



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

## **Defeitos e Modelos de Quintessência**

**Deusalete Câmara Vilar Neta**

CAMPINA GRANDE

- Agosto 2016 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

# **Defeitos e Modelos de Quintessência**

**Deusalete Câmara Vilar Neta**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

CAMPINA GRANDE

- Agosto 2016 -

V697d Vilar Neta, Deusalete Câmara.  
Defeito e modelos de quintessência / Deusalete Câmara Vilar Neta. –  
Campina Grande, 2016.  
54 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina  
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.  
"Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos".  
Referências.

1. Física. 2. Cosmologia. 3. Energia Escura – Equações de  
Friedmann. 4. Equação de Einstein – Modelos Cosmológicos. I. Santos,  
João Rafael Lúcio dos. II. Título.

CDU 53:524.8(043)

# DEFEITOS E MODELOS DE QUINTESSÊNCIA

DEUSALETE CÂMARA VILAR NETA

Aprovada em \_\_\_\_\_

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos  
Orientador

---

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva  
Examinador Externo

---

Prof. Dr. Rodrigo Fernandes Lira de Holanda  
Examinador Interno

*”Se quer viver uma vida feliz,  
amarre-se a uma meta, não às  
pessoas nem às coisas.”*

Albert Einstein

# Agradecimentos

Agradeço ao Prof. João Rafael Lúcio dos Santos pela orientação, disponibilidade e principalmente pela paciência e atenção, tendo um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho, permitindo realizar um sonho.

Agradeço aos professores da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande que contribuíram para a minha formação.

Agradeço aos colegas da pós graduação, pela ajuda em disciplinas, pela amizade e excelente convívio.

Agradeço aos meus amigos fora da comunidade acadêmica, por terem me emprestado ombro, ouvidos, tempo, atenção, entre outras coisa, sempre no intuito de me ajudar a seguir em frente.

Agradeço a minha família por todo apoio em todas as etapas da minha vida.

Por fim, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro, e ao Programa de Pós Graduação em Física da UFCG, pela estrutura e oportunidade da realização desse mestrado.

*Dedico ao meu filho.*

# Lista de Figuras

5.1	Evolução de $H(t)$ , para $c = 0,45$ , $b = -1,5$ e $a = 0,188$ . . . . .	44
5.2	Evolução de $\omega$ , para $c = 0,45$ , $b = -1,5$ e $a = 0,188$ . . . . .	45
5.3	Evalução do fator de escala, para $c = 0,45$ , $b = -1,5$ e $a = 0,188$ . . . . .	45



# Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	vii
Resumo	x
Abstract	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Tópicos em Teoria Clássica de Campos</b>	<b>4</b>
2.1 Modelos de um campo . . . . .	5
2.1.1 Soluções BPS . . . . .	6
2.1.2 Estabilidade linear . . . . .	9
2.2 Modelos de dois campos . . . . .	10
2.2.1 Soluções BPS . . . . .	10
2.2.2 Modelo BNRT . . . . .	11
<b>3 Modelo Padrão da Cosmologia</b>	<b>13</b>
3.1 Equação de Campo de Einstein . . . . .	14
3.2 Equações de Friedmann . . . . .	17
3.3 Tensor Energia-momento para um fluido perfeito . . . . .	18
3.4 Formalismo de Primeira Ordem para um Campo Escalar . . . . .	21
<b>4 Método de Extensão</b>	<b>23</b>
4.1 Generalidades . . . . .	23
4.2 Método de extensão de modelos para dois campos escalares . . . . .	25
4.2.1 Exemplo: $\phi^4$ versus $\chi^4$ . . . . .	26

4.3	Método de extensão para três campos escalares reais . . . . .	28
4.4	Novo método . . . . .	29
4.5	Exemplo . . . . .	34
4.5.1	$\phi^4$ , $\chi^4$ e $\xi^4$ . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Defeitos Topológicos em Modelos de Quintessência</b>	<b>38</b>
5.1	Formalismo de Primeira Ordem para Modelos de Três Campos . . . . .	38
5.2	Modelo Efetivo - Exemplo . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>47</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>52</b>

# Resumo

Modelos cosmológicos envolvendo campos escalares permitem a descrição de uma fase de expansão cósmica acelerada e, portanto, se apresentam como uma alternativa promissora no estudo da inflação cósmica e da energia escura. O elemento chave dessa aceleração é a energia escura ou quintessência. Nosso interesse está em analisar soluções cosmológicas baseadas no formalismo de primeira ordem, aqui em particular, o caso para o espaço-tempo plano, por meio do acoplamento de campos escalares, de uma forma não trivial usando o método de extensão. Os resultados obtidos nos permitem calcular parâmetros cosmológicos analíticos, que ilustramos ao longo do texto através de exemplos resolvidos com situações-modelo de possível interesse. Ainda, discutiremos as ferramentas utilizadas em teoria de campos escalares na descrição de defeitos, tomando como ponto de partida modelos com um campo escalar, e revisando aspectos básicos de teorias que envolvem três campos escalares. Além disso, utilizando o método BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Somerfield), mostraremos que as soluções das equações de Eüler-Lagrange podem ser satisfeitas através de soluções de equações de primeira ordem. Após todas essas análises, iremos relacionar a teoria de campo escalar com a equação de campo de Einstein. Através dos procedimentos mencionados, esperamos compreender o processo de expansão do Universo acelerado, utilizando as soluções das equações de Friedmann.

Palavras-chave: Energia Escura - Equações de Friedmann - Equação de Einstein - Modelos Cosmológicos.

# Abstract

Cosmological models involving scalar fields allow the description of an accelerated cosmic expansion phase, and thus, they appear as a promising alternative in the study of cosmic inflation and dark energy. The key element of this acceleration is the dark energy or quintessence. Our interest is to analyze cosmological solutions based on the first-order formalism. In particular, we investigate the case for flat space-time, by coupling scalar fields in a nontrivial manner using the extension method. The results obtained allowed us to calculate cosmological analytical parameters which are illustrated along the text. Moreover, we will discuss the tools used in scalar field theory in the defect description, we took as a starting point models with a scalar field, and by reviewing the basics of theories that involve three scalar fields. Furthermore, by using the BPS method (Bogomol'nyi, Prasad and Somerfield), we showed that the solutions of the Euler-Lagrange equations can be derived from the first-order differential equations. After all these analyzes, we will connect the field theory tools with the Einstein field equation. We hope to understand the expansion process of the accelerated universe through the previous procedures and by using the solutions of the Friedmann equations.

Keywords: Dark energy - Friedmann equations - Einstein equation - Cosmological Models.

# Capítulo 1

## Introdução

Na Cosmologia padrão a teoria do Big-Bang em Relatividade Geral é uma descrição bem sucedida do Universo observável. Nesse modelo, o estado do Universo é caracterizado pelo estágio de radiação dominante ou pelo estágio de matéria dominante. Isso corresponde à expansão do Universo onde a segunda derivada do fator de escala é negativa. No entanto, a necessidade de resolver os problemas associados ao modelo padrão motivou a pesquisar além do modelo do Big-Bang, pois, somente o Big Bang não é suficiente para resolver certo número de problemas cosmológicos, tais como a planitude, o problema do horizonte, a estrutura em larga escala e o problema dos monopólos. Para superar esses problemas fundamentais, é necessário considerar uma época de expansão exponencial no Universo primitivo, a inflação. A maioria das soluções propostas são baseadas tanto na existência de novos campos na natureza (energia escura) ou em alguma modificação da ação de Einstein-Hilbert.

Desse modo, entender o surgimento e a natureza da atual aceleração do Universo observada e fornecer uma resposta para a questão da energia escura, tida como a possível fonte desta aceleração, tem sido um dos maiores desafios da Cosmologia teórica atualmente. [1], [2].

Em 1998, dois grupos de pesquisa *Supernova Cosmology Project* e *High Redshift Supernova Team*, [3], [4], em trabalhos independentes, realizaram medidas de distância e velocidade de afastamento das supernovas do Tipo Ia (caracterizadas pelo espectro específico de cores emitido pela estrela que explodiu) e, mostraram com grande precisão, que o Universo está se expandindo aceleradamente. Esse resultado alterou drasticamente a nossa visão do cosmos, pois, sendo a gravidade uma força atrativa, a expansão deveria

ser desacelerada, conforme se acreditou durante muitas décadas [5], [6].

As evidências crescentes para a aceleração do Universo em cenários de energia escura, reduzem-se, em geral, à introdução de novos graus de liberdade no cenário cosmológico, seja por campos de matéria com pressão negativa ou mudanças no setor gravitacional. Um dos modelos mais simples que dão conta desta aceleração baseia-se na introdução de um campo escalar cujo valor médio varia durante a história do Universo. Esses modelos são conhecidos como modelos de inflação, e tipicamente envolvem um único campo escalar deslocado do mínimo de um potencial, criando uma energia do vácuo diferente de zero que domina a energia de estresse do Universo. Isto por sua vez, conduz à expansão quase exponencial, também conhecida como inflação cósmica.

A inflação termina quando o campo escalar relaxa ao mínimo, o potencial e a energia do vácuo decaem via produção de partículas, resultando na produção maciça de entropia. As equações de movimento para o campo não são, em geral, analiticamente solucionáveis e métodos aproximados são obrigatórios. Genericamente, esse campo escalar pode acoplar-se ao campo gravitacional induzindo uma quinta força que é de longo alcance dominando o processo de aceleração do Universo após um longo período de tempo, [7], [8], [9].

Além disso, recentes observações da magnitude aparente e do desvio para o vermelho de supernovas do tipo Ia indicam que, após a fase desacelerada o Universo volta a possuir uma expansão acelerada, a qual permanece até hoje. Dados observacionais da radiação cósmica de fundo indicam que o Universo deve ser espacialmente plano [10], [11], essa conclusão é obtida através do cálculo do parâmetro densidade total do Universo, que é a soma dos parâmetros densidade relacionados a cada constituinte do Universo. Nessa análise, chegou-se ao resultado de que o parâmetro de densidade total do Universo deve estar próximo à unidade. Porém, os constituintes conhecidos do Universo não dão conta desse valor, o que levou os cosmólogos admitirem a existência de um componente, até então desconhecido à Cosmologia. Esse ente desconhecido, que deve compor cerca de 70% do Universo, foi intitulado de energia escura. “Energia” por ser uma componente que não se aglomera como a matéria, e “escura” por não emitir radiação eletromagnética, [12].

Possivelmente, há uma conexão entre o problema da atual expansão acelerada do Universo e do parâmetro densidade ser próximo a um, o que leva a crer que energia escura não só é o maior constituinte do Universo, como também é responsável pela atual expansão

acelerada do mesmo. Para solucionar esse enigmático problema da Cosmologia surgiram vários candidatos à energia escura. Entre eles, o mais difundido é o da quintessência, a qual elege um campo escalar representando a energia escura.

Entre as várias possibilidades, neste trabalho, estamos interessados, principalmente na cosmologia padrão de Friedmann Robertson-Walker (FRW) orientada pelo campo escalar real com a dinâmica padrão.

Nesta dissertação, temos como objetivo contribuir com modelagens analíticas de quintessência, baseadas em acoplamentos híbridos compostos por três campos escalares. Tais modelos analíticos são escassos na literatura científica, justificando o esforço científico para determiná-los. A fim de expor tal conteúdo de forma didática, o presente trabalho foi organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 vamos apresentar alguns conceitos fundamentais de teoria clássica de campos, para modelos de um e dois campos escalares reais. Os defeitos topológicos estão intimamente associados com algum tipo de quebra de simetria no sistema físico. No Capítulo 3 é feito um breve resumo da Teoria da Relatividade Geral no contexto de Cosmologia e dos ingredientes básicos para um modelo cosmológico relativístico, também abordaremos modelos cosmológicos do tipo FRW via o chamado formalismo de primeira ordem. No Capítulo 4, mostramos de maneira breve o método de deformação e em seguida sua aplicação no método de extensão, dando ênfase ao caso para três campos, por fim sua aplicação. No Capítulo 5 apresentamos a aplicação do método de extensão como solução para as equações de movimento de Einstein. No capítulo 6, são discutidas as conclusões e algumas perspectivas. Finalmente, no Apêndice A apresentamos o procedimento de minimização da ação, de modo a obtermos a equação de Eüler-Lagrange.

## Capítulo 2

# Tópicos em Teoria Clássica de Campos

Defeitos topológicos podem ser definidos como soluções que caracterizam transição entre fases distintas de um sistema, ou seja, são soluções que revelam mudanças das características e/ou propriedades do sistema. Topologia é um ramo da matemática que estuda o comportamento assintótico das funções, logo, uma definição matemática para defeito seria que ele é uma solução, com energia finita, de uma equação diferencial não-linear [13].

Em teoria de campos, defeitos topológicos são soluções clássicas das equações de movimento que possuem uma topologia não trivial, que surgem em modelos que suportam quebra espontânea de simetria, para este caso, estamos interessados no comportamento assintótico dos campos, ou na denominação análoga de estados de vácuos. A presença da topologia no sistema é assegurada através da introdução de uma corrente contínua, topológica conservada, cuja definição em geral é fundamentada nos valores assintóticos das soluções. Iremos encontrar soluções para as equações de movimento que possuam defeitos topológicos.



## 2.1 Modelos de um campo

A lagrangiana mais simples para descrever a dinâmica de um campo escalar real  $\phi$  em (1+1) dimensões é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.1)$$

onde  $V(\phi)$  é o potencial que depende do sistema físico considerado e  $\mu = 0$  e  $1$ .

A ação clássica relativa a esta densidade de lagrangiana possui a forma

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x \quad (2.2)$$

a partir da qual podemos derivar a equação de movimento desta teoria. A equação de movimento para o campo é obtida pelo princípio variacional de Hamilton (ou princípio de mínima ação), o qual afirma que a dinâmica do sistema entre os instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$  é tal que minimiza a ação. Lembrando que estamos considerando a métrica de Minkowsky em um espaço de (1+1), ou seja  $\phi = \phi(x, t)$ , temos que a equação de movimento será

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.3)$$

Que pode ser reescrita na forma compacta,

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.4)$$

Sendo a última uma equação diferencial parcial de segunda ordem nas variáveis  $t$  e  $x$ . Dependendo da forma do potencial a equação de movimento pode ser não-linear. Podemos simplificar a equação de movimento considerando soluções estáticas, isto é, se  $\phi = \phi(x)$ .

$$-\phi'' + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.5)$$

Utilizaremos o método da quadratura, multiplicando cada lado da equação por  $\phi'$ , logo

$$\phi' \phi'' = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dV}{dx}; \quad (2.6)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{dV}{dx}. \quad (2.7)$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V + C}, \quad (2.8)$$

onde  $C$  é uma constante determinada pelas condições de contorno.

Outra maneira de obtermos a equação acima é por meio do método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield, ou simplesmente método BPS, [14], [15], [16] e [17], que nos permite obter soluções clássicas do tipo parede de domínio, que veremos com mais detalhes na próxima sessão.

### 2.1.1 Soluções BPS

O método BPS, nos permite obter soluções clássicas do tipo parede de domínio, que consiste em escrever os termos da densidade de energia na forma de quadrados perfeitos e, então, minimizar a energia impondo o cancelamento dos termos quadráticos. Tal método conduz a equações diferenciais de primeira ordem, que, além de serem mais facilmente resolvidas, quando comparadas com as equações de movimento, também satisfazem as equações de Eüler-Lagrange, sendo, portanto, soluções legítimas do sistema. Para demonstrarmos as propriedades do método BPS, descreveremos a densidade de energia correspondente à densidade de lagrangiana para o campo  $\phi(x)$ , da seguinte maneira

$$\rho(x) = -\mathcal{L} = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi). \quad (2.9)$$

Desse modo, para obtermos a energia total do sistema, devemos integrar a densidade de energia do sistema, de maneira que, os termos não quadráticos são, então, integrados e os campos estão sujeitos a certas condições de contorno inerentes ao sistema, dado por

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.10)$$

Ao completarmos o quadrado perfeito obtemos a seguinte relação

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \mp \sqrt{2V(\phi)} \right]^2 dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} \right) dx. \quad (2.11)$$

No qual, nota-se que o primeiro termo é definido como positivo. Notamos ainda que, para que a energia seja mínima, este termo deve ser nulo, conduzindo à seguinte equação de primeira ordem

$$\phi' = \pm\sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.12)$$

consequentemente, a energia mínima do sistema

$$E = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sqrt{2V(\phi)}\phi' \right) dx. \quad (2.13)$$

Podemos observar, que ao utilizarmos (2.8) para escrever  $V(\phi)$  em (2.10), ficamos com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \phi'^2 - \frac{C}{2} \right] dx = -(\infty)C + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'^2 dx, \quad (2.14)$$

como estamos interessados em soluções cuja derivada seja suave, bem definida e sua integração seja finita sobre toda variação espacial, devemos considerar  $C$  igual a zero.

A equação (2.13) será facilmente integrada se escrevermos o potencial em termos de uma função suave dos campos  $W(\phi)$ , da seguinte forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{d\phi} \right)^2 = \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (2.15)$$

onde  $W_\phi$  é uma função contínua e diferenciável, a qual denominaremos de superpotencial. Tal redefinição do potencial resulta em

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi' W_\phi) dx = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]|, \quad (2.16)$$

que é conhecido como limite de Bgomol'nyi. Notamos que, mesmo sem conhecer a solução  $\phi(x)$ , este limite é determinado conhecendo-se apenas o superpotencial  $W(\phi)$  e os valores assintóticos de  $\phi(x)$ , que correspondem a valores bem definidos de  $W$ . Desse modo, o mínimo da energia é atingida para funções  $\phi(x)$  que satisfaçam

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi). \quad (2.17)$$

Neste caso, o método BPS, além de possibilitar a obtenção da equação diferencial de primeira ordem, permite escrever a energia associada à configuração estática de forma simples, fechada e mínima.

Definiremos agora a corrente topológica seguindo a metodologia introduzida por Bazeia em [18]. A forma explícita da corrente topológica pode ser estabelecida como

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.18)$$

onde  $\epsilon^{\mu\nu}$  é o pseudotensor de Levi-Civita anti-simétrico, que tem o número de índices igual ao número de dimensões do espaço em que a teoria está sendo estudada. No caso de  $(1 + 1)$  dimensões temos as componentes do tensor dadas por:  $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$  e  $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$ . O fato desta corrente ser conservada implica que ela deve satisfazer o vínculo  $\partial_\mu J_T^\mu = 0$ , resultando na existência de uma carga  $Q_T$  cuja forma é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \phi(\infty) - \phi(-\infty). \quad (2.19)$$

Podemos especificar dois tipos de soluções distintas a partir dessa equação: as soluções topológicas com  $Q_T$  diferente de zero; e as soluções não topológicas com  $Q_T$  igual a zero. Kinks e Lumps, são exemplos de soluções topológicas e não topológicas, respectivamente. As soluções topológicas são configurações do campo que mudam de valor de um extremo a outro, seja por um decréscimo ou crescimento de  $\phi$  e vice-versa, já as soluções não topológicas possuem o mesmo valor do campo em ambos os extremos. Outro objeto relevante na caracterização de propriedades relativas as soluções topológicas e não topológicas é o chamado tensor energia-momento, cuja forma explícita é (mais detalhes sobre como obter tal relação para o tensor energia-momento podem ser encontrados no Apêndice A)

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

A componente  $T^{00}$  do tensor energia momento representa a densidade de energia

$$T^{00} = \rho = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi). \quad (2.21)$$

Já a pressão devido o campo escalar é dado por  $T^{11}$

$$T^{11} = p = \frac{\phi'^2}{2} - V(\phi). \quad (2.22)$$

## 2.1.2 Estabilidade linear

Defeitos topológicos são estruturas estáveis, por esse motivo devemos nos certificar que nossas soluções conseguem reproduzir essa característica. Nesta secção, estudaremos a estabilidade das soluções das equações de movimento através da chamada estabilidade linear. [19]

Primeiramente vamos utilizar a equação de movimento (2.3) e introduziremos uma pequena perturbação  $\eta(x, t)$ . Usaremos  $\phi_s$  para a solução estática e  $\eta(x, t)$  tem dependência temporal, para verificar se a solução é estável ou não, ou seja,

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t). \quad (2.23)$$

Substituindo (2.23) em (2.3), temos que

$$\frac{\partial^2(\phi_s + \eta)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\phi_s + \eta)}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi(x,t)} = 0. \quad (2.24)$$

Para o caso de configuração estática (2.24) se torna

$$-\frac{\partial^2\phi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.25)$$

Se expandirmos  $\frac{dV}{d\phi}$  em série de Taylor considerando apenas potências de primeira ordem de  $\eta$ , obtemos

$$\frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} = \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} + \eta \frac{d^2V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s}. \quad (2.26)$$

Substituindo este resultado em (2.25), encontramos

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} + \eta \frac{d^2V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.27)$$

Temos ainda, que para o caso estático a equação de movimento (2.3) pode ser escrita como

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.28)$$

Utilizando este resultado, (2.27) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.29)$$

Escrevendo a solução desta equação como

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t), \quad (2.30)$$

podemos reescrever (2.29) como sendo

$$-\frac{d^2\eta_n}{dx^2} + U(x)\eta_n = \omega_n^2\eta_n, \quad (2.31)$$

com  $U(x) = \frac{d^2V}{d\phi^2}|_{\phi=\phi_s}$ .

A equação (2.31) é do tipo Schrodinger com  $-\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$  sendo um operador,  $\omega_n^2$  os autovalores e  $\eta_n$  os auto-vetores.

A partir disso, percebemos que para encontrar uma solução linearmente estável devemos ter  $\omega_n^2 \geq 0$ , caso contrário haverá um argumento imaginário do cosseno em (2.30) que violaria a suposição de pequena perturbação.

Não é difícil mostrar [17] que soluções do tipo kink são estáveis por estabilidade linear (o menor autovalor encontrado é zero) enquanto soluções tipo lump são instáveis (o menor autovalor encontrado é menor que zero).

## 2.2 Modelos de dois campos

### 2.2.1 Soluções BPS

Iremos aplicar o método BPS para um sistema de dois campos escalares reais acoplados  $(\phi, \chi)$ , [20] e [21]. Justificamos a utilidade desse modelo por apresentar as seguintes propriedades gerais: em primeiro lugar, a equação de movimento correspondente é resolvida por configuração de campo obedecendo equações diferenciais de primeira ordem; em segundo lugar, as configurações clássicas que resolvem as equações de primeira ordem para energia mínima são classicamente ou linearmente estável.

Por outro lado, as equações diferenciais de primeira ordem podem ser vistas como um sistema dinâmico, e assim podemos tirar proveito de todo o ferramental matemático disponível. Para sistemas dinâmicos para lidar com o conjunto de equações de primeira ordem e, conseqüentemente, com soluções para as equações de movimento. Para um sistema desse tipo a densidade lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi, \chi), \quad (2.32)$$

cujas equações de movimento, para configurações estáticas, são dadas por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial\phi}; \quad \frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial\chi} \quad (2.33)$$

onde  $V = V(\phi, \chi)$ . Além disso, a densidade de energia correspondente a este sistema é

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi), \quad (2.34)$$

consequentemente, podemos escrever a energia total do sistema como sendo

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right] dx. \quad (2.35)$$

Se assumirmos que esse potencial  $V(\phi, \chi)$  é positivo definido e o escrevermos na forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(W_\phi)^2 + \frac{1}{2}(W_\chi)^2. \quad (2.36)$$

podemos substituir (2.36) em (2.35) para obter

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 + (W_\phi)^2 + (W_\chi)^2 \right] dx. \quad (2.37)$$

Utilizando agora o método BPS, a equação (2.37) passa a ser

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \pm W_\chi \right)^2 \right] dx \pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left[ \frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right]. \quad (2.38)$$

Vê-se que a condição que minimiza a energia do sistema é

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad e \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi. \quad (2.39)$$

E com isso nossa energia total será dada por

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right) dx, \quad (2.40)$$

ou ainda,

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - |W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]|. \quad (2.41)$$

## 2.2.2 Modelo BNRT

Vamos agora, buscar soluções topológicas a partir de um modelo conhecido na literatura como BNRT [19], cujo superpotencial é escrito como

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (2.42)$$

com  $r$  sendo uma constante real. Para encontrarmos o potencial advindo deste modelo basta tomarmos as derivadas de (2.42) com relação a  $\phi$  e  $\chi$  e substituí-las em (2.36), logo

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 + r(\phi^2 - 1)\chi^2 + 2r^2\chi^2\phi^2 + \frac{1}{2}r^2\chi^4. \quad (2.43)$$

Além disso, as equações (2.39) podem ser reescritas como

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad e \quad \frac{d\chi}{dx} = \mp 2r\phi\chi. \quad (2.44)$$

Essas equações não lineares possuem soluções topológicas não triviais que são obtidas conectando dois estados de vácuos diferentes. Cada par de vácuo conectado por essas soluções constitui um setor topológico.

Veja que para essa teoria  $V(\phi, \chi) = 0$  se  $\chi = 0 \rightarrow \phi = \pm 1$  e se  $\phi = 0 \rightarrow \chi = \pm 1/\sqrt{r}$ , ou seja, os mínimos do potencial são  $(\pm 1, 0)$  e  $(0, \pm 1/\sqrt{r})$ .

Além disso, podemos obter a energia BPS de cada setor topológico através da equação (2.41), em resumo temos

**Caso 1:**  $(\pm 1, 0) \rightarrow E_{BPS} = \frac{4}{3}$ , Um setor topológico.

**Caso 2:**  $(0, \pm 1/\sqrt{r}) \rightarrow E_{BPS} = 0$ , Um setor não-topológico.

**Caso 3:**  $(\pm 1, \pm 1/\sqrt{r}) \rightarrow E_{BPS} = \frac{2}{3}$ , Quatro setores topológicos.



## Capítulo 3

# Modelo Padrão da Cosmologia

O Universo observável parece, em larga escala, ser o mesmo em todas as direções que observamos, ou seja o espaço pode ser visto como homogêneo e isotrópico. Essa isotropia pode ser observada em boa aproximação via a análise da radiação cósmica de fundo. Essa radiação cósmica está viajando pelo Universo há cerca de 14 bilhões de anos, e corresponde a um motivo de que o Universo é realmente o mesmo em qualquer direção quando visto em distâncias suficientemente grandes [2], [22], [23] e [24].

Assim, ao assumirmos a isotropia do Universo, devemos especificar que o Universo parece o mesmo em todas as direções somente para uma família de observadores em queda livre, que são aqueles que se movem com a velocidade média das galáxias típicas de sua vizinhança, visto que as galáxias geralmente são parte de um sistema gravitacional estável e fechado. Isso implica que as condições devem ser as mesmas, no mesmo tempo, em qualquer um dos pontos que possa ser levado um ao outro por uma rotação em torno de uma galáxia típica. Mas como todo ponto pode ser levado um ao outro por uma sequência de tais rotações ao redor de galáxias típicas, o Universo é também homogêneo - observadores em todas as galáxias típicas em um determinado tempo observam as mesmas condições ao seu redor.

A suposição que nosso Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala permite que um modelo padrão para nosso Universo seja proposto e que nossa teoria possa ser comparada com observações. Esse modelo padrão, oriundo de princípios e teorias físicas conhecidas, será o tema deste capítulo.

### 3.1 Equação de Campo de Einstein

Para facilitar a compreensão dos conceitos utilizados nas próximas seções, faremos uma breve introdução sobre as equações de campos da Relatividade Geral (RG), que podem ser deduzida como resultado do princípio variacional. Nosso estudo inicia-se a partir da denominada ação de Einstein-Hilbert acoplada com a densidade de lagrangiana de um campo escalar real, dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right], \quad (3.1)$$

onde  $\phi$  é o campo escalar,  $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  é o escalar de Ricci, respectivamente, e estamos utilizando  $4\pi G = 1$ . Além disso, como é usual, estamos utilizando o símbolo  $g$ , para representar o determinante do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  ( $g = |g_{\mu\nu}|$ ).

Ao realizarmos o procedimento de minimização da ação, temos

$$\delta S = \int d^4x \left[ (\delta\sqrt{-g}) \left( -\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) + \sqrt{-g} \delta \left( -\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) \right], \quad (3.2)$$

onde,  $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ . Tal relação será demonstrada em detalhes abaixo. Lembrando que para uma matriz qualquer [25]

$$Tr(\log M) = \log(\det M), \quad (3.3)$$

consequentemente, a variação deste traço nos leva à

$$\delta Tr(\log M) = \delta(\det M),$$

$$Tr \left( \frac{1}{M} \delta M \right) = \frac{1}{\det M} \delta(\det M). \quad (3.4)$$

Além disso, tem-se que

$$Tr M = \sum_i M_{ii},$$

logo, sabendo que

$$(M^{-1}\delta M)_{ij} = \sum_k M_{ik}^{-1} \delta M_{kj}.$$

podemos estabelecer a seguinte relação:

$$Tr(M^{-1}\delta M) = \sum_i (M^{-1}\delta M)_{ii} = \sum_i \sum_k M_{ik}^{-1} \delta M_{kj} \quad (3.5)$$

Deste modo, ao considerarmos que  $M = g^{\mu\nu}$ ,  $M^{-1} = g_{\mu\nu}$ , e  $\det(M) = g$ , podemos reescrever os resultados anteriores como

$$g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = g \delta(g^{-1}), \quad (3.6)$$

logo,

$$\delta g = g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Então, ao tomarmos a variação de  $\sqrt{-g}$ , obtemos

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}}, \quad (3.8)$$

assim, substituindo (3.7) em (3.8), temos

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

De volta à equação ((3.2)), podemos reescreve-la como

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + 2g_{\mu\nu} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \delta R + \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right]. \quad (3.10)$$

Tomando  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  e como é usual no princípio variacional, as variações  $\delta g^{\mu\nu}$  e as variações de suas primeiras derivadas, devem ser nulas no contorno,

$$\int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{4} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{-g} \frac{\delta R}{4} &= -\frac{\sqrt{-g}}{4} \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{4} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

E ainda,

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.13)$$

Visto que a variação da métrica  $g^{\mu\nu}$  é arbitrária, logo, como consequência do princípio da ação mínima, obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

onde, a constante  $\kappa = 2$ . Assim, podemos ver que o lado esquerdo da equação (3.21) fornece informações a respeito da curvatura do espaço-tempo determinada pela métrica, enquanto o lado direito representa a distribuição de matéria contida no espaço-tempo. A relação anterior é denominada equação de Einstein e pode ser interpretada como o equivalente à segunda Lei de Newton para a relatividade geral.

## 3.2 Equações de Friedmann

Para descrever a geometria de um Universo homogêneo e isotrópico, precisamos determinar o elemento de linha que descreve o espaço-tempo quadridimensional. Esse elemento de linha é dado pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), já que um espaço isotrópico implica em uma simetria esférica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.22)$$

no qual  $a(t)$  é o fator de escala e  $k$  o parâmetro de curvatura, cujos possíveis valores são  $k = +1; 0; -1$  que correspondem a uma geometria fechada, plana e aberta, respectivamente. Um dos invariantes de Lorentz de uma teoria relativística é o chamado elemento de linha, que possui a seguinte estrutura

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.23)$$

onde o tensor métrico é representado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/(1 - kr^2) & & \\ 0 & 0 & (a^2r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix},$$

Derivando as equações de campo de Einstein, obtemos as equações dinâmicas do Universo em expansão. Primeiramente, precisamos determinar o tensor de Ricci, por meio dos elementos da conexão afim, que obedecem a relação

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}). \quad (3.24)$$

Tal objeto constitui a base para a definição do chamado tensor de curvatura de Riemann-Christoffel

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\nu}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (3.25)$$

A partir deste tensor de curvatura, podemos estabelecer tensores de ordens ou "rank" menores através de contrações. Uma possível contração para o tensor de curvatura possui a seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}, \quad (3.26)$$

denominada tensor de Ricci. Tal tensor nos permite construir o único escalar não-trivial a partir do tensor de Riemann-Christoffel, dado por

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

conhecido como escalar de Ricci. As componentes não nulas do tensor de Ricci na métrica FRW são tais que

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\ R_{22} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k) \\ R_{33} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k)r^2\sin^2\theta. \end{aligned}$$

A partir da determinação de tais componentes, podemos observar que a forma explícita do escalar de Ricci na métrica FRW é tal que

$$R = -6\left(\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k^2}{a^2}\right). \quad (3.28)$$

### 3.3 Tensor Energia-momento para um fluido perfeito

Primeiramente, uma boa descrição da fase atual de evolução do Universo, consiste considerá-lo, em aproximação, como formado por um fluido de partículas não interagentes

(poeira). Para isso, escreveremos  $T_{\mu\nu}$  em um sistema de coordenadas comóvel [25] e [23].

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são a densidade de energia e de pressão (respectivamente) conforme medido no referencial de repouso, e  $u^\mu$  é a quadrivelocidade do fluido, a qual encontra-se normalizada, ou seja,  $uu^{-1} = 1$ . A forma explícita do tensor energia-momento na métrica FRW é

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 p / (1 - kr^2) & & \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2 \theta p \end{pmatrix}.$$

Aplicando a métrica de FRW e o tensor energia-momento apropriado às equações de Einstein dadas por (3.21), encontramos a equação de Friedmann, das componentes (00) e (ii)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.30)$$

e,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p). \quad (3.31)$$

Onde a razão  $\frac{\dot{a}}{a}$  é conhecida como parâmetro de Hubble, que descreve a taxa de expansão do Universo. O atual valor do parâmetro de Hubble chama-se constante de Hubble,  $H_0$ . Desse modo, podemos escrever a equação (3.30),

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.32)$$

Precisamos ter em mente que a equação de Friedmann não tem utilidade se não tivermos uma equação da evolução temporal da densidade  $\rho$  dos constituintes do Universo. Essa relação deve envolver a pressão  $p$  do fluido e é conhecida como equação do fluido. Podemos obtê-la, derivando a equação de Friedmann (3.32) com relação ao tempo

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.33)$$

É possível ainda, admitindo  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$  e, lembrando que  $T_{\mu\nu} = \frac{2\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}$ , escrever

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi)\right] \quad (3.34)$$

$$T_{00} = \rho = \dot{\phi}^2 - \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)\right] = \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.35)$$

$$T_{ii} = -p = 0 + \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)\right] = \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.36)$$

Note que a equação (3.33) nos diz como a densidade se comporta se soubermos a sua dependência com a pressão  $p$ . Deste modo, faz-se necessário estabelecer uma relação entre densidade e pressão, que é denominada equação de estado e possui a seguinte definição

$$p = \omega\rho, \quad (3.37)$$

ou ainda, a partir das relações de (3.35) e (3.36)

$$\omega = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (3.38)$$

Agora, as equações de Friedmann podem ser reescritas como

$$H^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right) - \frac{k^2}{a^2}; \quad (3.39)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k^2}{a^2}. \quad (3.40)$$

Combinando essas relações, com as equações de Eüler-Lagrange podemos escrever a equação de movimento como

$$\begin{aligned} \square\phi + V_\phi &= 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + V_\phi; \end{aligned} \quad (3.41)$$

considerando que o campo escalar possui apenas a variável temporal,  $\phi = \phi(t)$ ,  $V_\phi$  representa a  $\frac{dV}{d\phi}$  e que  $g = \frac{-a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}$ , encontramos

$$\square\phi + V_\phi = \ddot{\phi} + \frac{1}{2g}\left(6\frac{\dot{a}}{a}g\dot{\phi}\right)\dot{\phi} + V_\phi. \quad (3.42)$$

Como  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  é o parâmetro de Hubble, a equação de movimento para este campo escalar é

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (3.43)$$

## 3.4 Formalismo de Primeira Ordem para um Campo Escalar

Uma possível descrição para a energia escura que permeia nosso Universo consiste em considerar um campo escalar de fundo no modelos cosmológico padrão, tal abordagem é denominada quintessência ou modelo  $\phi$ - Cold Dark Matter ( $\phi - CDM$ ). Podemos explorar soluções cosmológicas baseadas nas equações de movimento associadas à dinâmica desse campo escalar, procedimento este que de um modo geral se resume a resolver um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Uma possível simplificação na obtenção dessas soluções pode ser conseguida realizando uma redução de ordem dessas equações de movimento; uma técnica introduzida em modelos de energia escura por [26].

Da equação de movimento para o campo escalar temos que  $V = V(\phi)$ , que demonstra o potencial como uma função do campo escalar. Enquanto que nas equações de Einstein vemos um potencial em função do tempo,  $V(a) = \frac{3}{2}H^2 + \frac{1}{2}\dot{H} + \frac{k}{a^2}$ . Assim, para fazer essas duas abordagens equivalentes podemos também pensar no parâmetro de Hubble como uma função do campo escalar (iremos tratar o formalismo, para um espaço-tempo plano, para tanto assumiremos  $k = 0$ ). Logo, o ponto de partida na construção do formalismo de primeira ordem é assumir que o parâmetro de Hubble pode ser escrito como uma função do campo escalar, de tal maneira que

$$H = -W(\phi). \quad (3.44)$$

Substituindo a equação anterior na equação de Friedmann (3.40), determinamos que o campo escalar  $\phi$  deve obedecer a uma equação de primeira ordem

$$\dot{\phi} = W_\phi. \quad (3.45)$$

As equações (3.44) e (3.45), implicam em um potencial escalar com a seguinte forma

$$V = \frac{3}{2}W^2 - \frac{W_\phi^2}{2}. \quad (3.46)$$

Note que para o potencial acima, as soluções das equações (3.44) e (3.35), também resolvem o conjunto de equações (3.39), (3.40) e (3.43). Outras quantidades físicas relevantes na análise de modelos de quintessência, que também podem ser escritas em termos do



de modo que, podemos escrever (3.10) da seguinte forma

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

A partir dessa equação, podemos observar que existem outros campos presentes além do campo gravitacional, de modo que a ação completa da relatividade geral a ser considerada será uma ação dividida em duas partes, a gravitacional  $S_g$  e a de matéria  $S_m$ , [25], assim

$$\begin{aligned} S &= S_g + S_m \\ &= \int d^4x (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aplicando o princípio variacional na ação com relação à métrica  $g^{\mu\nu}$ , podemos definir o tensor energia-momento, satisfazendo a relação a seguir

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int d^4x \delta (\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) \\ &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \delta \sqrt{-g} \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} \right) \delta \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Lembrando que, o tensor energia-momento é definido como sendo

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.17)$$

De modo que, a equação (3.16) pode ser reescrita como

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

O resultado de  $\delta S_m = 0$ , mostra que a derivada covariante do tensor energia-momento é nula, devido as condições de contorno assumidas, o que representa uma condição de conservação, ou seja obtemos a equação de Einstein para o vácuo.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (3.19)$$

Agora, escreveremos a variação da ação total para um caso não-vácuo, como

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

superpotencial  $W$ , são

$$\rho = \frac{1}{2} (W_\phi^2 + 3W^2) \quad (3.47)$$

$$p = \frac{3}{2} (W_\phi^2 - W^2) \quad (3.48)$$

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{W_\phi^2 - W^2}{W_\phi^2 + W^2}. \quad (3.49)$$

Além disso, o chamado parâmetro de aceleração cósmica, é dado pela seguinte relação,

$$\bar{q} \equiv \frac{\ddot{a}a}{a^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \rightarrow \bar{q} = 1 - \left( \frac{W_\phi}{W} \right)^2. \quad (3.50)$$

# Capítulo 4

## Método de Extensão

Neste capítulo, mostraremos a possibilidade de construir modelos de dois campos a partir de modelos de um campo. É relevante salientar que, modelos de dois campos, no geral, são mais difíceis de serem resolvidos analiticamente.

Para isto, utilizaremos um modelo de um campo conectado a outro modelo de um campo, por meio do método de deformação [27] e, em seguida, acoplaremos ambos os modelos de forma não-trivial a fim de obtermos um modelo de dois campos. Para tanto, iremos fazer uso de um procedimento de extensão que permite a construção de novos modelos de dois campos escalares [28], [21].

### 4.1 Generalidades

No intuito de facilitar a compreensão, dos conceitos abordados neste capítulo primeiramente vamos examinar alguns aspectos relativos a modelos compostos por um e dois campos escalares reais no espaço-tempo de Minkowski. Iniciamos introduzindo a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - V(\phi, \chi) \quad (4.1)$$

Como trabalhamos com campos estáticos, utilizando o procedimento de minimização da ação, determinamos as equações de movimento para campos estáticos

$$\phi'' = \frac{\partial V}{\partial \phi}; \quad \chi'' = \frac{\partial V}{\partial \chi}. \quad (4.2)$$

Vamos definir que o potencial associado aos campos  $\phi$  e  $\chi$  é

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{1}{2}W_\chi^2. \quad (4.3)$$

Desse modo podemos escrever as equações de primeira ordem como

$$\phi' = \pm W_\phi e \quad \chi' = \pm W_\chi, \quad (4.4)$$

consequentemente, a energia BPS relativa as soluções de (4.4), e tal que

$$E_{BPS} = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))| \quad (4.5)$$

Uma maneira de determinar soluções analíticas para modelos de dois campos com essas características consiste em utilizar o chamado método do fator integrante para obter a denominada equação de órbita. Esse método, implica em reescrever as equações (4.4) como

$$\phi_\chi = \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}, \quad (4.6)$$

onde a expressão anterior é, em geral, não-linear e de difícil integração. Agora vamos apresentar algumas características do método de deformação para modelos de um campo escalar [27]. Consideremos as densidades de lagrangiana abaixo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (4.7)$$

e

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - U(\chi), \quad (4.8)$$

que está associada com o modelo deformado.

Podemos encontrar as soluções do tipo defeito resolvendo as equações de primeira ordem associadas a cada modelo, que são, respectivamente

$$\phi' = W_\phi(\phi); \quad \chi' = W_\chi(\chi). \quad (4.9)$$

Para conectar os dois modelos de um campo, vamos introduzir uma função inversível  $f(\chi)$ , a qual é denominada de função de deformação, consequentemente, a conexão entre  $\phi$  e  $\chi$  é tal que,

$$\phi = f(\chi); \quad \chi = f^{-1}(\phi). \quad (4.10)$$

O vínculo acima nos leva à

$$\phi' = \frac{df}{d\chi} \chi'. \quad (4.11)$$

Bem como à relação entre os potenciais  $U$  e  $V$ , cuja forma é

$$U(\chi) = \frac{V(\phi \rightarrow \chi)}{f_\chi^2}, \quad (4.12)$$

desta maneira, podemos ver

$$W_\phi(\phi \rightarrow \chi) = W_\chi = \frac{df}{d\chi} W_\chi(\chi). \quad (4.13)$$

## 4.2 Método de extensão de modelos para dois campos escalares

Utilizando as equações (4.11) e (4.13) podemos escrever

$$\frac{df}{d\chi} = \frac{\phi'(\chi)}{\chi'(\chi)} = \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\chi)}{W_\chi(\chi)}. \quad (4.14)$$

Cuja estrutura é similar a (4.6), sendo esta última associada a órbita de um modelo de dois campos. Desse modo, vamos utilizar a função de deformação e sua inversa para tentar reescrever (4.14) como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}. \quad (4.15)$$

Para tanto, devemos observar que as equações diferenciais de primeira ordem para o campo  $\phi$  podem ser escritas de três maneiras diferentes, mas equivalentes, ou seja

$$\phi' = W_\phi(\phi), \quad \phi' = W_\phi(\chi), \quad \phi' = W_\phi(\phi, \chi), \quad (4.16)$$

procedendo de maneira análoga para o campo  $\chi$

$$\chi' = W_\chi(\chi), \quad \chi' = W_\chi(\phi), \quad \chi' = W_\chi(\phi, \chi). \quad (4.17)$$

Logo, ao redefinirmos  $W_\phi(\phi)$  e  $W_\chi(\chi)$  como  $W_\phi \rightarrow a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi)$  e  $W_\chi \rightarrow b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi)$ , respectivamente, observamos que (4.14), pode

ser reescrita como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi} = \frac{a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi) + c_1 g(\chi) + c_2 g(\phi, \chi) + c_3 g(\phi)}{b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi)}, \quad (4.18)$$

onde, assumimos os seguintes parâmetros  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ , onde  $i = 1, 2, 3$ , de tal modo que  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ ,  $b_1 + b_2 + b_3 = 1$  e  $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ , e  $g(\chi) = g(\phi) = g(\phi, \chi)$  é, em princípio, uma função arbitrária, construída da mesma maneira que fizemos para escrever as três expressões para  $W_\phi$  e  $W_\chi$ . Para obtermos a forma específica de  $g$  usaremos um segundo vínculo, dado por

$$W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}. \quad (4.19)$$

Logo, substituindo  $W_\phi$  e  $W_\chi$  em (4.19), com os respectivos parâmetros e tomando suas derivadas, encontramos

$$b_2 W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3 W_{\chi\phi}(\phi) = a_1 W_{\phi\chi}(\chi) + a_2 W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + c_1 g_\chi(\chi) + c_2 g_\chi(\phi, \chi). \quad (4.20)$$

### 4.2.1 Exemplo: $\phi^4$ versus $\chi^4$

Consideremos o modelo descrito pelo campo escalar  $\phi$  do tipo  $\phi^4$ , ou seja, que obedece a seguinte equação de primeira ordem:

$$\phi' = W_\phi = a(1 - \phi^2), \quad (4.21)$$

Cuja solução é dada por

$$\phi(x) = \tanh(ax), \quad (4.22)$$

onde  $a$  é um parâmetro real e adimensional. Vamos agora deformar este modelo em um modelo  $\chi^4$  invertido utilizando a deformação,

$$\phi = f(\chi) = \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \quad (4.23)$$

na qual  $b$  é outro parâmetro real que controla a função de deformação. A equação de primeira ordem correspondente a esta deformação é escrita como

$$\chi' = W_\chi = -a\chi\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}. \quad (4.24)$$

A solução analítica correspondente à equação anterior é

$$\chi(x) = b \operatorname{sech}(ax). \quad (4.25)$$

Vamos agora, escrever  $W_\phi$  e  $W_\chi$  em três formas diferentes porém equivalentes, ou seja, como

$$\begin{aligned} W_\phi(\phi) &= a(1 - \phi^2), \\ W_\phi(\chi) &= \frac{a}{b^2} \chi^2, \\ W_\phi(\phi, \chi) &= \frac{a}{b} \chi \sqrt{1 - \phi^2}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned} W_\chi(\chi) &= -a\chi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \\ W_\chi(\phi) &= -ab\phi \sqrt{1 - \phi^2}, \\ W_\chi(\phi, \chi) &= -ab\chi\phi. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para evitar raízes na expressão final do potencial polinomial tomaremos  $a_2 = b_1 = b_3 = 0$  o que implica em  $a_1 + a_3 = 1$  e  $b_2 = 1$ , além de  $c_2 = 0$ , o que nos leva a  $c_1 + c_3 = 0$ . Substituindo tais ingredientes na equação de vínculo (4.20), ficamos com

$$g_\chi(\chi) = \frac{1}{c_1} W_{\chi\phi}(\phi, \chi) - a_1 W_{\phi\chi}(\chi). \quad (4.28)$$

Substituindo os superpotenciais correspondentes e derivadas na (4.28), a integramos para encontrar

$$g(\chi) = -\frac{1}{2} \frac{a}{c_1} \left(1 + 2 \frac{a_1}{b^2}\right) \chi^2, \quad (4.29)$$

esta última pode ser reescrita via função de deformação como

$$g(\phi) = -\frac{1}{2} \frac{ab^2}{c_1} \left(1 + 2 \frac{a_1}{b^2}\right) (1 - \phi^2). \quad (4.30)$$

Substituindo todos estes resultados nas formas de  $W_\phi$  e  $W_\chi$ , temos

$$W_\phi = -\frac{a}{2} \chi^2 + a \left(1 + \frac{b^2}{2}\right) (1 - \phi^2), \quad (4.31)$$

e

$$W_\chi = -a\chi\phi. \quad (4.32)$$

Por meio de integrações simples em relação aos campos  $\phi$  e  $\chi$ , podemos calcular a forma final do superpotencial efetivo para dois campos

$$W(\phi, \chi) = a \left( 1 + \frac{1}{2}b^2 \right) \left( \phi - \frac{1}{3}\phi^3 \right) - \frac{1}{2}a\phi\chi^2. \quad (4.33)$$

O modelo possui o seguinte par de soluções estáticas

$$\phi(x) = \tanh(ax), \quad \chi(x) = b \operatorname{sech}(ax). \quad (4.34)$$

Ao considerarmos que as constantes  $a$  e  $b$  podem ter as formas

$$a = 2r \quad e \quad b = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \quad (4.35)$$

com  $r \in (0, 1/2)$ , obtemos

$$W_r(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (4.36)$$

que é o modelo BNRT [20] visto no capítulo (2), e cuja a órbita é dada por

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \tanh(2rx) \\ \chi(x) &= \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \operatorname{sech}(2rx). \end{aligned} \quad (4.37)$$

### 4.3 Método de extensão para três campos escalares reais

Nesta seção, expandiremos o método de extensão para modelos representados por três campos escalares reais. Apesar de modelos descritos por três campos escalares reais serem estudados nos últimos anos por diversos pesquisadores, ainda são pouco os modelos analiticamente solúveis. Podemos citar que [29] usa o procedimento de deformação em soluções de defeitos e [30] investiga a presença de paredes de domínio nestes tipos de modelos. Em outro contexto, podemos mencionar a abordagem de um hexagonal de defeitos ser encontrado dentro de um defeito topológico investigada por [31] num modelo de três campos escalares reais.



## 4.4 Novo método

Para aplicar o método de extensão no contexto composto por três campos escalares, vamos tomar como ponto de partida a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i + \frac{W_{\phi_i}^2}{2} \right\}, \quad (4.38)$$

com  $i = 1, 2, 3$ ,  $\phi_1 = \phi$ ,  $\phi_2 = \chi$  e  $\phi_3 = \xi$ . Caso estes três campos sejam estáticos, ao aplicarmos o método BPS obtemos equações diferenciais de primeira ordem do tipo

$$\phi' = W_\phi; \quad \chi' = W_\chi; \quad \xi' = W_\xi. \quad (4.39)$$

A fim de determinar órbitas entre os campos, as equações anteriores podem ser escritas como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi, \xi)}{W_\chi(\phi, \chi, \xi)}, \quad (4.40)$$

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{W_\xi(\phi, \chi, \xi)}{W_\chi(\phi, \chi, \xi)}, \quad (4.41)$$

e

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi, \xi)}{W_\xi(\phi, \chi, \xi)}. \quad (4.42)$$

O método de extensão pode ser aplicado diretamente no contexto de modelos de três campos, se considerarmos três modelos estáticos de um campo conectados via funções de deformação, com equações diferenciais de primeira ordem que podem ser reescritas de formas diferentes e equivalentes. Assim, procedendo de maneira análoga a da seção (4.2), ficamos com os conjuntos de equações

$$\begin{aligned} \phi' &= W_\phi(\chi), \\ \phi' &= W_\phi(\phi, \chi), \\ \phi' &= W_\phi(\phi), \\ \phi' &= W_\phi(\xi), \\ \phi' &= W_\phi(\phi, \xi), \\ \phi' &= W_\phi(\chi, \xi), \\ \phi' &= W_\phi(\phi, \chi, \xi), \end{aligned} \quad (4.43)$$

além de,

$$\begin{aligned}
\chi' &= W_\chi(\chi), \\
\chi' &= W_\chi(\phi, \chi), \\
\chi' &= W_\chi(\phi), \\
\chi' &= W_\chi(\xi), \\
\chi' &= W_\chi(\chi, \xi), \\
\chi' &= W_\chi(\phi, \xi), \\
\chi' &= W_\chi(\phi, \chi, \xi).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

e

$$\begin{aligned}
\xi' &= W_\xi(\chi), \\
\xi' &= W_\xi(\phi, \chi), \\
\xi' &= W_\xi(\phi), \\
\xi' &= W_\xi(\xi), \\
\xi' &= W_\xi(\chi, \xi), \\
\xi' &= W_\xi(\phi, \xi), \\
\xi' &= W_\xi(\phi, \chi, \xi).
\end{aligned} \tag{4.45}$$

As equações anteriores permitem que  $W_\phi$ ,  $W_\chi$  e  $W_\xi$  sejam redefinidos como

$$\begin{aligned}
W_\phi \rightarrow & a_{11}W_\phi(\chi) + a_{12}W_\phi(\phi, \chi) + a_{13}W_\phi(\phi) + a_{14}W_\phi(\xi) + a_{15}W_\phi(\phi, \xi) \\
& + a_{16}W_\phi(\chi, \xi) + a_{17}W_\phi(\phi, \chi, \xi);
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
W_\chi \rightarrow & b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi) + b_4W_\chi(\xi) + b_5W_\chi(\phi, \xi) \\
& + b_6W_\chi(\chi, \xi) + b_7W_\chi(\phi, \chi, \xi),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

e

$$\begin{aligned}
W_\xi \rightarrow & a_{21}W_\xi(\chi) + a_{22}W_\xi(\phi, \chi) + a_{23}W_\xi(\phi) + a_{24}W_\xi(\xi) + a_{25}W_\xi(\phi, \xi) \\
& + a_{26}W_\xi(\chi, \xi) + a_{27}W_\xi(\phi, \chi, \xi).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Consequentemente, podemos reescrever as relações (4.40), (4.41) e (4.42) como

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{d\chi} = & \left( a_{11}W_\phi(\chi) + a_{12}W_\phi(\phi, \chi) + a_{13}W_\phi(\phi) + a_{14}W_\phi(\xi) + a_{15}W_\phi(\phi, \xi) + a_{16}W_\phi(\chi, \xi) \right. \\
& + a_{17}W_\phi(\phi, \chi, \xi) + c_{11}g(\chi) + c_{12}(\phi, \chi) + c_{13}g(\phi) + c_{14}g(\xi) + c_{15}g(\phi, \xi) + c_{16}g(\chi, \xi) + c_{17}g(\phi, \chi, \xi) \Big) \\
& \times \left( b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi) + b_4W_\chi(\xi) + b_5W_\chi(\phi, \xi) + b_6W_\chi(\chi, \xi) + b_7W_\chi(\phi, \chi, \xi) \right. \\
& \left. + c_{21}\tilde{f}(\chi) + c_{22}\tilde{f}(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}(\phi) + c_{24}\tilde{f}(\xi) + c_{25}\tilde{f}(\phi, \xi) + c_{26}\tilde{f}(\chi, \xi) + c_{27}\tilde{f}(\phi, \chi, \xi) \right)^{-1}, \quad (4.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\chi} = & \left( a_{21}W_\xi(\chi) + a_{22}W_\xi(\phi, \chi) + a_{23}W_\xi(\phi) + a_{24}W_\xi(\xi) + a_{25}W_\xi(\phi, \xi) + a_{26}W_\xi(\chi, \xi) \right. \\
& + a_{27}W_\xi(\phi, \chi, \xi) + c_{31}\tilde{g}(\chi) + c_{32}\tilde{g}(\phi, \chi) + c_{33}\tilde{g}(\phi) + c_{34}\tilde{g}(\xi) + c_{35}\tilde{g}(\phi, \xi) + c_{36}\tilde{g}(\chi, \xi) + c_{37}\tilde{g}(\phi, \chi, \xi) \Big) \\
& \times \left( b_1W_\chi(\chi) + b_2W_\chi(\phi, \chi) + b_3W_\chi(\phi) + b_4W_\chi(\xi) + b_5W_\chi(\phi, \xi) + b_6W_\chi(\chi, \xi) + b_7W_\chi(\phi, \chi, \xi) \right. \\
& \left. + c_{21}\tilde{f}(\chi) + c_{22}\tilde{f}(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}(\phi) + c_{24}\tilde{f}(\xi) + c_{25}\tilde{f}(\phi, \xi) + c_{26}\tilde{f}(\chi, \xi) + c_{27}\tilde{f}(\phi, \chi, \xi) \right)^{-1}, \quad (4.50)
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{d\xi} = & \left( a_{11}W_\phi(\chi) + a_{12}W_\phi(\phi, \chi) + a_{13}W_\phi(\phi) + a_{14}W_\phi(\xi) + a_{15}W_\phi(\phi, \xi) + a_{16}W_\phi(\chi, \rho) \right. \\
& + a_{17}W_\phi(\phi, \chi, \xi) + c_{11}g(\chi) + c_{12}(\phi, \chi) + c_{13}g(\phi) + c_{14}g(\xi) + c_{15}g(\phi, \xi) + c_{16}g(\chi, \xi) + c_{17}g(\phi, \chi, \xi) \Big) \\
& \times \left( a_{21}W_\xi(\chi) + a_{22}W_\xi(\phi, \chi) + a_{23}W_\xi(\phi) + a_{24}W_\xi(\xi) + a_{25}W_\xi(\phi, \xi) + a_{26}W_\xi(\chi, \xi) + a_{27}W_\xi(\phi, \chi, \xi) \right. \\
& \left. + c_{31}\tilde{g}(\chi) + c_{32}\tilde{g}(\phi, \chi) + c_{33}\tilde{g}(\phi) + c_{34}\tilde{g}(\xi) + c_{35}\tilde{g}(\phi, \xi) + c_{36}\tilde{g}(\chi, \xi) + c_{37}\tilde{g}(\phi, \chi, \xi) \right)^{-1}, \quad (4.51)
\end{aligned}$$

onde, introduzimos as constantes  $a_{1j}$ ,  $b_j$ ,  $c_{ij}$ , para  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, \dots, 7$  com os vínculos  $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} = 1$ ,  $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 = 1$ ,  $c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} + c_{17} = 0$  e  $c_{21} + c_{22} + c_{23} + c_{24} + c_{25} + c_{26} + c_{27} = 0$ .

Lembrando que,  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{g}$  e  $g$  são funções arbitrárias, que também podem assumir sete formas diferentes através das funções deformadoras e de suas inversas.

Para descobrirmos a forma de  $g$  ou  $\tilde{f}$  na equação (4.49), precisamos considerar um segundo vínculo, o qual surge devido ao fato do super potencial obedecer a propriedade,

$$W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}. \quad (4.52)$$

Tomando as respectivas derivadas das equações (4.46) e (4.47), encontramos

$$\begin{aligned}
& a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \xi) + a_{17}W_{\phi\chi}(\phi, \chi, \xi) + c_{11}g_{\chi}(\chi) + c_{12}g_{\chi}(\phi, \chi) \\
& + c_{16}g_{\chi}(\chi, \xi) + c_{17}g_{\chi}(\phi, \chi, \xi) = b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3W_{\chi\phi}(\phi) + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \xi) + b_7W_{\chi\phi}(\phi, \chi, \xi) \\
& + c_{22}\tilde{f}_{\phi}(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}_{\phi}(\phi) + c_{25}\tilde{f}_{\phi}(\phi, \xi) + c_{27}\tilde{f}_{\phi}(\phi, \chi, \xi).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Da mesma forma, para obter as funções  $\tilde{g}$  ou  $\tilde{f}$  na equação (4.50) devemos recorrer ao vínculo,

$$W_{\xi\chi} = W_{\chi\xi}, \tag{4.54}$$

o que nos leva a,

$$\begin{aligned}
& a_{21}W_{\xi\chi}(\chi) + a_{22}W_{\xi\chi}(\phi, \chi) + a_{26}W_{\xi\chi}(\chi, \xi) + a_{27}W_{\xi\chi}(\phi, \chi, \xi) + c_{31}\tilde{g}_{\chi}(\chi) + c_{32}\tilde{g}_{\chi}(\phi, \chi) \\
& + c_{36}\tilde{g}_{\chi}(\chi, \xi) + c_{37}\tilde{g}_{\chi}(\phi, \chi, \xi) = b_4W_{\chi\xi}(\xi) + b_5W_{\chi\xi}(\phi, \xi) + b_6W_{\chi\xi}(\chi, \xi) + b_7W_{\chi\xi}(\phi, \chi, \xi) \\
& + c_{24}\tilde{f}_{\xi}(\xi) + c_{25}\tilde{f}_{\xi}(\phi, \xi) + c_{26}\tilde{f}_{\xi}(\chi, \xi) + c_{27}\tilde{f}_{\xi}(\phi, \chi, \xi).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Por fim, para encontrarmos a função  $g$  ou  $\tilde{g}$  na equação (4.51), devemos utilizar o vínculo,

$$W_{\phi\xi} = W_{\xi\phi}, \tag{4.56}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
& a_{14}W_{\phi\xi}(\xi) + a_{15}W_{\phi\xi}(\phi, \xi) + a_{16}W_{\phi\xi}(\chi, \xi) + a_{17}W_{\phi\xi}(\phi, \chi, \xi) + c_{14}g_{\xi}(\xi) + c_{15}g_{\xi}(\phi, \xi) \\
& + c_{16}g_{\xi}(\chi, \xi) + c_{17}g_{\xi}(\phi, \chi, \xi) = a_{24}W_{\xi\phi}(\phi) + a_{25}W_{\xi\phi}(\phi, \xi) + a_{26}W_{\xi\phi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\xi\phi}(\phi, \chi, \xi) \\
& + c_{32}\tilde{g}_{\phi}(\phi, \chi) + c_{33}\tilde{g}_{\phi}(\phi) + c_{35}\tilde{g}_{\phi}(\phi, \xi) + c_{37}\tilde{g}_{\phi}(\phi, \chi, \xi).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Como podemos ver nas equações (4.53), (4.55) e (4.57) há duas possibilidades de encontrar as funções arbitrárias e conseqüentemente proceder para determinar o modelo efetivo. Apresentaremos nesse trabalho um dos possíveis procedimentos que podemos realizar para aplicar o método de extensão a modelos de três campos. Para tanto, vamos buscar por uma forma para a função  $g$  na equação (4.53), tomando os vínculos  $c_{22} = c_{23} = c_{25} = c_{27} = 0$ , implicando em

$$\begin{aligned}
& a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \xi) + a_{17}W_{\phi\chi}(\phi, \chi, \xi) + c_{11}g_{\chi}(\chi) \\
& + c_{12}g_{\chi}(\phi, \chi) + c_{16}g_{\chi}(\chi, \xi) + c_{17}g_{\chi}(\phi, \chi, \xi) = b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3W_{\chi\phi}(\phi) \\
& + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \xi) + b_7W_{\chi\phi}(\phi, \chi, \xi).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Assumindo o vínculo (4.55), a forma da função de conexão  $\tilde{f}$ , pode ser determinada se considerarmos que  $c_{31} = c_{32} = c_{36} = c_{37} = 0$ , nos levando a

$$\begin{aligned} a_{21}W_{\xi\chi}(\chi) + a_{22}W_{\xi\chi}(\xi, \chi) + a_{26}W_{\xi\chi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\xi\chi}(\phi, \chi, \xi) &= b_4W_{\chi\xi}(\xi) + b_5W_{\chi\xi}(\phi, \xi) \\ + b_6W_{\chi\xi}(\chi, \xi) + b_7W_{\chi\xi}(\phi, \chi, \xi) &+ c_{24}\tilde{f}_\xi(\xi) + c_{26}\tilde{f}_\xi(\chi, \xi), \end{aligned} \quad (4.59)$$

Para encontrar  $\tilde{g}$ , faremos  $c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{17} = 0$  na equação (4.57), logo

$$\begin{aligned} a_{14}W_{\phi\xi}(\xi) + a_{15}W_{\phi\xi}(\phi, \xi) + a_{16}W_{\phi\xi}(\chi, \xi) + a_{17}W_{\phi\xi}(\phi, \chi, \xi) &= a_{24}W_{\xi\phi}(\phi) + a_{25}W_{\xi\phi}(\phi, \xi) \\ + a_{26}W_{\xi\phi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\xi\phi}(\phi, \chi, \xi) &+ c_{33}\tilde{g}_\phi(\phi) + c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \xi), \end{aligned} \quad (4.60)$$

Assim, as equações (4.58), (4.59) e (4.60) nos permitem encontrar, respectivamente, as funções arbitrárias  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{g}$  e  $g$ .

Uma outra possibilidade baseia-se em encontrar a função  $\tilde{f}$  em (4.53), ao invés de  $g$ , deste modo, devemos tomar  $c_{11} + c_{12} + c_{16} + c_{17} = 0$  o que resulta em

$$\begin{aligned} a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \xi) + a_{17}W_{\phi\chi}(\phi, \chi, \xi) &= b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) \\ + b_3W_{\chi\phi}(\phi) + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \xi) + b_7W_{\chi\phi}(\phi, \chi, \xi) &+ c_{22}\tilde{f}_\phi(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}_\phi(\phi) + c_{25}\tilde{f}_\phi(\phi, \xi) \\ + c_{27}\tilde{f}_\phi(\phi, \chi, \xi). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Dessa maneira a equação (4.56) se torna

$$\begin{aligned} a_{14}W_{\phi\xi}(\xi) + a_{15}W_{\phi\xi}(\phi, \xi) + a_{16}W_{\phi\xi}(\chi, \xi) + a_{17}W_{\phi\xi}(\phi, \chi, \xi) &+ c_{14}g_\xi(\xi) + c_{15}g_\xi(\phi, \xi) \\ = a_{24}W_{\xi\phi}(\phi) + a_{25}W_{\xi\phi}(\phi, \xi) + a_{26}W_{\xi\phi}(\phi, \chi) &+ a_{27}W_{\xi\phi}(\phi, \chi, \xi) + c_{32}\tilde{g}_\phi(\phi, \chi) + c_{33}\tilde{g}_\phi(\phi) \\ + c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \xi) + c_{37}\tilde{g}_\phi(\phi, \chi, \xi), \end{aligned} \quad (4.62)$$

agora, para obtermos a função  $g$ , devemos tomar  $c_{32} = c_{33} = c_{35} = c_{37} = 0$ , implicando em

$$\begin{aligned} a_{14}W_{\phi\xi}(\xi) + a_{15}W_{\phi\xi}(\phi, \xi) + a_{16}W_{\phi\xi}(\chi, \xi) + a_{17}W_{\phi\xi}(\phi, \chi, \xi) &+ c_{14}g_\xi(\xi) + c_{15}g_\xi(\phi, \xi) \\ = a_{24}W_{\xi\phi}(\phi) + a_{25}W_{\xi\phi}(\phi, \xi) + a_{26}W_{\xi\phi}(\phi, \chi) &+ a_{27}W_{\xi\phi}(\phi, \chi, \xi), \end{aligned} \quad (4.63)$$

por conseguinte, a equação (4.55) passa a ser

$$\begin{aligned} a_{21}W_{\xi\chi}(\chi) + a_{22}W_{\xi\chi}(\xi, \chi) + a_{26}W_{\xi\chi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\xi\chi}(\phi, \chi, \xi) &+ c_{31}\tilde{g}_\chi(\chi) + c_{36}\tilde{g}_\chi(\chi, \xi) \\ = b_4W_{\chi\xi}(\xi) + b_5W_{\chi\xi}(\phi, \xi) + b_6W_{\chi\xi}(\chi, \xi) &+ b_7W_{\chi\xi}(\phi, \chi, \xi) + c_{24}\tilde{f}_\xi(\xi) + c_{25}\tilde{f}_\xi(\phi, \xi) \\ + c_{26}\tilde{f}_\xi(\chi, \xi) + c_{27}\tilde{f}_\xi(\phi, \chi, \xi), \end{aligned} \quad (4.64)$$

neste caso, para encontrarmos a função  $\tilde{g}$  devemos tomar  $c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{27} = 0$ , logo

$$\begin{aligned} & a_{21}W_{\xi\chi}(\chi) + a_{22}W_{\xi\chi}(\xi, \chi) + a_{26}W_{\xi\chi}(\phi, \chi) + a_{27}W_{\xi\chi}(\phi, \chi, \xi) + c_{31}\tilde{g}_\chi(\chi) + c_{36}\tilde{g}_\chi(\chi, \xi) \\ & = b_4W_{\chi\xi}(\xi) + b_5W_{\chi\xi}(\phi, \xi) + b_6W_{\chi\xi}(\chi, \xi) + b_7W_{\chi\xi}(\phi, \chi, \xi). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Portanto, a equação (4.47) passa a ser escrita como

$$\begin{aligned} & a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \xi) + a_{17}W_{\phi\chi}(\phi, \chi, \xi) = b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) \\ & + b_3W_{\chi\phi}(\phi) + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \xi) + b_7W_{\chi\phi}(\phi, \chi, \xi) + c_{22}\tilde{f}_\phi(\phi, \chi) + c_{23}\tilde{f}_\phi(\phi). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Vemos que nesta possibilidade as funções de contra peso podem ser obtidas a partir das equações (4.63), (4.64) e (4.65).

## 4.5 Exemplo

Nesta seção, iremos demonstrar a aplicabilidade desse método através de um exemplo.

### 4.5.1 $\phi^4$ , $\chi^4$ e $\xi^4$

Este exemplo consiste no acoplamento entre um modelo  $\phi^4$ , com dois  $\chi^4$  e  $\xi^4$  invertidos. As equações de primeira ordem associadas a estes modelos são

$$W_\phi = a(1 - \phi^2), \quad W_\chi = -a\chi\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \quad W_\xi = -a\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}}, \quad (4.67)$$

e suas respectivas soluções, são escritas como

$$\phi = \tanh(ax), \quad \chi = b\operatorname{sech}(ax), \quad \xi = b\operatorname{sech}(ax), \quad (4.68)$$

onde  $a$  é um parâmetro real e adimensional.

As funções deformadoras que conectam tais modelos possuem as seguinte formas

$$\phi = f(\chi) = \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}} \Rightarrow \chi = b\sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.69)$$

$$\phi = f(\xi) = \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}} \Rightarrow \xi = b\sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.70)$$

$$\chi = f(\xi) = \xi \Rightarrow \xi = \chi. \quad (4.71)$$

Agora, utilizaremos as funções de deformação e suas inversas para reescrever  $W_\phi$ ,  $W_\chi$  e  $W_\xi$ , o que nos leva à

$$\begin{aligned} W_\phi(\chi) &= \frac{a\chi^2}{b^2}, \\ W_\phi(\phi, \chi) &= a \left( 1 - \phi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}} \right), \\ W_\phi(\phi) &= a(1 - \phi^2), \\ W_\phi(\xi) &= \frac{a\xi^2}{b^2}, \\ W_\phi(\phi, \xi) &= a \left( 1 - \phi \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}} \right), \\ W_\phi(\chi, \xi) &= a \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}} \right), \\ W_\phi(\phi, \chi, \xi) &= a \left( 1 - \phi \sqrt{1 - \frac{\chi\xi}{b^2}} \right). \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} W_\chi(\chi) &= -a\chi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \\ W_\chi(\phi, \chi) &= -a\chi\phi, \\ W_\chi(\phi) &= -ab\phi \sqrt{1 - \phi^2}, \\ W_\chi(\xi) &= -a\rho \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}}, \\ W_\chi(\phi, \xi) &= -ab\sqrt{1 - \phi^2} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}}, \\ W_\chi(\chi, \xi) &= -a\xi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \\ W_\chi(\phi, \chi, \xi) &= -ab\sqrt{1 - \phi^2} \sqrt{1 - \frac{\chi\xi}{b^2}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

e

$$\begin{aligned} W_\xi(\chi) &= -a\chi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \\ W_\xi(\phi, \chi) &= -ab\sqrt{1 - \phi^2} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}}, \\ W_\xi(\phi) &= -ab\phi \sqrt{1 - \phi^2}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned}
W_\xi(\xi) &= -a\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}}, \\
W_\xi(\phi, \rho) &= -a\xi\phi, \\
W_\xi(\chi, \xi) &= -a\chi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}}, \\
W_\xi(\phi, \chi, \xi) &= -ab\sqrt{1 - \phi^2}\sqrt{1 - \frac{\xi\chi}{b^2}}.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

De modo a evitar raízes nos potenciais polinomiais, vamos tomar  $a_{12} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = 0$ ,  $b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0$  e  $a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{26} = a_{27} = 0$ , resultando em  $a_{11} + a_{13} + a_{14} = 1$ ,  $b_2 = 1$  e  $a_{25} = 1$ . Deste modo a equação (4.58) pode ser reescrita como

$$a_{11}\frac{2a\chi}{b^2} + c_{11}g_\chi(\chi) + c_{12}g_\chi(\phi, \chi) = -a\chi. \tag{4.76}$$

Fazendo  $c_{12} = 0$ , que implica em  $c_{11} = -c_{13}$ , na equação acima e integrando-a em relação a  $\chi$ , encontramos  $g(\chi)$

$$g(\chi) = -\frac{a\chi^2}{c_{11}}\left(\frac{1}{2} + \frac{a_{11}}{b^2}\right). \tag{4.77}$$

Utilizando a função de deformação (4.69), a equação (4.77) passa a ser

$$g(\phi) = -\frac{a(1 - \phi^2)}{c_{11}}\left(\frac{b^2}{2} + a_{11}\right). \tag{4.78}$$

Substituindo os ingredientes anteriores em (4.46), obtemos

$$W_\phi = -\frac{1}{2}a[-2 + \rho^2 + 2\phi^2 + 2\phi^2 + 2b^2(-1 + \phi^2) + \chi^2]. \tag{4.79}$$

Por outro lado, se substituirmos os novos vínculos na equação (4.59), podemos verificar que  $\tilde{f}(\xi) = 0$ . E assim,  $W_\chi$  presente na equação (4.47), será dado por

$$W_\chi = -a\chi\phi. \tag{4.80}$$

Agora, considerando as diferentes formas de  $W_\phi$  e  $W_\xi$  assim como os novos vínculos na equação (4.60), podemos reescreve-la da seguinte maneira

$$a_{14}\frac{2a\xi}{b^2} = -a\xi + c_{33}\tilde{g}_\phi(\phi) + c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \xi), \tag{4.81}$$



ao trabalharmos com  $c_{33} = 0$ , observamos que

$$c_{35}\tilde{g}_\phi(\phi, \xi) = a_{14}\frac{2a\xi}{b^2} + a\xi. \quad (4.82)$$

Neste caso vamos considerar  $a_{14} = -b^2/2$ , com o intuito de tornar nula a função  $\tilde{g}$  (tal valor de  $\tilde{g}$  é consequência dos valores assumidos para as constantes  $c_{3_j}$  com  $j = 1, \dots, 7$ ). Então, substituindo todos esses ingredientes na forma do  $W_\xi$  visto na equação (4.48), obtemos

$$W_\xi = -a\phi\xi \quad (4.83)$$

Finalmente integrando as equações (4.79), (4.80) e (4.83) podemos obter o superpotencial do modelo efetivo, cuja forma é

$$W(\phi, \chi, \xi) = (1 + b^2)a \left( \phi - \frac{\phi^3}{3} \right) - \frac{a}{2}\phi(\chi^2 + \xi^2). \quad (4.84)$$

Um caso particularmente interessante ocorre quando

$$a = 2r, \quad e \quad b = \sqrt{\frac{1}{2r} - 1} \quad (4.85)$$

com  $r \in (0, 1/2)$ , nos levando a

$$W(\phi, \chi, \xi) = \left( \phi - \frac{\phi^3}{3} \right) - r\phi(\chi^2 + \xi^2), \quad (4.86)$$

com soluções analíticas do tipo

$$\phi = \tanh(2rx), \quad \chi = \sqrt{\frac{1}{2r} - 1} \operatorname{sech}(2rx), \quad \xi = \sqrt{\frac{1}{2r} - 1} \operatorname{sech}(2rx). \quad (4.87)$$

Este é um modelo efetivo para três campos escalares que já se encontra na literatura, para mais detalhes ver [29] e [30]. Podemos salientar ainda, que está é a primeira vez que tal modelo é obtido através de um método como o relatado acima.

# Capítulo 5

## Defeitos Topológicos em Modelos de Quintessência

Neste capítulo, iremos aplicar o método desenvolvido no capítulo anterior, ao formalismo de primeira ordem para cosmologia FRW em um espaço-tempo plano, apresentado no capítulo 3. A ideia é gerar uma descrição possível para a atual expansão acelerada do Universo por meio da dinâmica de quintessência, que consiste em analisar cenários cosmológicos impulsionados por campos escalares, conforme pode ser visto em [21]. Apresentaremos algumas características interessantes sobre o cenário cosmológico obtidas das soluções de um modelo de três campos escalares efetivos como já mencionado em [29], em um espaço-tempo plano.

### 5.1 Formalismo de Primeira Ordem para Modelos de Três Campos

Para o caso de três campos escalares, a densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + V(\phi, \mu, \xi), \quad (5.1)$$

ao acoplarmos tal lagrangiana na ação de Einstein-Hilbert, podemos verificar que

as equações de movimento relativa aos campos escalares são

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi} = 0; \quad (5.2)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + V_{\chi} = 0; \quad (5.3)$$

$$\ddot{\xi} + 3H\dot{\xi} + V_{\xi} = 0, \quad (5.4)$$

se  $\phi = \phi(t)$ ,  $\chi = \chi(t)$  e  $\xi = \xi(t)$ . Consequentemente, a densidade de energia e a pressão podem ser escritas como

$$\rho = T_{00} = \dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2 + \dot{\xi}^2 + V(\phi, \chi, \xi) \quad (5.5)$$

e

$$p = T_{ii} = \dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2 + \dot{\xi}^2 - V(\phi, \chi, \xi), \quad (5.6)$$

enquanto que o conjunto das equações de movimento de Friedmann são dadas por

$$H^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\dot{\chi}^2}{2} + \frac{\dot{\xi}^2}{2} + V(\phi, \chi, \xi) \right); \quad (5.7)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2 - \dot{\xi}^2. \quad (5.8)$$

Através da definição de  $H = -W(\phi, \chi, \xi)$ , obtêm-se diretamente as equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\phi} = W_{\phi}(\phi, \chi, \xi); \quad \dot{\chi} = W_{\chi}(\phi, \chi, \xi); \quad \dot{\xi} = W_{\xi}(\phi, \chi, \xi). \quad (5.9)$$

Desse modo, podemos escrever o potencial em termos dos superpotenciais, como segue

$$V(\phi, \chi, \xi) = \frac{3}{2}W^2 - \frac{W_{\phi}^2}{2} - \frac{W_{\chi}^2}{2} - \frac{W_{\xi}^2}{2}. \quad (5.10)$$

Para resolver as equações (5.9), usaremos o método de fator integrante reescrevendo as equações diferenciais de primeira ordem analogamente a (??), (4.39) e (4.40). Em seguida, para chegarmos ao superpotencial de um modelo analítico composto por três campos escalares aplicaremos o método de extensão apresentado na seção (4.4) deste trabalho.

## 5.2 Modelo Efetivo - Exemplo

Este exemplo foi construído combinando três modelos idênticos  $\phi^4$ ,  $\chi^4$  e  $\xi^4$ , cujas equações de primeira ordem são dadas por

$$\dot{\phi} = W_\phi = a_0(1 - \phi^2), \quad \dot{\chi} = W_\chi = a_0(1 - \chi^2), \quad \dot{\xi} = W_\xi = a_0(1 - \xi^2), \quad (5.11)$$

com as respectivas soluções analíticas

$$\phi = \chi = \xi = a_0 \tanh(a_0 t + b), \quad (5.12)$$

onde  $a_0$  e  $b$  são constantes reais

Feito isso, utilizaremos as funções de deformação e suas inversas para reescrever  $W_\phi$ ,  $W_\chi$  e  $W_\xi$  de sete maneiras diferentes mas equivalentes, o que nos dá

$$\begin{aligned} W_\phi(\chi) &= a_0(1 - \chi^2), \\ W_\phi(\phi, \chi) &= a_0(1 - \chi)(1 + \phi^2), \\ W_\phi(\phi) &= a_0(1 - \phi^2), \\ W_\phi(\xi) &= a_0(1 - \chi^2), \\ W_\phi(\phi, \xi) &= a_0(1 - \xi)(1 + \phi^2), \\ W_\phi(\chi, \xi) &= a_0(1 - \chi)(1 + \xi^2), \\ W_\phi(\phi, \chi, \xi) &= a_0(1 - \chi) \left(1 + \frac{\xi}{2} + \frac{\phi}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} W_\chi(\chi) &= a_0(1 - \chi^2), \\ W_\chi(\phi, \chi) &= a_0(1 - \chi)(1 + \phi^2), \\ W_\chi(\phi) &= a_0(1 - \phi^2), \\ W_\chi(\xi) &= a_0(1 - \chi^2), \\ W_\chi(\phi, \xi) &= a_0(1 - \xi)(1 + \phi^2), \\ W_\chi(\chi, \xi) &= a_0(1 - \chi)(1 + \xi^2), \\ W_\chi(\phi, \chi, \xi) &= a_0(1 - \chi) \left(1 + \frac{\xi}{2} + \frac{\phi}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

e

$$\begin{aligned}
W_\xi(\chi) &= a_0(1 - \chi^2), \\
W_\xi(\phi, \chi) &= a_0(1 - \chi)(1 + \phi^2), \\
W_\xi(\phi) &= a_0(1 - \phi^2), \\
W_\xi(\xi) &= a_0(1 - \chi^2), \\
W_\xi(\phi, \xi) &= a_0(1 - \xi)(1 + \phi^2), \\
W_\xi(\chi, \xi) &= a_0(1 - \chi)(1 + \xi^2), \\
W_\xi(\phi, \chi, \xi) &= a_0(1 - \chi)\left(1 + \frac{\xi}{2} + \frac{\phi}{2}\right). \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Para este caso, iremos substituir os seguintes vínculos  $a_{17} = c_{11} = c_{12} = c_{13} = c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{22} = c_{23} = c_{25} = c_{27} = b_7 = 0$ , na equação (4.53), de forma a obtermos

$$\begin{aligned}
a_{11}W_{\phi\chi}(\chi) + a_{12}W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + a_{16}W_{\phi\chi}(\chi, \xi) + c_{17}g_\chi(\phi, \chi, \xi) &= b_2W_{\chi\phi}(\phi, \chi) \tag{5.16} \\
+ b_3W_{\chi\phi}(\phi) + b_5W_{\chi\phi}(\phi, \xi).
\end{aligned}$$

Substituindo as relações vistas nas equações (5.13) e (5.14) em (5.17), obtemos

$$c_{17}g_\chi(\phi, \chi, \xi) = a_0b_2(1 - \chi) - 2a_0b_3\phi + ab_5(1 - \xi) + a_0a_{16}(1 + \xi) + 2a_0a_{11}\chi + a_0a_{12}(1 + \phi), \tag{5.17}$$

integrando a relação anterior em respeito a  $\chi$ , temos que

$$\begin{aligned}
c_{17}g(\phi, \chi, \xi) &= a_0b_2\left(\chi - \frac{\chi^2}{2}\right) - 2a_0b_3\phi\chi + a_0b_5(1 - \xi)\chi + a_0a_{16}(1 + \xi)\chi \tag{5.18} \\
&+ 2a_0a_{11}\frac{\chi^2}{2} + a_0a_{12}(1 + \phi)\chi,
\end{aligned}$$

Usando a deformação, podemos reescrever  $g(\phi, \chi, \xi)$  como

$$c_{17}g(\phi) = a_0b_2\left(\phi - \frac{\phi^2}{2}\right) - 2a_0b_3\phi^2 + a_0b_5(1 - \phi)\phi + a_0a_{16}(1 + \phi)\phi + 2a_0a_{11}\frac{\phi^2}{2} + a_0a_{12}(1 + \phi)\phi. \tag{5.19}$$

Com todos esses resultados em mãos, é possível reescrever (4.46) como

$$\begin{aligned}
W_\phi &= a_0 - a_0(a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{16})\phi^2 - a_0a_{16}\phi - a_0a_{14}\xi^2 + a_0a_{15}\phi - a_0a_{15}\xi(1 + \phi) \\
&+ a_0a_{16}\chi + a_0b_2\left(\chi - \frac{\chi^2}{2}\right) - 2a_0b_3\phi\chi + a_0b_5(1 - \xi)\chi - a_0b_2\left(\phi - \frac{\phi^2}{2}\right) + 2a_0b_3\phi. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Aplicaremos o mesmo procedimento para encontrar  $\tilde{g}$  na equação (??), admitindo os vínculos  $a_{27} = c_{32} = c_{33} = c_{35} = 0$ , ficamos com

$$\begin{aligned}
-a_0a_{15}(1 + \phi) + a_0a_{16}(1 - \chi) - 2a_0a_{14}\xi &= a_0a_{22}(1 - \chi) \tag{5.21} \\
-a_0a_{23}\phi + a_0a_{25}(1 - \xi) + c_{37}\tilde{g}_\phi(\phi, \chi, \xi) + a_0b_5\chi - a_0a_{16}\chi,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} c_{37}\tilde{g}_\phi(\phi, \chi, \xi) &= -a_0a_{15}(1 + \phi) + a_0a_{16}(1 - \chi) - 2a_0a_{16}\xi - a_0a_{22}(1 - \chi) \quad (5.22) \\ &\quad + 2a_0a_{23}\phi - a_0a_{25}(1 - \xi) + a_0a_{16}\xi - a_0b_5\chi. \end{aligned}$$

Integrando a equação anterior com relação a  $\phi$ , temos

$$\begin{aligned} c_{37}\tilde{g}(\phi, \chi, \xi) &= -a_0a_{15}\left(\phi + \frac{\phi^2}{2}\right) + a_0a_{16}(1 - \chi) - 2a_0a_{14}\xi\phi - a_0a_{22}(1 - \chi)\phi + a_0a_{23}\phi^2 \\ &\quad - a_0a_{25}(1 - \xi)\phi + a_0a_{16}\chi\phi - a_0b_5\chi\phi, \quad (5.23) \end{aligned}$$

novamente, podemos utilizar a função de deformação para escrever a equação anterior como

$$\begin{aligned} c_{37}\tilde{g}(\xi) &= -a_0a_{15}\left(\xi + \frac{\xi^2}{2}\right) + a_0a_{16}(1 - \xi) - 2a_0a_{14}\xi^2 - a_0a_{22}(1 - \xi)\xi + a_0a_{23}\xi^2 \\ &\quad - a_0a_{25}(1 - \xi)\xi + a_0a_{16}\xi^2 - a_0b_5\xi^2. \quad (5.24) \end{aligned}$$

Sendo assim, (4.46), torna-se

$$\begin{aligned} W_\xi &= a_0 - a_0a_{21}\chi^2 - a_0(a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25})\xi^2 - a_0a_{26}\xi\chi - a_0a_{22}\chi \\ &\quad + a_0a_{22}\xi - a_0a_{26}\chi + a_0a_{26}\xi - a_0a_{15}\left(\phi + \frac{\phi^2}{2}\right) + a_0a_{16}\phi - 2a_0a_{14}\xi\chi - a_0b_5\chi\phi \\ &\quad + a_0a_{15}\left(\xi + \frac{\xi^2}{2}\right) - a_0a_{16}\xi + 2a_0a_{14}\xi^2 + a_0b_5\xi^2. \quad (5.25) \end{aligned}$$

Por fim, realizando mais uma vez processo análogo ao cálculo de  $W_\phi$  e  $W_\xi$  podemos determinar a forma de  $W_\chi$  integrado a equação (4.52), o que nos leva à

$$c_{26}\tilde{f}(\chi, \xi) = -2a_0a_{21}\chi\xi - a_0a_{22}\xi - a_0a_{26}\left(\xi + \frac{\xi^2}{2}\right) + 2a_0b_4\frac{\xi^2}{2} + a_0b_5\xi - a_0b_6(1 - \chi)\xi, \quad (5.26)$$

esta última é reescrita via função de deformação como

$$c_{26}\tilde{f}(\chi) = -2a_0a_{21}\chi^2 - a_0a_{22}\chi - a_0a_{26}\left(\chi + \frac{\chi^2}{2}\right) + 2a_0b_4\frac{\chi^2}{2} + a_0b_5\chi - a_0b_6(1 - \chi)\chi. \quad (5.27)$$

Portanto, substituindo as equações (5.26) e (5.27) junto com os demais ingredientes contidos na equação (??), em (4.45), obtemos

$$\begin{aligned} W_\chi &= a_0 - a_0(b_1 + b_4 + b_6)\chi^2 - a_0b_2\chi\phi - a_0b_3\phi^3 - a_0b_5\xi\phi - a_0b_2\chi \\ &\quad a_0b_2\phi + a_0b_5\phi - a_0b_5\chi - 2a_0a_{21}\chi\xi - a_0a_{22}\xi - a_0a_{26}\left(\xi + \frac{\xi^2}{2}\right) + 2a_0a_{21}\chi^2 \\ &\quad a_0a_{22}\chi + a_0a_{26}\left(\chi + \frac{\chi^2}{2}\right). \quad (5.28) \end{aligned}$$

Desse modo, com auxílio das equações (5.20), (5.25) e (5.28), determinamos um superpotencial efetivo composto por três campos escalares dado por

$$\begin{aligned}
W = & a_0(\phi + \chi + \xi) - a_0(a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{16} - 2b_3 - b_2 - b_5)\frac{\phi}{3} \\
& - a_0(a_{16} + a_{15} + b_2 + b_5)\frac{\phi^2}{2} - a_0(b_1 + b_4 + b_6 - 2a_{21} - \frac{a_{26}}{2})\frac{\chi^3}{3} - a_0(b_2 + b_5 - a_{22} - a_{26})\frac{\chi^2}{2} \\
& - a_0(a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} - \frac{a_{15}}{2} - 2a_{14} - b_5)\frac{\xi^3}{3} - a_0(a_{16} - a_{22} - a_{26} - a_{15})\frac{\xi^2}{2} - a_0a_{21}\chi^2\xi \\
& - a_0a_{26}\left(\xi + \frac{\xi^2}{2}\right)\chi - a_0a_{22}\chi\xi - a_0a_{15}\left(\phi + \frac{\phi^2}{2}\right)\xi \\
& + a_0a_{16}\phi\xi - a_0a_{14}\xi^2\phi + a_0b_2\left(\chi - \frac{\chi^2}{2}\right)\phi - a_0b_3\phi^2\chi + a_0b_5(1 - \xi)\chi\phi. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Agora é possível substituir  $W$  obtido na equação anterior, em conjunto com as soluções analíticas do modelo efetivo vistas em (5.12), no formalismo de quintessência de primeira ordem, descrito no final do Capítulo 3. Tal procedimento nos permitirá calcular o parâmetro de Hubble  $H(t)$ , o fator de escala  $a(t)$ , o parâmetro de aceleração  $\bar{q}(t)$ , o parâmetro da equação de estado  $\omega(t)$ , a densidade  $\rho(t)$  e a pressão  $p(t)$ . Deste modo, após algumas manipulações algébricas e simplificações diretas, vemos que o parâmetro de Hubble é dado por

$$H(t) = a_0 \tanh(a_0 t + b)(-3 + \tanh(a_0 t + b)^2) + c, \tag{5.30}$$

já o fator de escala possui a seguinte estrutura

$$a(t) = \exp^{ct + \frac{1}{2}\text{sech}(a_0 t + b)^2} \text{sech}(a_0 t + b)^2. \tag{5.31}$$

A partir dos resultados anteriores, determinamos o parâmetro de aceleração

$$\begin{aligned}
\bar{q} = & \frac{3}{2}(a_0 + c + a_0 \tanh(a_0 t + b)(-3 + (-1 + \tanh(a_0 t + b)))) \\
& (-a_0 + c + a_0 \tanh(a_0 t + b))(-3 + \tanh(a_0 t + b) + \tanh(a_0 t + b)^2), \tag{5.32}
\end{aligned}$$

bem como a pressão relativa ao campo escalar

$$\begin{aligned}
p = & \frac{3}{2}(a_0^2 \text{sech}(a_0 t + b)^4 - (a_0 + c + a_0 \tanh(a_0 t + b)(-3 + (-1 + \tanh(a_0 t + b))) \\
& \times \tanh(a_0 t + b)) + ca_0(\tanh(a_0 t + b) - 1)(-3 + \tanh(a_0 t + b)) + (\tanh(a_0 t + b)^2)), \tag{5.33}
\end{aligned}$$

a densidade do campo

$$\rho = \frac{3}{8}(-2a_0c + a_0 \text{sech}(a_0 t + b)^3(3 \sinh(a_0 t + b) + \sinh(3(a_0 t + b))))^2, \tag{5.34}$$

e a partir das duas últimas o parâmetro da equação de estado, cuja forma é

$$\omega = -1 + (8a_0^2 \cosh(a_0t + b)^2)(-2c \cosh(a_0t + b)^3 + a_0(3 \sinh(a_0t + b) + \sinh(3(a_0t + b))))^{-2}. \quad (5.35)$$

A seguir mostraremos que nosso modelo apresenta consistência física e cosmológica. O objetivo consiste em analisar as Figs. (5.1-5.3) a partir do ponto de vista do comportamento dos parâmetros cosmológicos previsto pelo cenário cosmológico  $\Lambda - CDM$ . Os estados dos modelos inflacionários no início da história do Universo, mostram que sua expansão seria acelerada. A partir das equações de Friedmann padrão, verifica-se que isto acontece se o Universo for dominado por um componente com  $\omega < -\frac{1}{3}$ . De acordo com cosmologia padrão, durante a inflação, a densidade de energia do Universo foi dominada por uma constante, por exemplo,  $\Lambda$ , de tal maneira que as equações Friedmann podem ser lidas como  $H_i^2 \sim \Lambda_i$ . Sendo assim, percebemos que o parâmetro de Hubble foi, então, constante durante a era inflacionária. Na verdade, pode-se escrever, para a inflação,  $a \sim e^{H_i t}$

Como  $H \sim t^{-1}$ , com  $t$  sendo o tempo de Hubble,  $H(t)$  deve diminuir com o tempo, conforme observado na Figura 5.1. Os valores dos parâmetros do Hubble previstos a partir do nosso modelo de fato permanecem aproximadamente constante durante um pequeno período de tempo após o Big Bang, de acordo com o cenário inflacionário.

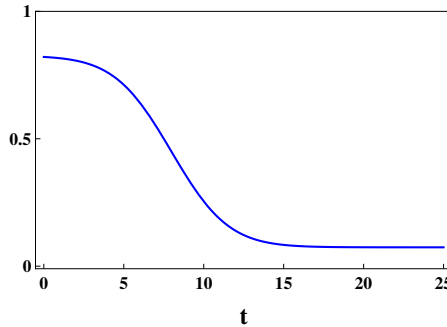


Figura 5.1: Evolução de  $H(t)$ , para  $c = 0,45$ ,  $b = -1,5$  e  $a = 0,188$

Da cosmologia padrão, é bem sabido que para valores elevados de tempo,  $H$  é proporcional à  $\rho_\Lambda$  (a densidade da constante cosmológica), que é, de fato, uma constante. Portanto, a recente aceleração cósmica que o nosso Universo está passando, pode ser descrita por um fator de escala, que se desenvolve como  $e^{H_0 t}$ , com o comportamento constante de  $H$  sendo previsto na Figura 5.3 para valores elevados de tempo.



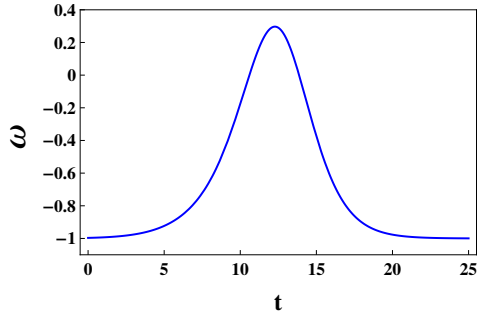


Figura 5.2: Evolução de  $\omega$ , para  $c = 0,45$ ,  $b = -1,5$  e  $a = 0,188$

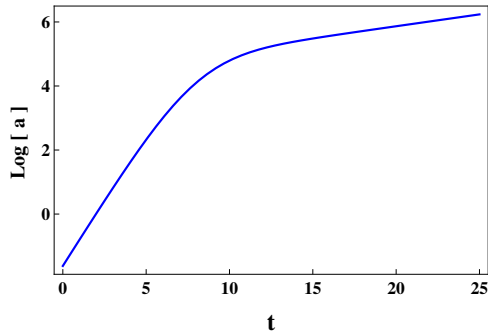


Figura 5.3: Avaliação do fator de escala, para  $c = 0,45$ ,  $b = -1,5$  e  $a = 0,188$

Na cosmologia derivada da relatividade geral, existem três regimes na qual a dinâmica do Universo é dominada respectivamente pela radiação, a matéria e a constante cosmológica: o cenário da questão não-relativística, relacionado para  $\omega = 1/3$ ; o cenário de matéria não-relativista, relacionadas com  $\omega = 0$ ; e o cenário de vácuo quântico, correspondendo a  $\omega = -1$ . Na Fig. 5.2, temos representado a evolução do parâmetro  $\omega$  com o tempo. Ao analisá-lo, podemos ver que para valores pequenos de tempo,  $\omega \sim -1$ . Isto está de acordo com algumas restrições que foram colocadas as equações de movimento inflacionistas recentemente. Depois de passada a inflação,  $\omega$  suavemente evolui para  $\sim 1/3$ . Este é o valor máximo que a equação de estado deve assumir durante a evolução do Universo. Além disso,  $1/3$  é precisamente o valor da equação de estado, que descreve a era dominada por radiação do Universo, ou seja, o modelo prevê uma transição suave de uma fase inflacionária para uma era dominada por radiação.

A sua segunda fase de expansão acelerada justifica tal evolução de  $\omega$ , uma vez que, um Universo acelerado é descrito por um parâmetro de equação de estado negativo, espera-se que durante toda a evolução do Universo, o valor de  $\omega$ , tenha valor próximo à

-1, o que está relacionado com a primeira fase de inflação, tendendo para uma fase de desaceleração, e em seguida retornando a uma fase acelerada (atual fase dominada pela energia escura).

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação estudamos os fundamentos básicos da cosmologia padrão, apresentados nos capítulos 2, 3 e 4. No capítulo 2, mostramos uma revisão detalhada sobre defeitos topológicos em teorias de campos escalares em (1+1) dimensões. Nesta revisão demonstramos conceitos fundamentais sobre estas estruturas, bem como o método Bogomol'nyi de modo a obter as equações BPS. Também destacamos a importância das condições de contorno na formação de defeitos, que tem uma importância física fundamental, a finitude da energia. Nesta abordagem, usamos o conceito de carga topológica para caracterizar defeitos topológico e não topológico. Finalizamos este capítulo determinando estas soluções também, para situações com dois campos escalares reais. Para este caso, verificamos que, o problema matemático relacionado à integrabilidade das equações de movimento é muito mais difícil do que no caso de um campo, por se trabalhar com equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas.

No capítulo 3, apresentamos uma breve discussão sobre os fundamentos básicos da cosmologia padrão, incluindo as soluções para as equações de Einstein no formalismo FRW e as equações de Friedmann. Ainda mostramos que é possível estabelecer um formalismo de primeira ordem em cosmologia com campos escalares, representando a energia escura que permeia o Universo com uma pressão negativa.

No quarto capítulo abordamos o método de deformação como alternativa para resolver as equações de movimento para situações de dois campos escalares. Este método permite que, através de determinadas escolhas de parâmetros, obtenhamos soluções estáticas em mais de um setor topológico. Em sequência, apresentamos um procedimento para gerar um novo modelo de dois campos, a partir de dois modelos de um campo, co-

nectados via método de deformação. Em seguida, esses dois modelos de um campo, são acoplados de forma não trivial, gerando modelo efetivo de dois campos. Para finalizar este capítulo, adaptamos o método de extensão, para obtenção de um modelo de três campos. Tal procedimento nos possibilitou determinar um modelo de três campos acoplados. É válido salientar que é a primeira vez que um modelo de três campos é determinado via esta abordagem.

É comum vermos o formalismo de primeira ordem com base em um modelo de campo escalar sendo usado para descrever cenários de quintessência, ou seja, descrever a expansão acelerada do Universo. No presente trabalho usamos esse formalismo para o caso de três campos, uma vez que, modelos analíticos deste tipo são escassos na literatura. No intuito de buscar por novos modelos analíticos que envolvam três campos acoplados, utilizamos uma nova versão do método de extensão de modelos proposto em [28]. Para tanto, foi necessário adaptar o método de extensão no contexto de três campos escalares. Tal adaptação mostrou-se bastante eficaz, já que conseguimos reproduzir um modelo analítico de três campos conhecido na literatura e também geramos um novo modelo que foi aplicado ao cenário de quintessência.

A análise dos parâmetros cosmológicos obtidos através do nosso modelo de três campos, revelou que tais parâmetros estão em consonância com os resultados obtidos para modelos de quintessência compostos por um único campo, e inclusive com modelos em cenários de gravitação generalizada como os apresentados em [32]. Desta maneira, os parâmetros cosmológicos demonstram que o modelo de três campos por nós obtido, tem tanto potencial para descrever a expansão do Universo quanto qualquer modelo de quintessência bem estabelecido na literatura. Além disso, nosso objetivo era mostrar que o método de extensão pode ser aplicado neste contexto, o que conseguimos realizar com sucesso.

Observamos ainda, que o método de extensão aparece como uma ferramenta matemática relevante na obtenção de novos modelos analíticos que pode ser aplicada a cenários mais complexos de quintessência, inclusive em modelos de quantização de gravidade. Temos como perspectiva gerar novos modelos neste contexto e confrontá-los de forma mais significativa com dados experimentais, além de aplicar tais técnicas em cenários com quantização da gravidade, a fim de observar a influência do acoplamento entre os campos no processo de quantização. Algumas dessas aplicações estão sob investigação e esperamos

relatá-las num futuro próximo.

# Apêndice A

A dinâmica de modelos descritos por um único campo escalar real pode ser analisada por meio da densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (6.1)$$

cuja ação é

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x \quad (6.2)$$

Neste caso, estamos considerando teorias de campos relativísticas que obedecem a métrica de Minkowsky  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ , para sistemas quadri-dimensionais.

Tomando a variação na ação, temos

$$\delta S = \delta \left( \int \mathcal{L} dt d^3x \right) = \int dt d^3x \delta \mathcal{L} = 0 \quad (6.3)$$

onde,

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \quad (6.4)$$

Logo,

$$\delta S = \int dt d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) \right] = 0 \quad (6.5)$$

Veja que, usando a regra da cadeia, o segundo termo da equação acima pode ser escrito como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi \quad (6.6)$$

Dessa forma,

$$\delta S = \int dt d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi \right\} \quad (6.7)$$

O segundo termo da integral deve ir à zero nos extremos de integração, uma vez que, estamos interessados em campos escalares bem comportados no contorno, então

$$\delta S = \int dt d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0 \quad (6.8)$$

Isso implica em

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (6.9)$$

que é a equação de Eüler-Lagrange ou equação de movimento para campos. Agora, vamos substituir a densidade de lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi), \quad (6.10)$$

na equação de Eüler-Lagrange. O primeiro termo fica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left[ \partial^\nu \phi \frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \partial_\nu \phi \frac{\partial(\partial^\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right]. \quad (6.11)$$

Veja que podemos fazer,  $\frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \delta_\nu^\mu$  e  $\partial^\nu \phi = \eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda \phi$ . Então a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left[ \partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \phi \frac{\partial(\eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] = \frac{1}{2} [\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \phi \eta^{\nu\lambda} \delta_\nu^\mu] \quad (6.12)$$

Observe ainda que,  $\partial_\nu \phi \eta^{\nu\lambda} \delta_\nu^\mu = \partial^\lambda \phi \delta_\nu^\mu$ . Logo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} [\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial^\lambda \phi \delta_\nu^\mu] \quad (6.13)$$

Agora, vamos usar a convenção da soma de Einstein, para obter

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi) = \partial^\mu \phi, \quad (6.14)$$

o que nos leva finalmente à

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \partial^\mu \phi \quad (6.15)$$

Já segundo termo da equação de movimento é dado explicitamente por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (6.16)$$

Dessa maneira a equação de movimento tem a forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (6.17)$$

que para (1,1) dimensões, pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (6.18)$$

# Referências Bibliográficas

- [1] S. M. Carrol, “*Quintessence and the Rest of the World*”, Phys. Rev. Lett., **81**, 3067 (1998).
- [2] E. Elizalde, “*Cosmology: Techniques and Observations*”, (2004), [arXiv:gr-qc/0409076v1].
- [3] S. Perlmutter et al. “*Supernova Cosmology Project Collaboration*”, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [4] A. G. Riess et al., The Astronomical Journal **116**, 1009 (1998).
- [5] P.H.R.S. Moraes and J.R.L. Santos, “*Two scalar fields from coupled one-field models*”, Phys. Rev. D. **89** (2014).
- [6] W. H. Kinney, “*A Hamilton-Jacobi approach to non-slow-roll inflation*” phys. rev. D **56**, 2002 (1997)
- [7] D. Bazeia, L. Losano, and A. B. Pavan “*Deformation procedure for scalar fields in cosmology*”, (2006).[arXiv:astro-ph/0611021v2].
- [8] P.J. Peebles, “*Principles of Physical Cosmology*” (Princeton UP, Princeton NJ, 1993).
- [9] A. D. Linde, “*A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems*” Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
- [10] A. Albrecht and P. Steinhardt, “*Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*” Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [11] G. Hinshaw et al., Astrophys. J. **208**, 19 (2013).



- [12] M. F. O. Saraiva, K. S. O. Filho, “*Astronomia e Astrofísica*”, Departamento de Astronomia - Instituto de Física. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, (2003).
- [13] M. A. M. Souza, D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, “*Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos*”, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **7**, 357-362, (2012).
- [14] E. Bogomol’nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449-454 (1976).
- [15] M. Prasad, C. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 760-762 (1975).
- [16] Rajaraman, R. *Solitons and Instantons* (Amsterdam: North-Holland) (1982).
- [17] Dionisio Bazeia Filho. “*Campos escalares em ação*.” Tese apresentada para concurso de Professor Titular. UFPB (2004).
- [18] D. Bazeia, L. Losano and J. Malbouisson, *Phys. Rev. D* **66**, 101701, (2002).
- [19] Bazeia, D. “*Defect structures in Field Theory*”. [arXiv:hep-th/0507188, v1], jul. (2005).
- [20] D. Bazeia, J.R. Nascimento, R.F. Ribeiro, and D. Toledo, “*Soliton stability in systems of two real scalar fields*” *J. Phys. A* **30**, 8157 (1997); [hep-th/9705224].
- [21] D. Bazeia, M. J. Dos Santos, R. F. Ribeiro, “*Solitons in systems of coupled scalar field*” *Phys. Lett.* **208**, 84 (1995).
- [22] M. S. Turner, *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 17 (2002), [arXiv:astro-ph/0108103].
- [23] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology*”, (1972) (Wiley, New York).
- [24] T. Padmanabhan, “*Dark Energy: Mystery of the Millennium*”, *AIP Conf. Proc.* **861**, 179 (2006), [arXiv:astro-ph/0603114].
- [25] S. M. Carroll “*Lecture Notes on General Relativity*” [gr-qc/9712019].
- [26] D. Bazeia, L. Losano e J.R.L. Santos, “*Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models*”, *Physics Letters A* **377**, 1615 (2013).

- [27] D. Bazeia, L. Losano and J.M.C. Malbouisson, “*Deformed Defects*” Phys. Rev. D **66** 101701 (2002).
- [28] D. Bazeia, L. Losano and J. R. L. Santos, “*Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models*” Phys. Lett. A **377**, 1615, (2013).
- [29] J. Sadeghi, A.R. Amani and A. Imani, “*Deformation of three real scalar fields with defect structure solution*”, [arxiv:hep-th/0810.0822].
- [30] D. Bazeia, L. Losano, and C. Wotzasek, “*Domain walls in three-field models*”, Phys. Rev. D **66**, 105025, (2002).
- [31] D. Bazeia and F.A.Brito, “*Tiling the Plane without Supersymmetry*”, Phys. Rev. Lett. **84**, 1094, (2000).
- [32] Moraes, P. H. R. S. e Santos, J. R. L., “*A complete cosmological scenario from  $f(R, T^\phi)$  gravity theory*”, European Physical Journal. C **76**, 60 (2016).