequência $\omega_s = 1.001$, superposto com uma outra resposta de um oscilador sem excitação (oscilador harmônico) ao mesmo sinal. A resposta do oscilador paramétrico na maior parte do tempo, apresenta uma amplitude mais elevada que a amplitude de resposta do oscilador harmônico.

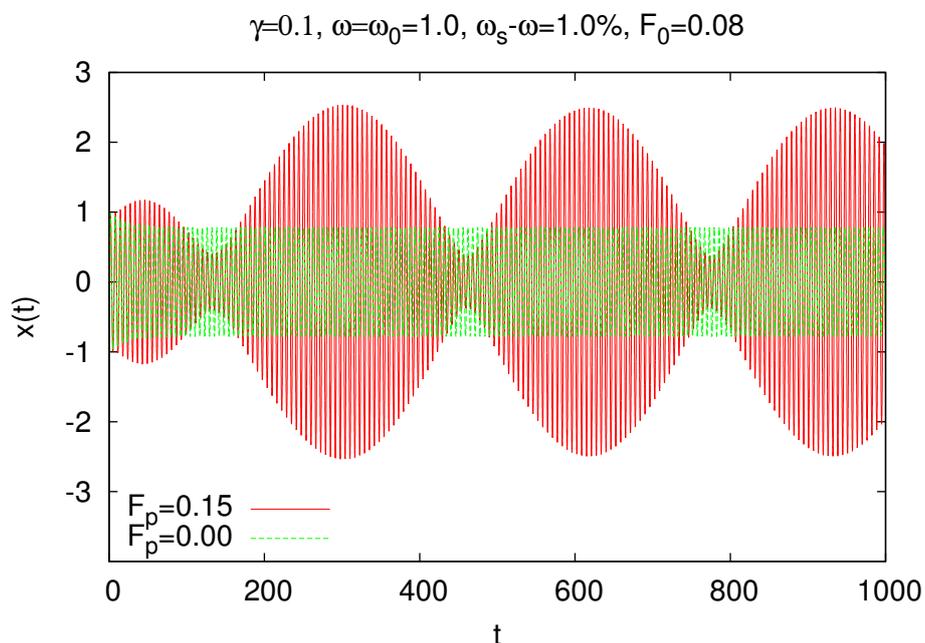


Figura 6.4: Resposta do OPF na primeira ressonância paramétrica, $\omega = \omega_0 = 1.0$, à um sinal com frequência $\omega_s = 1.01$, superposto com uma outra resposta de um oscilador sem excitação (oscilador harmônico) ao mesmo sinal. Podemos observar que para alguns tempos a amplificação paramétrica é alta, porém para outros é negativa.

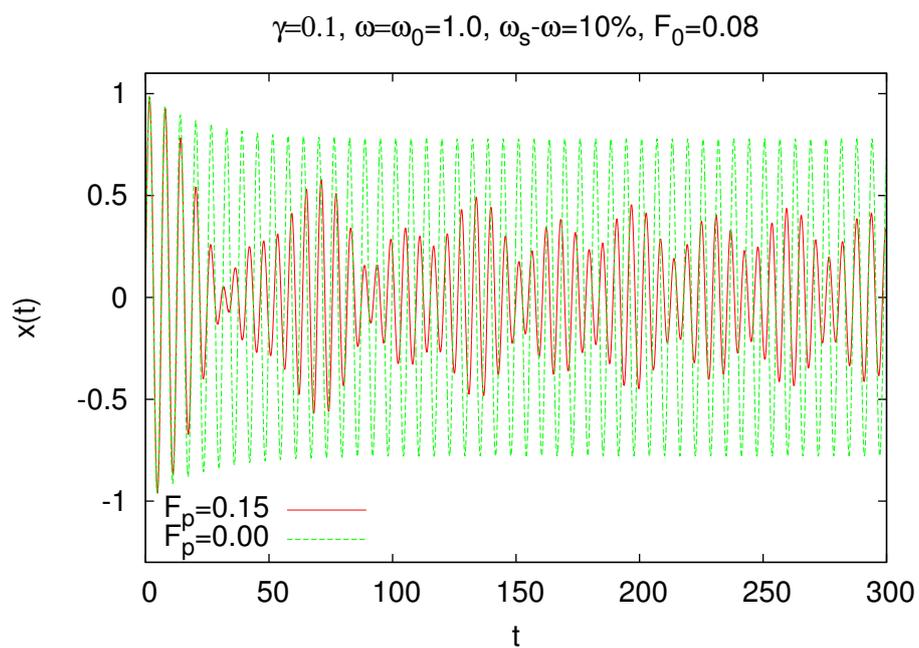


Figura 6.5: Resposta do OPF na primeira ressonância paramétrica, $\omega = \omega_0 = 1.0$, à um sinal com frequência $\omega_s = 1.1$, superposto com uma outra resposta de um oscilador sem excitação (oscilador harmônico) ao mesmo sinal. Em nenhum tempo, a amplitude de resposta do OPF é maior que a resposta do oscilador harmônico.

7 *Razão sinal-ruído do oscilador paramétrico*

No capítulo (5) mostramos a amplificação paramétrica das flutuações na resposta do oscilador paramétrico devido ao ruído térmico na região de estabilidade próximo da linha de transição da primeira zona de instabilidade. Propusemos duas medidas diferentes do ruído: uma dc e outra ac. A medida dc é dada pela média temporal da média estatística das flutuações da posição do oscilador paramétrico devido ao ruído térmico, enquanto que a medida ac é dada pela amplitude das oscilações da média estatística das flutuações na frequência do bombeamento paramétrico.

Já no capítulo (6) mostramos o ganho da amplificação paramétrica da resposta do oscilador paramétrico à uma força externa ac na região de estabilidade próximo da linha de transição perto da primeira zona de instabilidade. A resposta do oscilador paramétrico é comparada com a do oscilador harmônico (quando a excitação paramétrica está desligada). Vimos que o ganho depende sensivelmente da fase ϵ , para alguns casos, chega a divergir na linha de transição entre a zona estável e instável.

Neste capítulo vamos mostrar a **RSR** perto da primeira zona de instabilidade do **OHPF** na presença de ruído térmico. Vamos obter a razão entre o sinal e o ruído estacionária e também a razão entre o sinal e o ruído dinâmica.

7.1 Razão sinal-ruído estacionária

Motivados pela definição do ganho, definimos no artigo [19] uma média da RSR como sendo

$$R_0 = 10 \log \left(\frac{u^{*2} + v^{*2}}{\langle x^2 \rangle} \right), \quad (7.1.1)$$

onde os pontos fixos u^* e v^* são dados Eq. (6.1.7) e a média temporal das flutuações $\overline{\langle x^2 \rangle}$ é dada pela Eq. (5.3.32). Quando o oscilador paramétrico está próximo a primeira zona de instabilidade, podemos obter uma expressão simples para a média das flutuações térmicas, que é dada aproximadamente por

$$\langle x^2(t) \rangle \approx \frac{2T}{\omega^2} \left[\beta^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \delta^2 \right] \frac{1}{\gamma^2 - 4\kappa^2} - \frac{4\beta T \gamma}{\omega^2(\gamma^2 - 4\kappa^2)} \left[\frac{\delta}{\gamma} \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \right].$$

Assim, podemos escrever essa expressão (7.1.1) aproximadamente como

$$R_0 \approx 10 \log \left\{ \frac{2F_0^2 \omega^2}{T(\gamma^2 \omega^2 + \Omega^2 - F_p^2/4)} \left[1 + \frac{F_p[\Omega \cos(2\phi) + \gamma \omega \sin(2\phi)]}{\gamma^2 \omega^2 + \Omega^2 + F_p^2/4} \right] \right\}. \quad (7.1.2)$$

Perceber que na primeira zona de instabilidade a razão sinal-ruído R_0 diverge, independente da fase que o sinal apresenta.

Na Fig. 7.1, mostramos um gráfico logarítmico da amplitude do sinal (amplitude de resposta do oscilador paramétrico, devido a uma força externa ac) sobre o ruído (componente dc do deslocamento quadrático médio). Observa-se uma forte dependência do R_0 com a fase e a amplitude de bombeamento paramétrico. Para algumas fases a razão R_0 é extremamente alta, para outras R_0 extremamente baixas ou iguais.

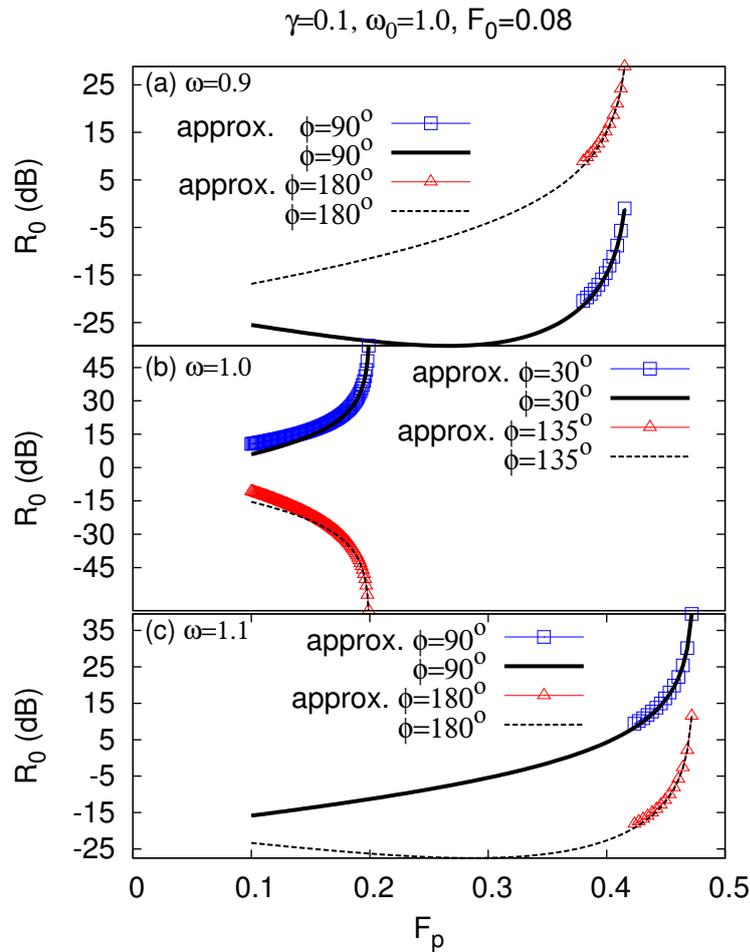


Figura 7.1: Gráfico da razão sinal-ruído R_0 , tal como na Eq. (7.1.1) juntamente com a aproximação correspondente dada pela Eq. (7.1.2).

7.2 Razão sinal-ruído dinâmica

Outra medida da RSR é dada pela comparação da intensidade do sinal com o nível de ruído na mesma frequência, que está em 2ω . Esta é dada pela expressão

$$R_{2\omega} = 10 \log \left(\frac{u^{*2} + v^{*2}}{\sqrt{|A_{2\omega}|^2 + |B_{2\omega}|^2}} \right), \quad (7.2.3)$$

onde os componentes $A_{2\omega}$ e $B_{2\omega}$ são definidos na Eq. (5.3.35). Pela análise dimensional, percebe-se que $A_{2\omega}$ e $B_{2\omega}$ tem as mesmas unidades dimensionais de $u^{*2} + v^{*2}$. Perto da

primeira zona de instabilidade,

$$A_{2\omega} \approx -\frac{4\beta T \delta}{\omega^2(\gamma^2 - 4\kappa^2)}, \quad (7.2.4)$$

$$B_{2\omega} \approx -\frac{2\beta T \gamma}{\omega^2(\gamma^2 - 4\kappa^2)}. \quad (7.2.5)$$

Assim, obtemos uma estimativa simples para a média RSR,

$$R_{2\omega} \approx 10 \log \left\{ \frac{2F_0^2 \omega^2}{|F_p| T (\gamma^2 \omega^2 + \Omega^2 - F_p^2/4)} \times \left[\frac{\gamma^2 \omega^2 + \Omega^2 + F_p^2/4 + F_p [\Omega \cos(2\phi) + \gamma \omega \sin(2\phi)]}{\sqrt{\gamma^2 \omega^2 + \Omega^2}} \right] \right\}, \quad (7.2.6)$$

e, assim como R_0 , $R_{2\omega}$ também diverge na primeira zona de instabilidade.

Para que amplificadores paramétricos sejam eficientes, é necessário que ele maximize tanto a função (7.1.1) como (7.2.3).

Na Fig. (7.2) mostramos um gráfico logarítmico do sinal (amplitude de resposta do oscilador paramétrico devido à uma força externa ac) sobre a amplitude média das flutuações que oscilam na frequência 2ω (componente ac do deslocamento quadrático médio). Assim como R_0 , observa-se uma forte dependência da razão $R_{2\omega}$ com a fase e a amplitude de bombeamento paramétrico. Para algumas fases $R_{2\omega}$ é extremamente alta, para outras $R_{2\omega}$ extremamente baixas ou iguais.

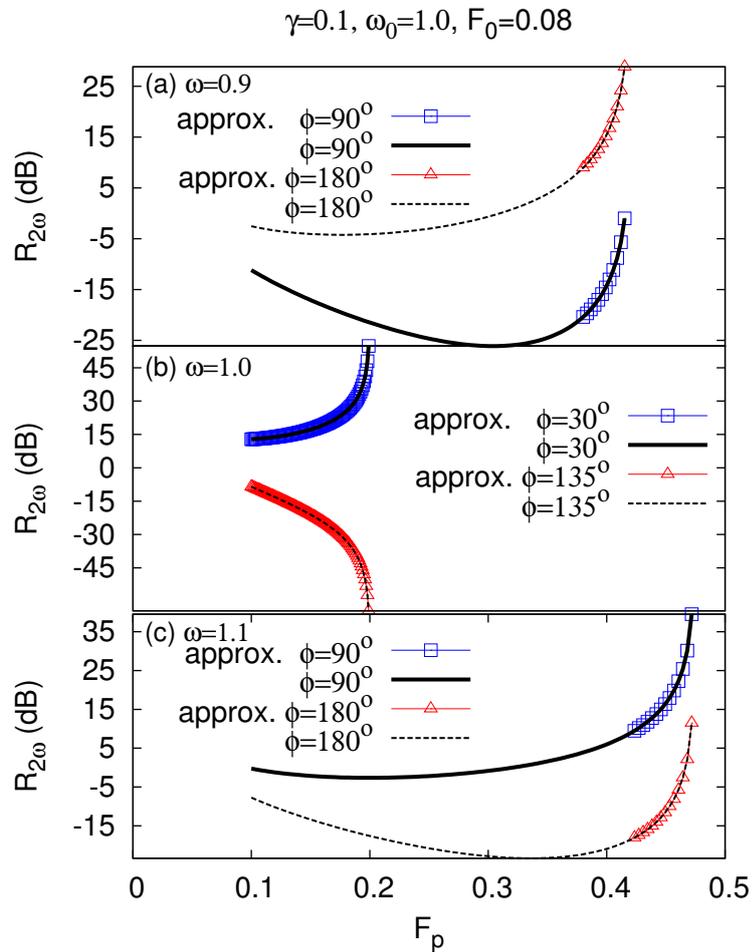


Figura 7.2: Gráfico da razão sinal-ruído $R_{2\omega}$, definido na Eq. (7.2.3) com os pontos fixos u^* e v^* dados pela Eq. (6.1.7) e a amplitude do squeezing térmico $\langle x^2 \rangle$ dado por $\sqrt{|A_{2\omega}|^2 + |B_{2\omega}|^2}$ definidos na Eq. (5.3.35). Comparamos com as aproximações da Eq. (7.2.6) e obtemos muito boas concordâncias.

8 *Conclusão*

Nesta dissertação, realizamos um estudo sobre o oscilador parametricamente forçado próximo à primeira zona de ressonância paramétrica na presença do ruído térmico e de uma força externa ac.

Inicialmente, encontramos duas funções de Green do oscilador paramétrico, sendo uma aproximada pelas técnicas da média e uma outra exata pela teoria de Floquet com as funções de Mathieu. Comparamos com os resultados numéricos obtidos pela integração numérica e uma excelente concordância foi encontrada.

Com a função de Green obtida pela técnica da média, resolvemos a equação diferencial do oscilador paramétrico na presença do ruído térmico aditivo. Percebemos que embora a média estatística da posição, $\langle x(t) \rangle$, seja nula, as flutuações do oscilador paramétrico, $\langle x^2(t) \rangle$, são cada vez maiores à medida que, na região de estabilidade, nos aproximamos da linha de transição da primeira zona de instabilidade. Isso leva ao aquecimento, aumento de $\overline{\langle x^2(t) \rangle}$, e ao aumento da amplitude de oscilação da flutuação térmica, ou seja, do squeezing térmico, expandindo a teoria aplicada aos resultados experimentais de Rugar e Grütter [16].

Calculamos o ganho da amplificação paramétrica do sinal que é dado, basicamente, pelo logarítmico da razão entre a amplitude da força externa ac com excitação paramétrica ligada com a amplitude de resposta quando não há excitação paramétrica. Três modos de calcular o ganho foram obtidos: um pelas técnicas da média, outro pelo método do balanço

harmônico e um terceiro pelo método numérico. Percebemos que o ganho é sensível a fase e a dessintonia da frequência, podendo divergir na linha de transição da primeira zona de instabilidade paramétrica.

Fizemos também uma comparação entre a amplificação paramétrica do sinal e do ruído quando o oscilador paramétrico está sendo bombeado próximo à primeira zona de ressonância paramétrica. Propusermos dois tipos de razão sinal-ruído. O primeiro, R_0 , relaciona a amplificação do sinal com a média temporal da média estatística das flutuações da posição do oscilador paramétrico devido ao ruído térmico. A segunda, $R_{2\omega}$, relaciona amplificação do sinal com a amplitude das oscilações da média estatística das flutuações na frequência do bombeamento paramétrico. Observamos uma forte dependência da fase e do bombeamento paramétrico, divergindo na linha de transição da primeira zona de instabilidade. Portanto, para melhorar o máximo possível a amplificação, é necessário maximizar as funções R_0 e $R_{2\omega}$ de acordo com os parâmetros do oscilador parametricamente forçado.

Podemos aperfeiçoar o nosso método incluindo mais detalhes sobre o modelo do ruído, como o efeito da memória [45, 46]. Melhoria na precisão das previsões deve ser obtida levando em conta os termos não-lineares para a primeira zona de instabilidade [20]. Entendemos que nosso método também pode ser aplicado à resposta linear do oscilador não-linear na presença da força externa e do ruído térmico.

Finalmente compreendemos que este modelo também pode ser aplicado à dinâmica de íons em guia quadripolar de íons e armadilha de íons de Paul, ou armadilhas para partículas neutras com momento de dipolo magnético [47]. Admitindo que o vácuo não é completo, implica à presença do ruído térmico.

APÊNDICE A – Teoria da média

O método da média é geralmente usado para eliminar a dependência temporal explícita do sistema EDO periodicamente forçado. Ele tem sido aplicado em diversos problemas, por exemplo o problema de três corpos gravitacionais, oscilador de Van der Pol [48], e no estudo do oscilador de Duffing parametricamente forçado [49]. A mais simples aplicação desse método é talvez o cálculo do limite entre o movimento estável e intável na equação de Mathieu [50]. Uma pesquisa da teoria da média e muitos outros resultados podem ser encontrados em [51]. Neste capítulo vamos enunciar o teorema da média como indicado em [48] e prová-lo. Além disso, mostramos também como estendê-lo à segunda ordem como em [49].

A.1 Método da média: teorema

Suponha que temos uma EDO não-autônoma do sistema

$$\dot{x} = \varepsilon q(x, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon f(x, t) + \varepsilon^2 g(x, t), \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (\text{A.1})$$

com $q: \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é C^r , onde $r \geq 2$, de período T e limitada em conjuntos limitados. A função $f(x, t)$ pode ser decompostas em seus modos de Fourier, $f(x, t) = f_0(x) + \tilde{f}(x, t)$, onde $f_0(x)$ não tem dependência explícita do tempo e $\tilde{f}(x, t)$ inclui todos os termos explíci-

tamente oscilante. A média correspondente à sistemas EDO (autônomos) é

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y). \quad (\text{A.2})$$

Teorema A.1.1 (Teorema da média). *Há uma transformação C^r , $x = y + W(y, t)$, em que (A.1) pode ser substituída por*

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon), \quad (\text{A.3})$$

onde f_1 é de período T em t . Além disso

(i) $x(t)$ e $y(t)$ são soluções de (A.1) e (A.2) com condições iniciais x_0 e y_0 , respectivamente, onde $|x_0 - y_0| = O(\varepsilon)$ em uma escala de tempo $t = O(1/\varepsilon)$.

(ii) Se p_0 é um ponto hiperbólico de (A.2), existe então $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todos $0 < \varepsilon \ll \varepsilon_0$, (A.1) possui uma órbita hiperbólica única periódica $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$ com o mesmo tipo de estabilidade de p_0 .

(iii) Se $x^s(t) \in W^s(\gamma_\varepsilon)$ é uma solução de (A.1) sobre a variedade estável da órbita hiperbólica periódica $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$, $y^s(t) \in W^s(p_0)$ é uma solução de (A.2) sobre a variedade estável do ponto fixo hiperbólico p_0 e $|x_0 - y_0| = O(\varepsilon)$, então $|x(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$ para $t \in [0, \infty)$.

Prova. Através da regra de transformação, encontramos que

$$\dot{x} = \dot{y} + \varepsilon D_y W \dot{y} + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Assim

$$\dot{y} = \varepsilon (I - \varepsilon D_y W) \left[f_0(y) + \varepsilon (D_y f_0) W + \tilde{f}(y, t) + \varepsilon (D_y \tilde{f}) W + \varepsilon g(y) - \frac{\partial W}{\partial t} \right] + O(\varepsilon^3).$$

A função $W(y, t)$ é escolhida para satisfazer $W_t(y, t) = \tilde{f}(y, t)$ com constantes de integração

definidas como zero. Em seguida obtemos

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y) + \varepsilon^2 g_0(y) + \varepsilon^2 [(D_y \tilde{f})W + \tilde{g}(y, t)] + \varepsilon^2 [(D_y f_0)W - (D_y W)f_0] + O(\varepsilon^3).$$

Então

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y) + \varepsilon^2 h(y, t) + O(\varepsilon^3), \quad (\text{A.4})$$

onde $h(y, t) = (D_y f(y, t))W(y, t) - (D_y W(y, t))f_0 + g(y, t)$. Contudo, podemos comprovar que as soluções das equações (A.1) e (A.2), inicialmente partindo de $O(\varepsilon)$ vai ficar perto de $O(\varepsilon)$ em uma escala de tempo $O(1/\varepsilon)$.

Considere as soluções $y(t)$ e $y_\varepsilon(t)$ das equações $\dot{y} = \varepsilon f_0(y)$ e $\dot{y} = \varepsilon f_0(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon)$ respectivamente. Então

$$y_\varepsilon(t) - y(t) = y_{\varepsilon 0} - y_0 + \varepsilon \int_0^t [f_0(y_\varepsilon) - f_0(y)] ds + \varepsilon^2 \int_0^t f_1(y_\varepsilon(s), s, \varepsilon) ds.$$

Fazendo $y_\varepsilon(s) - y(s) = \zeta(s)$, L a constante de Lipshitz de f_0 e M o máximo de f_1 , a equação acima se torna

$$|\zeta(t)| \leq |\zeta(0)| + \varepsilon L \int_0^t |\zeta(s)| ds + \varepsilon^2 M t.$$

Usando a desigualdade de Gronwall com as substituições $c(t) = |\zeta(0)| + \varepsilon^2 M t$ e $u(t) = \varepsilon L$, obtemos

$$|\zeta(t)| \leq |\zeta(0)| e^{\varepsilon L t} + \frac{\varepsilon M}{L} e^{\varepsilon L t},$$

ou ainda

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - y_\varepsilon(t)| + |y_\varepsilon(t) - y(t)| \leq \varepsilon |W(y_\varepsilon, t)| + O(\varepsilon) \sim O(\varepsilon).$$

Isto conclui a parte (i) do teorema.

Novamente fazemos outra transformação fracamente não-linear $y = z + \varepsilon^2 v(z, t)$, a fim de eliminar os termos explicitamente dependentes do tempo de $O(\varepsilon^2)$. Após a média de

segunda ordem, obtemos

$$\dot{z} = \varepsilon f_0(z) + \varepsilon^2 [D\tilde{f}(z, t)W(z, t) + g(z, t)]_0, \quad (\text{A.5})$$

onde $[\cdot]_0$ indica a média do tempo. Portanto, um estudo da equação (A.5) revela informações importantes sobre a estrutura do sistema original (A.1). O termo de segunda ordem da equação (A.5) só é necessário quando os termos não-lineares não são mantidos na primeira média do sistema EDO (A.2).

Lema A.1.1 (Desigualdade de Gronwall). *Se u, v e $c \geq 0$ em $[0, t]$, sendo c diferenciável e $v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds$, temos*

$$v(t) \leq c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + \int_0^t c'(s)e^{\int_s^t u(\tau)d\tau}ds.$$

Prova. Supondo que $R(t) \doteq \int_0^t u(s)v(s)ds$, então $\dot{R}(t) = u(t)v(t)$ e da hipótese

$$\dot{R}(t) - u(t)R(t) = u(t) \left(v(t) - \int_0^t u(s)v(s)ds \right) \leq u(t)R(t),$$

assim

$$\frac{d}{dt} \left[R e^{-\int_0^t u(s)ds} \right] \leq -c \frac{d}{dt} e^{-\int_0^t u(s)ds},$$

integrando, obtemos

$$R(t) \leq -c(t) + c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + \int_0^t dsc'(s)e^{\int_s^t u(\tau)d\tau}. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente a partir da definição de $v(t)$ obtemos

$$v(t) \leq c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + \int_0^t dsc'(s)e^{\int_s^t u(\tau)d\tau}. \quad (\text{A.7})$$

APÊNDICE B – Rotinas utilizadas no MAPLE

B.1 Resposta do oscilador paramétrico

```

:
restart;
with(plots):
parAmp:=(
diff(x(t),t)=y(t),
diff(y(t),t)=-gamma*y(t)-(1+Fp*cos(2*w*t))*x(t)+F0*cos(vu*t)
):
params:=gamma=0.1, Fp=20.0, w=1.0, F0=0.08, vu=1.0:
init1:=x(0)=0,y(0)=1:
dvars:=[x(t),y(t)]:
parAmp1:=[op(subs(params,[parAmp])),init1]:
LS1:=dsolve(parAmp1, numeric, range=0..2000 ):
file := "parAmp.dat":
try
    fd := fopen(file,'WRITE','TEXT');
    for tt from 0 to 2000 by 0.01 do
        fprintf(fd,"%a %a %a\n", eval([t,x(t), y(t)],LS1(tt)) [])
    end do
end try

```

```

od;
finally close(file)
end try:

```

B.2 Multiplicadores de Floquet

```

restart:
with(LinearAlgebra);
#defina uma matriz
A:= omega -> Matrix([[exp(-(1/2)*Gamma*t)*MathieuC(-(1/4)*(-4*omega0^2
+Gamma^2)/omega^2, (1/2)*Fp/omega^2, omega*t)+(1/2)*(Gamma/omega)*exp(
-(1/2)*Gamma*t)*MathieuS(-(1/4)*(-4*omega0^2+Gamma^2)/omega^2, (1/2)*F
p/omega^2, omega*t), (1/omega)*exp(-(1/2)*Gamma*t)*MathieuS(-(1/4)*(-4
*omega0^2+Gamma^2)/omega^2, (1/2)*Fp/omega^2, omega*t)], [-(1/2)*Gamma
*exp(-(1/2)*Gamma*t)*MathieuC(-(1/4)*(-4*omega0^2+Gamma^2)/omega^2, (1
/2)*Fp/omega^2, omega*t)+exp(-(1/2)*Gamma*t)*diff(MathieuC(-(1/4)*(-4*
omega0^2+Gamma^2)/omega^2, (1/2)*Fp/omega^2, omega*t), t)-(Gamma^2/4)*
(1/omega)*exp(-(1/2)*Gamma*t)*MathieuS(-(1/4)*(-4*omega0^2+Gamma^2)/om
ega^2, (1/2)*Fp/omega^2, omega*t)+(Gamma/2)*(1/omega)*exp(-(1/2)*Gamma
*t)*diff(MathieuS(-(1/4)*(-4*omega0^2+Gamma^2)/omega^2, (1/2)*Fp/omega
^2, omega*t), t), -(1/2)*Gamma*(1/omega)*exp(-(1/2)*Gamma*t)*MathieuS(
-(1/4)*(-4*omega0^2+Gamma^2)/omega^2, (1/2)*Fp/omega^2, omega*t)+(1/om
ega)*exp(-(1/2)*Gamma*t)*diff(MathieuS(-(1/4)*(-4*omega0^2+Gamma^2)/om
ega^2, (1/2)*Fp/omega^2
, omega*t), t)]]);
E := Eigenvalues( A(omega) );
#simplify (E) assuming real;
Fp=0.1;

```

```
t=2*Pi/(omega);
omega0=1.0;
Gamma=0.1;
# Arquivo de saida
file := "evalues.dat":
try
    fd := fopen(file,'WRITE','TEXT');
# defina um intervalo de parametros aqui
    for omega from 0.1 to 2.0 by 0.01 do
        fprintf(fd,"%a %a %a\n", omega, E[1], E[2] )
    od;
finally close(file)
end try:
```

APÊNDICE C – Participações em encontros e trabalhos publicados

1. Adriano A. Batista, [Raoni S. N. Moreira](#). “Heating and thermal noise squeezing in a parametrically-driven resonator”. Encontro de Física 2011. Sessão Random Systems. 2011.
2. [Raoni S. N. Moreira](#), Adriano A. Batista. “Amplificação paramétrica em osciladores”. XXIX Encontro de Físicos do Norte e Nordeste. Sessão Física Estatística. 2011.
3. Adriano A. Batista, [Raoni S. N. Moreira](#). “Heating and thermal noise squeezing in a parametrically-driven resonator”. XXIX Encontro de Físicos do Norte e Nordeste. Sessão Física Estatística. 2011.
4. Adriano A. Batista, [Raoni S. N. Moreira](#). “Signal-to-noise ratio in parametrically driven oscillators”. Phys. Rev. E, v. 84, p. 061121 (2011).
5. Adriano A. Batista, [Raoni S. N. Moreira](#). “Signal-to-noise ratio in parametrically driven oscillators”. XXXV Brazilian Meeting on Condensed Matter Physics. Sessão Dynamical Models (classical and quantum) and Statistical Mechanics Approaches. 2012.

Bibliografia

- [1] RUBY, L. Applications of the Mathieu equation. *Amer. J. of Phys.*, v. 64, n. 1, p. 39–44, 1996.
- [2] RULLI, C.; RINO, J. Oscilações paramétricas: uma simulação numérica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 1, p. 71–78, 2007.
- [3] KARABALIN, R.; MASMANIDIS, S.; ROUKES, M. Efficient parametric amplification in high and very high frequency piezoelectric nanoelectromechanical systems. *Appl. Phys. Lett.*, p. 183101, 2010.
- [4] BARROS, V. P. Osciladores forçados: harmônico e paramétrico. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 4, p. 549–554, 2007.
- [5] FRENKEL, D.; PORTUGAL, R. Algebraic methods to compute mathieu functions. *J. of Phys. A: Mathematical and General*, v. 34, p. 3541, 2001.
- [6] FARADAY, M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. London*, v. 121, p. 319–340, 1831.
- [7] WEBER, H.; ARFKEN, G. *Essential Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, San Diego, USA, 2004.
- [8] MATHIEU, E. Le mouvement vibratoire d'une membrane de forma elliptique. *J. de Math. Pures Appl.*, v. 13, p. 137–203, 1868.
- [9] GUTIÉRREZ-VEGA, J. et al. Mathieu functions, a visual approach. *Amer. J. of Phys.*, v. 71, p. 233, 2003.
- [10] KITTEL, C.; MCEUEN, P. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley New York, 1976.
- [11] PAUL, W. Electromagnetic traps for charged and neutral particles. *Rev. of Mod. Phys.*, v. 62, n. 3, p. 531–540, 1990.
- [12] LÖHNDORF, M. et al. Microcantilever torque magnetometry of thin magnetic films. *J. of Appl. Phys.*, v. 87, p. 5995, 2000.
- [13] ZALALUTDINOV, M. et al. Optically pumped parametric amplification for micromechanical oscillators. *Appl. Phys. Lett.*, v. 78, p. 3142, 2001.
- [14] REQUA, M.; TURNER, K. Electromechanically driven and sensed parametric resonance in silicon microcantilevers. *Appl. phys. lett.*, v. 88, p. 263508, 2006.

- [15] MARCONI, J. *Estudo de Amplificadores Paramétricos para Sistemas de Comunicações Ópticas de Altas Taxas de Transmissão*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Instituto de Física da Unicamp Campinas, 2006.
- [16] RUGAR, D.; GRÜTTER, P. Mechanical parametric amplification and thermomechanical noise squeezing. *Phys. Rev. Lett.*, v. 67, p. 699–702, Aug 1991.
- [17] BINNIG, G.; QUATE, C. F.; GERBER, C. Atomic force microscope. *Phys. Rev. Lett.*, v. 56, p. 930–933, Mar 1986.
- [18] NAYFEH, A.; MOOK, D. *Nonlinear Oscillations*. Wiley Online Library, 1979.
- [19] Adriano A. Batista and Raoni S. N. Moreira. Signal-to-noise ratio in parametrically driven oscillators. *Phys. Rev. E*, v. 84, p. 8, 2011.
- [20] Adriano A. Batista. Cooling, heating, and thermal noise squeezing in a parametrically driven resonator. *J. of Stat. Mech.: Theory and Experiment*, v. 2011, p. P02007, 2011.
- [21] STOWE, T. et al. Attonewton force detection using ultrathin silicon cantilevers. *Appl. Phys. Lett.*, v. 71, n. 2, p. 288–290, 1997.
- [22] DIFILIPPO, F. et al. Classical amplitude squeezing for precision measurements. *Phys. Rev. Lett.*, v. 68, p. 2859–2862, May 1992.
- [23] NATARAJAN, V.; DIFILIPPO, F.; PRITCHARD, D. E. Classical squeezing of an oscillator for subthermal noise operation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 74, p. 2855–2858, Apr 1995.
- [24] ALMOG, R. et al. Noise squeezing in a nanomechanical duffing resonator. *Phys. Rev. Lett.*, v. 98, n. 7, p. 078103, 2007.
- [25] CLELAND, A. Thermomechanical noise limits on parametric sensing with nanomechanical resonators. *New J. of Phys.*, v. 7, p. 235, 2005.
- [26] MONTEIRO, L. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2002.
- [27] KUZNETSOV, I. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer Verlag, 1998.
- [28] GLENDINNING, P. *Stability, Instability, and Chaos: an Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. Cambridge Univ Pr, 1994.
- [29] STROGATZ, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press, 1994.
- [30] AGARWAL, R. et al. Floquet theory and stability of nonlinear integro-differential equations. *Acta Mathematica Hungarica*, v. 109, n. 4, p. 305–330, 2005.
- [31] WIESENFELD, K.; MCNAMARA, B. Period-doubling systems as small-signal amplifiers. *Phys. Rev. Lett.*, v. 55, p. 13–16, 1985.
- [32] SIMAKHINA, S. *Stability Analysis of Hill's Equation*. Tese (Doutorado) — University of Illinois at Chicago, 2003.

- [33] BOAS, M. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [34] BYRON, F.; FULLER, R. *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover Pubns, 1992.
- [35] GONÇALVES, J. Ressonância, materialidade e subjetividade: as culturas como patrimônios. *Horizontes Antropológicos*, v. 11, n. 23, p. 15–36, 2005.
- [36] BATISTA, A. Squeezing of thermal noise in a parametrically-driven oscillator. In: *J. of Phys.: Conference Series.*, 2011. v. 285, p. 012041.
- [37] CHANG, C.; STEER, M.; RHYNE, G. Frequency-domain spectral balance using the arithmetic operator method. *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, v. 37, n. 11, p. 1681–1688, 1989.
- [38] SILVA, J. M.; LIMA, J. A. S. Quatro Abordagens para o Movimento Browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 1, p. 25–35, 2007.
- [39] CHANDRASEKHAR, S. Brownian Motion, Dynamical Friction and Stellar Dynamics. *Dialectica*, v. 3, n. 1-2, p. 114–126, 1949.
- [40] TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. de. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. EDUSP, 2001.
- [41] LIMA, J.; PLASTINO, A. On the Classical Energy Equipartition Theorem. *Brazilian J. of Phys.*, v. 30, n. 1, p. 176–180, 2000.
- [42] SALINAS, S. *Introdução à física estatística*. Edusp, 1997.
- [43] REIF, F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw-Hill, 1967.
- [44] ALMOG, R. et al. High intermodulation gain in a micromechanical duffing resonator. *Appl. Phys. Lett.*, v. 88, n. 21, p. 213509–213509, 2006.
- [45] GRIFONI, M.; HÄNGGI, P. Driven quantum tunneling. *Phys. Rep.*, v. 304, p. 229–354, 1998.
- [46] BATISTA, A. A.; OLIVEIRA, F. A.; NAZARENO, H. N. Duffing oscillators: control and memory effects. *Phys. Rev. E*, v. 77, p. 066216, 2008.
- [47] LOVELACE, R. et al. Magnetic confinement of a neutral gas. *Nature*, v. 318, n. 6041, p. 30–36, 1985.
- [48] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer Verlag, 1990.
- [49] HOLMES, C.; HOLMES, P. Second order averaging and bifurcations to subharmonics in duffing's equation+. *J. of Sound and Vibration*, v. 78, n. 2, p. 161–174, 1981.
- [50] VERHULST, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag, 1996.

- [51] SANDERS, J.; VERHULST, F.; MURDOCK, J. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Springer Verlag, 2007.