



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

WAGNER OLIVEIRA DOS SANTOS

TERMODINÂMICA VIOLANDO A INVARIÂNCIA DE
LORENTZ PELA TEORIA DE CAMPOS EFETIVA NO
REGIME ULTRAVIOLETA E APLICAÇÕES

Campina Grande, PB
24 de outubro de 2017

WAGNER OLIVEIRA DOS SANTOS

TERMODINÂMICA VIOLANDO A INVARIÂNCIA DE LORENTZ PELA TEORIA
DE CAMPOS EFETIVA NO REGIME ULTRAVIOLETA E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso de Mestrado em Física pela Universidade Federal de Campina Grande. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS

Campina Grande, PB
24 de outubro de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S237t Santos, Wagner Oliveira dos.
Termodinâmica violando a invariância de Lorentz pela Teoria de Campos Efetiva no Regime Ultravioleta e Aplicações / Wagner Oliveira dos Santos. – Campina Grande, 2017.
49 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos".

Referências.

1. Violação da Simetria de Lorentz. 2. Teoria de Campos Efetiva. 3. Termodinâmica Modificada. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Título.

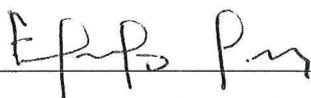
CDU 537.8(043)

WAGNER OLIVEIRA DOS SANTOS

**TERMODINÂMICA VIOLANDO A INVARIÂNCIA DE LORENTZ PELA
TEORIA DE CAMPOS EFETIVA NO REGIME ULTRAVIOLETA E
APLICAÇÕES**

Dissertação aprovada em 09/08/2017

BANCA EXAMINADORA



(Presidente)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Departamento de Física - UEPB



(Membro interno)

Prof. Dr. Lincoln Rodrigues Sampaio de Araújo
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa Filho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - CG

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, Valdelice Oliveira Dias e Alailson Batista dos Santos, que sempre deram muito apoio a minha carreira acadêmica.

Ao meu orientador, o professor Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, pelo estímulo, competência e paciência que sempre teve durante este projeto.

A todos os professores e demais funcionários da Unidade Acadêmica de Física (UAF), por toda a atenção a mim dispensada. Aos colegas de mestrado pelas produtivas discussões e pelos momentos de lazer compartilhados.

A CAPES pelo apoio financeiro neste projeto.

Resumo

Nesta dissertação consideramos a proposta de modificação dos setores do fóton e do férmion via à teoria de campos efetiva de Myers-Pospelov. Esta abordagem tem como principal característica a violação da simetria de Lorentz através da introdução de operadores de altas ordens derivativas de dimensão-5 e campos constantes. Consequentemente, a quebra desta importante simetria conduz a relações de dispersão que sondam efeitos na escala de energia de Planck, onde efeitos da gravidade quântica devem ser relevantes. Isso nos motiva a estudar as possíveis consequências destas relações de dispersão modificadas no comportamento termodinâmico de gases compostos por fótons ou férmions. Será mostrado que a violação da simetria de Lorentz pode ser interpretada como uma pseudo-interação repulsiva ou atrativa entre as partículas. Mostraremos também, por exemplo, que a relação de dispersão modificada do fóton, implica em um aumento da entropia do sistema, isto é, a quebra da simetria de Lorentz pode conduzir a um aumento no número de estados acessíveis do sistema. Além disso, aplicamos as propriedades destes gases a radiação de corpo negro e a dinâmica estelar de anãs brancas no modelo de Chandrasekhar.

Palavras-Chave: Violação da Simetria de Lorentz, Teoria de Campos Efetiva, Termodinâmica Modificada.

Abstract

In this dissertation, we consider a proposal which modifies the gauge and fermion sectors via Myers-Pospelov effective field theory. The main feature of this approach is the Lorentz symmetry violation through the introduction of higher-derivatives operators of dimension-5 and constant fields. Hence, breaking this important symmetry leads to dispersion relations probing effects in the Planck energy scale, that in turn, sets the limit for which the quantum description of space-time becomes to be relevant. It motivate us to study the possible implications of these modified dispersion relations on thermodynamic behavior of photons and fermions gases. It will be shown that the breakdown of Lorentz invariance can be interpreted as a repulsive or attractive pseudo-interaction among the particles. Additionally, for instance, it will be shown that the presence of a deformed dispersion relation for photons entails an increase in the entropy of the system, e.g., the Lorentz symmetry violation may lead to an increase in the number of microstates available to the system. In addition, we apply the properties of these gases to black body radiation and stellar dynamics of white dwarfs in the Chandrasekhar model.

Keywords: Lorentz Symmetry Violation, Effective Field Theories, Modified Thermodynamics.

Sumário

Introdução	3
1 Teoria de Campos Efetiva com Operadores de Dimensão-5	6
1.1 Modelo de Myers-Pospelov - Campo de Calibre	7
1.1.1 Equação de Movimento do Modelo	8
1.1.2 Relação de Dispersão e Velocidade de Grupo	13
1.2 Modelo de Myers-Pospelov - Campo Fermiônico	15
1.2.1 Equação de Movimento	16
1.2.2 Relação de Dispersão e Velocidade de Grupo	16
2 Formalismo Grande Canônico	18
2.1 Ensemble Grande Canônico e Função de Partição	18
2.1.1 Conexão Entre a Mecânica Estatística e a Termodinâmica	21
2.2 Estatística Quântica de Gases Ideias	22
2.2.1 Função de Partição: Caso Bose-Einstein	23
2.2.2 Função de Partição: Caso Fermi-Dirac	24
2.2.3 Propriedades Termodinâmicas: Caso BE e FD	25
3 A Termodinâmica do Gás de Fótons e a Radiação de Corpo Negro Modificada	27
3.1 Grande Função de Partição Modificada - Caso BE	27
3.2 Termodinâmica do Gás de Fótons	29
3.2.1 Densidade de Energia e Partículas	30
3.2.2 Pressão, Entropia e Capacidade Térmica	31
3.2.3 Relação Pressão-Energia e Equação de Estado	32
3.3 Aplicação a Radiação de Corpo Negro	33

4	A Termodinâmica do Gás de Férmions Modificada e sua Aplicação a Estrelas	
	Anãs Brancas	35
4.1	Termodinâmica do Gás de Férmions Relativístico e Degenerado	35
4.1.1	Densidade de Partículas e Energia	36
4.1.2	Pressão	37
4.2	Aplicação a Objetos Astrofísicos: Anãs Brancas	38
5	Conclusões e Perspectivas	43
	Referências Bibliográficas	45

Introdução

A invariância de Lorentz (grupos das rotações e dos boosts) é considerada a simetria fundamental da teoria da relatividade de Einstein e desempenha um papel imprescindível no estabelecimento do modelo padrão da física das partículas fundamentais [1, 2, 3]. Contudo a necessidade de se ter uma teoria mais fundamental (que não necessariamente obedeça a invariância de Lorentz) tem sido justificada em diferentes contextos. Divergências na teoria quântica de campos, singularidade na gravidade e a ausência de uma teoria quântica unificada para todas as forças, são algumas delas [4]. Uma consequência que surge desta consideração, na qual tem sido extensivamente estudada, é a possibilidade de ter a violação da simetria de Lorentz (VSL) na forma de correções efetivas [5, 6, 7]. Esta ideia naturalmente conduz a novas extensões do modelo padrão e a modificação das relações de dispersão para partículas. Atualmente pesquisas experimentais para sondar os efeitos da VSL estão sendo desenvolvidas em diversas fronteiras [8, 9].

Neste contexto a teoria de Myers-Pospelov é um modelo que introduz a VSL através dos operadores de altas ordens derivativas de dimensão-5 [10, 11]. A VSL aparece no setor escalar, fermiônico e de gauge, controlados por um quadri-vetor constante n_μ que define referenciais privilegiados. Além disso tal quadri-vetor, carrega consigo características de isotropia e anisotropia dependendo de sua natureza: tipo-tempo e tipo-espaço, respectivamente. Limites experimentais para este modelo tem sido estudados em vários fenômenos, tal como a radiação síncrotron [12, 13], explosões de raios gama [14, 15], física de neutrinos [16, 17, 18], correções radiativas [19, 20, 21, 22], campo de fundo estático (background) [23, 24] e outros [25, 26]. Tipicamente, estes estudos fenomenológicos assumem n_μ puramente tipo-tempo (ausência de efeitos anisotrópicos) [27]. Nesta dissertação temos como objetivo o de estudar as modificações nas proprie-

dades termodinâmicas devido aos efeitos da VSL sobre setores do campo de calibre e fermiônico seguindo a proposta de Myers-Pospelov.

Nos últimos anos, teorias efetivas com altas ordens derivativas tem sido propostas como extensões do modelo padrão de partículas de modo geral [28, 29, 30]. Uma das principais vantagens é que estas teorias atenuam o comportamento ultravioleta da teoria quântica de campos (com inserção de um cutoff de escala de energia) e consequentemente problemas como o da hierarquia entre as escalas podem ser controlados [4]. Embora estes modelos contenham estados normais negativos [31, 32], a consistência teórica foi estabelecida há alguns anos [33, 34]. É possível mostra que embora a unitariedade seja mantida, o preço a pagar é a perda de causalidade [35], que representa uma desvantagem da abordagem. Entretanto, os novos modos normais são relevantes em altas energias sondando os efeitos ultravioletas (discretização do espaço-tempo prevista por algumas teorias da gravidade quântica). E como qualquer teoria quântica de campo efetiva o seu limite de baixa energia não é sensível em detalhes para escalas microscópicas (ver, porém [36]).

Uma característica importante atribuída a teoria de Myers-Pospelov é que seus operadores resultam em contribuições da ordem $O(E/M_{Pl})$ para a relação de dispersão das partículas. Em consequência, temos velocidade de grupo dependente da energia e partículas se propagando com polarizações diferentes uma em relação a outra (efeitos previstos devido a VSL). Neste trabalho isto é levado em consideração com o objetivo de estudar suas implicações na dinâmica de um gás de fótons e sua aplicação a radiação de corpo negro. Além disso, estudamos as implicações na dinâmica de um gás de férmions degenerado aplicado a um modelo simples de estrelas anãs brancas, uma vez que a temperatura de Fermi associada a energia de Fermi modificada é muito maior do que a temperatura usual destas estrelas, $T \sim 10^7$ K.

A estrutura deste trabalho de dissertação é a seguinte: no Cap.1, primeiro introduzimos a eletrodinâmica com termo de Myers-Pospelov, calculamos a equação de movimento e obtemos os modos de propagação das ondas eletromagnéticas. Em seguida, é feito o mesmo estudo para o setor do campo fermiônico. No Cap.2, apresentamos uma revisão da termodinâmica do ponto de vista do formalismo do ensemble grande canônico. No Cap.3 é estudada as modificações da termodinâmica do gás de fótons

devido a VSL e as implicações na radiação de corpo negro são analisadas. No Cap.4 estudamos as implicações sobre a termodinâmica de um gás de férmions devido a VSL e usamos estes resultados para o estudo da dinâmica de estrelas anãs brancas. E no Cap.5, apresentamos nossas conclusões e perspectivas. Adotaremos neste trabalho a assinatura métrica: $(+, -, -, -)$.

Capítulo 1

Teoria de Campos Efetiva com Operadores de Dimensão-5

Neste capítulo iremos estudar uma proposta de introduzir a VSL nos campos do fóton e do férmion, através da teoria de campos efetiva proposta por Myers-Pospelov. Como já mencionado na introdução, este modelo tem recebido especial atenção, pois é uma possível extensão do modelo padrão de partículas prevendo possíveis efeitos oriundos da gravidade quântica através da introdução de termos na dinâmica dos setores que compõem o modelo padrão. Estes termos devem ter as seguintes características: (i) tem uma derivada a mais em relação ao termo cinético usual, (ii) é invariante de gauge, (iii) são invariantes de Lorentz, a menos de n_μ , (iv) são irreduzíveis a operadores de menor dimensão através das equações de movimento e (v) não correspondem a uma derivada total e são suprimidos por uma única potência da massa de Planck, M_{Pl} . As condições (ii) e (v) garantem que estes operadores conduzam a relações de dispersão modificadas. Assim, iremos considerar os termos propostos em [10] satisfazendo estes critérios na dinâmica do campo eletromagnético e no setor fermiônico, no sentido de obter correções correspondentes nas relações de dispersão e velocidades de grupo das partículas destes setores, respectivamente. Neste capítulo adotaremos o sistema natural de unidades, onde $c = \hbar = 1$.

1.1 Modelo de Myers-Pospelov - Campo de Calibre

Segundo o modelo de Myers-Pospelov da teoria de campos efetiva, o setor de calibre puro tem um único termo de correção dado por:

$$\mathcal{L}_{\text{CPT-Ímpar}} = \frac{\xi}{M_{Pl}} n^\mu F_{\mu\nu} (n \cdot \partial) n_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu}, \quad (1.1)$$

onde n^μ é um quadri-vetor definindo uma direção privilegiada no espaço-tempo que caracteriza a violação da simetria de Lorentz, ξ é um parâmetro adimensional (cujas presença descreve a intensidade do termo de alta ordem derivativa no setor eletromagnético) restringindo a VSL, M_{Pl} a massa de Planck e $\tilde{F}^{\alpha\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}$ é o dual do tensor do campo eletromagnético $F^{\alpha\nu} = \partial^\alpha A^\nu - \partial^\nu A^\alpha$. Note que o termo CPT-ímpar (e conjugação de carga par) indica violação de uma (ou mais) das simetrias discretas: conjugação da carga (C), paridade (P) e inversão temporal (T). Por outro lado, um operador CPT-par manteria invariável esta simetria. O operador na Eq.(1.1) produz alterações nas propriedades da radiação eletromagnética. As soluções de onda plana para as equações de movimento associadas a Eq.(1.1) revelam que na presença da violação de Lorentz, a propagação das ondas eletromagnéticas no espaço vácuo pode ser vista como uma superposição de dois modos diferentes em polarização e velocidade. A diferença na velocidade de fase entre os modos provoca uma mudança na fase relativa entre os dois modos durante a propagação, que altera a superposição, e portanto, produz birrefringência cósmica.

Considerando a ação de Maxwell na presença de fontes mais o termo de correção escrito acima, temos

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\nu A^\nu + \frac{\xi}{M_{Pl}} n^\mu F_{\mu\nu} (n \cdot \partial) n_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu} \right), \quad (1.2)$$

que é a ação efetiva de Maxwell-Myers-Pospelov. Podemos reescrever o último termo da ação escrita acima como

$$S_{(5)} = \frac{\xi}{2} \int d^4x \left[n^\mu \partial_\mu A_\nu n_\alpha (n \cdot \partial) \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} - n^\mu \partial_\nu A_\mu n_\alpha (n \cdot \partial) \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right] \quad (1.3)$$

onde redefinimos o parâmetro que controla a VSL: $\bar{\xi} = \xi/M_{Pl}$. Realizando uma integração por partes em cada um dos termos de (1.3) e supondo que os termos de superfície na ação se anulam segundo a versão quadridimensional do teorema do divergente, temos

$$\begin{aligned} S_{(5)} &= -\frac{\bar{\xi}}{2} \int d^4x \left[n^\mu A_\nu \partial_\mu (n \cdot \partial) n_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} + n^\mu A_\mu \partial_\nu (n \cdot \partial) n_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} \partial_\lambda A_\sigma \right] \\ &= -\frac{\bar{\xi}}{2} \int d^4x \left[A_\nu (n \cdot \partial)^2 n_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} + n^\mu A_\mu \partial_\nu (n \cdot \partial) n_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} \partial_\lambda A_\sigma \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Observe que o segundo termo do lado direito de (1.4) é nulo, pois é a contração de um levi-civita com duas derivadas quadridimensionais. Assim, ficamos com

$$S_{(5)} = -\frac{\bar{\xi}}{2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} n_\mu A_\nu (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma}. \quad (1.5)$$

Portanto, podemos reescrever a ação efetiva do campo de calibre dada por (1.2) como

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\nu A^\nu - \frac{\bar{\xi}}{2} n_\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} A_\nu (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma} \right). \quad (1.6)$$

1.1.1 Equação de Movimento do Modelo

Para deduzir as equações de movimento associadas a ação efetiva dada por (1.6), variamos esta mesma ação com respeito ao campo A_μ , segundo o princípio de Hamilton

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \frac{\delta S_M}{\delta A_\mu} + \frac{\delta S_{(5)}}{\delta A_\mu} = 0, \quad (1.7)$$

onde S_M é a ação de Maxwell usual na presença de fontes. Para o primeiro termo, temos

$$\begin{aligned} \delta S_M &= - \int d^4x \delta \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu \right) \\ &= - \int d^4x \left[\frac{1}{4} (2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}) + j^\nu (\delta A_\nu) \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Realizando uma integração por partes no primeiro termo do lado direito de (1.8) e descartando o termo de superfície, temos

$$\delta S_M = \int d^4x (\partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu) (\delta A_\nu) \quad (1.9)$$

Já para o segundo termo

$$\begin{aligned}
\delta S_{(5)} &= \delta \left[-\frac{\bar{\xi}}{2} \int d^4x \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} n_\alpha A_\nu (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma} \right] \\
&= -\frac{\bar{\xi}}{2} \int d^4x \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} n_\alpha (\delta A_\nu) (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma} - \bar{\xi} \int d^4x \varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} n_\alpha A_\nu (n \cdot \partial)^2 \partial_\lambda \delta A_\sigma \\
&= -\frac{\bar{\xi}}{2} \int d^4x \left[-\varepsilon^{\alpha\nu\lambda\sigma} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma} + \varepsilon^{\alpha\sigma\lambda\nu} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 2\partial_\lambda A_\sigma \right] \delta A_\nu \\
&= \int d^4x \left[\bar{\xi} n_\alpha \varepsilon^{\nu\alpha\lambda\sigma} (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma} \right] \delta A_\nu.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Substituindo (1.9) e (1.10) em (1.7), obtemos

$$\int d^4x \left[\partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu + \bar{\xi} \varepsilon^{\nu\alpha\lambda\sigma} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma} \right] \delta A_\nu = 0. \tag{1.11}$$

Como δA_ν é uma quantidade arbitrária, temos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu + \bar{\xi} \varepsilon^{\nu\alpha\lambda\sigma} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 F_{\lambda\sigma} = 0, \tag{1.12}$$

que pode ser reescrita na forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + 2\bar{\xi} \varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 \partial_\mu A_\beta = j^\nu, \tag{1.13}$$

ou ainda de modo compacto como

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{1.14}$$

onde $G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + 2\bar{\xi} \varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 A_\beta$ e $j^\mu = (j^0 = \rho, j^i = \vec{J})$. Observe que o tensor $G^{\mu\nu}$ preserva a conservação da corrente j^ν . De fato,

$$\begin{aligned}
\partial_\nu j^\nu &= \partial_\nu \partial_\mu G^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + 2\bar{\xi} \varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 \partial_\nu \partial_\mu A_\beta \\
&= \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{=0} \underbrace{\partial_\nu A^\nu}_{=0} - \underbrace{\partial_\nu \partial^\nu}_{=0} \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0} + \underbrace{2\bar{\xi} \varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 \partial_\nu \partial_\mu A_\beta}_{=0} = 0,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

onde na última linha usamos a condição de Lorentz ($\partial_\alpha A^\alpha = 0$) e a propriedade de que a contração de um levi-civita com duas derivadas quadridimensionais é igual a

zero. Este resultado já era esperado, pois esta teoria é invariante sob transformações de gauge.

Para prosseguirmos no capítulo, se faz necessário uma breve revisão de algumas das convenções adotadas no estudo do campo de calibre. Relembrando, da teoria eletromagnética clássica sabemos que os campos elétricos e magnéticos são componentes do tensor do campo eletromagnético, que é antissimétrico sob permutação de seus índices e é dado por:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.16)$$

onde $A^\mu = (A^0, A^i = \vec{A})$. O tensor dual por sua vez é definido como

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (1.17)$$

Em termos dos campos elétrico e magnético, segue as convenções

$$F^{k0} = E^k \quad F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k \quad (1.18)$$

ou em notação vetorial

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla A_0 \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

As componentes do tensor do campo eletromagnético e seu dual podem ser exibidas como matrizes:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Estas são algumas das convenções do eletromagnetismo usual que iremos utilizar para

prosseguir no restante desta seção e ademais serão apontadas quando for necessário.

Até aqui já vimos a ação efetiva do campo de calibre proposta por Myers-Pospelov modificando uma das equações de Maxwell na forma covariante. Assim, vamos agora verificar como ficam as equações modificadas na forma vetorial na presença de um campo de fundo geral $n_\mu = (n_0, \vec{n})$. Voltando a equação de movimento dada por (1.14) e efetuando a soma sobre os índices livres de Lorentz, temos

$$\partial_0 G^{0\nu} + \partial_i G^{i\nu} = j^\nu. \quad (1.22)$$

Para $\nu = 0$, temos

$$\begin{aligned} j^0 &= \partial_0 \left[\underbrace{F^{00}}_{=0} + 2\bar{\xi} \underbrace{\varepsilon^{00\alpha\beta}}_{=0} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 A_\beta \right] + \partial_i \left[F^{i0} + 2\bar{\xi} \varepsilon^{i0\alpha\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 A_\beta \right] \\ &= \partial_i F^{i0} - 2\bar{\xi} (n \cdot \partial)^2 n_j \varepsilon^{jik} \partial_i A_k. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Fazendo uso da primeira equação dada em (1.18) e a segunda dada em (1.19), obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + 2\bar{\xi} (n \cdot \partial)^2 (\vec{n} \cdot \vec{B}) = \rho. \quad (1.24)$$

Já para $\nu = j$,

$$\begin{aligned} j^j &= \partial_0 \left[F^{0j} + 2\bar{\xi} \varepsilon^{0j\alpha\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 A_\beta \right] + \partial_i \left[F^{ij} + 2\bar{\xi} \varepsilon^{ij\alpha\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 A_\beta \right] \\ &= \partial_0 F^{0j} + \underbrace{2\bar{\xi} \varepsilon^{jkl} n_k (n \cdot \partial)^2 \partial_0 A_l}_{(i)} + \partial_i F^{ij} + \underbrace{2\bar{\xi} \varepsilon^{ij\alpha\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 \partial_i A_\beta}_{(ii)}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Avaliando separadamente os termos destacados, respectivamente temos

$$(i) \quad 2\bar{\xi} \varepsilon^{jkl} n_k (n \cdot \partial)^2 \partial_0 A_l = 2\bar{\xi} (n \cdot \partial)^2 \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad (1.26)$$

e

$$\begin{aligned} (ii) \quad 2\bar{\xi} \varepsilon^{ij\alpha\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 \partial_i A_\beta &= 2\bar{\xi} \varepsilon^{ijl} n_0 (n \cdot \partial)^2 \partial_i A_l + 2\bar{\xi} \varepsilon^{ijk} n_k (n \cdot \partial)^2 \partial_i A_0 \\ &= -2\bar{\xi} (n \cdot \partial)^2 n_0 (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + 2\bar{\xi} (n \cdot \partial)^2 (\vec{n} \times \vec{\nabla} A_0). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Somando os resultados de (1.26) e (1.27), e substituindo em (1.25), obtemos

$$\partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} + 2\bar{\xi}(n \cdot \partial)^2 \left[-\vec{n} \times \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A_0 \right) \right] - 2\bar{\xi}(n \cdot \partial)^2 n_0 \vec{B} = \vec{j}, \quad (1.28)$$

que usando as identidades (1.18) e (1.19), fica

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} - 2\bar{\xi} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) [(\vec{n} \times \vec{E} + n_0 \vec{B})] = \vec{j}. \quad (1.29)$$

As demais equações de Maxwell são obtidas pela equação de movimento:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.30)$$

Note que esta equação não é deformada com respeito ao caso usual $n_\lambda = (0, \vec{0})$, pois ela segue somente da definição do tensor de campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$. Usando (1.17), a equação acima fica

$$\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho} = 0, \quad (1.31)$$

que na notação vetorial fica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.32)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.33)$$

Note que ao modificar as equações do campo de calibre, temos como consequência imediata a modificação das equações de onda usuais dos campos elétrico e magnético, que são geradas através da combinação das equações de Maxwell usuais. Portanto, é interessante verificar como fica a componente elétrica (ou magnética) da onda eletromagnética na ausência de fontes. Assim, tomando a derivada primeira com relação ao tempo da Eq.(1.29), obtemos

$$-\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + 2\bar{\xi}(n \cdot \partial)^2 \left[n_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] = 0, \quad (1.34)$$

que usando a equação de Faraday (Eq.(1.33)), fica

$$-\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + 2\bar{\xi}(n \cdot \partial)^2 \left[-n_0(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right]. \quad (1.35)$$

Usando a identidade $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$, ficamos com

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} + 2\bar{\xi}(n \cdot \partial)^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{n} \times \vec{E} \right) - n_0(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] = 0, \quad (1.36)$$

que pode ser melhor escrita como

$$\square \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + 2\bar{\xi}(n \cdot \partial)^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{n} \times \vec{E} \right) - n_0(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] = 0, \quad (1.37)$$

onde $\square = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right)$ é o operador D'alembertiano. Note que através do uso das equações de movimento modificadas obtivemos uma equação de onda deformada que implica na modificação da relação de dispersão do campo eletromagnético. Na próxima subseção iremos obter essa relação de dispersão e verificar algumas implicações teóricas deste modelo no comportamento dos fótons através da velocidade de grupo.

1.1.2 Relação de Dispersão e Velocidade de Grupo

Voltando a Eq.(1.13) na ausência de fontes e expandindo-a em termos do quadri-vetor A_μ , obtemos

$$[\square \eta^{\nu\beta} + 2\bar{\xi} \varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta} n_\alpha (n \cdot \partial)^2 \partial_\mu] A_\beta(x) = 0. \quad (1.38)$$

Supondo que esta equação possua soluções de onda plana, aplicamos o ansatz $A_\beta(x) = \int d^4 p e^{-ip \cdot x} A_\beta(k)$, obtendo

$$\Theta^{\nu\beta} A_\beta = 0. \quad (1.39)$$

onde

$$\Theta^{\nu\beta} = k^2 \eta^{\nu\beta} + 2i \varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta} n_\alpha (n \cdot k)^2 k_\mu. \quad (1.40)$$

A relação de dispersão é calculada através do determinante do operador $\Theta^{\nu\beta}$ na Eq.(1.39).

Para isso, aplicamos o operador $\Theta_{\lambda\nu} = k^2 \eta_{\lambda\nu} + 2i \varepsilon_{\nu\alpha\mu\lambda} n^\alpha (n \cdot k)^2 k^\mu$ na equação Eq.(1.39),

de modo a obter

$$\Theta_{\lambda\nu}\Theta^{\nu\beta}A_\beta = N\delta_\lambda^\beta A_\beta = 0, \quad (1.41)$$

em que N será nossa relação de dispersão. Logo, expandindo os operadores da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \Theta_{\lambda\nu}\Theta^{\nu\beta} &= [k^2\eta^{\nu\beta} + 2i\varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta}n_\alpha(n\cdot k)^2k_\mu][k^2\eta_{\nu\lambda} + 2i\varepsilon_{\nu\alpha\mu\lambda}n^\alpha(n\cdot k)^2k^\mu] \\ &= \{(k^2)^2 - 4\bar{\xi}^2(n\cdot k)^4[(n\cdot k)^2 - n^2k^2]\}\delta_\lambda^\beta. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Como $\delta_\lambda^\beta A_\beta \neq 0$, logo pela Eq.(1.41), implica que $N = 0$. Assim, a relação de dispersão é:

$$(k^2)^2 - 4\bar{\xi}^2(n\cdot k)^4[(n\cdot k)^2 - n^2k^2] = 0. \quad (1.43)$$

Neste trabalho iremos considerar o campo de fundo isotrópico representado pelo quadri-vetor $n_\mu = (1, \vec{0})$. Esta abordagem corresponde a um pequeno subconjunto de operadores VSL que preservam a invariância do rotacional. Modelos com operadores deste tipo são populares devido a sua simplicidade. O referencial inercial deve ser especificado, pois boosts de observadores para outros referenciais destroem a invariância do rotacional. Por exemplo, uma escolha seria o referencial da radiação cósmica de fundo (CMB) [7]. Assim, a relação de dispersão dada pela Eq.(1.43) fica

$$(k^2)^2 - 4\bar{\xi}^2(n_0k^0)^4[(n_0k^0)^2 - n_0^2k^2] = 0, \quad (1.44)$$

que usando a notação: $k^2 = k_\mu k^\mu = (E^2 - |\vec{k}|^2)$, fica

$$(E^2 - |\vec{k}|^2)^2 - 4\bar{\xi}^2 E^4 |\vec{k}|^2 = 0. \quad (1.45)$$

Logo, resolvendo a equação acima para $|\vec{k}|$, obtemos as soluções:

$$|\vec{k}| = E(\mp \bar{\xi}E + \sqrt{1 + \bar{\xi}^2 E^2}), \quad (1.46)$$

Considerando apenas quantidades lineares em $\bar{\xi}$, ficamos com

$$|\vec{k}| = E(1 \mp \bar{\xi}E). \quad (1.47)$$

Calculando a velocidade de grupo até esta ordem, temos

$$v_g^{(\gamma)} \equiv \frac{dE}{d|\vec{k}|}, \quad (1.48)$$

mas (1.47) está em função da energia, e portanto, devemos encontrar a relação inversa

$$\frac{dE}{d|\vec{k}|} = \left(\frac{d|\vec{k}|}{dE} \right)^{-1} = (1 \mp 2\xi E)^{-1} \approx 1 \pm 2\xi E, \quad (1.49)$$

onde consideramos a aproximação em primeira ordem no parâmetro ξ . Logo, a velocidade de grupo é:

$$v_g^{(\gamma)} \approx 1 + 2\lambda\xi E, \quad (1.50)$$

onde $\lambda = \pm 1$ representa os estados de polarização da onda eletromagnética. Isto é, esses dois estados de polarização implicam teoricamente na birrefringência da onda eletromagnética no vácuo (diferentes velocidades de grupo para helicidades distintas dos fótons) devido a presença da VSL. Note que se $\lambda = +1$, implica que $v_g^{(\gamma)}$ é maior que a velocidade da luz e, portanto, viola a causalidade.

1.2 Modelo de Myers-Pospelov - Campo Fermiônico

Nesta seção consideramos um dos termos perturbativos na densidade de lagrangiana que descreve o campo espinorial de Dirac, correspondendo a um operador VSL de dimensão-5 [27]. Este termo segue todos os critérios já discutidos no início deste capítulo e é dado por:

$$\mathcal{L}_f = \frac{\eta}{M_{Pl}} \bar{\psi} \not{n} \gamma_5 (n \cdot \partial)^2 \psi. \quad (1.51)$$

O termo acima, além de violar a invariância de Lorentz, também viola a simetria CPT, sendo um operador CPT-ímpar e de conjugação de carga par. O parâmetro η é adimensional e descreve a intensidade da VSL. Assim, a ação efetiva de Myers-Pospelov-Dirac é dada por

$$S = \int d^4x [\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \bar{\eta}\bar{\psi}\not{n}\gamma_5(n \cdot \partial)^2\psi] \quad (1.52)$$

onde definimos o parâmetro $\bar{\eta} = \eta/M_{Pl}$.

1.2.1 Equação de Movimento

Variando a ação (1.52) com respeito ao campo $\bar{\psi}$,

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}} = 0, \quad (1.53)$$

obtemos a equação de movimento associada

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x [(i\cancel{\partial} - m)\psi + \bar{\eta}\cancel{\not{n}}\gamma_5(n \cdot \partial)^2\psi] \delta\bar{\psi} \\ &= [(i\cancel{\partial} - m) + \bar{\eta}\cancel{\not{n}}\gamma_5(n \cdot \partial)^2]\psi = 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Por outro lado, se variássemos a ação com respeito a ψ , obteríamos como esperado, a equação conjugada hermitiana.

1.2.2 Relação de Dispersão e Velocidade de Grupo

Supondo que (1.54) possui soluções de onda plana, aplicando o ansatz no espaço de momento, $\psi(x) = \int d^4p e^{-ip \cdot x} \psi(p)$, obtemos

$$\begin{aligned} &[(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) + \bar{\eta}\cancel{\not{n}}\gamma_5(n^\mu \partial_\mu)^2] \int d^4p e^{-ip \cdot x} \psi(p) \\ &= [(i\gamma^\mu (-ip_\mu) - m) + \bar{\eta}\cancel{\not{n}}\gamma_5(n^\mu (-ip_\mu))^2] \int d^4p e^{-ip \cdot x} \psi(p) = 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Como a integral na equação acima pode assumir um valor diferente de zero para soluções não triviais da equação de movimento, ficamos com

$$\cancel{\not{p}} - m - \bar{\eta}\cancel{\not{n}}\gamma_5(n \cdot p)^2 = 0. \quad (1.56)$$

Para obter a correspondente relação de dispersão, operamos em (1.56) com o operador: $\cancel{\not{p}} + m - \bar{\eta}\cancel{\not{n}}\gamma_5(n \cdot p)^2$. Logo, obtemos

$$[p^2 - m^2 - \bar{\eta}^2 n^2 (n \cdot p)^4]^2 - \bar{\eta}^2 (n \cdot p)^4 (\cancel{\not{p}}\cancel{\not{n}}\gamma_5 + \cancel{\not{n}}\gamma_5\cancel{\not{p}})^2 = 0 \quad (1.57)$$

Avaliando separadamente o fator $(\not{p}\not{\eta}\gamma_5 + \not{\eta}\gamma_5\not{p})^2$, temos

$$\begin{aligned}
(\not{p}\not{\eta}\gamma_5 + \not{\eta}\gamma_5\not{p})^2 &= (\not{p}\not{\eta} - \not{\eta}\not{p}) \underbrace{(\gamma_5)^2}_{=1} (\not{p}\not{\eta} - \not{\eta}\not{p}) \\
&= (\not{p}\not{\eta} - \not{\eta}\not{p})(\not{p}\not{\eta} - \not{\eta}\not{p}) = [2(n \cdot p) - 2\not{\eta}\not{p}][2(n \cdot p) - 2\not{\eta}\not{p}] \\
&= 4(n \cdot p)^2 - 8(n \cdot p)\not{\eta}\not{p} + 4\not{\eta}\not{p}[2(n \cdot p) - \not{p}\not{\eta}] \\
&= (n \cdot p)^2 - n^2 p^2,
\end{aligned} \tag{1.58}$$

onde na segunda linha foi usado o anticomutador $\{\not{p}, \not{\eta}\} = 2(n \cdot p)$. Substituindo este resultado em (1.57), obtemos a relação de dispersão covariante

$$[p^2 - m^2 - \bar{\eta}^2 n^2 (n \cdot p)^4]^2 - 4\bar{\eta}^2 (n \cdot p)^4 [(n \cdot p)^2 - n^2 p^2] = 0. \tag{1.59}$$

A exemplo do que foi feito no caso do campo de calibre, escolheremos o campo de fundo espacialmente isotrópico, $n_\mu = (1, \vec{0})$. Portanto, a relação de dispersão neste caso é:

$$(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 - \bar{\eta}^2 E^4)^2 - 4\bar{\eta}^2 E^4 |\vec{p}|^2 = 0. \tag{1.60}$$

Resolvendo a equação acima para E , obtemos

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} (1 - 2\lambda\bar{\eta}|\vec{p}|)^{-1/2}, \tag{1.61}$$

onde $\lambda = \pm 1$. Considerando a condição $\bar{\eta}|\vec{p}| \ll 1$, podemos tomar a aproximação em primeira ordem do fator $(1 - 2\lambda\bar{\eta}|\vec{p}|)^{-1/2}$. Logo,

$$E \simeq (1 + \lambda\bar{\eta}|\vec{p}|) \sqrt{p^2 + m^2}. \tag{1.62}$$

Assim, a velocidade de grupo da partícula fermiônica é dada por:

$$v_g^{(f)} \equiv \frac{dE}{d|\vec{p}|} = \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}} + \lambda\bar{\eta} \frac{2|\vec{p}|^2 + m^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}. \tag{1.63}$$

Capítulo 2

Formalismo Grande Canônico

Neste capítulo iremos brevemente revisar alguns dos conceitos da mecânica estatística aplicada a gases quânticos ideias [37, 38]. Nessa descrição usamos o formalismo do ensemble grande canônico para estudar sistemas quânticos não interagentes compostos por partículas idênticas: bósons ou férmions.

2.1 Ensemble Grande Canônico e Função de Partição

O ensemble grande canônico parte da suposição de um sistema capaz de trocar calor e partículas com o meio em que está contido. Assim, o número de partículas N não é mais constante, podendo variar em torno de um valor médio assim como a energia, embora a temperatura e o número médio de partículas $\langle \hat{N} \rangle$ sejam fixos. Os estados acessíveis do sistema correspondem aos autoestados da energia para uma partícula, duas partículas e assim por diante. No caso de um sistema quântico, é possível definir um operador número de partículas \hat{N} , cujos autovalores n correspondem aos possíveis resultados de uma medida específica.

Em mecânica estatística o elemento central na descrição de qualquer sistema físico é a função de partição, Z . Esta função deve conter toda a informação necessária a descrição de determinado sistema, e através dela podemos realizar a conexão entre o formalismo da mecânica estatística e a descrição termodinâmica, permitindo o cálculo de quantidades físicas mensuráveis macroscopicamente (diferentemente das quantidades tratadas na mecânica estatística). Entretanto antes de discutir o ensemble grande canô-

nico e sua função de partição com mais detalhe, iremos tratar da indistinguibilidade de partículas em sistemas quânticos.

Em sistemas físicos compostos de coleções de bósons ou férmions idênticos, a função de onda do sistema pode ser simétrica (para bósons) ou antissimétrica (para férmions), sob permutação de duas partículas do sistema. Com as funções de onda permitidas, não é mais possível identificar uma partícula em particular com uma energia em particular. Ao invés disso, todas as partículas são distribuídas entre os estados de ocupação, sendo assim chamadas de indistinguíveis.

No caso de férmions indistinguíveis, a função de onda para qualquer sistema em geral deve ser antissimétrica sob a permutação entre duas partículas quaisquer. Isso tem como consequência o princípio de Pauli: qualquer estado pode ser ocupado por no máximo uma partícula. Como exemplo, para um sistema de duas partículas, a função de onda é:

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_A(x_1)\psi_B(x_2) - \psi_A(x_2)\psi_B(x_1)], \quad (2.1)$$

onde x_1 e x_2 são as coordenadas das duas partículas, e A e B são dois estados ocupados. Se tentarmos colocar as duas partículas em um mesmo estado, então a função de onda vai a zero.

Já para um sistema de bósons a função de onda deve ser simétrica com respeito a permutação entre duas destas partículas. Por exemplo, para um sistema com dois bósons, a função de onda é:

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_A(x_1)\psi_B(x_2) + \psi_A(x_2)\psi_B(x_1)]. \quad (2.2)$$

Porém desta vez, se colocarmos duas partículas no mesmo estado, a função de onda não se anulará: não há um limite no número de partículas que podemos colocar em qualquer dado estado.

Em geral um sistema de partículas idênticas fica completamente caracterizado pelo conjunto de números

$$\{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots\} \equiv n_k, \quad (2.3)$$

onde k é o estado quântico e n_k é o número de partículas que ocupam o estado k . Os

números de ocupação devem, é claro, satisfazer a condição

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k = N. \quad (2.4)$$

A energia total correspondente aos N estados ocupados do sistema é

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} n_k E_k \quad (2.5)$$

Tendo o conhecimento do espectro de energias E_k do sistema, podemos calcular a função de partição do mesmo na forma

$$Z(T, N, V) = Tr[\exp(-\beta\hat{H})] = \sum_{\{n_k\}} \exp\left(-\beta \sum_k n_k E_k\right), \quad (2.6)$$

onde \hat{H} é o Hamiltoniano do sistema. De modo geral, como já mencionado acima, a equação acima deve satisfazer a condição (2.4). Este vínculo pode tornar o cálculo da função de partição dificultoso em geral. Entretanto esta dificuldade é reduzida se considerarmos o ensemble grande canônico. Assim a grande função de partição é dada por

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = Tr[\exp(-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N}))] = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z(T, V, N), \quad (2.7)$$

onde \hat{N} é o operador número da mecânica quântica e $z = e^{\beta\mu}$ é a fugacidade. O cálculo do traço em (2.7) resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(T, V, \mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \sum_{\{n_k\}} \exp[-\beta n_1 E_1 - \beta n_2 E_2 - \dots] \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}} \exp[-\beta(E_1 - \mu)n_1 - \beta(E_2 - \mu)n_2 - \dots] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como a variável N está somada entre zero e infinito e os números de ocupação estão

sujeitos ao vínculo (2.4), podemos somar os n'_k s sem restrições como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(T, V, \mu) &= \sum_{\{n_k\}} \exp[-\beta(E_1 - \mu)n_1 - \beta(E_2 - \mu)n_2 - \dots] \\ &= \sum_{n_1} e^{-\beta(E_1 - \mu)n_1} \sum_{n_2} e^{-\beta(E_2 - \mu)n_2} \sum_{n_3} e^{-\beta(E_3 - \mu)n_3} \dots, \end{aligned} \quad (2.9)$$

que escrevendo de modo compacto fica

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \prod_k \sum_{n_k} \exp[-\beta(E_k - \mu)n_k]. \quad (2.10)$$

2.1.1 Conexão Entre a Mecânica Estatística e a Termodinâmica

No início deste capítulo mencionamos que é por meio da função de partição que fazemos a conexão entre a mecânica estatística e a termodinâmica. Assim, calculada a função de partição, podemos calcular as principais quantidades termodinâmicas de um gás, tais como: número total de partículas, energia interna, capacidade térmica, pressão e entropia. Procederemos agora com o cálculo de algumas dessas propriedades.

O número de ocupação médio é dado por:

$$\langle n_k \rangle = -\frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial E_k} \right|_{T, V}, \quad (2.11)$$

sendo o número total de partículas computado através da substituição da equação acima em Eq.(2.4).

Já a energia interna do gás é definida como

$$U(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} \right|_{z, V}, \quad (2.12)$$

onde é importante notar que a fugacidade z é mantida constante.

A energia interna do sistema nos permite calcular a capacidade térmica que é uma importante quantidade na descrição de um sistema termodinâmico e é dada por

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V. \quad (2.13)$$

Do conhecimento da função de partição, ainda podemos definir o grande potencial canônico:

$$\Phi(T, V, \mu) = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}, \quad (2.14)$$

que se relaciona com a pressão do gás através da relação de Euler

$$\Phi(T, V, \mu) = U - TS - \mu N = -PV. \quad (2.15)$$

Assim, igualando (2.14) e (2.15), encontramos a equação de estado no ensemble grande canônico expressa na forma

$$PV = \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}. \quad (2.16)$$

Por fim, temos que a entropia associada ao gás é definida como:

$$S(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right|_{V, \mu}, \quad (2.17)$$

que pela regra da cadeia pode ser ainda escrita como

$$S(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right|_{V, \mu}. \quad (2.18)$$

Substituindo (2.14) na equação acima e após algumas simples manipulações algébricas, obtemos

$$S(T, V, \mu) = \frac{(u + P)V}{T}, \quad (2.19)$$

que de modo conveniente permite definir uma densidade de entropia, s , na forma

$$s(T, V, \mu) = \frac{S(T, V, \mu)}{V} = \frac{u + P}{T}. \quad (2.20)$$

2.2 Estatística Quântica de Gases Ideias

No final da última seção vimos que tendo o conhecimento da função de partição podemos calcular algumas propriedades física de interesse. Nesta seção iremos discutir e calcular as principais quantidades físicas associadas aos gases quânticos compostos de bósons ou férmions não interagentes.

2.2.1 Função de Partição: Caso Bose-Einstein

Para um gás de bósons não interagente a grande função de partição tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Z}_{BE}(T, V, \mu) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_{\infty}=0}^{\infty} \exp \left[-\beta \sum_k n_k (E_k - \mu) \right]. \quad (2.21)$$

Observe que o resultado acima corresponde a uma série geométrica convergente, de modo que podemos usar o seguinte resultado:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{para } x < 1. \quad (2.22)$$

Logo, podemos reescrever a Eq.(2.21) como

$$\mathcal{Z}_{BE}(T, V, \mu) = \prod_k \frac{1}{1 - \exp[-\beta(E_k - \mu)]}. \quad (2.23)$$

Como $\exp[-\beta(E_k - \mu)] < 1$ para qualquer k e $E_k \geq 0$, então $E_k - \mu > 0$ e o potencial químico, μ , deve sempre ser negativo para um gás de bósons livres.

Tomando o logaritmo em ambos os lados da Eq.(2.23), ficamos com

$$\ln \mathcal{Z}_{BE} = - \sum_k \ln \{1 - \exp[-\beta(E_k - \mu)]\}. \quad (2.24)$$

Substituindo a função de partição acima na Eq.2.11, obtemos o número de ocupação médio na estatística de Bose-Einstein dado por:

$$\langle n_k \rangle_{BE} = -\frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial \ln \mathcal{Z}_{BE}}{\partial E_k} \right|_{T,V}, \quad (2.25)$$

que resulta em

$$\langle n_k \rangle_{BE} = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1}. \quad (2.26)$$

Como $\exp[\beta(E_k - \mu)] > 1$ para qualquer estado k , logo, $\langle n_k \rangle \geq 0$ para qualquer k .

Já para baixas temperaturas $(k_B T)^{-1} \gg 1$, temos que $\langle n_k \rangle \approx 0$ para a maioria dos estados, exceto aqueles de menor energia.

O número total de partículas então é:

$$N = \sum_k \langle n_k \rangle_{BE} = \sum_k \frac{1}{z^{-1} e^{\beta E_k} - 1}. \quad (2.27)$$

2.2.2 Função de Partição: Caso Fermi-Dirac

No caso de férmions o número de ocupação assume os valores $n_k = 0, 1$, e assim a função de partição para um gás de férmions não interagentes assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{FD}(T, V, \mu) &= \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \dots \sum_{n_\infty=0}^1 \exp \left[-\beta \sum_k n_k (E_k - \mu) \right] \\ &= \sum_{n_k=0}^1 \exp \left[-\beta (E_k - \mu) n_k \right] = 1 + e^{-\beta(E_k - \mu)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Novamente tomando o logaritmo em ambos os lados da equação acima, ficamos com

$$\ln \mathcal{Z}_{FD} = \sum_k \ln \{ 1 + \exp[-\beta(E_k - \mu)] \}. \quad (2.29)$$

Levando a função de partição calculada acima na Eq.2.11, obtemos o número médio de partículas na estatística de Fermi-Dirac dado por:

$$\langle n_k \rangle_{FD} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}_{FD}}{\partial E_k} \Big|_{T, V}, \quad (2.30)$$

resultando em

$$\langle n_k \rangle_{FD} = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta E_k} + 1}. \quad (2.31)$$

Esta expressão ainda pode ser aproximada na forma

$$\langle n_k \rangle_{FD} = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta E_k} + 1} \approx \begin{cases} 1, & \text{caso } E_k < \mu_0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.32)$$

onde μ_0 é o potencial químico em $T \rightarrow 0$. Note que a função acima é do tipo degrau: $\langle n_k \rangle_{FD} \approx \Theta(\mu_0 - E_k)$.

Realizando o somatório sobre todos os estados quânticos na 2.31, obtemos o número

total de partículas:

$$N = \sum_k \langle n_k \rangle_{FD} = \sum_k \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_k} + 1}. \quad (2.33)$$

2.2.3 Propriedades Termodinâmicas: Caso BE e FD

Podemos generalizar os resultados (2.24), (2.29), (2.27) e (2.33), respectivamente da seguinte forma:

$$\ln \mathcal{Z} = a \sum_k \ln(1 + aze^{-\beta E_k}) \quad (2.34)$$

e

$$N = \sum_k \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_k} + a} \quad (2.35)$$

onde o parâmetro a , assume os valores: $a = -1$ para bósons e $a = 1$ para férmions.

Feito isso, podemos escrever as propriedades termodinâmicas já discutidas acima para o limite de volume muito grande, de modo que podemos assumir a seguinte relação:

$$\sum_k \rightarrow \frac{\gamma}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\vec{r}d^3\vec{p}, \quad (2.36)$$

onde γ é a multiplicidade de spin da partícula e \hbar é a constante reduzida de Planck.

Assim, a função de partição dada pela Eq.(2.34) neste limite fica

$$\ln \mathcal{Z} = a\gamma \int \frac{d^3\vec{r}d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \ln(1 + aze^{-\beta E}), \quad (2.37)$$

que considerando nossa suposição de gases não interagentes e realizando a integral acima em coordenadas esféricas, ficamos com

$$\ln \mathcal{Z} = \frac{a\gamma V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty p^2 \ln(1 + aze^{-\beta E}) dp. \quad (2.38)$$

Realizando o mesmo procedimento para (2.35), obtemos

$$N = \frac{\gamma}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \left(\frac{p^2}{z^{-1}e^{\beta E} + a} \right) dp. \quad (2.39)$$

Agora nos resta aplicar o limite de volume muito grande para a energia interna e a pressão. Assim, substituindo (2.38) em (2.12) e (2.16), obtemos respectivamente

$$U = \frac{\gamma}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty p^2 \left(\frac{E}{z^{-1}e^{\beta E} + a} \right) dp \quad (2.40)$$

e

$$P = a \frac{\gamma}{2\pi^2\hbar^3\beta} \int_0^\infty p^2 \ln(1 + aze^{-\beta E}) dp. \quad (2.41)$$

Realizando uma integração por partes do lado direito, temos

$$P = \frac{\gamma}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \left(\frac{p^2}{z^{-1}e^{\beta E} + a} \right) \left(\frac{p}{3} \frac{dE}{dp} \right) dp, \quad (2.42)$$

que é a pressão do gás no ensemble grande canônico.

Nos próximos capítulos iremos investigar como as relações de dispersão dadas pelas Eqs.(1.47) e (1.62) podem modificar a termodinâmica de gases compostos de fótons ou férmions. A premissa fundamental será a de que as correções aqui propostas modificam somente as relações de dispersão, e portanto, não devem alterar as bases da mecânica estatística. Assim, devido a natureza das partículas aqui discutidas, iremos usar o formalismo do ensemble grande canônico desenvolvido neste capítulo.

Capítulo 3

A Termodinâmica do Gás de Fótons e a Radiação de Corpo Negro Modificada

Ao modificar a relação de dispersão do fóton via o termo de correção proposto por Myers-Pospelov para o campo de calibre, somos motivados a investigar as possíveis consequências nas propriedades termodinâmicas de um gás composto homogeneamente por fótons. Tal motivação nos conduz neste capítulo a fazer um estudo sobre estas possíveis modificações na termodinâmica de um gás de fótons. Neste sentido, formularemos o problema no formalismo da mecânica estatística quântica de Bose-Einstein em um contêiner de volume V , condicionando tal estudo a condição $\bar{\xi}|\vec{k}| \ll 1$ que nos fornece a relação de dispersão aproximada dada por Eq.(1.47). Nossos resultados também nos permite estudar a radiação de corpo negro na presença da VSL. Diferentemente do que foi feito no capítulo 1, neste e no próximo capítulo adotaremos o sistema internacional de medidas (S.I.), seguindo a convenção adota por outros autores em estudos similares aqueles realizados aqui.

3.1 Grande Função de Partição Modificada - Caso BE

No Cap.2 mencionamos que a conexão entre o mundo microscópico e o comportamento termodinâmico observado é feito através da função de partição \mathcal{Z} . Isto é, o conhecimento desta função é o que nos permite deduzir todas as propriedades termodinâmicas do sistema. Neste caso estamos considerando um gás composto de fótons,

e portanto, devemos usar a grande função de partição para o caso Bose-Einstein dada pela Eq.(2.24).

Considerando a relação de dispersão dada pela Eq.(1.47), porém agora escrita em unidades S.I., temos

$$\begin{aligned} p^2 dp &= \left[\frac{1}{c} E(1 - \lambda \bar{\xi} E) \right]^2 \frac{dp}{dE} dE \\ &= \frac{1}{c^3} E^2 (1 - 4\lambda \bar{\xi} E + 5\bar{\xi}^2 E^2 + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3]) dE. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Logo, o número de estados acessíveis do sistema em um certo volume do espaço de fase é:

$$\Omega = \frac{\gamma V}{2\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty E^2 (1 - 4\lambda \bar{\xi} E + 5\bar{\xi}^2 E^2 + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3]) dE, \quad (3.2)$$

onde a multiplicidade de spin para os fótons é: $\gamma = 2$. Note que se $\lambda = -1$ o número de microestados acessíveis ao sistema cresce (ou decresce se $\lambda = +1$) em relação ao caso sem VSL. Isto implica que não deveríamos ficar surpresos se a correspondente entropia crescesse. Evidentemente, queremos dizer que isso implica numa maior entropia se comparada com aquela de um gás sob as mesmas condições, porém na ausência da VSL.

Em princípio, os vetores de onda \vec{k} são discretos (ou quantizados) em uma caixa de volume V tendo condições de contorno periódicas. Entretanto, para um volume muito grande, podemos reescrever a soma na Eq.(2.24) em termos de uma integral usando o número de estados acessíveis do espaço de fase dado pela Eq.(3.2). Logo,

$$\ln \mathcal{Z} = -\frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty E^2 (1 - 4\lambda \bar{\xi} E + 5\bar{\xi}^2 E^2 + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3]) \ln(1 - e^{-\beta E}) dE, \quad (3.3)$$

onde a fugacidade é igual a unidade ($z = 1$) para fótons. Note que o logaritmo da função de partição acima pode ser explicitamente calculado pela integração por meio da variável de energia. Realizando uma primeira integração por partes em cada um dos termos em (3.3), obtemos

$$\ln \mathcal{Z}(\beta, V) = -\frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty \left(-\frac{\beta}{3} \frac{E^3}{e^{\beta E} - 1} + 4\lambda \bar{\xi} \frac{\beta}{4} \frac{E^4}{e^{\beta E} - 1} - 5\bar{\xi}^2 \frac{\beta}{5} \frac{E^5}{e^{\beta E} - 1} + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right) dE. \quad (3.4)$$

Mudando a variável de integração para $x = \beta E$ e após algumas simples manipulações algébricas, obtemos

$$\ln \mathcal{Z}(\beta, V) = \frac{V}{\pi^2(\hbar c\beta)^3} \left[2\zeta(4) - \frac{24\lambda\bar{\xi}\zeta(5)}{\beta} + \frac{120\bar{\xi}^2\zeta(6)}{\beta^2} + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right], \quad (3.5)$$

onde $\zeta(n)$ é função zeta de Riemann definida como

$$\zeta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} dx, \quad (3.6)$$

e $\Gamma(n) = (n-1)!$ é a função gama para n inteiro. A função $\zeta(n)$ também pode ser escrita em termos de uma expansão em série de Taylor

$$\zeta(n) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n}, \quad (3.7)$$

que converge somente para $n > 1$. Assim, esta função pode assumir os seguintes valores

$$\begin{aligned} \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90} \\ \zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, substituindo (3.8) em (3.5), obtemos

$$\ln \mathcal{Z}(\beta, V) = \frac{V}{\pi^2(\hbar c\beta)^3} \left[\frac{\pi^4}{45} - \frac{24\lambda\bar{\xi}\zeta(5)}{\beta} + \frac{8\bar{\xi}^2\pi^6}{63\beta^2} + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right]. \quad (3.9)$$

3.2 Termodinâmica do Gás de Fótons

Dando continuidade ao que foi feito na seção anterior, vamos proceder agora com o cálculo das principais propriedades termodinâmica de um gás de fótons modelado estatisticamente pela função de partição acima discutida.

3.2.1 Densidade de Energia e Partículas

Relembrando que a conexão entre a energia interna e a função de partição é feita pela Eq.(2.12)

$$U = - \left. \frac{\partial \ln \mathcal{Z}(\beta, V)}{\partial \beta} \right|_V. \quad (3.10)$$

Assim, levando (3.9) em (3.10), obtemos

$$U(\beta, V) = \frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3 \beta^4} \left[\frac{\pi^4}{15} - \frac{96\lambda\bar{\xi}\zeta(5)}{\beta} + \frac{40\bar{\xi}^2\pi^6}{63\beta^2} + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right], \quad (3.11)$$

que em termos da temperatura do gás fica

$$U(T, V) = \frac{V(k_B T)^4}{\pi^2(\hbar c)^3} \left[\frac{\pi^4}{15} - 96\lambda\bar{\xi}\zeta(5)(k_B T) + \frac{40\bar{\xi}^2\pi^6}{63}(k_B T)^2 + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right], \quad (3.12)$$

onde usamos $\beta = 1/k_B T$. Dividindo a equação acima pelo volume V , obtemos

$$u(T) = \frac{(k_B T)^4}{\pi^2(\hbar c)^3} \left[\frac{\pi^4}{15} - 96\lambda\bar{\xi}\zeta(5)(k_B T) + \frac{40\bar{\xi}^2\pi^6}{63}(k_B T)^2 + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right], \quad (3.13)$$

que é a densidade de energia do gás. Note que para $\bar{\xi} \rightarrow 0$ recobramos a energia usual na ausência da VSL [39]. Note também que se $\lambda = -1$, a VSL implica em aumento na energia interna do nosso gás de fótons. Embora a energia interna não seja uma quantidade diretamente detectável, há outras propriedades como a capacidade térmica que pode ser medida e é calculada da energia interna do gás.

Vamos agora calcular o número total de partículas no sistema através da Eq.(2.26) efetuando a soma sobre todos os estados de energia acessíveis. Logo,

$$N(T, V, z) = \sum_k \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_k} - 1} \quad (3.14)$$

Assumindo o limite de volume muito grande, podemos passar este somatório para uma integral de modo semelhante ao que foi feito no cálculo da energia interna. Logo, a densidade do número de partículas fica

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{E^2(1 - 4\lambda\bar{\xi}E + 5\bar{\xi}^2E^2 + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3])}{e^{\beta E} - 1} dE \quad (3.15)$$

Realizando a mudança de variável $x = \beta E$, reescrevemos a equação acima como

$$n(\beta) = \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3} \left(\frac{1}{\beta^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx - \frac{4\lambda\bar{\xi}}{\beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx + \frac{5\bar{\xi}^2}{\beta^5} \int_0^\infty \frac{x^4}{e^x - 1} dx + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right). \quad (3.16)$$

Os resultados destas integrais são dados pela Eq.(3.6). Assim, a equação acima fica

$$\begin{aligned} n(\beta) &= \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3} \left[\frac{1}{\beta^3} \Gamma(3)\zeta(3) - \frac{24\lambda\bar{\xi}}{\beta^4} \Gamma(4)\zeta(4) + \frac{5\bar{\xi}^2}{\beta^5} \Gamma(5)\zeta(5) + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right] \\ &= \frac{1}{\pi^2(\hbar c\beta)^3} \left[\zeta(3) - \frac{2\lambda\bar{\xi}\pi^4}{15\beta} + \frac{60\bar{\xi}^2\zeta(5)}{\beta^2} + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

que em termos da temperatura fica

$$n(T) = \frac{(k_B T)^3}{\pi^2(\hbar c)^3} \left[\zeta(3) - \frac{2\lambda\bar{\xi}\pi^4}{15} (k_B T) + 60\bar{\xi}^2\zeta(5)(k_B T)^2 + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right], \quad (3.18)$$

que retorna ao caso usual quando $\bar{\xi} \rightarrow 0$. Perceba que quando $\lambda = -1$, o número de partículas aumenta. Em contrapartida, decresce se $\lambda = +1$.

3.2.2 Pressão, Entropia e Capacidade Térmica

Levando a função de partição dada pela Eq.(3.9) em (2.14), obtemos a função grande potencial:

$$\Phi(\beta, V) = -\frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3\beta^4} \left[\frac{\pi^4}{45} - \frac{24\lambda\bar{\xi}\zeta(5)}{\beta} + \frac{8\bar{\xi}^2\pi^6}{63\beta^2} + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right]. \quad (3.19)$$

Esta função está diretamente relacionada a pressão do gás através da relação (2.15). Conseqüentemente, substituindo (3.19) em (2.15), obtemos a pressão em termos da temperatura como:

$$P = \frac{(k_B T)^4}{\pi^2(\hbar c)^3} \left[\frac{\pi^4}{45} - 24\lambda\bar{\xi}\zeta(5)(k_B T) + \frac{8\bar{\xi}^2\pi^6(k_B T)^2}{63} + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right], \quad (3.20)$$

que no limite $\bar{\xi} \rightarrow 0$ retorna ao caso usual em que $P \sim T^4$. Note que a pressão cresce na presença da VSL se $\lambda = -1$ ou decresce no caso em que $\lambda = +1$, permitindo-nos interpretar a VSL como uma pseudo-interação repulsiva ou atrativa, respectivamente [40]. De fato, a repulsão (ou atração) entre as partículas de um gás implica em aumento (ou decréscimo) da pressão, se comparado a um gás não interagente.

Outra quantidade termodinâmica interessante é a entropia dada pela Eq.(2.19). Assim, substituindo os resultados dados por (3.12) e (3.20) em (2.19) , obtemos

$$S = \frac{V(k_B T)^3}{\pi^2(\hbar c)^3} k_B \left[\frac{4\pi^4}{45} - 120\lambda\bar{\xi}\zeta(5)(k_B T) + \frac{48\bar{\xi}^2\pi^6(k_B T)^2}{63} + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right]. \quad (3.21)$$

Vale mencionar que uma consequência da presença da VSL na entropia é que um processo adiabático não é mais dado pela condição $VT^3 = const.$, como é o caso usual [38]. Note também que se $\lambda = -1$, a VSL aumenta o número de estados acessíveis (por favor, veja (3.2)), e em consequência, nossa entropia cresce. Por outro lado, se $\lambda = +1$, a mesma deve decrescer.

Uma vez que a energia interna tem sua dependência com a temperatura modificada, então neste caso, a capacidade térmica a volume constante também deve ser modificada. Consequentemente, levando a Eq.(3.12) em (2.13), obtemos

$$C_V = \frac{3V(k_B T)^3}{\pi^2(\hbar c)^3} k_B \left[\frac{4\pi^4}{45} - 160\lambda\bar{\xi}\zeta(5)(k_B T) + \frac{80\bar{\xi}^2\pi^6(k_B T)^3}{63} + \mathcal{O}[\bar{\xi}^3] \right], \quad (3.22)$$

que no limite $\bar{\xi} \rightarrow 0$ retorna a forma usual, $C_V = 3S$. Esta é uma quantidade mensurável e, portanto, obtivemos outro parâmetro que teoricamente poderia ser empregado em experimentos procurando por efeitos da VSL. Note que a capacidade térmica computada para $\lambda = -1$ é maior do que a correspondente para o caso na ausência da VSL, e tal resultado é compatível com nossa interpretação anterior de que a presença da VSL pode ser vista como uma pseudo-interação repulsiva entre as partículas [40].

3.2.3 Relação Pressão-Energia e Equação de Estado

Vamos agora calcular a relação pressão-energia w na presença da VSL que em geral é uma função da temperatura. Logo, dividindo a Eq.(3.20) pela Eq.(3.13) e considerando apenas os termos de primeira ordem no parâmetro $\bar{\xi}$, obtemos

$$w = \frac{P}{u} = \frac{1}{3} + \lambda \frac{120\zeta(5)\bar{\xi}(k_B T)}{\pi^4}. \quad (3.23)$$

Perceba que a relação usual $P = u/3$ é recobrada no limite $\bar{\xi} \rightarrow 0$. Vamos agora obter a equação de estado, $P = P(u)$, seguindo o mesmo procedimento realizado em [41].

Assim, temos que escrever T como uma série de potências de $\bar{\xi}$, tal que é suficiente apenas considerar os termos de primeira ordem, $T = T_0 + \bar{\xi}T_1$. Substituindo esta aproximação na Eq.(3.13) e comparando os termos de mesma ordem em $\bar{\xi}$, obtemos

$$T = \left[\frac{15(\hbar c)^3}{\pi^2} \right]^{1/4} \frac{u^{1/4}}{k_B} + \frac{360\zeta(5)\sqrt{15(\hbar c)^3}}{\pi^5} \frac{\bar{\xi}u^{1/2}}{k_B}. \quad (3.24)$$

Assim, inserindo a equação acima em (3.23), obtemos a equação de estado modificada

$$P = \frac{u}{3} + \lambda \frac{120\zeta(5)}{\pi^4} \left[\frac{15(\hbar c)^3}{\pi^2} \right]^{1/4} \bar{\xi}u^{5/4}. \quad (3.25)$$

Vale ressaltar aqui que estes resultados são compatíveis com aqueles reportados em [41]. Entretanto, os autores partiram de outra proposta de gravidade quântica, conhecida como Doubly Special Relativity (DSR) (para um review, veja [42]).

3.3 Aplicação a Radiação de Corpo Negro

Historicamente, a radiação de corpo negro tem sido vista sobre dois pontos de vista, que embora sejam idênticos na prática, conceitualmente são distintos. O primeiro foi desenvolvido por Planck (1900) ao supor que o corpo negro seria uma cavidade ressonante, cuja as paredes eram compostas de osciladores harmônicos distinguíveis com energias quantizadas $(n + 1/2)\hbar\omega$. O segundo é devido a Bose (1924) e Einstein (1924, 1925), onde este sistema agora é visto como um gás de quantas indistinguíveis (fótons) com energias correspondente as frequências de propagação, $E = \hbar\omega$.

Nesta seção faremos o estudo da radiação de corpo negro seguindo a abordagem de Bose-Einstein, porém agora introduzindo efeitos da VSL. Como visto na seção anterior o aumento (ou redução) do número de estados acessíveis do sistema devido a VSL produz um aumento (ou redução) da energia interna entre outras propriedades do nosso gás de fótons. Assim, evidentemente a radiação de corpo negro também será modificada. Vamos agora calcular a densidade de radiação total do corpo negro. Isto é facilmente obtido reescrevendo a Eq.(3.13) em termos da constante de Stefan-Boltzmann

usual, $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}$. Logo, obtemos

$$u(T) = \frac{4\sigma_{eff}(T, \bar{\xi})}{c} T^4, \quad (3.26)$$

onde a constante efetiva de Stefan-Boltzmann é dada por

$$\sigma_{eff} = \sigma \left(1 - \lambda \frac{1440 \bar{\xi} \zeta(5)}{\pi^4} k_B T \right), \quad (3.27)$$

considerando apenas termos lineares no parâmetro $\bar{\xi}$. Assim, obtemos uma correção da lei de Stefan-Boltzmann na presença da VSL.

Este resultado é interessante quando comparado com aqueles encontrados na literatura. Por exemplo, em [43] o aumento da temperatura implica em uma diminuição dos efeitos da VSL sobre a constante efetiva de Stefan-Boltzmann e, conseqüentemente, sobre a radiação de corpo negro. Por outro lado, em nosso modelo o aumento da temperatura implica em uma amplificação dos efeitos da VSL sobre a radiação de corpo negro.

Uma aplicação deste resultado seria a estimativa do parâmetro que controla a VSL, ξ . Por exemplo, poderíamos escrever

$$\tilde{u}(T) = \frac{4\sigma}{c} \left(1 - \lambda \frac{1440 \bar{\xi} \zeta(5)}{\pi^4} k_B T \right) T^4, \quad (3.28)$$

que ainda poderia ser escrita como

$$\delta u_{(VSL)} = \tilde{u} - u = -96 \lambda \bar{\xi} \zeta(5) (k_B T)^5, \quad (3.29)$$

onde \tilde{u} é a densidade de energia modificada dada pela Eq.(3.26) e u é a densidade de energia usual. Resolvendo a equação acima para $\bar{\xi}$, obtemos

$$\bar{\xi} = -\frac{\delta u_{(VSL)}}{96 \lambda \zeta(5) (k_B T)^5}. \quad (3.30)$$

Assim, usando dados cosmológicos ou astrofísicos das densidades de energia e temperaturas associadas, poderíamos estimar $\bar{\xi}$, que se relaciona com o parâmetro controlando a VSL através de $\bar{\xi} = \xi / M_{Pl}$.

Capítulo 4

A Termodinâmica do Gás de Férmions Modificada e sua Aplicação a Estrelas Anãs Brancas

Neste capítulo estudaremos as modificações das propriedades termodinâmicas do gás de férmions degenerado devido a relação de dispersão efetiva e sua aplicação a dinâmica de uma estrela anã branca. Nosso objetivo neste capítulo, então, é calcular quantidades termodinâmicas como a densidade de energia e pressão deste gás, e identificar possíveis correções em primeira ordem no parâmetro $\bar{\eta}$ na dinâmica de uma estrela anã branca no modelo de Chandrasekhar.

4.1 Termodinâmica do Gás de Férmions Relativístico e Degenerado

Consideremos um sistema composto por partículas fermiônicas relativísticas e degeneradas a uma temperatura baixa ($T \rightarrow 0$), tal que possamos assumir que o número médio de ocupação toma a forma $\langle n_E \rangle = \Theta(E_F - E)$, onde $\mu = E_F$ é a energia de Fermi além da qual inexistem estados ocupados e $\Theta(x)$ é a função passo definida pela Eq.(2.32). O módulo do momento de Fermi, p_F , é associado a energia de Fermi através da relação de dispersão (1.61). Assim, podemos ainda escrever a função passo de modo conveni-

ente em termos do momento de Fermi como $\langle n_p \rangle = \Theta(p_F - p)$ respeitando as mesmas condições descritas em (2.32).

4.1.1 Densidade de Partículas e Energia

A densidade do número de partículas com spin 1/2, é dada por

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \Theta(p_F - p) |\vec{p}|^2 dp \\ &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} |\vec{p}|^2 dp = \frac{|\vec{p}_F|^3}{3\pi^2 \hbar^3} = \frac{(mc)^3 x^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde a variável $x = |\vec{p}_F|/mc$ é definida.

Já a densidade de energia pode ser computada usando a Eq.(2.40), tal que

$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{V} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \Theta(p_F - p) E |\vec{p}|^2 dp \\ &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} (1 + \lambda \bar{\eta} |\vec{p}| c) |\vec{p}|^2 dp \\ &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \left(\int_0^{p_F} |\vec{p}|^2 \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} dp + \lambda \bar{\eta} c \int_0^{p_F} |\vec{p}|^3 \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} dp \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Mudando a variável de integração para $y = |\vec{p}|/mc$, obtemos

$$u = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\int_0^x y^2 \sqrt{y^2 + 1} dy + \lambda \bar{\eta} m c^2 \int_0^x y^3 \sqrt{y^2 + 1} dy \right). \quad (4.3)$$

A primeira integral pode ser realizada por partes e através do uso da fórmula 2.273.3 em [44]

$$\begin{aligned} \int_0^x y^2 \sqrt{y^2 + 1} dy &= \left[\frac{y^3}{3} \sqrt{y^2 + 1} \right] \Big|_0^x - \frac{1}{3} \int_0^x \frac{y^4}{\sqrt{y^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{24} (8x^3 \sqrt{x^2 + 1} - f(x)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $f(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3 \sinh^{-1}(x)$, como definido em [45]. Já a segunda integral é avaliada em

$$\int_0^x y^3 \sqrt{y^2 + 1} dy = \frac{1}{15} (\sqrt{x^2 + 1} (x^2 + 1) (3x^2 - 2) + 2). \quad (4.5)$$

Portanto, substituindo (4.4) e (4.5) em (4.3), obtemos a densidade de energia

$$u = \frac{(mc^2)^4}{\pi^2(\hbar c)^3} \left[\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{3} - \frac{f(x)}{24} + \frac{\lambda\bar{\eta}mc^2}{15} (2 + (x^2+1)^{3/2}(3x^2-2)) \right]. \quad (4.6)$$

Podemos notar que a Eq.(4.6) mostra que uma primeira correção é dada para $\bar{\eta}mc^2 \ll 1$. Observe também que ao tomar o limite $\bar{\eta} \rightarrow 0$ recobramos a densidade de energia usual (veja por favor [45]).

4.1.2 Pressão

A pressão do gás é calculada usando a Eq.(2.42) e a relação $dE/d|\vec{p}|$ já calculada em (1.63). Assim,

$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty |\vec{p}|^2 \Theta(p_F - p) \left(\frac{|\vec{p}|}{3} \frac{dE}{d|\vec{p}|} \right) dp \\ &= \frac{1}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} \left(\frac{|\vec{p}|^4 c^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}} + \frac{\lambda\bar{\eta}|\vec{p}|^5 c^3}{\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}} + \lambda\bar{\eta}|\vec{p}|^3 c \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} \right) dp. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Mudando a variável de integração como já feito para a densidade de energia, temos

$$P = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3} \left(m^4 c^5 \int_0^x \frac{y^4}{\sqrt{y^2+1}} dy + \lambda\bar{\eta} m^5 c^7 \int_0^x \frac{y^5}{\sqrt{y^2+1}} dy + \lambda\bar{\eta} m^5 c^7 \int_0^x y^3 \sqrt{y^2+1} dy \right). \quad (4.8)$$

Os resultados destas integrais (com exceção da última já avaliada em (4.5)), são

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{y^4}{\sqrt{y^2+1}} dy &= \frac{1}{8} (x\sqrt{x^2+1}(2x^2-3) + 3 \sinh^{-1}(x)) \\ \int_0^x \frac{y^5}{\sqrt{y^2+1}} dy &= \frac{1}{15} (\sqrt{x^2+1}(3x^4-4x^2+8) - 8) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituindo estes resultados em (4.8), obtemos por fim a pressão do gás

$$\begin{aligned} P &= \frac{(mc^2)^4}{\pi^2(\hbar c)^3} \left[\frac{f(x)}{24} + \frac{\lambda\bar{\eta}mc^2}{15} (\sqrt{x^2+1}(2x^4-x^2+2)) \right] \\ &= \frac{(mc^2)^4}{\pi^2(\hbar c)^3} \left[\frac{f(x)}{24} + \lambda(\bar{\eta}mc^2) \frac{g(x)}{15} \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde de modo conveniente escrevemos: $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}(2x^4 - x^2 + 2)$. Observamos mais um vez que no limite $\bar{\eta} \rightarrow 0$ recobramos a pressão usual do gás de férmions [45]. Perceba que no limite ultra-relativístico, em que $x \gg 1$, uma primeira aproximação das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente são:

$$f(x) \approx 2x^4 - 2x^2 \quad (4.11)$$

e

$$g(x) \approx 2x^5 + \frac{4}{5}x. \quad (4.12)$$

Assim, podemos escrever a Eq.(4.10) neste regime como

$$P \approx \frac{(mc^2)^4}{12\pi^2(\hbar c)^3} \left(x^4 - x^2 + \frac{8}{5}\lambda\bar{\eta}mc^2x^5 \right), \quad (4.13)$$

onde consideramos apenas o termo dominante em (4.12), que é recorrente na literatura [41, 46, 47]. Note que se considerarmos $\lambda = -1$, então, a pressão decresce em relação ao caso na ausência da VSL, enquanto que, para $\lambda = +1$ a pressão cresce. Novamente, interpretamos a perda da invariância de Lorentz como uma pseudo-interação atrativa, se $\lambda = -1$ [46]. Quando $\lambda = +1$, a VSL é equivalente, para férmions massivos, a uma pseudo-interação repulsiva. O resultado fornecido pela Eq.(4.13) será importante na próxima seção quando estudaremos a dinâmica modificada de estrelas anãs brancas.

4.2 Aplicação a Objetos Astrofísicos: Anãs Brancas

Ao considerar modificações ultravioletas na relação de dispersão, somos conduzidos a nos questionar sobre a relevância destas correções em configurações de objetos astrofísicos compactos em que a energia por partícula é consideravelmente alta. Neste regime, podemos considerar estrelas anãs brancas. Como iremos ver, consideramos o modelo de Chandrasekhar e introduzimos nesta abordagem modificações devido VSL.

A fase final na evolução das estrelas de sequência principal com uma massa inicial de $M \leq 8M_{\odot}$ consiste basicamente de um núcleo de partículas degeneradas que surge após a ejeção de uma quantidade significativa de matéria na forma de uma nébula pla-

netária. O núcleo será composto na sua maior parte por carbono degenerado ou hélio ionizado com uma quantidade muito pequena de hidrogênio [48]. Como iremos ver, a pressão devido ao núcleo é fornecida por um gás ideal de elétrons degenerados e não interagentes ¹.

Neste trabalho iremos considerar o modelo de Chandrasenkhhar de estrela anã branca: uma esfera de gás, consistindo de hélio ionizado, de massa $M \approx 10^{30}$ kg, cujo centro tem densidade de massa $\rho_c = 10^{10}$ kg m⁻³ e temperatura $T \sim 10^7$ K (temperatura típica de uma anã branca na ausência da VSL). Estando o hélio quase que completamente ionizado, os elétrons estão livres e a suposição física é de que a pressão exercida por estes elétrons livres está em equilíbrio com a força gravitacional exercida pela própria estrela.

Dito isso, vamos primeiro estimar a energia de Fermi e o momento de Fermi dos elétrons no gás com a ajuda da densidade ρ . Cada hélio ionizado contribui com dois elétrons e quatro núcleons para a massa total da estrela. O núcleo de hélio pode ser tratado como não relativístico, desde que a energia cinética média, devido a energia térmica $k_B T \approx 1$ keV, é muito pequena comparada a sua massa de repouso $m_{He} c^2 \approx 4$ GeV. Além disso, para elétrons, a contribuição da energia cinética para a massa total é ainda muito pequena ($m_e c^2 \approx 511$ keV), de modo que podemos escrever

$$M \approx N(m_e + 2m_p) \approx 2m_p N, \quad (4.14)$$

desde que $m_e \ll m_p$ e também que dois prótons correspondem a um único elétron. Com isso, a densidade de partículas dos elétrons na estrela pode ser estimada como

$$n = \frac{N}{V} \approx \frac{M/2m_p}{M/\rho} \approx 3 \cdot 10^{36} \frac{\text{elétrons}}{\text{m}^3}. \quad (4.15)$$

Substituindo esta densidade de partículas na expressão que fornece o momento de Fermi já discutida neste capítulo através da Eq.(4.1), obtemos

$$p_F = (3n\pi^2\hbar^3)^{1/3} \approx 0.9 \text{ MeV}/c. \quad (4.16)$$

¹Elétrons são férmions de spin 1/2.

Se substituirmos este valor em (1.62), obteremos a energia de Fermi $E_F \approx 0,5 \text{ MeV}$ e, portanto, efeitos relativísticos tornam-se importantes. Entretanto, devido a $k_B T \ll E_F$, o gás de elétrons pode ser considerado frio e, conseqüentemente, sua pressão é dada pela Eq.(4.13).

Até o momento a suposição é de que o gás está confinado em uma caixa de volume fixo, V . Evidentemente este não é o caso, pois a gravidade impede que o gás escape dessa região. Considerando que o gás expanda adiabaticamente por uma quantidade dV , de modo que o raio da esfera gasosa aumenta dR , pela primeira lei da termodinâmica, a energia

$$dE_p = -pdV = -p(R)4\pi R^2 dR, \quad (4.17)$$

é acrescida. Já a variação no potencial gravitacional é dada por:

$$dE_g = \frac{GM^2}{R^2} dR, \quad (4.18)$$

onde M é a massa da estrela e G a constante gravitacional [45]. Estando o sistema em equilíbrio, a variação da energia total é nula, $dE_p + dE_g = 0$. Logo, temos que

$$P(R) = \frac{GM^2}{4\pi R^4}. \quad (4.19)$$

Assim, substituindo (4.13) na equação acima, ficamos com

$$\frac{m^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \left(x^4 - x^2 + \frac{8}{5} \lambda \bar{\eta} m_e c^2 x^5 \right) = \frac{GM^2}{4\pi R^4}. \quad (4.20)$$

Reescrevendo a Eq.(4.1) na forma

$$x = \left(\frac{9M}{8m_p} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c R} = \frac{\bar{M}^{1/3}}{\bar{R}}, \quad (4.21)$$

onde $\bar{M} = \left(\frac{9M}{8m_p} \right)^{1/3}$ e $\bar{R} = \frac{\hbar}{m_e c R}$, podemos reescrever a Eq.(4.20) como:

$$\frac{G}{4\pi} \left(\frac{8m_p}{9\pi \hbar} \right) (m_e c)^4 \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} = \frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} + \frac{8}{5} \lambda \bar{\eta} m_e c^2 \frac{\bar{M}^{5/3}}{\bar{R}^5} \right), \quad (4.22)$$

ou ainda

$$K' \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} = K \left(\frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} + \frac{8}{5} \lambda \bar{\eta} m_e c^2 \frac{\bar{M}^{5/3}}{\bar{R}^5} \right), \quad (4.23)$$

onde $K = \frac{m_e c^5}{12\pi \hbar^3}$ e $K' = \frac{G}{4\pi} \left(\frac{8m_p}{9\pi \hbar} \right)^2 (m_e c)^4$. Resolvendo para \bar{R} , encontramos

$$\bar{R} = \bar{M}^{1/3} \sqrt{1 - \frac{K'}{K} \bar{M}^{2/3}} \left[1 + \frac{8}{5} \lambda \bar{\eta} m_e c^2 \left(1 - \frac{K'}{K} \bar{M}^{2/3} \right)^{-3/2} \right]. \quad (4.24)$$

Esta equação pode ser convenientemente caracterizada em termos de uma correção para o resultado usual

$$R = R_{Chan} \left[1 + \frac{4}{5} \lambda \bar{\eta} m_e c^2 \left(1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3} \right)^{-3/2} \right], \quad (4.25)$$

onde

$$R_{Chan} = \frac{3}{2} \frac{\pi^{1/3} \hbar c}{m_e c^2} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3}} \quad (4.26)$$

é o raio de Chandrasekhar e

$$M_0 = \left(\frac{9\pi}{8m_p} \right)^2 \left(\frac{\hbar c}{3\pi G} \right)^{3/2} \quad (4.27)$$

é o limite de Chandrasekhar que define a quantidade máxima de massa que uma estrela anã branca pode ter sem perder estabilidade². Note que se $\lambda = -1$, então o raio permitido é menor do que o valor correspondente quando a VSL não está presente, enquanto que $\lambda = +1$ produz um raio maior. Neste último caso, conseqüentemente, temos o limite $M \rightarrow M_0$ em que a VSL prediz um raio não nulo para a anã branca:

$$R \rightarrow \bar{\eta} \frac{6\pi^{1/3} \hbar c}{5} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{1/3} \left[1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3} \right]^{-1}. \quad (4.28)$$

Isto é, encontramos para o caso $\lambda = +1$ um critério que talvez permita testar este tipo de VSL [46]. Isso prevê um raio maior para estrelas anãs com massas muito próximas a do sol, $M_0 \sim 1,44M_s$.

Por fim, ressaltamos que a possibilidade de um raio menor para este tipo de sistema

²Vale mencionar que o resultado encontrado na Eq.(4.25) foi generalizado em [46] através de uma relação de dispersão generalizada com parâmetros dependentes do modelo de gravidade quântica no contexto da DSR.

é suportada pela evidência observacional reportada em [49], onde os autores consideram oito candidatas a anãs brancas com raio menor do que aquele deduzido de uma equação de estado para um gás de elétrons degenerados na ausência da VSL. Embora existam esforços teóricos no sentido de explicar tal discrepância, por exemplo através de uma matéria de quarks-estranha dentro do núcleo da estrela [49], há ainda a possibilidade de que essa discrepância na relação de massa-raio de Chandrasekhar seja decorrente da VSL.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação tivemos como objetivo de estudar as implicações teóricas na dinâmica dos campos do fóton e do férmion ao adicionar termos que violam a simetria de Lorentz no contexto da teoria de Myers-Pospelov. Como foi mostrado, estes termos introduzem correções nas relações de dispersão usuais, que é uma condição decorrente de muitos modelos que tentam quantificar a gravidade, e isso nos motivou a estudar possíveis modificações geradas na termodinâmica de fótons e férmions devido a essas correções.

No caso do gás de fótons, verificamos que o número de microestados acessíveis para o estado de equilíbrio correspondente cresce (ou decresce), em comparação com o caso em que a VSL não está presente. Entretanto, no limite $T \rightarrow 0$, a entropia vai a zero, como acontece no caso em que a VSL não está presente. Em outras palavras, o postulado de Nernst não é violado se a simetria for quebrada. Além disso, a VSL implica em um aumento ou diminuição ($\lambda = -1$ e $\lambda = +1$, respectivamente) da pressão, conseqüentemente, podemos interpretar este resultado como a ação de uma pseudo-interação repulsiva ou atrativa entre os fótons. No que diz respeito à detecção destes efeitos, mencionemos que pode ser feita, ao menos em princípio, recorrendo a capacidade térmica a volume constante, embora haja possíveis restrições experimentais devido ao parâmetro de violação ser muito pequeno. Também calculamos a relação pressão-energia e a equação de estado, corrigindo-as em primeira ordem no parâmetro $\bar{\xi}$. Além disso, vimos que a modificação da densidade de energia do gás de fótons conduz a uma modificação da densidade de radiação total de corpo negro, que tal-

vez forneça valores estridentes do parâmetro que controla a VSL, quando aplicada a cenários astrofísicos ou cosmológicos.

Para o gás de férmions constatamos que pode haver aumento ou diminuição das quantidades termodinâmicas, interpretando tais resultados como pseudo-interações repulsivas (se $\lambda = +1$) ou atrativas (se $\lambda = -1$) como efeitos da VSL sobre a dinâmica do gás. Além disso, na busca de um sistema que poderia fornecer uma proposta experimental viável para a detecção desse tipo de VSL, foram consideradas possíveis modificações na relação raio-massa no modelo Chandrasekhar de estrelas anãs brancas. Isso nos conduziu a uma correção no raio de Chandrasekhar que pode ser maior ou menor que a usual, sem perder estabilidade desde que $M \ll M_0$. Entretanto, quando $M \rightarrow M_0$, observamos que o raio é não nulo em relação ao caso usual, sendo uma divergência no termo corrigindo o raio de Chandrasekhar que implica em uma amplificação dos efeitos da gravidade quântica.

Nossa perspectiva de continuidade do presente trabalho é compreender de maneira mais profunda o papel da birrefringência na mudança das propriedades térmicas calculadas tanto para fótons quanto para elétrons. Outra perspectiva é a de realizar um estudo fenomenológico no sentido de estimar os parâmetros da VSL através de dados experimentais de objetos astrofísicos.

Referências Bibliográficas

- [1] David Mattingly. Modern Tests of Lorentz Invariance. *Living Reviews in relativity*, 8(1):5, 2005.
- [2] C. Lämmerzahl. Special Relativity and Lorentz Invariance. *Annalen der Physik*, 14(1-3):71–102, 2005.
- [3] Howard P. Robertson. Postulate Versus Observation in the Special Theory of Relativity. *Reviews of modern Physics*, 21(3):378, 1949.
- [4] Justo Lopez-Sarrion and Carlos M. Reyes. Microcausality and Quantization of the Fermionic Myers-Pospelov Model. *The European Physical Journal C*, 72(9):2150, 2012.
- [5] Don Colladay and V. Alan Kostelecký. CPT Violation and the Standard Model. *Physical Review D*, 55(11):6760, 1997.
- [6] Don Colladay and V. Alan Kostelecký. Lorentz-Violating Extension of the Standard Model. *Physical Review D*, 58(11):116002, 1998.
- [7] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Electrodynamics with Lorentz-Violating Operators of Arbitrary Dimension. *Physical Review D*, 80(1):015020, 2009.
- [8] V. Alan Kostelecký and Neil Russell. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. *Reviews of Modern Physics*, 83(1):11, 2011.
- [9] J. P. Bocquet, D. Moricciani, V. Bellini, M. Beretta, L. Casano, A. D’Angelo, R. Di Salvo, A. Fantini, D. Franco, G. Gervino, et al. Limits on Light-Speed Anisotropies from Compton Scattering of High-Energy Electrons. *Physical Review Letters*, 104(24):241601, 2010.

- [10] Robert C. Myers and Maxim Pospelov. Ultraviolet Modifications of Dispersion Relations in Effective Field Theory. *Physical Review Letters*, 90(21):211601, 2003.
- [11] Pavel A. Bolokhov and Maxim Pospelov. Classification of Dimension-5 Lorentz-Violating Interactions in the Standard Model. *Physical Review D*, 77(2):025022, 2008.
- [12] R. Montemayor and L. F. Urrutia. Synchrotron Radiation in Lorentz-Violating Electrodynamics: The Myers-Pospelov Model. *Physical Review D*, 72(4):045018, 2005.
- [13] R. Montemayor and Luis F. Urrutia. Synchrotron Radiation in Myers-Pospelov Effective Electrodynamics. *Physics Letters B*, 606(1):86–94, 2005.
- [14] Luca Maccione, Stefano Liberati, Annalisa Celotti, and John G. Kirk. New Constraints on Planck-Scale Lorentz Violation in QED from the Crab Nebula. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(10):013, 2007.
- [15] Luca Maccione, Stefano Liberati, Annalisa Celotti, John G. Kirk, and Pietro Ubertini. γ -Ray Polarization Constraints on Planck Scale Violations of Special Relativity. *Physical Review D*, 78(10):103003, 2008.
- [16] C. A. G. Almeida, M. A. Anacleto, F. A. Brito, and E. Passos. Superluminal Neutrinos from Lorentz-Violating Dimension-5 Operators. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 72(1):1–4, 2012.
- [17] John Ellis, Nicholas Harries, Anselmo Meregaglia, André Rubbia, and Alexander S. Sakharov. Probes of Lorentz Violation in Neutrino Propagation. *Physical Review D*, 78(3):033013, 2008.
- [18] Elisabetta Di Grezia, Salvatore Esposito, and Giovanni Salesi. Laboratory Bounds on Lorentz Symmetry Violation in Low Energy Neutrino Physics. *Modern Physics Letters A*, 21(04):349–361, 2006.
- [19] C. M. Reyes, L. F. Urrutia, and J.D. Vergara. Quantization of the Myers-Pospelov Model: The Photon Sector Interacting with Standard Fermions as a Perturbation of QED. *Physical Review D*, 78(12):125011, 2008.

- [20] C. M. Reyes, L. F. Urrutia, and J.D. Vergara. The Photon Sector in the Quantum Myers-Pospelov Model: An Improved Description. *Physics Letters B*, 675(3):336–339, 2009.
- [21] Tiago Mariz. Radiatively Induced Lorentz-Violating Operator of Mass Dimension Five in QED. *Physical Review D*, 83(4):045018, 2011.
- [22] T. Mariz, J. R. Nascimento, and A. Yu Petrov. Perturbative Generation of the Higher-Derivative Lorentz-Breaking Terms. *Physical Review D*, 85(12):125003, 2012.
- [23] Giulia Gubitosi, Giuseppe Genovese, Giovanni Amelino-Camelia, and Alessandro Melchiorri. Planck-Scale Modifications to Electrodynamics Characterized by a Spacelike Symmetry-Breaking Vector. *Physical Review D*, 82(2):024013, 2010.
- [24] C. Marat Reyes. Causality and Stability for Lorentz-CPT Violating Electrodynamics with Dimension-5 Operators. *Physical Review D*, 82(12):125036, 2010.
- [25] Brett Altschul. Laboratory Bounds on Electron Lorentz Violation. *Physical Review D*, 82(1):016002, 2010.
- [26] J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion, and A. P. Polychronakos. Ultraviolet Modified Photons and Anisotropies in the Cosmic Microwave Background Radiation. *Physics Letters B*, 634(5):471–473, 2006.
- [27] O. Bertolami and J. G. Rosa. Bounds on Cubic Lorentz-Violating Terms in the Fermionic Dispersion Relation. *Physical Review D*, 71(9):097901, 2005.
- [28] José Ramón Espinosa, Benjamín Grinstein, Donal O’Connell, and Mark B. Wise. Neutrino Masses in the Lee-Wick Standard Model. *Physical Review D*, 77(8):085002, 2008.
- [29] Benjamín Grinstein, Donal O’Connell, and Mark B. Wise. The Lee-Wick Standard Model. *Physical Review D*, 77(2):025012, 2008.
- [30] Bartosz Fornal, Benjamín Grinstein, and Mark B. Wise. Lee-Wick Theories at High Temperature. *Physics Letters B*, 674(4):330–335, 2009.

- [31] M. Ostrogradski. Member Academic Science ST. *Petersbourg*, 1(385):18502, 1850.
- [32] A. Pais and G. E. Uhlenbeck. On Field Theories with Non-Localized Action. *Physical Review*, 79(1):145, 1950.
- [33] T. D. Lee and G. C. Wick. Negative Metric and the Unitarity of the S-Matrix. *Nuclear Physics B*, 9(2):209–243, 1969.
- [34] T. D. Lee and G. C. Wick. Finite Theory of Quantum Electrodynamics. *Physical Review D*, 2(6):1033, 1970.
- [35] R. E. Cutkosky, P. V. Landshoff, David I. Olive, and J. C. Polkinghorne. A Non-Analytic S-Matrix. *Nuclear Physics B*, 12(2):281–300, 1969.
- [36] Ignatios Antoniadis, E. Dudas, and D. M. Ghilencea. Living with Ghosts and Their Radiative Corrections. *Nuclear physics B*, 767(1):29–53, 2007.
- [37] Kerson Huang. *Statistical Mechanics*, 2nd. Edition (New York: John Wiley & Sons), 1987.
- [38] R. K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1996.
- [39] Walter Greiner, Ludwig Neise, and Horst Stöcker. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [40] Abel Camacho and Alfredo Macías. Thermodynamics of a Photon Gas and Deformed Dispersion Relations. *General Relativity and Gravitation*, 39(8):1175–1183, 2007.
- [41] Orfeu Bertolami and Carlos A. D. Zarro. Towards a Noncommutative Astrophysics. *Physical Review D*, 81(2):025005, 2010.
- [42] Giovanni Amelino-Camelia. Doubly-Special Relativity: Facts, Myths and Some Key Open Issues. *Symmetry*, 2(1):230–271, 2010.
- [43] Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr., and Josberg S. Rodrigues. Lorentz-Violating Contributions of the Carroll-Field-Jackiw Model to the CMB Anisotropy. *Physical Review D*, 78(12):125013, 2008.

- [44] Izrail Solomonovich Gradshteyn and Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [45] Subrahmanyan Chandrasekhar. *An Introduction to The Study of Stellar Structure*, volume 2. Courier Corporation, 1958.
- [46] Abel Camacho. White Dwarfs as Test Objects of Lorentz Violations. *Classical and Quantum Gravity*, 23(24):7355, 2006.
- [47] Giovanni Amelino-Camelia, Niccolo Loret, Gianluca Mandanici, and Flavio Mercati. UV and IR Quantum-Spacetime Effects for the Chandrasekhar Model. *International Journal of Modern Physics D*, 21(06):1250052, 2012.
- [48] Thanu Padmanabhan. *Theoretical Astrophysics: Volume 2, Stars and Stellar Systems*. Cambridge University Press, 2001.
- [49] G.J. Mathews, I.S. Suh, B O’Gorman, N.Q. Lan, W. Zech, K. Otsuki, and F. Weber. Analysis of White Dwarfs with Strange-Matter Cores. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 32(6):747, 2006.