UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rayanne Dantas Maia

Uma Proposta Histórico-Construtivista dos Logaritmos

Campina Grande - PB
Agosto/2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rayanne Dantas Maia

Uma Proposta Histórico-Construtivista dos Logaritmos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Agosto/2021

M217p Maia, Rayanne Dantas.
Uma proposta histórico-construtivista dos logaritmos / Rayanne Dantas Maia. – Campina Grande, 2021.
106 f. : il. color.

Relatório (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr Daniel Cordeiro de Morais Filho".
Referências.

1. Logaritmos. 2. História da Matemática. 3. Construtivismo. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MARIA ANTONIA DE SOUSA CRB 15/398

Rayanne Dantas Maia

Uma Proposta Histórico-Construtivista dos Logaritmos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 27 de Agosto de 2021:

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Orientador - UFCG

Prof. Dr. Tomás Edson Barros
Membro externo - Departamento de Matemática – UFSCar

Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros
Membro interno - UFCG

Campina Grande - PB
Agosto/2021

Dedico este trabalho ao meu avô Raimundo Alves Maia (in memoriam), que sempre acreditou e investiu na educação de seus netos. Sei que onde ele estiver estará muito feliz por esta conquista.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida, por me orientar e por me dar forças e saúde para concluir mais uma etapa em minha vida.

Ao meu esposo Aisllan Kellison, pelo cuidado, carinho, companheirismo e paciência durante esta trajetória.

À minha mãe, Katia Cilene e ao seu esposo José Francisco (Zezinho), por todo cuidado, atenção, dedicação e amor.

Ao meu pai, Raimundo Alves Maia Filho, por todos os ensinamentos que a mim foram dedicados.

Aos meus irmãos Rayzza, Rute e Miguel, que são os amores da minha vida.

Aos meus avôs Cosme Dantas, Maria Batista, Raimundo Alves Maia(in memoriam) e Rita Soares por tudo que fizeram e fazem por mim. Tenho certeza que estou diariamente nas vossas orações.

Aos meus tios, Luzia Soares Maia e Bernardino e à sua filha Marília, por acreditarem no meu potencial e por serem grandes incentivadores de tudo o que faço.

A minha família, pelo apoio e pela compreensão durante este período de estudos dedicados ao PROFMAT.

Ao meu orientador, Daniel Cordeiro, por todos os ensinamentos, pelas valiosas horas dedicadas a esse projeto, pelas importantes contribuições e, ainda, pela paciência durante as orientações.

A todos os professores do PROFMAT da UFCG, por toda dedicação e atenção. Vocês foram peças fundamentais na construção do meu conhecimento.

A todos os colegas de curso, que compartilharam comigo de grandes momentos, marcando, assim, a minha história. De modo especial, quero agradecer à Suênia Rodrigues, uma companheira de curso que se tornou uma grande amiga. Compartilhamos juntas de muitos momentos de angústias, de medos e incertezas, mas também de muitas alegrias que ficaram marcados em nossas vidas.

Aos meus alunos, pela compreensão nos período em que não pude dar-lhes a devida atenção.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização deste sonho.

“Aprender é construir significados e
ensinar é oportunizar essa construção.
(Vasco Moretto)

Resumo

O presente trabalho aborda uma proposta para o estudo dos logaritmos baseada nas etapas de sua construção histórica, focando na necessidade de sua engenhosa criação e no estudo dos métodos puramente algébricos, usados para construir as tabelas de logaritmos. Associaremos as progressões aritméticas às progressões geométricas e, através destas sequências, daremos uma proposta, até certo ponto, autoral, de como definir os logaritmos, resgatando a parte histórica dessa associação e como isso foi efetivamente feito. Como consequência, discutiremos limitações dessa associação para conceitualização dos logaritmos e trabalharemos com definições e teoremas que serão de fundamental importância para a construção de nossa proposta. Nossa abordagem apresenta os princípios fundamentais da criação dos logaritmos clássicos, resgata o papel das PAs, PGs e da Análise Matemática da reta real para a concretização dessa criação. Encerramos com uma proposta de atividade construtivista para sala de aula, com o intuito de proporcionar, ao professor, uma sugestão de trabalho que possibilitará, ao aluno, uma aprendizagem histórica e significativa sobre os logaritmos, por meio de PAs e PGs.

Palavras-chave: Logaritmos. História da Matemática. Construtivismo.

Abstract

This work leads to a proposal for the study of logarithms based on the stages of their historical construction, focusing on the need for their ingenious creation and on the study of purely algebraic methods used to develop logarithm tables. We will associate arithmetic progressions with geometric progressions and, through these sequences, we will give a proposal, to a certain extent, original, on how to define logarithms, recovering the historical part of this association and how this was actually done. As a consequence, we will discuss limitations of this association for the conceptualization of logarithms and work with definitions and theorems that will be very important for our proposal. Our approach presents the fundamental principles of the creation of classical logarithms, reclaims the role of arithmetic progressions, geometric progressions and Mathematical Analysis of the real line for the realization of this creation. We close with a proposal for a constructivist classwork, in order to provide the teacher with a work suggestion that will enable the student to have a historical and significant learning about logarithms, through arithmetic progressions and geometric progressions.

Keywords: Logarithms. History of Mathematics. Constructivism

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

As dificuldades em aprender matemática têm correspondido a um problema no ensino. Um fator considerável é a desmotivação por parte dos alunos no que diz respeito ao interesse em aprender e conhecer a matemática. Diante disso, percebemos a necessidade de repensar e replanejar meios nos quais essa realidade possa ser modificada.

Pensando na possibilidade de se amenizar essa situação, pretendemos desenvolver uma proposta de trabalho que possa ser aplicada pelo professor de matemática em suas aulas. Desse modo, é preciso criar um ambiente que estimule o aluno a construir conhecimento; um lugar no qual ele se sinta motivado a descobrir e a relacionar a matemática como uma necessidade humana, ou seja, um laboratório de investigação e descobertas.

O logaritmo é um assunto abordado, por vezes, de forma mecânica, isto é, o professor mostra o seu conceito, suas propriedades e alguns exemplos. Assim, não se é dada muita relevância a necessidade da sua criação, motivo pelo qual o aluno acaba não dando tanta importância ao seu estudo.

É indispensável que o professor desenvolva a postura de pesquisador, e que agregue às suas aulas conhecimentos que estão além dos livros didáticos como uma forma de enriquecer o seu trabalho, acrescentando questionamentos e debates que levem os alunos a agir, pensar e ir ao encontro das respostas. Com isso, o aluno é estimulado na participação ativa do processo para a construção do conhecimento, pois "aprende-se agindo sobre o conteúdo a ser aprendido e retirando das ações sobre esse conteúdo qualidades próprias dessas ações e não mais dos conteúdos apenas" (BECKER, 2012ab, p.265).

Buscamos na história da matemática inspiração para construir o conceito do logaritmo, partindo da associação entre as progressões aritméticas e geométricas e, através do estudo destas sequências, elaboramos definições, teoremas e exemplos para construção da definição do logaritmo.

Como o intuito de desenvolver uma proposta que proporcione ao professor um conhecimento histórico-construtivista do logaritmo e que esse estudo possa somar aos seus conhecimentos contribuindo para o desenvolvimento de um trabalho que conduza os seus alunos à aprendizagem significativa, apresentamos este estudo.

Esta pesquisa foi motivada pelo interesse em estudar sobre a história e a necessidade de criação dos logaritmos, embora tivéssemos o conhecimento de que os logaritmos, a princípio, foram desenvolvidos com o propósito de simplificar os cálculos, não conseguia associar a abordagem dos livros didáticos a essa construção. Porém, além dessas, existiam outras inquietações com relação aos logaritmos, como, por exemplo, como determinar $\log 2$? Como fizeram para construir as tábuas de logaritmos sem o uso da calculadora? Apesar de sermos sabedores da definição e das propriedades, existia uma forte necessidade de compreendermos o conteúdo a partir de seu aspecto histórico. Dessa forma, fomos impulsionados pela oportunidade de pesquisar acerca do tema logaritmos e, com isso, obter respostas para nossos questionamentos, bem como oferecer, aos professores, uma experiência construtivista com este estudo.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, foi realizado um levantamento bibliográfico através de referências teóricas publicadas. Os principais resultados usados ao longo da dissertação estarão listados no apêndice. Deixaremos referências para as demonstrações.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma proposta de trabalho para o estudo dos logaritmos envolvendo a história da matemática sob uma perspectiva construtivista.

1.1.1.1 Objetivos Específicos

- Analisar os processos históricos-algébricos usados na construção das tábuas de logaritmos;
- Discutir como os logaritmos apareciam nos livros didáticos antigos e atuais;
- Propor uma atividade histórico-construtivista para o estudo dos logaritmos.
- Elaborar um material que forneça conhecimento histórico-construtivista dos logaritmos.

1.2 Organização

Para atender aos objetivos apresentados no tópico 1.1 desta seção, este trabalho terá a seguinte organização: no primeiro capítulo, considerado como a introdução, apresentamos de forma resumida a necessidade de apresentar o estudo histórico dos logaritmos, a metodologia da pesquisa, e a motivação para o estudo do tema, seguido dos objetivos e da estrutura do trabalho.

No segundo capítulo, apresentaremos as ideias do construtivismo associando esta teoria à educação para ressaltar a sua contribuição na construção do conhecimento, com o suporte da história da matemática para ressignificar do conceito de logaritmo.

No terceiro capítulo, vamos discorrer sobre as competências e habilidades segundo a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) relacionadas às progressões aritméticas e geométricas, função exponencial e logarítmica e as peculiaridades entre as orientações de ensino da matemática numa perspectiva construtivista.

No quarto capítulo, apresentaremos a "nossa definição" para progressão aritmética e geométrica. Definiremos o conceito de refinamento, uma releitura autoral para a inserção de termos às PAs e PGs com resultados que serão de fundamental importância para a construção do conceito de logaritmo e abordaremos o elo perdido entre o ensino das progressões aritméticas e geométrica e os logaritmos.

No quinto capítulo, apresentaremos o conceito de um sistema logarítmico, seguido de uma definição não convencional para os logaritmos, com a resolução de alguns exemplos para explicar as limitações para conceitualização dos logaritmos através da associação entre PAs e PGs.

No sexto capítulo, apresentaremos a necessidade de aproximação para determinar o logaritmo de um número, tomando como exemplo o logaritmo de 2 na base 10, onde será utilizado as ideias de refinamento para chegar a esse resultado. Mostraremos, também, as semelhanças entre o refinamento das PAs e das PGs, com a ideia aplicada por Henry Briggs para determinar os logaritmos, trazendo pontos positivos e negativos desta construção.

No sétimo capítulo, falaremos sobre a construção para a definição formal dos logaritmos, utilizando conceitos importantes da Análise Real para argumentar e justificar essa construção, justificando a existência do logaritmo de todo número real positivo.

No oitavo capítulo, discorreremos sobre a história e a necessidade para a criação dos logaritmos, com recortes da obra original Arithmetica Logarithmica, de Henry Briggs.

No nono capítulo, apresentaremos uma proposta de atividade para o estudo dos logaritmos numa perspectiva construtivista com auxílio da história da matemática. No décimo e, último, capítulo, mostraremos as contribuições deste trabalho para o ensino e aprendizagem dos logaritmos.

2 O construtivismo e as suas contribuições para o ensino da matemática

O ensino da matemática, desenvolvido por meio da típica aula tradicional que agrega ao ensino o excesso de conteúdos e processos mecânicos de memorização para resolução de problemas, tem apresentado reflexos negativos no processo de aprendizagem, isso porque, até certo ponto, o conhecimento não é adquirido, mas apenas memorizado e depois esquecido. Diante disso, a sala de aula torna-se um ambiente cansativo e estático, que não desperta o desejo do aluno para o aprender.

Dessa forma, surge a necessidade de repensar o método de ensino aplicado. Mas, como mudar essa realidade dentro da sala de aula, despertando, no aluno, o desejo em descobrir e aprender sobre a matemática? Como o professor pode interferir e dinamizar o ensino? Se fosse possível entender como se dá o processo para a construção do conhecimento de cada indivíduo e, trabalhando de acordo com essa realidade, seria possível atender as carências do ensino, principalmente quando se trata da matemática?

No decorrer do texto, procuraremos responder a esses questionamentos, tomando como aporte teórico as ideias do construtivismo e o uso da história da matemática em sala de aula.

É importante compreender que cada indivíduo carrega em si seu modo de aprender. Desse modo, o professor precisa estar sempre buscando atualizar suas práticas de ensino para atender as especificidades que o aprender exige, esse é/foi motivo relevante para se pensar em outras maneiras de trabalho que pudessem proporcionar melhores resultados para o processo de ensino e aprendizagem.

No próximo tópico, discutiremos as implicações do construtivismo para o processo de ensino e aprendizagem, para que possamos entender a importância dessa perspectiva para a construção significativa do conhecimento.

2.1 As implicações da teoria construtivista no processo de ensino e aprendizagem

Por muito tempo acreditou-se que a aprendizagem se dava apenas pela reprodução do conhecimento, onde o aluno era um simples repetidor do que era transmitido pelo professor, sendo ele um agente passivo no processo da sua própria aprendizagem. Vendo que esse modelo não despertava no aluno o desejo em descobrir, educadores interpretaram no construtivismo uma oportunidade para modificar a realidade do ensino.

Por este motivo, muitos associam o construtivismo a um método ou metodologia de ensino quando, na verdade,

> construtivismo não é uma prática ou um método; não é uma técnica de ensino nem uma forma de aprendizagem; não é um projeto escolar; é, sim, uma teoria que permite (re)interpretar todas essas coisas, jogando-nos para dentro do movimento da história – das culturas, das sociedades, da humanidade e do universo. (BECKER, 2012aa, p.113)

Essa teoria foi desenvolvida pelo biólogo, psicólogo e epistemólogo Jean Piaget, que, interessado em investigar como se dá o processo de aquisição do conhecimento humano e observando o desenvolvimento da criança, percebeu que este processo se constrói a partir da interação entre o sujeito e o objeto. (BECKER, 2012aa)

Assim, "construtivismo significa isto: a ideia de que nada, a rigor, está pronto, acabado, e de que o conhecimento não é dado, em nenhuma instância, como algo terminado – é sempre um leque de possibilidades que podem ou não ser realizadas."(BECKER, 2012aa, p.113). Isso caracteriza o sentido do construtivismo na ciência e na filosofia, bem como na epistemologia genética piagetiana.

Quando interpretamos a teoria construtivista com vistas às práticas pedagógicas, percebemos características que, aplicadas ao ensino, são distintas de metodologias frequentemente utilizadas, como é o caso do ensino em que o aluno é ser passivo na construção da aprendizagem. Segundo Becker, entendemos que

> construtivismo na educação poderá ser a forma teórica ampla que reúna as várias tendências atuais do pensamento educacional. Tendências que têm em comum a insatisfação com um sistema educacional que teima em continuar (ideologia) essa forma particular de transmissão que é a escola, que consiste em fazer repetir, recitar, aprender, ensinar o que já está pronto, em vez de desafiar o sujeito para agir, operar, criar, construir, inventar a partir da realidade vivida por alunos e professores, isto é, pela sociedade. (BECKER, 2012aa, p.114)

Dessa forma, o construtivismo conquistou seu espaço na educação ao inserir o aluno como ser ativo na produção do conhecimento, dando a oportunidade de agir, operar e construir significados. Não podemos pensar em aprendizagem sem interação, sem descoberta, sem provocações, enfim, sem a participação ativa do aluno no processo.

Então, na perspectiva de ensino e aprendizagem incorporada ao modelo construtivista está presente a ideia central de Piaget, a qual explica que o desenvolvimento cognitivo se dá por meio dos processos de assimilação e acomodação, que fazem parte de um processo denominado equilibração. Na assimilação, o sujeito age sobre o objeto, incorporando-o a seus esquemas disponíveis, ou seja, esta ação assimiladora transforma o objeto. Para a acomodação, o sujeito modificará os conhecimentos prévios para conseguir captar as novas informações. "Assimilação e acomodação constituem as duas faces complementares entre si, de todas as suas ações". (BECKER, 2012aa, p.118) Nesse processo, o sujeito usará os conhecimentos já existentes para compreender o novo, isso permite que o sujeito esteja em constante aprendizagem.

Para Moreira,

> "[...]quando os esquemas de assimilação não conseguem assimilar determinada situação, o organismo (mente) desiste ou se modifica. No caso da modificação, ocorre a acomodação, ou seja, uma reestruturação da estrutura cognitiva (esquema de assimilação existente) que resulta em novos esquemas de assimilação. Se o meio não apresentar problemas, dificuldades, a atividade da mente será apenas de assimilação; contudo, diante delas se reestrutura (acomoda) e se desenvolve. É mediante a acomodação que se dá o desenvolvimento cognitivo" (MOREIRA, 1999, p.100)

Em outras palavras, quando o sujeito não consegue assimilar determinada situação, a mente desiste de compreender ao determinado problema ou ela se modifica para que ocorra a acomodação. No momento em que a mente se modifica, o sujeito será colocado diante de outras situações nas quais a mente continuará com o processo, ou seja, desiste ou modifica, e é dessa forma que acontece a construção de novos esquemas de assimilação, resultando no desenvolvimento cognitivo. Assimilação e acomodação são processos que estão em permanente equilíbrio, sendo que a cada perturbação ou desequilíbrio, a mente procura construir compensações que buscam um equilíbrio superior.

Quando associamos as ideias de assimilação e acomodação ao ensino, percebemos a necessidade de trabalhar com situações que provoquem no aluno o desequilíbrio, pois, como visto, para que aconteça a aprendizagem, os esquemas de assimilação precisam sofrer acomodações, e isso só é possível quando as atividades propostas despertarem no aluno o desejo de descobrir, conhecer e resolver o problema, e assim acontecerá a descoberta e a construção do conhecimento.

Para Becker, existem duas condições necessárias para que o conhecimento seja adquirido,

> (a) que o aluno aja (assimilação) sobre o material – objeto, experimento, texto, afirmação, cálculo, teoria, pesquisa, modelo, conteúdo específico, observações, dados coletados, reação química ou física, etc. – que o professor presume que tenha algo de cognitivamente interessante, ou melhor, significativo ou desafiador para o aluno; (b) que o aluno responda para si mesmo (acomodação), sozinho ou em grupo, às perturbações provocadas pela assimilação do material, ou que se aproprie, em um segundo momento, não mais do material, mas dos mecanismos íntimos de suas ações sobre esse material: o que ele fez, por que fez dessa maneira, o que funcionou, o que deu errado, por que deu errado, de que outra maneira poderia ter feito. (BECKER, 2012aa, p.21)

É nos momentos de desequilíbrio que a mente se abre para compreender novas ideias, ou seja, frente ao desequilíbrio, a mente tende a buscar resolver a determinados problemas, acarretando em novas experiências, passando para um estágio mais avançado do conhecimento.

O desequilíbrio gera uma reorganização das estruturas cognitivas em busca de um equilíbrio superior e, neste momento, acontece a construção do conhecimento. Para que isso aconteça, as atividades propostas devem partir de algo desafiador que desperte no aluno o desejo de descobrir, para que sua mente se sinta motivada a modificar os seus esquemas, e, assim, aconteça a aprendizagem. Se a situação proposta não provoca a curiosidade, a mente simplesmente desiste.

Segundo COLL, "a aprendizagem contribui para o desenvolvimento na medida em que aprender não é copiar ou reproduzir a realidade". Desse modo, aprender está muito além do processo de repetição, visto que está associado a um processo de construção, onde, através de estímulos, é possível induzir o aluno ao conhecimento. "Para a concepção construtivista, aprendemos quando somos capazes de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que pretendemos aprender." (ibidem)(SOLE; COLL; OUTROS, 2006, p.19)

Para que essa aprendizagem de fato aconteça, as atividades devem incitar o aluno na busca pelo conhecimento, levando-o a questionamentos que vão de encontro as respostas criadas por ele. Não se pode dizer que esse é um procedimento simples, uma vez que requer planejamento e domínio dos conteúdos. Contudo, torna-se proveitoso quando se trata de uma aprendizagem significativa.

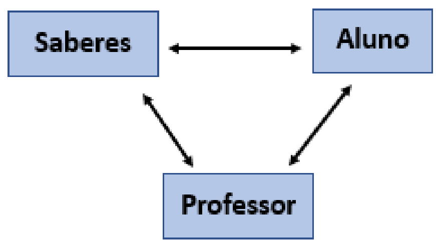
Abordamos nesta seção, de forma bem sucinta, uma das vertentes mais famosas do construtivismo que é a teoria de Piaget, com o objetivo de explicar o que é essa teoria e mostrar algumas das suas implicações no ensino. No próximo tópico, abordaremos o papel do professor na utilização dessa teoria em sala de aula.

2.2 O papel do professor para aplicação do construtivismo em sala de aula

Diante das discussões da seção anterior, compreendemos que, para a teoria construtivista, o conhecimento acontece através da interação entre o sujeito e o objeto. Então, como o professor deve atuar para possibilitar um ambiente propício à construção do conhecimento? Para que exista a interação e, consequentemente, a construção do conhecimento, é importante que o professor modifique a sua postura, deixe de ser transmissor do conteúdo como pronto e acabado e passe a ser um facilitador do processo, proporcionando, aos alunos, experiências que lhes permitam agir, pesquisar, investigar, inventar e, através dos conhecimentos prévios que cada um traz em si, instigar a construção de novos saberes. É preciso, contudo, tornar a sala de aula um laboratório de descobertas, rico em desafios, onde o aluno possa produzir e explorar suas ideias.

No ensino construtivista, a relação entre os saberes, aluno e professor, acontece de forma interativa e, quando bem trabalhada, proporciona uma troca de experiências que desencadeiam a construção do conhecimento de forma significativa e não mais mecânica. Na Figura 2.1, apresentamos um esquema, segundo (MORETTO, 2011), com relação à abordagem construtivista no tocante à relação entre os conhecimentos socialmente construídos (saberes), professor e aluno.

Figura 2.1 – Relação saberes/professor/aluno na perspectiva construtivista



Fonte: Adaptado (MORETTO, 2011)

Percebe-se que o professor tem grande importância quando se fala em ensino construtivista, dado que ele é um agente responsável pela construção da ponte que levará o aluno até o conhecimento, ou seja, é através da sua aula que ele proporciona caminhos para essa construção. O bom seria se, para todo esse processo, existisse uma receita na qual fosse necessário apenas seguir cuidadosamente cada passo e, assim, alcançar o resultado desejado. Mas na realidade é bem diferente, pois os ingredientes dessa receita são os alunos, sendo que cada um possui uma composição diferente e chegarão cada qual com sua experiência e integrarão a sala de aula. Então, cabe ao professor gerar um ambiente propício que faça a aprendizagem acontecer atendendo as diferentes características dos seus alunos.

“A função do professor é, portanto, provocar desequilíbrios (o que em termos corriqueiros significa fazer desafios)”(BECKER, 2012aa, p.131). Como provocar essa situação de desequilíbrio para o aluno? Para propor essas determinadas situações, Macedo relata que uma forte característica do construtivismo é a tematização, definindo como: “tematizar é por isso, reconstruir um novo conhecimento, para um velho e ignorado saber, reduzindo à sua boa e má função instrumental” (MACEDO, 2010, p.61), em outras palavras, é necessário incitar o sujeito através de um conhecimento já interno para que ele possa chegar a um conhecimento mais avançado. Quando esse fato é associado à educação, mostra o quão importante é tematizar para levar o aluno a uma construção do conhecimento.

O trabalho do professor, em uma perspectiva construtivista, deve priorizar alguns pontos como,

> primeiro: é importante para o professor tomar consciência do que faz ou pensa a respeito de sua prática pedagógica. Segundo, ter uma visão crítica das atividades e procedimentos na sala de aula e dos valores culturais de sua função docente. Terceiro, adotar uma postura de pesquisador e não apenas de transmissor. Quarto, ter um melhor conhecimento dos conteúdos escolares e das características de aprendizagem de seus alunos.(MACEDO, 2010, P.61)

O professor deve sempre refletir sobre as suas práticas para que possa planejar melhor suas aulas, colocando o aluno diante de situações que provoquem o desequilíbrio e despertem a curiosidade, para que, assim, possa existir a construção do conhecimento, e isso só é possível quando se tem uma visão crítica das atividades, percebendo pontos chaves para encadear no aluno o interesse.

Fica claro o quanto é importante, para o desenvolvimento dos educandos, que o professor domine os conteúdos a ser lecionados. Não se trata de saber apenas para transmitir, mas saber para propor situações nas quais o aluno apresente suas ideias, formule hipóteses, para sistematizar, quando necessário (MACEDO, 2010). Deve-se considerar o aluno como protagonista no processo de construção do conhecimento.

É fundamental que o professor tenha argumentos para uma discussão e que, nesse momento, ele consiga elaborar "perguntas inteligentes" que conduzam os seus alunos às respostas, use suas estratégias para montar uma proposta de trabalho de acordo com as necessidades de cada aluno. E tudo isso só é possível quando o profissional conhece e tem propriedade do que se ensina e transmite confiança para quem aprende.

Outro ponto importante é que o professor desenvolva a postura de pesquisador para buscar ir além do que aborda o livro didático e, dessa forma, oferecer todo um suporte teórico para a construção de significados e respostas a todos os porquês para a compreensão de maneira clara dos conteúdos escolares nas diversas áreas do conhecimento. Cabe ao professor conhecer bem o seu aluno para trabalhar de acordo com as dificuldades de cada um e, assim, adquirir competências e habilidades para o seu desenvolvimento.

O professor é um mediador e orientador no processo da aprendizagem que deve colocar o aluno diante de situações em diferentes circunstâncias que promovam o conhecimento e, ao mesmo tempo, um incentivador para esse processo de construção, colaborando para um ambiente que valoriza a interação, a troca de experiência e os erros e acertos de cada aluno.

2.3 A história da Matemática como recurso para o Ensino e aprendizagem na perspectiva construtivista

A matemática começou a ser pensada pelo homem muito antes de existir uma civilização, isso porque sempre existiu a necessidade humana para representar as noções quantitativas. Com o desenvolvimento da sociedade novos desafios sociais e econômicos surgiram e, com isso, a necessidade do pensamento matemático para realizar as atividades como contar, medir, representar. Com o passar dos séculos, o conhecimento foi sendo construído por meio de investigações e explorações para que se pudesse chegar à formalização dos conceitos como conhecemos hoje, sendo que vários personagens foram aparecendo nessa história e acrescentando suas ideias, aperfeiçoando outras já existentes, iniciando estudos através de uma matemática intuitiva, inspirados pelo mundo físico, até chegar ao conhecimento abstrato.

Quando falamos em ensino e aprendizagem da matemática, muitos associam essa área do conhecimento a um estudo pronto e acabado, como se não existisse uma necessidade de se pensar nos conceitos, explorar, investigar para se chegar à matemática que conhecemos hoje. Vivemos um momento na educação em que comumente questionamentos são realizados: Por quê? Para quê? Onde? Qual a importância desse conteúdo? Onde posso utilizá-lo? Nossos alunos sentem a necessidade de compreender o porquê de estudar matemática e qual a relação tem a aplicação dessa disciplina com as diversas atividades cotidianas.

Por mais que a matemática seja caracterizada por muitos como uma disciplina difícil, cujo alguns dos conteúdos não fazem sentido, por trás de tudo isso existe uma sede de significados, de entender os porquês que cercam a matemática. Então, precisamos repensar nossas práticas, nosso planejamento, para buscar nesses questionamentos levantados diariamente por nosso alunos o sentido e a importância de estudar a matemática.

É nesse momento que a história da matemática entra como um recurso para o ensino, pois, através dela, podemos despertar o interesse e aguçar a curiosidade do aluno, levando-os a compreender porque surgiu esse campo do saber e qual a necessidade da sociedade para pensar nessa construção, de modo que possa entender a matemática nos seus aspectos escolar e científico, estabelecendo uma associação entre o passado e o presente. Nesse sentido,

> o apoio da história como um recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensino-aprendizagem da Matemática que busque dar uma ressignificação ao conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos. Com essa prática, considero ser possível imprimir maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula durante nossa ação docente, pois esse modo de conceber o ensino da Matemática pode constituir-se em um

> dos agentes provocadores de ruptura na prática tradicional educativa vivida até hoje nas aulas de Matemática.(MENDES, 2009a, P. 76)

Por esse motivo, elaborar uma proposta de trabalho que enfatize a história e necessidade de criação de determinado conteúdo é proporcionar, ao aluno, um novo olhar sobre a matemática. De acordo com Miguel e Miorim, a história da matemática como apoio para práticas pedagógicas pode levar os alunos a compreenderem:

> 1) Matemática é uma criação humana; 2) As razões pelas quais as pessoas fazem matemática; 3) As conexões da matemática com outras áreas; 4) Necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas estimulam desenvolvimento matemático; 5) A curiosidade estritamente intelectual leva à generalização de ideias; 6) Mudança na percepção dos objetos matemáticos; 7) Abstração em relação à generalização da história do pensamento matemático; 8) A natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p.33)

Desse modo, a história da matemática se caracteriza como um recurso que pode proporcionar, ao ensino, a construção de significados, mostrando a ligação entre os conteúdos abordados em sala com as suas origens históricas e, demonstrando a necessidade para a criação dessa área do saber.

Segundo Mendes, "a realização de atividades históricas no ensino da matemática podem conduzir a investigação em sala de aula, e isso pressupõe a participação ativa do aluno para a construção do conhecimento. (MENDES, 2009b, p.93) Por meio das atividades, os alunos serão colocados diante de situações concretas que os mobilizarão para trabalhar o seu modo de pensar, agir de forma dinâmica, participativa e, principalmente, com a construção do conhecimento caracterizando como atividades construtivas.

Então a realização de atividades que envolvem a história da matemática aliada à perspectiva construtivista proporciona ao ensino e aprendizagem condições favoráveis a construção do conhecimento, uma vez que estimula e aguça a curiosidade para entender a relação entre o conteúdo escolar e a atividade humana, bem como amplia as possibilidades de atrair o aluno, pois "a história da matemática é um elemento fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto de sua época". (D'AMBROSIO, 2008, p.27)

No Capítulo 8, apresentaremos uma proposta de atividade que envolve a abordagem construtivista e a história da matemática associada aos logaritmos.

Diante das dificuldades para o planejamento de aulas que envolvam o estudo da história da matemática, muitas vezes por falta tempo e em outras situações por falta de formação, pretendemos, com este trabalho, oferecer um material que proporcione ao professor um estudo histórico da criação dos logaritmos e, a partir desse estudo e compreensão, que o mesmo possa utilizar o conhecimento para acrescentar novas experiências para construção do conceito dos logaritmos em sala de aula, assim como para as atividades.

No próximo capítulo, apresentaremos as competências e habilidades relacionadas ao estudo dos logaritmos de acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), bem como as contribuições da teoria construtivista e sua relação com os pressupostos normativos deste plano.

3 Competências e habilidades do estudo dos logaritmos segundo o plano da BNCC

Neste capítulo, apresentaremos as competências e as habilidades relacionadas ao componente curricular da matemática e suas tecnologias, segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, que, ao nosso ver, estão direcionadas ao estudos dos logaritmos.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p.5)

Sendo esse um documento norteador da educação básica, mostraremos detalhes nas orientações da área de matemática e suas tecnologias na etapa do ensino médio que favorecem a aplicação da teoria construtivista.

3.1 Reflexos da teoria construtivista na área de matemática e suas tecnologias na etapa do Ensino Médio

Como mencionado no capítulo anterior, o ensino da matemática apresenta-se como uma proposta desafiadora, tendo em vista, as dificuldades encontradas para despertar o interesse do aluno para descoberta e desenvolvimento nessa área do conhecimento. Com o intuito de promover um ensino dinâmico e a equidade entre as diferentes instituições de ensino, a BNCC apresenta uma proposta para o ensino baseada em competências e habilidades que devem ser desenvolvidas visando, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento dos educandos.

De cordo com a BNCC as competências são “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.” (BRASIL, 2018, p.08)

Na área de matemática e suas tecnologias, na etapa do ensino médio, a BNCC propõe a consolidação, a ampliação e aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas na etapa do Ensino Fundamental. Nesse sentido, o documento propõe a exploração dos conhecimentos adquiridos para promover ações que ampliem a construção de um novo saber, a fim de possibilitar aos estudantes uma conexão entre os conteúdos, bem como a relação da matemática com a aplicação a realidade. (BRASIL, 2018)Para que isso ocorra é importante que a sala de aula seja um ambiente que promova e estimule a construção do conhecimento.

Diante disso, precisamos provocar no aluno a curiosidade e o desejo pela descoberta para o conhecimento e, de modo mais específico, pela matemática. Para que este possa se sentir motivado na construção do seu próprio conhecimento. E, para a realização de um trabalho que venha atender as expectativas do ensino preocupado com o desenvolvimento dos educandos, é essencial levar em consideração todo o conhecimento prévio do aluno.

> Área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum. (BRASIL, 2018, p.518)

De acordo com a BNCC, um trabalho de sustentação para o desenvolvimento dos alunos acontece quando se resgata a compreensão do conhecimento matemático de toda a bagagem trazida pelo aluno, tanto na sua vivência social quanto a sua experiência em sala de aula, pois é através das potencialidades de cada aluno que é possível desenvolver um trabalho que reflita positivamente nas práticas pedagógicas, no conhecimento formado e nas ações de cada um, e, por meio desse conjunto, despertar o interesse e a curiosidade para o aprender matemática.

Percebemos que o modo no qual o documento normativo descreve o ensino na área da matemática apresenta reflexos de uma proposta de trabalho construtivista, que tem como objetivo promover um ensino dinâmico, inserindo o aluno no processo de ensino, valorizando a interação e a troca de experiências, para que possa acontecer a construção do conhecimento.

Para atender a esses propósitos,

> os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.(BRASIL, 2018, p.519)

Assim, é preciso que todo profissional da educação disponha de criatividade para colocar em prática as competências e habilidades propostas, de modo a desenvolver nos alunos o interesse e o desejo por descobrir e aprender sobre a matemática. Como aponta

Becker, o professor tem a função de "segundo Piaget, inventar situações experimentais para facilitar a invenção de seu aluno" (BECKER, 2012aa, p.126).

Diante disso, percebemos que existe uma reflexão acerca do conhecimento já existente em cada aluno, da sua participação ativa no processo de ensino e aprendizagem, da valorização do seu modo de raciocinar, argumentar e comunicar, o que se configura como uma perspectiva de ensino que valoriza a construção do conhecimento.

Nessa perspectiva é preciso trabalhar no aluno o seu modo de ver e, entender os problemas matemáticos de tal maneira que ele possa sentir a importância da matemática para sua vida acadêmica e cotidiana. O fato de não compreender o porquê de estudar determinado assunto acaba gerando dificuldades para a compreensão da matemática, mas, a partir do momento que as resposta para as perguntas são encontradas, o significado aparece.

Desse modo, o professor entra como uma peça-chave, pois, é através das respostas aos questionamentos que o entendimento da matemática aparece. O docente será a peça que conduzirá o aluno ao encontro das respostas. Para isso, se faz necessário garantir um trabalho de investigação e de valorização do conhecimento de cada educando. Deve-se promover uma didática que leve este ao encontro das respostas para as situações problemas, não sendo estas transmitidas de forma direta pelo professor, pois estaria, assim, trabalhando apenas a memorização da resolução de um determinado problema. O que se pretende é que o aluno, por meio dos seus esforços e desejo de descobrir seus resultados, produza o seu próprio conhecimento.

Assim sendo, os alunos serão capazes de desenvolver habilidades que lhes proporcionarão o desenvolvimento do seu raciocínio para entender, formular, resolver e até mesmo transmitir o seu conhecimento matemático, percebendo a sua importância para a vida cotidiana.

3.2 Competências e habilidades da BNCC que norteiam o estudo dos logaritmos

O ensino dos logaritmos, por muitas vezes, é visto pelo o aluno do Ensino Médio como um conteúdo sem importância para o conhecimento, isso porque, não se exibe a necessidade de criação dos logaritmos, tampouco se faz um resgate dos processos históricos. Um fator que contribui para esse pensamento é a forma como os logaritmos são abordados em sala de aula, por serem, quase sempre, apresentados através de processos pedagógicos centralizados na memorização da definição, propriedades e repetição de exercícios, sem mostrar nenhuma relação deste conteúdo com a sua aplicabilidade, nem mesmo sendo associados aos conhecimentos prévios dos alunos para facilitar a compreensão do conceito. Diante disso, é importante desenvolver um trabalho que mobilize o modo que o aluno tem de ver e entender a matemática e, em particular, os logaritmos.

Para desenvolvimento de um trabalho que garanta as aprendizagens previstas para o Ensino Médio no tocante aos estudos dos logaritmos, a BNCC apresenta as seguintes competências específicas e habilidades:

A competência específica 3 pressupõe habilidades para a aplicação de diferentes estratégias na resolução de problemas em diversos contextos que favorecem a interpretação e compreensão da realidade pelo aluno.

> **Competência específica 3 -** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> **Habilidades**
>
> **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
>
> **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (BRASIL, 2018, p.535-537)

A competência específica 4 pressupõe habilidades voltadas para diferentes representação de um mesmo objeto matemático que devem ser utilizados de maneira compreensível para que o aluno interprete e raciocine como resolver os problemas.

> **Competência específica 4-** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> **Habilidade**
>
> **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (BRASIL, 2018, p.538-539)

A competência específica 5 pressupõe um conjunto de habilidades voltadas para a capacidade de investigar, explorar conceitos, criar e argumentar através de explicações que possam surgir das experiências vividas e observações dos fatos.

> **Competência específica 5** -Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou

> não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
>
> **Habilidades**
>
> **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
>
> **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BRASIL, 2018, p.540-541)

Assim, concluímos que as competências e as habilidades estão pautadas na elaboração de estratégias para a resolução de problemas matemáticos, enfatizando a importância do compreender para que se possa fomentar argumentos consistentes na resolução de problemas, orientando o aluno à formulação das suas respostas e firmeza na produção de conhecimento. Uma vez desenvolvidas essas competências, ele terá maturidade de entender e transmitir o conteúdo matemático em estudo.

Diante disso, seria possível definir os logaritmos através do conceito de progressões aritméticas e geométricas? Se sim, como abordar esse tema em sala de aula atendendo as competências e habilidades da BNCC, mediante uma proposta construtivista?

Nos próximos capítulos, apresentaremos as respostas a esses questionamentos oferecendo, ao professor, um aporte teórico para a construção e formulação do conceito dos logaritmos, seguida de uma atividade para aplicação durante as aulas, com o objetivo de contemplar os conceitos estudados, para que possa transferi-los para sua sala de aula e propor, aos alunos, momentos de descobertas para uma aprendizagem significativa com relação aos logaritmos; bem como explorar outros conceitos, como o de PA e PG, e mostrar como esses conteúdos estão intimamente associados.

Portanto, esta proposta visa a desenvolver, através de uma perspectiva construtivista, o entendimento dos logaritmos e sua importância para o desenvolvimento dos cálculos matemáticos. Apresentaremos todo o sentimento histórico acerca da necessidade de sua criação e, com isso, desenvolveremos uma proposta que tem por finalidade trabalhar as competências e habilidades definidas pela BNCC, de modo a promover a aprendizagem.

4 Uma abordagem de progressões aritméticas e geométricas para a conceitualização dos logaritmos

Neste capítulo, discutiremos a relação perdida entre o ensino das progressões aritméticas e geométricas e os logaritmos; abordaremos o conceito destas progressões para que possamos definir o conceito de refinamento e, através deste, estudaremos resultados que serão importantes para a conceitualização dos logaritmos.

4.1 O elo histórico perdido no ensino das PAs e PGs e os logaritmos

Para resgatar a ligação perdida entre o ensino das PAs e PGs e os logaritmos, é conveniente que compreendamos como estes conteúdos estiveram relacionados no passado. Interessado em desenvolver uma ferramenta capaz de simplificar os longos e exaustivos cálculos de multiplicações, divisões e extrações de raízes, uma vez que esses demandavam muitas operações e poderiam induzir ao erro, como exprime, no prefácio de sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da maravilhosa tabela de logaritmos),

> dado que nada (caros amadores apaixonados pela Matemática) é tão desagradável à prática Matemática (freando e retardando os especialistas de cálculo) quanto as multiplicações, as divisões e as extrações de raízes quadradas ou cúbicas de números grandes que, além do incômodo devido ao seu tamanho, induzem a diversos erros perigosos; como consequência, eu me dediquei a procurar por que meios seguros e cômodos poderia me livrar destas dificuldades. (ROQUE; CARVALHO, 2019a, p.230)

O proprietário escocês John Napier deu início ao desenvolvimento dos logaritmos, observando que, associando-se os termos de uma progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...$$

aos da progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...,$$

o produto $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ de dois termos da primeira progressão está associado à soma $m + n$ dos termos correspondentes da segunda progressão(EVES, 2011). Diante disso, percebemos a ligação histórica entre as PAs e PGs e os logaritmos.

No entanto, como essa abordagem, que inspirou a construção do conceito do logaritmos, apresenta-se nos livros didáticos? Será que o aluno do ensino médio, ao se deparar com um problema sobre logaritmos, tem a percepção de que este conteúdo está associado às progressões? Os livros didáticos oferecem algum aporte teórico que proporcione ao aluno e ao professor o entendimento da ligação entre as PAs e PGs e os logaritmos?

Ao analisar livros didáticos, percebemos que as partes introdutórias apresentam, de forma bastante resumida, a história e a necessidade de criação dos logaritmos, geralmente acompanhadas de uma situação problema que envolve uma aplicação prática no cotidiano e/ou de conhecimento do aluno.

Para as situações problemas propostas nos livros didáticos, temos a variação de duas grandezas, sendo que uma delas se apresenta como uma potência que é expressa em função da outra variável. Para uma melhor compreensão, observe a imagem retirada do livro A.

Figura 4.1 – Situação problema apresentada no Livro A

Situação 2

Suponhamos que um caminhão zero-quilômetro custe hoje R$ 120 000,00 e sofra uma desvalorização de 10% por ano de uso.

Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$ 60 000,00?

A cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então, seu valor evolui da seguinte forma:

- após 1 ano de uso:
  90% de 120 000 reais, ou seja, 108 000 reais
- após 2 anos de uso:
  90% de 108 000 reais, ou seja, 97 200 reais
- após 3 anos de uso:
  90% de 97 200 reais, ou seja, 87 480 reais
  e assim por diante.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

No Brasil, o transporte rodoviário é um dos principais meios de distribuição de cargas.

O valor do veículo em reais evolui, ano a ano, de acordo com a sequência:

$$120\,000; \quad (0,9) \cdot 120\,000; \quad (0,9)^2 \cdot 120\,000; \quad (0,9)^3 \cdot 120\,000; \quad \ldots; \quad (0,9)^x \cdot 120\,000$$

em que **x** indica o número de anos de uso.

Para responder à pergunta feita, devemos resolver a equação $(0,9)^x \cdot 120\,000 = 60\,000$, ou seja, $(0,9)^x = 0,5$, que é uma equação exponencial.

Fonte: (IEZZI et al., 2016)

No exemplo exposto na Figura 4.1, as grandezas relacionadas são tempo e valor do caminhão depois de um determinado tempo de uso. Para resolução deste problema o Livro A propõe um estudo da desvalorização anual do veículo, cujo objetivo final é deduzir uma equação que permita calcular o valor do veículo em função do tempo de uso. Para isso, é apresentada a construção de uma sequência que mostra o valor do veículo em função do tempo.

Para responder à pergunta "depois de quanto tempo de uso o valor de veículo será igual a R\$ $60.000,00$?", o Livro A apresenta a equação exponencial $(0,9)^x = 0,5$ e descreve que, a princípio, não há solução pelo fato de não ser possível reduzir a potência de mesma base, sendo, portanto, a equação associada aos logaritmos. Após deparar-se com uma situação cuja solução não pode ser determinada através da resolução das equações exponencias, os livros apresentam a definição, consequências e propriedades operatórias dos logaritmos, nessa ordem.

Propomos o questionamento: ao colocarmos as variáveis tempo e valor do caminhão representando cada uma como sequência, a que ideia poderíamos associar estas sequências? Observe que poderíamos analisar o problema proposto por um outro ângulo, como mostra a Tabela 4.1 à situação problema.

Tabela 4.1 – Representação da situação problema apresentada no Livro A

Tempo de uso do veículo	Valor do veículo
1	$(0,9) \cdot 120\ 000$
2	$(0,9)^2 \cdot 120\ 000$
$\vdots$	$\vdots$
x	$(0,9)^x \cdot 120\ 000$

Fonte: Elaboração própria

Analisando a Tabela 4.1 percebemos que a sequência representada pelo tempo de uso do veículo é uma progressão aritmética de razão 1, enquanto a sequência que representa o valor do veículo, uma progressão geométrica de razão $0,9$. Por vezes conceitos importantes, como é o caso da relação entre as PAs e PGs com os logaritmos, passam despercebidos pelo professor, assim como o livro didático não aborda de forma explicita esta relação. Notamos assim, uma ruptura entre conteúdos que estão intimamente associados.

Se o logaritmo é um valor que corresponde ao expoente de uma potência e no exemplo em questão temos uma sequência composta por várias potências, por que buscar, nos logaritmos, a solução para o problema proposto? Por que não pensar em alguma possibilidade de inserir termos nas progressões para encontrar o x que soluciona o problema?

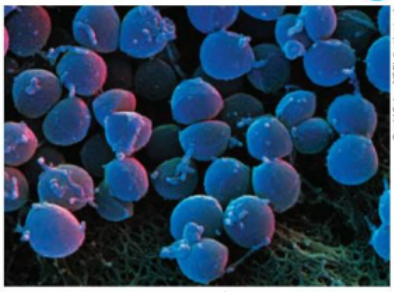
Ao analisar o exemplo do Livro B, representado na Figura 4.2, percebe-se que acontece situação semelhante à do Livro A, isto é, para introduzir o conceito de logaritmo, é trabalhado um problema e, em seguida, é apresentada a definição formal.

Figura 4.2 – Situação problema apresentada no Livro B

A taxa de crescimento diário de certa cultura de bactérias é de 5%. Em quantos dias uma população B_0 dessa bactéria irá triplicar, se a taxa de crescimento se mantiver?

Para responder a essa pergunta, construiremos um quadro a partir das informações apresentadas.

Dia	População
início	B_0
1º dia	$B_1 = B_0 + B_0 \cdot 0,05 = B_0 \cdot 1,05$
2º dia	$B_2 = B_1 + B_1 \cdot 0,05 = \underbrace{B_1}_{B_0 \cdot 1,05} \cdot 1,05 = B_0 \cdot (1,05)^2$
3º dia	$B_3 = B_2 + B_2 \cdot 0,05 = \underbrace{B_2}_{B_0 \cdot (1,05)^2} \cdot 1,05 = B_0 \cdot (1,05)^3$
4º dia	$B_4 = B_3 + B_3 \cdot 0,05 = \underbrace{B_3}_{B_0 \cdot (1,05)^3} \cdot 1,05 = B_0 \cdot (1,05)^4$
...	...
enésimo dia	$B_n = B_{n-1} + B_{n-1} \cdot 0,05 = \underbrace{B_{n-1}}_{B_0 \cdot (1,05)^{n-1}} \cdot 1,05 = B_0 \cdot (1,05)^n$


David Scharf/SPL/Latinstock

Bactéria *Staphylococcus aureus* (aumento aproximado de 11 800 vezes). Essa bactéria é encontrada em seres humanos e outros animais.

Lembre-se de que podemos escrever porcentagem na forma decimal, como apresentada ao lado, isto é: $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$.

Fonte: (SOUZA; GARCIA, 2016)

Veja que o exemplo trabalha com duas grandezas. São elas: dias e quantidade da população de certa cultura de bactérias. Perceba que a variável dia representa uma progressão aritmética de razão 1, e a população das bactérias, uma progressão geométrica de razão $1,05$. Observamos mais uma vezes a proximidade do exemplo com as progressões aritméticas e geométricas.

Para solucionar as situações propostas, os exemplos apresentados pelo Livro A e Livro B recorrem de imediato aos logaritmos, sempre com a justificativa de que as equações não podem ser reduzidas a potências de mesma base. Não existe uma exploração do problema com relação às sequências que são formadas, para enfatizar que estas representam uma progressão aritmética e uma progressão geométrica. O inventor dos logaritmos foi motivado por sequências que hoje conhecemos por progressões aritméticas e geométricas para construir a brilhante ideia dos logaritmos. O que incentivou uma descoberta se perdeu com o tempo. Nem mesmo no capítulo posterior dos livros didáticos, que aborda as progressões aritméticas e geométricas, existe associação entre os conteúdos.

Observe agora a Figura 4.3, que é recorte de um texto retirado do Livro A, após ser apresentada a definição e as consequências da definição dos logaritmos. É bem interessante como o livro aborda o contexto histórico, destacando o uso dos logaritmos como ferramenta de cálculo, chamando atenção para o fato de que a ideia do inventor dos logaritmos, Napier, era o de associar os termos da sequência $b, b^2, b^3, ..., b^n$ com os termos da sequência $1, 2, 3, ..., n$, seguido de um exemplo que mostra como simplificar os cálculos para multiplicações.

Figura 4.3 – Relato histórico sobre os logaritmos apresentado no Livro A

A invenção dos logaritmos

Credita-se ao escocês John Napier (1550-1617) a descoberta dos logaritmos, embora outros matemáticos da época, como o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o inglês Henry Briggs (1561-1630), também tenham dado importantes contribuições.

A invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso instrumento de cálculo numérico que impulsionaria o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia. Até então, multiplicações e divisões com números muito grandes eram feitas com auxílio de relações trigonométricas.

Basicamente, a ideia de Napier foi associar os termos da sequência (b; b^2; b^3; b^4; b^5; ...; b^n) aos termos de outra sequência (1, 2, 3, 4, 5, ..., n), de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência ($b^x \cdot b^y = b^{x+y}$) estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência.

Veja um exemplo:

Frontispício da obra de John Napier sobre logaritmos datada de 1614.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394	32788

Para calcular $512 \cdot 64$, note que:

- o termo 512 de 2 corresponde ao termo 9 de 1;
- o termo 64 de 2 corresponde ao termo 6 de 1;
- assim, a multiplicação $512 \cdot 64$ corresponde à soma de $9 + 6 = 15$ em 1, cujo correspondente em 2 é 32788, que é o resultado procurado.

Em linguagem atual, os elementos da 1ª linha da tabela correspondem ao logaritmo em base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha da tabela.

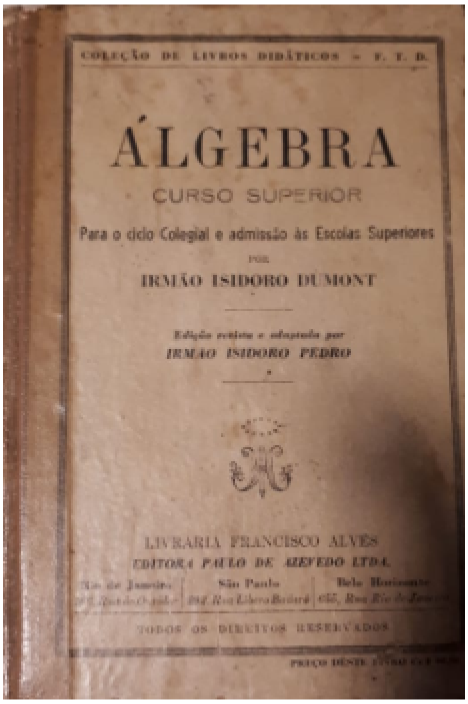
Fonte: (IEZZI et al., 2016)

O livro ainda acrescenta que os elementos da 1ª linha da Tabela se resumem aos logaritmos na base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha da tabela, não ficando claro para o leitor, no caso o aluno, que essas sequências representam uma progressão aritmética e uma progressão geométrica. Essa breve ligação entre PA e PG com os logaritmos, muitas vezes pode passar despercebido por aparecer numa pequena parte do texto que apresenta um pouco sobre o contexto histórico.

O objetivo de apresentar um pouco dessa discussão com relação ao estudo dos logaritmos associados às progressões aritméticas e geométricas não é para realizar uma crítica ao modo como os livros didáticos apresentam os logaritmos, mas para que o leitor, possa observar que a ponte que liga os estudos das progressões aritméticas e geométricas aos logaritmos foi rompida. Mesmo quando essa conexão é abordada, não lhe é dada relevância, como é o caso do Livro A. Uma exploração do exemplo poderia até mesmo levar o aluno a questionar “como determinar os outros logaritmos que não pertencem a essas PAs e PGs?”E aqui seria necessário um estudo das progressões. Agora, você é nosso convidado para realizar este estudo e construir conosco o conceito dos logaritmos por meio das progressões.

O estudo para esta dissertação foi inspirado na coleção de livros didáticos da editora FTD, intitulada ÁLGEBRA CURSO SUPERIOR: Para o ciclo Colegial e admissão às Escolas Superiores, publicado no ano 1947 (PEDRO, 1947), no qual o estudo dos logaritmos se apresenta intimamente associado às progressões, que são usadas para definir e elaborar todos os conceitos pertinentes ao tema em questão.

Figura 4.4 – Capa do livro ÁLGEBRA CURSO SUPERIOR: Para o ciclo Colegial e admissão às Escolas Superiores



Fonte: Acervo do orientador

Com esse trabalho, pretendemos proporcionar o resgaste do estudo dos logaritmos por meio das progressões aritméticas e geométricas, de tal modo que se possa conceituar os logaritmos de forma significativa, não apenas para ver a sua definição, mas também para entender todo o processo histórico para sua construção.

4.2 A nossa definição para progressão aritmética e para progressão geométrica

Neste tópico, abordaremos as definições de progressões aritméticas e geométricas de tal modo que essas possam nos auxiliar na construção do conceito que daremos aos logaritmos. A definição apresentada é semelhante às usuais, embora contenha algumas peculiaridades inerentes aos nossos objetivos, por esse motivo intitulamos "a nossa definição". No decorrer do texto buscaremos, através de definições, exemplos e teoremas, expressar o nosso objetivo de optar por essa conceitualização.

Definição 4.1. *Uma **progressão aritmética (PA)** é uma sequência infinita da forma*

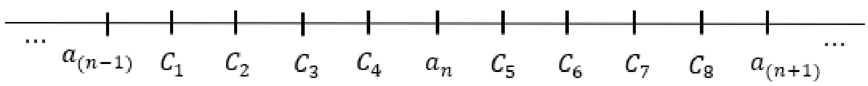
$$(PA)_r = (..., -3r, -2r, -r, 0, r, 2r, 3r, ...)$$

*onde $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ e a diferença entre cada termo da sequência e o termo anterior é constante, chamada de **razão**.*

Exemplo 4.1. *A sequência infinita $(..., -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, ...)$ é uma PA de razão $\sqrt{2}$.*

Diremos que x *pertence a* (PA) se x é um termo da progressão aritmética $(PA)_r$ e, neste caso, escrevemos $x \in (PA)$. Diremos que $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$ quando todos os termos da $(PA)_r$ também pertencem à $(PA)_{r'}$. Considerando uma $(PA)_r$, ao inserir meios aritméticos entre os termos consecutivos desta sequência, obtemos uma nova $(PA)_{r'}$ com uma maior quantidade de termos. Observe a representação de um exemplo na Figura 4.5, onde inserimos 4 termos entres os termos consecutivos.

Figura 4.5 – Exemplo de uma $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$



Fonte: Elaboração própria

Cada termo c_i com $i = 1, 2, 3, 4, ...$ pertence a uma nova (PA) de razão r', tal que $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$. Mas como determinar r'? No próximo tópico apresentaremos definições e resultados que serão importantes para responder a este questionamento e justificar essa construção.

Definição 4.2. *Uma **progressão geométrica (PG)** é uma sequência infinita da forma*

$$(PG)_q = (..., q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q^1, q^2, q^3, ...)$$

*onde $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$, $q \neq 1$ e o quociente entre cada termo e o termo anterior é constante, chamado de **razão**.*

Exemplo 4.2. *A sequência infinita $\left(..., \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, 1, \left(\frac{1}{3}\right)^{1}, \left(\frac{1}{3}\right)^{2}, \left(\frac{1}{3}\right)^{3}, ...\right)$ é uma PG de razão $\frac{1}{3}$.*

As definições para progressões aritméticas e geométricas foram assim representadas para que possamos, através delas, construir o conceito dos logaritmos no Capítulo 7. A partir deste momento as PAs e PGs serão sempre tratadas na forma padrão.

Como nosso objetivo não é apresentar um estudo detalhado das progressões aritméticas e geométricas, mas, a partir delas, construir o conceito de logaritmos, não demonstraremos as fórmulas utilizadas para determinar os seus termos, apenas as apresentaremos, pois essas serão utilizadas em nosso estudo.

De modo semelhante à progressão aritmética, na progressão geométrica podemos inserir meios geométricos na $(PG)_q$, onde teremos $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$. Veremos no próximo tópico como determinar a razão q' a partir da razão q.

4.2.1 Inserir termos em uma PA e em uma PG

Considere uma $(PA)_r$ e uma $(PG)_q$, nos quais os seus termos são representados por

$$(PA)_r = (..., a_{-(n+1)}, a_{-n}, ..., a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2..., a_n, a_{n+1}, ...)$$
$$(PG)_q = (..., b_{-(n+1)}, b_{-n}, ..., b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}, ...),$$

com $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$.

Para determinar o termo geral das progressões aritméticas e geométricas, geralmente utilizamos as seguintes fórmulas:

Tabela 4.2 – Fórmula para determinar o termo geral da PA e da PG

PA	PG
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Fonte: (LAGES et al., 1998)

Dadas uma PA e PG, podemos inserir termos a essa sequências. Para isso, considere a_n e a_{n+1} dois termos consecutivos da $(PA)_r$ e b_n e b_{n+1} dois termos consecutivos da $(PG)_q$. Ao inserir m meios aritméticos entre esses termos consecutivos, obtemos novas PA_s e PG_s, respectivamente, com as seguintes razões:

Tabela 4.3 – Razão da PA e da PG com a inserção de m termos

PA	PG
$r' = \frac{(a_{(n+1)} - a_n)}{m-1}$	$q' = \sqrt[m-1]{\frac{b_{(n+1)}}{b_n}}$

Observe que as fórmulas apresentadas para determinar os elementos das progressões aritméticas correspondem a operação de ordem superior na progressão geométrica, ou seja, a adição é substituída pela multiplicação, subtração por divisão, a multiplicação por uma potência e a divisão por raiz. Na Tabela 4.3 apresentamos r' e q' em função dos termos consecutivos da PA e da PG e, do número m de meios aritméticos e geométricos, respectivamente, porém no decorrer do texto encontraremos uma expressão melhor para apresentar essas razões.

Buscaremos compreender como as ideias de PA e PG podem nos auxiliar na construção do conceito de logaritmos.

4.3 O conceito de refinamento de uma PA e de uma PG

Neste tópico, apresentaremos o conceito de refinamento de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica. Observe atentamente cada definição, teorema e demonstração, uma vez que esses contribuirão para a construção do conceito de logaritmos.

Definição 4.3. *Sejam os números reais positivos r e r'. A **$(PA)_{r'}$ é um refinamento da $(PA)_r$**, se $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$.*

Exemplo 4.3. *A $(PA)_{\frac{1}{2}}$ é um refinamento da sequência $(PA)_1$.*

De fato, a sequência

$$(PA)_{\frac{1}{2}} = (..., -(n+1), -\left(\frac{2n+1}{2}\right), -n, ..., -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ..., n, \frac{2n+1}{2}, n+1...),$$

é um refinamento da sequência

$$(PA)_1 = (..., -(n+1), -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, n+1, ...),$$

uma vez que $(PA)_1 \subset (PA)_{\frac{1}{2}}$.

Definição 4.4. *Sejam os números reais positivos q, q', com $q, q' \neq 1$. A **$(PG)_{q'}$ é um refinamento da $(PG)_q$**, se $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$.*

Exemplo 4.4. *A $(PG)_{\sqrt{2}}$ é um refinamento da sequência $(PG)_2$.*

De fato, a sequência

$$(PG)_{\sqrt{2}} = (..., 2^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}, 2^{-n}, 2^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}, ..., 2^{-\frac{3}{2}}, 2^{-1}, 2^{-\frac{1}{2}}, 2^0, 2^{\frac{1}{2}}, 2, 2^{\frac{3}{2}}, ..., 2^{\frac{2n-1}{2}}, 2^n, 2^{\frac{2n+1}{2}}, ...),$$

é um refinamento da sequência

$$(PG)_2 = (..., 2^{-n}, ..., 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2, 2^2, ..., 2^n, ...),$$

uma vez que $(PG)_2 \subset (PG)_{\sqrt{2}}$.

As definições de refinamento apresentadas serão importantes para o estudo e demonstração dos Teoremas que serão abordados no próximo tópico.

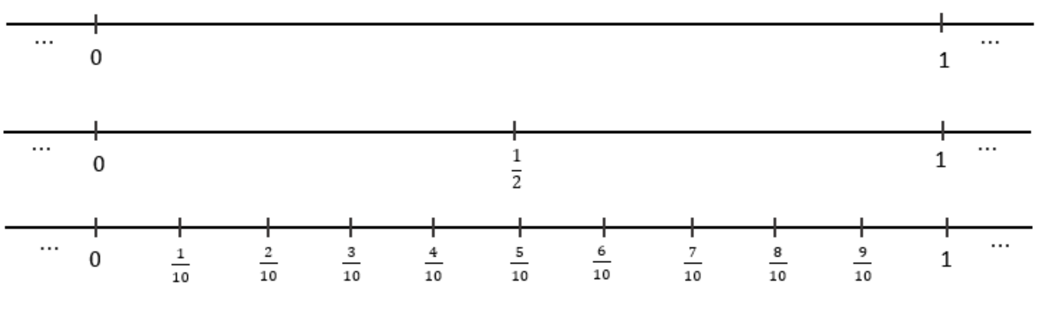
4.4 Alguns resultados importantes sobre refinamento de PAs e de PGs

Neste tópico, discutiremos alguns resultados que serão importantes para a construção do conceito dos logaritmos por meio das progressões. Exibiremos, também, teoremas e demonstrações que nos permitirão determinar a razão de um refinamento para os casos de PA_s e PG_s e estudaremos como esses resultados nos auxiliarão para construção do conceito de logaritmo.

Quando apresentamos a definição de refinamento seguida por exemplos na Seção 4.3 deste capítulo, percebemos que, dependendo da razão da progressão refinada, podemos obter uma nova sequência com uma quantidade de termos bem superior à anterior.

Veja que, no Exemplo 4.3, a $(PA)_{\frac{1}{2}}$ é um refinamento da $(PA)_1$, mas se tomássemos, por exemplo, uma $(PA)_{\frac{1}{10}}$, também teríamos um refinamento da $(PA)_1$, pois $(PA)_1 \subset (PA)_{\frac{1}{10}}$, porém, com essa nova razão para a $(PA)_{\frac{1}{10}}$, teríamos uma quantidade de elementos entre dois termos consecutivos bem maior que o refinamento da $(PA)_1$, quando tomamos $r = \frac{1}{2}$.

Figura 4.6 – Refinamento do Exemplo 4.3



Fonte: Elaboração própria

Com isso, poderíamos pensar que, se optássemos por uma boa escolha para a razão da progressão refinada, poderíamos inserir todos os termos que desejássemos a essa PA, já que poderíamos ter progressões contidas em progressões, o que nos conduziria a uma sequência com todos os valores reais. Mas seria esse um processo possível através do refinamento? Que tal realizarmos um estudo para que possamos compreender melhor estas ideias e analisar até onde podemos ir com o processo de refinamento? Observe os teoremas.

Teorema 4.1. *Sejam r e r' números reais positivos. A progressão $(PA)_{r'}$ é um refinamento da $(PA)_r$ se, e somente se, $r' = \frac{r}{m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Inicialmente mostraremos que, se $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$, então $r' = \frac{r}{m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Sejam pr e $(p+1)r$ dois termos consecutivos da $(PA)_r$. Se $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$ então $(p+1)r$, $pr \in (PA)_{r'}$.

Como $pr, (p+1)r \in (PA)_{r'}$, então, para algum $m \in \mathbb{N}$,

$$(p+1)r - pr = m \cdot r' \Rightarrow r' = \frac{r}{m}.$$

Portanto, $r' = \frac{r}{m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$.
Agora, mostraremos que, se $r' = \frac{r}{m}$, então $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$. Para isto, considere a seguinte sequência:

$$(PA)_{r'} = (..., -(m+1)r', -mr', -(m-1)r', ..., -2r', -r', 0, r', 2r', ..., (m-1)r', mr', (m+1)r', ...,$$
$$(2m-1)r', 2mr', (2m+1)r', ...,).$$

Se $r' = \dfrac{r}{m}$, substituindo r' na $(PA)_{r'}$, obtemos

$$(PA)_{r'} = (..., -(m+1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), -m \cdot \left(\frac{r}{m}\right), -(m-1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), ..., -2 \cdot \left(\frac{r}{m}\right), -\left(\frac{r}{m}\right), 0, \left(\frac{r}{m}\right),$$
$$2 \cdot \left(\frac{r}{m}\right), ..., (m-1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), m \cdot \left(\frac{r}{m}\right), (m+1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), ..., (2m-1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), 2m \cdot \left(\frac{r}{m}\right),$$
$$(2m+1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), ...),$$

ou seja,

$$(PA)_{r'} = (..., -(m+1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), \boxed{-r}, -(m-1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), ..., -2 \cdot \left(\frac{r}{m}\right), -\left(\frac{r}{m}\right), \boxed{0}, \left(\frac{r}{m}\right), 2 \cdot \left(\frac{r}{m}\right),$$
$$..., (m-1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), \boxed{r}, (m+1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), ..., (2m-1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), \boxed{2r}, (2m+1) \cdot \left(\frac{r}{m}\right), ...).$$

(É importante chamar atenção para os destaques utilizados em alguns elementos $(PA)_{r'}$, que enfatizam que $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$).
Portanto, se $s = \frac{r}{m}$, então $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$.

■

Teorema 4.2. *Sejam q e q' números reais positivos, com $q, q' \neq 1$. A progressão geométrica $(PG)_{q'}$ é um refinamento da progressão $(PG)_q$ se, e somente se, $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Inicialmente mostraremos que, se $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$, então $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Sejam $q^{(p+1)}$ e q^p dois termos consecutivos da $(PG)_q$. Se $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$, então $q^{(p+1)}$ e $q^p \in (PG)_{q'}$.

Como $q^{(p+1)}, q^p \in (PG)_{q'}$, então, para algum $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{q^{(p+1)}}{q^p} = (q')^m \Rightarrow q' = q^{\frac{1}{m}}.$$

Portanto, se $(PG)q \subset (PG)_{q'}$, então $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$.
Agora, mostraremos que, se $q' = q^{\frac{1}{m}}$, então $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$. Para isto, considere a seguinte sequência:

$$(PG)_{q'} = (..., (q')^{-(m+1)}, (q')^{-m}, (q')^{-(m-1)}, ..., (q')^{-2}, (q')^{-1}, 1, q', (q')^2, ..., (q')^{(m-1)}, (q')^m,$$

$$(q')^{(m+1)}, ..., (q')^{(2m-1)}, (q')^{2m}, (q')^{(2m+1)}, ...).$$

Se $q' = q^{\frac{1}{m}}$, substituindo q' na $(PG)_{q'}$, obtemos

$$(PG)_{q'} = (..., (q^{\frac{1}{m}})^{-(m+1)}, (q^{\frac{1}{m}})^{-m}, (q^{\frac{1}{m}})^{-(m-1)}, ..., (q^{\frac{1}{m}})^{-2}, (q^{\frac{1}{m}})^{-1}, 1, q^{\frac{1}{m}}, (q^{\frac{1}{m}})^2, ...,$$

$$(q^{\frac{1}{m}})^{(m-1)}, (q^{\frac{1}{m}})^m, (q^{\frac{1}{m}})^{(m+1)}, ..., (q^{\frac{1}{m}})^{(2m-1)}, (q^{\frac{1}{m}})^{2m}, (q^{\frac{1}{m}})^{(2m+1)}, ...),$$

ou seja,

$$(PG)_{q'} = (..., (q^{\frac{1}{m}})^{-(m+1)}, \boxed{q^{-1}}, (q^{\frac{1}{m}})^{-(m-1)}, ..., (q^{\frac{1}{m}})^{-2}, (q^{\frac{1}{m}})^{-1}, \boxed{1}, q^{\frac{1}{m}}, (q^{\frac{1}{m}})^2, ...,$$

$$(q^{\frac{1}{m}})^{(m-1)}, \boxed{q}, (q^{\frac{1}{m}})^{(m+1)}, ..., (q^{\frac{1}{m}})^{(2m-1)}, \boxed{q^2}, (q^{\frac{1}{m}})^{(2m+1)}, ...).$$

(É importante ressaltar que os destaques utilizados em alguns elementos da $(PG)_{q'}$ foram para enfatizar que $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$).
Portanto, se $q' = q^{\frac{1}{m}}$, então $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$. ■

Com as demonstrações dos Teoremas apresentados sobre refinamento de PA e PG, podemos refletir e questionar: "dado um x real, não pertencente inicialmente a uma progressão aritmética ou progressão geométrica dada, é possível obter um refinamento destas sequências, tal que x pertença ao refinamento?" Para essa discussão, vejamos os Teoremas e exemplos abaixo.

4.4.1 Resultados sobre refinamento de PAs

Observamos, com os resultados do tópico anterior, que, ao refinar uma $(PA)_r$, podemos inserir entre os termos consecutivos uma quantidade de termos tão grande quanto se deseje, dependendo da escolha para m, obtendo uma nova $(PA)_{r'}$, que é o refinamento da $(PA)_r$. Com isso, somos seduzidos pela ideia de que, com o refinamento de uma $(PA)_r$, podemos inserir qualquer número que se deseje, mas seria esse um processo possível? Por exemplo, o número $\sqrt{2}$ pertence a algum dos refinamentos da $(PA)_4$?

De modo geral, buscaremos, com o estudo deste tópico, responder ao seguinte questionamento: dados $x \in \mathbb{R}$ e uma $(PA)_r$, com $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, tal que $x \notin (PA)_r$, é possível encontrar um refinamento $(PA)_{r'}$ de $(PA)_r$ de modo que $x \in (PA)_{r'}$? Para encontrarmos a resposta para este questionamento, dividiremos e estudaremos casos.

1º Caso: Dados $x, r \in \mathbb{Q}$, com $r > 0$. Existe uma $(PA)_{r'}$ refinamento da $(PA)_r$, tal que $x \in (PA)_{r'}$? Sim. Para comprovar esse fato vejamos a demonstração do Teorema 4.3.

Teorema 4.3. *Sejam $x, r \in \mathbb{Q}$, com $r > 0$ e uma $(PA)_r$, tal que $x \notin (PA)_r$. Então existe um refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$ tal que $x \in (PA)_{r'}$.*

Demonstração. Seja $(PA)_{r'}$ um refinamento da $(PA)_r$, pelo Teorema 4.1 $r' = \frac{r}{m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos $x \in (PA)_{r'}$, então

$$x = n.\left(\frac{r}{m}\right),$$

para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Sendo $r, x \in \mathbb{Q}$, existem $a, b, p, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, tais que $r = \dfrac{a}{b}$ e $x = \dfrac{p}{q}$. Tomemos $m = a.q$ e $n = b.p$. Dividindo m por n, obtemos

$$\frac{m}{n} = \frac{aq}{bp},$$

ou seja,

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{n}{m}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right),$$

$$x = n.\left(\frac{r}{m}\right).$$

Portanto, $x \in (PA)_{r'}$. ■

2º Caso: Dados $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{Q}$, com $r > 0$. Existe uma $(PA)_{r'}$, refinamento da $(PA)_r$, tal que $x \in (PA)_{r'}$? Não. E, para verificarmos este fato, vejamos a demonstração do Teorema 4.4.

Teorema 4.4. *Sejam $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Q}$ e uma $(PA)_r$, tal que $x \notin (PA)_r$. Então não existe um refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$ tal que $x \in (PA)_{r'}$.*

Demonstração. Se existir um refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$, pelo Teorema 4.1, $r' = \frac{r}{m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Seja $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, vamos supor que $x \in (PA)_{\frac{r}{m}}$, então

$$x = n.\left(\frac{r}{m}\right),$$

para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, ou seja,

$$x = r.\left(\frac{n}{m}\right).$$

Como $\dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{Q}$, concluímos que $x \in \mathbb{Q}$, absurdo.
Portanto, se $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{Q}$, não existe um refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$, tal que $x \in (PA)_{r'}$. ■

No início da Seção 4.4.1 apresentamos o seguinte questionamento: “ o número $\sqrt{2}$ pertence a algum refinamento da $(PA)_4$? Podemos concluir, através do Teorema 4.4, que não é possível. Desse modo, apresentamos o Exemplo 4.5.

Exemplo 4.5. *O número $\sqrt{2}$ não pertence a nenhum refinamento da $(PA)_4$.*

3º Caso: Dados $x \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, com $r > 0$. Existe uma $(PA)_{r'}$, refinamento da $(PA)_r$, tal que $x \in (PA)_{r'}$? Não. E para verificarmos este vejamos a demonstração do Teorema 4.5.

Teorema 4.5. *Sejam $x \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e uma $(PA)_r$, tal que $x \notin (PA)_r$. Então não existe um refinamento $(PA)_{r'}$, da $(PA)_r$, tal que $x \in (PA)_{r'}$.*

Demonstração. Sabemos que, se existir um refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$, pelo Teorema 4.1, $r' = \frac{r}{m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Seja $x \in \mathbb{Q}$, suponhamos que $x \in (PA)_{\frac{r}{m}}$, então

$$x = n\left(\frac{r}{m}\right),$$

para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, ou seja,

$$x = r.\left(\frac{n}{m}\right).$$

Como $\dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, concluímos que $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, absurdo.
Portanto, se $x \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, não existe um refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$, tal que $x \in (PA)_{r'}$. ■

O Exemplo 4.6 é uma aplicação prática deste Teorema.

Exemplo 4.6. *O número 2 não pertence a nenhum refinamento da $(PA)_{\sqrt{7}}$.*

4º Caso: Dados $x, r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, com $r > 0$. Existe uma $(PA)_{r'}$, refinamento da $(PA)_r$, tal que $x \in (PA)_{r'}$? Nem sempre.

A resposta nem sempre nos permite estudar os casos afirmativos e negativos. O Teorema 4.6, que segue, possui a resposta para os casos em que existe o refinamento da $(PA)_r$, tal que $x \in (PA)_{r'}$.

Teorema 4.6. *Sejam $x, r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, com $r > 0$ e uma $(PA)_r$ com $x \notin (PA)_r$. Seja $(PA)_{r'}$ um refinamento da $(PA)_r$ então $x \in (PA)_{r'}$ se, e somente se, $x = n\left(\dfrac{r}{m}\right)$ para algum $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $mdc(m, n) = 1$.*

Demonstração. Note inicialmente que, se $(PA)_{r'}$ é uma refinamento da $(PA)_r$, então segue do Teorema 4.1, que $r' = \dfrac{r}{m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Se $x \in (PA)_{r'}$ então

$$x = n\left(\frac{r}{m}\right),$$

para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $(m, n) = 1$.

A recíproca é imediata, pois se $x = n\left(\dfrac{r}{m}\right)$ para algum $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$, então $x \in (PA)_{r'}$ com $r' = \frac{r}{m}$. ■

A demonstração do Teorema 4.6 é uma caracterização dos $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ que pertencem ao refinamento da $(PA)_{r'}$. Segue o Exemplo 4.7 como uma aplicação prática do Teorema 4.6.

Exemplo 4.7. *O número* $\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$ *pertence a algum refinamento da* $(PA)_{\sqrt{2}}$.

No Exemplo 4.8 apresentamos o caso em que $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não pertence ao refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$.

Exemplo 4.8. *O número* $\sqrt{2}$ *não pertence a qualquer refinamento da* $(PA)_{\sqrt{7}}$.

De fato, pois, se $\sqrt{2} \in (PA)_{\sqrt{7}}$, então

$$\sqrt{2} = n\left(\frac{\sqrt{7}}{m}\right),$$

para algum $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$, ou seja,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{n}{m},$$

absurdo, pois se $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ então $\dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{14}}{7} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

O estudo sobre refinamentos das *PAs* nos permitiu concluir que nem sempre é possível obter um refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$ dada, tal que todo número real pertença a $(PA)_{r'}$. Mas, ao considerar refinamento de *PGs*, seria possível inserir todo número real desejado? Para encontrar a resposta desse questionamento, vejamos a próxima seção.

4.4.2 Resultados sobre refinamento de PGs

Dada *PG* de razão q, com $q > 0$ e $q \neq 1$, conseguimos, com o refinamento dessa sequência, inserir todo número real positivo que desejemos? Por exemplo, dada uma $(PG)_2$, existe algum refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_2$, tal que $\frac{1}{3} \in (PG)_{q'}$?

De modo geral, buscaremos ampliar o nosso estudo sobre refinamento das *PGs* com o seguinte questionamento: dados $x \in \mathbb{R}$ e uma $(PG)_q$ com $q \in \mathbb{R}$, tal que $q > 0$ e $q \neq 1$, é possível encontrar um refinamento $(PG)_{q'}$ de $(PG)_q$ de modo que $x \in (PG)_{q'}$? Outra vez optamos por estudar este questionamento em casos. Vejamos:

1º Caso: Dados $x, q \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$ e $q \neq 1$, existe uma $(PG)_{q'}$ refinamento da $(PG)_q$, tal que $x \notin (PG)_{q'}$? Não. Para comprovarmos esse fato, vejamos o teorema a seguir.

Teorema 4.7. *Sejam* $x, q \in \mathbb{Q}$, *com* $q > 0$ *e* $q \neq 1$ *e uma* $(PG)_q$, *tal que* $x \notin (PG)_q$. *Então, não existe um refinamento* $(PG)_{q'}$ *da* $(PG)_q$ *tal que* $x \in (PG)_{q'}$.

Demonstração. Se $x, q \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$ e $q \neq 1$, então existem $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $mdc(a, b) = mdc(c, d) = 1$, tais que $x = \frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{d}$.

Suponhamos que exista um refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$ tal que $x \in (PG)_{q'}$, então segue do Teorema 4.2, que $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Se $x \in (PG)_{q'}$, então

$$x = q^{\left(\frac{n}{m}\right)} \Rightarrow x^m = q^n, \tag{4.1}$$

para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Consideraremos o caso em que $n > 0$, para o caso em que $n < 0$ a demonstração é análoga.

Como $x = \frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{d}$, ao substituir na equação (4.1), obtemos

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\left(\frac{n}{m}\right)} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^n,$$

isto é,

$$a^m \cdot d^n = b^m \cdot c^n. \tag{4.2}$$

Se a, b, c, d são números primos, como $mdc(a, b) = mdc(c, d) = 1$, da igualdade (4.2) temos $d|b^m$ e $a|c^n$, pela Propriedade Fundamental dos Primos (HEFEZ, 2016) $d|b$ e $a|c$. Se $d|b$ e $a|c$ então $d = b$ e $a = c$. Logo, $x = q \in (PG)_q$, absurdo, pois $x \notin (PG)_q$.

Se a, b, c, d não são números primos, então pelo Teorema Fundamental da Aritmética (HEFEZ, 2016) existem $p_1, p_2, ..., p_k, f_1, f_2, ..., f_t$ números primos, tais que $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$ e $c = f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_t$. Assim

$$(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k)^m \cdot d^n = b^m \cdot (f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_t)^n \tag{4.3}$$

como $mdc(a, b) = mdc(c, d) = 1$, da igualdade (4.3), sabemos que existe algum p_i, para $1 \leq i \leq k$, que divide alguns dos fatores $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_t$. Suponhamos que $p_1|f_1$, como p_1 e f_1 são números primos, então $p_1 = f_1$. Utilizando a mesma ideia, concluímos que $p_2 = f_2$ e assim sucessivamente, para todo $k \leq t$. Da igualdade (4.3), sabemos também que existe algum f_p, para $1 \leq p \leq t$, que divide alguns dos fatores $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Suponhamos que $f_1|p_1$, como p_1 e f_1 são números primos, então $p_1 = f_1$. Utilizando a mesma ideia, concluímos que $p_2 = f_2$ e assim sucessivamente, para todo $t \leq k$. Se $k \leq t$ e $t \leq k$ acontecem simultaneamente, então $k = t$. Portanto, $a = c$

Suponhamos sem perda de generalidade, que $m > n$, como $a = c$ podemos reescrever a equação (4.3) do seguinte modo:

$$(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k)^{m-n} \cdot d^n = b^m,$$

Se de fato isso ocorresse, então $p_i|b$, para algum $1 \leq i \leq k$, e implicaria no $mdc(a, b) \neq 1$, pois p_i é um fator de a, absurdo. Portanto, $m = n$ e $d = b$. Logo $x = q \in (PG)_q$, absurdo, pois $x \notin (PG)_q$.

Portanto, se $x, q \in \mathbb{Q}$, não existe um refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$ tal que $x \in (PG)_{q'}$. ■

O exemplo a seguir foi um dos questionamentos inicialmente apresentados nesta seção, onde concluímos, através do Teorema 4.7, que para $x, q \in \mathbb{Q}$ não é possível obter um refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$ tal que o $x \in \mathbb{Q}$ pertença aos refinamentos.

Exemplo 4.9. *O número* $\dfrac{1}{3}$ *não pertence a nenhum refinamento da* $(PG)_2$*.*

De fato, pelo Teorema 4.2, se $(PG)_{q'}$ é um refinamento da $(PG)_2$, então $q' = 2^{\frac{1}{m}}$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $\frac{1}{3} \in (PG)_{2^{\frac{1}{m}}}$, então

$$\frac{1}{3} = 2^{n.(\frac{1}{m})}, \tag{4.4}$$

para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Podemos reescrever a equação (4.4) do seguinte modo:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^m = 2^n. \tag{4.5}$$

Suponhamos que existem $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$, que satisfazem a igualdade (4.5).
Se $m, n > 0$, então $\left(\dfrac{1}{3}\right)^m = 2^n$, absurdo, pois, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^m < 1$ e $2^n > 2$.
Se $m > 0$ e $n < 0$, então

$$3^m = 2^n, \tag{4.6}$$

da igualdade (4.6) temos que $3|2^n$. Se $3|2^n$, pela Propriedade Fundamental dos números Primos (HEFEZ, 2016) $3|2$, absurdo.

Portanto, não existem $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$ que satisfaçam a equação (4.5). Logo, $\dfrac{1}{3}$ não pertence a qualquer refinamento da $(PG)_2$.

2º Caso: Dados $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$ e $q \neq 1$, existe uma $(PG)_{q'}$ refinamento da $(PG)_q$, tal que $x \in (PG)_{q'}$? Nem sempre.

A resposta nem sempre nos permite pensar em situações onde não conseguimos determinar um refinamento da $(PG)_q$ com $q \in \mathbb{Q}$, tal que um número irracional qualquer não pertença a qualquer refinamento, sendo esse o caso apresentado no Exemplo 4.10; E outras em que conseguimos determinar o refinamento de uma $(PG)_q$ com $q \in \mathbb{Q}$, tal que um número irracional qualquer pertence ao refinamento, conforme apresentado no Exemplo 4.11

Exemplo 4.10. *O número* $\sqrt{3}$ *não pertence a qualquer refinamento da* $(PG)_2$*.*

De fato, pelo teorema 4.2, se $(PG)_{q'}$ é um refinamento da $(PG)_2$, então $q' = 2^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $\sqrt{3} \in (PG)_{2^{\frac{1}{m}}}$, então

$$\sqrt{3} = 2^{n.(\frac{1}{m})} \tag{4.7}$$

para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Podemos reescrever a equação (4.7) da seguinte forma:

$$3^m = 2^{2n} \tag{4.8}$$

Suponhamos que existem $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$, que satisfazem a igualdade (4.8).
Se $m, n > 0$, então

$$3^m = 2^{2n}, \tag{4.9}$$

da igualdade (4.9) temos que $2|3^m$. Se $2|3^m$, pela Propriedade Fundamental dos números Primos (HEFEZ, 2016) $2|3$, absurdo.

Se $m > 0$ e $n < 0$, então

$$3^m = \left(\frac{1}{4}\right)^n, \tag{4.10}$$

absurdo, pois, $0 < \left(\frac{1}{4}\right)^n < 1$ e $3^m > 1$.
Portanto, não existem $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$ que satisfaçam a equação (4.5). Logo, $\sqrt{3}$ não pertence a qualquer refinamento da $(PG)_2$.

Exemplo 4.11. *O número $\sqrt{2}$ pertence a algum refinamento da $(PG)_2$.*

De fato, basta tomar $m = 4$, e teremos a $(PG)_{2^{\frac{1}{4}}}$ refinamento da $(PG)_2$. Note que, $\sqrt{2} \in (PG)_{2^{\frac{1}{4}}}$, uma vez que $\sqrt{2} = (2^{\frac{1}{4}})^2$. Outro refinamento foi mostrado no Exemplo 4.4 da Seção 4.3. Vejamos outra situação para o refinamento das PGs.

3º Caso: Dados $x \in \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, com $q > 0$ e $q \neq 1$, existe uma $(PG)_{q'}$, refinamento da $(PG)_q$, tal que $x \in (PG)_{q'}$? Nem sempre. A resposta nem sempre nos permite estudar casos em que x pertence a algum refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$ e os casos em que não existe esse refinamento. Vejamos os exemplos:

Exemplo 4.12. *O número 2 pertence a algum refinamento da $(PG)_{2^{\frac{3}{4}}}$.*

Pelo Teorema 4.2, se $(PG)_{q'}$ é um refinamento da $(PG)_q$ então $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Para $m = 3$, temos que $q' = \left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$, isto é, $q' = 2^{\frac{1}{4}}$. Como $2 = (2^{\frac{1}{4}})^4$, podemos concluir $2 \in (PG)_{2^{\frac{1}{4}}}$.

Exemplo 4.13. *O número 3 não pertence a nenhum refinamento da $(PG)_{2^{\frac{3}{4}}}$.*

De fato, pelo teorema 4.2, se $(PG)_{q'}$ é um refinamento da $(PG)_{2^{\frac{3}{4}}}$, então $q' = \left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $3 \in (PG)_{2^{\frac{3}{4m}}}$, então

$$3 = 2^{n.(\frac{3}{4m})} \tag{4.11}$$

para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Podemos reescrever a equação (4.11) da seguinte forma:

$$3^{4m} = 2^{3n} \tag{4.12}$$

De modo análogo ao que foi realizado no Exemplo 4.9 mostramos que não existem $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$ que satisfazem a igualdade (4.12).
Portanto, não existem $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$ que satisfaçam a equação (4.12). Logo, 3 não pertence a qualquer refinamento da $(PG)_{2^{\frac{3}{4}}}$.

4º Caso: Dados $x, q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ com $q > 0$ e $q \neq 1$, existe uma $(PG)_{q'}$, refinamento da $(PG)_q$, tal que $x \in (PG)_{q'}$? Nem sempre. Para comprovarmos esse fato, vejamos os exemplos que seguem.

Exemplo 4.14. *O número $\sqrt{2}$ não pertence a qualquer refinamento da $(PG)_{\sqrt{3}}$.*

De fato, pelo teorema 4.2, se $(PG)_{q'}$ é um refinamento da $(PG)_{\sqrt{3}}$, então $q' = (\sqrt{3})^{\frac{1}{m}}$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $\sqrt{2} \in (PG)_{\sqrt{3}^{\frac{1}{m}}}$, então

$$\sqrt{2} = (\sqrt{3})^{\frac{n}{m}} \tag{4.13}$$

para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Realizando algumas manipulações algébricas, podemos reescrever a equação 4.13 como segue:

$$2^m = 3^n. \tag{4.14}$$

De modo análogo ao que foi realizado no Exemplo 4.9, mostramos que não existem $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$ que satisfazem a igualdade (4.14).
Portanto, $\sqrt{2}$ não pertence a qualquer refinamento da $(PG)_{\sqrt{3}}$.

No Exemplo 4.14 apresentamos uma situação em que o número irracional não pertence a $(PG)_q$, com $q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. No Exemplo 4.15, veremos uma situação em que isso ocorre.

Exemplo 4.15. *O número $\sqrt[4]{3}$ pertence ao refinamento da $(PG)_{\sqrt{3}}$.*

O Teorema 4.8 é uma caracterização para o segundo e quarto casos estudados no refinamento da $(PG)_q$ na Seção 4.4.2, em que a resposta para os questionamentos apresentados foi "nem sempre", ou seja, para que um valor de $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ pertença aos refinamentos da $(PG)_q$, com $q \in \mathbb{R}$, então $x = q^{\frac{n}{m}}$, para algum $n, m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Teorema 4.8. *Sejam $q \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ com $q > 0$ e $q \neq 1$, e $x \notin (PG)_q$. Seja $(PG)_{q'}$ um refinamento da $(PG)_q$. Se $x = q^{\frac{n}{m}}$, para algum $n, m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, com $m > 0$, então $x \in (PG)_{q'}$.*

Demonstração. Basta notar que, sendo $x = q^{\frac{n}{m}}$, $x \in (PG)_{q'}$. ■

Com isso, mostramos que, dada uma progressão geométrica, nem sempre é possível encontrar um refinamento de tal modo que se possam inserir todos os números racionais e irracionais que se desejem.

4.4.3 Discussões dos casos de refinamentos vistos anteriormente

Diante das discussões e resultados apresentados no tópico anterior, percebemos que nem sempre conseguimos inserir um número real a um refinamento de uma progressão geométrica de razão real q, com $q > 0$ e $q \neq 1$, ou a uma progressão aritmética de razão real $r > 0$.

Então, dados uma $(PA)_r$ com $r \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, quando será possível determinar uma $(PA)_{r'}$ refinamento da $(PA)_r$ tal que $x \in (PA)_{r'}$? Na Tabela 4.4, apresentamos os resultados dos estudos que respondem a esse questionamento.

Tabela 4.4 – Resultados sobre refinamento das PAs

x	r	Resposta
$x \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{Q}$	Sim
$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{Q}$	Não
$x \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	Não
$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	Nem sempre

Fonte: Elaboração própria

Quando estamos trabalhando com refinamento de PGs, a situação será um pouco mais delicada, visto que nem sempre encontraremos um refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$, tal que $x \in (PG)_{q'}$. Na Tabela 4.5, apresentamos os resultados sobre o refinamento dividido em casos.

Tabela 4.5 – Resultados sobre refinamento da PGs

x	q	Resposta
$x \in \mathbb{Q}$	$q \in \mathbb{Q}$	Não
$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$q \in \mathbb{Q}$	Nem sempre
$x \in \mathbb{Q}$	$q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	Nem sempre
$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	Nem sempre

Fonte: Elaboração própria

Com o refinamento das PAs ou PGs, obtemos novas sequências também de PAs e PGs, sendo que a sequência refinada está contida no refinamento. Os resultados apresentados nos mostraram que nem sempre é possível determinar um refinamento dessas sequências tal que todo número real positivo x pertença a algum refinamento. Para esclarecer o que acontece com o refinamento destas sequências, tomemos, como exemplo, o refinamento de uma $(PG)_{10}$.

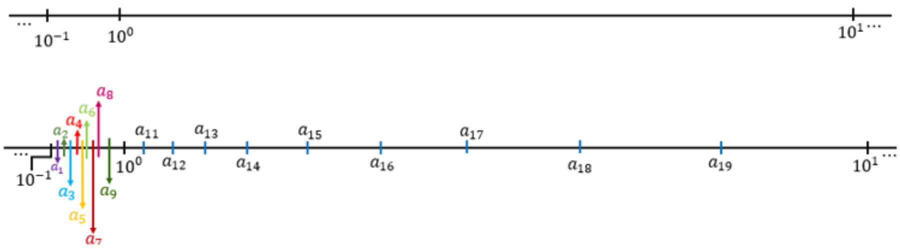
4.4.4 Uma pergunta final motivadora para os estudos subsequentes

Se $(PG)_{q'}$ é um refinamento da $(PG)_{10}$, pelo Teorema 4.2, $q' = 10^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Tomemos como exemplo $m = 10$, isto é, $q' = 10^{\frac{1}{10}}$. Como estamos trabalhando com uma PG, então cada termo do refinamento será dado pelo produto entre seu antecessor e a razão, ou seja,

$$(PG)_{10^{\frac{1}{10}}} = (..., 10^{-1}, 10^{-\frac{9}{10}}, 10^{-\frac{8}{10}}, ..., 10^0, 10^{\frac{1}{10}}, 10^{\frac{2}{10}}, ..., 10^1, 10^{\frac{11}{10}}, ...)$$

Na Figura 4.7 apresentamos, através de uma reta, a $(PG)_{10}$ e, em seguida, o seu refinamento para $m = 10$.

Figura 4.7 – Refinamento da $(PG)_{10}$



Fonte: Elaboração própria

Quando refinamos, inserimos a cada dois termos consecutivos da $(PG)_{10}$ uma certa quantidade de termos dependendo da escolha de m. Cada termo a_i, com $1 \leq i \leq 9$, são os termos da $(PG)_{10^{\frac{1}{10}}}$ que estão entre os termos consecutivos 10^{-1} e 10^{0}, que também são termos da $(PG)_{10}$. Os a_i onde $11 \leq i \leq 19$ são os termos da $(PG)_{10^{\frac{1}{10}}}$ que estão entre os termos consecutivos 10^{0} e 10^{1}, que também são termos da $(PG)_{10}$. Do mesmo modo acontece a cada dois termos consecutivos da $(PG)_{10}$ e, com isso, obtemos uma $(PG)_{10^{\frac{1}{10}}}$, que é um refinamento da $(PG)_{10}$. Portanto, $(PG)_{10} \subset (PG)_{10^{\frac{1}{10}}}$.

Observe que, na representação geométrica através de uma reta do refinamento proposto, a cada intervalo entre dois termos consecutivos da $(PG)_{10}$, obtemos dez novos intervalos, ao refinarmos a $(PG)_{10^{\frac{1}{10}}}$. Tomando novamente $m = 10$, obtemos uma nova $(PG)_{10^{\frac{1}{100}}}$, em que a cada dois termos consecutivos teremos outros dez intervalos.

Figura 4.8 – Refinamento da $(PG)_{10}$

Fonte: Elaboração própria

Com a Figura 4.8 ampliada no intervalo $[10^{-1}, 10^{0}]$, é possível perceber que, no refinamento de uma progressão geométrica, a diferença entre dois termos consecutivos tende a zero. Situação semelhante acontece com o refinamento das progressões aritméticas, ou seja, a medida em que vamos refinando, refinando e/ou tomando valores cada vez maiores para

m, podemos obter sequências nas quais a diferença entre dois termos consecutivos seja tão pequena quanto se deseje. Essa observação é um ponto forte em nosso estudo, por isso precisa ser provada. No Capítulo 7, veremos como estruturar a demonstração para esta pergunta, mas, antes de tudo, precisamos discutir como aplicar a ideia de refinamento para determinar os logaritmos, que será nosso objeto de estudo para os próximo capítulos.

5 Usando PA e PG para definir o logaritmo: Sistema Logarítmico

No capítulo anterior, apresentamos o conceito de refinamento para as progressões aritméticas e para as progressões geométricas e, a partir desses, estudamos todas as possibilidades em que, dado um $x \in \mathbb{R}$ este pertença a algum refinamento destas sequências. Veremos, neste capítulo, o objetivo por trás do refinamento dessas sequências.

Para tanto, apresentaremos a definição, que nos permite relacionar os termos de uma $(PG)_q$ aos termos de uma $(PA)_r$ e vice-versa. Em seguida propomos a definição de um sistema logarítmico. Discutiremos alguns exemplos que nos permitirão compreender como determinar os logaritmos por meio destas sequências, sendo que aplicaremos a ideia de refinamento e usaremos os resultados estudados para entender e expressar todo o sentimento e dificuldades em calcular os logaritmos através deste processo, resgatando assim o elo perdido das PAs e PGs com os logaritmos.

5.1 Definição importante para conceitualização da definição do Sistema Logarítmico

Apresentamos, no capítulo anterior, a nossa definição para progressões aritmética e geométrica, com o intuito de formalizar alguns conceitos e resultados que serão importantes para compreender e definir os logaritmos por meios destas sequências. A seguir, apresentaremos a definição que associa uma $(PG)_q$ a uma $(PA)_r$ e vice-versa.

Definição 5.1. *Sejam $r, q \in \mathbb{R}$, com $r, q > 0$ e $q \neq 1$. Diremos que a* ***$(PG)_q$ está associada a $(PA)_r$*** *fazendo a seguinte associação: cada termo q^n da $(PG)_q$, para $n \in \mathbb{Z}$, está associado a um único termo nr da $(PA)_r$.*

Exemplo 5.1. *A $(PG)_{10}$ e a $(PA)_1$ estão associadas, uma vez que cada termo da $(PG)_{10}$ está associado a um único termo na $(PA)_1$, como mostra a tabela abaixo.*

Tabela 5.1 – $(PG)_{10}$ associada à $(PA)_1$

...	10^{-n}	...	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	...	10^{n}	...
...	$-n$	...	-2	-1	0	1	2	...	n	...

Fonte: Elaboração própria

Diante da definição apresentada e dos Teoremas 4.1 e 4.2 estudados no capítulo anterior sobre refinamento das PAs e PGs, descrevemos a seguinte observação:

Observação 5.1. *Sejam $r, q \in \mathbb{R}$, com $r, q > 0$ e $q \neq 1$. Seja a $(PG)_{q'}$ um refinamento da $(PG)_q$, com $q' = q^{\frac{1}{m}}$ para algum $m \in \mathbb{N}$, e a $(PA)_{r'}$ um refinamento da $(PA)_r$, com $r' = \frac{r}{m}$ para algum $m \in \mathbb{N}$. O refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$ gera um refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$ e, se a $(PG)_q$ e a $(PA)_r$ estão relacionadas, então o refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$ está associado ao refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$. Do mesmo modo, o refinamento da $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$, gera um refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$, de modo que se $(PG)_q$ e a $(PA)_r$ estão associadas, então o refinamento o refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$ está associado ao refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$.*

Para compreendermos a finalidade de relacionar as progressões aritméticas e geométricas da forma apresentada na Definição 5.1, vejamos as definições apresentadas na próxima seção.

5.2 A definição de Sistema Logarítmico

Nesta seção, apresentaremos a definição para um sistema logarítmico e, a partir desse, também a definição de logaritmo. Vejamos:

Definição 5.2. *Sejam $r, q \in \mathbb{R}$, com $r, q > 0$ e $q \neq 1$. O **sistema logarítmico ou sistema de logaritmo $(SL)_{q,r}$** é o conjunto formado pelas sequências $(PG)_q$ e $(PA)_r$, de modo que $(PG)_q$ está associada à $(PA)_r$.*

Exemplo 5.2. *A associação da $(PG)_{10^{\frac{1}{2}}}$ com a $(PA)_{\frac{1}{2}}$ forma o $(SL)_{10^{\frac{1}{2}},\frac{1}{2}}$.*

Observe que o Exemplo 5.1, composto pelas sequências $(PG)_{10}$ e $(PA)_1$, representa o sistema logarítmico $(SL)_{10,1}$ e o Exemplo 5.2, composto por $(PG)_{10^{\frac{1}{2}}}$ e $(PA)_{\frac{1}{2}}$, que são refinamentos de $(PG)_{10}$ e $(PA)_1$, respectivamente, representa o sistema logarítmico $(SL)_{10^{\frac{1}{2}},\frac{1}{2}}$.

Para cada escolha de valores de q (razão da progressão geométrica) e de r (razão da progressão aritmética), determina-se um sistema de logaritmos.

Definição 5.3. *Dado um sistema logarítmico $(SL)_{q,r}$ com $r, q > 0$ e $q \neq 1$, e $(PG)_{q'}$ um refinamento qualquer da $(PG)_q$, o **logaritmo** do termo $(q')^n \in (PG)_{q'}$, para $n \in \mathbb{Z}$, é o seu correspondente $n \cdot r' \in (PA)_{r'}$ e é denotado por*

$$\text{“}\log\text{”}(q')^n = nr'.$$

Como o termo 1 da $(PG)_q$ corresponde ao termo 0 da $(PA)_r$, temos $\log 1 = 0$.

O Teorema 5.1, apresentado mais adiante, assegura que essa é uma boa definição, não dependendo do refinamento. Como ainda não conhecemos o conceito de base, representaremos os logaritmos por “ log ”.

Exemplo 5.3. *No $(SL)_{10,1}$ representado na Tabela 5.1, o “ log ”$10 = 1$, “ log ”$10^2 = 2$ e, de modo geral, “ log ”$10^n = n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Observe também no $(SL)_{10^{\frac{1}{2}},\frac{1}{2}}$, como $q = 10^{\frac{1}{2}}$*

e $r = \frac{1}{2}$, *então* "$\log$"$10^{-\frac{3}{2}}$ = "$\log$" $\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = -3 \cdot \frac{1}{2}$. *De modo geral* "$\log$" $\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{n} = n \cdot \frac{1}{2}$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 5.2. *Podemos observar que um refinamento* $(PG)_{q'}$ *da* $(PG)_q$ *que forma o sistema logaritmo* $(SL)_{q,r}$ *gera a* $(PA)_{r'}$, *refinamento da* $(PA)_r$, *e, consequentemente, gera um sistema logarítmico* $(SL)_{q',r'}$, *nesse caso representaremos esse fato como* $(SL)_{q,r} \subset (SL)_{q',r'}$. *Do mesmo modo que o refinamento* $(PA)_{r'}$ *da* $(PA)_r$ *que forma o sistema logaritmo* $(SL)_{q,r}$ *gera a* $(PG)_{q'}$ *refinamento da* $(PG)_q$, *e, consequentemente gera um sistema logarítmico* $(SL)_{q',r'}$. *Nesse caso representaremos esse fato como,*$(SL)_{q,r} \subset (SL)_{q',r'}$.

Definição 5.4. *Dizemos que o sistema de logarítmico* $(SL)_{q',r'}$ *é um refinamento do sistema logarítmico* $(SL)_{q,r}$ *quando* $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$, *está associada a* $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$ *e vice-versa.*

A Definição 5.3 nos permite, por meio de uma progressão aritmética de razão r e uma progressão geométrica de razão q, que satisfazem as seguintes condições $r, q \in \mathbb{R}, r, q > 0$ *e* $q \neq 1$, representar um Sistema Logarítmico e calcular os logaritmos dos termos que pertencem a essas sequências. Mas como determinar os logaritmos dos números que não pertencem inicialmente a PG e PA que formam o Sistema Logarítmico? O nosso objetivo ao definir o conceito de refinamento, assim como apresentar a definição de sistema de logaritmos foi para que pudéssemos através das associação entre as PAs e PGs construir o conceito de logaritmo resgatando a ligação entre esses conteúdos. No decorrer do texto, discutiremos se é possível encontrar o logaritmo de todo número real aplicando a ideia de refinamento.

Percebemos aqui que o refinamento das sequências nos permitirá determinar outros logaritmos. Ainda não sabemos ao certo se, com este processo associadas as PAs e PGs, conseguimos determinar o logaritmo de todo número real positivo que se deseje (esse é um estudo que faremos ainda neste capítulo). Porém existe um detalhe importante que talvez todas as definições e observação nos proporcionaram: se, ao refinarmos uma PG, o logaritmo se modifica? Para a resposta desse questionamento vejamos o próximo tópico.

5.2.1 Resultado sobre a definição de sistemas logarítmicos

Na definição de um $(SL)_{q,r}$, vimos que cada termo da $(PG)_q$ é associado a um único elemento na $(PA)_r$. Das observações expostas após cada definição, percebemos que o refinamento da PA e PG gera novas sequências de PA e PG que estão associadas. Este fato nos faz refletir e questionar se, dado um $(SL)_{q,r}$, ao refinarmos, um mesmo número pode ter logaritmos distintos? Para solução do problema, temos o seguinte Teorema:

Teorema 5.1. *Sejam* $(PG)_{q'}$ *e* $(PG)_{q''}$, *ambos refinamentos da* $(PG)_q$, *tal que* $q \in \mathbb{R}$, *com* $q > 0$ *e* $q \neq 1$. *Se* x *pertence aos refinamentos da* $(PG)_q$, *então* $\log x$ *não se modifica.*

Demonstração. Se $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$, segue do Teorema 4.2, que $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Se $x \in (PG)_{q'}$, então $x = q^{\left(\frac{1}{m}\right)t}$, para algum $t \in \mathbb{Z}$.

Pela definição do sistema logarítmico, o $\log x$ é o seu correspondente na $(PA)_{r'}$, ou seja, $\log x = r\left(\dfrac{t}{m}\right)$.

Se $(PG)_q \subset (PG)_{q''}$, segue do Teorema 4.2, que $q' = q^{\frac{1}{m'}}$, para algum $m' \in \mathbb{N}$. Se $x \in (PG)_{q''}$, então $x = q^{\left(\frac{1}{m'}\right)\cdot p}$ para algum $p \in \mathbb{Z}$.

Novamente pela definição do sistema logarítmico, o $\log x$ é o seu correspondente na $(PA)_{r''}$, ou seja , $\log x = r\left(\dfrac{p}{m'}\right)$.

Segue que

$$q^{\frac{t}{m}} = q^{\frac{p}{m'}}. \tag{5.1}$$

Elevando ambos os membros da equação (5.1) a $(m \cdot m')$, obtemos

$$q^{t\cdot m'} = q^{p\cdot m} \Rightarrow t \cdot m' = p \cdot m \Rightarrow \frac{t}{m} = \frac{p}{m'}.$$

Portanto, em um sistema dado, um mesmo número não pode ter dois logaritmos distintos.

■

Esse Teorema nos assegura que a Definição 5.3 é boa, dado que cada termo de qualquer refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$ possui um único correspondente na $(PA)_{r'}$ refinamento da $(PA)_r$ e vice-versa. Apresentaremos, no próximo tópico, alguns exemplos, com a finalidade de proporcionar uma discussão construtiva acerca da definição de um Sistema Logarítmico, em que analisaremos se é possível, utilizando o refinamento das sequências que compõem o sistema, determinar o logaritmo de todo número real.

5.2.2 Exemplos de sistemas logarítmicos

"Na definição de um Sistema Logarítmico, observamos que o logaritmo do número $q^n \in (PG)_q$ é o seu correspondente $nr \in (PA)_r$, então, dado $x \in \mathbb{R}$ e um $(SL)_{q,r}$, com $q, r \in \mathbb{R}$, tal que $q, r > 0$ e $q \neq 1$, é sempre possível determinar $\log x$?" Esse é um fato bastante curioso, pois, se possível determinar o logaritmo de todo x real, esse deve ser escrito como potência de base q, mas é possível escrever todos os números reais de tal forma?

Para uma melhor compreensão e estudo do questionamento apresentado, com a finalidade de obter a resposta para o mesmo, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5.4. *Dados $q = 4$ e $r = 1$, determinamos o sistema de logaritmos $(SL)_{4,1}$. Não é possível determinar* "$\log$"10 *através do refinamento do sistema de logaritmos $(SL)_{4,1}$. Segue a discussão do exemplo.*

Podemos representar o Exemplo 5.4 como mostra a Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – $(SL)_{4,1}$

x	...	4^{-n}	...	4^{-2}	4^{-1}	4^0	4^1	4^2	...	4^n	...
$\log x$	...	$-n$	...	-2	-1	0	1	2	...	n	...

Fonte: Elaboração própria

Por definição, sabemos que “ log ”$(4^{-1}) = -1$, “ log ”$(4^0) = 0$, “ log ”$(4^2) = 2$ e assim sucessivamente. Observe que todos os logaritmos das potências de base 4 estão bem definidos. Mas como determinar, por exemplo, “ log ”10 usando o $(SL)_{4,1}$? Observe que $10 \notin (PG)_4$, porém $4 < 10 < 4^2$ e, se “ log ”$(4) = 1$ e “ log ”$(4^2) = 2$, então $1 < \log 10 < 2$. Como proceder para obter o logaritmo procurado?

Neste capítulo, apresentamos a Definição 5.1, na qual observamos que cada elemento da $(PG)_q$ está associado a um único elemento da $(PA)_r$, bem como concluímos que, ao refinar essas sequências, geramos uma $(PG)_{q'}$ tal que $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$ e, consequentemente, geramos também uma $(PA)_{r'}$ tal que $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$; e que, no Sistema Logarítmico, todos os elementos destes refinamentos se relacionam.

Diante das definições e observações apresentadas, conseguiríamos refinar a $(PG)_4$, de tal modo que o número 10 pertencesse a algum desses refinamentos? Ou seja,

$$10 = 4^{\frac{n}{m}},$$

para algum $n, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 0$. Para obter tal resposta, só precisamos voltar ao Teorema 4.9, demonstrado no capítulo anterior, para perceber que, por meio do processo de refinamento, isso não é possível, isto é, em uma $(PG)_q$ de razão racional não é possível refinar para obter que um número racional pertença a algum dos seus refinamentos.

Para o exemplo em questão, tomamos apenas um número que não pertence a $(PG)_4$, no caso o 10, e usamos a ideia de refinamento para que pudéssemos melhor compreender o problema, ficando claro que, para esse sistema, não é possível obter o logaritmo de qualquer número desejado.

Outro detalhe importante a ser observado no exemplo 5.4: qual a base destes logaritmos? Presumimos que, ao expressarmos “ log ”$(4) = 1$, “ log ”$(4^2) = 2$, o leitor tenha observado que, para obter tais resultados, a base destes logaritmos deve ser 4, *visto que chamamos de logaritmo dos números que pertencem* $(PG)_4$ *aos seus correspondentes na* $(PA)_1$*, então a base dos logaritmos desse sistema será o valor que, ao ser elevado a algum elemento da* $(PA)_1$*, obtemos o correspondente deste na* $(PG)_4$. De fato, $4^1 = 4$, $4^2 = 16$ e assim sucessivamente.

Notemos que a base para o sistema em discussão foi o termo da $(PG)_4$, que tem o número 1 como o seu correspondente na $(PA)_1$. Em consequência, definimos o conceito de base do logaritmo.

Definição 5.5. *Sejam* $r, q \in \mathbb{R}, r, q > 0$ *e* $q \neq 1$ *e um sistema de logaritmos* $(SL)_{q,r}$*, se existir um termo na* $(PG)_q$ *que tem como corresponde na* $(PA)_r$ *o número 1, diremos que esse termo é a* ***base do sistema de logaritmos*** $\boldsymbol{(SL)_{q,r}}$.

Exemplo 5.5. *O* $(SL)_{\pi,0{,}8}$ *tem como base* $\pi^{\frac{5}{4}}$*. Segue a discussão do exemplo.*

Por que o sistema representado no Exemplo 5.5 tem como base o número $\pi^{\frac{5}{4}}$? Percebemos, através da representação do $(SL)_{\pi,0{,}8}$ na Tabela 5.3, que $1 \notin (PG)_{0{,}8}$, então, para tentarmos obter a base do sistema, vamos refinar a $(PG)_\pi$ e com isso estaremos refinando o sistema de logaritmos $(SL)_{\pi,0{,}8}$, sendo que o refinamento da $(PG)_\pi$ gera o refinamento da $(PA)_{0{,}8}$, também poderíamos optar pelo refinamento da $(PA)_{0,8}$, pois esse refinamento também gera o refinamento da $(PG)_\pi$ e, consequentemente do $(SL)_{\pi,0,8}$.

Tabela 5.3 – $(SL)_{\pi,0,8}$

x	...	π^{-n}	...	π^{-2}	π^{-1}	π^0	π^1	π^2	...	π^n	...
$\log x$	...	$-n \cdot (0,8)$	...	$-2 \cdot (0,8)$	$-1 \cdot (0,8)$	0	$0,8$	$2.(0,8)$	...	$n \cdot (0,8)$	...

Fonte: Elaboração própria

Como escolha, iniciaremos o refinamento pela $(PG)_\pi$, então, pelo Teorema 4.2 $q' = \pi^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, tomemos $m = 4$, ou seja, $q' = \pi^{\frac{1}{4}}$. Este refinamento gera o refinamento da $(PA)_{0,8}$ que, pelo Teorema 4.1, $r' = \frac{0,8}{m}$, consequentemente $r' = \frac{0,8}{4} \Rightarrow r' = 0,2$, formando o sistema de logaritmo representado na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – $(SL)_{\pi,0,8} \subset (SL)_{\pi^{\frac{1}{4}},0,2}$

x	...	π^1	$\pi^{\frac{5}{4}}$	$\pi^{\frac{6}{4}}$	$\pi^{\frac{7}{4}}$	π^2	...	π^n	$\pi^{n+\frac{1}{4}}$	...
$\log x$	...	$0,8$	1	$1,2$	$1,4$	$2.(0,8)$	...	$n.(0,8)$	$0,8n + 0,2$	...

Fonte: Elaboração própria

Ao realizarmos o refinamento, obtivemos, como base do $(SL)_{\pi,0,8}$ o valor $\pi^{\frac{5}{4}}$, assim como é a base de qualquer refinamento deste sistema, como foi o caso do $(SL)_{\pi^{\frac{1}{4}},0,2}$, visto que $\pi^{\frac{5}{4}} \in (PG)_{\pi^{\frac{1}{4}}}$ tem como correspondente $1 \in (PA)_{0,2}$.

O propósito para com este exemplo é discutir que a base dos logaritmos pertencentes ao sistema está intimamente associada à PA, e, sempre que a razão desta for racional, conseguimos determinar a base, visto que o Teorema 4.3 nos garante que sempre será possível obter, com o refinamento de uma $(PA)_r$, com $r \in \mathbb{Q}$, qualquer número $x \in \mathbb{Q}$. Vejamos a representação do exemplo na Tabela 5.4.

Diante da definição apresentada, percebemos que a expressão "se existir" nos permite assimilar que nem sempre será possível determinar a base de todos os sistemas logarítmicos. Mas por que isso acontece? De modo geral, em um dado um sistema logarítmico, é sempre possível determinar um $x \in \mathbb{R}$, tal que "$\log$"$x = 1$? Para melhor entendermos a Definição 5.5 e os questionamentos, vamos observar o exemplo a seguir.

Exemplo 5.6. *O $(SL)_{\frac{5}{6},\sqrt{7}}$ não possui base. Segue a discussão do exemplo.*

Tabela 5.5 – $(SL)_{\frac{5}{6},\sqrt{7}}$

x	...	$(\frac{5}{6})^{-n}$	...	$(\frac{5}{6})^{-2}$	$(\frac{5}{6})^{-1}$	$(\frac{5}{6})^0$	$(\frac{5}{6})^1$	$(\frac{5}{6})^2$	...	$(\frac{5}{6})^n$	...
$\log x$	...	$-n\sqrt{7}$	...	$2\sqrt{7}$	$-\sqrt{7}$	0	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$	...	$n\sqrt{7}$	...

Fonte: Elaboração própria

Observe, pela Tabela 5.5, do Exemplo 5.6, que o número 1 não aparece inicialmente no sistema apresentado e, para definirmos a base do $(SL)_{\frac{5}{6},\sqrt{7}}$, devemos obter o valor pertencente à $(PG)_{\frac{5}{6}}$ que tem o número 1 como o seu correspondente na $(PA)_{\sqrt{7}}$. Dessa forma, como discutido anteriormente, precisamos refinar o sistema logarítmico $(SL)_{\frac{5}{6},\sqrt{7}}$ dado, ou seja, no caso em questão se faz necessário o refinamento da $(PA)_{\sqrt{7}}$ para inserir o número 1 a esse refinamento. Lembramos que, ao refinar esta sequência, estamos refinando o sistema, uma vez que cada termo da PG está associado a um único elemento da PA e vice-versa. Mas isso seria um processo possível usando as ideias de refinamento?

De acordo com o Teorema 4.5, não conseguimos obter, com o refinamento de uma PA de razão irracional, um número racional. Desse modo, não conseguimos obter, por meio do refinamento, a base dos logaritmos representado na Tabela 5.5, visto que $\sqrt{7} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e $1 \in \mathbb{Q}$. Concluímos, através do exemplo proposto, que nem sempre é possível determinar a base de um Sistema Logarítmico por mais que realizemos o refinamento, porém contornaremos esse problema através dos resultados que serão apresentados no Capítulo 7.

Observe que, se tomássemos esse exemplo para realizarmos o processo de refinamento, não conseguiríamos obter números racionais e irracionais que pertencessem à PG ou à PA após o refinamento, isso fica claro quando retomamos o estudo de casos apresentados no capítulo anterior sobre refinamento de PAs e PGs, onde concluímos que nem sempre isso será possível, isto é, não podemos obter o logaritmo de todo número real desejado para este sistema.

Então compreendemos com os exemplos que, quando pretendemos determinar o logaritmo de um número real qualquer que não pertencer inicialmente ao $(SL)_{q,r}$ dado, a ideia é refinar a $(PG)_q$ e, com isso, também estaremos refinando a $(PA)_r$. Por este motivo, apresentamos a Observação 5.1 para ressaltar que, mesmo refinando as sequências, os seus termos estão associados, uma vez que o refinamento de uma gera também o refinamento da outra. Percebemos também que nem sempre é possível determinar todos os logaritmos desejados, mas, através do refinamento de PAs e PGs, podemos determinar uma infinidade de logaritmos.

Com os resultados apresentados no capítulo anterior aplicados aos exemplos estudados, compreendemos as dificuldades de determinar os logaritmos através do refinamento das sequências que formam o sistema, mas o objetivo de todos os questionamentos e discussões destes exemplos foi proporcionar um melhor entendimento do tema em questão, assim como refletir sobre o conceito dos logaritmos. Para isso, é necessário cercar e esgotar todas as possibilidades para construção da definição dos logaritmos por meio destas sequências.

Ao refinar um sistema logarítmico de tal maneira que tornássemos a diferença entre dois termos consecutivos a menor possível, conseguiríamos determinar todos os logaritmos desejados? Perceba que a pergunta, agora mais ousada, nos faz questionar todas as anteriores. Isso é importante, pois acreditamos que a aprendizagem acontece a partir do momento que nos permitimos questionar e, através dessa motivação, buscar respostas e significados. Com essa discussão é possível que surja a seguinte pergunta: existe algum Sistema Logarítmico no qual podemos obter o logaritmo de qualquer número desejado? Vejamos o próximo tópico.

5.3 Existe algum Sistema Logarítmico no qual podemos obter o logaritmo de qualquer número desejado?

A pergunta para essa seção é provocativa e proporciona uma reflexão pertinente: será que existe algum $(SL)_{q,r}$, de tal modo que, para uma escolha conveniente de q e r, é possível determinar o logaritmo de todo número real? Com as discussões dos exemplos até agora apresentados para as escolhas de q e r propostas, isso não foi possível.

Para responder a este questionamento, ponto chave em nosso estudo, consideramos como oportuno retornar aos resultados do capítulo anterior.

No Teorema 4.7, concluímos que, dada uma progressão geométrica de razão racional, não é possível, com o refinamento desta, inserir qualquer outro número racional. Esse fato demonstra e é suficiente para dizermos que, em uma PG de razão racional, não conseguimos determinar os logaritmos de todos os números reais, pois, mesmo que fosse possível inserir todos irracionais, ainda assim existiriam muitas lacunas, uma vez que ainda haveria muitos valares a serem preenchidos nesta sequência para que se pudesse calcular o logaritmo de todo número real.

Então, percebemos a dificuldade em se determinar tais logaritmos, já que estes, pelo nosso conceito, estão intimamente ligados às progressões geométricas. E se, ao invés de uma razão racional, tivéssemos uma razão irracional?

Dada uma progressão geométrica de razão irracional, estudamos que nem sempre conseguiremos, com o refinamento desta, inserir qualquer número racional ou irracional que se deseje como observado nos Exemplos 4.12 e 4.13, ou seja, também não será possível inserir todo número que se deseje e, consequentemente, não será possível encontrar os logaritmos de todos os reais.

Dependendo da quantidade de termos que inserimos entre todos os termos consecutivos com o refinamento, como também refinando, refinando qualquer Sistema Logarítmico dado, conseguimos obter uma quantidade de termos bem significativos até chegar o momento em que a diferença entre esses seja tão pequena quanto deseje (veremos a demonstração para esta afirmação nos próximos capítulos), e, se isso acontece, por que não podemos inserir na PG todos os números desejados? Realmente não existe um sistema com que se pode calcular todos os logaritmos?

Diante de todas as observações apresentadas por meio do refinamento, isso não é possível, mas existe uma área muito importante na matemática, a análise real, que será fundamental para compreendermos a definição dos logaritmos por meio das PAs e das PGs.

Contudo, o processo de refinamento nos permite determinar, com uma boa aproximação, o logaritmo procurado, uma vez que vamos, aproximando cada vez mais desse número.

Neste capítulo, foram apresentadas, através de exemplos, as dificuldades para calcular os logaritmos que não pertencem inicialmente ao sistema logarítmico dado; foi exposta e explicada a ideia de refinamento, mas não colocada em prática no sentido de determinar com uma boa aproximação o logaritmo de um número real qualquer; bem como foi apresentado um resultado muito importante para o estudo, nos permitindo concluir, em um determinado sistema logarítmico, que o mesmo número não pode possuir logaritmos distintos.

Para um melhor entendimento do conceito de refinamento aplicado às sequências de PAs e de PGs que associadas formam o sistema de logaritmos, mostraremos no próximo capítulo como determinar, com uma boa aproximação, o logaritmo de um número que não pertence $(PG)_q$, nem a qualquer refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$, para isto consideraremos $(PG)_{10}$ e uma $(PA)_1$ que associadas formam o $(SL)_{10,1}$. Com isso, veremos como encontrar, uma boa aproximação, para o logaritmo de 2 na base 10.

6 A necessidade de aproximações para encontrar logaritmos de certos números

Estudamos, através de teoremas e exemplos, que nem sempre é possível determinar o logaritmo de um número desejado usando o refinamento de um sistema logarítmico, mas também temos a ideia de que, ao utilizarmos refinamentos, conseguimos, inserir uma quantidade tão grande quanto se queira, e esse processo nos permite obter com uma boa aproximação os logaritmos desejados.

Para melhor compreendermos como determinar com uma boa aproximação os logaritmos aplicando a ideia de refinamento, apresentaremos, neste capítulo, como calcular o $\log 2$. Logo em seguida discutiremos o método de "Henry Briggs, o primeiro *Savilian professor* de geometria em Oxford e o primeiro professor de geometria do Gresham College." (BOYER; MERZBACH, 2012) a determinar esse mesmo logaritmo.

O objetivo é propor uma discussão construtiva dos métodos apresentados, de modo que o leitor possa refletir e compreender como determinar o logaritmo de um número aplicando a ideia de refinamento. Para o nosso caso, dividiremos cada intervalo em dez novos intervalos, repetiremos esse processo nove vezes para obter uma aproximação com 8 casas decimais para $\log 2$ e, por fim, iremos apresentar a ideia de Briggs para determinar o mesmo logaritmo e comparar os processos destacando os prós e contras. A escolha do $\log 2$ foi motivada por uma curiosidade enquanto professora para entender como foi calculado esse logaritmo, mas a ideia de refinamento pode ser aplicada para determinar o logaritmo de qualquer número real positivo.

6.1 Como determinar, por aproximação, o logaritmo de 2 na base 10 usando a ideia de refinamento aplicada ao $(SL)_{10,1}$?

Discutiremos aqui como determinar $\log 2$ usando o refinamento de um sistema $(SL)_{10,1}$ e o representaremos por meio de tabelas para facilitar a visualização. Considere:

Tabela 6.1 – $(SL)_{10,1}$

x	...	10^{-n}	...	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	...	10^n	...
$\log x$	...	$-n$	...	-2	-1	0	1	2	...	n	...

Fonte: Elaboração própria

Trabalhando com o sistema representado na Tabela 6.1, observamos que $10^0 < 2 < 10^1$ e, consequentemente, $0 < \log 2 < 1$.

Como nosso objetivo é determinar $\log 2$, apresentaremos, no trabalho, apenas o refinamento entre os termos onde o número 2 esteja contido no intervalo. Por exemplo, inicialmente apresentaremos o refinamento entre 10^0 e 10^1, visto que $10^0 < 2 < 10^1$ e consequentemente o refinamento correspondente a 0 e 1, isso para simplificar a representação e visualização do sistema. Porém queremos deixar claro que o refinamento acontece em todo o sistema $(SL)_{10,1}$. Para isso, consideremos as seguintes etapas.

1º Etapa: O refinamento do sistema $(SL)_{10,1}$.

Como pretendemos obter uma $(PG)_{q'}$ que seja um refinamento da $(PG)_{10}$, segue do Teorema 4.2, que $q' = 10^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Tomemos $m = 10$, ou seja $q' = 10^{\frac{1}{10}}$. Como $r = 1$, então $r = \frac{1}{10}$, ou seja, os valores da PA são o próprio expoente dos seus correspondentes na PG. Por que escolher $m = 10$? Foi uma escolha aleatória, talvez fomos até seduzidos pela base 10 do logaritmo, o que não tem nenhum motivo específico, mas, como a proposta deste trabalho é apresentar, de maneira construtiva, a ideia dos logaritmos, assim apresentamos, como a primeira ideia aplicada.

A $(PG)_{10^{\frac{1}{10}}}$ é um refinamento da $(PG)_{10}$. Como estamos considerando os termos consecutivos 10^0 e 10^1, obtemos o sistema:

Tabela 6.2 – $(SL)_{10^{\frac{1}{10}},\frac{1}{10}}$

...	10^0	$10^{\frac{1}{10}}$	$10^{\frac{2}{10}}$	$10^{\frac{3}{10}}$	$10^{\frac{4}{10}}$	$10^{\frac{5}{10}}$	$10^{\frac{6}{10}}$	...	$10^{\frac{9}{10}}$	10^1	...
...	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	...	$\frac{9}{10}$	1	...

Fonte: Elaboração própria

Observe que $10^{\frac{3}{10}} \approx 1,995262 < 2 < 2,511886 \approx 10^{\frac{4}{10}}$, ou seja $\frac{3}{10} < \log 2 < \frac{4}{10}$.

Sabemos que $10^0 < 2 < 10^1$ quando realizamos o refinamento para $m = 10$ obtemos dez novos intervalos analisar e encontrar a qual deles o número 2 pertence. Para isso utilizamos a calculadora no cálculo das raízes décimas dos números pertences a $(PG)_{10}$ para assim encontrar o intervalo procurado. Do mesmo modo, iremos proceder para os demais casos.

2º Etapa: O refinamento do sistema $(SL)_{10^{\frac{1}{10}},\frac{1}{10}}$.

Para obter uma $(PG)_{q''}$ que seja um refinamento da $(PG)_{\frac{1}{10}}$, pelo Teorema 4.2, $q'' = (q')^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, tomemos novamente $m = 10$, então

$$q'' = (10^{\frac{1}{10}})^{\frac{1}{10}} \Rightarrow q'' = 10^{\frac{1}{100}}$$

e, consequentemente, $r'' = \frac{1}{100}$.

Reforçamos, neste segundo caso, como determinar as razões das sequências para os demais casos, como a ideia será a mesma, iremos apenas apresentá-la. Observe que a razão da (PG) será sempre multiplicada por $10^{\frac{1}{10}}$, enquanto a (PA), por $\frac{1}{10}$.

A $(PG)_{10^{\frac{1}{100}}}$ é um refinamento da $(PG)_{10^{\frac{1}{10}}}$. Como estamos considerando os termos consecutivos $10^{\frac{3}{10}}$ e $10^{\frac{4}{10}}$, obtemos o sistema:

Tabela 6.3 – $(SL)_{10^{\frac{1}{100}},\frac{1}{100}}$

...	$10^{\frac{3}{10}}$	$10^{\frac{31}{100}}$	$10^{\frac{32}{100}}$	$10^{\frac{33}{100}}$	$10^{\frac{34}{100}}$	$10^{\frac{35}{100}}$	$10^{\frac{36}{100}}$	...	$10^{\frac{39}{100}}$	$10^{\frac{4}{10}}$	...
...	$\frac{3}{10}$	$\frac{31}{100}$	$\frac{32}{100}$	$\frac{33}{100}$	$\frac{34}{100}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{36}{100}$	...	$\frac{39}{100}$	$\frac{4}{10}$	...

Fonte: Elaboração própria

Observe que $10^{\frac{3}{10}} \approx 1,995262 < 2 < 2,041737 \approx 10^{\frac{31}{100}}$, ou seja $\frac{3}{10} < \log 2 < \frac{31}{100}$. Como $\log 2$ está pertence ao intervalo $[0,3; 0,31]$ limitado por $0,3$ e $0,31$, então obtemos uma aproximação com uma casa decimal para $\log 2$, isto é $\log 2 \approx 0,3$.

Repetiremos esse processo de tomar dos dois termos consecutivos onde o 2 está inserido com o intuito de obter um aproximação de 8 casas decimais para $\log 2$. Observe as etapas:

3º Etapa: O refinamento do sistema $(SL)_{10^{\frac{1}{100}},\frac{1}{100}}$.

A $(PG)_{\frac{1}{1000}}$ é um refinamento da $(PG)_{\frac{1}{100}}$. Como estamos considerando os termos consecutivos $10^{\frac{30}{100}}$ e $10^{\frac{31}{100}}$, obtemos o sistema:

Tabela 6.4 – $(SL)_{10^{\frac{1}{1000}},\frac{1}{1000}}$

...	$10^{\frac{30}{100}}$	$10^{\frac{301}{1000}}$	$10^{\frac{302}{1000}}$	$10^{\frac{303}{1000}}$	$10^{\frac{304}{1000}}$	$10^{\frac{305}{1000}}$	$10^{\frac{306}{1000}}$	...	$10^{\frac{309}{1000}}$	$10^{\frac{31}{100}}$	...
...	$\frac{3}{10}$	$\frac{301}{1000}$	$\frac{302}{1000}$	$\frac{303}{1000}$	$\frac{304}{1000}$	$\frac{305}{1000}$	$\frac{306}{1000}$	...	$\frac{309}{1000}$	$\frac{31}{100}$	...

Fonte: Elaboração própria

Observe que $10^{\frac{301}{1000}} \approx 1,999861 < 2 < 2,004472 \approx 10^{\frac{302}{1000}}$, ou seja $\frac{301}{1000} < \log 2 < \frac{302}{1000}$. Novamente encontramos o intervalo $[0,301; 0,302]$ ao qual $\log 2$ pertence. Como o intervalo é limitado por $0,301$ e $0,302$, obtemos uma aproximação com duas casa decimais, isto é $\log 2 \approx 0,30$.

4º Etapa: O refinamento do sistema $(SL)_{10^{\frac{1}{1000}},\frac{1}{1000}}$.

A $(PG)_{\frac{1}{10000}}$ é um refinamento da $(PG)_{\frac{1}{1000}}$. Como estamos considerando os termos consecutivos $10^{\frac{301}{1000}}$ e $10^{\frac{302}{1000}}$, obtemos o sistema:

Tabela 6.5 – $(SL)_{10^{\frac{1}{10000}},\frac{1}{10000}}$

...	$10^{\frac{301}{1000}}$	$10^{\frac{3011}{10000}}$	$10^{\frac{3012}{10000}}$	$10^{\frac{3013}{10000}}$	$10^{\frac{3014}{10000}}$	$10^{\frac{3015}{10000}}$	...	$10^{\frac{3019}{10000}}$	$10^{\frac{32}{1000}}$	...
...	$\frac{301}{1000}$	$\frac{3011}{10000}$	$\frac{3012}{10000}$	$\frac{3013}{10000}$	$\frac{3014}{10000}$	$\frac{3015}{10000}$	...	$\frac{3019}{10000}$	$\frac{302}{1000}$	...

Fonte: Elaboração própria

Observe que $10^{\frac{3010}{10000}} \approx 1,999861 < 2 < 2,000322 \approx 10^{\frac{3011}{10000}}$, ou seja, $\frac{3010}{10000} < \log 2 < \frac{3011}{10000}$. Como $\log 2$ pertence ao intervalo $[0,3010; 0,3011]$ e este é limitado por $0,3010$ e $0,3011$, obtemos uma aproximação com três casa decimais para $\log 2$, isto é, $\log 2 \approx 0,301$.

5º Etapa: O refinamento do sistema $(SL)_{10^{\frac{1}{10000}},\frac{1}{10000}}$.

A $(PG)_{\frac{1}{100000}}$ é um refinamento da $(PG)_{\frac{1}{10000}}$. Como estamos considerando os termos consecutivos $10^{\frac{3010}{10000}}$ e $10^{\frac{3011}{10000}}$, obtemos o sistema:

Tabela 6.6 – $(SL)_{10^{\frac{1}{100000}},\frac{1}{100000}}$

...	$10^{\frac{3010}{10000}}$	$10^{\frac{30101}{100000}}$	$10^{\frac{30102}{100000}}$	$10^{\frac{30103}{100000}}$	$10^{\frac{30104}{100000}}$	...	$10^{\frac{30109}{100000}}$	$10^{\frac{3011}{10000}}$	...
...	$\frac{3010}{10000}$	$\frac{30101}{100000}$	$\frac{30102}{100000}$	$\frac{30103}{100000}$	$\frac{30104}{100000}$	...	$\frac{30109}{100000}$	$\frac{3011}{10000}$	...

Fonte: Elaboração própria

Observe que $10^{\frac{30102}{100000}} \approx 1,999953 < 2 < 2,00000002 \approx 10^{\frac{30103}{100000}}$, ou seja, $\frac{30102}{100000} < \log 2 < \frac{30103}{100000}$. Pelo mesmo argumento utilizado nas etapas anteriores, obtemos uma aproximação com quatro casas decimais para $\log 2$, isto é, $\log 2 \approx 0,3010$.

Observe que a cada etapa sempre precisamos analisar os intervalos obtidos com o refinamento para localizar a qual deles o número 2 pertence.

6º Etapa: O refinamento do sistema $(SL)_{10^{\frac{1}{100000}},\frac{1}{100000}}$.

A $(PG)_{\frac{1}{1000000}}$ é um refinamento da $(PG)_{\frac{1}{100000}}$. Como estamos considerando os termos consecutivos $10^{\frac{30102}{10000}}$ e $10^{\frac{30103}{10000}}$, obtemos o sistema:

Tabela 6.7 – $(SL)_{10^{\frac{1}{1000000}},\frac{1}{1000000}}$

...	$10^{\frac{30102}{100000}}$	$10^{\frac{301021}{1000000}}$	$10^{\frac{301022}{1000000}}$	$10^{\frac{301023}{1000000}}$	$10^{\frac{301024}{1000000}}$	...	$10^{\frac{301029}{1000000}}$	$10^{\frac{30103}{100000}}$	...
...	$\frac{30102}{100000}$	$\frac{301021}{1000000}$	$\frac{301022}{1000000}$	$\frac{301023}{1000000}$	$\frac{301024}{1000000}$	...	$\frac{301029}{1000000}$	$\frac{30103}{100000}$	...

Fonte: Elaboração própria

Observe que $10^{\frac{301029}{1000000}} \approx 1,999995 < 2 < 2,00000002 \approx 10^{\frac{301030}{1000000}}$, ou seja, $\frac{301029}{1000000} < \log 2 < \frac{301030}{1000000}$. Como $\log 2$ pertence ao intervalo $[0,301029; 0,301030]$ e esse é limitado por

$0,301029$ e $0,301030$, para esse caso, a aproximação continua sendo a mesma da 5º Etapa.

7º Etapa: O refinamento do sistema $(SL)_{10^{\frac{1}{10000000}}, \frac{1}{1000000}}$.

A $(PG)_{\frac{1}{10000000}}$ é um refinamento da $(PG)_{\frac{1}{1000000}}$. Como estamos considerando os termos consecutivos $10^{\frac{301029}{100000}}$ e $10^{\frac{301030}{100000}}$, obtemos o sistema:

Tabela 6.8 – $(SL)_{10^{\frac{1}{10000000}}, \frac{1}{10000000}}$

...	$10^{\frac{301029}{1000000}}$	$10^{\frac{3010291}{10000000}}$	$10^{\frac{3010292}{10000000}}$	$10^{\frac{3010293}{10000000}}$	...	$10^{\frac{3010299}{10000000}}$	$10^{\frac{301030}{1000000}}$	...
...	$\frac{301029}{1000000}$	$\frac{3010291}{10000000}$	$\frac{3010292}{10000000}$	$\frac{3010293}{10000000}$	...	$\frac{3010299}{10000000}$	$\frac{301030}{1000000}$	...

Fonte: Elaboração própria

Observe que $10^{\frac{3010299}{10000000}} \approx 1,9999995 < 2 < 2,00000002 \approx 10^{\frac{3010300}{10000000}}$, ou seja, $\frac{3010299}{10000000} < \log 2 < \frac{3010300}{10000000}$. Novamente não encontramos, com o processo de refinamento escolhido, a limitação do intervalo. Portanto, para esse caso, a aproximação continua sendo a mesma da 5º Etapa.

8º Etapa: O refinamento do sistema $(SL)_{10^{\frac{1}{10000000}}, \frac{1}{10000000}}$.

A $(PG)_{\frac{1}{100000000}}$ é um refinamento da $(PG)_{\frac{1}{10000000}}$. Como estamos considerando os termos consecutivos $10^{\frac{3010299}{1000000}}$ e $10^{\frac{3010300}{1000000}}$, obtemos o sistema:

Tabela 6.9 – $(SL)_{10^{\frac{1}{100000000}}, \frac{1}{100000000}}$

...	$10^{\frac{3010299}{10000000}}$	$10^{\frac{30102991}{100000000}}$	$10^{\frac{30102992}{100000000}}$	$10^{\frac{30102993}{100000000}}$	...	$10^{\frac{30102999}{100000000}}$	$10^{\frac{3010300}{10000000}}$	...
...	$\frac{3010299}{10000000}$	$\frac{30102991}{100000000}$	$\frac{30102992}{100000000}$	$\frac{30102993}{100000000}$	...	$\frac{30102999}{100000000}$	$\frac{3010300}{10000000}$	...

Fonte: Elaboração própria

Observe que $10^{\frac{30102999}{100000000}} \approx 1,99999997 < 2 < 2,00000002 \approx 10^{\frac{30103000}{100000000}}$, ou seja, $\frac{30102999}{100000000} < \log 2 < \frac{30103000}{100000000}$. Como $\log 2$ pertence ao intervalo $[0,30102999; 0,30103000]$ limitado por $0,30102999$ e $0,30103000$, então $\log 2 \approx 0,3010$, novamente, para esse caso, a aproximação continua sendo a mesma da 5º Etapa.

9º Etapa: O refinamento do sistema $(SL)_{10^{\frac{1}{100000000}}, \frac{1}{100000000}}$.

A $(PG)_{\frac{1}{1000000000}}$ é um refinamento da $(PG)_{\frac{1}{100000000}}$. Como estamos considerando os termos consecutivos $10^{\frac{30102999}{10000000}}$ e $10^{\frac{30103000}{10000000}}$, obtemos o sistema:

Tabela 6.10 – $(SL)_{10^{\frac{1}{1000000000}},\frac{1}{1000000000}}$

...	$10^{\frac{30102999}{100000000}}$	$10^{\frac{301029991}{1000000000}}$	....	$10^{\frac{301029995}{1000000000}}$	$10^{\frac{301029996}{1000000000}}$	...	$10^{\frac{30103000}{100000000}}$	...
...	$\frac{30102999}{100000000}$	$\frac{301029991}{1000000000}$	...	$\frac{301029995}{1000000000}$	$\frac{301029996}{1000000000}$	...	$\frac{30103000}{100000000}$	...

Fonte: Elaboração própria

Observe que $10^{\frac{301029995}{1000000000}} \approx 1,99999999 < 2 < 2,00000002 \approx 10^{\frac{301029996}{1000000000}}$, ou seja, $0,301029995 < \log 2 < 0,301029996$. Como $\log 2$ pertence ao intervalo $[0,301029995; 0,301029996]$, limitado por $0,301029995$ e $0,301029996$, então

$$\log 2 \approx 0,30102999$$

uma aproximação com oito casas decimais.

Caso desejássemos determinar uma aproximação com uma quantidade maior de casas decimais, bastaria repetir o processo até chegar à quantidade desejada.

Para determinar o $\log 2$, refinamos uma primeira vez obtendo dez intervalos, na segunda vez obtemos 100 intervalos, e, a cada etapa do processo, íamos aumentando o número de intervalos em dez vezes a quantidade anterior, o que nos oferecia, a cada etapa, uma melhor aproximação para o logaritmo procurado. Mas já parou para pensar como seria utilizar esse processo sem o uso de uma calculadora? Seria esse um processo possível? Isso foi o que aconteceu no século XVI, quando um homem, conhecido por Henry Briggs, sem nenhum recurso tecnológico, conseguiu criar, com uma genialidade sem igual, uma tabela de logaritmos. Vejamos o seu método na próxima secção.

6.2 Método usado por Henry Briggs para determinar o logaritmo de 2 na base 10

No Livro História da Matemática, de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach, tradução de Helena Castro, encontramos um pequeno trecho que descreve como Briggs calculou os logaritmos.

> Em vez de tomar as potências de um número próximo de 1, como fizera Napier, Briggs começou com $\log 10 = 1$ e depois achou outros logaritmos tomando raízes sucessivas. Calculando que $\sqrt{10} = 3,162277$, Briggs tinha que $\log 3,162277 = 0,5000000$, e de $10^{3/4} = 5,623413$ tinha que $\log 5,623413 = 0,7500000$. Continuando desse modo, ele calculou outros logaritmos comuns. (BOYER; MERZBACH, 2012, p.222)

Observamos que o método aplicado por Briggs para calcular os logaritmos começou definindo $\log 10 = 1$, em seguida extraiu as raízes quadradas do número 10 sucessivas vezes, chegando a calcular a raiz quadrada de dez 54 vezes.

Como $10^0 < 2 < 10^1$, calcularemos a média geométrica entre os dois termos consecutivos 10^0 e 10^1, com a média geométrica obteremos 2 novos intervalos, analisaremos a qual deles número 2 pertence, em seguida calcularemos novamente a média geométrica entre os termos consecutivos e repetiremos esse processo por dez vezes, vejamos:

Chamaremos cada termo da sequência obtida através do cálculo da média geométrica de $a_1, a_2, ..., a_{10}$, onde $a_1 = 1 < 2 < 10 = a_2$. Calculando a média geométrica de a_1, a_2, teremos:

$$a_3 = (a_1 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} \approx 3,162277.$$

Como $a_1 < 2 < a_3$, então $1 < \log 2 < 0,5$. Calculando a média geométrica de a_1, a_3, teremos:

$$a_4 = (a_1 \cdot a_3)^{\frac{1}{2}} = (1 \cdot 10^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{4}} \approx 1,778279.$$

Como $a_4 < 2 < a_3$, então $0,25 < \log 2 < 0,5$. Calculando a média geométrica de a_3, a_4, teremos:

$$a_5 = (a_3 \cdot a_4)^{\frac{1}{2}} = (10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{3}{8}} \approx 2,371373.$$

Como $a_4 < 2 < a_5$, então $0,25 < \log 2 < 0,375$. Calculando a média geométrica de a_4, a_5, teremos:

$$a_6 = (a_4 \cdot a_5)^{\frac{1}{2}} = (10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{3}{8}})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{5}{16}} \approx 2,053525.$$

Como $a_4 < 2 < a_6$, então $0,25 < \log 2 < 0,3125$. Calculando a média geométrica de a_4, a_6, teremos:

$$a_7 = (a_4 \cdot a_6)^{\frac{1}{2}} = (10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{5}{16}})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{9}{32}} \approx 1,910952.$$

Como $a_7 < 2 < a_6$, então $0,28125 < \log 2 < 0,3125$. Calculando a média geométrica de a_6, a_7, teremos:

$$a_8 = (a_6 \cdot a_7)^{\frac{1}{2}} = (10^{\frac{5}{16}} \cdot 10^{\frac{9}{32}})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{19}{64}} \approx 1,980956.$$

Como $a_8 < 2 < a_6$, então $0,296875 < \log 2 < 0,3125$. Calculando a média geométrica de a_6, a_8, teremos:

$$a_9 = (a_6 \cdot a_8)^{\frac{1}{2}} = (10^{\frac{5}{16}} \cdot 10^{\frac{19}{64}})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{39}{128}} \approx 2,016914.$$

Como $a_8 < 2 < a_9$, então $0,296875 < \log 2 < 0,3046875$. Calculando a média geométrica de a_8, a_9, teremos:

$$a_{10} = (a_8 \cdot a_9)^{\frac{1}{2}} = (10^{\frac{19}{64}} \cdot 10^{\frac{39}{128}})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{77}{256}} \approx 1,998854.$$

Como $a_{10} < 2 < a_9$, então $0,3007812 < \log 2 < 0,3046875$. A Figura 6.1 é uma representação gráfica desta aproximação.

Figura 6.1 – Representação dos termos a_i para $1 \leq i \leq 10$, aproximando-se do 2, por meio do cálculo da média geométrica.

Fonte: Elaboração própria

A medida em que vamos calculando a média geométrica entre os termos, vamos aproximando do número 2 e, consequentemente, aproximando do valor para o logaritmo. Com o cálculo da média geométrica encontramos uma aproximação de duas casas decimais para o logaritmo procurado, ou seja, $\log 2 \approx 0,30$. Caso desejássemos uma aproximação com mais casas decimais, continuaríamos com o processo.

O cálculo da média geométrica aplicado para determinar o $\log 2$ é o mesmo que chamamos de refinamento de um sistema logarítmico, porém inserindo apenas um meio geométrico entre dois termos consecutivos. Para comprovação desse fato, vejamos a próxima secção.

6.2.1 O método de Henry Briggs utilizado para determinar $\log 2$ comparado ao método de refinamento

O método de refinamento aplicado na Seção 6.1, para determinar $\log 2$ é semelhante ao método usado por Henry Briggs para determinar este mesmo logaritmo, e, para comprovarmos este fato, temos:

Pelo Teorema 4.2, se $(PG)_{q'}$ é um refinamento da $(PG)_q$, então $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, para inserirmos apenas um meio geométrico entre dois termos consecutivos, devemos tomar $m = 2$. Considere dois termos consecutivos a_n e a_{n+1} de uma progressão geométrica de razão q, temos que $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, como $q' = q^{\frac{1}{m}}$ e para $m = 2$,

$$q' = (a_{n+1})^{\frac{1}{2}} \cdot (a_n)^{-\frac{1}{2}},$$

o termo médio $a_s = a_n \cdot q'$, ou seja, $a_s = (a_n \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{2}}$.

Portanto, a média geométrica é um refinamento de uma PG.

Se a média geométrica é um refinamento, qual a razão de apresentarmos a ideia de refinamento? O que estamos propondo com esse trabalho é uma leitura para construção do conhecimento, querendo proporcionar uma viagem interessante na história da matemática para conhecer um pouco sobre os logaritmos.

A princípio, foi trabalhada a definição de logaritmos por meio de uma progressão geométrica e de uma progressão aritmética que denominamos Sistema Logarítmico. Como isso, percebemos, através da construção, que poderíamos inserir meios geométricos no caso da PG e meios aritméticos no caso da PA, para que, daí, pudéssemos encontrar valores para outros logaritmos.

Talvez induzidos pela base 10, acreditamos que o melhor caminho fosse refinar para dividir um intervalo em dez novos intervalos e assim sucessivamente. A ideia, que, de início, pareceu sensacional, também despertou o seguinte questionamento: Por que, para Briggs, foi mais interessante calcular a média geométrica ao invés de optar pela inserção de mais meios geométricos (chamados de refinamento)?

Ao compararmos a quantidade de casas decimais obtidas para o $\log 2$ usando a ideia de refinamento para $m = 10$, como mostrado na Seção 6.1 e a média geométrica que é o refinamento para $m = 2$, como mostrado na Seção 6.2, somos atraídos pela a ideia de que o refinamento, com a inserção de vários meios, seja mais rápido e vantajoso. Na verdade, é mais rápido, porém não é tão vantajoso, uma vez que temos que calcular raiz décimas das raízes décimas e assim por diante, sem falar que teremos dez intervalos para analisar a qual deles o valor procurado pertence e, para fazer isso com o uso de uma calculadora, pode até parecer simples, mas, sem ela, como calcular? E é aqui que ressaltamos a brilhante ideia do matemático Briggs que, ao calcular a média geométrica, calculou apenas raízes quadradas, estreitando a sua comparação a dois intervalos.

O mais interessante e que merece todo o destaque para os logaritmos de Briggs foi a maneira que como ele calculou raízes quadradas de raízes quadradas, repetindo esse processo por cinquenta e quatro vezes sem calculadoras, apresentando, de uma maneira sensacional, para não dizer fora do comum, valores para os logaritmos.

7 Definição formal de logaritmos: onde a Análise Matemática cumpre seu papel fundamental

Nas discussões do Capítulo 5, apresentamos através da definição de sistema logarítmico que o logaritmo do número $x \in (PG)_q$ é o corresponde na $(PA)_r$. Porém, se $x \notin (PG)_q$ verificamos através dos teoremas demonstrados na Seção 4.4.2 no Capítulo 4 que nem sempre é possível encontrar um refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$, tal que $x \in (PG)_{q'}$. Então, como determinar o logaritmo de um número que não pertence ao refinamento? Podemos dizer que esse logaritmo não existe? Em textos anteriores, foi levantado o seguinte questionamento: existe alguma ramo da matemática que oferece argumentos e demonstrações que comprovem a existência destes logaritmos?

A Análise Matemática será uma ferramenta essencial para apresentarmos a definição formal dos logaritmos e comprovarmos, por meio de um sistema de logaritmos $(SL)_{q,r}$, a existência do logaritmo de todo número real, desde que este seja positivo. Por este motivo, no Capítulo 4 apresentamos as PA_s e PG_s que compõem os $(SL)_{q,r}$ com as devidas restrições, isto é, considerando a $(PG)_q$, com $q > 0$ e $q \neq 1$. Vejamos os Teoremas que nos fornecerão a construção do conceito de logaritmo.

7.1 Resultados importantes para construção da definição formal dos logaritmos

Sabemos que, através do refinamento de um $(SL)_{q,r}$, podemos inserir uma quantidade tão grande quanto se queira de elementos entre dois termos consecutivos, como exemplo podemos citar o processo realizado na secção 6.1 do capítulo 6 para determinar $\log 2$, o que nos leva a pensar que a diferença entre dois termos consecutivos seja tão pequena quanto se deseje, ou melhor, para que possamos definir o logaritmo, essa diferença deve tender a zero, e, se isso realmente é possível, podemos então assumir a existência do logaritmo de todo número real? Para chegarmos a uma conclusão, estudemos os seguintes Teoremas.

Teorema 7.1. *Seja $(PG)_q$, com $q > 0$ e $q \neq 1$, uma progressão geométrica. Dado $\epsilon > 0$, existe um refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$, tal que a diferença entre dois termos consecutivos desse refinamento é menor do que ϵ.*

Demonstração. Se $(PG)_{q'}$ é um refinamento da $(PG)_q$, então segue do Teorema 4.2, que $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Sejam q^n e q^{n+1} dois termos consecutivos da $(PG)_q$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, então

$$(PG)_{q'} = (..., q^n, q^{n+\frac{1}{m}}, q^{n+\frac{2}{m}}, ..., q^{n+\frac{m-1}{m}}, q^{n+1}, ...).$$

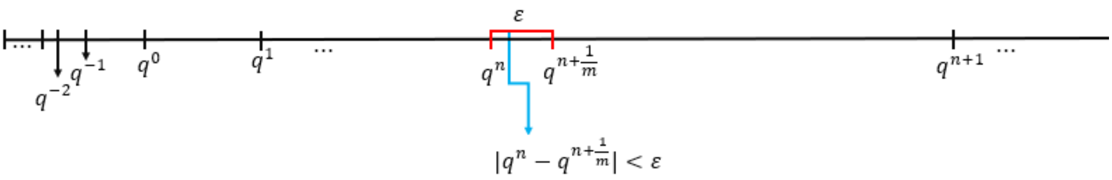
Dado que q^n e $q^{n+\frac{1}{m}}$ são dois termos consecutivos da $(PG)_q$, onde $q > 0$ e $q \neq 1$. Sabemos pelo Exemplo A.1 que, $\lim_{m\to\infty} q^{\frac{1}{m}} = 1$, então dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $m > m_0 \Rightarrow |q^{\frac{1}{m}} - 1| < \dfrac{\epsilon}{q^n}$. Logo,

$$m > m_0 \Rightarrow |q^{n+\frac{1}{m}} - q^n| = |q^n| \cdot |(q^{\frac{1}{m}} - 1)| < q^n \cdot \frac{\epsilon}{q^n} = \epsilon.$$

Portanto, se $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m > m_0 \Rightarrow |q^{n+\frac{1}{m}} - q^n| < \epsilon$. ■

A seguir, apresentamos uma representação gráfica do Teorema 7.1, onde concluímos que, dado qualquer $\epsilon > 0$, a diferença entre dois termos consecutivos da, $(PG)_{q'}$ refinamento de uma $(PG)_q$ será sempre menor do que qualquer $\epsilon > 0$ dado. Com isso, comprovamos que, para um m suficientemente grande, essa diferença pode ser tão pequena quanto se queira.

Figura 7.1 – Ilustração geométrica do Teorema 7.1



Fonte: Elaboração própria

Situação semelhante acontece com as progressões aritméticas, como veremos no próximo Teorema.

Teorema 7.2. *Seja a $(PA)_r$, com $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, uma progressão aritmética. Então, pode-se conseguir um refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$, tal que a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da $(PA)_{r'}$ é menor do que ϵ.*

Demonstração. Se $(PA)_{r'}$ é um refinamento da $(PA)_r$, então segue do Teorema 4.1, que

$$r' = \frac{r}{m},$$

para algum $m \in \mathbb{N}$.

Como se trata de uma (PA), a razão r' já é a diferença entre dois termos consecutivos. Assim, pelo Teorema A.1, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m_0 > \frac{r}{\epsilon}$, teremos

$$m > m_0 \Rightarrow |\frac{r}{m} - 0| = |\frac{r}{m}| < |\frac{r}{m_0}| < \epsilon.$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m > m_0 \Rightarrow |\frac{r}{m}| < \epsilon$, ou seja, a diferença entre dois termos consecutivos da $(PA)_{r'}$ é tão pequena quanto se deseje. ■

Os Teoremas 7.1 e 7.2 demonstram que a diferença entre dois termos consecutivos das PAs e PGs pode ser tão pequena quanto se deseje, para a escolha de um m suficientemente grande, o que nos remete a ideia de que todo número real pertence a algum refinamento das progressões. Para comprovarmos que todo número real positivo pertencente à (PG) e à (PA) e, consequentemente, a existência dos logaritmos, com argumentação consistente, vejamos a próxima seção.

7.2 Definição formal dos Logaritmos

Seja $(PG)_q$, uma progressão geométrica, com $q > 0$ e $q \neq 1$. Se um número real positivo b pertence à $(PG)_q$ ou a qualquer refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$, sabemos que o seu logaritmo será o termo corresponde na $(PA)_r$ ou em qualquer refinamento $(PA)_{r'}$ da $(PA)_r$, mas, se $b \notin (PG)_q$, nem a qualquer refinamento da $(PG)_q$, como garantir a existência destes logaritmos?

No Exemplo 5.4 do Capítulo 5, não encontramos um refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_4$, tal que $10 \in (PG)_4$. Se $b = 10$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $4^c = 10$? Isto é, existe um único $c \in \mathbb{R}$, tal que $\log_4 10 = c$?

Para que possamos construir a definição formal dos logaritmos para qualquer número real, estudaremos um resultado que oferece sustentação para a formalização deste conceito, sendo esse teorema de fundamental importância para definir a existência do logaritmos de todo número real maior que zero, por meio de progressões aritméticas e geométricas que formam o sistema de logaritmos $(SL)_{q,r}$. Para isto, considere o seguinte Teorema:

Teorema 7.3. *Dada uma progressão geométrica de razão q, com $q > 0$ e $q \neq 1$, e um número real positivo b, existe um único número real c, tal que $q^c = b$.*

Demonstração. Para demonstração do Teorema, precisamos analisar os seguintes casos, $q > 1$ e $0 < q < 1$. Inicialmente, vejamos o caso para $q > 1$.

Dada uma $(PG)_q$ com $q > 1$ e um número real positivo b, a demonstração pode ser dividida em duas situações:

1º situação: $b \in (PG)_q$, ou a qualquer refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$, com $q > 1$ e $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.

Se $b \in (PG)_q$, então $b = q^c$, para algum $c \in \mathbb{Z}$.

Do Teorema 4.2, segue que $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Se $b \in (PG)_{q'}$, então $b = q^{\left(\frac{1}{m}\right)^t}$, para algum $m, t \in \mathbb{Z}$ com $m > 0$, ou seja, $b = q^{\frac{t}{m}}$, tomemos $c = \frac{t}{m}$. Portanto, $b = q^c$.

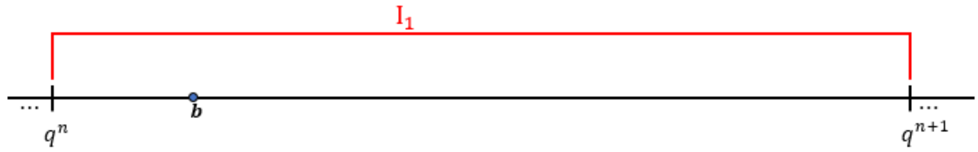
2º Situação: $b \notin (PG)_q$, nem a qualquer refinamento $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$, com $q > 1$ e $q' = q^{\frac{1}{m}}$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.

Se $b \notin (PG)_q$, então existem dois termos consecutivos q^n e q^{n+1}, para algum n fixo, com $n \in \mathbb{Z}$, na $(PG)_q$, tal que

$$b \in (q^n, q^{n+1}) \subset [q^n, q^{n+1}].$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar $n \geq 0$. A Figura 7.2 é uma representação geométrica da situação em que $b \in (q^n, q^{n+1}) \subset [q^n, q^{n+1}]$.

Figura 7.2 – Ilustração geométrica da sequência



Fonte: Elaborada pela autora do texto com o auxílio do Geogebra e PowerPoint

Chamemos de $I_1 = [a_1, b_1]$ o intervalo fechado de extremos $a_1 = q^n$ e $b_1 = q^{n+1}$, assim $b \in I_1$. Considere a $(PG)_{q^{\frac{1}{2}}}$ abaixo, refinamento da $(PG)_q$, ou seja $(PG)_q \subset (PG)_{q^{\frac{1}{2}}}$.

$$(PG)_{q^{\frac{1}{2}}} = (..., q^{-(n+1)}, q^{-(n+\frac{1}{2})}, q^{-n}, ..., q^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}, q^0, q^{\frac{1}{2}}, q^1, ..., q^n, q^{(n+\frac{1}{2})}, q^{n+1}, ...).$$

Como $b \notin (PG)_{q^{\frac{1}{2}}}$, então vai ocorrer um dos dois casos,

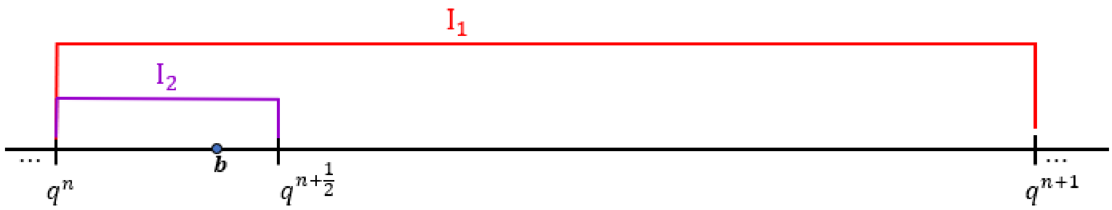
$$b \in (q^n, q^{(n+\frac{1}{2})}) \subset [q^n, q^{(n+\frac{1}{2})}]$$

ou

$$b \in (q^{(n+\frac{1}{2})}, q^{n+1}) \subset [q^{(n+\frac{1}{2})}, q^{n+1}].$$

Suponhamos que $b \in [q^n, q^{(n+\frac{1}{2})}]$. Chamemos de $I_2 = [a_2, b_2]$ o intervalo fechado de extremos $a_2 = q^n$ e $b_2 = q^{(n+\frac{1}{2})}$, assim $b \in I_1 \subset I_2$. De modo análogo ao que segue procederíamos se $b \in [q^{(n+\frac{1}{2})}, q^{n+1}]$.

Figura 7.3 – Ilustração geométrica da sequência



Fonte: Elaborada pela autora do texto com o auxílio do Geogebra e PowerPoint

Considere $(PG)_{q^{\frac{1}{4}}}$ abaixo, refinamento da $(PG)_q$, ou seja $(PG)_q \subset (PG)_{q^{\frac{1}{4}}}$.

$$(PG)_{q^{\frac{1}{4}}} = (..., q^{-(n+\frac{1}{4})}, q^{-n}, ..., q^{-1}, q^{-\frac{3}{4}}, q^{-\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{4}}, q^0, q^{\frac{1}{4}}, q^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{3}{4}}, q^1, ..., q^n, q^{(n+\frac{1}{4})}, q^{(n+\frac{1}{2})}, ...).$$

Como $b \in I_2$ e, se $b \notin (PG)_{q^{\frac{1}{4}}}$, então vai ocorrer um dos dois casos,

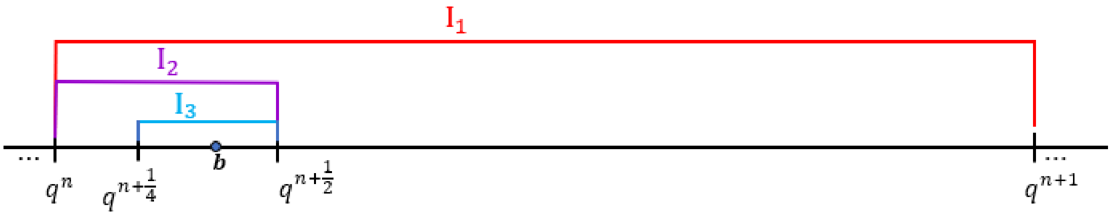
$$b \in (q^n, q^{(n+\frac{1}{4})}) \subset [q^n, q^{(n+\frac{1}{4})}]$$

ou

$$b \in (q^{(n+\frac{1}{4})}, q^{(n+\frac{1}{2})}) \subset [q^{(n+\frac{1}{4})}, q^{(n+\frac{1}{2})}].$$

Suponhamos que $b \in [q^{(n+\frac{1}{4})}, q^{(n+\frac{1}{2})}]$. Chamemos de $I_3 = [a_3, b_3]$ o intervalo fechado de extremos $a_2 = q^{(n+\frac{1}{4})}$ e $b_2 = q^{(n+\frac{1}{2})}$, assim $b \in I_3 \subset I_2 \subset I_1$. De modo análogo ao que segue procederíamos se $b \in [q^n, q^{(n+\frac{1}{4})}]$.

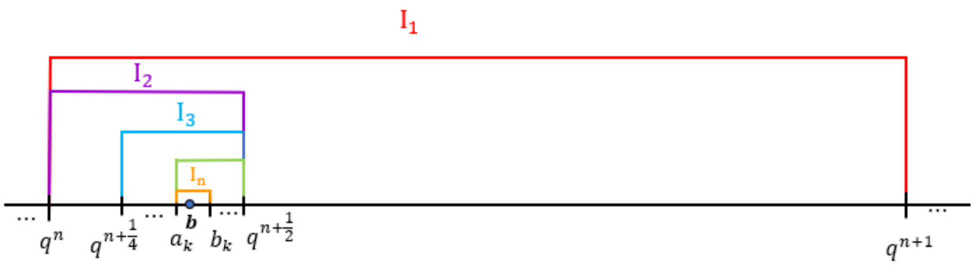
Figura 7.4 – Ilustração geométrica da sequência



Fonte: Elaborada pela autora do texto com o auxílio do Geogebra e PowerPoint

Repetindo os mesmos procedimentos para todos os intervalos I_n, chegaríamos a algum refinamento da $(PG)_q$ tal que $a_k = q^{n+r_k}$ e $b_k = q^{n+s_k}$, onde $r_k, s_k \in \mathbb{Q}$ e $b \in I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_{n-1} \supset I_n \supset \cdots$.

Figura 7.5 – Ilustração geométrica da sequência de intervalos encaixantes



Fonte: Elaborada pela autora do texto com o auxílio do Geogebra e PowerPoint

Como

$$|a_k - b_k| = q^n |q^{r_k} - q^{s_k}|,$$

do Teorema 7.1, podemos concluir que

$$|b_k - a_k| \to 0.$$

Como $b \in I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ e $|b_k - a_k| \to 0$, pelo Teorema A.2,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{b\}.$$

Sendo $a_k = q^{n+r_k}$ e $b_k = q^{n+s_k}$, com $r_k, s_k \in \mathbb{Q}$ então

$$q^{n+r_k} \leq b \leq q^{n+s_k}. \tag{7.1}$$

Como $f(x) = a^x$ é monótona, temos

$$r_k \leq s_k.$$

Como a sequência $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_k \leq \cdots$ é crescente e limitada superiormente, então certamente, existe $r \in \mathbb{R}$, tal que r é supremo de r_k Axioma A.1, do Teorema A.4 $\lim r_k = r$. Vejamos também que a sequência $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k \geq \cdots$ é decrescente e limitada inferiormente, então certamente, existe $s \in \mathbb{R}$, tal que s é o ínfimo de s_k Axioma A.1, do Teorema A.4 $\lim s_k = s$.
Do Teorema 7.1, temos

$$\lim_{k\to\infty} |a_k - b_k| = 0,$$

ou seja,

$$|\lim_{k\to\infty}(a_k - b_k)| = |\lim_{k\to\infty}(q^{n+r_k} - q^{n+s_k})| = |\lim_{k\to\infty}(q^{n+r_k}) - \lim_{k\to\infty}(q^{n+s_k})| = 0.$$

Como a função $f(x) = a^x$ é continua, Teorema A.5, temos

$$|\lim_{k\to\infty}(q^{n+r_k}) - \lim_{k\to\infty}(q^{n+s_k})| = |q^{\lim\limits_{k\to\infty}(n+r_k)} - q^{\lim\limits_{k\to\infty}(n+s_k)}| = |q^{n+r} - q^{n+s}| = 0,$$

de onde segue que

$$s = r.$$

Aplicando o limite na desigualdade (7.1), temos

$$\lim q^{n+r_k} \leq \lim b \leq \lim q^{n+s_k} \Rightarrow q^{n+r} \leq b \leq q^{n+s},$$

e, como $s = r$, então

$$q^{n+r} \leq b \leq q^{n+r}.$$

Portanto $b = q^{n+r}$. Tomando $c = n + r$, teremos $b = q^c$, como queríamos demonstrar. O valor de c é único, pois n é um número fixo e segue do TeoremaA.3 que limite é único .

Para o caso $0 < q < 1$, a demonstração é análoga. ■

A demonstração do Teorema dos Intervalos Encaixantes também pode ser encontrada na dissertação de mestrado (OLIVEIRA, 2017, P. 67).

Com o refinamento da $(PG)_q$, para $m = 2$, obtemos dois novos intervalos entre os termos consecutivos da $(PG)_q$, então se o número desejado pertence a algum dos intervalos da PG_q, então certamente ele pertencerá a algum dos dois intervalos obtidos com o refinamento, já que ele não pertence a $(PG)_q$ e a nenhum dos refinamentos $(PG)_{q'}$ da $(PG)_q$. Se optássemos por $m > 2$, teríamos uma quantidade maior de intervalos para analisar, o que dificultaria bastante o trabalho. Fazemos este comentário para enfatizar a brilhante ideia do matemático Henry Briggs, que calculou o logaritmo apenas com sucessivas raízes quadradas, ou seja, a média geométrica, que equivale ao refinamento da sequência para $m = 2$.

Diante disso, percebemos a grande contribuição da Análise Matemática para que pudéssemos chegar ao ponto de definirmos o logaritmo de todos os números reais positivos.

Os Teoremas aqui apresentados nos garantem a existência de um número real c, tal que $q^c = b$ com $b > 0$, onde c é o logaritmo de b na base q. Com isso, podemos apresentar a definição formal dos logaritmos.

Definição 7.1. *Dados os números reais positivos q e b, com $q \neq 1$. Chamamos de logaritmo de b na base q o número real c tal que $q^c = b$, ou seja,*

$$\log_q b = c \Leftrightarrow q^c = b.$$

Com isso garantimos a existência do logaritmo de todo número real positivo, como é o caso do $\log 2$ no Capítulo 6 deste trabalho, no qual, através do processo de refinamento chegamos a uma boa aproximação do valor para este logaritmo e, com os resultados estudados nesta seção, garantimos a sua existência.

No decorrer do estudo, apresentamos as dificuldades encontradas para definir o logaritmo através de um $(SL)_{q,r}$, mas, usando esta ideia associada ao Teorema dos Intervalos Encaixantes, conseguimos demonstrar a existência de um único número real que nomeamos por c, tal que $q^c = b$.

7.2.1 Como explicar para o aluno do ensino médio a existência e unicidade do logaritmo?

No ensino médio, para discutir com os alunos a existência do logaritmo de todo número real positivo, pode ser explorado o conceito de bijetivadade da função exponencial através da associação entre as PA_s e PG_s. Compreender os conceitos de injetividade e sobrejetividade da função exponencial é de suma importância, para que, através desses, seja possível garantir a existência e unicidade dos logaritmos, mostrando ao aluno que para todo $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e que imagem da função é igual ao contradomínio, ou seja, $Im(f) = CD(f)$.

São esses conceitos que fazem toda a diferença no ensino da matemática, pois dão significado às coisas, isto é, não basta dizer que determinado logaritmo corresponde àquele valor, mas sim deve-se também entender o porquê de existir aquele determinado valor. Como professora do ensino básico, acredito que fazer o aluno raciocinar, refletir, questionar e proporcionar discussões que os levem a associar os conceitos faz toda a diferença.

Ao associar os logaritmos às progressões, podemos perceber também que as propriedades operatórias dos logaritmos ganham significado, ou seja, o logaritmo de um produto pode ser transformado em soma de logaritmos, o logaritmo do quociente pode ser transformado na subtração de logaritmos, o logaritmo de uma potência pode ser transformado na multiplicação do expoente pelo logaritmo e, com isso, tudo passa a ser visto de uma maneira ampla, e esta é a proposta deste estudo.

8 A história da necessidade de criação dos logaritmos

Neste capítulo, apresentaremos um breve contexto histórico do surgimento dos logaritmos, destacando a necessidade de sua criação, bem como as contribuições para o desenvolvimento da matemática e para outras áreas do conhecimento como astronomia, navegação e comércio.

No decorrer da história, percebemos que os conhecimentos e instrumentos foram sendo criados de acordo com o desejo ou a necessidade da humanidade, não por um acaso, mas sempre como o objetivo. Não foi diferente a criação dos logaritmos, os quais, a princípio, foram uma ferramenta que, muito facilitou para a realização de cálculos.

Entender esse processo histórico contribui para uma aprendizagem significativa na medida em que esse estudo pode esclarecer a importância dessa engenhosa criação que muito contribuiu para o desenvolvimento da matemática e "tornou-se um dos conceitos mais importantes para esclarecer as ferramentas algébricas da análise e dar-lhes consistência." (ROQUE; CARVALHO, 2019a, p.438)

A etimologia da palavra logaritmo resultou da composição de duas palavras gregas "Logos", que significa razão, e "Aritmos" números, ou seja, a palavra logaritmos quer dizer razão entre números.

Os logaritmos foram números inventados com o intuito de simplificar os cálculos transformando complexas operações de multiplicações e divisões em simples somas e subtrações, facilitando também os cálculos para extração de raízes.

Antes da engenhosa criação dos logaritmos, existiam alguns instrumentos que foram de grande serventia para realização de vários cálculos matemáticos, um exemplo bem prático e conhecido é o famoso ábaco, mas, além desse, existiam outros que mostraremos no próximo tópico, visto que esses foram uma base para o aperfeiçoamento do que hoje conhecemos por logaritmo.

8.1 John Napier e os logaritmos: uma descoberta notável para história da matemática

A invenção dos logaritmos foi uma descoberta notável para a matemática, idealizada por um lorde Escocês, que não era um matemático profissional, conhecido como John Napier (1550-1617), proprietário, defensor do protestantismo e escritor, que se envolveu em várias controvérsias políticas e religiosas.

Dedicou-se na escrita do seu livro *A Plaine Discouery of the Whole Reuelation of Saint John*, publicado em 1593, no qual se propunha a provar que o papa era o Anticristo. Esse trabalho lhe rendeu 21 edições. Napier acreditou piamente que a sua reputação repousaria sobre esse trabalho, mas, na verdade, seu reconhecimento se deu pela engenhosa criação dos logaritmos, que era um entretenimento dos seus envolvimentos políticos e religiosos da época e foi esta uma grande contribuição para a ciência e a matemática.(EVES, 2011)

Na matemática, seus interesses estavam voltados para as áreas de computação e trigonometria(BOYER; MERZBACH, 2012). Interessado em desenvolver uma ferramenta para facilitar os cálculos, começou o seu estudo que culminou nos logaritmos, trabalhando por vinte anos até publicar, em 1614, a sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos).*(EVES, 2011)

Com as tabelas trigonométricas que existiam desde do século II, idealizadas por Hiparco e Ptolomeu, juntamente com a fórmula trigonométrica

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

também muito conhecida na época de Napier, era um dos mecanismo por meio dos quais era possível transformar intensas e exaustivas multiplicações em simples adições e subtrações, este método ficou conhecido como *prostaférese.* Inteirado deste método e influenciado por ele, Napier começou a pensar nos logaritmos, contudo a sua ideia para os logaritmos foi diferente. (EVES, 2011)

Segundo Boyer, “ele evidentemente pensara nas sequências, publicadas vez por outra, de potências sucessivas de um dado número — como na Arithmetica integra de Stifel cinquenta anos antes e nas obras de Arquimedes” (BOYER; MERZBACH, 2012, P .222). Estas sequências representam uma progressão geométrica

$$(PG)_q = (1, q, q^2, q^3, ..., q^m, ..., q^n, ..., q^{m+n}, ...)$$

e uma progressão aritmética

$$(PA)_1 = (0, 1, 2, 3, ..., m, ..., n, ..., (m+n), ...).$$

Com essas sequências, é possível transformar multiplicações em adições e divisões em simples subtrações, uma vez que

$$q^n \cdot q^m = q^{m+n}$$

e

$$\frac{q^n}{q^m} = q^{m-n},$$

ou seja, basta somar ou subtrair os expoentes da potência, que são um dos elementos da PG e buscar o seu correspondente na PA para obter os resultados das operações.

Mas Napier não estava satisfeito com os métodos já existentes e observando as lacunas entres os termos consecutivos e usando a sua extraordinária capacidade intelectual, optou por uma razão para a progressão geométrica, de tal modo que os termos fossem suficientemente próximos. Para isso, escolheu um número bem próximo de 1, sendo ele $q = 1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999$ (EVES, 2011). Calculando sucessivas potências de q, ou seja,

$$q^2 = (1 - \frac{1}{10^7})^2$$

$$q^3 = (1 - \frac{1}{10^7})^3$$

$$\vdots$$

$$q^n = (1 - \frac{1}{10^7})^n$$

John Napier construiu o conceito dos logaritmos, definindo n como o logaritmo da potência q^n. Com o objetivo de desenvolver um mecanismo que facilitasse a resolução dos cálculos, Napier sempre buscava meios para facilitar o seu trabalho, então, para evitar números decimais, ele resolveu multiplicar cada potência por 10^7. Com isso, chegou à seguinte conclusão:

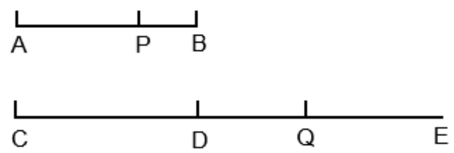
$$N = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^L,$$

definindo L como o logaritmo de N. "Dividindo-se N e L por 10^7, virtualmente se encontrará um sistema de logaritmos na base $\frac{1}{e}$, pois

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

como é óbvio, deve-se ter em mente que Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos. (EVES, 2011)

> Os princípios de sua obra eram explicados em termos geométricos da maneira seguinte. Consideremos dados um segmento de reta AB e uma semirreta CDE... (Fig. 14.1). Suponhamos que um ponto P parte de A e se move ao longo de AB com velocidade variável, decrescendo em proporção com sua distância a B; durante o mesmo tempo, suponhamos que um ponto Q parte de C e se move ao longo de CDE... com velocidade uniforme igual à velocidade inicial de P. Napier chamava esta distância variável CQ de logaritmo da distância PB. (BOYER; MERZBACH, 2012, p.222)



A partir da definição e através das explicações de John Napier, chegou-se à conclusão de que os logaritmos criados por ele são logaritmos naturais de base $\frac{1}{e}$. (EVES, 2011)

Para uma pessoa que estudava a matemática por distração e prazer, chegar a tal resultado foi de uma genialidade sem igual e é claro que essa descoberta chamaria a atenção de estudiosos da época, e o professor Briggs não perdeu a oportunidade de estudar e também realizar as suas contribuições, como veremos no próximo tópico.

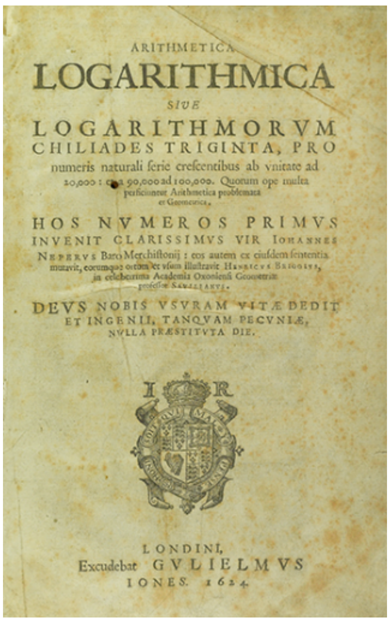
8.2 As contribuições de Henry Briggs para descoberta dos logaritmos decimais

Seria impossível que uma brilhante e sensacional ideia como foi a publicação dos logaritmos não chamasse a atenção e logo ganhasse admiradores e interessados em estudar seu trabalho, e um deles, como nos conta a história, foi o matemático Henry Briggs(1561-1631), o primeiro professor saviliano de geometria em Oxford e o primeiro professor de geometria do Gresham College. Entusiasmado, resolveu estudar os logaritmos e propôs uma visita a Napier, onde apresentou a sua ideia para o uso de potencias com base 10. Napier disse que já havia pensado na possibilidade e concordou com a sua ideia, mas o tempo já havia passado para Napier e o mesmo não tinha disposição suficiente para continuar com seus estudos, chegando a falecer pouco tempo depois. (BOYER; MERZBACH, 2012)

> Por isso, recaiu sobre Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns, ou briggsianos. Em vez de tomar as potências de um número próximo de 1, como fizera Napier, Briggs começou com log 10 = 1 e depois achou outros logaritmos tomando raízes sucessivas. (BOYER; MERZBACH, 2012, p.223)

Briggs continuou com os seus estudos e em 1617, ano da morte de John Napier, publicou seu trabalho intitulado *Logarithmorum Chilias Prima*, com os logaritmos de 1 a 1000 apresentados com 14 casas decimais. Em 1624, em *Arithmetica logarithmica*, Briggs ampliou a tabela incluindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. (BOYER; MERZBACH, 2012, p.222)

Figura 8.1 – Capa da obra Arithmetica Logarithmica por Henry Briggs.



Fonte: (SWETZ, 2021)

8.3 Logaritmos racionais

Um fato bastante curioso em nosso estudo é entender como Henry Briggs trabalhou para determinar os logaritmos de todos os números reais. Aqui chamamos a atenção para mostrar que ele utilizou-se dos números que têm logaritmos racionais para determinar dos números que possuem logaritmos irracionais, ou seja, de todo número real.

Para determinar os logaritmos dos números racionais, Briggs considerou $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1,00000,00000,0000$, ou seja, $\log 10 = 1$, e essa escolha proporcionou um conjunto denso de números no intervalo $[0,1]$ (BRUCE, 2021). Na tabela apresentada por Briggs na Figura 8.2, as colunas A representam termos de uma progressão geométrica denominados pelo matemático números em proporção contínua, a coluna C os valores absolutos respectivos à coluna A e a Coluna B são os logaritmos racionais destes números.

Para explicar que os logaritmos racionais não são apenas dos números que estão em uma proporção de 1 para 10, com os quais a estrutura dos logaritmos decimais repousa, mas para todos os números que podem ser inseridos a esses números proporção, Briggs apresenta a tabela exposta na Figura 8.2.

Figura 8.2 – Tabela apresentada por Briggs em sua obra Arithmetica Logarithmica com os racionais logaritmos de alguns números.

A	B
1	0
10	100000
100	200000
1000	300000
10000	400000

A	C	B
1	1	0
ll 10 - - - -	1 77827941	025000
l 10	3 16227766	050000
ll 1000 - - -	5 62341325	075000
10	10	100000
ll 100000 --	17 7827941	125000
l 1000	31 6227766	150000
ll 10000000	56 2341325	175000
100 - - - - -	100 - - - - -	200000

A	C	B
1	1 - -	0
l (6) 10	1 46779926762	$0666\frac{2}{3}$
l (3) 10	2 15443469003	$0333\frac{1}{3}$
l (2) 10	3 16227766017	05000
l (3) 1000	4 64158883360	$0666\frac{2}{3}$
l (6) 100000	6 81292069054	$0833\frac{1}{3}$
10	10 - - - - -	10000

Fonte: (BRIGGS, 1624)

No século XVII algumas abordagens matemáticas não eram apresentadas tal como hoje, um exemplo disso é a raiz quadrada de um número. "A padronização dos símbolos matemáticos se deu muito mais tarde, sobretudo a partir do final do século XVII, devido à popularidade dos trabalhos de Descartes, Leibnz e Newton" (ROQUE; CARVALHO, 2019b, P.207). Certamente Briggs não conhecia o símbolo $\sqrt{}$ e, em seus trabalhos, representou a raiz quadrada de um número por l, a raiz quarta por ll e assim sucessivamente. Para o caso da raiz cúbica ele representava por $l(3)$. (BRUCE, 2021)

Assim, analisando a Figura 8.2, notamos que na 1ª coluna A os números estão em proporção de 1 para 10, seguida dos seus respectivos logaritmos na 1ª Coluna B. Na 2ª coluna A os números estão na proporção de 1 para $10^{\frac{1}{4}}$ seguido dos seus respectivos logaritmos decimais na 2ª coluna B, e os números da 3ª coluna A estão em proporção de 1 para $10^{\frac{1}{6}}$, com os seus respectivos logaritmos racionais expostos na 3ª coluna B. Com isso Briggs exibiu logaritmos racionais entre os logaritmos dos números em proporção de 1 e 10.

Para construir os resultados apresentados na Figura 8.2, Briggs utilizou do cálculo de raízes quadradas, porém em sua obra não é apresentado como o autor chegou a tais resultados. No entanto, pela época, podemos acreditar que foi um trabalho bastante cansativo, visto que, neste período, não se tinha as calculadoras eletrônicas.

Para melhor compreender as ideias, representaremos os termos da Figura 8.2 em termos atuais, através da Tabela 8.1. Vejamos

Tabela 8.1 – Tabela apresentada por Henry Briggs em termos usuais

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
A	B	A	C	B	A	B	C
1	0	1	1	0	1	1	0
10	1	$10^{\frac{1}{4}}$	1,77827941	0,25	$10^{\frac{1}{6}}$	1,466779926762	$0666\frac{1}{3}$
100	2	$10^{\frac{1}{2}}$	3,16227766	0,5	$10^{\frac{2}{6}}$	2,15443469003	$0333\frac{1}{3}$
1000	3	$10^{\frac{3}{4}}$	5,67341325	0,75	$10^{\frac{3}{6}}$	3,10227766017	05
10000	4	10	10	1	$10^{\frac{4}{6}}$	4,64158883360	$0666\frac{2}{3}$
		$10^{\frac{5}{4}}$	1,77827941	1,25	$10^{\frac{5}{6}}$	6,81292069054	$0833\frac{1}{3}$
		$10^{\frac{6}{4}}$	3,16227766	1,5	10	10	1
		$10^{\frac{7}{4}}$	5,62341325	1,75			
		100	100	2			

Fonte: Elaboração própria

Na Tabela 8.1 os termos da 1ª coluna representam uma $(PG)_{10}$ que estão associados aos seus respectivos logaritmos na 2ª coluna, representada por uma $(PA)_1$. Na 3ª coluna encontramos uma $(PG)_{10^{\frac{1}{4}}}$ associada aos seus respectivos logaritmos representados na 5ª coluna por uma $(PA)_{\frac{1}{4}}$. Já a 6ª coluna, uma $(PG)_{10^{\frac{1}{6}}}$ associada aos seus respectivos logaritmos, na 8ª coluna representada por uma $(PA)_{\frac{1}{6}}$. Com o cálculo das raízes quadradas, Briggs conseguiu tais resultados, mostrando assim os logaritmos racionais desses números. No capítulo 6, apresentamos a situação proposta através do refinamento do sistema logarítmico $(SL)_{10,1}$, utilizado para determinar log 2 na seção, porém isso resultou em um custo operacional altíssimo, em razão do uso de calculadoras, ferramenta que, para a época, não existia.

A palavra progressões não eram mencionadas nos trabalhos de Briggs, mas, observando as suas construções, percebemos que os números em proporção contínua representam uma progressão geométrica e seus respectivos logaritmos representam uma progressões aritmética.

Então, com o cálculo das raízes quadradas, Briggs conseguiu determinar todos os logaritmos racionais, e poderíamos pensar como se fez para determinar o logaritmo irracionais de um número? Briggs relata em seus trabalhos:

Figura 8.3 – Relato retirado da obra Arithmetica Logarithmica por Henry Briggs

Reliqui omnes numeri qui in huiuſmodi aliquam continue proportionalium ſeriem (in qua dati duo numeri Vnitas & Denarius ſiti ſunt) cadere non poſſunt, habent Logarithmos irrationales, qui neque in numeris integris neque in partibus quas fractiones appellant accurate exprimi poterunt. Licet autem eos accuratos habere non poſſumus, poterimus tamen eos invenire adeo veris propinquos, vt ſi vſum ſpectemus inter rationales & irrationales nihil interſit. Hoc ipſo morbo Ptolemæi Canon ſubtenſarum, & ſubſequentium omnium ad hæc vſque tempora Aſtronomorum Canones Sinuum, Tangentium, & Secantium, ſine aliquo grauiore incommodo laborarunt.

Fonte: (BRIGGS, 1624)

Em tradução do latim para o inglês, através dos trabalhos de Ian Bruce, temos

> All the remaining numbers, which do not fall into any of these kinds of continued proportional series described (into which the two given numbers one and ten have been placed), have irrational logarithms, which cannot be accurately expressed either in whole numbers or in the parts we call fractions. But although we cannot obtain these irrational logarithms accurately, nevertheless we shall be able to find precisely these rational logarithms nearest the correct values, for if we examine the use between the irrational and the rational logarithms, there will be no difference between them. From this same malady of Ptolemy[i.e. the occurrence of rounded irrational quantities], the tables of the subtended chords, and of all tables subsequent to these up to the time of the astronomers' tables of sines, tangents, and secants, have suffered without any more serious disadvantage. (BRUCE, 2021)

> Todos os números restantes, que não se enquadram em nenhum desses tipos de séries proporcionais contínuas descritas (nas quais os dois números um e dez foram colocados), têm logaritmos irracionais, que não podem ser expressos com precisão em números inteiros ou nas divisões que chamamos de frações. No entanto, embora não possamos obter esses logaritmos irracionais com precisão, seremos capazes de encontrar precisamente esses logaritmos racionais mais próximos dos valores corretos, pois se examinarmos o uso dos logaritmos irracionais e racionais, não haverá diferença entre eles. Desde essa anomalia de Ptolomeu [ou seja, a ocorrência de quantidades irracionais arredondadas] as tabelas dos acordes subtendidos e todas as tabelas subsequentes, até o tempo das tabelas de senos, tangentes e secantes, usadas por astrônomos, permaneceram sem nenhum prejuízo mais sério. (Tradução nossa)

Então Briggs afirma que os números não pertencentes à série de proporção continuada (progressão geométrica) possuem logaritmos irracionais, mesmo não sendo possível determinar com exatidão, mas é possível obter, com boas aproximações, o logaritmo de qualquer número desejado. Tão esperto como era, também contou com os trabalhos de cordas de Ptolomeu para explicar tais conclusões.

No Capítulo 6, apresentamos como calcular, através do processo de refinamento, com uma $(PG)_{10}$ e uma $(PA)_1$, em que associação destas sequências formam o $(SL)_{10,1}$, o $\log 2$. Na verdade tínhamos uma série em proporção contínua (nome dado por Briggs à sequência que forma uma progressão geométrica), onde refinando, ou seja, calculando as raízes, sendo que, para o nosso caso, optamos por raízes décimas, conseguimos obter um número próximo ao 2. Com isso, determinamos logaritmos racionais que proporcionaram uma boa aproximação para $\log 2$.

8.4 Como Henry Briggs construiu sua primeira tabela de logaritmos

Como vimos na seção anterior, os números colocados em uma série de proporção contínua (progressão geométrica) entre 1 e 10, tem racionais logaritmos, então Briggs calculou os meios continuados (hoje o que chamamos de meios geométricos) entre esses, como explica:

Figura 8.4 – Relato retirado da obra Arithmetica Logarithmica por Henry Briggs sobre o cálculo dos meios continuados

Quærantur autem huiusmodi Continue Medij inter Denarium & Vnitatem, quorum primus erit *l* 10. nempe 3162277601683793319988 9354, id est latus denarij, vel medius proportionalius inter 10 & 1. deinde quæro latus lateris nuperrime inventi, id est *ll* 10. nempe 177827941003892280119730413. tertio pergo investigare latus istius lateris, *lll* 10. 133352143216332402566538931.

Fonte: (BRIGGS, 1624)

Em tradução do latim para o inglês, através dos trabalhos Ian Bruce, temos

> continued means of this kind between ten and one shall be sought, the first of these will be $l.10$, assuredly 3162277601683793319988 9354, that is the root of 10, or the mean proportion between 10 and 1. Then I look for the root of the root most recently found, that is $ll.10$: 177827941003892280119730413, With the third I go on to investigate the root of that root, $lll.10$: $13335, 21432, 16332, 40256, 65389, 31$. (BRUCE, 2021)

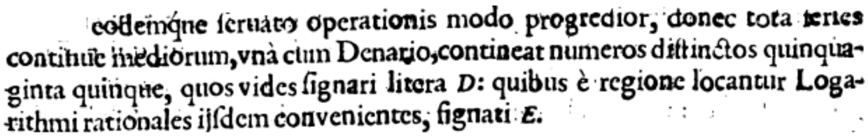
> meios contínuos deste tipo entre dez e um devem ser procurados. O primeiro deles será $l.10$, seguramente 3162277601683793319988 9354, que é a raiz de 10, ou a proporção média entre 10 e 1. E então

> procuro a raiz da raiz encontrada mais recentemente, ou seja, $ll.10$: 177827941003892280119730413. Com a terceira, prossigo para investigar a raiz dessa raiz, $lll.10$: $13335, 21432, 16332, 40256, 65389, 31$. (Tradução nossa)

Traduzindo para uma linguagem atual, os meios continuados são, na verdade, a raiz quadrada do produto de 1 pelo próximo número da série continuada, então os meios continuados são justamente a média geométrica. Isto é, ele calculou o produto de 1 por 10, seguido da raiz quadrada deste número, obtendo $10^{\frac{1}{2}}$ que é, justamente o meio continuado (média geométrica) dos números 1 e 10, em seguida tomou o produto de 1 por $10^{\frac{1}{2}}$ e calculou a raiz quadrada deste número obtendo, $10^{\frac{1}{4}}$ e assim sucessivamente.

Desse modo, obteve-se inicialmente a raiz quadrada de 10, depois a raiz quadrada da raiz quadrada de 10 e assim sucessivamente, repetindo esse processo conseguiu determinar os logaritmos racionais dos 54 números na série entre 1 e 10. Como mostra a Tabela 8.7 e afirma Briggs,

Figura 8.5 – Relato retirado da obra Arithmetica Logarithmica por Henry Briggs


eodemque ſeruato operationis modo progredior, donec tota ſeries
continuè mediorum, vnà cum Denario, contineat numeros diſtinctos quinqua-
ginta quinque, quos vides ſignari litera *D*: quibus è regione locantur Loga-
rithmi rationales iiſdem convenientes, ſignati *E*.

Fonte: (BRIGGS, 1624)

Em tradução do latim para o inglês, através dos trabalhos Ian Bruce, temos

> By maintaining the same method of working, I progress until the whole series of continued means, together with ten, shall contain fifty five separate numbers, which you see marked with the letter D [Table 6-2]: with which are placed the rational logarithms agreeing with the same, marked E. (BRUCE, 2021)

> Mantendo o mesmo método de trabalho, prossigo até que a série inteira de médias contínuas, juntamente com dez, contenha cinquenta e cinco números separados, os quais podes ver marcados com a letra D [Tabela 6-2] estão posicionados os logaritmos racionais equivalentes ao mesmo, marcados com E. (Tradução nossa)

Aplicando o fato dos termos estarem em proporção contínua (progressão geométrica) e observando que a raiz quadrada de um número gera o logaritmo igual ao dobro do logaritmo do quadrado deste número, por exemplo, se $\log 2^{\frac{1}{2}} \approx 0,150514997$ então $\log 2 = 2 \cdot \log 2^{\frac{1}{2}} \approx 0,30102999$, Briggs construiu a sua tabela de logaritmos. No Capítulo 6 mostramos a ideia do trabalho realizado por Briggs para chegar a essa aproximação para $\log 2$.

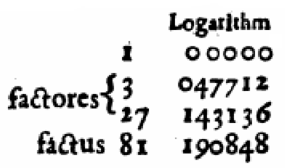
Na Figura 8.7 apresentamos a tabela com o resultado desta construção. "Alexander John Thompson em sua obra *Logarithmica Britannica* (CUP 1952), páginas LXXIX-LXXXIII chama atenção para um pequeno erro cometido por Briggs no cálculo destas raízes"(BRUCE,

2021) tradução do capítulo IV, o que considero como fato insignificante diante da sua brilhante construção, desenvolver tamanhos cálculos sem nenhum recurso tecnológico, tais como temos hoje, deve ter resultado em um trabalho bastante cansativo, porém de grande significado para história e desenvolvimento da matemática, uma vez que através dos seus trabalhos conhecemos os logaritmos de base 10.

Um fator que contribuiu bastante para a construção das suas tabelas foi perceber que por serem proporcionais os logaritmos podem ser soma, subtração ou multiplicação de outros logaritmos, como apresentado na Seção 8.1 deste capítulo. Na Figura 8.6, temos um exemplo da sua obra, o produto dos fatores 3 e 27 que é 81 tem como o seu logaritmo justamente a soma do logaritmo de 3 mais o logaritmo de 27, em termos atuais,

$$\log(3 \cdot 27) = \log 3 + \log 27 = 0477712 + 143136 = 190848$$

Figura 8.6 – Cálculo dos logaritmos apresentado por Briggs em sua obra Arithmetica Logarithmica.

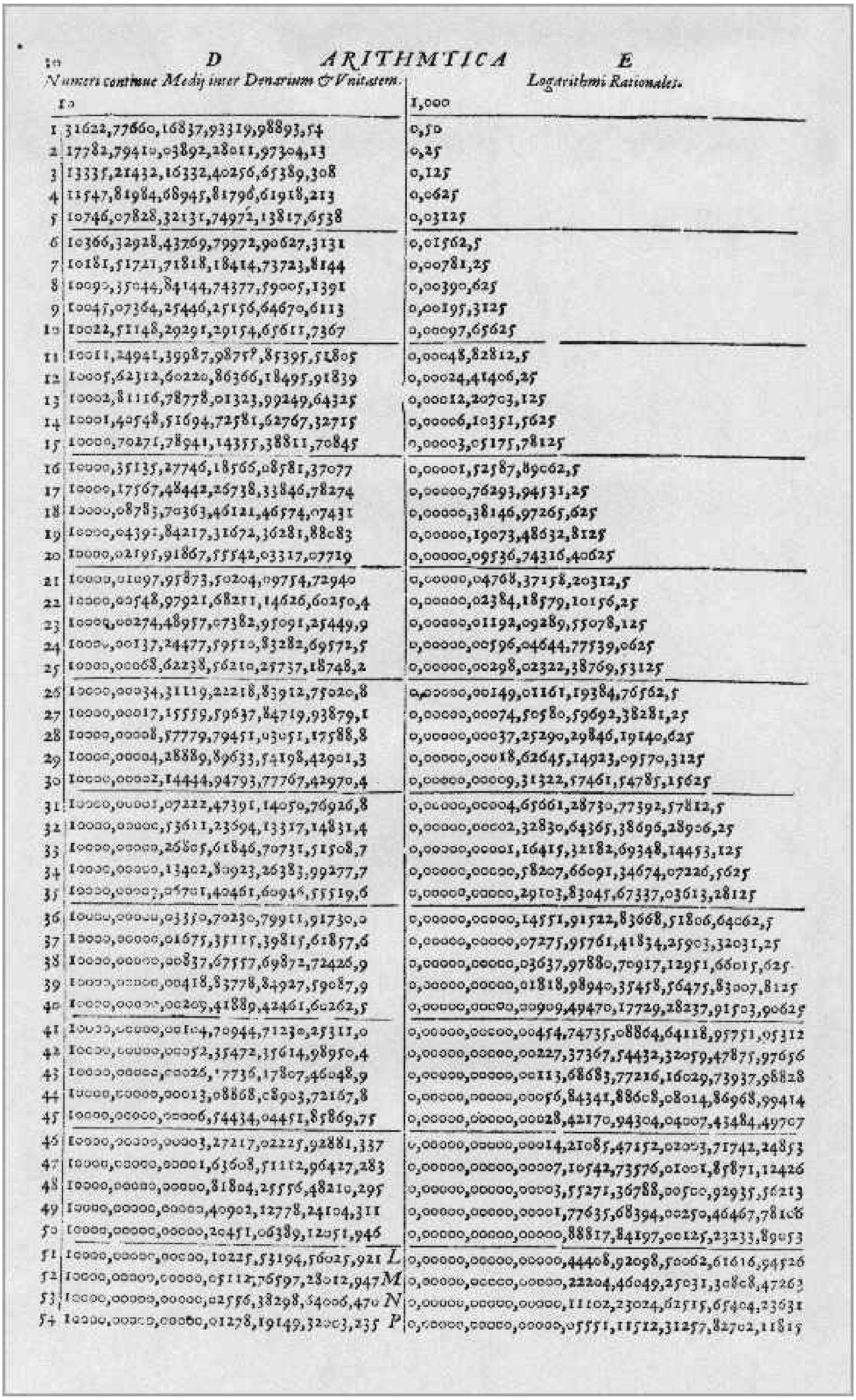


Fonte: (BRUCE, 2021)

Certamente, para apresentação e explicação do exemplo ele utilizou uma aproximação bem menor que as apresentadas em suas tabelas, visto que, elas apresentam logaritmos com quatorze casas decimais.

No próximo capítulo, apresentaremos uma sugestão de atividade que tem como objetivo propor um estudo significativo dos logaritmos através de uma abordagem construtivista associada à história da matemática.

Figura 8.7 – Tabela apresentada por Briggs em sua obra Arithmetica Logarithmica com os racionais logaritmos



10 D ARITHMTICA E

	Numeri continue Medij inter Denarium & Vnitatem.	*Logarithmi Rationales.*
	10	1,000
1	31622,77660,16837,93319,98893,54	0,50
2	17782,79410,03892,28011,97304,13	0,25
3	13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
4	11547,81984,68945,81796,61918,213	0,0625
5	10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
6	10366,32928,43769,79972,90627,3131	0,01562,5
7	10181,51721,71818,18414,73723,8144	0,00781,25
8	10090,35044,84144,74377,59005,1391	0,00390,625
9	10045,07364,25446,25156,64670,6113	0,00195,3125
10	10022,51148,29291,29154,65611,7367	0,00097,65625
11	10011,24941,39987,98758,85395,51805	0,00048,82812,5
12	10005,62312,60220,86366,18495,91839	0,00024,41406,25
13	10002,81116,78778,01323,99249,64325	0,00012,20703,125
14	10001,40548,51694,72581,62767,32715	0,00006,10351,5625
15	10000,70271,78941,14355,38811,70845	0,00003,05175,78125
16	10000,35135,27746,18565,08581,37077	0,00001,52587,89062,5
17	10000,17567,48442,26738,33846,78274	0,00000,76293,94531,25
18	10000,08783,70363,46121,46574,07431	0,00000,38146,97265,625
19	10000,04391,84217,31672,36281,88083	0,00000,19073,48632,8125
20	10000,02195,91867,55542,03317,07719	0,00000,09536,74316,40625
21	10000,01097,95873,50204,09754,72940	0,00000,04768,37158,20312,5
22	10000,00548,97921,68211,14626,60250,4	0,00000,02384,18579,10156,25
23	10000,00274,48957,07382,95091,25449,9	0,00000,01192,09289,55078,125
24	10000,00137,24477,59510,83282,69572,5	0,00000,00596,04644,77539,0625
25	10000,00068,62238,56210,25737,18748,2	0,00000,00298,02322,38769,53125
26	10000,00034,31119,22218,83912,75020,8	0,00000,00149,01161,19384,76562,5
27	10000,00017,15559,59637,84719,93879,1	0,00000,00074,50580,59692,38281,25
28	10000,00008,57779,79451,03051,17588,8	0,00000,00037,25290,29846,19140,625
29	10000,00004,28889,89633,54198,42901,3	0,00000,00018,62645,14923,09570,3125
30	10000,00002,14444,94793,77767,42970,4	0,00000,00009,31322,57461,54785,15625
31	10000,00001,07222,47391,14050,76926,8	0,00000,00004,65661,28730,77392,57812,5
32	10000,00000,53611,23694,13317,14831,4	0,00000,00002,32830,64365,38696,28906,25
33	10000,00000,26805,61846,70731,51508,7	0,00000,00001,16415,32182,69348,14453,125
34	10000,00000,13402,80923,26383,99277,7	0,00000,00000,58207,66091,34674,07226,5625
35	10000,00000,06701,40461,60946,55519,6	0,00000,00000,29103,83045,67337,03613,28125
36	10000,00000,03350,70230,79911,91730,0	0,00000,00000,14551,91522,83668,51806,64062,5
37	10000,00000,01675,35115,39815,61857,6	0,00000,00000,07275,95761,41834,25903,32031,25
38	10000,00000,00837,67557,69872,72426,9	0,00000,00000,03637,97880,70917,12951,66015,625
39	10000,00000,00418,83778,84927,59087,9	0,00000,00000,01818,98940,35458,56475,83007,8125
40	10000,00000,00209,41889,42461,60262,5	0,00000,00000,00909,49470,17729,28237,91503,90625
41	10000,00000,00104,70944,71230,25311,0	0,00000,00000,00454,74735,08864,64118,95751,95312
42	10000,00000,00052,35472,35614,98950,4	0,00000,00000,00227,37367,54432,32059,47875,97656
43	10000,00000,00026,17736,17807,46048,9	0,00000,00000,00113,68683,77216,16029,73937,98828
44	10000,00000,00013,08868,08903,72167,8	0,00000,00000,00056,84341,88608,08014,86968,99414
45	10000,00000,00006,54434,04451,85869,75	0,00000,00000,00028,42170,94304,04007,43484,49707
46	10000,00000,00003,27217,02225,92881,337	0,00000,00000,00014,21085,47152,02003,71742,24853
47	10000,00000,00001,63608,51112,96427,283	0,00000,00000,00007,10542,73576,01001,85871,12426
48	10000,00000,00000,81804,25556,48210,295	0,00000,00000,00003,55271,36788,00500,92935,56213
49	10000,00000,00000,40902,12778,24104,311	0,00000,00000,00001,77635,68394,00250,46467,78106
50	10000,00000,00000,20451,06389,12051,946	0,00000,00000,00000,88817,84197,00125,23233,89053
51	10000,00000,00000,10225,53194,56025,921 *L*	0,00000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,94526
52	10000,00000,00000,05112,76597,28012,947 *M*	0,00000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47263
53	10000,00000,00000,02556,38298,64006,470 *N*	0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,23631
54	10000,00000,00000,01278,19149,32003,235 *P*	0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815

Fonte: (BRIGGS, 1624)

9 Uma proposta construtivista com associação histórica para o uso dos logaritmos em sala de aula

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta histórico construtivista para conceitualização dos logaritmos.

Ao longo deste trabalho, percebemos a importância da ligação do construtivismo ao ensino e à aprendizagem. O modo como o construtivismo concebe a valorização das ações dos sujeitos, fazendo-os pensar e agir, configura em uma proposta que enriquece a construção do conhecimento. Mas, como aplicar esta teoria às aulas de matemática? Como utilizar a história como facilitadora deste processo? Pretendemos responder a esses questionamentos através da exposição de uma situação problema que tem como intuito apontar trajetórias para aplicação do construtivismo e da história da matemática em sala de aula.

9.1 Proposta de trabalho

9.1.1 Conteúdos abordados na atividade

- Potenciação e suas propriedades;
- Progressões aritmética e geométrica;
- Logaritmos.

9.1.2 Objetivo geral

Compreender, através da associação entre as progressões aritméticas e geométricas, o conceito dos logaritmos.

9.1.2.1 Objetivos específicos

- Compreender o conceito de progressão aritmética e de progressão geométrica;
- Conceituar e reconhecer o logaritmo;
- Entender, através da história da matemática, a necessidade de criação e o conceito dos logaritmos;
- Associar as experiências de aprendizagem com a história da matemática.

9.1.3 Competências e habilidades segundo o plano da BNCC

No terceiro capítulo deste trabalho, abordamos as competências e habilidades segundo a BNCC para o estudo dos logaritmos. Para este momento, apresentaremos as habilidades que serão trabalhas com esta proposta.

> **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
>
> **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
>
> **(EM13MAT505)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (BRASIL, 2018)

As habilidades EM13MAT507 e EM13MAT508 estão apresentadas de acordo com a competência 2 da BNCC, que tem como objetivo desenvolver, no aluno, a capacidade de utilizar estratégias para construir modelos e interpretar o problema em diversos contextos, com apresentação de uma argumentação consistente para os resultados.

Já a habilidade EM13MAT505 está presente na competência 5 da BNCC, que tem por finalidade investigar, observar padrões, fazer experimentações e, por meio destas observações, identificar a necessidade ou não da demonstração formal para validar as hipóteses levantadas.

Acrescenta a BNCC,

> tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa **caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.** (grifo nosso)(BRASIL, 2018, p.540)

Para atender tais especificidades das competências e habilidades da BNCC, é importante desenvolver um trabalho de valorização das ações dos educandos, das suas concepções, ideias, questionamentos e inquietações, e isso só é possível a partir do momento em que, no processo de ensino e aprendizagem, existe uma interação entre professor/aluno e desejo de conhecer/descobrir.

Diante de todas as discussões apresentadas no decorrer deste trabalho com relação ao construtivismo, percebemos que a aliança deste com a educação vem atender o desejo e os anseios da pedagogia transformadora para a escola. Usamos o termo escola, pois o sucesso do aluno implica no sucesso do professor, que reflete na escola e, consequentemente, na sociedade.

Vejamos, no próximo tópico, uma proposta de atividade que tem como foco a construção do conceito dos logaritmos através da abordagem construtivista.

9.1.4 Conceitualização dos logaritmos mediante uma abordagem construtivista

A princípio, apresentaremos a situação problema que pode ser aplicada no início da aula para uma discussão inicial.

Uma das visões mais comentadas na educação é a de que precisamos formar cidadãos críticos e atuantes em sociedade, e essa atitude pode ser trabalhada na disciplina de Matemática quando permitimos que o aluno participe ativamente do processo de aprendizagem, apresentando suas ideias e concepções em relação ao conteúdo.

As aplicações das atividades pode ser um momento desafiador para o professor, tendo em vista que a aplicação da proposta construtivista exige a mudança da postura, principalmente quando se está acostumado com um modelo de ensino que valoriza a transmissão do conteúdo, bem como as dificuldades por partes dos alunos em aprender matemática.

9.1.5 Situação problema: desafio na aula de matemática

Nesta seção apresentaremos uma narrativa que descreve um acontecimento na aula matemática. O principal objetivo de iniciar o estudo dos logaritmos com essa proposta foi para que pudéssemos apresentar um problema de fácil assimilação, para que o aluno possa interagir e construir o conceito dos logaritmos.

Certo dia a professora de matemática propôs, para os alunos, uma atividade bem diferente das que costumava fazer. Com a sua mesa repleta de resmas de papel A4, pegou uma folha e, com ela em mão, caminhou para o centro da sala e a colocou no chão. Em seguida, solicitou aos seus alunos a seguinte atividade:

— Veem essa folha que acabo de colocar no chão? Ela tem aproximadamente $0,074mm$ de espessura. Agora, cada um de vocês, ao serem chamados, irão a minha mesa pegar uma quantidade de papel que seja sempre o dobro da quantidade que está no chão e colocarão ao lado delas.

João de imediato perguntou:

— Mas professora, em que momento vamos parar de sobrepor as folhas?

A professora respondeu:

— Boa pergunta, João! No momento em que atingir a sua altura.

Bem curioso João respondeu:

— Minha altura é $1,61m$

Então a professora perguntou à turma:

— Nesse caso, quantas vezes serão necessárias levantar-se para sobrepor as folhas e obter a altura do João?

Figura 9.1 – Ilustração da situação problema: desafio na aula de matemática

Fonte: Ilustração Daniel Azevedo (@danieldaart). Ideia autora do texto.

9.1.6 A construção do conhecimento em relação aos logaritmos por intervenção do problema proposto

Nesta seção, apresentaremos ideias para aplicação da atividade proposta, seguindo orientações da abordagem construtivista aliada a história da matemática para ressignificação do conceito dos logaritmos.

9.1.6.1 Assimilação do problema proposto

É importante que o material proponha uma situação que o aluno possa assimilar significativamente. Além disso, é necessário que a atividade proposta venha atender as expectativas, caso contrário, o professor tem a autonomia para modificá-la e estruturá-la de tal modo que possa atender aos anseios da sua clientela, agindo de acordo com sua realidade. O que não se pode esquecer é que essa proposta deve ser desafiadora, levando o aluno à reflexão e aguçar a sua curiosidade para desenvolver, com excelência, a atividade proposta e, consequentemente, construir o conhecimento.

Uma sugestão para o desenvolvimento da atividade é iniciar a aula solicitando a leitura atenta do problema por parte dos alunos. Essa leitura pode ser individual, em grupo ou até mesmo coletiva.

A situação problema, intitulada desafio da matemática, a princípio apresenta um cenário que facilmente pode ser compreendido através da sua leitura e até mesmo modificado de acordo com a realidade em sala de aula para uma melhor compreensão. A partir do momento que o aluno conseguiu compreender o problema, tem-se o primeiro passo para construção do conhecimento, visto que aconteceu a assimilação, sendo esse essencial e de extrema importância para a construção do conhecimento, segundo a abordagem construtivista.

Após a assimilação, o professor pode questionar: "Como podemos solucionar o questionamento realizado pela professora de matemática? Ou seja, quantas vezes serão necessárias levantar-se para pegar as folhas e, com isso, obter a altura do João, que é de 1,61m?"

Atenção, professor! Você tem uma função muito importante neste momento, pois precisam instigar nos alunos a busca por respostas. Pode-se solicitar que os discentes apresentem as suas ideias. Por que o professor deve agir assim? Segundo Becker,

> porque ele acredita, ou, melhor, compreende (teoria), que o aluno só aprenderá alguma coisa, isto é, construirá algum conhecimento novo, se ele agir e problematizar a própria ação, apropriar-se dela e de seus mecanismos íntimos. A condição prévia para isso é que consiga assimilar o problema proposto; sem assimilação não haverá acomodação. (BECKER, 2012aa, p.21)

Observe que dois pontos relevantes para o construtivismo são os processos de assimilação e de acomodação e, para que estes aconteçam, são essenciais as ações do sujeito. Na ótica da sala de aula, entendemos por sujeitos os alunos. Acomodar é, portanto, dar significados aos objetos, e implica nas transformações do sujeito, dos seus esquemas, de suas estrutura e capacidade. Então estes processo são complementares e precisam caminhar juntos, uma vez que a acomodação necessita de outras perturbações para que o indivíduo assimile, e esse encadeamento possa gerar o equilíbrio, atingindo um novo patamar e, consequentemente, a construção do conhecimento. De acordo com Becker,

> assimilação e acomodação constituem as duas faces, complementares entre si, de todas as suas ações. Por isso, o professor não aceita que seu aluno fique passivo, ouvindo sua fala ou repetindo lições que consistem em dar respostas mecânicas para problemas que não assimilou (transformou para si) (BECKER, 2012aa, p.118)

Neste momento de assimilação, o aluno deve compreender e começar a mobilizar possíveis alternativas para resolução do problema, entre as quais deve perceber a necessidade de transformar as grandezas para começar o trabalho de resolução. Então transformaremos a altura de 1,61m para mm, de modo que obteremos 1610 mm.

9.1.6.2 Construção dos conceitos matemáticos

No segundo momento, solicite ou até mesmo construa, juntamente com os seus alunos, a situação apresentada no problema, representada conforme mostra a Tabela 9.1.

Tabela 9.1 – Apresentação gráfica da situação problema I

Ordem dos alunos	Quantidade de papéis sobrepostos	Espessura dos papéis (mm)
0	1	$2^0 \cdot 0,074$
1	2	$2^1 \cdot 0,074$
2	4	$2^2 \cdot 0,074$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^n	$2^n \cdot 0,074$

Fonte: Elaboração própria

Comece a questionar: " O que se pode perceber com relação ao número de alunos que levantaram para pegar os papéis na mesa? E com relação à quantidade de folhas colocadas no chão? Existe a possibilidade de obter uma quantidade inteira para o valor n no qual é possível obter a altura do João? Ou seja, existe algum n inteiro, tal que $2^n \cdot 0,074 = 1610 \Rightarrow 2^n \approx 21756,8$? Como podemos argumentar?"

O que podemos observar quando multiplicamos $2^2 \cdot 0,074$ por $2^4 \cdot 0,074$? E quando dividimos $2^2 \cdot 0,074$ por $2^4 \cdot 0,074$? Convide-os a trabalhar só com as potências para facilitar a visualização do que irá acontecer com as multiplicações e divisões. Neste momento, espera-se que os alunos concluam que as operações de multiplicação e divisão podem ser simplificadas por adição e subtração, bem como que não existirá um valor inteiro para n. Explore todos os resultados para que depois seja possível relacioná-los às propriedades operatórias dos logaritmos.

A partir do momento em que o aluno compreende(acomoda) que essas sequências representam uma PA e PG e que não existe n inteiro para solucionar o problema, um outro momento desafiador começa a surgir, pois como fazer para obter n?

Com a assimilação do problema e levantamento desses questionamentos, pretende-se criar situações de desequilíbrios, que têm como objetivo instigar as ideias dos alunos, a fim de formular e conjecturar hipóteses para resolução do problema. Mas não só isso, pois, como consequência, deve acontecer o ponto principal do ensino que é a construção do conhecimento. Aqui aparece a figura importante do professor, que tem o papel de criar essas situações para que seus alunos possam se sentir motivados a descobrir. Como afirma Becker,

> o ensino do professor de Matemática terá chance de êxito se o aluno tiver construído previamente estruturas que o tornam capaz de assimilar os conteúdos ensinados; isso será possível se esse ensinar for, ao mesmo tempo, adequado a essas estruturas e capaz de desequilibrá-las. (BECKER, 2012aa, p.146)

Diante das observações, permita que os alunos cheguem à conclusão de que não é possível obter a altura exata do João, mas que esta se encontra dentro de um intervalo entre números que compõem a sequência. Mas qual seria esse intervalo? Esperamos que os alunos cheguem à seguinte conclusão: como $2^{14} = 16384$ e $2^{15} = 32768$, então $2^n \approx 21756$ pertence ao intervalo $[2^{14}, 2^{15}]$, observando que o n procurado não será inteiro, e que este é um número que está no intervalo $[14, 15]$.

Pelo desenvolver do problema e articulação, peça-os para construir uma representação. Segue a Figura 9.2, que representa o contexto do problema do desafio na aula de matemática e pode ser utilizada para aplicação .

Figura 9.2 – Intervalo em que se encontra a altura do empilhamento dos papéis

Fonte: Elaboração própria

A partir de todas as discussões e observações levantas, reformuladas e construídas, agora é um momento oportuno de resgatar a história da matemática para o contexto. A proposta de iniciar a atividade com o problema “desafio na aula de matemática” objetiva que o aluno possa sentir de perto, ou seja, mais próximo da sua realidade, a situação.

No decorrer da história da humanidade, mas especificamente por volta do século XVII, interessado em descobrir uma ferramenta de cálculo que fosse capaz de simplificar as operações matemáticas como multiplicação e divisão, o proprietário escocês John Napier começou a estudar como viabilizar estes cálculos, chegando até um instrumento conhecidos como Barras de Napier. Querendo ir além, Segundo Boyer,

> ele evidentemente pensara nas sequências, publicadas vez por outra, de potências sucessivas de um dado número — como na Arithmetica integra de Stifel cinquenta anos antes e nas obras de Arquimedes. Em tais sequências, era óbvio que as somas e diferenças dos índices das potências correspondiam a produtos e quocientes das próprias potências. (BOYER; MERZBACH, 2012, p.221)

Neste momento, o professor pode realizar uma comparação entre o problema proposto com o regaste histórico, mostrando a motivação e o interesse em estudar a relação entre as PAs e as PGs para simplificar os cálculos. Para que se pudesse utilizar desse recurso, seria necessário obter todos os termos das PAs e das PGs? Mas o quê e como fizeram para obter tais termos?

Observe que temos um problema onde queremos determinar um valor real para n que satisfaça a igualdade $2^n \approx 21756$. Considerando esse problema no contexto histórico que acabamos de relatar, como resolvê-lo? Se encontrarmos solução para ele, também encontraríamos a solução de inserir todos os termos a sequências de PAs e PGs?

Novamente chegamos ao ponto em que será necessário realizar mais questionamentos, a fim de que se possam provocar situações de desequilíbrios. Bastante cuidado, pois, como discutido no Capítulo 2, se o aluno estiver convencido de que não consegue desenvolver o problema, talvez ele desista, por isso a importância de aguçar a sua curiosidade, assim como o domínio e a criatividade do professor para propor estas situações.

Como determinar n no qual é possível obter altura desejada? Convide-os a pensar, a apresentar as suas ideias e argumentar como chegou a tal conclusão. Isto é importante até mesmo para que o professor compreenda como o aluno chegou a tais resultados e questione, diante disso, outros raciocínios para essa construção. Observe que estamos direcionando a questão a um outro patamar, tendo em vista que agora a situação não mais seria real, porém de conhecimentos matemáticos mais avançados.

Essas provocações devem ficar compreensíveis para os alunos. Não se deve permitir, em nenhum momento, que a atividade deixe de ser vista como algo desafiador e interessante, pois, para que aconteça a construção do conhecimento, é necessário que o aluno aja sobre o material. Como aponta Becker,

> [...] sabe que há duas condições necessárias para que algum conhecimento novo seja construído: (a) que o aluno aja (assimilação) sobre o material – objeto, experimento, texto, afirmação, cálculo, teoria, pesquisa, modelo, conteúdo específico, observações, dados coletados, reação química ou física, etc. – que o professor presume que tenha algo de cognitivamente interessante, ou melhor, significativo ou desafiador para o aluno; (b) que o aluno responda para si mesmo (acomodação), sozinho ou em grupo, às perturbações provocadas pela assimilação do material, ou que se aproprie, em um segundo momento, não mais do material, mas dos mecanismos íntimos de suas ações sobre esse material: o que ele fez, por que fez dessa maneira, o que funcionou, o que deu errado, por que deu errado, de que outra maneira poderia ter feito. (BECKER, 2012aa, p.21)

Verifique que a todo momento estamos trabalhando com um processo que terá acertos, mas também muitos erros. Diante disso, percebemos que esse não será um processo simples, como acrescentamos em outros momentos do texto, uma vez que requer muitos momentos de reflexão.

Talvez bastante aprisionados a uma metodologia de ensino e aprendizagem que foca na transmissão, em certos momentos o desejo será de oferecer as respostas por parte dos professores, enquanto, por parte dos alunos, talvez muitos queiram desistir de procurá-las. Afirmamos que o novo sempre é muito assustador, porém, a partir do momento em que todos entenderem como irá funcionar a aula, acreditamos que tudo fluirá melhor. Becker ainda retrata em seu texto

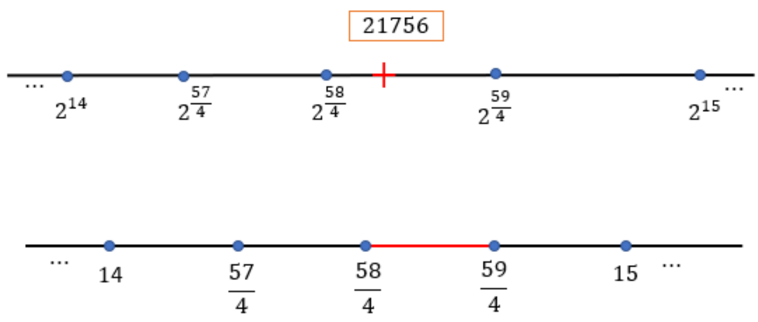
> não há processo de conhecimento sem erro. Nem no conhecimento científico. O erro é parte constitutiva da gênese e do desenvolvimento cognitivo. Tentar impedir, de todas as formas, que o aluno erre equivale a obstruir o processo das sucessivas gêneses cognitivas. É o mesmo que impedir que o aluno construa os instrumentos indispensáveis ao seu pensar (BECKER, 2012aa, p.130)

Os erros serão importantes neste processo de construção do conhecimento à medida que proporcionarão debates e discussões, até que se possa chegar a alguma conclusão. O erro também pode caracterizar que o processo de construção está acontecendo, uma vez que levará o aluno a pensar e conjecturar outras situações. O fato de acertar nem sempre quer dizer que aconteceu a aprendizagem, isto é, o aluno pode simplesmente apresentar a resposta, mas essa não ter nenhum significado para ele.

Após estes momentos, convide aos alunos a pensarem no seguinte caso: ora, existe alguma possibilidade de inserir termos a essas sequências? Se entre 14 e 15 existem infinitos números reais, assim como entre 2^{14} e 2^{15}, então como poderíamos fazer isso? Faça com que eles consigam pensar na ideia que intitulamos neste trabalho de refinamento.

Os alunos podem relatar: "professor, poderíamos dividir o intervalo em duas partes iguais, ou em três e assim sucessivamente. Mas como ficaria essa situação?" Faça a divisão dos intervalos juntamente com seus alunos. Apresentaremos a Figura 9.3 como exemplo.

Figura 9.3 – Divisão do intervalo proposto para resolução do problema



Fonte: Elaboração própria

Aqui apresentamos a você, professor, a divisão do intervalo em quatro novos intervalos, mas aconselhamos a seguir as sugestões apresentadas por seus alunos, até porque o propósito é realmente a construção.

No Capítulo 7, apresentamos um detalhamento de refinamento usando uma $(PG)_{10}$ e uma $(PA)_1$. Para o caso em questão, temos $(PG)_2$ e uma $(PA)_1$. Todo o estudo deste trabalho teve por objetivo oferecer um aporte teórico ao professor, para que, assim, pudesse aplicar a proposta com um conhecimento amplo do assunto.

Então, professor, trabalhe com o refinamento até obter pelo menos quatro vezes a limitação do intervalo e, com isso, mostre aos alunos a aproximação.

9.1.6.3 Definição do logaritmo através da associação entre PAs e PGs

Qual a relação das progressões aritmética e geométrica com os logaritmos? Qual o objetivo de refinar, ou melhor, de diminuir os intervalos para encontrar uma aproximação para o valor de n? Definimos por logaritmo de x na base b o expoente da potência de base b que se iguala ao número x, onde a base é um número real positivo e diferente de 1. Então, através do refinamento das progressões, conseguimos garantir, de forma intuitiva, a existência do logaritmo.

No Capítulo 7, apresentamos a demonstração para a existência do logaritmo de todo número real positivo diferente de 1. Para isso, tomamos por base conceitos importantes da análise real, como, por exemplo, o teorema dos intervalos encaixantes. É óbvio que tal abordagem não precisa ser demonstrada para o aluno do ensino médio, mas é importante que o professor tenha entendimento, para que possa articular e formular questionamentos interessantes para oportunizar a construção do conhecimento.

> Um conceito não se assimila pronto; um conceito se constrói, tanto no que implica de estrutura quanto no seu conteúdo. Assimila-se um conceito deformando-o numerosas vezes; repetem-se as assimilações deformantes na medida em que cada uma delas dá lugar a acomodações que vão superando as respectivas deformações até anexá-las às novas experiências (BECKER, 2012b, p.87)

A construção do conhecimento é um processo contínuo para que aconteça a acomodação, ou seja, a mudança das estruturas cognitivas. Para isso, é necessário reestruturar uma interpretação numerosas vezes, uma vez que a assimilação, incorporada às estruturas preexistentes, pode não corresponder à realidade.

Deixe claro para o aluno que o logaritmo é justamente o expoente da potência. Então o valor de n procurado que satisfaz a igualdade $2^n \approx 21756$ que, por construção, deve ser encontrado aproximadamente $14,4091$, corresponde ao logaritmo do número 21756, isto é $2^{14,4091} \approx 21756$, e essa potência é representada por $\log_2 21756 \approx 14,4091$. Neste momento, é importante realizar uma associação desta construção com a história da matemática, mostrando que a ideia estudada foi utilizada no século XVII para construir a definição do logaritmo, resgatando também o fato das simplificações dos cálculos como proposto na Seção 9.1.6.2.

9.1.6.4 Estudo histórico dos logaritmos decimais

As publicações de John Napier tiveram sucesso imediato, chamando a atenção do primeiro professor saviliano de geometria em Oxford e primeiro professor de geometria do Gresham College, Henry Briggs, que, impressionado com o trabalho, começou a estudá-lo. Em uma visita pouco antes da morte de Napier, Briggs sugeriu que $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1$. (BOYER; MERZBACH, 2012).

Desafio - Apresente a associação entre uma progressão aritmética e uma geométrica, na qual seria possível obter os logaritmos de base 10. Tente encontrar, usando o sistema representado, com aproximação de uma casa decimal, o $\log 2$.

Tabela 9.2 – Logaritmos de base 10

PA	PG	Valores dos termos da PG
0	10^0	1
$\frac{30}{100}$	$10^{\frac{3}{10}}$	1,995262 ...
$\frac{31}{100}$	$10^{\frac{31}{100}}$	2,041737...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	10^1	10

Fonte: Elaboração própria

Apresentamos a Tabela 9.2 como referência para o exemplo proposto. Peça para que os alunos, com o uso da calculadora, encontrar uma aproximação para o logaritmo. Ressalte que a ideia utilizada para determinar uma aproximação para altura do João, bem como a utilizada para determinar $\log 2$, foi desenvolvida por matemáticos que, no século XVII, tiveram essa brilhante ideia, que resultou neste belíssimo trabalho para a matemática: os logaritmos.

Dê destaque à ideia de Henry Briggs, que optou pela média geométrica, pois, assim, para o seu trabalho só havia necessidade de calcular raízes quadradas, e fez isso sem nenhum aparato tecnológico, apenas utilizou o algoritmo para o cálculo das raízes quadradas. Com isso, construiu sua tabela de logaritmos.

De acordo com Boyer, em

> 1617, Briggs publicou seu Logarithmorum chilias prima — isto é, os logaritmos dos números de 1 a 1.000, cada um calculado com quatorze casas. Em 1624, em Arithmetica logarithmica, Briggs ampliou a tabela incluindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, novamente com quatorze casas. (BOYER; MERZBACH, 2012, p.222)

Ao final da atividade, espera-se que o aluno compreenda a relação das progressões aritméticas e geométricas com os logaritmos, bem como entenda o que é o logaritmo.

9.1.6.5 História da matemática associada à proposta construtivista

Se pararmos para estudar e observar o desenrolar da história, percebemos que, para chegarmos ao ponto atual, ela obteve contribuições de pessoas que, por uma necessidade ou desejo de descoberta, apresentaram as suas contribuições. Isso só foi possível porque existiu a assimilação de determinado conceito e, a partir destas inquietações, que proporcionaram questionamentos, acarretaram a construção do conhecimento.

No momento que aliamos a história ao ensino, estamos nos oportunizando das experiências construídas ao longo do tempo para a construção do conhecimento em sala de aula. Percebemos, enquanto professores, que, por vezes, o ensino na matemática é carente nesse aspecto.

O processo que aplicamos para encontrarmos o valor aproximado para n foi aplicado por Henry Briggs para determinar os logaritmos, sem falar que, na época, não contou com recursos digitais para chegar a tais conclusões. E essa é a forma construtiva que queremos trazer para a sala de aula.

"A história da matemática é, no entanto, uma fonte rica de problemas interessantes e desafiantes que podem ser incorporados ao ensino da matemática, especialmente na forma de atividades de redescoberta ou de resolução de problemas." (FOSSA, 2001, p.139) Por possuir uma fonte rica de problemas desafiadores, a história contribui para o ensino da matemática na medida em que permitirá, ao professor, montar um laboratório de descoberta em sala de aula, através das situações propostas.

9.1.6.6 Sugestões de recursos para aplicação da atividade

Os recursos utilizados para aplicação da atividade podem ser dos mais simples, como quadro branco, pincéis e calculadora, aos mais sofisticados, como datashow. Para o ensino remoto, apresentações no PowerPoint ou qualquer outro recurso para apresentar e animar as imagens. Atenção, por mais que os recursos sejam diferentes, do mais simples aos mais sofisticados, o que não pode acontecer é que as respostas sejam dadas pelo professor, uma vez que o aluno precisa assimilar o conteúdo e o professor é apenas um mediador deste processo.

9.2 Relato de experiência

Ao ser convidada para estudar esse tema pelo meu orientador Daniel Cordeiro, fiquei bastante interessada, pois sempre tive a curiosidade em estudar mais sobre os logaritmos. Apesar de trabalhar durante anos ministrando o conteúdo, algo em minha mente ainda estava incompleto, pois vários questionamentos ainda existiam, como, por exemplo, como determinar $\log 2$. Nunca havia parado para pensar na passibilidade da associação das progressões aritméticas e geométrica aos logaritmos. Penso agora se, com toda a minha experiência e formação para atuar em sala de aula, existiam tantos questionamentos em mente, imagine para o aluno do ensino médio, que recebe, por muitas vezes, ou quase sempre, o conteúdo de forma pronta e acabada.

Com esse trabalho, também foi possível perceber a importância da disciplina de Análise Real na formação do professor, como relatado no Capítulo 7, pois, mais do que saber para transmitir bem, é importante saber para criar situações que possibilitem ao aluno a construção de significados, e muitos conceitos desta disciplina foram essenciais para essa construção.

Devido à pandemia da COVID-19, infelizmente não tive a oportunidade de aplicar esse trabalho, porém pretendo levá-lo para a sala de aula e proporcionar, aos meus alunos, uma experiência, pelo menos próxima, da que tive oportunidade de vivenciar com o estudo e a escrita deste trabalho.

10 Conclusões

Através do levantamento bibliográfico realizado com esse trabalho, percebemos a necessidade de repensar nossas práticas, bem como de desenvolver a postura de pesquisadores, para que possamos, assim, adquirir conhecimentos, atualizar as nossas práticas e, com isso, enriquecer o planejamento, para elaborar aulas que promovam a construção da aprendizagem.

O ensino da matemática é carente de significados, pois a todo tempo nos deparamos com alunos que desejam entender como associar a matemática às atividades cotidianas, buscando compreender qual a necessidade de estudar, como surgiu e por que surgiu determinado conteúdo. Se esses questionamentos acontecem, é porque existe uma necessidade de descobrir e compreender melhor sobre essa área do conhecimento. Percebemos que não é dada a importância a esses questionamentos e o ensino torna-se sem significado. Na verdade, o que falta são estímulos, orientações e conhecimentos históricos para que esses questionamentos encontrem as respostas e produzam o conhecimento.

Compreendemos que o construtivismo não surgiu como uma técnica ou um modelo de ensino, mas a maneira com a qual descreveu o processo de aquisição do conhecimento despertou a curiosidade de educadores que sentem a necessidade de mudança na educação. Deve-se conduzir o aluno na busca para o conhecimento, dar-lhe oportunidade para agir, pensar e apresentar suas ideias sobre o conteúdo. Convém mobilizar o aluno para a construção da aprendizagem. Contudo, o professor precisa assumir uma postura de orientador e pesquisador preparado para colocar seu aluno diante de situações que incitem a curiosidade.

Com essa abordagem, oferecemos um material com detalhes importantes que acrescentem ao conhecimento do professor e do aluno pontos importantes no estudo dos logaritmos.

Com o estudo histórico e construtivista dos logaritmos, partindo da necessidade de sua engenhosa criação até o ponto de conceituá-los, nos fez despertar para pontos interessantes, como é o caso da associação das sequências de PAs e PGs para definir o conceito dos logaritmos, conceitos que, por vezes, não são abordados no ensino. O livro didático que foi inspiração para esse trabalho, por sinal um pouco antigo, com data de 1947, aborda o conceito de logaritmos através da associação entre as progressões aritméticas e as progressões geométricas e percebemos, com a análise dos livros didáticos recentes, que não existe essa associação para definir o conceito do logaritmo.

Com a associação das PAs e das PGs, construímos o conceito de refinamento e, com ele, estudamos todos os casos em que é possível inserir termos às PAs e as PGs, percebendo que nem sempre é possível refinar para obter qualquer logaritmo que desejemos. Isso nos fez entender que precisaríamos de uma argumentação mais consistente para justificar a construção dos logaritmos por meio dessas sequências e encontramos na Análise Real argumentos para justificar a existência e unicidade do logaritmo, conseguindo, assim, formular o seu conceito.

Encontramos em um conteúdo que, para muitos alunos da licenciatura, não faz sentido estudar, como é o caso da Análise Real, a justificativa para construção do conceito de logaritmo. E acreditamos que é importante que o professor tenha conhecimento para argumentar os questionamentos apresentados por seus alunos. Como mencionamos no decorrer do texto, antes o professor precisava conhecer bem o conteúdo para transmitir bem, hoje é necessário que o professor domine o conteúdo para colocar seu aluno diante de situações desafiadoras, levando-os a construir suas respostas, proporcionando uma real efetivação da aprendizagem.

Com este material, apresentamos um estudo histórico-construtivista dos logaritmos, que proporcionará, ao professor, conhecimento acerca do ensino de logaritmo para que o aluno efetive a aprendizagem significativa. O trabalho servirá como aporte teórico para o planejamento de aulas, agregando conhecimentos e uma nova prática pedagógica.

Referências

BECKER, F. *Educação e construção do conhecimento.* [S.l.]: Penso, 2012a. Citado 7 vezes nas páginas 18, 19, 21, 28, 93, 94 e 96.

BECKER, F. *A epistemologia do professor: O cotidiano da escola.* [S.l.]: Vozes, 2012a. Citado na página 14.

BECKER, F. *Epistemologia do professor de matemática.* [S.l.]: Vozes, 2012b. Citado na página 98.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática.* [S.l.]: Blucher, 2012. Citado 8 vezes nas páginas 61, 66, 79, 80, 81, 95, 98 e 99.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 26, 27, 29, 30 e 90.

BRIGGS, H. *Arithmetica Logarithmica.* [S.l.]: Excudebat GVLIELMVS, 1624. Citado 5 vezes nas páginas 82, 84, 85, 86 e 88.

BRUCE, I. *Briggs 'ARITHMETICA LOGARITHMICA.* 2021. Disponível em: <http://www.17centurymaths.com/contents/albriggs.html>. Citado 6 vezes nas páginas 82, 83, 84, 85, 86 e 87.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: Da teoria à prática.* Papirus. [S.l.]: São Paulo, 2008. Citado na página 24.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática; tradução Hygino H. Domingues.* 5ª. ed. [S.l.]: Unicamp, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 31, 79 e 80.

FOSSA, J. A. *Ensaios sobre a Educação Matemática.* [S.l.]: EDUEPA, 2001. Citado na página 100.

HEFEZ, A. *Aritmética.* [S.l.]: Coleção PROFMAT, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 106.

IEZZI, G. et al. *MATEMÁTICA: ciência e aplicações.* [S.l.]: Saraiva, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.

LAGES, E. et al. *A Matemática do Ensino Médio.* [S.l.]: SBM, 1998. Citado na página 38.

LIMA, E. L. *Análise Real.* [S.l.]: IMPA, 2006. v. 1. Citado na página 106.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais.* [S.l.]: Coleção PROFMAT, 2017. Citado na página 106.

MACEDO, L. de. *Ensaios Construtivista.* [S.l.]: Casa do Psicólogo, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

MENDES, I. A. *Investigação Histórica no Ensino da Matemática.* Rio de Janeiro: [s.n.], 2009. Citado na página 24.

MENDES, I. A. *Investigação Histórica no Ensino da Matemática.* [S.l.]: Ciência Moderna, 2009. v. 1. Citado na página 24.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Ângela. *História na Educação Matemática: propostas e desafios.* 2º. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. Citado na página 24.

MOREIRA, M. A. *Teorias da Aprendizagem.* [S.l.: s.n.], 1999. 195 p. p. Citado na página 19.

MORETTO, V. P. *Construtivismo: A produção do Conhecimento em Sala de Aula.* [S.l.]: Lamparina, 2011. Citado na página 21.

NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo.* [S.l.]: Coleção PROFMAT, 2015. Citado na página 106.

OLIVEIRA, M. M. de. *Conceitos de Análise Matemática na Reta para bem compreender os Números Reais no Ensino Médio.* [S.l.]: Dissertação (Mestrado) — PROFMAT/UFCG, 2017. Citado na página 76.

PEDRO, I. I. *ÁLGEBRA: CURSO SUPERIOR.* [S.l.]: Paulo de Azevedo LTDA, 1947. Citado na página 36.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de História da Matemática.* [S.l.]: Coleção PROFMAT, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 78.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de História da Matemática.* 2ª edição. ed. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. Citado na página 82.

SOLE, I.; COLL, C.; OUTROS. *O construtivismo na Sala de Aula.* [S.l.]: Ática, 2006. Citado na página 20.

SOUZA, J.; GARCIA, J. *Contato Matemática.* 1º. ed. [S.l.]: FTD, 2016. Citado na página 34.

SWETZ, F. J. *Tesouro matemático: Arithmetica Logarithmica de Henry Briggs.* 2021. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-iarithmetica-logarithmicai-of-henry-briggs>. Citado na página 81.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados utilizados para construção da dissertação

Exemplo A.1. *Seja a um número real positivo. Se* $(a_n)_{n\geq 1}$ *é dada por* $a_n = a^{\frac{1}{m}}$ *para todo* $n \geq 1$, *então* $a_n \to 1$. *(NETO, 2015, p.82)*

Teorema A.1 (Propriedade Arquimediana dos Números Reais)**.** *São verdadeiras as afirmações:*

i) O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *dos números naturais não é limitado superiormente;*

ii) O ínfimo do conjunto $X = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ *é igual a* 0.

iii) Dados $a, b \in \mathbb{R}^{+}$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n.a > b$ *(LIMA, 2006, p.17)*

Teorema A.2 (Intervalos Encaixados)**.** *Dada uma sequência decrescente* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ *de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$, *existe pelo menos um número real* c, *tal que* $c \in I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(LIMA, 2006, p.17-18)*

Axioma A.1 (Axioma de Dedekind)**.** *Se* $X \subset \mathbb{R}$ *é não vazio e limitado superiormente, então* X *possui uma menor cota superior, denominada supremo e denotada por* $supX$. *Analogamente, se* $X \subset \mathbb{R}$ *é não vazio e limitado inferiormente, então* X *possui uma maior cota inferior, denominada ínfimo e denotada por* $infX$ *(NETO, 2015, p.69)*

Teorema A.3 (Unicidade do limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos. (LIMA, 2006, p.24)*

Teorema A.4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente. (LIMA, 2006, p.25)*

Teorema A.5. *A função exponencia é contínua. (LIMA, 2017, p.155)*

Teorema A.6 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem de fatores) como um produto de números primos. (HEFEZ, 2016, p.123)*