UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Análise da Axiomatização da Geometria Espacial nos Livros Didáticos do Ensino Médio

Juanbélia Wanderlei de Azevêdo Ferreira

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Agosto/2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

F383a Ferreira, Juanbélia Wanderlei de Azevêdo.
Análise da axiomatização da geometria espacial nos livros didáticos do ensino médio / Juanbélia Wanderlei de Azevêdo Ferreira. – Campina Grande, 2015.
86 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho".
Referências.

1. Geometria. 2. Livro Didático. 3. Método Axiomático. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

CDU 514(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

ANÁLISE DA AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

por

Juanbélia Wanderlei de Azevêdo Ferreira †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

Análise da Axiomatização da Geometria Espacial nos Livros Didáticos do Ensino Médio

por

Juanbélia Wanderlei de Azevêdo Ferreira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas - UEPB

Prof. Dr. Braúlio Maia Júnior - UFCG

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2015

Dedicatória

Lêdo, Davi e Gabriel, dedico essa conquista a vocês. Pois, nossa família é a maior de todas as minhas vitórias.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho. Sem ele eu não teria forças para essa longa jornada.

Aos meus pais, Antônio e Maria José, a presença deles sempre significou segurança e certeza de que não estava sozinha nessa caminhada.

Agradeço ao meu esposo, Lêdo César, sempre me deu força e coragem.

Meus filhos, Davi e Gabriel, muito obrigada pela compreensão nos momentos que me ausentei fisicamente de vocês.

As minhas fiéis companheiras, minhas irmãs, Adriana Mércia e Regina Lígia, mesmo distante, sempre acreditaram no meu potencial.

A minha secretária do lar, Lúcia de Fátima, meus sinceros agradecimentos. Sua ajuda foi indispensável e essencial na realização desse sonho.

A UFCG e a todos os professores do PROFMAT por terem colaborado com meu crescimento profissional.

Agradeço ao professor doutor Daniel Cordeiro, por me orientar com tamanha sabedoria e dedicação.

A Banca Examinadora formada pelos professores doutores Luciana Roze de Freitas (UEPB) e Braúlio Maia Júnior (UFCG) pela disponibilidade e por todas as orientações sugeridas.

Ao coordenador professor Aparecido Jesuino pelo zelo e dedicação ao programa.

Aos colegas de turma, Poliana Ribeiro, Wesyllis Salvador, Beethoven Rotterdam e Rivaldo Bezerra, obrigada pelo apoio e companheirismo. Nossa união nos tornou vencedores.

À secretária Andreza, agradeço pelo carinho e atenção que sempre me recebestes.

Agradeço a minha amiga professora Carolina Costa que com tamanha competência fez toda a revisão textual do nosso trabalho.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal contribuir com o processo de ensino aprendizagem da Matemática, em especial com o da Geometria Espacial. Faremos a análise de dois livros didáticos, verificando se a metodologia utilizada na apresentação da Geometria Espacial favorece a motivação e aprendizagem do aluno. Teremos como foco, analisar a forma como o método axiomático é apresentado nos capítulos que introduzem o estudo da Geometria Espacial e, se estes livros podem ajudar ao professor a desenvolver um raciocínio lógico dedutivo nos seus alunos. Incluímos, também, um capítulo onde apresentamos os conceitos básicos do sistema dedutivo para professores que atuam no ensino médio, proporcionando-lhes informações que venham complementar seus conhecimentos, enriquecendo suas metodologias no ensino da Geometria. Esperamos que este trabalho tenha utilidade aos que ensinam e, principalmente, aos que aprendem.

Palavras Chaves: Geometria. Livro Didático. Método Axiomático.

Abstract

This work aims to contribute to the Math teaching-learning process, focusing on Geometry. Two textbooks will be analyzed, verifying if the methodology applied in teaching Spacial Geometry favors pupil?s learning and motivate them. Our focus is to analyze the way in which the axiomatic method is introduced in the chapters that present the Spacial Geometry and how these books can help the teacher to develop a logical-deductive reasoning in their pupils. There is also a chapter in which basic concepts about the deductive system is presided to the on teachers who teach in High Schools, giving them information that can complete their knowledge, enriching their methodologies in Geometry teaching. It is expected that this work has utility to the ones who teach and, mostly, to the ones that learn.

Keywords: Geometry. Textbook. Axiomatic Method.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O ensino da Geometria nas escolas é algo que vem sendo ponto de preocupação para o professor. Muitas vezes, é quase que excluída do conteúdo a ser visto e, em outras instâncias ela é ensinada de uma forma muito complicada despertando, assim, o desinteresse dos alunos, os quais não compreendem a aplicação da Geometria no dia a dia, tampouco sua natureza lógico dedutiva.

Durante a vida acadêmica do aluno, muitas inquietações surgem, dentre elas, o porquê de estudar demonstrações em Geometria. Essas dificuldades talvez possam ser explicadas pelo fato de "demonstrar" estar centrado tanto na forma como é apresentado pelos livros didáticos como também, pela maneira, que as demonstrações são repassadas pelos professores a seus alunos.

Nessa perspectiva, nesse trabalho, serão analisados dois livros didáticos e, essa análise será voltada a forma como o método axiomático é apresentado para o aluno do ensino médio.

Em relação a estrutura, nosso trabalho está dividido em sete capítulos, donde este é o capítulo 1 e, os demais são:

- Capítulo 2 - Tratamos da importância do livro didático no processo ensino-aprendizagem e, apresentamos alguns critérios que o ensino da Matemática deve atender a fim de capacitar o estudante.

- Capítulo 3 - Apresentamos alguns pontos que devem ser observados durante a análise de livros didático, sobretudo disponibilizamos um modelo de roteiro que servirá como guia geral nessas análises e, pode ser utilizado posteriormente pelos interessados.

- Capítulo 4 - Como nosso objetivo principal está voltado ao método axiomático, nesse capítulo apresentamos toda a estrutura teórica, que um professor de matemática precisa saber sobre o que vem a ser o sistema dedutivo.

- Capítulo 5 - Analisamos a maneira como o método axiomático é apresentado no livro 1. Chamamos *livro* 1 ao primeiro livro a ser analisado.

- Capítulo 6 - Analisamos a maneira como o método axiomático é apresentado no livro 2. Chamamos *livro* 2 ao segundo livro a ser analisado.

- Capítulo 7 - Tecemos nossas considerações finais, baseadas nas nossas análises.

- Por fim são apresentadas as referências bibliográficas.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Nosso trabalho tem como objetivo geral contribuir com processo de ensino-aprendizagem, fazendo uma análise sobre a maneira como o método axiomático é apresentado nos capítulos introdutórios à Geometria Espacial nos livros didáticos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Analisar como os autores dos livros didáticos apresentam o método axiomático para o aluno;

- Enriquecer o leque de conhecimento do professor, contribuindo com a sua prática no que diz respeito ao método axiomático;

- Despertar no aluno um prazer mais acentuado de aprender, justificando o porquê de muitos de seus questionamentos;

- Colaborar com o processo ensino-aprendizagem da Matemática, em especial da Geometria Espacial.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica I

2.1 O papel do livro didático no processo ensino-aprendizagem

Para planejar suas atividades em sala de aula e enriquecer seu conhecimento, o recurso didático mais utilizado (na maioria das vezes o único) pelo professor é o livro didático. Para os alunos, é um instrumento importante onde se adquire informações valiosas que auxiliam, ou não, no interesse pela leitura e no progresso dos seus conhecimentos, contribuindo com a formação social e cultural dos educandos.

Uma das funções do livro didático é contribuir no processo ensino-aprendizagem, por isso sua organização é de suma importância tanto para o professor como para o aluno pois, se a distribuição dos conteúdos, as ilustrações, o colorido, os exercícios, etc, não estiverem bem organizados, o livro terá uma péssima influência no aprendizado do discente e, no fazer didático do professor.

Para (Oliveira [9], p.11), o livro didático é...

> *"um material impresso, estruturado, destinado ou adequado a ser utilizado num processo de aprendizagem e de formação".*

(Lajolo [6], p.4) afirma que para um livro ser didático ...

> *"precisa ser usado de forma sistemática no ensino-aprendizagem de um determinado objeto ou conhecimento, já consolidado como disciplina".*

Com efeito, o livro didático é um recurso pedagógico que "dialoga" tanto com o professor quanto com o aluno, por essa razão é um apoio pedagógico indispensável nessa busca de conhecimentos e deve apresentar algumas atribuições importantes não só em relação ao aluno, mas também ao professor. Essas atribuições serão citadas a seguir.

De acordo com o Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD - 2012 [11], p.13):

Com relação ao aluno, as funções mais importantes do livro didático são:

> **a)** *O favorecimento da aquisição de conhecimento socialmente relevante;*
>
> **b)** *O desenvolvimento das competências cognitivas, que contribuem para a autonomia dos alunos;*
>
> **c)** *A consolidação, ampliação, aprofundamento e integração dos conhecimentos adquiridos;*
>
> **d)** *O auxílio na avaliação da aprendizagem;*
>
> **e)** *A formação social e cultural dos alunos, além de desenvolver a capacidade de convivência e exercício da cidadania.*

Com relação aos professores, as funções mais importantes do livro didático são:

> **a)** *O auxílio no preparo e planejamento de suas aulas;*
>
> **b)** *O favorecimento da aquisição dos conhecimentos;*
>
> **c)** *O favorecimento na formação didático - pedagógica;*
>
> **d)** *O auxílio na avaliação da aprendizagem dos alunos.*

Podemos perceber que, para essas atribuições serem bem desempenhadas é necessário que se leve em consideração não só o que traz o livro do aluno, como também todo material de apoio pedagógico que é fornecido no manual do professor pois, esse material o orientará na preparação de suas aulas. Sendo assim, indagamos:

De que maneira essas atribuições podem ser inseridas ao estudo da Geometria?

No decorrer do nosso trabalho, analisaremos a forma como o método axiomático é apresentado aos alunos em dois livros didáticos e, buscaremos fazer uma associação dessas atribuições nos capítulos analisados.

Mediante o exposto, observamos que a valorização do livro didático é indispensável, isso não implica que o mesmo seja o único objeto dominante no bom andamento do processo ensino-aprendizagem. Sobretudo, a atuação do professor é de suma importância, pois conduz as atividades diárias da sala de aula e, sempre que é necessário, enriquece suas metodologias profissionais.

2.2 Princípios Gerais de Avaliação do livro didático

O PNLD é um programa federal, administrado pelo Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação do Ministério de Educação e Cultura (FNDE/MEC) e, tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos (Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Biologia, Química, Física e dicionários), aos alunos da educação básica e, aos alunos que são público-alvo da educação especial.

O PNLD surgiu no ano de 1995 com duas atribuições: Melhorar a qualidade da educação e suprir a necessidade de distribuição gratuita de livros escolares. O programa é executado em ciclos trienais alternados. Assim, a cada ano, o FNDE adquire e distribui livros para todos os alunos de determinada etapa de ensino, repõe e complementa os livros reutilizáveis para outras etapas.

A Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC) e o FNDE/MEC, em convênio com instituições públicas de ensino superior, executam uma etapa chave de todo PNLD, que é a avaliação das obras inscritas nesse programa.

Após a avaliação das obras, o MEC publica o Guia de Livros Didáticos com resenhas das coleções consideradas aprovadas. Esse guia é encaminhado às escolas onde os professores escolhem entre os títulos disponíveis, aqueles que melhor atendem ao projeto político pedagógico em vigência.

Muitos dos docentes sequer conhecem os critérios usados para avaliar os livros que vão ser usados e alguns, não sabem nem da existência do guia de livros didáticos. Na maioria das vezes, somos informados da escolha dos livros no momento em que serão feitas as "análises", momento esse que as editoras parecem buscar apenas seus benefícios.

Salientando ainda que, no ato da escolha do livro didático, é disposto ao professor um tempo insuficiente e um ambiente desapropriado para que possa dedicar uma atenção necessária e criteriosa na escolha do material que será utilizado por um período de três anos.

Enfim, em nossa opinião e experiência pessoal, a escolha dos livros didáticos é feita de forma incorreta e aleatória, muitas vezes alguns aspectos indispensáveis passam despercebidos e, só serão notados quando se está fazendo uso do livro escolhido.

2.3 Princípios da componente curricular Matemática

A Matemática se faz presente nas mais diversas áreas do conhecimento e das práticas sociais. Por isso, como professores de Matemática, devemos voltar nossos olhares a um ensino que propicie condições para que o aluno associe, sempre que possível, os conteúdos estudados às suas necessidades cotidianas.

Devemos sempre enfatizar que não é por acaso que se estuda matemática nas escolas. O que se aprende em Matemática deve ser aplicado no dia a dia do aluno, propiciando assim, um progresso no pensamento e uma maturidade em resolver problemas reais.

A Matemática também se relaciona com outras áreas do conhecimento tais como: Química, Física, Biologia, etc. Deste modo, asseguramos que as outras ciências não se desenvolveriam se a matemática não existisse e não fosse estudada pois, é uma das mais significativas conquistas do conhecimento humano.

Nesse contexto, o (PNLD - 2012 [11], p.16) assegura que o ensino da Matemática deve capacitar os estudantes para:

> **1.** *Planejar ações e projetar soluções para problemas novos, que exijam iniciativa e criatividade;*
>
> **2.** *Compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação;*
>
> **3.** *Interpretar matematicamente situações do dia a dia ou do mundo tecnológico e científico e saber utilizar a Matemática para resolver situações -problema nesses contextos;*
>
> **4.** *Avaliar os resultados obtidos na solução de situações-problema;*
>
> **5.** *Fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados;*
>
> **6.** *Saber usar os sistemas numéricos, incluindo a aplicação de técnicas básicas de cálculo, regularidade das operações etc.;*
>
> **7.** *Saber empregar os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do conceito de função e de suas várias representações (gráficos, tabelas, fórmulas etc.) e a utilização das equações;*
>
> **8.** *Reconhecer regularidades e conhecer as propriedades das figuras geométricas planas e sólidas, relacionando-as com os objetos de uso comum e com as representações gráficas e algébricas dessas figuras, desenvolvendo progressivamente o pensamento geométrico;*
>
> **9.** *Compreender os conceitos fundamentais de grandezas e medidas e saber utilizá-los em situações-problema;*

10. *Utilizar os conceitos e procedimentos estatísticos e probabilísticos, valendo-se, entre outros recursos, da combinatória;*

11. *Estabelecer relações entre os conhecimentos nos campos de números, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidade, para resolver problemas, passando de um desses quadros para outro, a fim de enriquecer a interpretação do problema, encarando-o sob vários pontos de vista.*

Sabemos que a matemática é dividida em diversos ramos, tais como: Aritmética, Álgebra, Geometria, Análise, etc. Alguns desses ramos, são voltados a educação básica e outros ao ensino superior, dessa forma, iremos nos concentrar apenas nos ramos abordados na educação básica, em especial a Geometria.

Fundamentando-se nos itens 8 e 11 citados acima, podemos destacar a importância do estudo da Geometria na educação básica. Assim, analisaremos os capítulos introdutórios ao estudo da Geometria Espacial em dois livros didáticos e levaremos em consideração a importância dos ítens citados.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica II

3.1 Como analisar um livro didático?

Segundo a base teórica que adotamos nesse trabalho, o ensino da Matemática deve adequar-se à três componentes básicas: A *conceituação*, a *manipulação* e a *aplicação*. Na análise do livro didático, essas componentes devem ser consideradas e bem observadas, tendo em vista que o professor e o aluno usam o livro para repassar e adquirir os conhecimentos envolvidos no processo ensino-aprendizagem.

3.1.1 Conceituação

Para (Elon [7], p.1), a conceituação ...

> *"compreende a formulação de definições, o enunciado de proposições, e o elo de conexões com diversos conteúdos, bem como a interpretação e a reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos".*

A formulação correta e objetiva das definições matemáticas permite a simplificação da linguagem para uma melhor compreensão dos conceitos a serem trabalhados.

(Elon [7], p.2) ainda afirma que, ao examinarmos um livro didático, no quesito conceituação, devemos observar os seguintes aspectos:

1. Erros

- **(a)** De *desatenção* - São erros de cálculo e de impressão;
- **(b)** De *raciocínio* - Afirmar que um caso geral é consequência de um caso particular;
- **(c)** De *definição* - Uma definição pode ser incorreta por vários motivos. Ela pode estar em flagrante desacordo com a prática universal, pode conduzir a contradicões, podem ser incompletas, excessivamente abrangentes, etc.

(d) *Resultados e conceitos mal formulados* - Dão lugar a ambiguidade, das quais resultam conclusões absurdas.

2. *Excesso de formalismo* - Definir objetos desnecessários;

3. *Linguagem inadequada* - Erros gramaticais;

4. *Imprecisão* - Definições parciais ou ambíguas ;

5. *Obscuridade* - Aqui a Conceituação e a didática devem juntar-se para que se dê atenção a trechos ambíguos, ininteligíveis ou contraditórios;

6. *Confusão de conceitos* - Principalmente nos argumentos demonstrativos;

7. *Objetividade* - Não se dá relevância aos pontos triviais;

8. *Conexões* - Os vários assuntos expostos no livro devem ser relacionados uns com os outros, sempre que possível.

Em se tratando da Geometria, a *conceituação* é bem presente no raciocínio dedutivo. Nesse raciocínio, o aluno compreende o porquê da veracidade(ou não) de algumas afirmações, como também suas negações e(ou) recíprocas e, essa prática baseia-se na conceituação.

No capítulo 4 do nosso trabalho, exploraremos a teoria que envolve o raciocínio dedutivo, bem como, a importância dessa teoria para o professor e a forma como deve ser apresentado ao aluno.

3.1.2 Manipulação

De acordo com (Elon [7], p.1), a manipulação ...

> *"é a habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes".*

A manipulação deve aparecer no decorrer dos textos mas, principalmente, nos exercícios. Com isso, cabe a nós, professores, sabermos selecionar os exercícios e problemas que melhor envolvam essa manipulação.

3.1.3 Aplicação

As aplicações são contextualizações em forma de problemas, onde os alunos utilizam as informações fornecidas e os conceitos aprendidos para resolvê-los.

Segundo (Elon [7], p.1), a aplicação ...

> *"É a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e tão necessário".*

A essência e o porque da Matemática ficam bem esclarecidos nas aplicações, pois com elas se responde problemas reais que auxiliam a sociedade em sua busca constante por desenvolvimento e qualidade de vida.

Um exercício rodeado de aplicações, é motivador, estimulante, faz com que o aluno encontre um sentido, um porque de dedicar seu tempo e sua energia para tentar compreender e aprender o que lhe está sendo apresentado em sala de aula.

O interesse e o comprometimento da maior parte dos alunos associa-se ao significado que é dado aos conteúdos ministrados. Para isso, as aplicações são recursos que darão esse significado.

3.2 Roteiro Geral para uma Análise de livro didático

No roteiro descrito abaixo, são apresentadas sugestões de alguns pontos que devem ser observados ao se analisar um livro didático. O roteiro foi elaborado por nós e não se constitui um trabalho finalizado, que não possa ser melhorado ou adaptado.

I) Dados sobre o Livro:

- **1.** Dados sobre o(s) autor(es)
- **2.** Informações da ficha catalográfica
- **3.** Referências Bibliográficas
- **4.** O livro oferece sugestões de leituras complementares

II) Formato e Encadernação:

- **1.** Facilidade de manuseio
- **2.** Durabilidade
- **3.** Formato e tamanho do livro são adequados
- **4.** Qualidade da capa e do papel

III) Aspectos Visuais:

1. Qualidade da impressão
2. Tamanho da letra
3. Espaço entre letras e linhas
4. Maneira em que estão dispostos os textos longos com uso de descanso visual
5. Qualidade das ilustrações
6. Qualidade dos desenhos
7. As ilustrações de caráter científico respeitam a proporção dos objetivos
8. Os gráficos e tabelas têm títulos e indicam fontes e datas de onde provêm

IV) Conteúdo:

1. Distribuição dos conteúdos
2. Objetividade
3. Conceitualização dos objetivos
4. Clareza das definições
5. Distinção entre definições e teoremas
6. Obscuridade em alguma parte do texto
7. Confusão de Conceitos
8. Verificar se há afirmações sem justificativas convincentes e se isso atrapalha o entendimento do texto
9. Apontar, caso haja, erros provenientes de:
   - **a.** Desatenção
   - **b.** Raciocínio
   - **c.** Definição
   - **d.** Resultantes de conceitos mal formulados ou vagos
   - **e.** Ortografia

V) Relação a outros temas:

1. Interdisciplinaridade
2. Contextualização. Se essas são reais ou artificiais? Se tem ligação com a realidade?
3. Temas transversais
4. Atualidade
5. Uso da história da Matemática como elemento que auxilie na didática e não apenas mera descrição de fatos históricos

6. Conexões com o cotidiano do aluno

7. Aplicações interessantes e em números suficientes

VI) Manipulação:

1. Qualidade dos exercícios

2. Os exercícios ajudam na fixação da teoria

3. Os Exercícios despertam para pontos interessantes

4. Há exercícios que despertam a criatividade? São estimulantes

5. Há exercícios apenas manipulantes, repetitivos

6. Os exercícios mais interessantes estão separados dos demais

VII) Aspectos pedagógicos - metodológicos:

1. Linguagem adequada que facilita a comunicação com os alunos

2. Se há e, onde há excesso de formalismo

3. Há estimulo exagerado para o uso de fórmulas ou regras

4. Há imprecisões

VIII) Análise do livro do professor:

1. Presta-se como guia para o uso do livro

2. Está escrito de modo claro

3. Apenas fornece as respostas dos exercícios

4. Apresentam pontos que possam auxiliar o professor em suas aulas

Nos capítulos dos livros, que iremos analisar posteriormente, não nos deteremos na íntegra, ao roteiro apresentado acima. Porém, focaremo-nos em alguns desses tópicos associado-os ao foco principal da nosso trabalho, isto é, analisar como o método axiomático é apresentado ao aluno nos livros didáticos.

3.3 Como será feita nossa Análise de Livros Didáticos

A Matemática é uma das componentes curriculares que não apresenta uma boa aceitação por parte dos alunos. Como a Geometria, particularmente, é um ramo da Matemática, essa insatisfação também é perceptível e preocupante. Assim, nos perguntamos:

O que causa essa rejeição?

São vários os motivos que podem justificar essa dificuldade dos alunos com a geometria e, essa insatisfação parece está centrada, principalmente, na metodologia utilizada pelo professor ao repassar os conteúdos, do que nas próprias teorias envolvidas.

Em nosso ponto de vista, entre as possíveis causas de alguns problemas ligado ao ensino da Geometria estão:

1. O tratamento da Geometria como assunto isolado, isto é, não é interligada com os demais conteúdos;

2. Geralmente a Geometria é trabalhada no final do ano letivo. Com isso, é vista de forma rápida, sem ser dado sua real ênfase e importância;

3. Os conteúdos são repassados apenas de forma mecânica e, esse mecanismo também é observado na resolução dos exercícios;

4. A falta de preparo por parte dos docentes;

5. A falta de uma abordagem lógico dedutiva satisfatória do assunto.

Os livros apresentam um leque de conteúdos e, na maioria das vezes os professores apenas o reproduzem, o aluno apenas tem que aprender e também reproduzir o que é feito pelo professor, tornando um processo de aprendizagem mecânico. Nesse percurso, muitas vezes, se perdem definições que deveriam ser citadas em conceitos e demonstrações e, alguns resultados são apresentados sem suas respectivas demonstrações.

Nos capítulos 5 e 6 do nosso trabalho, serão analisados os capítulos que introduzem a Geometria Espacial em dois livros didáticos do ensino médio, são eles:

Livro 1 - Conexões com a Matemática[1].

Livro 2 - Contextos e Aplicações[3].

Nossa análise será norteada, observando-se os seguintes aspectos:

a) Em relação aos conteúdos, focaremo-nos aos capítulos que introduzem a Geometria Espacial, em especial a forma como o método axiomático é apresentado para o aluno.

b) Se os itens 8 e 11, atribuídos pelo (PNLD - 2012 [11], p.16) e citados no capítulo 2 do nosso trabalho, são bem aplicados no desenvolvimento dos conteúdos;

c) Se a forma como o conteúdo é repassada é adequada às três componentes básicas no ensino da Matemática, vistas na seção 3.1 do nosso trabalho: A *conceituação*, a *manipulação* e a *aplicação*;

d) O roteiro sugerido na seção 3.2 do nosso trabalho. Porém, serão considerados apenas alguns aspectos;

No capítulo seguinte, faremos uma apresentação formal de tudo que, nós professores, precisamos conhecer sobre método axiomático como também, a necessidade (ou não) desse formalismo ser repassado para o aluno.

Capítulo 4

Método Axiomático para Professor

Para que a Matemática seja melhor aceita e compreendida é necessário que o pensamento seja bem formulado e apresentado. Para isso, é necessário que o professor tenha conhecimento dos conceitos matemáticos envolvidos na transmissão de determinados conteúdos.

No campo da Geometria, particularmente, o processo de aprendizagem é desafiador.

A formação geométrica do professor, pode deixar a desejar, pode ser que durante a graduação se teve pouca preparação para atuar nessa área de conhecimento. Isso, faz com que o professor crie uma expectativa negativa da Geometria e, a tenha sempre como um desafio constante.

Considerando a importância do professor estudar a Geometria de uma forma que sinta segurança no seu fazer didático, abordaremos alguns conhecimentos que o auxiliará na transmissão de conteúdos geométricos. Até certo ponto, esses conhecimentos podem não ser repassados de maneira formal aos alunos, mas, o professor deve está inteirado e familiarizado com esse formalismo e esses conhecimentos.

Nesta perspectiva, propomos um estudo da Geometria sob o ponto de vista do método axiomático, proporcionando ao professor uma reflexão sobre sua prática pedagógica acerca do papel da geometria no ensino médio.

O que é um método axiomático? Para que serve? Quais os seus objetivos? Como o método axiomático aparece nos livros didáticos?

Antes de responder a essas questões, abordaremos alguns termos utilizados nessa teoria. Nossa abordagem será propositadamente informal e rápida, tal como propomos ser apresentada aos alunos.

4.1 Definição Matemática

Definir em Matemática significa nomear. É atribuir a um objeto uma convenção baseada nas propriedades designadas ao mesmo.

Nas definições, pode-se observar que o nome do objeto definido, está diretamente ligado às propriedades que o caracteriza. Em contrapartida, essas propriedades são atribuídas apenas a esse objeto; garantindo assim a sua unicidade.

De acordo com (Daniel Cordeiro [5], p.144) definir...

> "...é dar nomes a objetos matemáticos, mediante determinadas propriedades interessantes que possuam e que os caracterizem."

Exemplo 1 : *Duas retas r e s são concorrentes quando possuem um único ponto P em comum.*

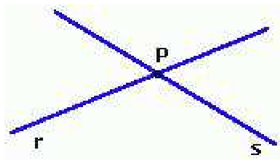


Figura 4.1: Definição de Retas Concorrentes

Exemplo 2 : *Duas retas r e s são perpendiculares quando são concorrentes e determinam quatro ângulos retos.*

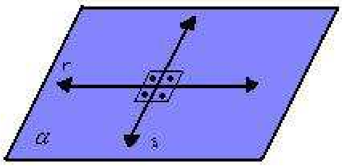


Figura 4.2: Definição de Retas Perpendiculares

É importante um professor saber que ao considerarmos uma definição, sua recíproca também é verdadeira.

Dessa forma, podemos assegurar:

No *exemplo* 1, se duas retas possuem um único ponto em comum, elas são concorrentes.

No *exemplo* 2, se duas retas são concorrentes e determinam quatro ângulos retos, essas retas são perpendiculares.

4.2 Conceitos Primitivos

No exemplo 2, citado na seção anterior, definimos retas perpendiculares. Note que, na definição usamos mais quatro novos conceitos: retas, retas concorrentes, ângulos e ângulos retos.

Para definirmos um objeto, tivemos que recorrer a outras palavras e definições que também foram nomeadas usando outras palavras e definições também já existentes.

Assim, podemos questionar:

Em Geometria, quais foram os primeiros conceitos criados, dos quais, a partir deles, podemos definir outros objetos?

Para responder esses questionamentos, partimos de algumas noções que chamamos de conceitos primitivos.

Conceitos Primitivos: São conceitos considerados primeiros. São assumidos como verdades, imediatamente compreensíveis e, por essa razão não são definidos. São suficientes para que se possa definir a partir deles, todos os conceitos derivados.

Na Geometria espacial, por exemplo, são considerados conceitos primitivos: *Ponto*, *reta*, e *plano* que são objetos que possuem representações visuais, porém são abstratos. Uma representação (não uma definição) desses conceitos primitivos podem ser obtidos como segue:

Ponto: Ao tocarmos o lápis no papel, num simples contato, encontramos um ponto. Utilizamos letras maiúscula do nosso alfabeto para identificá-lo.

Reta: O encontro de duas paredes nos fornece a ideia de reta. A reta é ilimitada e, para identificá-la utilizamos letras minúscula do nosso alfabeto.

Plano: Um chão de uma sala pode ser associado a um plano. Assim como a reta, o plano é ilimitado e, para indicar planos utilizamos letras minúsculas do alfabeto grego.

4.3 Axiomas

Os ***axiomas***, ou ***postulados***, assim também conhecidos, são afirmações matemáticas sobre os conceitos primitivos, suas propriedades ou características. São evidentemente aceitas e não precisam ser demonstradas. Têm a "cara" de um teorema mas, não são teoremas.

Na Geometria plana, os axiomas podem ser exemplificados, citando os postulados de Euclides, onde são considerados os conceitos primitivos: *ponto* e *reta*.

Exemplo 3 *:*

A1*: Pode-se traçar uma única reta passando por quaisquer dois pontos distintos.*

A2*: Pode-se prolongar um segmento de reta continuamente em uma reta.*

A3*: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.*

A4*: Todos os ângulos retos são iguais.*

A5*: Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.*

Os axiomas apresentados a seguir, foram extraídos do livro didático (*Conexões com a Matemática*), Juliane [1], o qual iremos analisar posteriormente a forma como a autora apresenta, utiliza e aplica esses axiomas.

Os exemplos fazem referência a Geometria espacial onde são considerados como conceitos primitivos: *ponto*, *reta* e o *plano*.

Exemplo 4 *:*

P1*: O espaço tem infinitos pontos.*

P2*: Toda reta e todo plano são conjuntos de infinitos pontos.*

P3*: Fora de uma reta, bem como fora de um plano, há infinitos pontos.*

P4*: Dois pontos distintos A e B determinam uma única reta.*

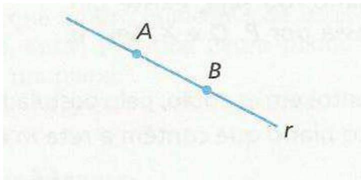


Figura 4.3: Axioma P4

P5*: Por um ponto P fora de uma reta r, passa somente uma reta s paralela a r.*

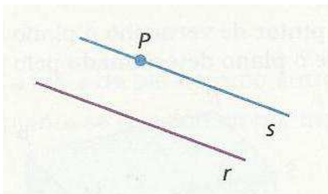


Figura 4.4: Axioma P5

P6*: Três pontos não colineares determinam um único plano.*

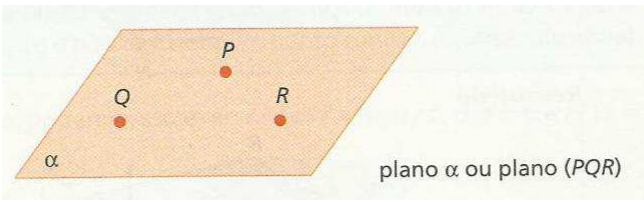


Figura 4.5: Axioma P6

P7*: Se dois pontos distintos estão em um plano, a reta que passa por eles está contida nesse plano.*

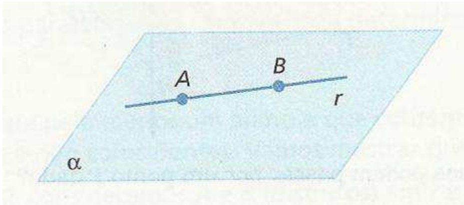


Figura 4.6: Axioma P7

P8: *Se dois planos distintos, α e β, interceptam-se, a intersecção é uma reta.*

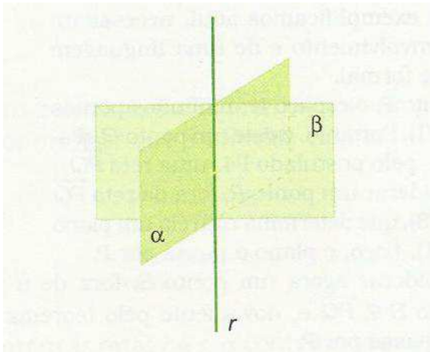


Figura 4.7: Axioma P8

4.4 Teorema

Teorema é uma afirmação Matemática que precisa ser demonstrada. Para demonstrar um teorema, utilizamos outras afirmações previamente aceitas, que são os axiomas; ou outros teoremas anteriormente demonstrados em um processo lógico dedutivo.

Vale salientar, que no ensino básico, fundamental e médio, existem teoremas que suas demonstrações não devem ser repassadas para o aluno, pelo simples fato de envolver argumentos e técnicas muito elaboradas e fora do seu entendimento.

Por outro lado, existem fatos matemáticos que podem e devem ser facilmente demonstrados. A exemplo, podemos citar o Teorema de Pitágoras visto no 9º ano do ensino fundamental *II*.

Atualmente, a palavra teorema geralmente é utilizada para resultados de grande importância Matemática. Geralmente, os livros didáticos utilizam o termo, *proposição*, para identificar um teorema de pouca importância.

Segundo (Daniel Cordeiro [5], p.137), proposição...

> *"...é um teorema que não é central no contexto e tem importância limitada"."*

Exemplo 5 *:*

Teorema 4.1 *: Duas retas paralelas distintas, determinam um único plano.*

Proposição 4.2 *: Duas retas distintas ou não se intersectam ou se interceptam em um único ponto.*

4.5 Demonstração

Demonstração é uma sequência de argumentações lógicas, onde se usam definições aceitas, conceitos primitivos, axiomas e(ou) resultados previamente provados para provar a validez de um teorema.

De acordo com os (PCNEM [10], p.124)...

> *... "a Geometria é uma excelente oportunidade para a construção de argumentos e resolução de problemas que incentivam o aluno a conhecer como são validadas as afirmações em Matemática, usando de demonstrações a partir dos axiomas".*

Para demonstrar um teorema é necessário observar sua(s) hipótese(s) e sua tese.

- ***Hipótese(s)*** - São afirmação(ões) considerada(s) verdadeira(s), que aparecem no enunciado do teorema e, são indispensáveis na sua demonstração.
- ***Tese*** - Também aparece no enunciado do teorema e, é o que se pretende concluir na demonstração.

Podemos enunciar os teoremas do seguinte modo:

$$\boxed{\textit{\textbf{Se} } H\textit{\textbf{, então} } T}$$

Onde, H é a hipótese e T a tese.

Assim, demonstrar um teorema é provar a veracidade desta implicação, é convencer o leitor que ao assumirmos a(s) hipótese(s) conseguimos concluir a tese do teorema.

A nós professores, é primordial percebermos que o aluno deve conhecer os objetos envolvidos na afirmação do teorema a ser demonstrado, identificando sua(s) hipótese(s) e sua tese.

De acordo com os (PCNEM [10], p.125)...

> *"... ao final do ensino médio o aluno deve compreender que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações."*

Podemos demonstrar um teorema de diferentes maneiras, utilizando técnicas de demonstrações distintas. Para conhecermos e(ou) aprofundarmos nossos conhecimentos, sugerimos a leitura do livro *"Um convite a Matemática"*, Daniel Cordeiro [5].

Observemos no teorema 4.1 e na proposição 4.2 quais são suas hipóteses e suas teses e, posteriormente suas demonstrações.

No **Teorema 4.1**, temos:

- *Hipótese(s)* - Duas retas são paralelas e distintas.
- *Tese* - Essas retas determinam um único plano.

Demonstração do Teorema 4.1

Consideremos, por hipótese, as retas r e s paralelas e não coincidentes.

Sabemos, por definição, que duas retas são paralelas e não coincidentes se estiverem num mesmo plano e, não possuírem nenhum ponto em comum. Logo, existe pelo menos um plano β que contém as retas r e s. Mostraremos a unicidade do plano β.

Pelo axioma P2, consideremos os pontos P, Q e R, distintos, tais que $P \in r$, $Q \in r$ e $C \in s$.

Note que, os pontos P, Q e R são não colineares e, pelo postulado 6, determinam um único plano. Logo, o plano β é o único plano determinado pelas retas paralelas r e s. $\square$

Na **Proposição 4.2**, temos:

- *Hipótese(s)* - Duas retas são distintas.
- *Tese* - Essas retas não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.

Demonstração da Proposição 4.2

Sejam r e s duas retas distintas. Se essas retas não se intersectam, a demonstração acaba.

Suponha que elas se intersectam em dois pontos distintos. Pelo axioma P4 existe apenas uma reta contendo esses pontos, logo seriam coincidentes, o que é uma contradição pois, consideramos as retas r e s distintas. Portanto, a interseção dessas retas ou é vazia ou só contém um ponto. $\square$

Nas demonstrações acima, é fácil ver, que foram utilizados alguns conceitos primitivos, *ponto*, *reta* e *plano*, os axiomas *P2*, *P3*, *P4*, *P6* e *P7* para desenvolver um raciocínio lógico dedutivo onde partimos da hipótese e chegamos na tese, demonstrando, assim, os teoremas.

4.6 Método Axiomático

Método Axiomático é um conjunto finito de *definições*, *conceitos primitivos* e *axiomas* utilizados para definir objetos e demonstrar teoremas.

Inicialmente, para organizar esse conjunto de verdades, é necessário que se tenha alguns conceitos básicos, chamados *Conceitos primitivos* e algumas *definições*. Esses conceitos são articulados por meio de afirmações, chamadas *axiomas*. Por fim, os *teoremas*, são afirmações sobre propriedades ou características de objetos do modelo axiomático e demonstrados utilizando as definições, os conceitos primitivos, os axiomas ou até mesmo outros teoremas já demonstrados. Por isso, podemos dizer que o *método axiomático* possui característica demonstrativa.

O método axiomático tem como objetivos:

* Listar os conceitos primitivos;

* Enunciar os axiomas necessários;

* Demonstrar afirmações e resultados.

Alguns livros didáticos utilizam o termo, *sistema dedutivo*, quando se refere a *método axiomático* porém, ambos possuem o mesmo significado. A exemplo, o livro que analisaremos posteriormente, *Conexões com a Matemática* [1], usa essa denominação.

Segundo (Braz [2], p.23) um modelo axiomático também deve satisfazer as três condições seguintes:

1. *Completude*: tudo que será usado na teoria está apropriadamente contido nos axiomas, de maneira que não hajam hipóteses implícitas;

2. *Consistência*: é impossível deduzir dois teoremas contraditórios dos axiomas;

3. *Independência*: nenhum axioma é consequência de alguma combinação dos demais.

Utilizando o método axiomático, o estudo da Geometria é um exercício que gratifica àqueles que sentem prazer em explorar raciocínios abstratos. Subentende-se que o professor de Matemática goze desse prazer e o possa repassar a seus alunos.

As informações aqui fornecidas são destinadas aos professores de Matemática, por ser um contexto indispensável ao nosso leque de conhecimentos. Mas, é notório que o formalismo dessa prática não deve ser repassada para o aluno pois, em alguns casos, o mesmo pode não está apto para perceber as sutilezas do método axiomático na Geometria, o que não significa que deve ser abolido do ensino da Geometria.

Com isso, não podemos deixar de enfatizar que nós professores, devemos colaborar na formação de uma base sólida que possa servir de estímulo para que os alunos desenvolvam uma percepção do processo lógico - dedutivo. Para isso, devemos dispor de uma bagagem de conteúdo superior a do aluno e, tenhamos o conhecimento de toda teoria envolvida no estudo do *método axiomático*.

Capítulo 5

Análise do capítulo 5 do Livro 1 - *Conexões com a Matemática*

A primeira obra que iremos analisar é intitulada, *Conexões com a Matemática* [1], 1ª edição, São Paulo, 2010. É uma obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, sob a responsabilidade de Juliane Matsubara Barroso. A coleção possui três volumes destinados aos 1º, 2º e 3º anos do ensino médio e, nosso objeto de estudo será o volume 2, pois, nossa análise será voltada ao capítulo que introduz a Geometria Espacial, especialmente, a forma como o método axiomático é apresentado ao aluno.

Essa coleção foi aprovada em 2011 pelo ministério da educação e, sua resenha encontra-se no guia de livros didáticos de matemática, PNLD 2012, do ensino médio.

Em uma visão geral, o guia (PNLD [11], p.53) afirma que ...

> "... *Na abertura das unidades, encontram-se questões que buscam valorizar os conhecimentos prévios ou extraescolares dos alunos.*
> *Em seguida, são apresentados textos e imagens que relacionam, adequadamente, a Matemática a outras áreas do conhecimento ou a situações do dia a dia. Em geral, a explanação dos conteúdos é feita de maneira satisfatória. Além disso, várias atividades propiciam reflexões e aprofundamento dos conceitos. No entanto, a partir do capítulo 3, do volume 2, passa-se a enfatizar o emprego de fórmulas e procedimentos.*
> *Entre as diversas seções incluídas na obra, destaca-se a chamada Autoavaliação, com indicações úteis para o aluno localizar no livro e revisar conteúdos já estudados."*

O livro é composto por 740 páginas, sendo 440 destinadas ao aluno e, 304 reservadas ao guia do professor. Em termos de estrutura, o volume 2 está dividido em unidades, as quais são subdivididas em capítulos que são entremeados por exercícios resolvidos e propostos, exercícios complementares e por fim, são apresentados um resumo do capítulo e algumas questões de autoavaliação. Essa estrutura poderá ser observada a medida que formos apresentando nossa análise.

Observaremos abaixo a tabela 5.1 que apresenta a estrutura do volume 2, porém, mais uma vez, lembramos que nos deteremos na introdução da Geometria espacial que encontra-se no capítulo 5 da unidade 2. Durante nossa análise, quando citarmos o *livro* 1, a referência está sendo feita justamente a esse capítulo do livro.

Volume 2 - Conexões com a Matemática		
Unidade 1 - Trigonometria	Capítulo 1 Capítulo 2 Capítulo 3	Ciclo Trigonométrico Principais funções trigonométricas Complementos e Aprofundamentos
Unidade 2 - Geometria	Capítulo 4 Capítulo 5 Capítulo 6 Capítulo 7	Superfícies poligonais, círculo e áreas Introdução a Geometria Espacial Poliedros Corpos Redondos
Unidade 3 - Matrizes e Sistemas Lineares	Capítulo 8 Capítulo 9	Matrizes e determinantes Sistemas Lineares
Unidade 4 - Análise Combinatória e Probabilidade	Capítulo 10 Capítulo 11	Análise Combinatória Probabilidade

Tabela 5.1: Conexões com a Matemática - Volume 2

Na maioria dos livros didáticos, a Geometria aparece nos capítulos finais, com isso não é dada a importância necessária ao seu estudo pois, o conteúdo é visto de forma apressada e desmotivadora. No entanto, essa realidade está sendo modificada, alguns livros já introduzem a Geometria nos capítulos iniciais, como é o caso do livro ora analisado, onde a Geometria é apresentada logo na 2ª unidade.

Os autores subdividem o capítulo, Introdução a Geometria Espacial, em seções nas quais iremos focar nossa análise observando a forma como o método axiomático é apresentado ao aluno.

5.1 Análise da seção *Ideias Gerais* apresentada no livro 1

Visualmente, o capítulo ora analisado é introduzido de forma motivadora, pois apresenta um colorido atrativo que estimula ao aluno um interesse em conhecer de que realmente se trata a Geometria espacial, conforme podemos observar nas figuras 5.1 e 5.2.

Capítulo 5

Introdução à Geometria espacial

Objetivos do capítulo

- Identificar a posição relativa entre retas, entre planos e entre retas e planos, e aplicá-las na resolução de problemas.
- Identificar e calcular distâncias entre: pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.
- Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.

1 Ideias gerais

A sustentabilidade no ar e a forma aerodinâmica de um avião são frutos do conhecimento humano construído durante milhares de anos. A forma da fuselagem e das asas, a posição relativa do plano do leme e do plano das pequenas asas traseiras exemplificam o uso de conceitos e relações geométricas no estudo da aerodinâmica de um avião. As asas do avião formam um ângulo que, na Geometria, é conhecido por **ângulo diedro**; graças a ele, quando o avião se inclina, a asa na posição inferior adquire maior sustentação, o que o leva de volta à posição horizontal em uma manobra de estabilização durante o voo. Neste capítulo vamos estudar alguns elementos constitutivos da Geometria no espaço tridimensional.

140

Figura 5.1: Introdução do capítulo

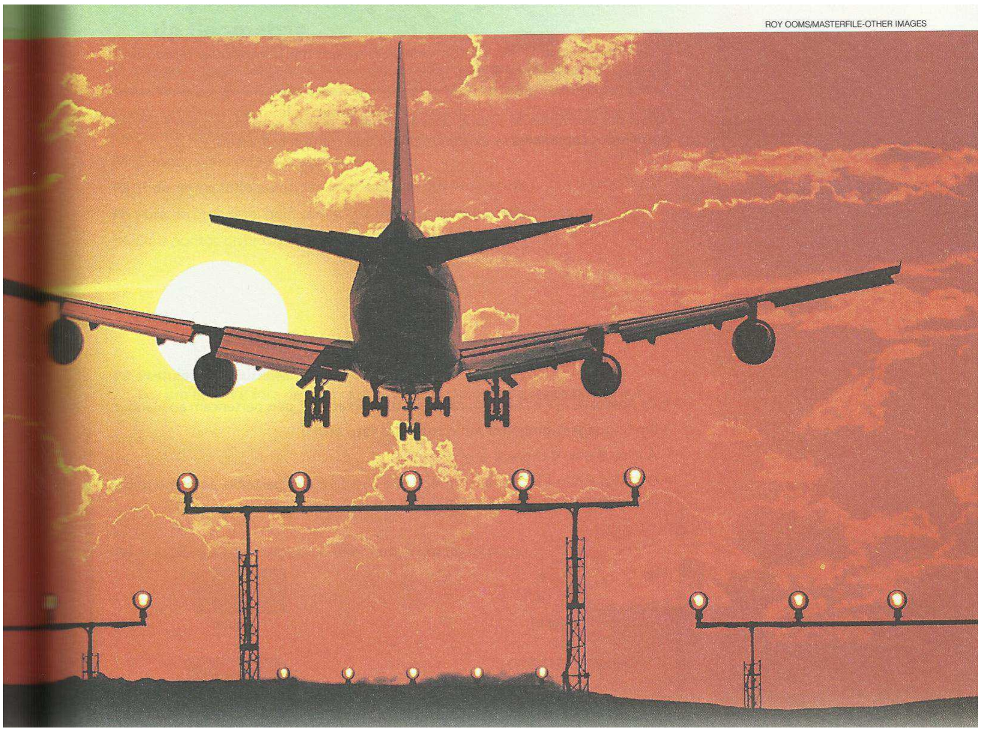


Figura 5.2: Introdução do capítulo

Podemos perceber na figura 5.1 que o texto exposto na subseção Ideias Gerais privilegia àqueles alunos em que a situação descrita seja do seu conhecimento. Desse modo, o aluno que não encontrar vínculo entre sua realidade cotidiana e a citação apresentada, se sentirá desmotivado e poderá não manifestar interesse no conteúdo ora apresentado.

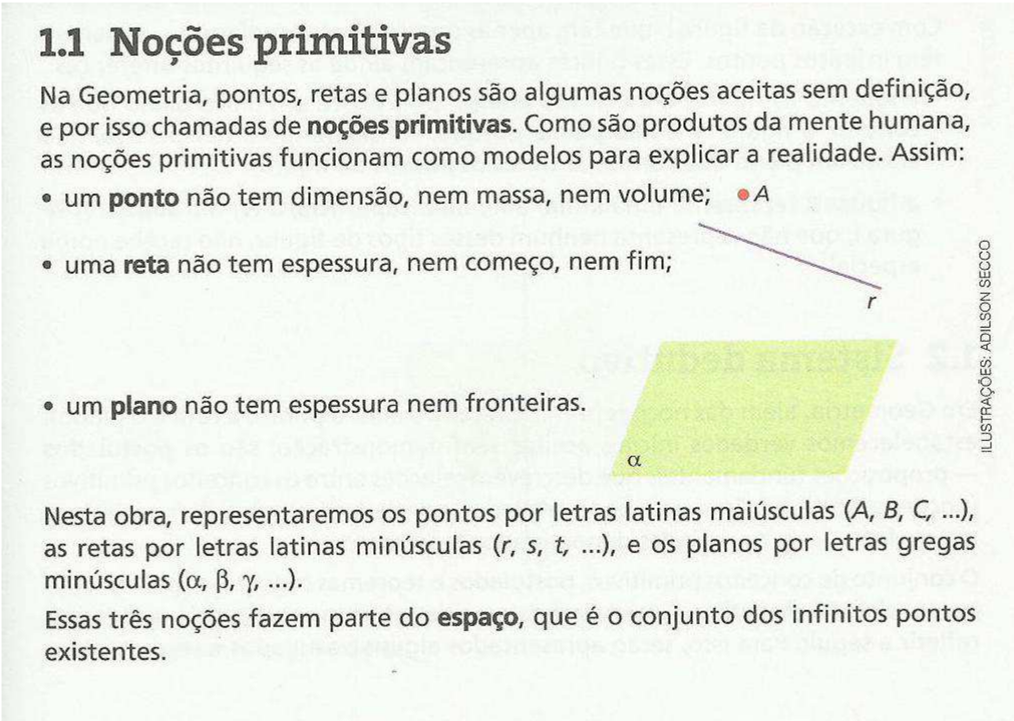
Observando a caixa de texto intitulada "Objetivos do Capítulo", exposta na figura 5.1, percebemos que os autores se preocupam em citar quais são os objetivos a serem alcançados no decorrer do estudo. Apresentar esses objetivos é considerado um aspecto vantajoso tanto para o professor como para o aluno, pois com isso, o professor pode nortear seu trabalho a fim de obter sucesso na tarefa de ensinar, enquanto o aluno cria expectativas sobre o conteúdo ora iniciado sempre observando se esses objetivos serão realmente atingidos.

5.1.1 Análise da subseção *Noções Primitivas* apresentada no livro 1

A ideia de noções primitivas é bem apresentada, pois os autores utilizam uma linguagem clara e de fácil compreensão para o aluno. Afirmam que noções primitivas são noções aceitas sem definições e, a ideia de *ponto*, *reta* e *plano* é bem utilizada para exemplificar essas noções primitivas na Geometria espacial, como podemos observar na figura 5.3. Com essa postura, percebemos que os autores já começam organizando a apresentação do método axiomático.

Ainda na figura 5.3, são expostas algumas características do *ponto*, da *reta* e do *plano*. Porém, a maneira como essas características são apresentadas, destacando os objetos em negrito, pode transparecer ao leitor que os autores estão definindo o ponto, a reta e o plano pois, percebemos que essa forma de destaque foi utilizada ao definirem noções primitivas e espaço. Na nossa opinião, o destaque dado aos objetos, deveria ser evitado para não confundir o entendimento do aluno, levando-o a pensar que as noções primitivas são definidas.

Os autores afirmam que o livro representará os pontos, as retas e os planos por letras maiúsculas, minúsculas e gregas respectivamente. Essa atitude leva o aluno a se familiarizar com a linguagem simbólica que será utilizada, facilitando a redação das demonstrações tornando-as mais precisas.



1.1 Noções primitivas

Na Geometria, pontos, retas e planos são algumas noções aceitas sem definição, e por isso chamadas de **noções primitivas**. Como são produtos da mente humana, as noções primitivas funcionam como modelos para explicar a realidade. Assim:

- um **ponto** não tem dimensão, nem massa, nem volume;
- uma **reta** não tem espessura, nem começo, nem fim;
- um **plano** não tem espessura nem fronteiras.

Nesta obra, representaremos os pontos por letras latinas maiúsculas (*A*, *B*, *C*, ...), as retas por letras latinas minúsculas (*r*, *s*, *t*, ...), e os planos por letras gregas minúsculas (α, β, γ, ...).

Essas três noções fazem parte do **espaço**, que é o conjunto dos infinitos pontos existentes.

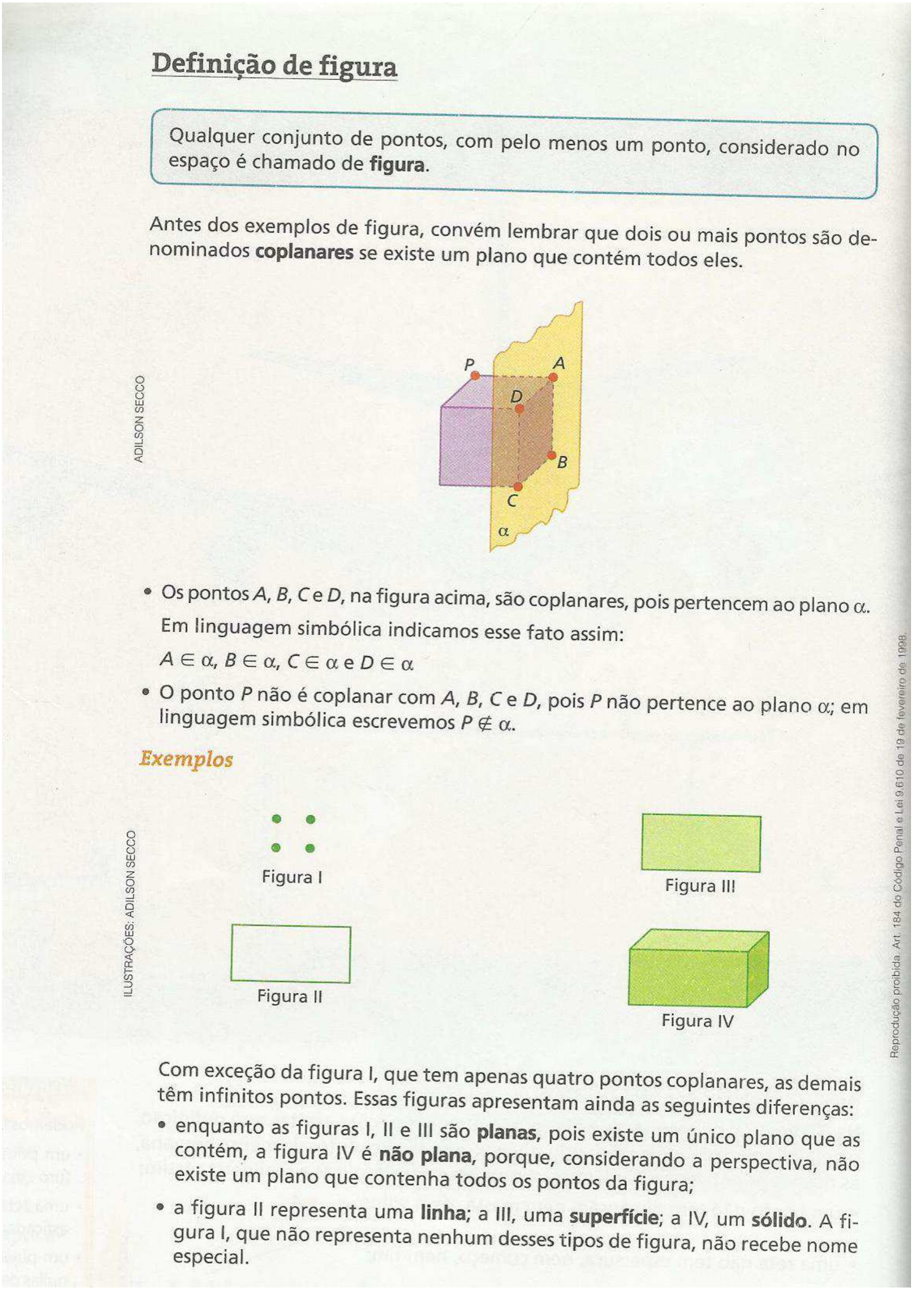
Figura 5.3: Noções primitivas

Observando, a seguir na figura 5.4 , percebemos que é bem conveniente e compreensível a maneira como os autores definem figura. A definição é destacada em uma caixa de texto e o objeto a ser definido aparece grafado em negrito. Já adiantamos que essa conduta de destaque, dada às definições de objetos, é utilizada na maioria das definições apresentadas pelos autores no decorrer do capítulo em análise. Assim, não daremos ênfase a essa forma de destaque, salvo se fugir da conduta apresentada.

Podemos perceber, ainda na definição de figura, que as noções primitivas anteriormente apresentadas já são utilizadas de forma que favorece a construção do sistema dedutivo, viabilizando ao aluno uma melhor percepção na maneira de como definir objetos. Gradativamente os autores vão oferecendo informações necessárias e, de forma sutil já estão construindo o método axiomático.

Na figura 5.4, percebemos que antes de exemplificar figuras, os autores revisam a definição de pontos coplanares, favorecendo a aprendizagem e privilegiando àquele aluno que, por algum motivo, não conhece tal definição. Posteriormente verificamos que os autores utilizam essa definição em algumas de suas demonstrações.

Na descrição dos exemplos vistos na figura 5.4, observamos que as definições de figuras planas e não planas são claramente apresentadas. Os autores mais uma vez, destacam em negrito os objetos definidos, como por exemplo figuras planas e não planas. No entanto, mais adiante, utilizam essa forma de destaque às palavras linha, superfície e sólido sem emitir suas respectivas definições, fugindo assim do procedimento adotado anteriormente ao definir objetos.



Definição de figura

Qualquer conjunto de pontos, com pelo menos um ponto, considerado no espaço é chamado de **figura**.

Antes dos exemplos de figura, convém lembrar que dois ou mais pontos são denominados **coplanares** se existe um plano que contém todos eles.

- Os pontos A, B, C e D, na figura acima, são coplanares, pois pertencem ao plano α. Em linguagem simbólica indicamos esse fato assim:
  $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ e $D \in \alpha$
- O ponto P não é coplanar com A, B, C e D, pois P não pertence ao plano α; em linguagem simbólica escrevemos $P \notin \alpha$.

Exemplos

Com exceção da figura I, que tem apenas quatro pontos coplanares, as demais têm infinitos pontos. Essas figuras apresentam ainda as seguintes diferenças:

- enquanto as figuras I, II e III são **planas**, pois existe um único plano que as contém, a figura IV é **não plana**, porque, considerando a perspectiva, não existe um plano que contenha todos os pontos da figura;
- a figura II representa uma **linha**; a III, uma **superfície**; a IV, um **sólido**. A figura I, que não representa nenhum desses tipos de figura, não recebe nome especial.

Figura 5.4: Exemplos de figuras

5.1.2 Análise da maneira como o livro 1 apresenta o *Sistema Dedutivo*

Os autores dão uma boa definição para os postulados, convencem o leitor que os postulados são verdades aceitas e que não precisam ser demonstradas. Além disso, citam a relação que há entre as noções primitivas e os postulados (Ver figura 5.5). No entanto, a definição de teorema poderia ser melhor apresentada, pois os autores apenas afirmam que *"são outros fatos ou propriedades que serão demonstradas com base nos postulados"*. Na nossa concepção, faltou mencionar que os teoremas são afirmações aceitas apenas mediante uma demonstração.

Ao apresentarem o sistema dedutivo, os autores utilizam uma linguagem que favorece o entendimento do aluno (Ver figura 5.5). Porém, faltou informar ao leitor que, no sistema dedutivo, serão utilizadas as definições, as noções primitivas, os postulados ou até mesmo outras propriedades previamente já demonstradas, para demonstrar os teoremas.

1.2 Sistema dedutivo

Em Geometria, além das noções primitivas (entre elas: o ponto, a reta e o plano), estabelecemos verdades iniciais aceitas sem demonstração: são os **postulados** — proposições fundamentais que descrevem relações entre os conceitos primitivos (noções primitivas). Com base nos postulados, por dedução lógica, demonstramos outros fatos ou propriedades denominados **teoremas**.

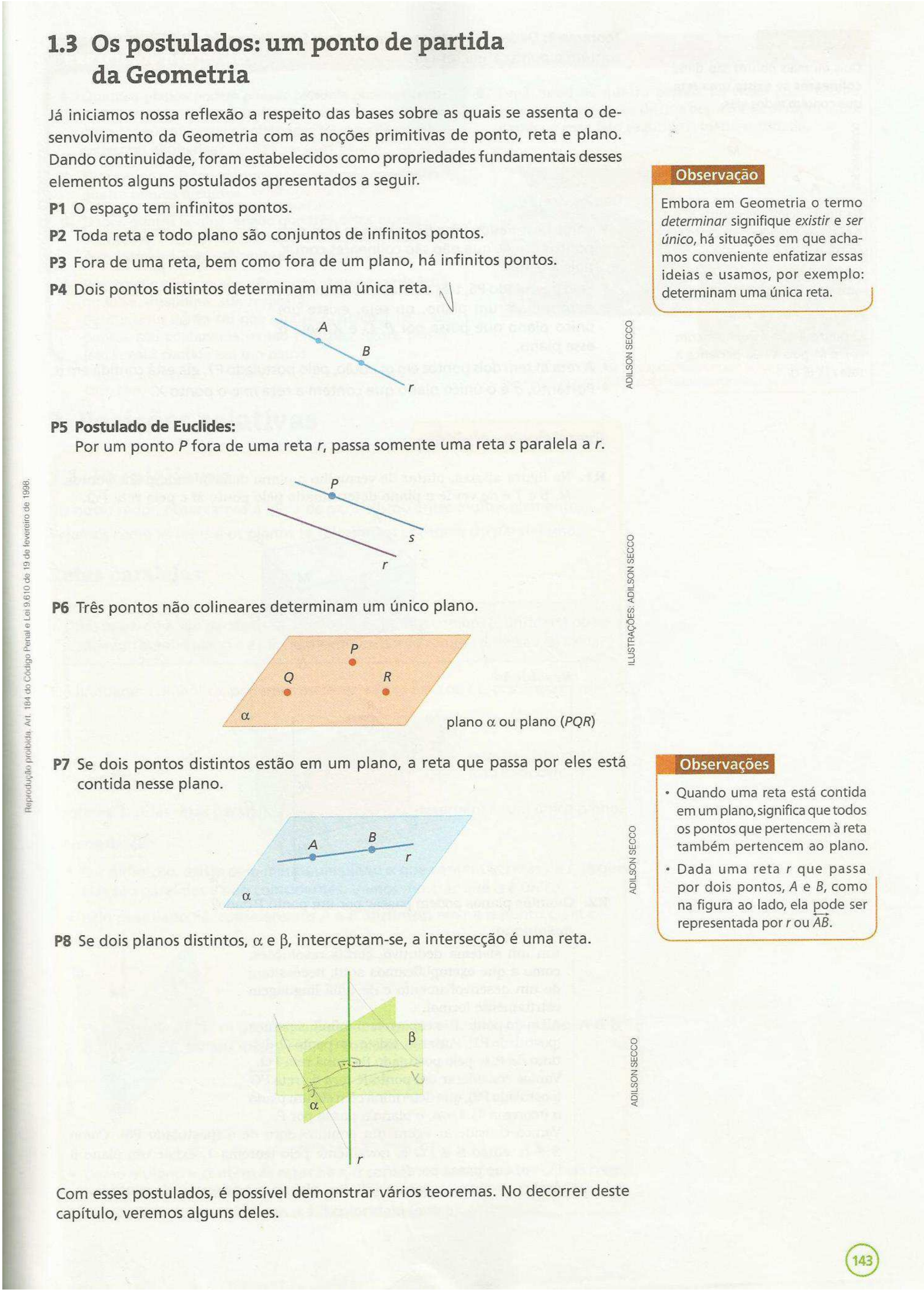
O conjunto de conceitos primitivos, postulados e teoremas constitui o que denominamos **sistema dedutivo**. É sobre um sistema dedutivo em Geometria que vamos refletir a seguir. Para isso, serão apresentados alguns postulados e teoremas.

Figura 5.5: Sistema dedutivo

5.1.3 *Postulados* apresentados no livro 1

Na figura 5.6, são enunciados 8 postulados ou axiomas. Esses postulados são enumerados $P1$, $P2$, $P3$,..., $P8$, facilitando o uso quando for necessário referenciá-los nas demonstrações dos teoremas e(ou) na resolução de exercícios futuros. No decorrer de nossa análise, observaremos se todos os postulados foram utilizados nas demonstrações e(ou) exercícios.

A maneira como os postulados estão redigidos e visualmente apresentados é muito vantajosa, pois favorecem a compreensão do aluno que, nesse momento, já terá a ideia de como é aplicado o método axiomático ou sistema dedutivo e já pode observar as noções primitivas sendo utilizadas nos postulados.



1.3 Os postulados: um ponto de partida da Geometria

Já iniciamos nossa reflexão a respeito das bases sobre as quais se assenta o desenvolvimento da Geometria com as noções primitivas de ponto, reta e plano. Dando continuidade, foram estabelecidos como propriedades fundamentais desses elementos alguns postulados apresentados a seguir.

P1 O espaço tem infinitos pontos.

P2 Toda reta e todo plano são conjuntos de infinitos pontos.

P3 Fora de uma reta, bem como fora de um plano, há infinitos pontos.

P4 Dois pontos distintos determinam uma única reta.

P5 Postulado de Euclides:
Por um ponto *P* fora de uma reta *r*, passa somente uma reta *s* paralela a *r*.

P6 Três pontos não colineares determinam um único plano.

P7 Se dois pontos distintos estão em um plano, a reta que passa por eles está contida nesse plano.

P8 Se dois planos distintos, α e β, interceptam-se, a intersecção é uma reta.

Com esses postulados, é possível demonstrar vários teoremas. No decorrer deste capítulo, veremos alguns deles.

Observação

Embora em Geometria o termo *determinar* signifique *existir* e *ser único*, há situações em que achamos conveniente enfatizar essas ideias e usamos, por exemplo: determinam uma única reta.

Observações

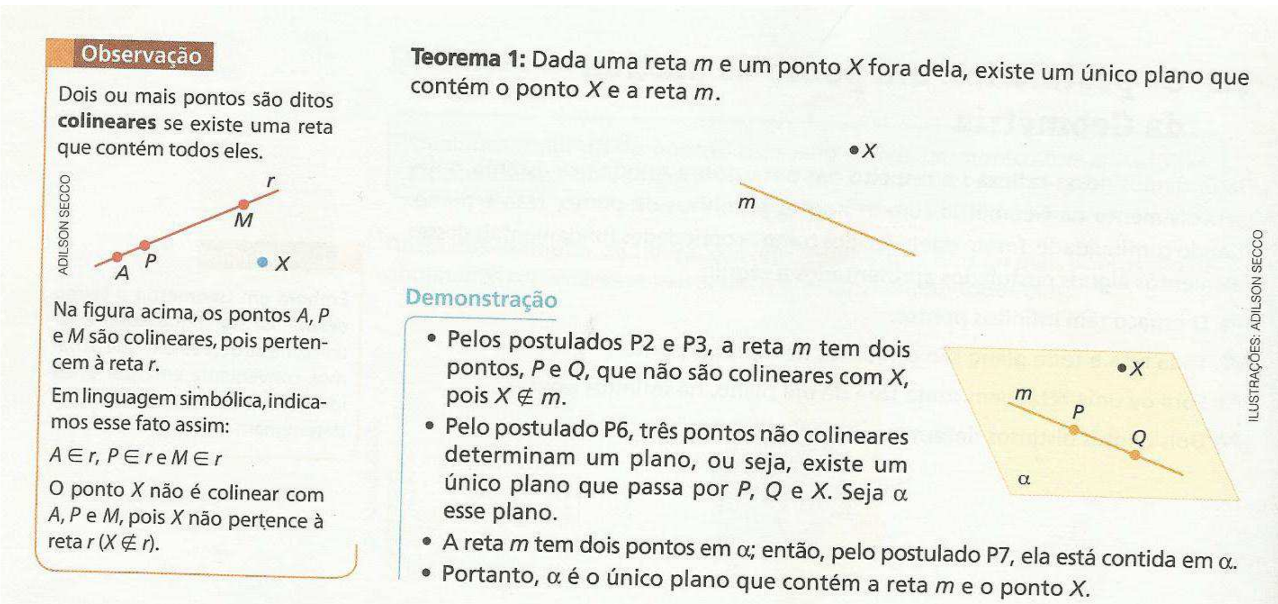
- Quando uma reta está contida em um plano, significa que todos os pontos que pertencem à reta também pertencem ao plano.
- Dada uma reta *r* que passa por dois pontos, *A* e *B*, como na figura ao lado, ela pode ser representada por *r* ou $\overleftrightarrow{AB}$.

Figura 5.6: Postulados

De acordo com o que é mostrado no lado esquerdo da figura 5.7, percebemos que é apresentada uma caixa de texto denominada "Observação". Nela, os autores definem pontos colineares. Apesar de, supostamente, já ser uma definição conhecida é importante revê-la, pelo fato de utilizarem essa definição na demonstração do teorema 1. Ainda nessa observação, podemos perceber que existe, mais uma vez, a preocupação em apresentar a linguagem simbólica favorecendo ao aluno uma maior familiarização com os símbolos.

O teorema 1, apresentado na figura 5.7, é ilustrado e bem demonstrado de forma propícia ao entendimento do aluno. Para demonstrá-lo, os autores enfatizam o uso dos postulados $P2$, $P3$, $P6$ e $P7$ e utilizam a definição de pontos colineares, formalizando assim a utilização do método axiomático. A linguagem simbólica mais uma vez aparece e, a ilustração por meio de desenho, auxilia o aluno na visualização da demonstração. No entanto, os autores deveriam ter enfatizado o que é(são) a(s) hipótese(s) e a tese, isto é, o que dispomos e o que pretendemos demonstrar. Se adotassem esse procedimento tornariam a demonstração ainda mais completa e didática, possibilitando ao leitor uma melhor compreensão do desenvolvimento de uma demostração matemática.

- *Hipótese* - Uma reta e um ponto são dados, de forma que o ponto não pertença a reta
- *Tese* - Existe um único plano que contém o ponto e a reta.


Observação

Dois ou mais pontos são ditos **colineares** se existe uma reta que contém todos eles.

Na figura acima, os pontos A, P e M são colineares, pois pertencem à reta r.

Em linguagem simbólica, indicamos esse fato assim:

$A \in r$, $P \in r$ e $M \in r$

O ponto X não é colinear com A, P e M, pois X não pertence à reta r ($X \notin r$).

Teorema 1: Dada uma reta m e um ponto X fora dela, existe um único plano que contém o ponto X e a reta m.

Demonstração

- Pelos postulados P2 e P3, a reta m tem dois pontos, P e Q, que não são colineares com X, pois $X \notin m$.
- Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um plano, ou seja, existe um único plano que passa por P, Q e X. Seja α esse plano.
- A reta m tem dois pontos em α; então, pelo postulado P7, ela está contida em α.
- Portanto, α é o único plano que contém a reta m e o ponto X.

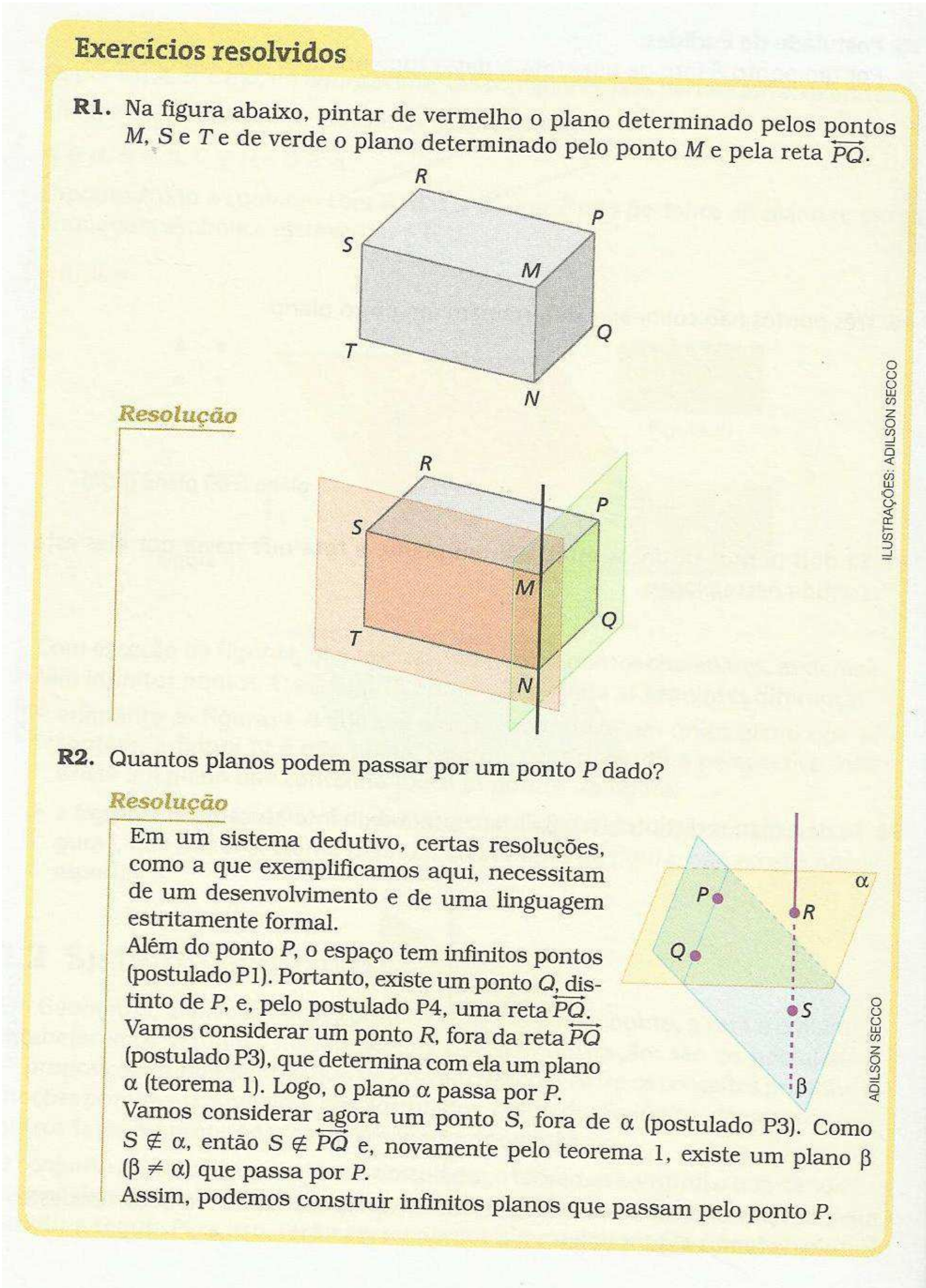
Figura 5.7: Teorema 1

5.1.4 Análise dos execícios resolvidos e propostos da seção *Ideias Gerais*

Na figura 5.8, os autores apresentam dois exercícios resolvidos e, em suas resoluções utilizam os postulados $P1$ e $P3$ e o teorema 1 apresentados anteriormente, fortalecendo assim a ideia de sistema dedutivo previamente exposta. Ao observar a resolução desses exercícios resolvidos, o aluno se sentirá, cada vez mais, convencido de como se dá a aplicação do método axiomático.

Sempre que possível, é interessante que nós professores, apliquemos essa prática de apresentar exercícios resolvidos pois, auxiliam na fixação e na compreensão do conteúdo apresentado e servirão de suporte nas resoluções dos exercícios propostos.

Os exercícios resolvidos $R1$ e $R2$, expostos na figura 5.8, são bem ilustrados, auxiliando os alunos a ter uma melhor visualização de suas resoluções.



Exercícios resolvidos

R1. Na figura abaixo, pintar de vermelho o plano determinado pelos pontos M, S e T e de verde o plano determinado pelo ponto M e pela reta $\overleftrightarrow{PQ}$.

Resolução

R2. Quantos planos podem passar por um ponto P dado?

Resolução

Em um sistema dedutivo, certas resoluções, como a que exemplificamos aqui, necessitam de um desenvolvimento e de uma linguagem estritamente formal.

Além do ponto P, o espaço tem infinitos pontos (postulado P1). Portanto, existe um ponto Q, distinto de P, e, pelo postulado P4, uma reta $\overleftrightarrow{PQ}$.

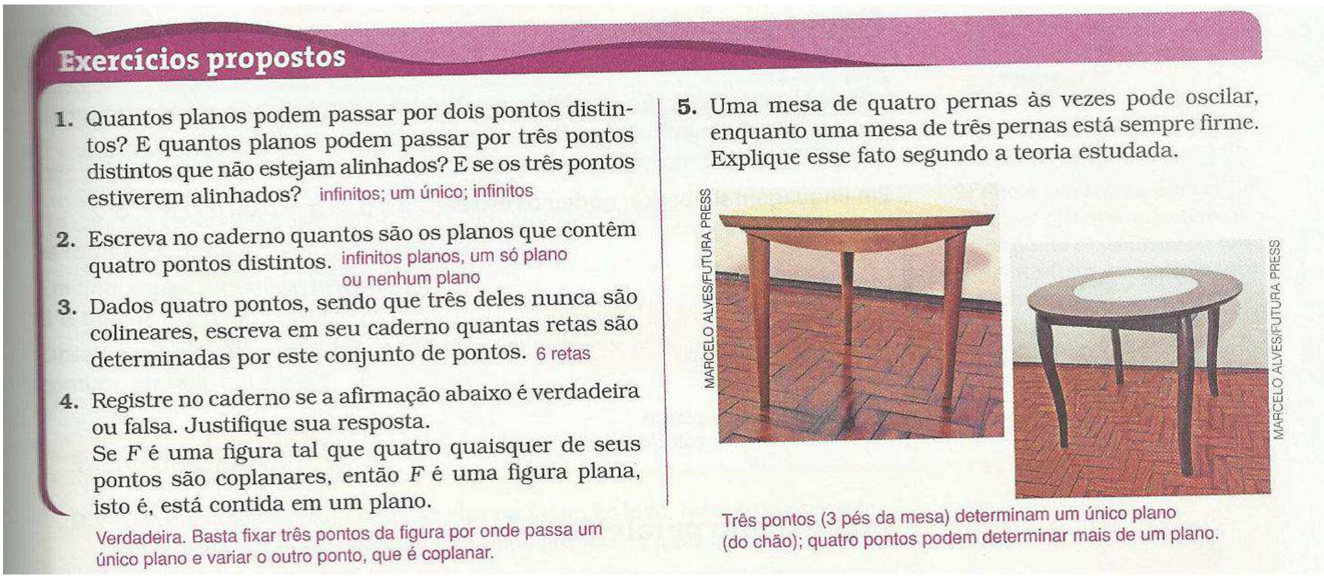
Vamos considerar um ponto R, fora da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ (postulado P3), que determina com ela um plano α (teorema 1). Logo, o plano α passa por P.

Vamos considerar agora um ponto S, fora de α (postulado P3). Como $S \notin \alpha$, então $S \notin \overleftrightarrow{PQ}$ e, novamente pelo teorema 1, existe um plano β ($\beta \neq \alpha$) que passa por P.

Assim, podemos construir infinitos planos que passam pelo ponto P.

Figura 5.8: Exercícios Resolvidos 1

A figura 5.9 nos mostra uma lista de exercícios propostos, composta por 5 questões, todas envolvendo a teoria trabalhada na seção Ideias Gerais e, suas resoluções são todas acessíveis ao aluno.



Exercícios propostos

1. Quantos planos podem passar por dois pontos distintos? E quantos planos podem passar por três pontos distintos que não estejam alinhados? E se os três pontos estiverem alinhados? infinitos; um único; infinitos

2. Escreva no caderno quantos são os planos que contêm quatro pontos distintos. infinitos planos, um só plano ou nenhum plano

3. Dados quatro pontos, sendo que três deles nunca são colineares, escreva em seu caderno quantas retas são determinadas por este conjunto de pontos. 6 retas

4. Registre no caderno se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
Se F é uma figura tal que quatro quaisquer de seus pontos são coplanares, então F é uma figura plana, isto é, está contida em um plano.
Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. Uma mesa de quatro pernas às vezes pode oscilar, enquanto uma mesa de três pernas está sempre firme. Explique esse fato segundo a teoria estudada.

MARCELO ALVES/FUTURA PRESS

MARCELO ALVES/FUTURA PRESS

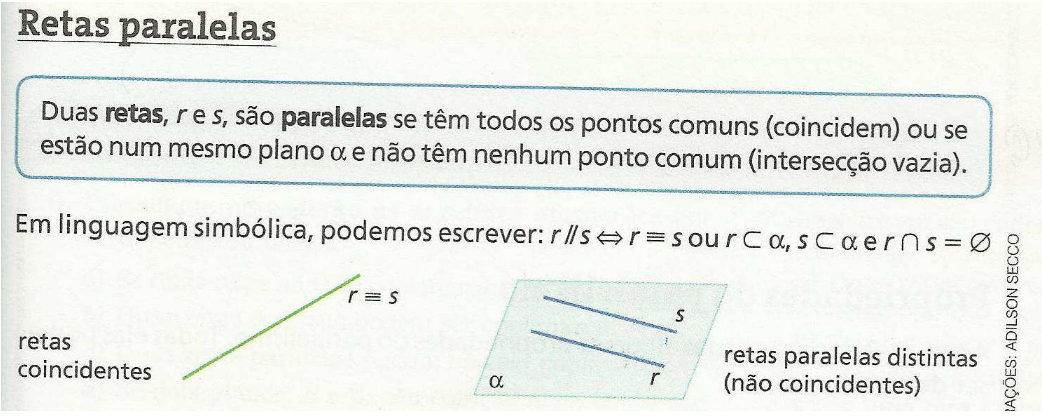
Três pontos (3 pés da mesa) determinam um único plano (do chão); quatro pontos podem determinar mais de um plano.

Figura 5.9: Exercícios Propostos 1

5.2 Análise da seção *Posições Relativas* apresentada no livro 1

5.2.1 Análise da subseção *Paralelismo* exposta no livro 1

Percebemos, na figura 5.10, que os autores definiram retas paralelas. Essa definição é considerada bem elaborada pois, não omite o fato de retas coincidentes serem também paralelas. A ilustração e a linguagem simbólica de retas paralelas também são fatores contribuintes para o entendimento do aluno.


Retas paralelas

Duas **retas**, r e s, são **paralelas** se têm todos os pontos comuns (coincidem) ou se estão num mesmo plano α e não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).

Em linguagem simbólica, podemos escrever: $r /\!/ s \Leftrightarrow r \equiv s$ ou $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e $r \cap s = \varnothing$

Figura 5.10: Retas paralelas

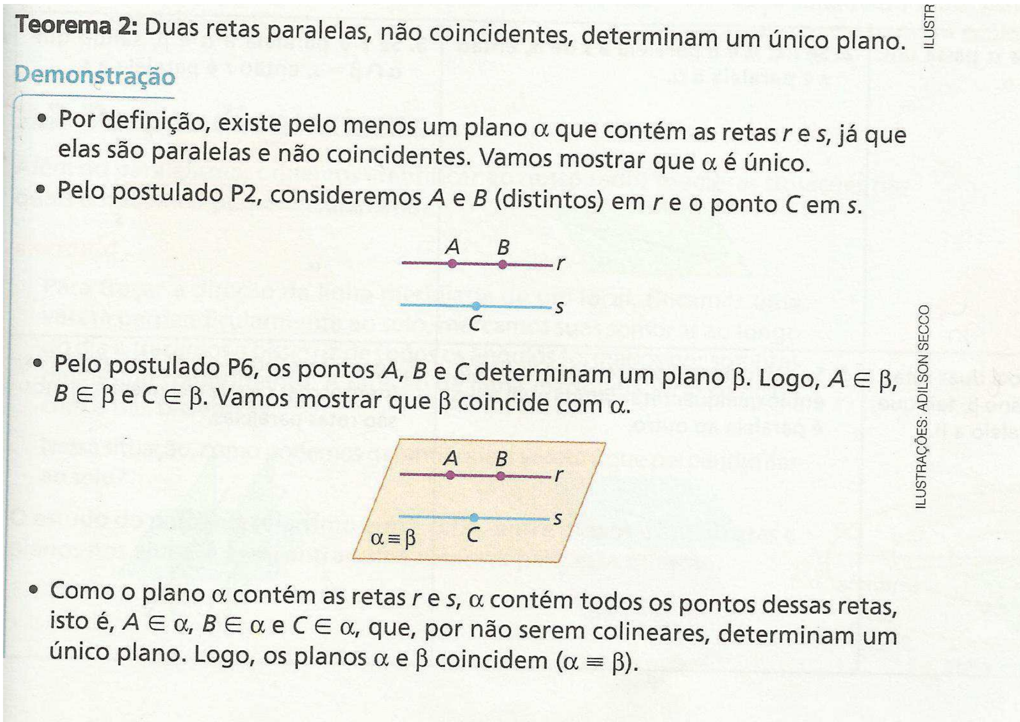
O teorema 2, apresentado na figura 5.11, é demonstrado. Nela, os autores, utilizam a definição de retas paralelas e os postulados $P2$ e $P6$. Ao iniciar a demonstração e no decorrer da mesma, os autores utilizam os termos: "Por definição ... pelo postulado ... "reforçando ao leitor que o sistema dedutivo está sendo usado.

Assim como observamos no teorema 1, também na demonstração do teorema 2, houve a falta de informação do que seria(m) sua(s) hipótese(s) e sua tese, apresentar essas informações é uma atitude que se espera de um livro didático e que o professor também deve seguir. Essa ausência de dados pode prejudicar o entendimento do aluno pois, havendo essas informações, o aluno sabe os fatos que serão disponibilizados para que ele faça suas deduções, alcançando o seu objetivo.

Destacaremos a seguir a hipótese e a tese do teorema 2:

- *Hipótese* - Duas retas são paralelas e não coincidentes
- *Tese* - Essas retas determinam um único plano

Note que, na demonstração do teorema 2 os autores, mesmo sem informar qual seria a hipótese do teorema, a utilizou quando afirmou: "*...já que são paralelas e não coincidentes...* Desse modo reforçamos nossa opinião de que a(s) hipótese(s) e a tese de qualquer teorema devem ser extraídas do seu enunciado e explicitadas.



Teorema 2: Duas retas paralelas, não coincidentes, determinam um único plano.

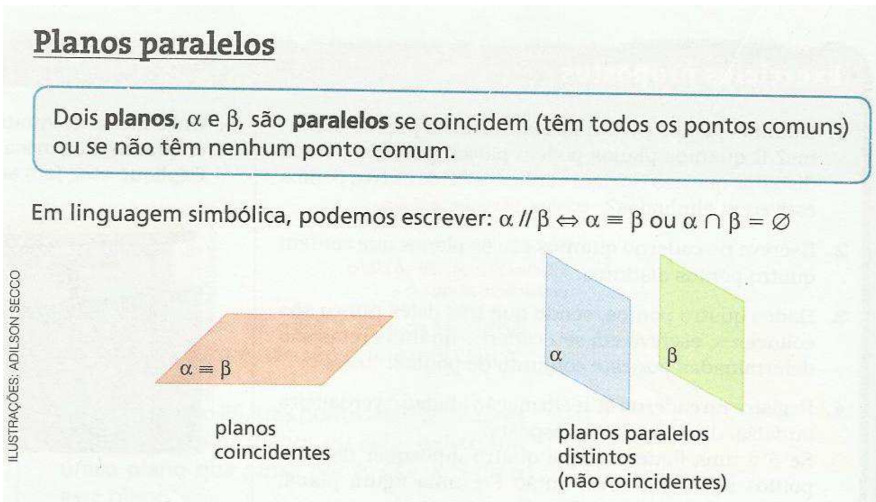
Demonstração

- Por definição, existe pelo menos um plano α que contém as retas r e s, já que elas são paralelas e não coincidentes. Vamos mostrar que α é único.
- Pelo postulado P2, consideremos A e B (distintos) em r e o ponto C em s.
- Pelo postulado P6, os pontos A, B e C determinam um plano β. Logo, $A \in \beta$, $B \in \beta$ e $C \in \beta$. Vamos mostrar que β coincide com α.
- Como o plano α contém as retas r e s, α contém todos os pontos dessas retas, isto é, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$, que, por não serem colineares, determinam um único plano. Logo, os planos α e β coincidem ($\alpha \equiv \beta$).

Figura 5.11: Teorema 2

Os autores definem planos paralelos, reta e plano paralelos e retas reversas, conforme figuras 5.12, 5.13 e 5.14 respectivamente. É apresentada uma linguagem simbólica e uma ilustração gráfica seguindo um padrão de clareza favorável ao entendimento do aluno. Assim, essas definições estão bem elaboradas.

A nossa intenção, é apenas informar ao nosso leitor que os autores definem tais objetos, pois se for necessário utilizar tais definições em alguma demonstração, já se sabe que foram apresentadas.

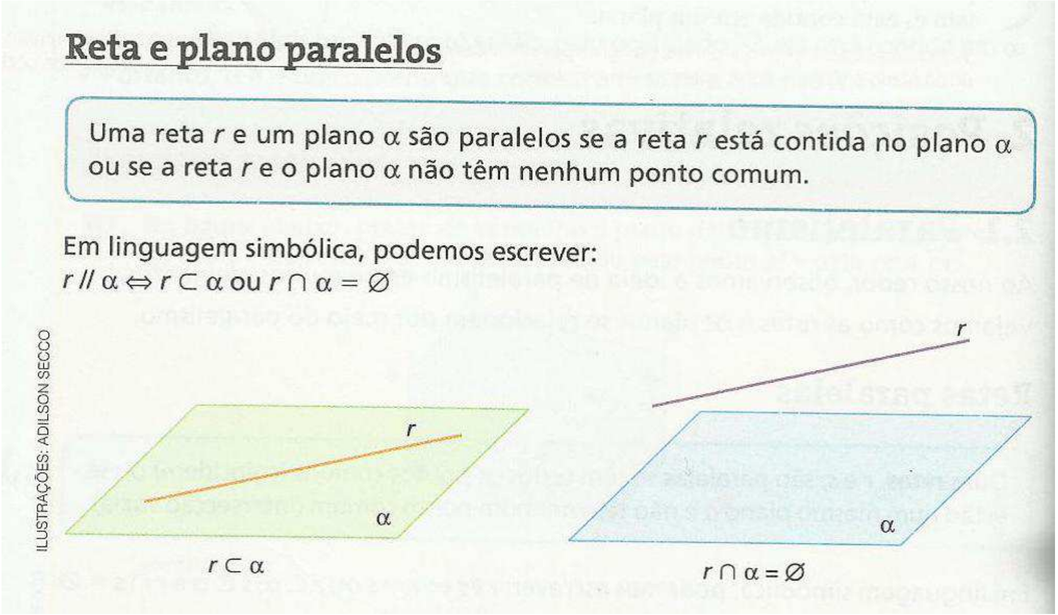


Planos paralelos

Dois **planos**, α e β, são **paralelos** se coincidem (têm todos os pontos comuns) ou se não têm nenhum ponto comum.

Em linguagem simbólica, podemos escrever: $\alpha \,//\, \beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$ ou $\alpha \cap \beta = \varnothing$

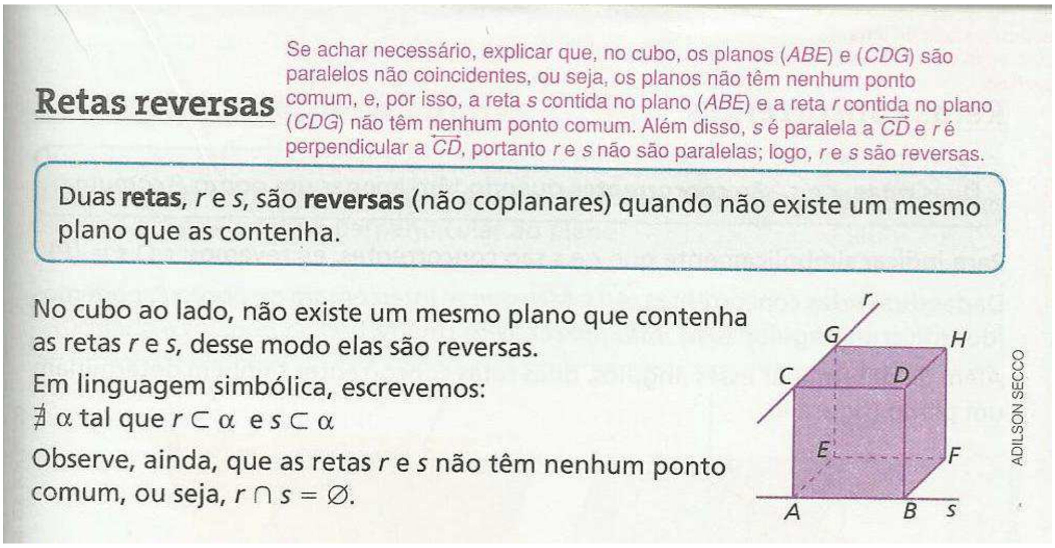
Figura 5.12: Planos paralelos


Reta e plano paralelos

Uma reta r e um plano α são paralelos se a reta r está contida no plano α ou se a reta r e o plano α não têm nenhum ponto comum.

Em linguagem simbólica, podemos escrever:
$r \mathbin{/\!/} \alpha \Leftrightarrow r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$

Figura 5.13: Reta e plano paralelos


Retas reversas

Se achar necessário, explicar que, no cubo, os planos (ABE) e (CDG) são paralelos não coincidentes, ou seja, os planos não têm nenhum ponto comum, e, por isso, a reta s contida no plano (ABE) e a reta r contida no plano (CDG) não têm nenhum ponto comum. Além disso, s é paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ e r é perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$, portanto r e s não são paralelas; logo, r e s são reversas.

Duas **retas**, r e s, são **reversas** (não coplanares) quando não existe um mesmo plano que as contenha.

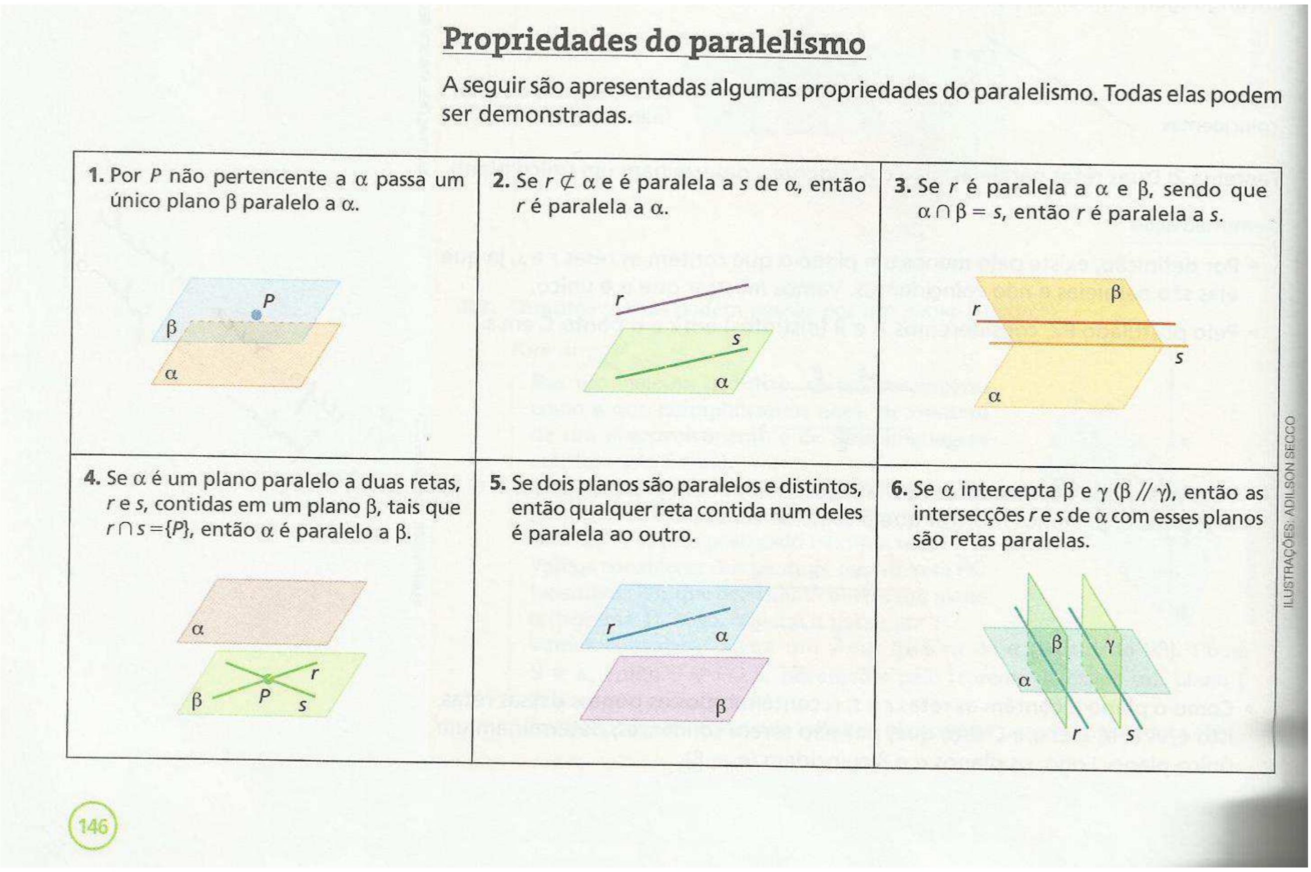
No cubo ao lado, não existe um mesmo plano que contenha as retas r e s, desse modo elas são reversas.
Em linguagem simbólica, escrevemos:
$\nexists\ \alpha$ tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$
Observe, ainda, que as retas r e s não têm nenhum ponto comum, ou seja, $r \cap s = \varnothing$.

Figura 5.14: Retas reversas

5.2.2 Análise das *Propriedades do Paralelismo* apresentadas no livro 1

Podemos ver na figura 5.15 que os autores apresentam algumas propriedades envolvendo o paralelismo. Visualmente, essas propriedades são atrativas ao aluno por possuírem um colorido e ilustrações convencedoras. No geral, essas propriedades também estão bem apresentadas, com a exceção da propriedade 2 pois, a expressão, *s de* α, utilizada pelos autores para informar que a reta *s* está contida no plano α foge da linguagem utilizada desde o início do capítulo em análise, isto é, $s \subset \alpha$. A seguir, enunciaremos a propriedade 2 da forma que achamos conveniente.

Propriedade 2: Se a reta $r \not\subset \alpha$ e é paralela à reta s, tal que $s \subset \alpha$, então r é paralela a α.



Propriedades do paralelismo

A seguir são apresentadas algumas propriedades do paralelismo. Todas elas podem ser demonstradas.

1. Por P não pertencente a α passa um único plano β paralelo a α.	**2.** Se $r \not\subset \alpha$ e é paralela a s de α, então r é paralela a α.	**3.** Se r é paralela a α e β, sendo que $\alpha \cap \beta = s$, então r é paralela a s.
4. Se α é um plano paralelo a duas retas, r e s, contidas em um plano β, tais que $r \cap s = \{P\}$, então α é paralelo a β.	**5.** Se dois planos são paralelos e distintos, então qualquer reta contida num deles é paralela ao outro.	**6.** Se α intercepta β e γ ($\beta // \gamma$), então as intersecções r e s de α com esses planos são retas paralelas.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

146

Figura 5.15: Propriedades do paralelismo

Os autores apenas informam que todas as propriedades apresentadas na figura 5.15, podem ser demonstradas e não apresentam nenhuma dessas demonstrações. Considerando que todas essas propriedades podem ser demonstradas para o aluno do ensino médio, é interessante que o professor faça uso das noções primitivas, definições e postulados apresentados anteriormente e demonstre algumas delas, deixando outras como exercício e não esquecendo de focar que o sistema dedutivo está sendo utilizado.

Demonstraremos a seguir as propriedades 2 e 4 expostas na figura 5.15.

Propriedade 2: Se a reta $r \not\subset \alpha$ e é paralela à reta s, tal que $s \subset \alpha$, então r é paralela a α.

Demonstração da propriedade 2

Para iniciarmos essa demonstração, vamos estabelecer inicialmente quem são as hipóteses e a tese dessa propriedade.

- *Hipóteses*

  1. A reta r não está contida no plano α ($r \not\subset \alpha$);
  2. A reta r é paralela a reta s ($r \parallel s$);
  3. A reta s está contida no plano α ($s \subset \alpha$).

- *Tese* - A reta r e o plano α são paralelos ($r \parallel \alpha$.)

Temos pela Hipótese 2 que $r \parallel s$ logo, pelo teorema 2 da figura 5.11, existe um plano, que chamaremos β, que contém as retas r e s. Assim, a reta s está contida nos planos α (pela hipótese 3) e β e como esses planos não coincidem tem-se, $s = \alpha \bigcap \beta$.

Vamos supor, que a reta r não seja paralela ao plano α. Pela definição exposta na figura 5.13, há um ponto que chamaremos A, que é comum a reta r e ao plano α ou seja, $\{A\} = r \bigcap \alpha$. Como $A \in r$ e $r \subset \beta$ então $A \in \beta$. Mas, se $A \in \beta$ e $A \in \alpha$ temos que $A \in s$, dessa forma $A \in r$ e $A \in s$, o que é um absurdo, já que, pela hipótese 2, as retas r e s são paralelas.

Assim, a suposição é falsa e a reta r é paralela ao plano α. $\square$

Propriedade 4: Se α é um plano paralelo a duas retas, r e s, contidas em um plano β, tais que $r \bigcap s = \{P\}$, então α é paralelo a β.

Demonstração da propriedade 4

- *Hipóteses*

  1. As retas r e s são paralelas ao plano α ($r \parallel \alpha$ e $s \parallel \alpha$).
  2. O ponto P é a interseção das retas r e s ($r \bigcap s = \{P\}$)

- *Tese* - Os planos α e β são paralelos ($\alpha \parallel \beta$).

Inicialmente, vamos supor que os planos α e β não sejam paralelos. Assim, os planos α e β se intersectam e, pelo postulado $P8$, a intersecção dos planos será uma reta, que a chamaremos de reta t isto é, $t = \alpha \bigcap \beta$.

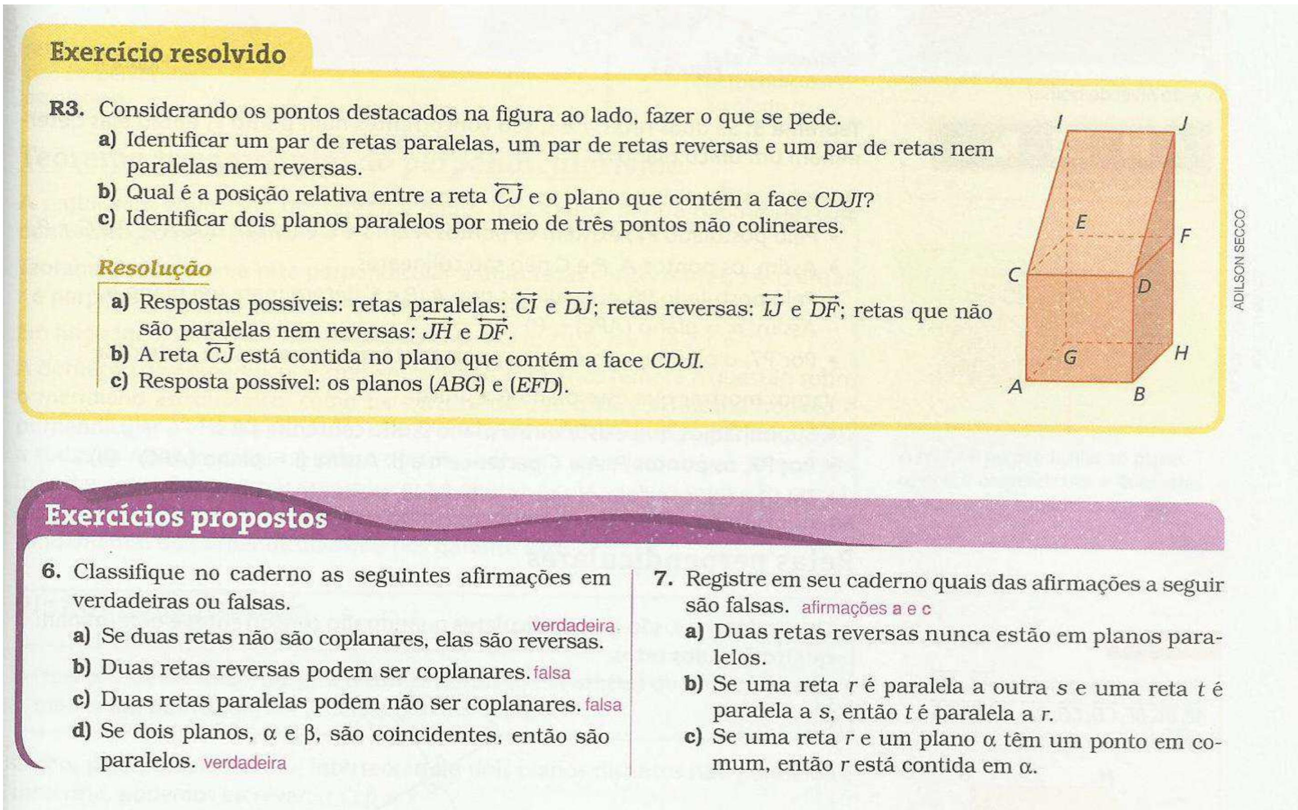
Pela hipótese 1, $r \parallel \alpha$ e $s \parallel \alpha$.

Pela hipótese 2, $r \bigcap s = \{P\}$ e portanto essas retas não são paralelas. Logo elas intersectam a reta t e o plano α. Absurdo, pois $r \parallel \alpha$ e $s \parallel \alpha$.

Portanto, os planos α e β são paralelos ($\alpha \parallel \beta$). $\square$

5.2.3 Análise dos execícios resolvidos e propostos sobre paralelismo

Na figura 5.16, foram apresentados um bloco de exercício resolvido e outro de exercícios propostos. Para resolver as questões apresentadas as definições são utilizadas entretanto, na nossa opinião, faltou questões que envolvessem a realidade diária do aluno. É recomendável que em nossa prática exploremos o próprio espaço físico, a sala de aula, para exemplificar e exercitar visualmente as definições trabalhadas. Para isso, podemos convidar nossos alunos a observar o ambiente, estimulando-os a perceber, por exemplo, que as paredes são planos e que, o encontro dessas paredes (planos) são retas e, a partir daí visualizarmos os diferentes tipos de retas.



Exercício resolvido

R3. Considerando os pontos destacados na figura ao lado, fazer o que se pede.

a) Identificar um par de retas paralelas, um par de retas reversas e um par de retas nem paralelas nem reversas.

b) Qual é a posição relativa entre a reta $\overleftrightarrow{CJ}$ e o plano que contém a face $CDJI$?

c) Identificar dois planos paralelos por meio de três pontos não colineares.

Resolução

a) Respostas possíveis: retas paralelas: $\overleftrightarrow{CI}$ e $\overleftrightarrow{DJ}$; retas reversas: $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{DF}$; retas que não são paralelas nem reversas: $\overleftrightarrow{JH}$ e $\overleftrightarrow{DF}$.

b) A reta $\overleftrightarrow{CJ}$ está contida no plano que contém a face $CDJI$.

c) Resposta possível: os planos (ABG) e (EFD).

Exercícios propostos

6. Classifique no caderno as seguintes afirmações em verdadeiras ou falsas.

a) Se duas retas não são coplanares, elas são reversas. verdadeira

b) Duas retas reversas podem ser coplanares. falsa

c) Duas retas paralelas podem não ser coplanares. falsa

d) Se dois planos, α e β, são coincidentes, então são paralelos. verdadeira

7. Registre em seu caderno quais das afirmações a seguir são falsas. afirmações a e c

a) Duas retas reversas nunca estão em planos paralelos.

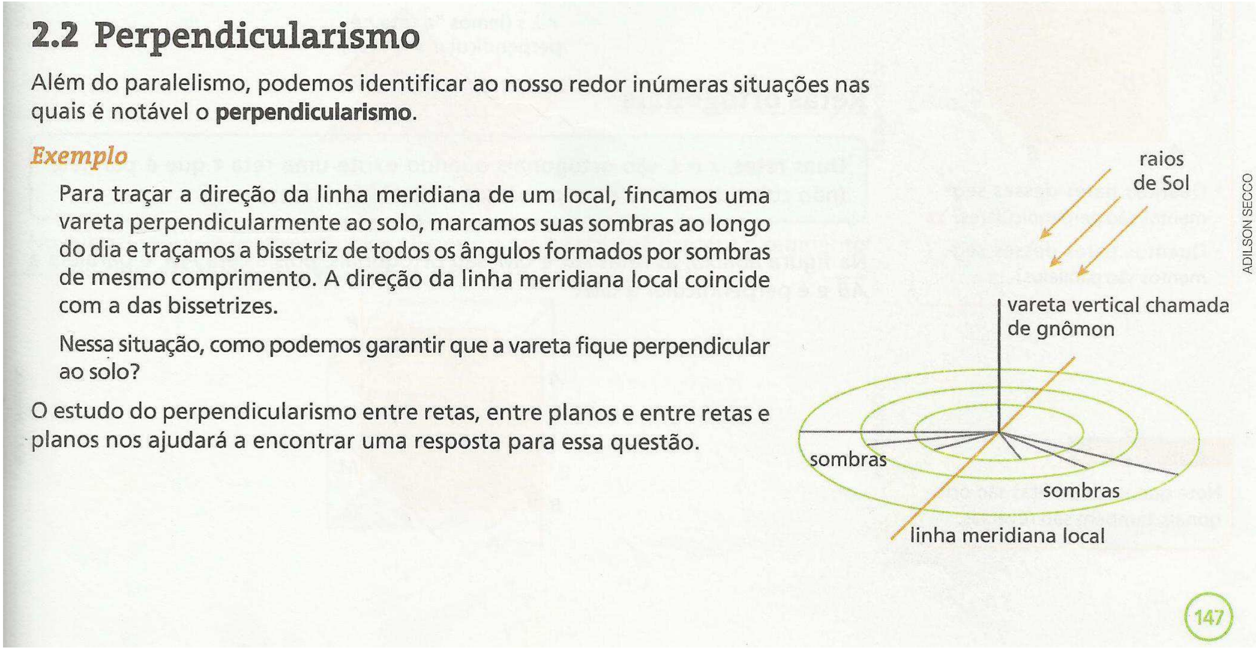
b) Se uma reta r é paralela a outra s e uma reta t é paralela a s, então t é paralela a r.

c) Se uma reta r e um plano α têm um ponto em comum, então r está contida em α.

Figura 5.16: Exercícios Resolvido e Propostos

5.2.4 Análise da subseção *Perpendicularismo* exposta no livro 1

Desde o início do capítulo, Introdução a Geometria espacial, que o leitor observa que termos destacados em negrito são definidos. De acordo com a figura 5.17, observamos que os autores ao iniciarem o estudo do perpendicularismo, destacam em negrito o termo "perpendicularismo" sem defini-lo, fugindo assim da rotina de destaque dada aos objetos definidos.



2.2 Perpendicularismo

Além do paralelismo, podemos identificar ao nosso redor inúmeras situações nas quais é notável o **perpendicularismo**.

Exemplo

Para traçar a direção da linha meridiana de um local, fincamos uma vareta perpendicularmente ao solo, marcamos suas sombras ao longo do dia e traçamos a bissetriz de todos os ângulos formados por sombras de mesmo comprimento. A direção da linha meridiana local coincide com a das bissetrizes.

Nessa situação, como podemos garantir que a vareta fique perpendicular ao solo?

O estudo do perpendicularismo entre retas, entre planos e entre retas e planos nos ajudará a encontrar uma resposta para essa questão.

Figura 5.17: Perpendicularismo

No exemplo apresentado, na figura 5.17, os autores usam a expressão, *fincarmos uma vareta perpendicularmente ao solo*. Ora, como se utiliza o termo perpendicularmente sem defini-lo previamente? Essa atitude dos autores pode confundir o aluno a entender o real significado do termo em questão e, pelo fato desse não conhecimento, o leitor pode não despertar nenhum interesse pelo exemplo citado.

Os autores apresentam a definição de retas concorrentes, retas perpendiculares, retas ortogonais, reta e plano perpendiculares, planos concorrentes e planos perpendiculares conforme vemos na figuras 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.22 e 5.23 respectivamente. Como nossa análise está voltada ao método axiomático, achamos conveniente exibir as definições pois nós, ou os autores, podemos precisar de algumas delas durante nossas demonstração.

As definições estão bem redigidas e ilustradas, podemos observar que nelas são utilizadas as noções primitivas, pontos, retas e planos, o postulado $P8$ (figura 5.6) na definição de planos concorrentes e alguns objetos já definidos anteriormente, a exemplo, usam retas paralelas (não coincidentes) ao definirem retas ortogonais. Dessa forma percebemos que os autores apresentam a teoria obedecendo as exigências de um sistema dedutivo.

Retas concorrentes

Duas **retas**, r e s, são **concorrentes** quando têm apenas um ponto P comum.

Para indicar simbolicamente que r e s são concorrentes, escrevemos: $r \cap s = \{P\}$

Dadas duas retas concorrentes, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN}$, que se interceptam no ponto P, podemos identificar os ângulos $A\hat{P}M$, $M\hat{P}B$, $B\hat{P}N$ e $N\hat{P}A$ (figura I).

Além de determinar esses ângulos, duas retas concorrentes também determinam um plano (figura II).

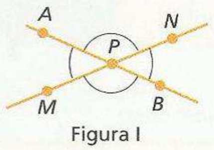


Figura I

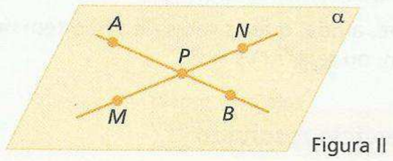


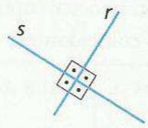
Figura II

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Figura 5.18: Retas concorrentes

Retas perpendiculares

Duas **retas**, r e s, são **perpendiculares** quando são concorrentes e determinam quatro ângulos retos.



$r \perp s$ (lemos "a reta r é perpendicular à reta s")

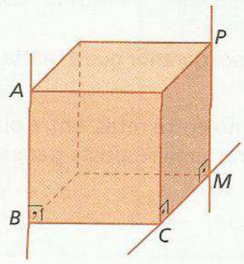
ADILSON SECCO

Figura 5.19: Retas Perpendiculares

Retas ortógonais

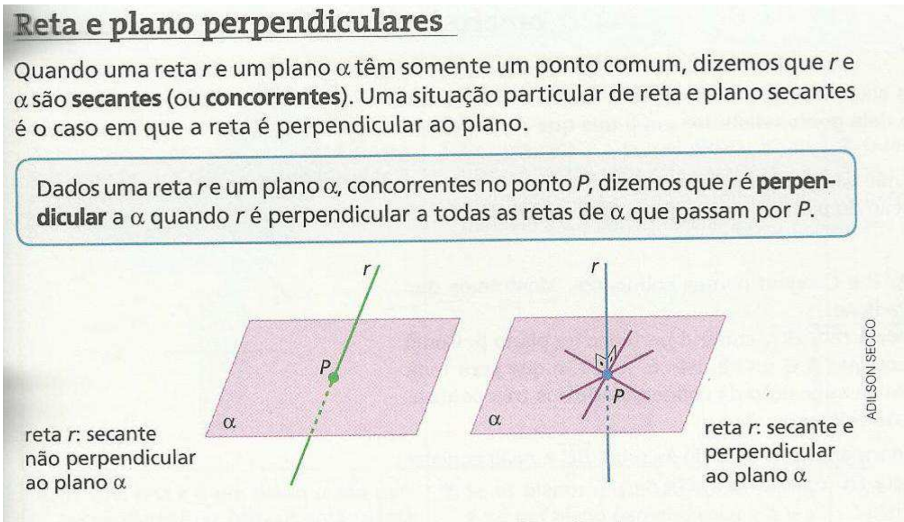
Duas **retas**, r e s, são **ortogonais** quando existe uma reta t que é paralela (não coincidente) a s e perpendicular a r.

Na figura abaixo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CM}$ são ortogonais, pois a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ e é perpendicular a $\overleftrightarrow{CM}$.



ADILSON SECCO

Figura 5.20: Retas Ortogonais

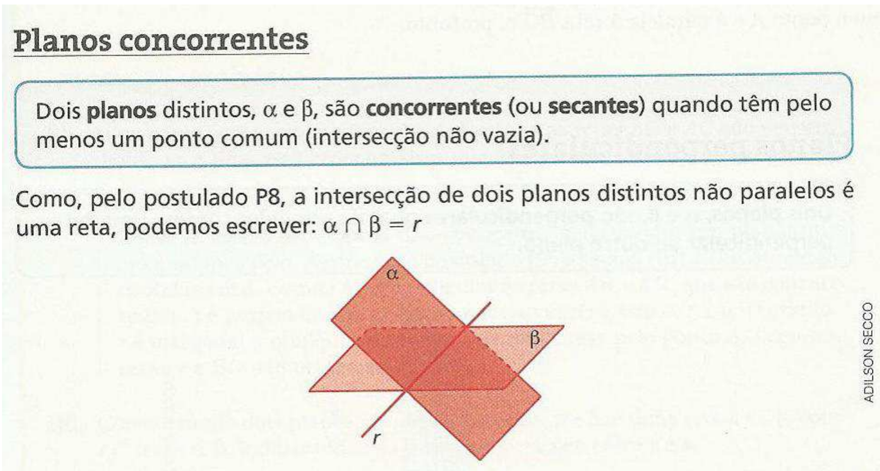


Reta e plano perpendiculares

Quando uma reta r e um plano α têm somente um ponto comum, dizemos que r e α são **secantes** (ou **concorrentes**). Uma situação particular de reta e plano secantes é o caso em que a reta é perpendicular ao plano.

Dados uma reta r e um plano α, concorrentes no ponto P, dizemos que r é **perpendicular** a α quando r é perpendicular a todas as retas de α que passam por P.

Figura 5.21: Reta e plano perpendiculares

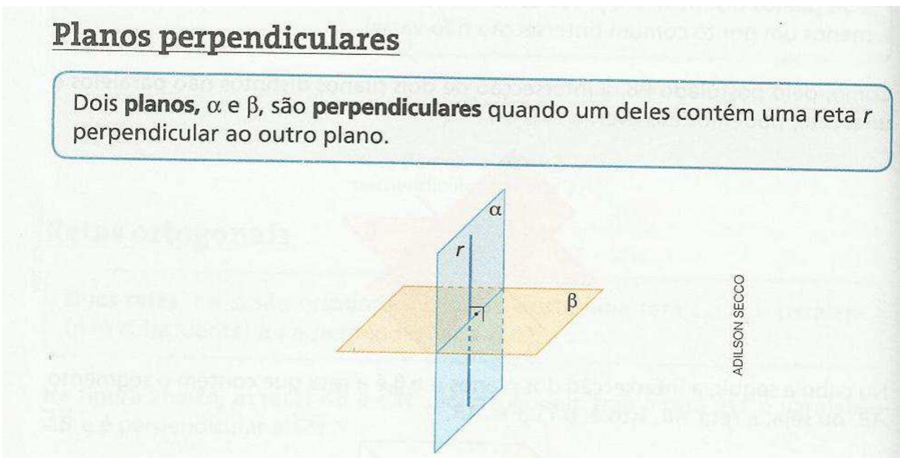


Planos concorrentes

Dois **planos** distintos, α e β, são **concorrentes** (ou **secantes**) quando têm pelo menos um ponto comum (intersecção não vazia).

Como, pelo postulado P8, a intersecção de dois planos distintos não paralelos é uma reta, podemos escrever: $\alpha \cap \beta = r$

Figura 5.22: Planos concorrentes



Planos perpendiculares

Dois **planos,** α e β, são **perpendiculares** quando um deles contém uma reta r perpendicular ao outro plano.

Figura 5.23: Planos perpendiculares

Ainda nessa seção, os teoremas 3 e 4 são apresentados e apenas o teorema 3 é demonstrado. Entretanto os autores informam que não farão a demonstração do teorema 4 conforme podemos ver nas figuras 5.24 e 5.25.

Na demonstração do teorema 3, podemos observar que as noções primitivas foram utilizadas como também alguns dos postulados ($P2$, $P6$ e $P7$) expostos na figura 5.6. Desse modo, podemos ver que o sistema dedutivo está sendo bem apresentado pelos autores pois, de forma notória percebemos o entrelace entre as noções primitivas, definições, postulados e teorema, conforme foi informado pelos autores no início do capítulo ora analisado.

Teorema 3: Se duas retas, *r* e *s*, são concorrentes num ponto *P*, então elas determinam um único plano α.

Demonstração

- Pelo postulado P2, existem os pontos *A* em *s* e *C* em *r* tais que $A \neq P$ e $C \neq P$.
- Assim, os pontos *A*, *P* e *C* não são colineares.
- Pelo postulado P6, concluímos que *A*, *P* e *C* determinam um plano α.
  Assim: α = plano (*APC*) (I)
- Por P7, o plano α contém *r* e *s*, pois contém dois pontos de cada reta.

Vamos mostrar que esse plano α é único.

- Suponhamos que exista outro plano β que contenha *r* e *s*.
- Por P7, os pontos *P*, *A* e *C* pertencem a β. Assim: β = plano (*APC*) (II)
- De (I) e (II), concluímos que $\alpha \equiv \beta$ e que, portanto, α é único.

Figura 5.24: Teorema 3

Teorema fundamental do perpendicularismo

A seguir será enunciado um teorema muito importante para a geometria, cuja demonstração não faremos.

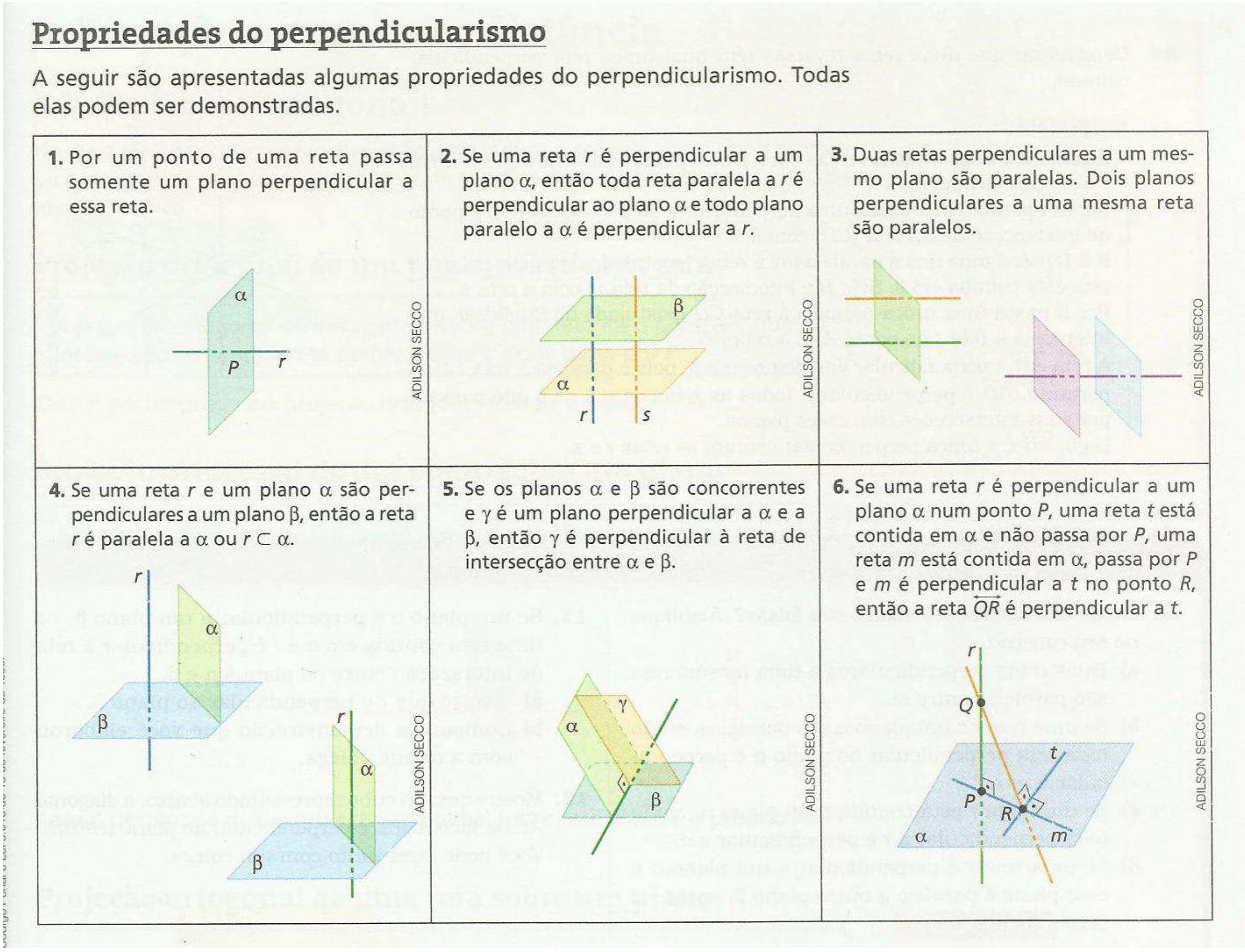
Teorema 4: Se *r* é uma reta perpendicular a duas retas concorrentes, *s* e *t*, então *r* é perpendicular ao plano determinado por essas retas.

Figura 5.25: Teorema 4

5.2.5 *Propriedades do Perpendicularismo* apresentadas no livro 1

Assim como foi apresentado no estudo do paralelismo, as propriedades do perpendicularismo também são expostas pelos autores, conforme figura 5.26. Os autores mais uma vez, afirmam que as propriedades podem ser todas demonstradas mas, não demonstram nenhuma.

No geral, as propriedades são bem elaboradas porém, em nossa opinião, na propriedade 1, os autores deveriam se referir a um ponto pertencente a uma reta quando mencionam a expressão *"por um ponto de uma reta"*, conforme podemos ver na figura 5.26. Valorizando assim a formalidade na escrita matemática.



Propriedades do perpendicularismo

A seguir são apresentadas algumas propriedades do perpendicularismo. Todas elas podem ser demonstradas.

1. Por um ponto de uma reta passa somente um plano perpendicular a essa reta.

2. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta paralela a r é perpendicular ao plano α e todo plano paralelo a α é perpendicular a r.

3. Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas. Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.

4. Se uma reta r e um plano α são perpendiculares a um plano β, então a reta r é paralela a α ou $r \subset \alpha$.

5. Se os planos α e β são concorrentes e γ é um plano perpendicular a α e a β, então γ é perpendicular à reta de intersecção entre α e β.

6. Se uma reta r é perpendicular a um plano α num ponto P, uma reta t está contida em α e não passa por P, uma reta m está contida em α, passa por P e m é perpendicular a t no ponto R, então a reta $\overleftrightarrow{QR}$ é perpendicular a t.

Figura 5.26: Propriedades do perpendicularismo

A seguir, demonstraremos as propriedades 1 e 3 apresentadas na figura 5.26. e, a enunciaremos a propriedade 1 com a correção de escrita citada acima.

Propriedade 1: Por um ponto pertencente a uma reta passa somente um plano perpendicular a essa reta.

Demonstração da propriedade 1

- *Hipótese* - Um ponto pertencente a uma reta
- *Tese* - Pelo ponto passa somente um plano perpendicular a essa reta.

Considere uma reta r e um ponto P tal que $P \in r$ (Figura 5.6). Tomemos agora planos β e γ distintos, tais que $r = \beta \bigcap \gamma$. Nos planos β e γ consideremos, respectivamente, as retas s e t perpendiculares a r no ponto P ou seja, $\{P\} = s \bigcap t$. As retas s e t são concorrentes no ponto P e determinam um único plano (Figura 5.24) que é perpendicular a reta r, conforme figura 5.25. $\square$

Propriedade 3: Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas. Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.

Demonstração da propriedade 3

Como a propriedade 3, a ser demonstrada, nos fornece dois resultados, a dividiremos em duas sub-proposições, as quais chamaremos de proposição 3.1 e proposição 3.2.

Proposição 3.1: Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.

- *Hipótese* - Duas retas são perpendiculares a um mesmo plano.
- *Tese* - As retas são paralelas.

De acordo com a hipótese, consideremos as retas distintas r e s perpendiculares a um plano α intersectando-o nos pontos P e Q, respectivamente. Seja β o plano determinado pelas retas r e s, os planos α e β se intersectam determinando uma reta $t = \overleftrightarrow{PQ}$ que é perpendicular às retas r e s. Dessa forma como $t \perp r$ e $t \perp s$ temos $r \parallel s$. $\square$

Proposição 3.2: Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.

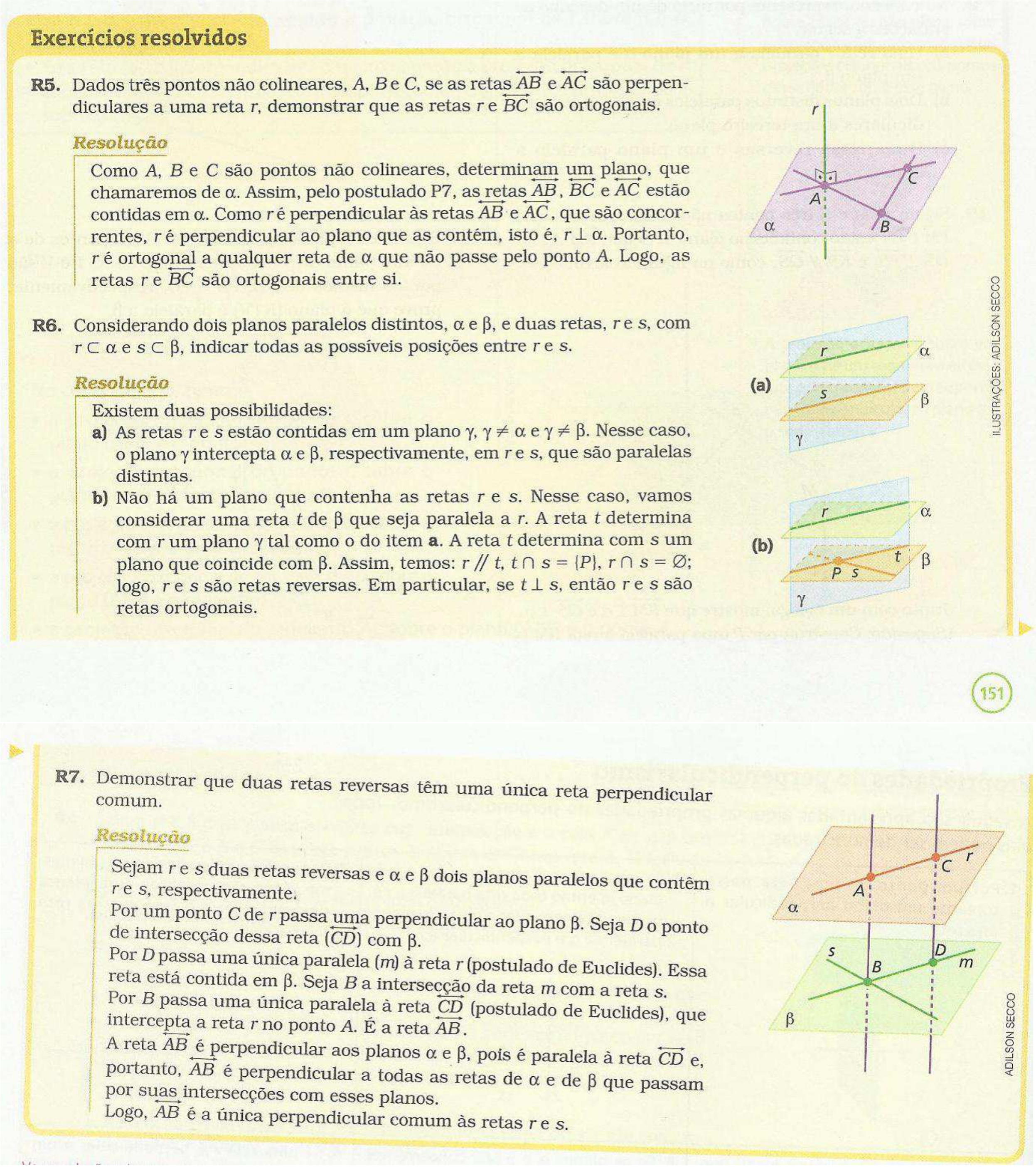
- *Hipótese* - Dois planos perpendiculares a uma mesma reta.
- *Tese* - Os planos são paralelos.

Conforme nos fornece a hipótese, consideremos os planos distintos α e β perpendiculares a uma reta r nos pontos P e Q respectivamente.

Suponha que os planos α e β não sejam paralelos e t seja a reta de intersecção entre eles, $t = \alpha \bigcap \beta$. Considere o ponto R tal que $R \in t$, então PQR seria um triângulo com dois ângulos internos retos, o que é impossível (Pelo teorema dos ângulos internos de um triângulo, visto no 8º ano do ensino fundamental). Logo os planos não se encontram, e assim eles são paralelos. $\square$

5.2.6 Análise dos execícios resolvidos e propostos sobre perpendicularismo

São oferecidos ao aluno os exercícios resolvidos $R5$, $R6$ e $R7$, expostos na figura 5.27, a seguir. Podemos observar a presença do método axiomático pois, para resolver as questões, os autores usaram algumas das definições apresentadas, além de ter sido utilizadas as noções primitivas e postulados, a exemplo o postulado $P7$ utilizado na resolução da questão $R7$.



Exercícios resolvidos

R5. Dados três pontos não colineares, A, B e C, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são perpendiculares a uma reta r, demonstrar que as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.

Resolução

Como A, B e C são pontos não colineares, determinam um plano, que chamaremos de α. Assim, pelo postulado P7, as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ estão contidas em α. Como r é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, que são concorrentes, r é perpendicular ao plano que as contém, isto é, $r \perp \alpha$. Portanto, r é ortogonal a qualquer reta de α que não passe pelo ponto A. Logo, as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais entre si.

R6. Considerando dois planos paralelos distintos, α e β, e duas retas, r e s, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, indicar todas as possíveis posições entre r e s.

Resolução

Existem duas possibilidades:

a) As retas r e s estão contidas em um plano γ, $\gamma \neq \alpha$ e $\gamma \neq \beta$. Nesse caso, o plano γ intercepta α e β, respectivamente, em r e s, que são paralelas distintas.

b) Não há um plano que contenha as retas r e s. Nesse caso, vamos considerar uma reta t de β que seja paralela a r. A reta t determina com r um plano γ tal como o do item **a**. A reta t determina com s um plano que coincide com β. Assim, temos: $r \,//\, t$, $t \cap s = \{P\}$, $r \cap s = \emptyset$; logo, r e s são retas reversas. Em particular, se $t \perp s$, então r e s são retas ortogonais.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

151

R7. Demonstrar que duas retas reversas têm uma única reta perpendicular comum.

Resolução

Sejam r e s duas retas reversas e α e β dois planos paralelos que contêm r e s, respectivamente.

Por um ponto C de r passa uma perpendicular ao plano β. Seja D o ponto de intersecção dessa reta ($\overleftrightarrow{CD}$) com β.

Por D passa uma única paralela (m) à reta r (postulado de Euclides). Essa reta está contida em β. Seja B a intersecção da reta m com a reta s.

Por B passa uma única paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$ (postulado de Euclides), que intercepta a reta r no ponto A. É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

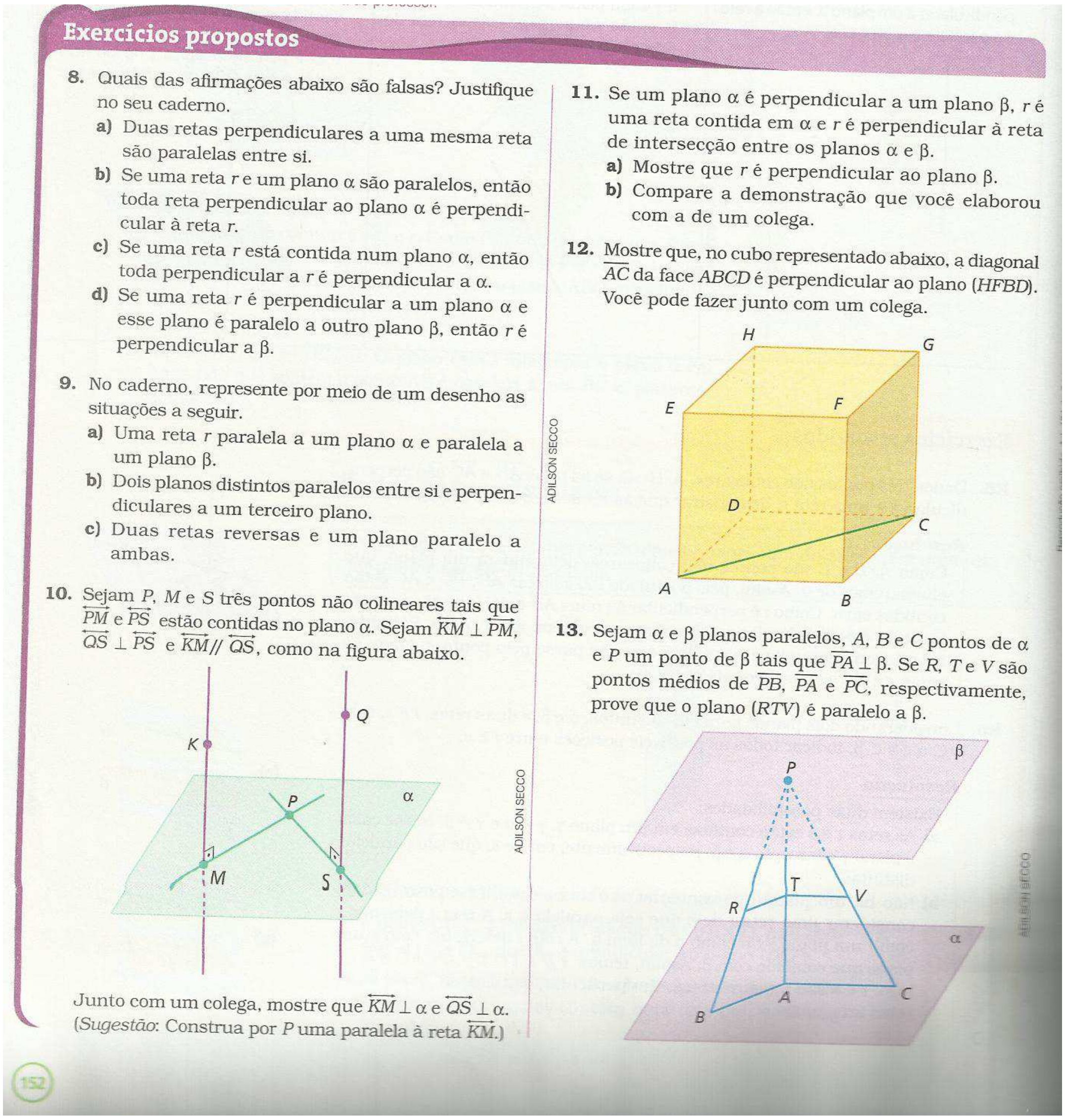
A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular aos planos α e β, pois é paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$ e, portanto, $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a todas as retas de α e de β que passam por suas intersecções com esses planos.

Logo, $\overleftrightarrow{AB}$ é a única perpendicular comum às retas r e s.

ADILSON SECCO

Figura 5.27: Exercícios resolvidos

Os exercícios propostos para o aluno, vistos na figura 5.28, a seguir, estão bem elaborados e ao resolvê-los, o aluno consegue utilizar a teoria apresentada, até o momento, no capítulo que estamos analisando. No entanto, percebemos que mais uma vez faltaram questões motivadoras que envolvessem a realidade diária do aluno, tornando assim a aprendizagem mais prazerosa e significativa.



Exercícios propostos

8. Quais das afirmações abaixo são falsas? Justifique no seu caderno.

a) Duas retas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas entre si.

b) Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular ao plano α é perpendicular à reta r.

c) Se uma reta r está contida num plano α, então toda perpendicular a r é perpendicular a α.

d) Se uma reta r é perpendicular a um plano α e esse plano é paralelo a outro plano β, então r é perpendicular a β.

9. No caderno, represente por meio de um desenho as situações a seguir.

a) Uma reta r paralela a um plano α e paralela a um plano β.

b) Dois planos distintos paralelos entre si e perpendiculares a um terceiro plano.

c) Duas retas reversas e um plano paralelo a ambas.

10. Sejam P, M e S três pontos não colineares tais que $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{PS}$ estão contidas no plano α. Sejam $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PM}$, $\overleftrightarrow{QS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{KM} // \overleftrightarrow{QS}$, como na figura abaixo.

Junto com um colega, mostre que $\overleftrightarrow{KM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{QS} \perp \alpha$.
(*Sugestão*: Construa por P uma paralela à reta $\overleftrightarrow{KM}$.)

11. Se um plano α é perpendicular a um plano β, r é uma reta contida em α e r é perpendicular à reta de intersecção entre os planos α e β.

a) Mostre que r é perpendicular ao plano β.

b) Compare a demonstração que você elaborou com a de um colega.

12. Mostre que, no cubo representado abaixo, a diagonal $\overline{AC}$ da face $ABCD$ é perpendicular ao plano $(HFBD)$. Você pode fazer junto com um colega.

13. Sejam α e β planos paralelos, A, B e C pontos de α e P um ponto de β tais que $\overline{PA} \perp \beta$. Se R, T e V são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente, prove que o plano (RTV) é paralelo a β.

Figura 5.28: Exercícios propostos

Ao término dessa seção, percebemos que o método axiomático continuou sendo aplicado, mesmo tendo havido uma diminuição de sua aplicação fica evidente para o leitor que, sempre que necessário, devemos utilizar o sistema dedutivo.

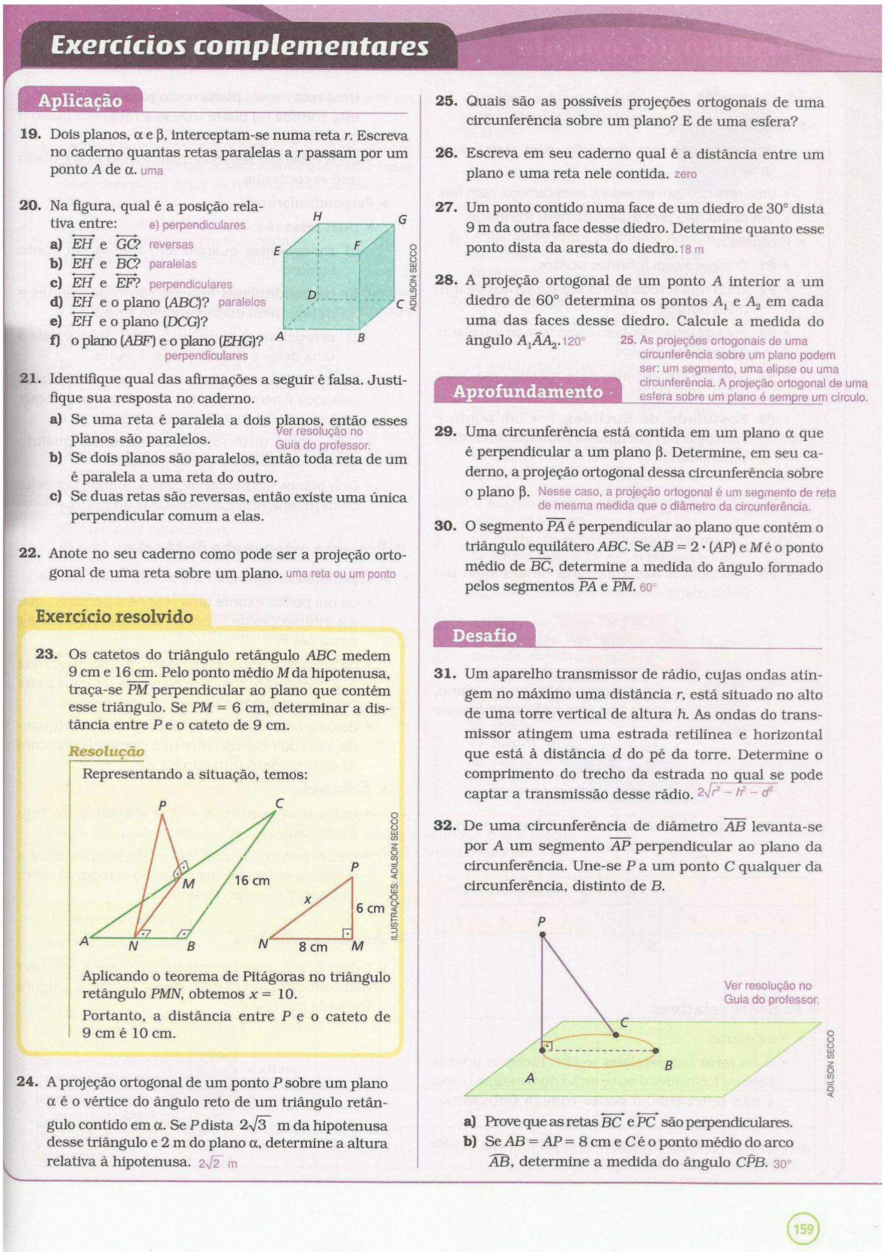
5.3 Análise das seções *Projeção Ortogonal e Distâncias* e, *Ângulos e Diedros* apresentadas no livro 1

Os autores finalizam o capítulo analisado, com as seções, projeção ortogonal e distâncias e, ângulos e diedros. Ao analisá-las, concluímos que o método axiomático não é mais utilizado. Assim, não teceremos nenhum comentário referente as seções citadas acima.

5.4 Análise da seção *Exercícios Complementares*

Os autores fornecem uma lista de exercícios complementares (ver figura 5.29) subdividida em questões denominadas aplicação, exercício resolvido, aprofundamento e desafio. Podemos perceber que a maioria das questões aplicam a teoria desenvolvida no capítulo, faltando mais uma vez, questões contextualizadas que envolvam o cotidiano do aluno.

A questão 31, do bloco desafio exposto na figura 5.29, é o tipo de exercício considerado proveitoso pois, mostra ao aluno que a Matemática está ligada a outras áreas de conhecimento, a exemplo da questão, a Física. Questões como essa desperta no aluno interessado em ondas sonoras, a vontade de aprender o conteúdo envolvido. Assim, quanto mais pudermos envolver situações práticas para atrairmos o aluno o prazer em aprender, mais alcançaremos nosso objetivo como transmissor de conhecimentos.



Exercícios complementares

Aplicação

19. Dois planos, α e β, interceptam-se numa reta r. Escreva no caderno quantas retas paralelas a r passam por um ponto A de α. uma

20. Na figura, qual é a posição relativa entre: e) perpendiculares

a) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{GC}$? reversas

b) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$? paralelas

c) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{EF}$? perpendiculares

d) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (ABC)? paralelos

e) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (DCG)?

f) o plano (ABF) e o plano (EHG)? perpendiculares

21. Identifique qual das afirmações a seguir é falsa. Justifique sua resposta no caderno.

a) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos. Ver resolução no Guia do professor.

b) Se dois planos são paralelos, então toda reta de um é paralela a uma reta do outro.

c) Se duas retas são reversas, então existe uma única perpendicular comum a elas.

22. Anote no seu caderno como pode ser a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano. uma reta ou um ponto

Exercício resolvido

23. Os catetos do triângulo retângulo ABC medem 9 cm e 16 cm. Pelo ponto médio M da hipotenusa, traça-se $\overline{PM}$ perpendicular ao plano que contém esse triângulo. Se $PM = 6$ cm, determinar a distância entre P e o cateto de 9 cm.

Resolução

Representando a situação, temos:

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo PMN, obtemos $x = 10$.

Portanto, a distância entre P e o cateto de 9 cm é 10 cm.

24. A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo contido em α. Se P dista $2\sqrt{3}$ m da hipotenusa desse triângulo e 2 m do plano α, determine a altura relativa à hipotenusa. $2\sqrt{2}$ m

25. Quais são as possíveis projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano? E de uma esfera?

26. Escreva em seu caderno qual é a distância entre um plano e uma reta nele contida. zero

27. Um ponto contido numa face de um diedro de 30° dista 9 m da outra face desse diedro. Determine quanto esse ponto dista da aresta do diedro. 18 m

28. A projeção ortogonal de um ponto A interior a um diedro de 60° determina os pontos A_1 e A_2 em cada uma das faces desse diedro. Calcule a medida do ângulo $A_1\hat{A}A_2$. 120°

25. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser: um segmento, uma elipse ou uma circunferência. A projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

Aprofundamento

29. Uma circunferência está contida em um plano α que é perpendicular a um plano β. Determine, em seu caderno, a projeção ortogonal dessa circunferência sobre o plano β. Nesse caso, a projeção ortogonal é um segmento de reta de mesma medida que o diâmetro da circunferência.

30. O segmento $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano que contém o triângulo equilátero ABC. Se $AB = 2 \cdot (AP)$ e M é o ponto médio de $\overline{BC}$, determine a medida do ângulo formado pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PM}$. 60°

Desafio

31. Um aparelho transmissor de rádio, cujas ondas atingem no máximo uma distância r, está situado no alto de uma torre vertical de altura h. As ondas do transmissor atingem uma estrada retilínea e horizontal que está à distância d do pé da torre. Determine o comprimento do trecho da estrada no qual se pode captar a transmissão desse rádio. $2\sqrt{r^2 - h^2 - d^2}$

32. De uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ levanta-se por A um segmento $\overline{AP}$ perpendicular ao plano da circunferência. Une-se P a um ponto C qualquer da circunferência, distinto de B.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Prove que as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ são perpendiculares.

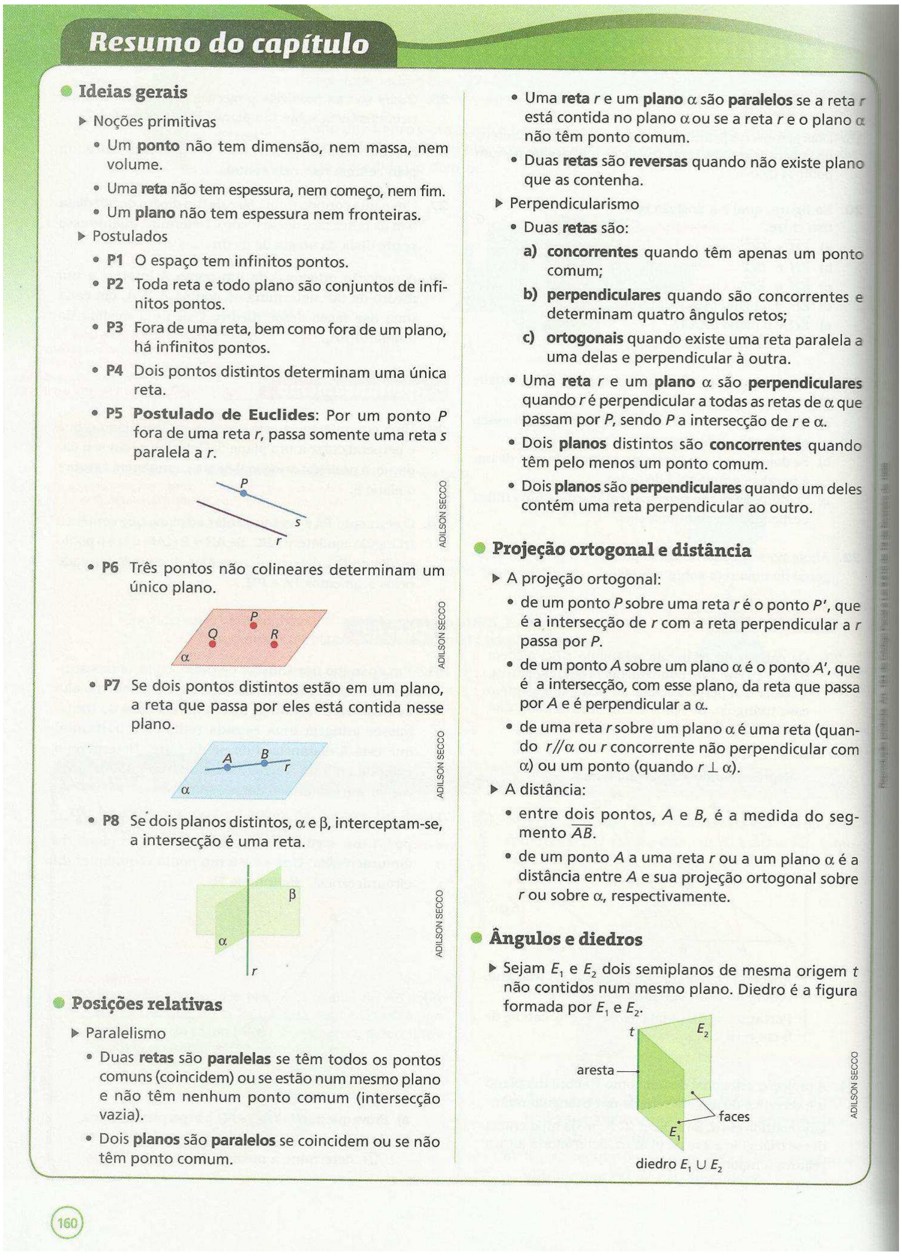
b) Se $AB = AP = 8$ cm e C é o ponto médio do arco $\widehat{AB}$, determine a medida do ângulo $C\hat{P}B$. 30°

159

Figura 5.29: Exercícios Complementares

5.5 Análise da seção *Resumo do Capítulo*

Um resumo e um teste de autoavaliação são disponibilizado no final do capítulo, conforme podemos observar nas figuras 5.30 e 5.31 respectivamente. O resumo do capítulo é uma boa ferramenta para proporcionar ao aluno mais uma oportunidade de internalizar os conceitos trabalhados. Por outro lado, pode despertar no aprendiz um comodismo de leitura pois, a praticidade de buscar o conteúdo de forma resumida é bem mais atrativa tendo em vista que a maioria dos alunos buscam apenas sanar suas dúvidas de momento sem interligá-las ao conteúdo como um todo.



Resumo do capítulo

Ideias gerais

- Noções primitivas
  - Um **ponto** não tem dimensão, nem massa, nem volume.
  - Uma **reta** não tem espessura, nem começo, nem fim.
  - Um **plano** não tem espessura nem fronteiras.
- Postulados
  - **P1** O espaço tem infinitos pontos.
  - **P2** Toda reta e todo plano são conjuntos de infinitos pontos.
  - **P3** Fora de uma reta, bem como fora de um plano, há infinitos pontos.
  - **P4** Dois pontos distintos determinam uma única reta.
  - **P5** **Postulado de Euclides**: Por um ponto P fora de uma reta r, passa somente uma reta s paralela a r.
  - **P6** Três pontos não colineares determinam um único plano.
  - **P7** Se dois pontos distintos estão em um plano, a reta que passa por eles está contida nesse plano.
  - **P8** Se dois planos distintos, α e β, interceptam-se, a intersecção é uma reta.

Posições relativas

- Paralelismo
  - Duas **retas** são **paralelas** se têm todos os pontos comuns (coincidem) ou se estão num mesmo plano e não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).
  - Dois **planos** são **paralelos** se coincidem ou se não têm ponto comum.
  - Uma **reta** r e um **plano** α são **paralelos** se a reta r está contida no plano α ou se a reta r e o plano α não têm ponto comum.
  - Duas **retas** são **reversas** quando não existe plano que as contenha.
- Perpendicularismo
  - Duas **retas** são:
    a) **concorrentes** quando têm apenas um ponto comum;
    b) **perpendiculares** quando são concorrentes e determinam quatro ângulos retos;
    c) **ortogonais** quando existe uma reta paralela a uma delas e perpendicular à outra.
  - Uma **reta** r e um **plano** α são **perpendiculares** quando r é perpendicular a todas as retas de α que passam por P, sendo P a intersecção de r e α.
  - Dois **planos** distintos são **concorrentes** quando têm pelo menos um ponto comum.
  - Dois **planos** são **perpendiculares** quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

Projeção ortogonal e distância

- A projeção ortogonal:
  - de um ponto P sobre uma reta r é o ponto P', que é a intersecção de r com a reta perpendicular a r passa por P.
  - de um ponto A sobre um plano α é o ponto A', que é a intersecção, com esse plano, da reta que passa por A e é perpendicular a α.
  - de uma reta r sobre um plano α é uma reta (quando $r // \alpha$ ou r concorrente não perpendicular com α) ou um ponto (quando $r \perp \alpha$).
- A distância:
  - entre dois pontos, A e B, é a medida do segmento $\overline{AB}$.
  - de um ponto A a uma reta r ou a um plano α é a distância entre A e sua projeção ortogonal sobre r ou sobre α, respectivamente.

Ângulos e diedros

- Sejam E_1 e E_2 dois semiplanos de mesma origem t não contidos num mesmo plano. Diedro é a figura formada por E_1 e E_2.

diedro $E_1 \cup E_2$

160

Figura 5.30: Resumo do capítulo

5.6 Análise da seção *Autoavaliação*

O teste de autoavaliação é composto por 11 questões de múltipla escolha, onde o aluno deve resolvê-las e optar por uma das respostas, questões como essas são sempre bem vindas pelo simples fato de ser uma preparação para futuros concursos prestados pelos alunos. Porém, o livro analisado não disponibiliza questões contextualizadas que são o tipo de questões exigidas nos processos seletivos de acesso a universidades, a exemplo o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

Autoavaliação

Leia atentamente as questões a seguir e responda-as em seu caderno.

1. Dados dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r \,//\, s$ e t e m reversas, a semelhança que existe entre esses dois pares é que as retas de cada par: alternativa c

a) são coplanares
b) não são coplanares
c) não têm nenhum ponto comum
d) têm apenas um ponto comum

2. Dados dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r \,//\, s$ e t e m reversas, a diferença que existe entre esses dois pares é que: alternativa a

a) r e s são coplanares, mas m e t não são
b) r e s não são coplanares, mas m e t são
c) r e s, bem como m e t, não têm ponto comum
d) nenhuma das anteriores

3. Uma reta r é perpendicular a uma reta s, contida num plano α, e r é ortogonal a uma reta t, contida em α e concorrente com s. Portanto, podemos afirmar que: alternativa b

a) r não pode ser perpendicular a α
b) r é necessariamente perpendicular a α
c) r pode ser paralela a α
d) nenhuma das anteriores

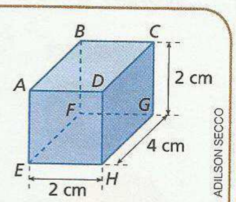
4. Um plano α é paralelo a duas retas distintas, r e s. Assim, pode-se afirmar que: alternativa b

a) r e s são paralelas, necessariamente
b) r e s podem ser perpendiculares
c) r e s são reversas, necessariamente
d) r e s não são perpendiculares

5. Se a projeção ortogonal de uma reta r sobre um plano α é um ponto P, então: alternativa d

a) $r \,//\, \alpha$
b) $r \cap \alpha = \varnothing$
c) $r \cap \alpha \neq P$
d) $r \perp \alpha$

Considere a figura ao lado para responder às questões de 6 a 9.



6. A distância entre os pontos A e C é: alternativa d

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 20 cm
d) $2\sqrt{5}$ cm

7. A distância entre o ponto A e o plano (BCF) é: alternativa b

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 20 cm
d) $5\sqrt{2}$ cm

8. A distância entre o ponto A e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é: alternativa a

a) $2\sqrt{2}$ cm
b) 4 cm
c) 20 cm
d) $5\sqrt{2}$ cm

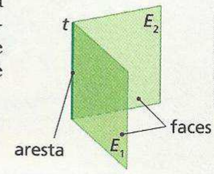
9. A distância entre o ponto A e o plano (DHE) é: alternativa d

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 20 cm
d) 0 cm

10. O ângulo entre a reta r e o plano α é nulo. Então, podemos afirmar que: alternativa d

a) existe um ponto P tal que $r \cap \alpha = \{P\}$
b) existe uma reta $s \subset \alpha$ tal que $r \perp s$
c) $r \perp \alpha$
d) $r \cap \alpha = r$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$

11. A figura ao lado, formada pela reunião dos semiplanos de mesma origem e não coincidentes E_1 e E_2, é denominada: alternativa c



a) projeção
b) sólido
c) diedro
d) plano

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão										
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Identificar a posição relativa entre retas, entre planos e entre retas e planos, e aplicá-las na resolução de situações-problema.	X	X	X	X	X					X	
Identificar e calcular distâncias entre: pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.						X	X	X	X		
Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.											X
Páginas do livro referentes ao conceito	142 a 147	142 a 147	145 a 152	145 a 152	153	154 e 155	154 e 155	154 e 155	154 e 155	157	156 a 158

161

Figura 5.31: Autoavaliação

Capítulo 6

Análise do capítulo 10 do Livro 2 - *Matemática Contextos e Aplicações*

Nossa análise nesse capítulo será voltada à coleção *Matemática Contextos e Aplicações* [3], cujo autor é Luiz Roberto Dante, 1ª edição, São Paulo 2011. Publicado pela Editora Ática, a coleção é composta por três volumes destinados ao ensino de matemática no decorrer do ensino médio. Iremos trabalhar com o volume 2 da coleção, particularmente com o capítulo 10, tendo em vista, mais uma vez, que nossa análise será direcionada à forma como os autores introduzem a Geometria espacial, principalmente a maneira como o método axiomático é apresentado e repassado para os alunos.

No ano de 2011, a coleção foi aprovada pelo Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD) e sua resenha se encontra no guia de livros didáticos de matemática, PNLD 2012 [11], do ensino médio.

Segundo o Guia (PNLD [11], p. 61)...

> "*...Observa-se uma boa conexão entre os diversos campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento. Também verifica-se a preocupação em articular os conhecimentos novos e os já abordados.*
> *A coleção apresenta um excesso de conteúdos e de atividades, em particular no livro da 1ª série. Também há exagero em procedimentos e no uso de terminologias, o que exigirá do docente uma seleção cuidadosa, a fim de priorizar aqueles que considerar indispensáveis à formação dos alunos do ensino médio.*
> *Grande parte das atividades e situações-problema propostas nos livros do aluno são, imediatamente, seguidas de uma abordagem técnica ou teórica. Essa opção pode tornar o desenvolvimento dos conteúdos desinteressante ou de difícil compreensão.*"

O livro do aluno é composto por 384 páginas e, ao professor é oferecido um manual de apoio pedagógico composto por 200 páginas. Os conteúdos desse livro didático são distribuídos em 14 capítulos, conforme podemos ver na tabela 6.1.

Volume 2 - Matemática Contextos e Aplicações	
Capítulo 1	Trigonometria: Resolução de triângulo quaisquer
Capítulo 2	Conceitos trigonométricos básicos
Capítulo 3	Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica
Capítulo 4	Relações trigonométricas
Capítulo 5	Relações trigonométricas
Capítulo 6	As funções trigonométricas
Capítulo 7	Matrizes
Capítulo 8	Determinantes
Capítulo 9	Sistemas Lineares
Capítulo 10	Geometria Espacial de posição - Uma introdução intuitiva
Capítulo 11	Poliedros: Prismas e pirâmides
Capítulo 12	Corpos redondos: cilindro, cone e esfera
Capítulo 13	Análise combinatória
Capítulo 14	Probabilidade

Tabela 6.1: Matemática Contextos e Aplicações - Volume 2

De acordo com a tabela acima, percebemos que a Geometria espacial é colocada, praticamente, no final do livro. Essa conduta não é considerada muito vantajosa pois, na maioria das vezes, os últimos conteúdos apresentados no livro, são vistos de forma apressada, desmotivando o aluno e dificultando sua aprendizagem. Sendo assim, deixamos como sugestão apresentar a Geometria intercalando-a com os conteúdos de álgebra, ou apresentá-la nos capítulos iniciais.

Na análise do capítulo 10 (Geometria Espacial de posição - Uma introdução intuitiva), buscaremos preservar a conduta seguida no capítulo 5 do nosso trabalho, analisando a forma como o sistema dedutivo é apresentado para o aluno. Salientando que, todas as considerações feitas serão voltadas apenas a esse capítulo do livro em análise, não ao livro, nem a coleção como um todo.

Esclarecendo ainda ao leitor que, quando mencionarmos o livro 2 , estaremos nos referindo ao capítulo 10 do livro que estamos analisando.

6.1 Análise da forma como o capítulo (Geometria Espacial de Posição - Uma Introdução Intuitiva) é apresentado

O capítulo 10 (Geometria Espacial de posição - Uma introdução intuitiva) é bem apresentado (ver figura 6.1) pois, o autor faz referências históricas da evolução dos conhecimentos geométricos despertando no aluno a visão de que a Matemática está sempre em desenvolvimento e motivando-o a valorizar essa ciência.

CAPÍTULO 10

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO — UMA INTRODUÇÃO INTUITIVA

É instigante imaginar o conhecimento dos sábios da Antiguidade sobre a Geometria. Um ótimo exemplo é o templo de Ártemis: é impossível ficar indiferente diante da beleza desse templo, uma das sete maravilhas do mundo antigo. O paralelismo de suas 127 colunas de mármore com mais de 20 metros de altura cada uma — como terá sido possível construí-las em tempos tão remotos?

A simetria de suas formas, a perfeita disposição das águas de telhado (planos que contêm o telhado) e o perpendicularismo de suas pilastras revelam grande conhecimento dessa área da Matemática, tão antiga e tão considerada pelos filósofos.

O estudo das formas permitia ao homem contemplar as "formas perfeitas" da Natureza, chamadas por Platão de "ideais", e descobrir seu encanto e sua magia. A Matemática — do grego "*Mathematikós* — aquele que aprende (*mathematikos*) decodificando (*mathesis*) os traçados (*curvarum*) da Natureza (*physis*)" — nasceria, portanto, dessa contemplação e encontraria na mente humana campo fértil para se desenvolver.

PRIVATE COLLECTION/ARCHIVES CHARMET/THE BRIDGEMAN ART LIBRARY

O templo de Ártemis, mais conhecido como templo de Diana (nome latino dado pelos romanos à deusa Ártemis), construído em homenagem à Lua, em Éfeso, na região da atual Turquia, por volta dos séculos V ou VI a.C., já não existe mais; apenas fragmentos de suas colunas se encontram, atualmente, no museu britânico. Esse templo foi destruído duas vezes. Na primeira, foi reconstruído maior do que antes. Sua destruição final se deu em 262 d.C., quando a cidade em que ficava foi saqueada pelos godos.

174 Matemática

Figura 6.1: Apresentação do capítulo

No primeiro parágrafo da figura 6.2, o autor cita a contribuição dada por Euclides quando inventou a teoria axiomática. Fato considerado vantajoso pois, mesmo que de forma breve, quando se fala em postulados, teoremas, demonstrações e conceitos primitivos essa teoria já começa a ser "apresentada", estimulando no aluno a vontade de conhecer mais profundamente esse estudo.

Ainda no texto exposto na figura 6.2, o autor faz referência ao emprego da geometria em diversas áreas, tais como: Arquitetura e Dança. Atitudes como essas valorizam o estudo da Geometria, estimulando o aluno a conhecer algo que possa ser aplicado na sua vida diária.

> Foi Euclides (século III a.C.), grande geômetra grego, quem ordenou os conceitos matemáticos e os dispôs segundo uma teoria axiomática, na qual, partindo-se de certas afirmações (proposições) consideradas verdadeiras — os axiomas ou postulados —, chega-se a novas proposições — os teoremas —, somente aceitas mediante demonstração (argumentação lógica). Essa teoria caracteriza-se por sua consistência e por conter seu próprio objeto de estudo, uma vez que enuncia suas proposições iniciais.
>
> Chersiphron, o arquiteto que projetou o templo de Ártemis, o fez bem antes da época de Euclides e certamente se apoiou nos conhecimentos de Geometria que as civilizações anteriores à grega já dispunham.
>
> Apesar da ressalva de muitos matemáticos a um de seus postulados, o da unicidade da paralela, a geometria euclidiana permaneceu inabalável até o final do século XIX, quando foram criadas as chamadas geometrias não euclidianas, assunto só estudado no ensino superior, com aplicações na Física, como a Teoria da Relatividade de Einstein.
>
> Também podemos encontrar o emprego da Geometria em campos incomuns, como no balé de Rudolf Laban, que considerou o movimento corporal uma expressão mecânica ao longo de três eixos que definem três planos, denominados sagital, horizontal e frontal.
>
> Por estar sempre presente à nossa volta, a Geometria representa o aspecto mais concreto da Matemática se comparada à Álgebra, mais abstrata; por isso seus conceitos são também mais fáceis de ser apreendidos, chegando algumas vezes a ser intuitivos.
>
> A parte teórica da Geometria espacial é chamada Geometria de posição e trata dos conceitos primitivos — ponto, reta e plano — e suas relações. Seu estudo nos prepara para uma etapa posterior que envolve cálculos de áreas e volumes. O capítulo que agora se inicia abordará os conceitos fundamentais da Geometria, à luz da teoria euclidiana.

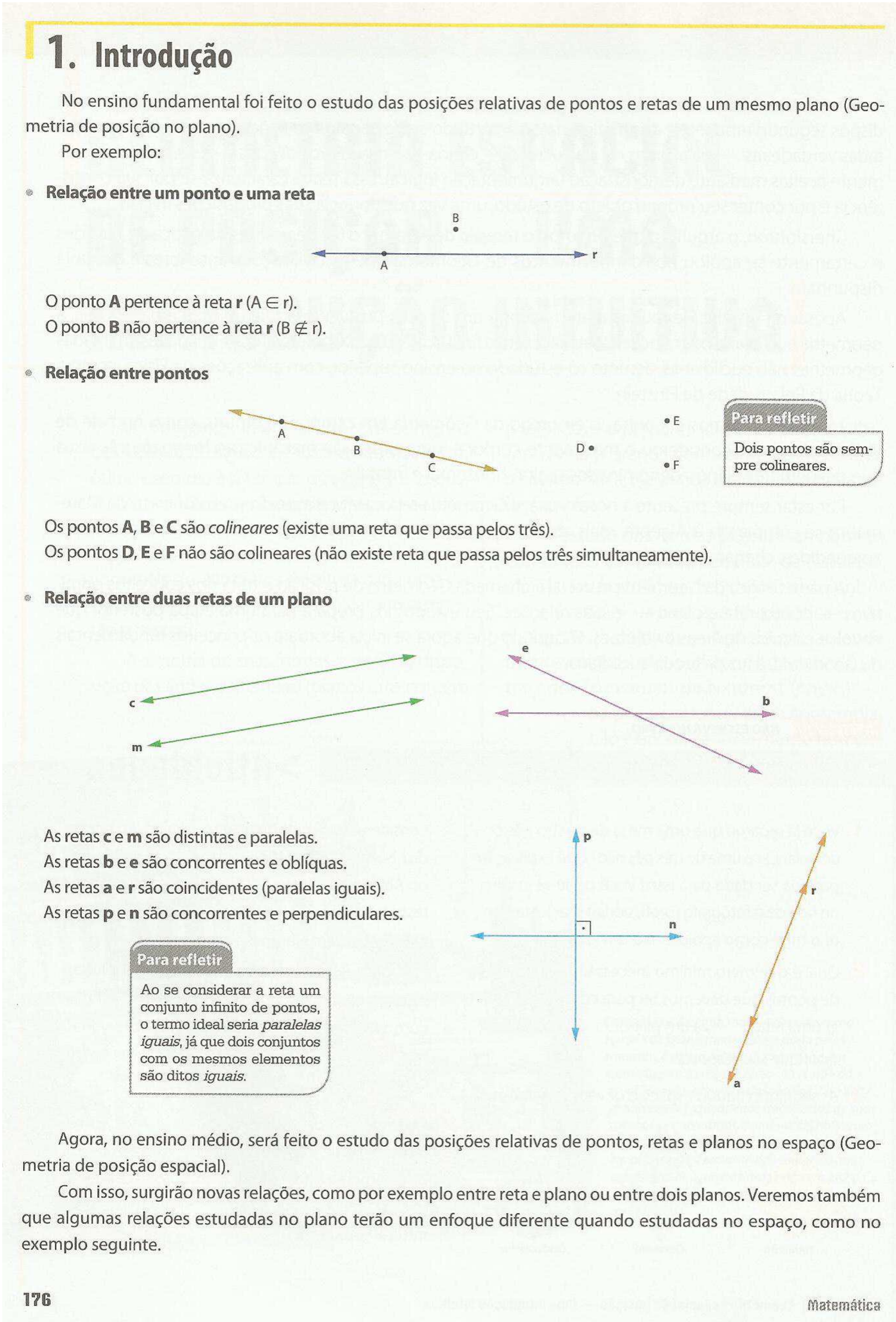
Figura 6.2: Apresentação do capítulo

Enfatizar a história da Matemática em sala de aula é fundamental, pois ela pode desenvolver no aluno um espírito crítico sobre a evolução dessa ciência e também fazer com que o estudante entenda as ideias implícitas às teorias apresentadas. Em síntese, utilizando essas referências históricas na prática diária o professor pode fazer com que seus alunos compreendam a natureza dos objetos da Matemática e como se desenvolveu essa ciência.

6.2 Análise da seção *Introdução* do livro 2

Observando a figura 6.3, o autor faz uma breve revisão do estudo da Geometria visto no ensino fundamental, apresentando as posições relativas entre ponto e reta num plano. Essa é uma postura que deve ser seguida pelo professor pois, ao revisar alguns conceitos, é reavivado na mente do aluno conteúdos já estudados e necessários para o desenvolvimento de teorias futuras. Tal conduta também pode colaborar com o aluno que, por algum motivo, não tenha visto tais conceitos em anos anteriores.

Ainda na figura 6.3, observamos que o autor interliga a Geometria plana, vista no ensino fundamental, com a geometria espacial que será estudada no ensino médio. Sendo assim, o aluno vai percebendo que há um ligação entre os conceitos aprendidos anteriormente e os que ainda serão apresentados, passando a valorizar e a explorar mais cada conteúdo exposto.



1. Introdução

No ensino fundamental foi feito o estudo das posições relativas de pontos e retas de um mesmo plano (Geometria de posição no plano).

Por exemplo:

- **Relação entre um ponto e uma reta**

O ponto **A** pertence à reta **r** ($A \in r$).
O ponto **B** não pertence à reta **r** ($B \notin r$).

- **Relação entre pontos**

Para refletir
Dois pontos são sempre colineares.

Os pontos **A**, **B** e **C** são *colineares* (existe uma reta que passa pelos três).
Os pontos **D**, **E** e **F** não são colineares (não existe reta que passa pelos três simultaneamente).

- **Relação entre duas retas de um plano**

As retas **c** e **m** são distintas e paralelas.
As retas **b** e **e** são concorrentes e oblíquas.
As retas **a** e **r** são coincidentes (paralelas iguais).
As retas **p** e **n** são concorrentes e perpendiculares.

Para refletir
Ao se considerar a reta um conjunto infinito de pontos, o termo ideal seria *paralelas iguais*, já que dois conjuntos com os mesmos elementos são ditos *iguais*.

Agora, no ensino médio, será feito o estudo das posições relativas de pontos, retas e planos no espaço (Geometria de posição espacial).

Com isso, surgirão novas relações, como por exemplo entre reta e plano ou entre dois planos. Veremos também que algumas relações estudadas no plano terão um enfoque diferente quando estudadas no espaço, como no exemplo seguinte.

176 Matemática

Figura 6.3: Geometria de posição no plano

A partir desse elo feito entre as Geometrias plana e espacial, o autor apresenta alguns exemplos, bem ilustrados, que auxiliam na visualização de como se dá as relações entre pontos, retas e planos no espaço, conforme podemos ver na figura 6.4. Em Geometria, apresentar exemplos acompanhados com ilustrações é uma excelente postura, por isso devemos enriquecer esses exemplos associando-os, sempre que possível, a vida cotidiana do aluno.

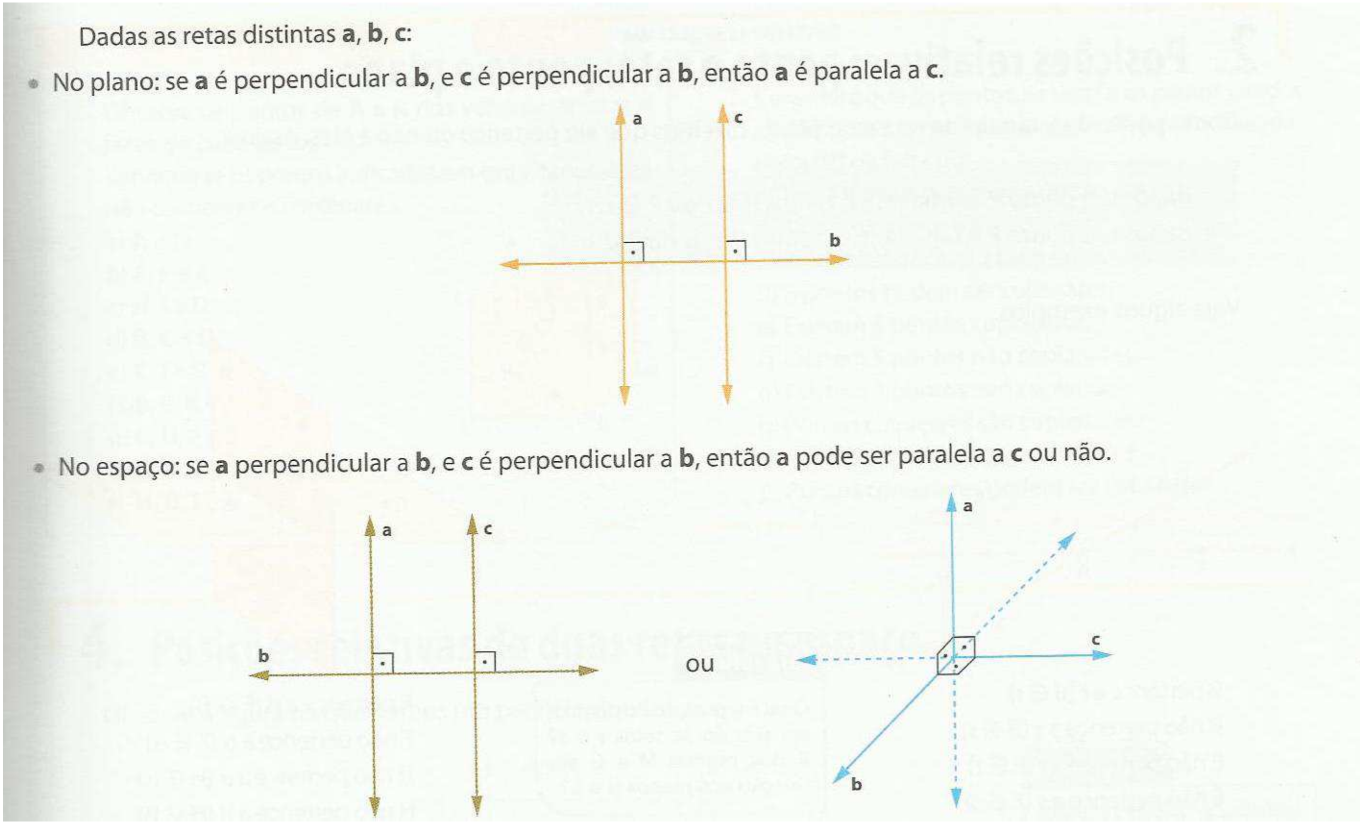


Figura 6.4: Posições relativas entre pontos, retas e planos no espaço

6.2.1 Análise da forma como o método axiomático é apresentado no livro 2

As considerações feitas a seguir, poderão ser observadas no texto exposto na figura 6.5.

O autor informa que o estudo da Geometria de posição será feito de forma "intuitiva" e que será apoiado em modelos, figuras e objetos.

Ora, como utilizar esses termos, "intuitivo", "modelos" e "objetos" sem fornecer qualquer ideia sobre eles?

Na nossa concepção, essa forma de introduzir o estudo da Geometria de posição não está adequada ao bom entendimento do aluno. O autor poderia ter iniciado o estudo, apenas fazendo referência as ideias de ponto, reta e plano e, a partir daí, ir apresentando gradativamente, a construção do método axiomático.

Favorecendo o entendimento do aluno, o autor mostra que o ponto, a reta e o plano serão representados, no decorrer do capítulo em análise, por letras maiúsculas, minúsculas e gregas respectivamente. Desse modo, quando o aluno se deparar com essas simbologias, já saberão que objeto está sendo referenciado.

Após indicar as representações ilustrativas e simbólicas do ponto, da reta e do plano, o autor informa que esses objetos nunca foram definidos. No entanto, dentre esses objetos, não definidos, é inserido o "espaço" que, na nossa opinião, pode ser definido. *Espaço* é um conjunto de todos os pontos.

No segundo parágrafo, é informado ao leitor que os conceitos primitivos serão os elementos iniciais da teoria que será desenvolvida, mas, em nenhum momento diz que o ponto, a reta e o plano, são conceitos primitivos. Informa ainda, que outros objetos serão definidos a partir desses conceitos primitivos.

Desse modo, percebemos que essa maneira de apresentar, para o aluno, a ideia de conceitos primitivos não está muito boa, o autor poderia ter destacado, de alguma forma, o termo *conceitos primitivos*, a fim de despertar no aluno uma atenção mais criteriosa. Sobretudo, deveria ter sido apresentada uma definição formal para esses conceitos, por exemplo. *Conceitos primitivos* são conceitos intuitivos, ou seja, são aceitos sem precisar defini-los.

Posteriormente, os axiomas são definidos como sendo afirmações aceitas que não precisam ser demonstradas e que as conclusões tiradas a partir desses axiomas são chamadas de teorema, afirma também que os teoremas só serão aceitos mediante uma demonstração porém, mais uma vez, não destacam os termos a serem definidos, *axiomas* e *teoremas*. Essa definição de teorema não está muito clara, pois pode conduzir o aluno a entender que toda conclusão oriunda de um axioma será um teorema.

É omitido ao leitor uma observação muito importante na teoria que está sendo construída, o autor não informa que, para demonstrar os teoremas serão utilizados alguns conceitos primitivos, definições, axiomas e(ou) outros teoremas previamente demonstrados, formalizando assim a teoria axiomática a ser utilizada.

É interessante quando o autor informa que os axiomas, os teoremas e as definições serão destacados, no decorrer do capítulo, com um fundo azul, laranja e rosa respectivamente assim, ao ver essas caixas de textos coloridas, o aluno já associa a que se refere tal destaque. No entanto, essa maneira de informar, principalmente os axiomas e as definições, dificulta a praticidade no momento de citá-los nas demonstrações dos teoremas. Com isso, sugeríamos que as definições e os postulados fossem enumerados, assim quando fosse preciso citá-los nas demonstrações usaríamos apenas o número correspondente.

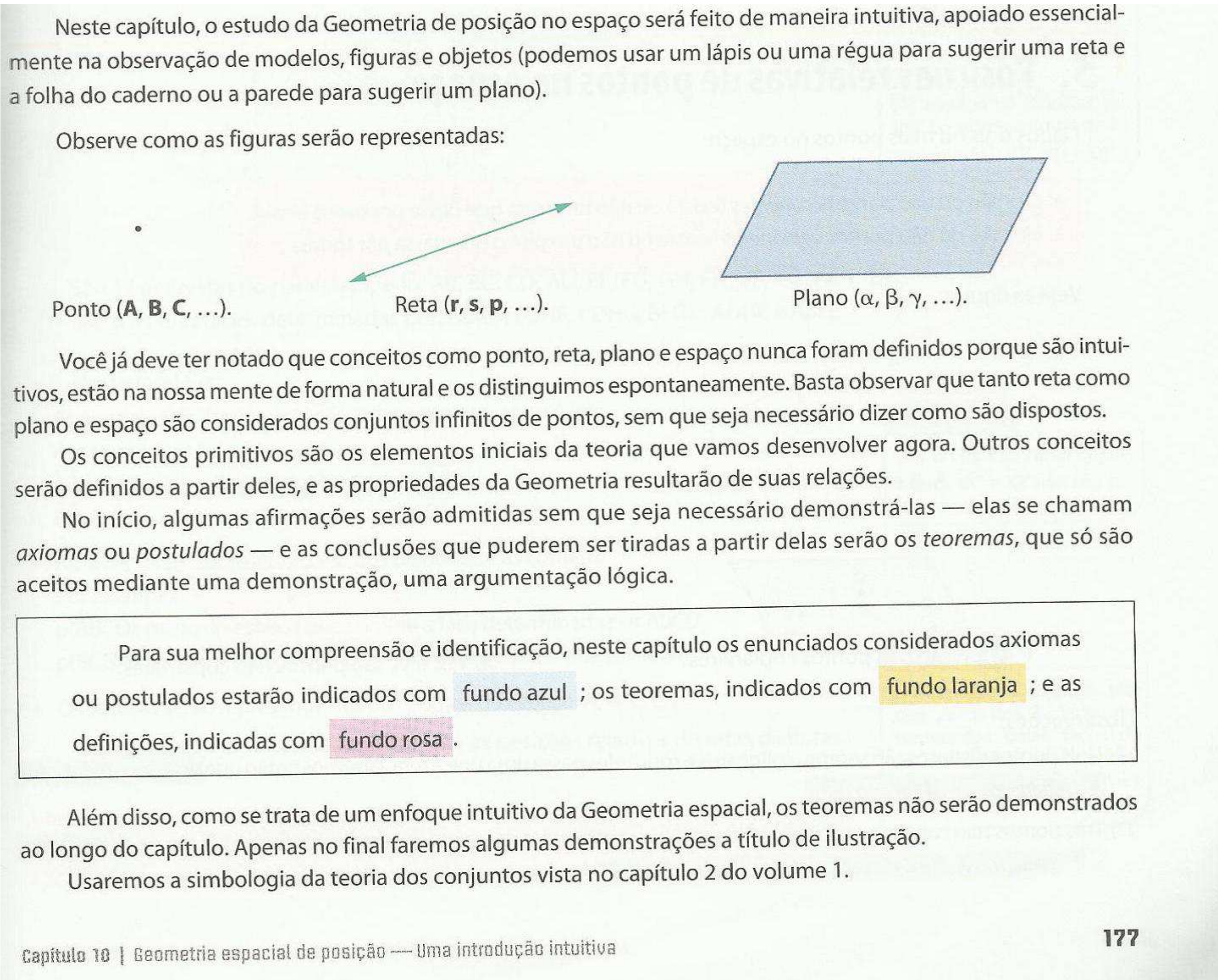
Observemos o último parágrafo, onde (Dante [3], p.177) afirma...

> *"...como se trata de um enfoque intuitivo da Geometria espacial, os teoremas não serão demonstrados ao longo do capítulo. Apenas no final faremos algumas demonstrações a título de ilustrações".*

Com essa afirmação entendemos, que o autor não dedica a importância necessária ao método axiomático, tendo em vista que o mesmo, como enfocou no quinto parágrafo da figura 6.5, "que um teorema só é válido mediante uma demonstração."

Com isso, o aluno poderá perguntar: "Então os teoremas apresentados não serão válidos? Porque não são demonstrados?"

Essas foram as nossas considerações, referentes ao texto apresentado na figura 6.5.



Neste capítulo, o estudo da Geometria de posição no espaço será feito de maneira intuitiva, apoiado essencialmente na observação de modelos, figuras e objetos (podemos usar um lápis ou uma régua para sugerir uma reta e a folha do caderno ou a parede para sugerir um plano).

Observe como as figuras serão representadas:

Você já deve ter notado que conceitos como ponto, reta, plano e espaço nunca foram definidos porque são intuitivos, estão na nossa mente de forma natural e os distinguimos espontaneamente. Basta observar que tanto reta como plano e espaço são considerados conjuntos infinitos de pontos, sem que seja necessário dizer como são dispostos.

Os conceitos primitivos são os elementos iniciais da teoria que vamos desenvolver agora. Outros conceitos serão definidos a partir deles, e as propriedades da Geometria resultarão de suas relações.

No início, algumas afirmações serão admitidas sem que seja necessário demonstrá-las — elas se chamam *axiomas* ou *postulados* — e as conclusões que puderem ser tiradas a partir delas serão os *teoremas*, que só são aceitos mediante uma demonstração, uma argumentação lógica.

Para sua melhor compreensão e identificação, neste capítulo os enunciados considerados axiomas ou postulados estarão indicados com fundo azul ; os teoremas, indicados com fundo laranja ; e as definições, indicadas com fundo rosa .

Além disso, como se trata de um enfoque intuitivo da Geometria espacial, os teoremas não serão demonstrados ao longo do capítulo. Apenas no final faremos algumas demonstrações a título de ilustração.

Usaremos a simbologia da teoria dos conjuntos vista no capítulo 2 do volume 1.

Capítulo 10 | Geometria espacial de posição — Uma introdução intuitiva 177

Figura 6.5: Conceitos primitivos, axiomas e teoremas

Observamos, no decorrer do capítulo em análise, que o autor não aplicou o método axiomático, apenas apresentou as definições, axiomas e teoremas sem mostrar ao aluno o verdadeiro motivo dessa teoria está sendo apresentada.

Como o foco principal da nossa análise é o sistema dedutivo, não nos prenderemos, na íntegra, a toda teoria exposta, mostraremos apenas alguns trechos apresentados pelo autor, justificando assim, nossa opinião quando dizemos que o autor não dedica a importância necessária ao método axiomático.

6.3 Análise da maneira como as posições relativas são apresentadas no livro 2

O livro 2 apresenta algumas subseções, entremeadas por exercícios propostos, que trabalham as diversas posições relativas que envolvem os conceitos primitivos: Ponto, reta e plano. São elas:

1. Posições Relativas: Ponto e reta; ponto e plano
2. Posições Relativas de pontos no espaço
3. Posições Relativas de duas retas no espaço
4. Determinação de um plano
5. Posições Relativas de dois planos no espaço
6. Posições relativas de uma reta e um plano
7. Paralelismo no espaço
8. Perpendicularismo no espaço

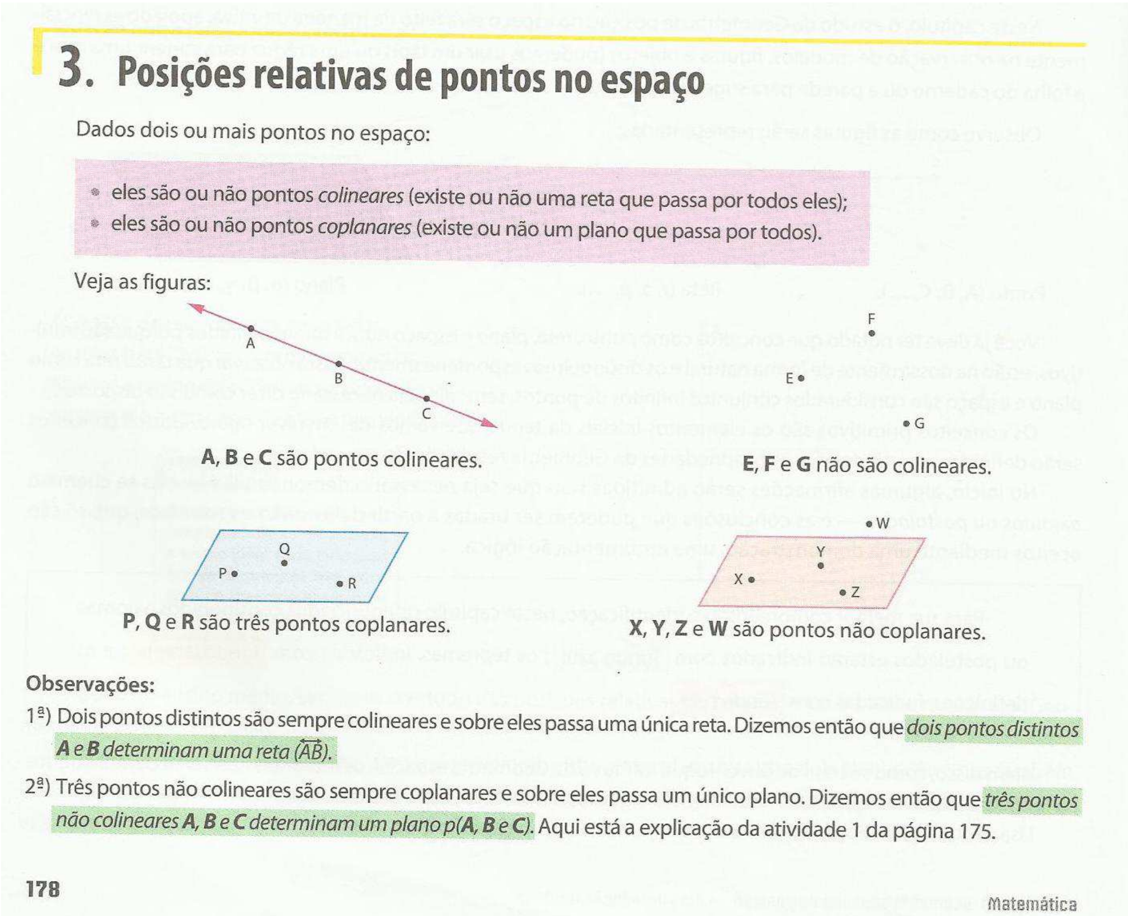
Conforme justificamos anteriormente, analisaremos apenas algumas das subseções citadas acima.

6.3.1 Análise da subseção *Posições Relativas de Pontos no Espaço* apresentada no livro 2

Ao iniciar essa subseção, o autor obedece o acordo anteriormente exposto na figura 6.5, exibe as definições de pontos colineares (não colineares), coplanares (não coplanares) destacado-as em uma caixa de texto de fundo rosa (Ver figura 6.6), convencendo assim o aluno, que ali estão sendo exibidas definições de objetos.

No entanto, nas observações fornecidas, ainda na figura 6.6, a cor verde é utilizada sem que tenha sido pré estabelecido a que se referiria essa cor de destaque. Como o aluno já está se familiarizando com a forma que os axiomas, definições e teoremas estão sendo apresentados, não entenderá o porque do destaque.

Na realidade, as observações 1 e 2 expostas na figura 6.6, deveriam ser apresentadas como axiomas, destacadas em uma caixa de texto de fundo azul pois, são informações necessárias que não precisam ser demonstradas e que serão utilizadas em demonstrações futuras.



3. Posições relativas de pontos no espaço

Dados dois ou mais pontos no espaço:

- eles são ou não pontos *colineares* (existe ou não uma reta que passa por todos eles);
- eles são ou não pontos *coplanares* (existe ou não um plano que passa por todos).

Veja as figuras:

A, **B** e **C** são pontos colineares.

E, **F** e **G** não são colineares.

P, **Q** e **R** são três pontos coplanares.

X, **Y**, **Z** e **W** são pontos não coplanares.

Observações:

1ª) Dois pontos distintos são sempre colineares e sobre eles passa uma única reta. Dizemos então que *dois pontos distintos **A** e **B** determinam uma reta ($\overleftrightarrow{AB}$).*

2ª) Três pontos não colineares são sempre coplanares e sobre eles passa um único plano. Dizemos então que *três pontos não colineares **A**, **B** e **C** determinam um plano p(**A**, **B** e **C**).* Aqui está a explicação da atividade 1 da página 175.

178 Matemática

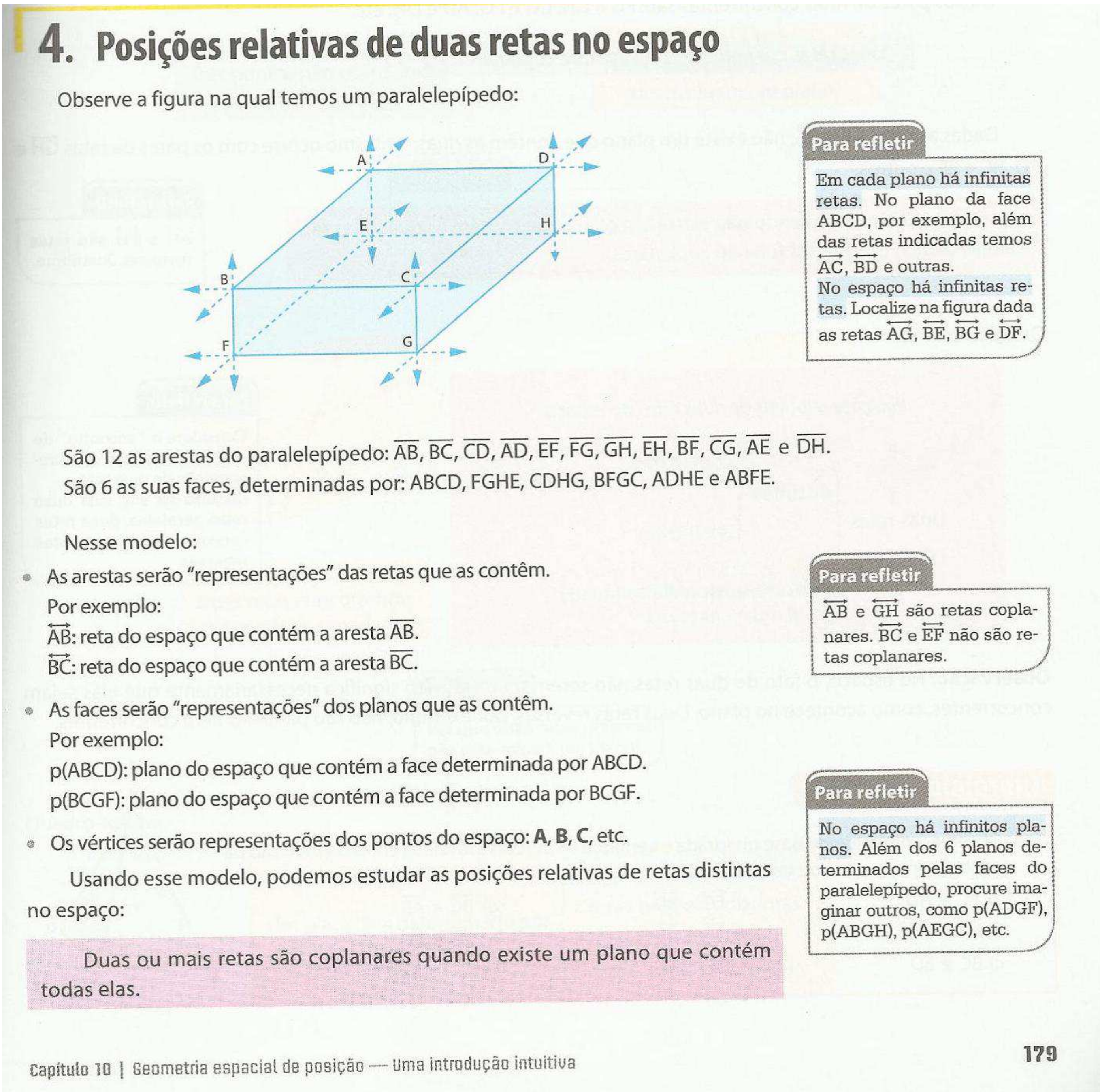
Figura 6.6: Posições Relativas de pontos no espaço

6.3.2 Análise da subseção *Posições Relativas de Duas Retas no Espaço* apresentada no livro 2

Observando a figura 6.7, percebemos que o autor inicia a subseção apresentando um paralelepípedo e seus respectivos elementos (arestas, faces e vértices) indicando a linguagem simbólica que esses elementos serão representados. A partir dessas informações é que o autor passa a estudar as possíveis posições relativas de retas no espaço.

Consideramos uma conduta vantajosa pois, o professor pode aproveitar o espaço físico, adotando a sala de aula como sendo o paralelepípedo em estudo onde, suas paredes, teto e piso serão as faces; o encontro de duas faces serão suas arestas e as intercessões de três faces serão os vértices desse paralelepípedo. Assim, será formado um modelo concreto de tudo que está exposto no livro didático e despertará um maior interesse por parte do aluno.

Nas caixas de texto intituladas, para refletir, expostas na figura 6.7, são apresentados três postulados destacados com um fundo azul conforme ficou pré estabelecido porém, a maneira como esses axiomas são expostos não é boa, pode levar o aluno a não dar a importância necessária e suficiente a tal afirmações. Como sugestão, essas afirmações deveriam aparecer sozinhas, em uma caixa de texto de fundo azul, como veem sendo apresentadas.



4. Posições relativas de duas retas no espaço

Observe a figura na qual temos um paralelepípedo:

Para refletir

Em cada plano há infinitas retas. No plano da face ABCD, por exemplo, além das retas indicadas temos $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e outras.
No espaço há infinitas retas. Localize na figura dada as retas $\overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{DF}$.

São 12 as arestas do paralelepípedo: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$.

São 6 as suas faces, determinadas por: ABCD, FGHE, CDHG, BFGC, ADHE e ABFE.

Nesse modelo:

- As arestas serão "representações" das retas que as contêm.
  Por exemplo:
  $\overleftrightarrow{AB}$: reta do espaço que contém a aresta $\overline{AB}$.
  $\overleftrightarrow{BC}$: reta do espaço que contém a aresta $\overline{BC}$.
- As faces serão "representações" dos planos que as contêm.
  Por exemplo:
  p(ABCD): plano do espaço que contém a face determinada por ABCD.
  p(BCGF): plano do espaço que contém a face determinada por BCGF.
- Os vértices serão representações dos pontos do espaço: **A**, **B**, **C**, etc.

Para refletir

$\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são retas coplanares. $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ não são retas coplanares.

Para refletir

No espaço há infinitos planos. Além dos 6 planos determinados pelas faces do paralelepípedo, procure imaginar outros, como p(ADGF), p(ABGH), p(AEGC), etc.

Usando esse modelo, podemos estudar as posições relativas de retas distintas no espaço:

Duas ou mais retas são coplanares quando existe um plano que contém todas elas.

Capítulo 10 | Geometria espacial de posição — Uma introdução intuitiva 179

Figura 6.7: Posições Relativas de duas retas no espaço

6.3.3 Análise da subseção *Determinação de um Plano* exposta no livro 2

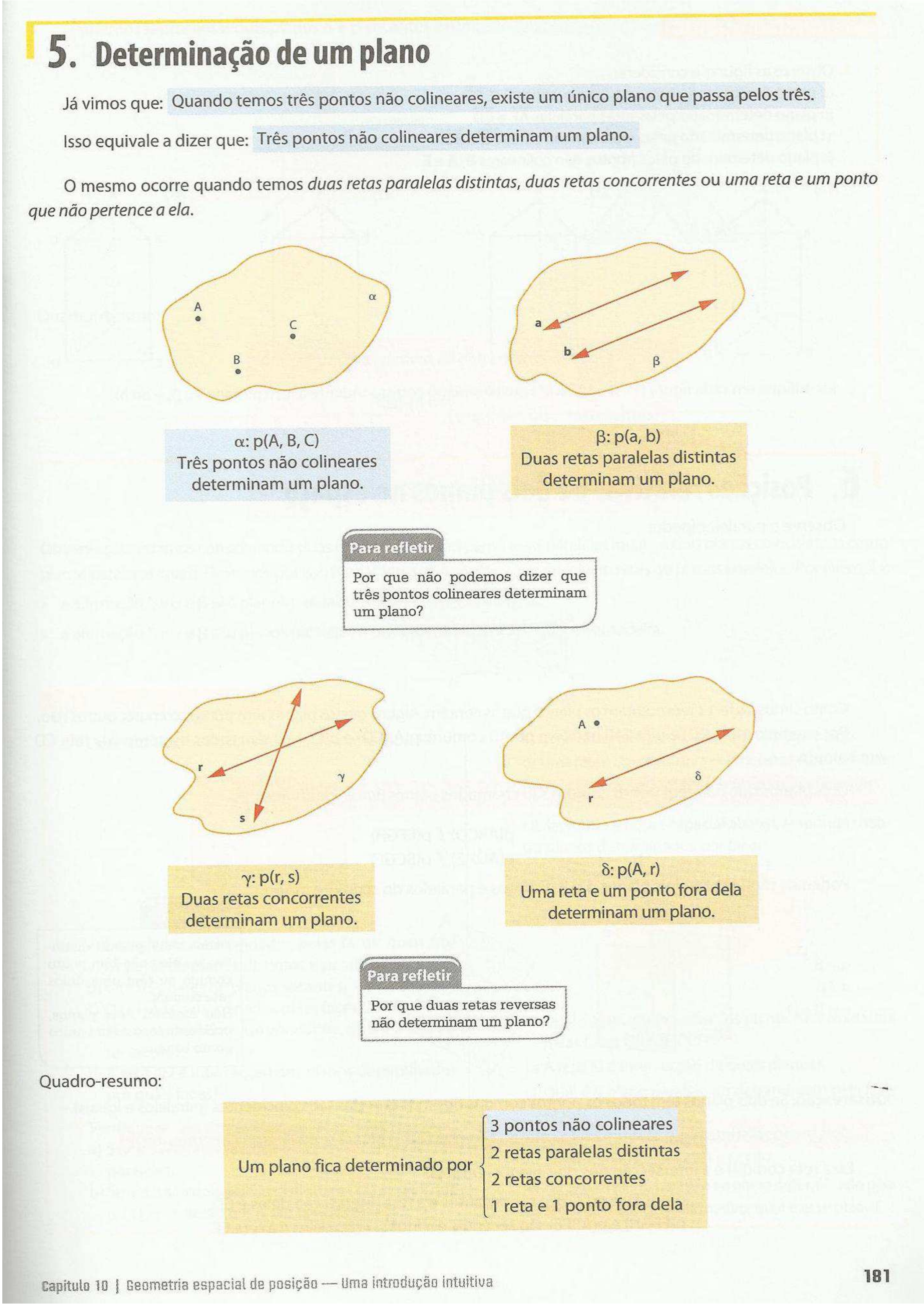
Observando a figura 6.8 percebemos que o autor cita um postulado, destacando-o em caixa de texto com fundo azul, conforme havia informado. Todavia, confirmamos nossa colocação a respeito das observações apresentadas na figura 6.6, que as informações destacadas em verde deveriam está num fundo azul pois, são axiomas.

Como o autor segue uma conduta de destaque, pré-estabelecida, para apresentar as definições, os axiomas e os teoremas, podemos ver nas figuras 6.6 e 6.8, que essa conduta foi violada pois, o mesmo enunciado é apresentado como sendo simples observações e posteriormente como postulado. Atitudes como essas podem confundir o entendimento do aluno dificultando suas habilidades na hora de aplicar o método axiomático.

Ainda na figura 6.8, são apresentados três teoremas, em caixa de texto com fundo laranja. Esses teoremas são bem ilustrados, por meio de figuras, facilitando a visualização e o entendimento do aluno. Porém, o autor omitiu o fato da unicidade dos planos, embora na Geometria o termo determinar signifique existir, há situações que é conveniente enfatizar a ideia da unicidade. Por exemplo: Duas retas concorrentes determinam um *único* plano.

Com as definições e os postulados já apresentados, seria interessante que o autor demonstrasse pelo menos um dos teoremas expostos pois, o mesmo afirma que os teoremas só são válidos mediante uma demonstração (Ver figura 6.5), entrando assim em contradição nas suas colocações.

É interessante que o professor esteja atento a essas situações. No caso de está utilizando um material didático como este, ora analisado, deverá dedicar um tempo necessário a demonstração de pelo menos algum(s) do(s) teorema(s) apresentado(s) no livro didático, sem esquecer que o aluno não precisa conhecer toda a formalidade do método axiomático mas, não deveria sair do ensino médio sem esse conhecimento.



5. Determinação de um plano

Já vimos que: Quando temos três pontos não colineares, existe um único plano que passa pelos três.

Isso equivale a dizer que: Três pontos não colineares determinam um plano.

O mesmo ocorre quando temos *duas retas paralelas distintas, duas retas concorrentes* ou *uma reta e um ponto que não pertence a ela.*

α: p(A, B, C)
Três pontos não colineares determinam um plano.

β: p(a, b)
Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

Para refletir

Por que não podemos dizer que três pontos colineares determinam um plano?

γ: p(r, s)
Duas retas concorrentes determinam um plano.

δ: p(A, r)
Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.

Para refletir

Por que duas retas reversas não determinam um plano?

Quadro-resumo:

Um plano fica determinado por
- 3 pontos não colineares
- 2 retas paralelas distintas
- 2 retas concorrentes
- 1 reta e 1 ponto fora dela

Capítulo 10 | Geometria espacial de posição — Uma introdução intuitiva 181

Figura 6.8: Determinação de um plano

Demonstraremos um dos teoremas apresentados na figura 6.8. Para facilitar nosso trabalho, enumeraremos os postulados a serem utilizados.

Postulados

P 6.1: Toda reta e todo plano possuem pontos pertencentes e não pertencentes a eles.

P 6.2: Três pontos não colineares determinam um plano

Teorema 6.1 *:Duas retas concorrentes determinam um* único *plano.*

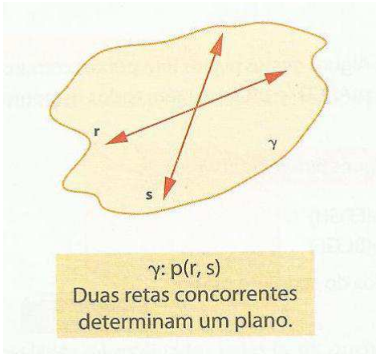


Figura 6.9: Teorema 6.1

Demonstração do Teorema 6.1

- *Hipótese(s)* - Duas retas são concorrentes
- *Tese* - Essas retas determinam um único plano

Por hipótese, consideremos duas retas concorrentes e as chamaremos de retas r e s.

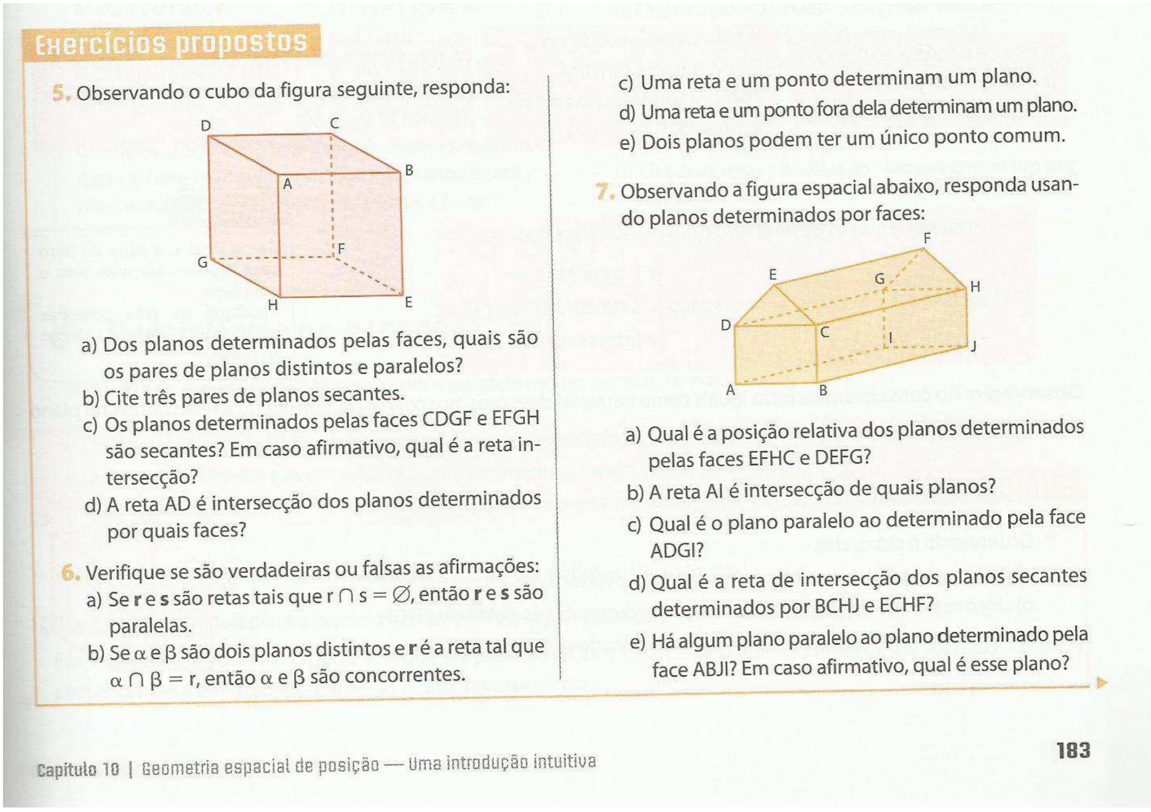
Por definição, duas retas concorrentes possuem um ponto em comum, seja P esse ponto, $\{P\} = r \bigcap s$. De acordo com o postulado 6.1, tomemos os pontos A e B distintos de P pertencentes às retas r e s respectivamente. Notemos que, A, B e P são pontos não colineares e, pelo postulado 6.2, esses pontos determinam um plano γ. Logo, as retas r e s determinam o plano γ.

Vamos mostrar que esse plano γ é único.

Suponha que exista outro plano ω determinados pelas retas r e s. Assim, os pontos A, B e P, anteriores, pertencem a ω. Daí, as retas r e s determinam o plano ω, donde concluímos que $\gamma = \omega$, portanto γ é único. $\square$

6.3.4 Análise de um dos *Exercícios Propostos* no livro 2

É fornecida uma lista de exercícios propostos, composta por quatro questões onde os alunos aplicarão as definições apresentadas na subseção ora analisada, conforme podemos ver nas figuras 6.10 e 6.11.



Exercícios propostos

5. Observando o cubo da figura seguinte, responda:

a) Dos planos determinados pelas faces, quais são os pares de planos distintos e paralelos?
b) Cite três pares de planos secantes.
c) Os planos determinados pelas faces CDGF e EFGH são secantes? Em caso afirmativo, qual é a reta intersecção?
d) A reta AD é intersecção dos planos determinados por quais faces?

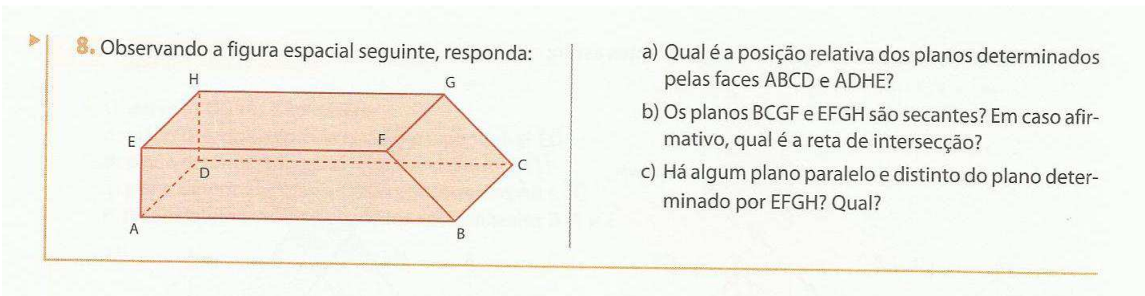
6. Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
a) Se **r** e **s** são retas tais que $r \cap s = \varnothing$, então **r** e **s** são paralelas.
b) Se α e β são dois planos distintos e **r** é a reta tal que $\alpha \cap \beta = r$, então α e β são concorrentes.
c) Uma reta e um ponto determinam um plano.
d) Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.
e) Dois planos podem ter um único ponto comum.

7. Observando a figura espacial abaixo, responda usando planos determinados por faces:

a) Qual é a posição relativa dos planos determinados pelas faces EFHC e DEFG?
b) A reta AI é intersecção de quais planos?
c) Qual é o plano paralelo ao determinado pela face ADGI?
d) Qual é a reta de intersecção dos planos secantes determinados por BCHJ e ECHF?
e) Há algum plano paralelo ao plano determinado pela face ABJI? Em caso afirmativo, qual é esse plano?

Capítulo 10 | Geometria espacial de posição — Uma introdução intuitiva 183

Figura 6.10: Exercícios Propostos



8. Observando a figura espacial seguinte, responda:

a) Qual é a posição relativa dos planos determinados pelas faces ABCD e ADHE?
b) Os planos BCGF e EFGH são secantes? Em caso afirmativo, qual é a reta de intersecção?
c) Há algum plano paralelo e distinto do plano determinado por EFGH? Qual?

Figura 6.11: Exercícios Propostos

A questão 6 exposta na figura 6.10 é uma atividade onde o aluno analisará a veracidade de algumas afirmações. Em questões como essas, pode ser mostrado ao aluno que para provar que uma sentença é falsa é suficiente fornecer um contra-exemplo. Vejamos a alternativa (a) da referida questão:

a) Se r e s são retas tais que $r \bigcap s = \emptyset$, então r e s são paralelas. (FALSA)

Contra-exemplo

Considera-se duas retas reversas r e s do espaço que obedecem a condição dada, $r \bigcap s = \emptyset$, porém sem serem paralelas.

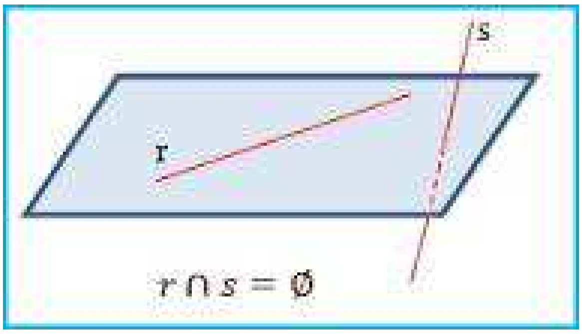


Figura 6.12: Contra-Exemplo

As questões de verdadeiro e falso, também podem ser exploradas a fim de que o aluno comece a trabalhar com a teoria axiomática pois, se a sentença for verdadeira é necessário demonstrá-la. A exemplo dessa prática, podemos citar a alternativa (b) da questão 6 exposta na figura 6.10 que pode ser facilmente demonstrada.

b) Se α e β são dois planos distintos e r é a reta tal que $\alpha \bigcap \beta = r$, então α e β são concorrentes. (VERDADEIRO)

Justificativa da afirmação exposta

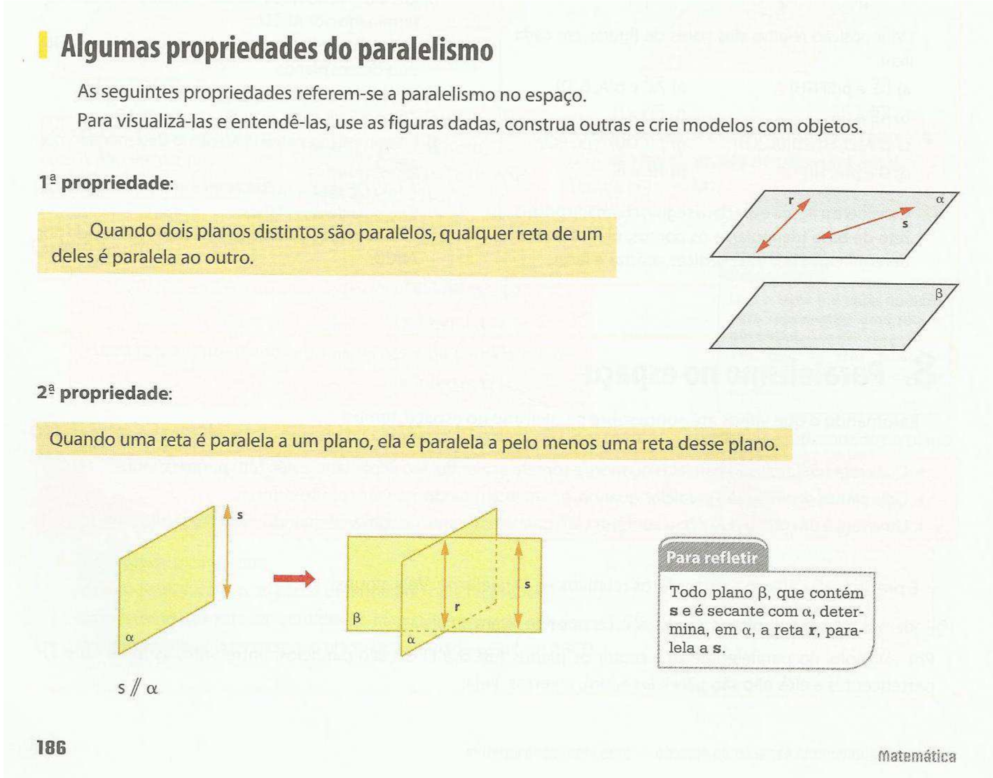
- *Hipótese(s)* - São dados dois planos e uma reta, tais que a interseção dos planos é a reta.
- *Tese* - Os planos são concorrentes.

Consideremos, por hipótese, os planos α, β e a reta r tais que $\alpha \bigcap \beta = r$.

Por definição, dois planos distintos que têm uma reta em comum são chamados de planos concorrentes. Logo, os planos α e β são concorrentes. $\square$

6.3.5 Análise da subseção *Paralelismo no espaço* apresentada no livro 2

No decorrer da subseção do livro analisado, o autor cita cinco propriedades envolvendo paralelismo, conforme podemos ver nas figuras 6.13 e 6.14 . Essas propriedades são apresentadas em caixas de texto destacadas num fundo laranja e, assim, são consideradas teoremas. Isto é, só serão válidas mediante demonstrações.



Algumas propriedades do paralelismo

As seguintes propriedades referem-se a paralelismo no espaço.

Para visualizá-las e entendê-las, use as figuras dadas, construa outras e crie modelos com objetos.

1ª propriedade:

Quando dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.

2ª propriedade:

Quando uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a pelo menos uma reta desse plano.

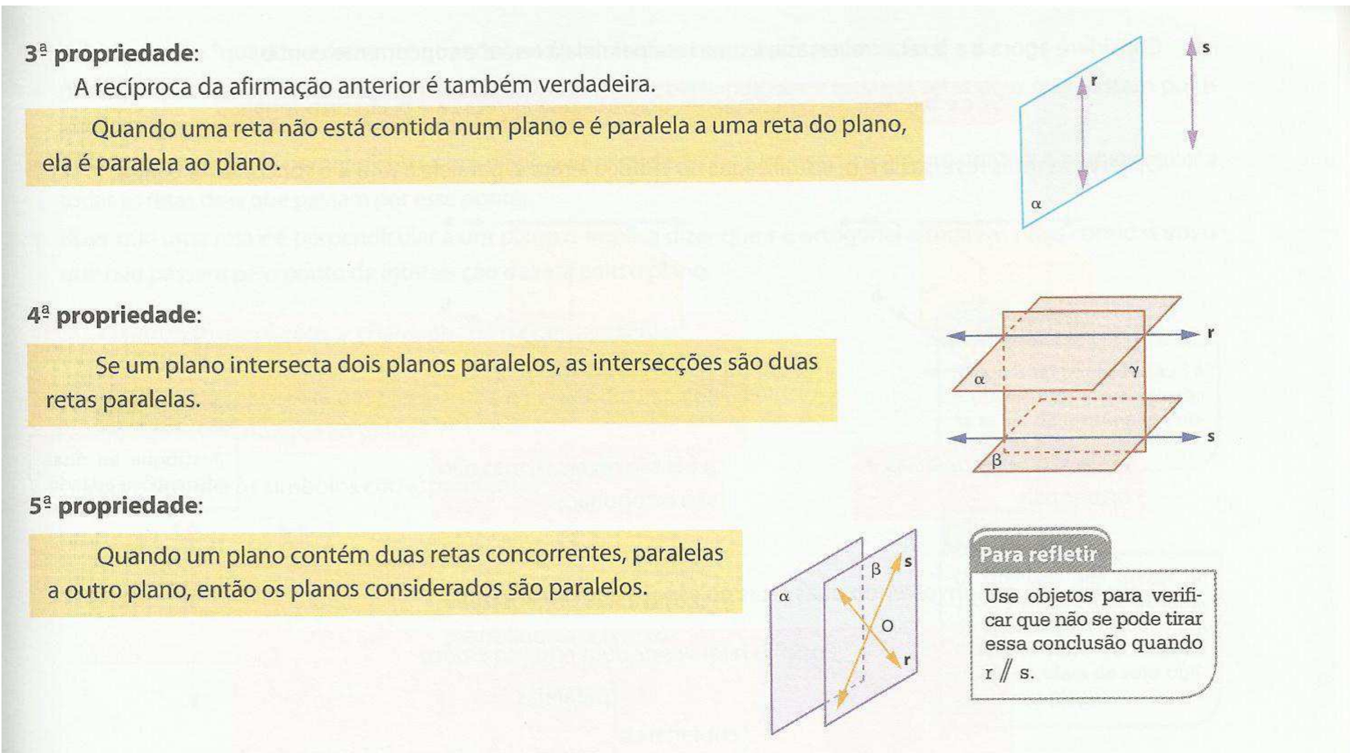
$s \parallel \alpha$

Para refletir

Todo plano β, que contém **s** e é secante com α, determina, em α, a reta **r**, paralela a **s**.

186 Matemática

Figura 6.13: Propriedades do paralelismo



3ª propriedade:

A recíproca da afirmação anterior é também verdadeira.

Quando uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, ela é paralela ao plano.

4ª propriedade:

Se um plano intersecta dois planos paralelos, as intersecções são duas retas paralelas.

5ª propriedade:

Quando um plano contém duas retas concorrentes, paralelas a outro plano, então os planos considerados são paralelos.

Para refletir

Use objetos para verificar que não se pode tirar essa conclusão quando $r \parallel s$.

Figura 6.14: Propriedades do paralelismo

As propriedades de paralelismo citadas acima estão bem redigidas e representadas. Contudo, o autor em nenhum momento mencionou que as mesmas podem ser provadas nem tão pouco demonstrou nenhuma delas. Com o conteúdo exposto até o momento, seria interessante e conveniente usar as definições e postulados apresentados e mostrar algumas demonstrações deixando o aluno inteirado com o sistema dedutivo ou método axiomático.

Mediante nossa sugestão, demonstraremos a seguir as seguintes propriedades:

1^a ***Propriedade de paralelismo*** : Quando dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.

Demonstração da 1^a Propriedade de paralelismo

- *Hipótese* - Dois planos são distintos e paralelos
- *Tese* - Qualquer reta de um desses planos é paralela ao outro plano.

Por hipótese, consideremos os planos α e β distintos e paralelos. Por definição, dois planos paralelos não se intercectam logo, $\alpha \bigcap \beta = \emptyset$. Seja r uma reta contida no plano α ($r \subset \alpha$), então do fato de $r \bigcap \beta = \emptyset$ segue-se que a reta r é paralela ao plano β. $\square$

2^a ***Propriedade de paralelismo*** : Quando uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a pelo menos uma reta desse plano.

Demonstração da 2^a Propriedade de paralelismo

- *Hipótese* - Uma reta é paralela a um plano.
- *Tese* - Essa reta é paralela a pelo menos uma reta desse plano.

Consideremos, por hipótese, uma reta r paralela a um plano α. Por definição, a intersecção de r e α é vazia. Seja β um plano que contém a reta r e intercepta o plano α, tal que $\alpha \bigcap \beta = s$, onde s é outra reta.

Note que, as retas r e s são coplanares, pois ambas estão contidas no plano β, e não possuem ponto em comum, pois $r \bigcap \alpha = \emptyset$ e $s \subset \alpha$. Com isso, concluímos que r é paralela a s ($r \parallel s$). $\square$

6.3.6 Análise da subseção *Perpendicularismo no Espaço* apresentada no livro 2

O livro 2 apresentada cinco propriedades envolvendo o perpendicularismo entre reta e plano (Ver figuras 6.15 e 6.16). Destacadas em caixas de texto com fundo laranja, essas propriedades são teoremas e necessitam ser demonstradas porém, mais uma vez, o autor não demonstra nenhuma delas e desperdiça a oportunidade de expor ao aluno a razão de apresentar tantas definições e postulados e assim, aplicar o método axiomático.

É apresentada ao leitor, uma demonstração para a 1ª propriedade, sendo que essa demonstração é feita por construção, conforme figura 6.15. Essa maneira de demonstrar colabora na visualização do resultado porém, no ensino médio o aluno já deve ser estimulado a aplicar técnicas de demonstração utilizando o sistema dedutivo.

1^a ***Propriedade de perpendicularismo:***

Para que uma reta seja perpendicular a um plano, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes desse plano no ponto de intersecção das retas.

As expressões, *necessário e suficiente* e, *se e somente se* são equivalentes, o que implica dizer que devemos analisar a "ida" e a "volta" do teorema (propriedade).

"Ida" da propriedade

Se uma reta é perpendicular a um plano então, essa reta é perpendicular a duas retas concorrentes desse plano no ponto de intersecção das retas.

- *Hipótese* - Uma reta e um plano são perpendiculares
- *Tese* - A reta é perpendicular a duas retas concorrentes desse plano no ponto de intersecção

Por hipótese, consideremos uma reta r perpendicular a um plano α. No decorrer do livro 2 o autor define que uma reta que intercepta um plano é perpendicular a ele quando e somente quando ela é perpendicular a todas as retas desse plano que passa pelo ponto de interseção. Logo, em particular, a reta r é perpendicular a duas retas concorrentes s e t, contidas no plano α. $\square$

"Volta" da propriedade

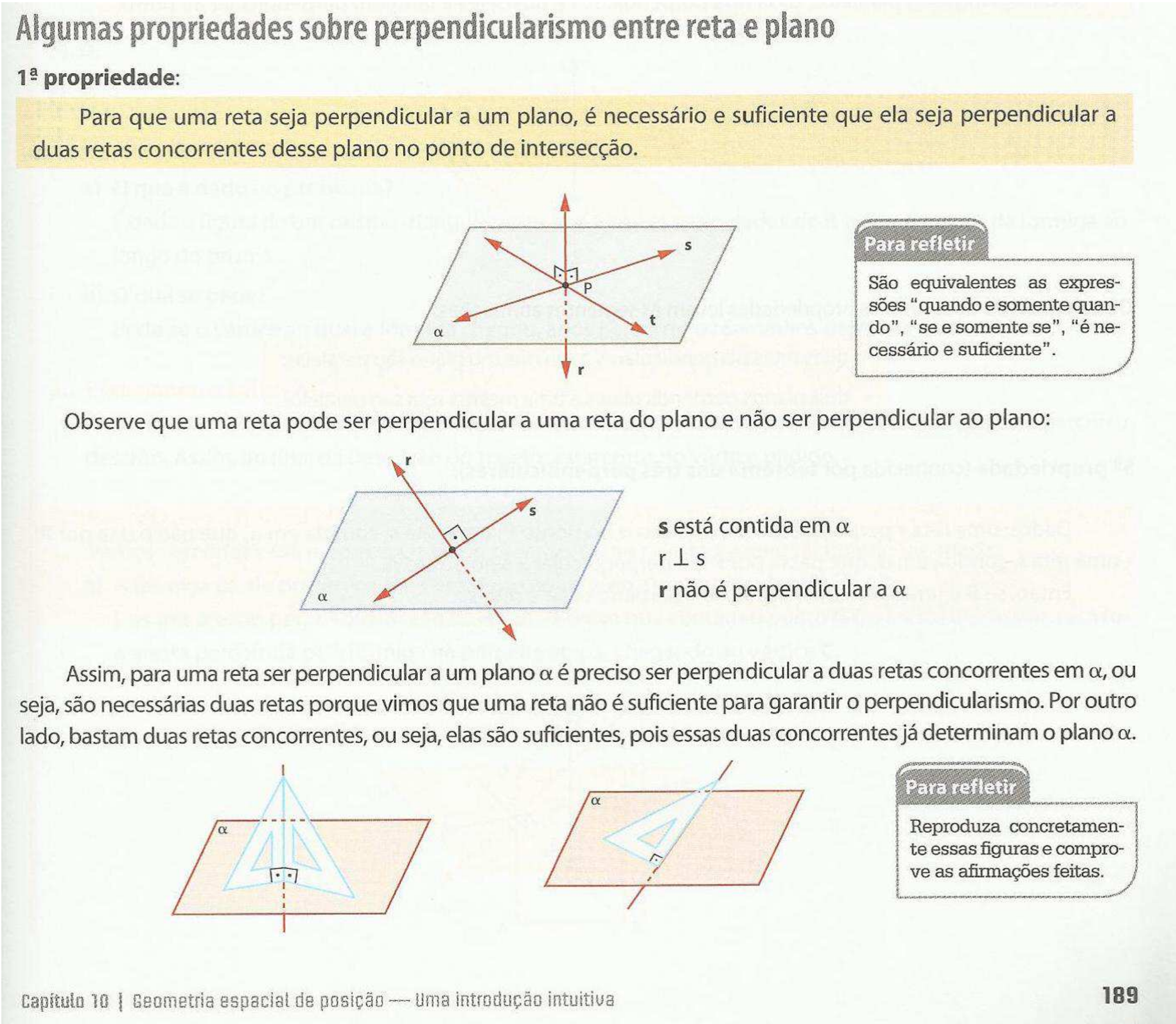
Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano no ponto de intersecção dessas retas então essa reta é perpendicular ao plano

- *Hipótese* - Uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano no ponto de interseção dessas retas.
- *Tese* - Essa reta é perpendicular ao plano

Considere uma reta r perpendicular a duas retas concorrentes s e t contidas no plano α com $s \bigcap t = \{P\}$.

Segundo a definição do livro 2, devemos provar que r é perpendicular a qualquer reta $u \subset \alpha$, que passa pelo ponto P.

Suponha que a reta u não seja perpendicular a reta r, como u, s e t estão no plano α, teríamos que s ou t não seria perpendicular a r. Absurdo. Assim, a reta r é perpendicular a reta u e ao plano α. $\square$



Algumas propriedades sobre perpendicularismo entre reta e plano

1ª propriedade:

Para que uma reta seja perpendicular a um plano, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes desse plano no ponto de intersecção.

Para refletir

São equivalentes as expressões "quando e somente quando", "se e somente se", "é necessário e suficiente".

Observe que uma reta pode ser perpendicular a uma reta do plano e não ser perpendicular ao plano:

s está contida em α

$r \perp s$

r não é perpendicular a α

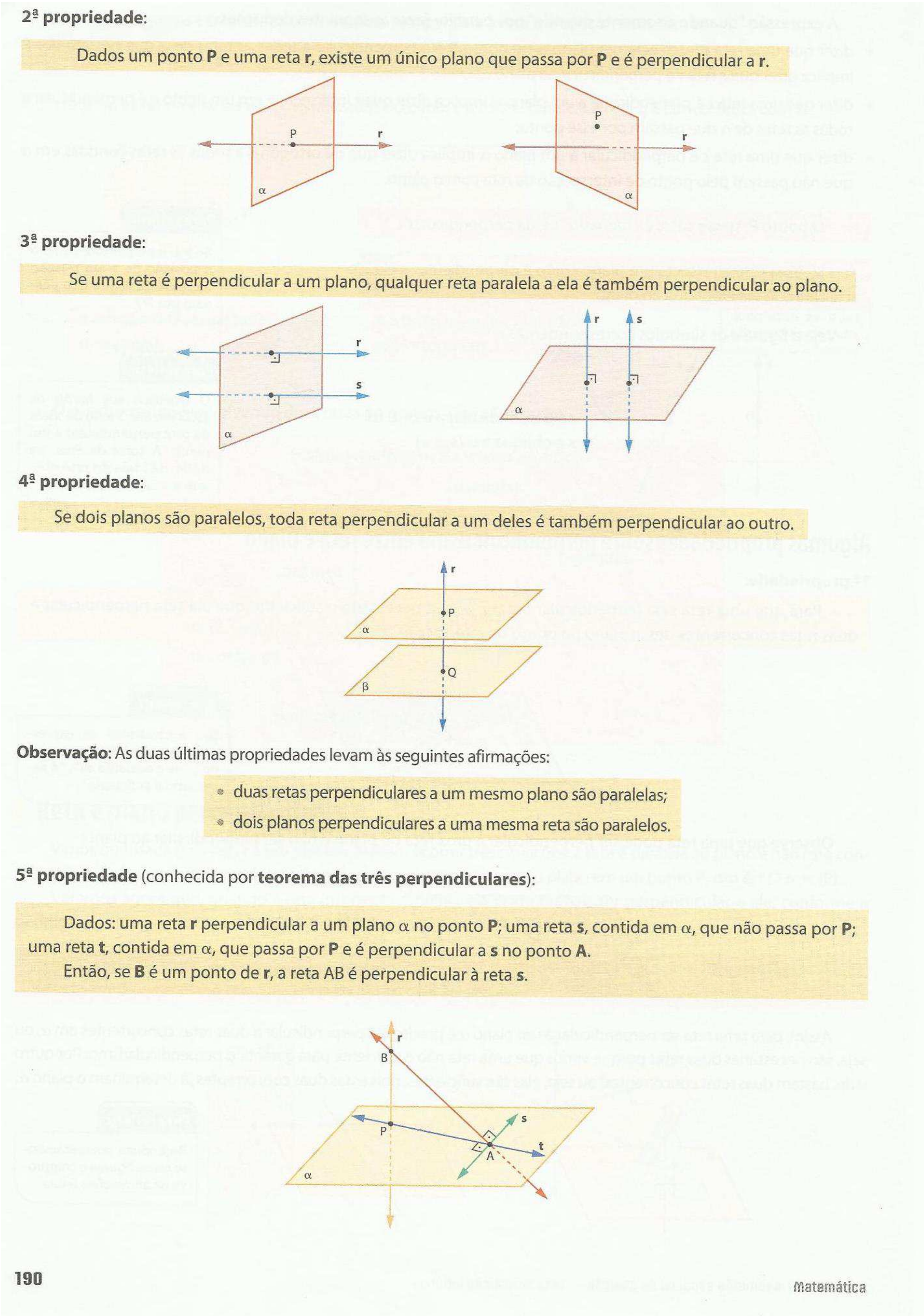
Assim, para uma reta ser perpendicular a um plano α é preciso ser perpendicular a duas retas concorrentes em α, ou seja, são necessárias duas retas porque vimos que uma reta não é suficiente para garantir o perpendicularismo. Por outro lado, bastam duas retas concorrentes, ou seja, elas são suficientes, pois essas duas concorrentes já determinam o plano α.

Para refletir

Reproduza concretamente essas figuras e comprove as afirmações feitas.

Capítulo 10 | Geometria espacial de posição — Uma introdução intuitiva 189

Figura 6.15: Propriedades de perpendicularismo entre reta e plano



2ª propriedade:

Dados um ponto **P** e uma reta **r**, existe um único plano que passa por **P** e é perpendicular a **r**.

3ª propriedade:

Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer reta paralela a ela é também perpendicular ao plano.

4ª propriedade:

Se dois planos são paralelos, toda reta perpendicular a um deles é também perpendicular ao outro.

Observação: As duas últimas propriedades levam às seguintes afirmações:

- duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas;
- dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.

5ª propriedade (conhecida por **teorema das três perpendiculares**):

Dados: uma reta **r** perpendicular a um plano α no ponto **P**; uma reta **s**, contida em α, que não passa por **P**; uma reta **t**, contida em α, que passa por **P** e é perpendicular a **s** no ponto **A**.

Então, se **B** é um ponto de **r**, a reta AB é perpendicular à reta **s**.

190 Matemática

Figura 6.16: Propriedades de perpendicularismo entre reta e plano

6.4 Análise da seção *O Método Dedutivo: Algumas Demonstrações* do livro 2

Após apresentar toda teoria introdutória ao estudo da Geometria espacial, o autor faz uma breve explanação do que seja o método dedutivo, também conhecido como método axiomático. Todas as considerações feitas nessa seção, podem ser observadas nas figuras 6.17 e 6.18.

Ao iniciar a análise do livro 2, percebemos que o autor não dedica a importância necessária ao método axiomático. Nesse momento, fortalecemos nossa opinião ao observarmos o título da seção, quando o autor informa, de maneira desinteressada, que se trata de uma "*leitura optativa*", desmotivando o leitor a conhecer o conteúdo apresentado no texto.

Na nossa concepção, essa maneira de mostrar o método dedutivo não é muito interessante pois, pelo fato de ser exposta no final do capítulo, aparece como se não tivesse muita importância no estudo ora realizado.

Na caixa de texto, intitulada "Para Refletir", o autor informa como funciona o método dedutivo. Porém, não informou que, além dos conceitos primitivos e dos axiomas utilizados nas demonstrações dos teoremas, também são utilizadas definições e(ou) outros teoremas que já tenham sido demonstrados, consolidando assim a aplicação da teoria axiomática.

São apresentados três postulados que serão utilizados nas demonstrações feitas pelo autor. Ora, se são postulados por que não aparecer destacados em uma caixa de texto de fundo azul? Foi o que ficou acordado no início do livro 2.

Ainda em relação aos postulados mencionados, percebemos que os postulados 1 e 2, apresentados na figura 6.17, são citados como sendo simples observações (Ver figura 6.6), confundindo assim o verdadeiro sentido dessas sentenças. Afinal, são observações ou postulados?

São demonstrados cinco teoremas, nessas demonstrações o autor avisa que serão utilizados os postulados citados anteriormente. Esses três postulados já haviam sido apresentados e, não foi feita nenhuma referência a essa observação, é como se toda teoria trabalhada no decorrer do capítulo analisado não houvesse nenhuma serventia na aplicação do sistema dedutivo.

Na demonstração dos teoremas, não é informado ao aluno qual(is) seria(m) sua(s) hipótese(s) e sua(s) tese(s) e, deveria ter sido feita alguma referência às definições apresentadas no decorrer do livro 2.

A seguir, teceremos alguns comentários sobre a demonstração do teorema 1, feita pelo autor e, para não fugirmos da forma como os teoremas são apresentados, obedecermos a mesma numeração sugerida.

Teorema 1**:** *Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.*

A forma como o autor demonstra o teorema 1

Ao iniciar a demonstração, nos parágrafos 1 e 2, o autor sugere que sejam considerados pontos pertencentes e não pertencentes a uma reta, isto é, utiliza postulados que deveriam ter sido acrescentados aos três já citados no início da seção e, não foram. Ou seja:

Postulado 4: Toda reta é um conjunto infinitos de pontos.

Postulado 5: Fora de uma reta há infinitos pontos.

Posteriormente, no parágrafo 3, é usada a definição de pontos colineares sem ser feita nenhuma referência a ela. Onde na realidade, na figura 6.6, podemos perceber que essa definição foi citada no decorrer do livro 2 e, nesse momento, era uma boa oportunidade de mostrar ao aluno onde poderia ser utilizada.

Ainda no parágrafo 3, é utilizado o termo, "*por hipótese*". Entretanto, em nenhum momento foi explicado ao aluno, o que seria a hipótese de um teorema. É interessante que não só essa(s) hipótese(s) como também a tese dos teoremas, sejam identificadas antes de iniciarmos a demonstração assim, já se percebe o que é disposto para ser utilizado e, o que se quer demonstrar.

Observamos que os postulados 1, 2 e 3, apresentados na figura 6.17, foram bem utilizados nos parágrafos 3 e 4 da demonstração e, a maneira como eles são citados, convencem o aluno de que, o método axiomático foi utilizado, mesmo que, segundo nossa opinião, a redação da demonstração tenha deixado a desejar.

Nossa demonstração do teorema 1

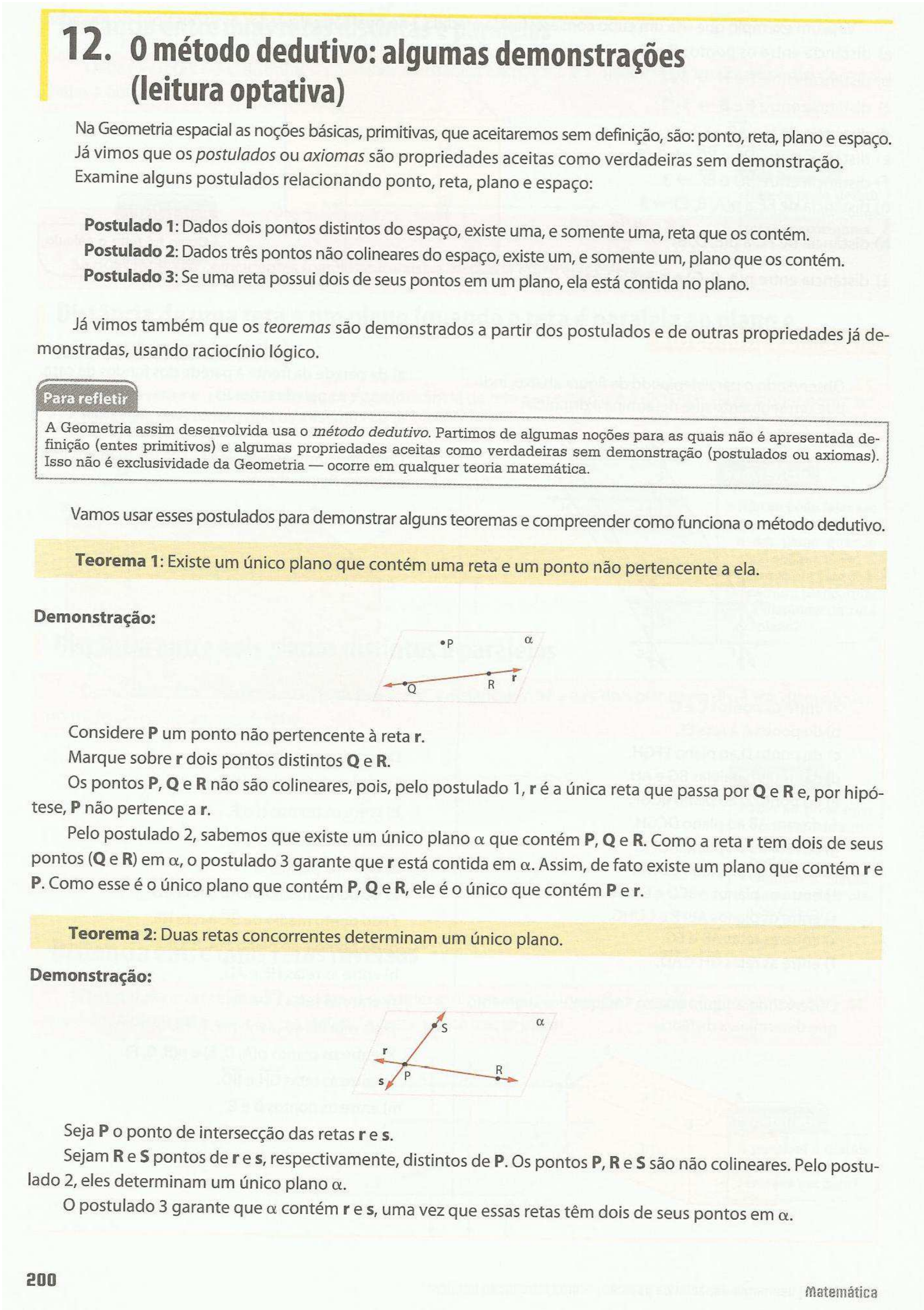
Para demonstrarmos o teorema 1, utilizaremos tanto os postulados 1, 2 e 3 apresentados pelo autor (Figura 6.17), como os que citamos 4 e 5, e as definições expostas na figura 6.6.

- *Hipótese* - Um ponto não pertencente a uma reta
- *Tese* - Existe um único plano que contém esse ponto e essa reta

Consideremos, por hipótese, um ponto P e uma reta r, tal que $P \notin r$ (Pelo postulado 5).

De acordo com o Postulado 4 acima, consideremos os pontos distintos Q e R pertencentes a reta r. Como P não pertence à reta r, temos por definição (Figura 6.6) que, os pontos P, Q e R não são colineares. Logo, pelo postulado 2, temos que existe um único plano α que contém os pontos P, Q e R.

Note que, dois pontos da reta r pertencem ao plano α assim, pelo Postulado 3, podemos garantir que a reta r está contida no plano α que por sua vez contém o ponto P. Como α é o único plano que contém os pontos P, Q e R também é o único plano que contém o ponto P e a reta r. $\square$



12. O método dedutivo: algumas demonstrações (leitura optativa)

Na Geometria espacial as noções básicas, primitivas, que aceitaremos sem definição, são: ponto, reta, plano e espaço.
Já vimos que os *postulados* ou *axiomas* são propriedades aceitas como verdadeiras sem demonstração.
Examine alguns postulados relacionando ponto, reta, plano e espaço:

Postulado 1: Dados dois pontos distintos do espaço, existe uma, e somente uma, reta que os contém.
Postulado 2: Dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém.
Postulado 3: Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano.

Já vimos também que os *teoremas* são demonstrados a partir dos postulados e de outras propriedades já demonstradas, usando raciocínio lógico.

Para refletir

A Geometria assim desenvolvida usa o *método dedutivo*. Partimos de algumas noções para as quais não é apresentada definição (entes primitivos) e algumas propriedades aceitas como verdadeiras sem demonstração (postulados ou axiomas). Isso não é exclusividade da Geometria — ocorre em qualquer teoria matemática.

Vamos usar esses postulados para demonstrar alguns teoremas e compreender como funciona o método dedutivo.

Teorema 1: Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.

Demonstração:

Considere **P** um ponto não pertencente à reta **r**.
Marque sobre **r** dois pontos distintos **Q** e **R**.
Os pontos **P**, **Q** e **R** não são colineares, pois, pelo postulado 1, **r** é a única reta que passa por **Q** e **R** e, por hipótese, **P** não pertence a **r**.
Pelo postulado 2, sabemos que existe um único plano α que contém **P**, **Q** e **R**. Como a reta **r** tem dois de seus pontos (**Q** e **R**) em α, o postulado 3 garante que **r** está contida em α. Assim, de fato existe um plano que contém **r** e **P**. Como esse é o único plano que contém **P**, **Q** e **R**, ele é o único que contém **P** e **r**.

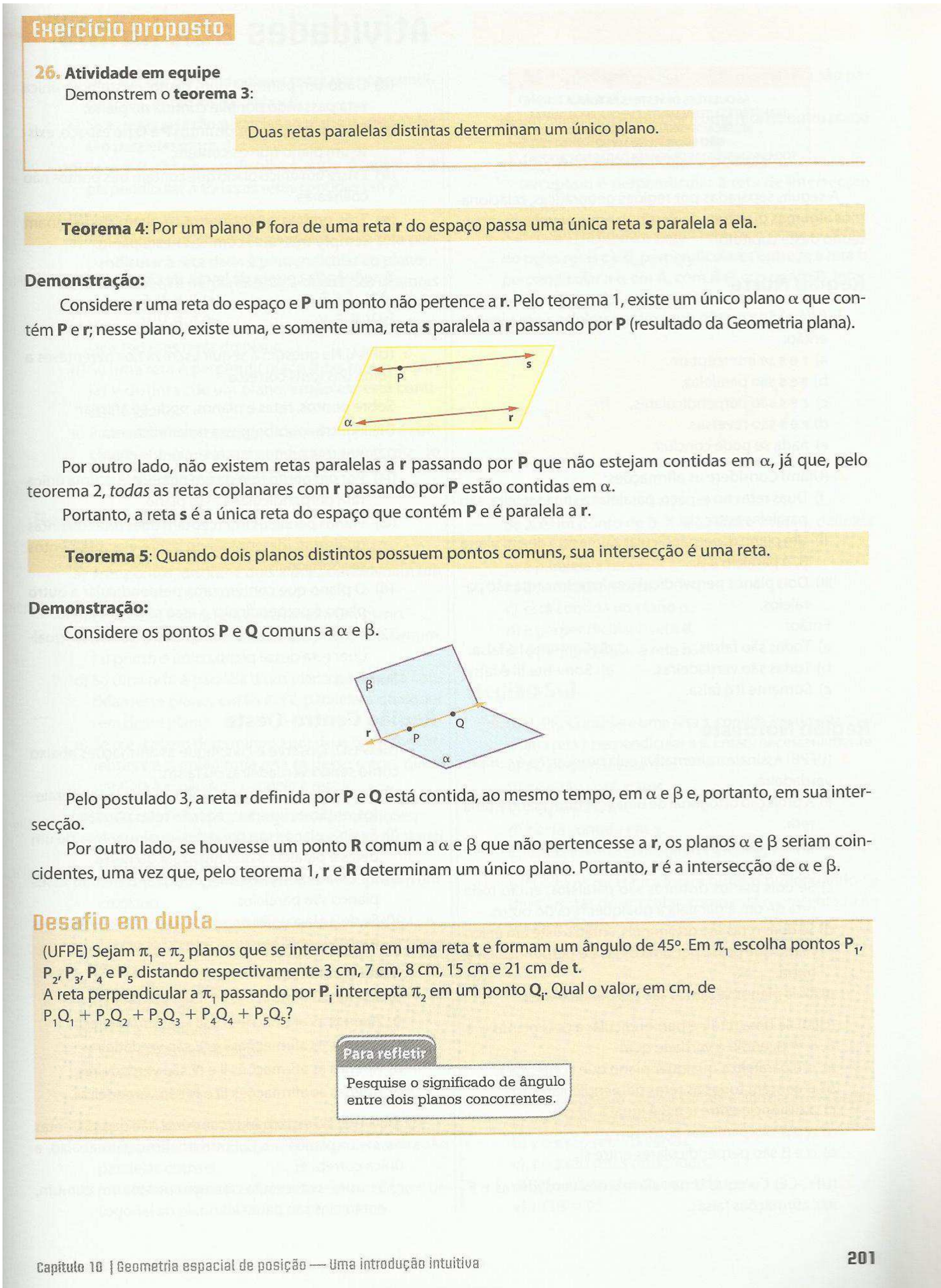
Teorema 2: Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Demonstração:

Seja **P** o ponto de intersecção das retas **r** e **s**.
Sejam **R** e **S** pontos de **r** e **s**, respectivamente, distintos de **P**. Os pontos **P**, **R** e **S** são não colineares. Pelo postulado 2, eles determinam um único plano α.
O postulado 3 garante que α contém **r** e **s**, uma vez que essas retas têm dois de seus pontos em α.

200 Matemática

Figura 6.17: Método dedutivo



Exercício proposto

26. Atividade em equipe

Demonstrem o **teorema 3**:

Duas retas paralelas distintas determinam um único plano.

Teorema 4: Por um plano **P** fora de uma reta **r** do espaço passa uma única reta **s** paralela a ela.

Demonstração:

Considere **r** uma reta do espaço e **P** um ponto não pertence a **r**. Pelo teorema 1, existe um único plano α que contém **P** e **r**; nesse plano, existe uma, e somente uma, reta **s** paralela a **r** passando por **P** (resultado da Geometria plana).

Por outro lado, não existem retas paralelas a **r** passando por **P** que não estejam contidas em α, já que, pelo teorema 2, *todas* as retas coplanares com **r** passando por **P** estão contidas em α.

Portanto, a reta **s** é a única reta do espaço que contém **P** e é paralela a **r**.

Teorema 5: Quando dois planos distintos possuem pontos comuns, sua intersecção é uma reta.

Demonstração:

Considere os pontos **P** e **Q** comuns a α e β.

Pelo postulado 3, a reta **r** definida por **P** e **Q** está contida, ao mesmo tempo, em α e β e, portanto, em sua intersecção.

Por outro lado, se houvesse um ponto **R** comum a α e β que não pertencesse a **r**, os planos α e β seriam coincidentes, uma vez que, pelo teorema 1, **r** e **R** determinam um único plano. Portanto, **r** é a intersecção de α e β.

Desafio em dupla

(UFPE) Sejam π_1 e π_2 planos que se interceptam em uma reta **t** e formam um ângulo de 45°. Em π_1 escolha pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 distando respectivamente 3 cm, 7 cm, 8 cm, 15 cm e 21 cm de **t**.

A reta perpendicular a π_1 passando por P_i intercepta π_2 em um ponto Q_i. Qual o valor, em cm, de $P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 + P_4Q_4 + P_5Q_5$?

Para refletir

Pesquise o significado de ângulo entre dois planos concorrentes.

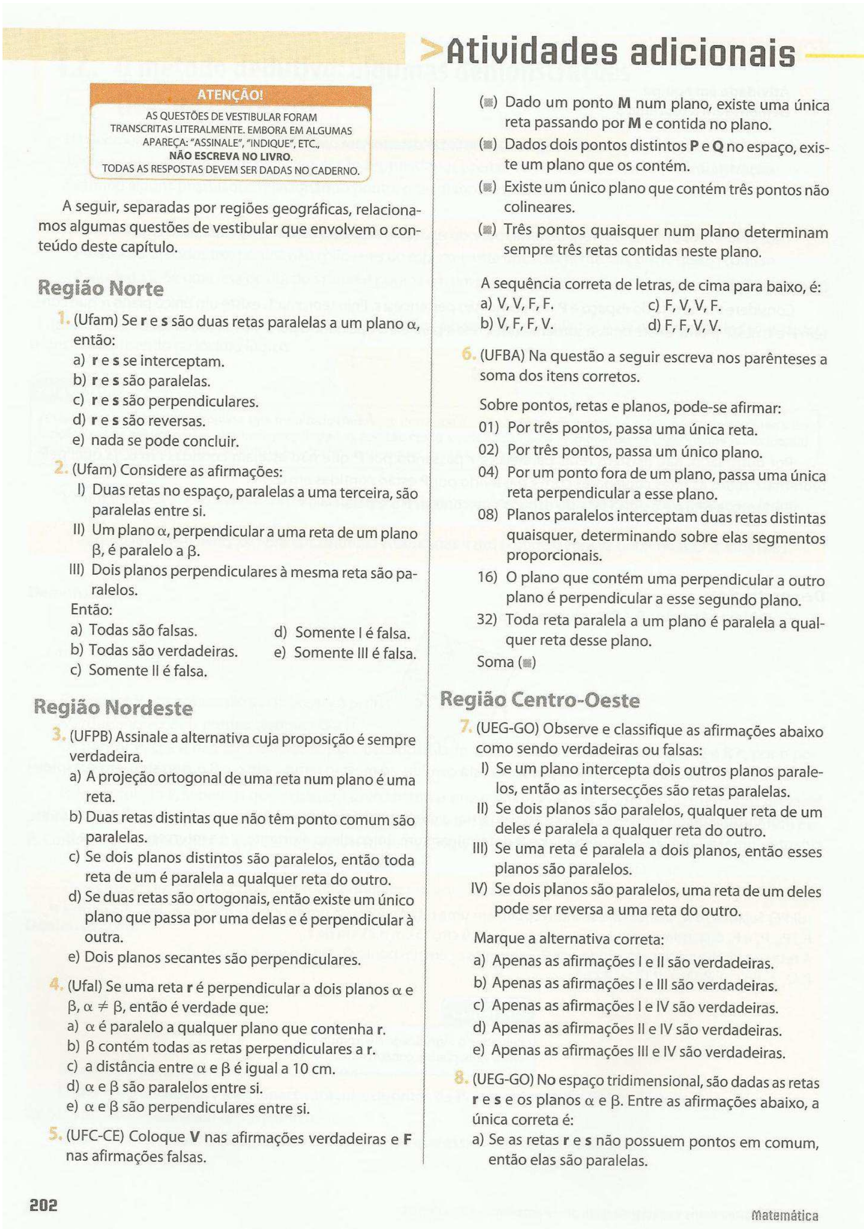
Capítulo 10 | Geometria espacial de posição — Uma introdução intuitiva 201

Figura 6.18: Método dedutivo

Enfim, o método axiomático foi apresentado de forma desvinculada, é como se toda teoria apresentada no livro 2 não fosse necessária e não tivesse importância na aplicação do sistema dedutivo.

6.5 Análise da seção *Atividades Adicionais* apresentada no livro 2

No final do capítulo é apresentada uma lista de exercícios, intitulada *atividades adicionais*, a qual relaciona questões de vestibulares divididas por região (Norte, nordeste, centro-oeste ...), conforme podemos ver nas figuras 6.19 e 6.20. Essa é uma atitude considerada vantajosa pois, prepara o aluno para o tipo de questões que irá se deparar nos processos seletivos que irá se submeter. Por esse motivo, é interessante que esse tipo de questão seja trabalhada, não só no final do capítulo e sim, durante todo o estudo e, essa atitude não foi executada no decorrer do livro 2.



>Atividades adicionais

ATENÇÃO!
AS QUESTÕES DE VESTIBULAR FORAM TRANSCRITAS LITERALMENTE. EMBORA EM ALGUMAS APAREÇA: "ASSINALE", "INDIQUE", ETC., **NÃO ESCREVA NO LIVRO.** TODAS AS RESPOSTAS DEVEM SER DADAS NO CADERNO.

A seguir, separadas por regiões geográficas, relacionamos algumas questões de vestibular que envolvem o conteúdo deste capítulo.

Região Norte

1. (Ufam) Se **r** e **s** são duas retas paralelas a um plano α, então:
   a) **r** e **s** se interceptam.
   b) **r** e **s** são paralelas.
   c) **r** e **s** são perpendiculares.
   d) **r** e **s** são reversas.
   e) nada se pode concluir.

2. (Ufam) Considere as afirmações:
   I) Duas retas no espaço, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si.
   II) Um plano α, perpendicular a uma reta de um plano β, é paralelo a β.
   III) Dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos.
   Então:
   a) Todas são falsas.
   b) Todas são verdadeiras.
   c) Somente II é falsa.
   d) Somente I é falsa.
   e) Somente III é falsa.

Região Nordeste

3. (UFPB) Assinale a alternativa cuja proposição é sempre verdadeira.
   a) A projeção ortogonal de uma reta num plano é uma reta.
   b) Duas retas distintas que não têm ponto comum são paralelas.
   c) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um é paralela a qualquer reta do outro.
   d) Se duas retas são ortogonais, então existe um único plano que passa por uma delas e é perpendicular à outra.
   e) Dois planos secantes são perpendiculares.

4. (Ufal) Se uma reta **r** é perpendicular a dois planos α e β, α ≠ β, então é verdade que:
   a) α é paralelo a qualquer plano que contenha **r**.
   b) β contém todas as retas perpendiculares a **r**.
   c) a distância entre α e β é igual a 10 cm.
   d) α e β são paralelos entre si.
   e) α e β são perpendiculares entre si.

5. (UFC-CE) Coloque **V** nas afirmações verdadeiras e **F** nas afirmações falsas.
   ( ) Dado um ponto **M** num plano, existe uma única reta passando por **M** e contida no plano.
   ( ) Dados dois pontos distintos **P** e **Q** no espaço, existe um plano que os contém.
   ( ) Existe um único plano que contém três pontos não colineares.
   ( ) Três pontos quaisquer num plano determinam sempre três retas contidas neste plano.
   A sequência correta de letras, de cima para baixo, é:
   a) V, V, F, F.
   b) V, F, F, V.
   c) F, V, V, F.
   d) F, F, V, V.

6. (UFBA) Na questão a seguir escreva nos parênteses a soma dos itens corretos.
   Sobre pontos, retas e planos, pode-se afirmar:
   01) Por três pontos, passa uma única reta.
   02) Por três pontos, passa um único plano.
   04) Por um ponto fora de um plano, passa uma única reta perpendicular a esse plano.
   08) Planos paralelos interceptam duas retas distintas quaisquer, determinando sobre elas segmentos proporcionais.
   16) O plano que contém uma perpendicular a outro plano é perpendicular a esse segundo plano.
   32) Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.
   Soma ( )

Região Centro-Oeste

7. (UEG-GO) Observe e classifique as afirmações abaixo como sendo verdadeiras ou falsas:
   I) Se um plano intercepta dois outros planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.
   II) Se dois planos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
   III) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
   IV) Se dois planos são paralelos, uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro.
   Marque a alternativa correta:
   a) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
   b) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
   c) Apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.
   d) Apenas as afirmações II e IV são verdadeiras.
   e) Apenas as afirmações III e IV são verdadeiras.

8. (UEG-GO) No espaço tridimensional, são dadas as retas **r** e **s** e os planos α e β. Entre as afirmações abaixo, a única correta é:
   a) Se as retas **r** e **s** não possuem pontos em comum, então elas são paralelas.

202 Matemática

Figura 6.19: Atividades Adicionais

b) Se α e β são perpendiculares entre si e **r** perpendicular a α, então **r** é paralela a β.
c) Se as retas **r** e **s** são paralelas ao plano α, então elas são paralelas entre si.
d) Se α e β são perpendiculares entre si, então α é perpendicular a todas as retas contidas em β.

9. (UEMS) Assinale a afirmação correta.
a) Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.
b) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
c) Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas do plano.
d) Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas e distintas de um plano, então ela está contida no plano.
e) Para uma reta ser perpendicular a um plano é suficiente que ela seja perpendicular a uma reta do plano que passa por seu traço.

Região Sudeste

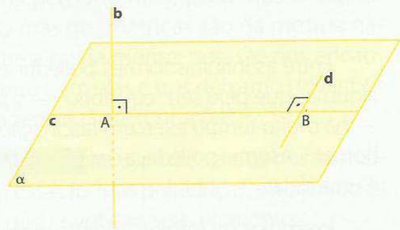
10. (ITA-SP) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.
b) Um ponto e uma reta determinam um plano.
c) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.
d) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.
e) Se α é o plano determinado por duas retas concorrentes **r** e **s**, então toda reta **m** desse plano, que é paralela à **r**, não será paralela à reta **s**.

11. (ESPCEX-SP) Considere as seguintes proposições:
I) Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.
II) Uma reta e um ponto determinam sempre um único plano.
III) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.

Pode-se afirmar que:
a) só I é verdadeira.
b) só III é verdadeira.
c) só I e III são verdadeiras.
d) só III é falsa.
e) só I e III são falsas.

12. (Faap-SP) A única proposição falsa é:
a) no espaço, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.
b) uma reta ortogonal a duas retas de um plano é ortogonal ao plano.
c) dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si.
d) um plano perpendicular a uma reta de outro plano é perpendicular a este plano.
e) um plano perpendicular a dois planos que se interceptam é perpendicular à reta de intersecção destes.

13. (Fatec-SP) Na figura a seguir tem-se: o plano α definido pelas retas **c** e **d**, perpendiculares entre si; a reta **b**, perpendicular a α em **A**, com $A \in c$; o ponto **B**, intersecção de **c** e **d**.

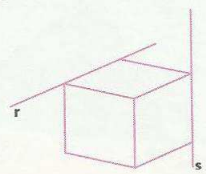


Se **X** é um ponto de **b**, $X \notin \alpha$, então a reta **s**, definida por **X** e **B**:
a) é paralela à reta **c**.
b) é paralela à reta **b**.
c) está contida no plano α.
d) é perpendicular à reta **d**.
e) é perpendicular à reta **b**.

Região Sul

14. (UEL-PR) Considere uma reta **s**, contida em um plano α, e uma reta **r** perpendicular a **s**. Então, necessariamente:
a) **r** é perpendicular a α.
b) **r** e **s** são coplanares.
c) **r** é paralela a α.
d) **r** está contida em α.
e) todas as retas paralelas a **r** interceptam **s**.

15. (UEL-PR) As retas **r** e **s** foram obtidas prolongando-se duas arestas de um cubo, como está representado na figura a seguir:



Sobre a situação dada, assinale a afirmação incorreta.
a) **r** e **s** são retas paralelas.
b) **r** e **s** são retas reversas.
c) **r** e **s** são retas ortogonais.
d) Não existe plano contendo **r** e **s**.
e) $r \cap s = \varnothing$

Capítulo 10 | Geometria espacial de posição — Uma introdução intuitiva   203

Figura 6.20: Atividades Adicionais

Capítulo 7

Conclusões

Iniciando nossas conclusões finais, gostaríamos de enfatizar que as considerações feitas aqui, não se remetem as coleções, *Conexões com a Matemática* [1] e *Matemática Contextos e Aplicações* [3] como um todo, e sim aos capítulo que introduzem a geometria espacial, principalmente a maneira como o método axiomático é apresentado ao aluno do ensino médio.

Com o intuito de favorecer o entendimento do leitor, sempre que nos referirmos aos livros 1 e 2, estamos tratando da análise feita, nos capítulos 5 e 6 respectivamente, do nosso trabalho.

7.1 Considerações feitas sobre os critérios sugeridos pelo PNLD

Alguns critérios são recomendados pelo PNLD - 2012[11] a fim de que o ensino da Matemática possa capacitar o aluno a desenvolver o seu conhecimento. Esses critérios foram citados no capítulo 2, na seção 2.3 do nosso trabalho e, nos focaremos nos ítens 8 e 11 pelo fato de fazerem referência ao estudo da Geometria.

8. Reconhecer regularidades e conhecer as propriedades das figuras geométricas planas e sólidas, relacionando-as com os objetos de uso comum e com as representações gráficas e algébricas dessas figuras, desenvolvendo progressivamente o pensamento geométrico;

11. Estabelecer relações entre os conhecimentos nos campos de números, funções, equações algébricas, Geometria analítica, Geometria, Estatística e Probabilidade, para resolver problemas, passando de um desses quadros para outro, a fim de enriquecer a interpretação do problema, encarando-o sob vários pontos de vista.

Livro 1

Considerando os ítens citados acima e, salientando que fizemos a análise apenas de um capítulo do livro analisado, observamos que os autores do livro 1, atendem as exigências descritas pelo PNLD, no item 8, pois ao finalizar o estudo do capítulo, o aluno estará apto a reconhecer as propriedades de algumas figuras geométricas, aplicar essas propriedades na sua vida cotidiana e trabalhar com a linguagem simbólica que, não deixa de ser uma maneira de representar algebricamente tais figuras.

Quanto ao item 11 não percebemos relação entre o conteúdo trabalhado no livro 1 e os demais conhecimentos e ramos da Matemática. Isso não nos garante que os autores não atendem a essa exigência do PNLD pois observamos apenas um capítulo e, esse requisito pode ter sido atendido no decorrer do livro.

Livro 2

Dos critérios mencionados acima, percebemos que no livro 2, a exigência feita no item 8 foi atendida, realmente foram apresentadas algumas figuras geométricas com suas respectivas propriedades e representações gráficas.

Já em relação ao item 11 não percebemos vínculo com conteúdos vistos anteriormente e, a aplicação do conteúdo na resolução de problemas também não foi observada.

7.2 Considerações feitas sobre as componentes básicas: Conceituação, manipulação e aplicação

Livro 1

Na nossa análise do livro 1, percebemos que as componentes básicas, conceituação, manipulação e aplicação, apresentadas no capítulo 3 do nosso trabalho, podem ser observadas.

No geral, consideramos que os autores preservaram uma boa conceituação pois, utilizaram uma linguagem adequada e precisa, sem muito formalismo, viabilizando um bom entendimento do aluno. Não identificamos erros de impressão nas definições e foram todas bem elaboradas, ilustradas e destacadas em forma de caixa de texto e os objetos definidos gravados em negrito, salientando que encontramos alguns termos destacados em negrito e não definidos a exemplo, na figura 5.17 o termo perpendicularismo não é definido.

Podemos observar a componente manipulação quando os autores utilizam uma sequência de definições e postulados para construir toda uma teoria, como também nos exercícios resolvidos e propostos, desenvolvendo no aluno atitudes condicionadas na resolução de situações problemas.

A aplicação é a componente básica menos observada na nossa análise. Nos exercícios pouco notificamos a presença de contextualizações que vão de problemas triviais do dia a dia a questões aplicadas a outras áreas de conhecimento ou seja, problema que possam vincular o conteúdo explorado com a realidade do aluno.

Livro 2

As componentes básicas conceituação, manipulação e aplicação apresentadas no capítulo 3 do nosso trabalho podem ser observadas no livro 2. No entanto, podemos perceber que a conceituação é a mais enfatizada pois a forma como o autor destaca, em caixas de texto de fundos coloridos, as definições, axiomas e teoremas é uma postura fiel na utilização da conceituação.

A questão da manipulação poderia ter sido melhor explorada no decorrer do livro 2. De acordo com as definições e os postulados apresentados no decorrer do capítulo, alguns teoremas deveriam ter sido demonstrados e assim apresentado o método axiomático. Com isso, o aluno compreenderia a importância de estudar tais conteúdos.

Em relação a aplicação, sentimos falta de exercícios resolvidos envolvendo o conteúdo apresentado pois esses exercícios levam o aluno a fixar e exercitar toda teoria apresentada. Nos exercícios propostos não observamos aplicações que despertassem no aluno o prazer em estar estudando algo que tenha conexão entre os temas apresentados e o mundo real.

7.3 Nossas considerações sobre a apresentação do método axiomático

Livro 1

No capítulo 4 do nosso trabalho, apresentamos uma sequência de conceitos que devem ser utilizados e aplicados ao se desenvolver a teoria do método axiomático ou sistema dedutivo. Diante do exposto, percebemos que essa teoria é bem aplicada no livro 1, os autores se preocupam em construir gradativamente o método axiomático, definindo noções primitivas, apresentando postulados (axiomas), definindo alguns objetos e utilizando toda teoria na demonstração de alguns teoremas.

Percebemos que no início do livro 1, o método axiomático é muito aplicado e, a medida que os autores vão apresentando essa teoria, sua utilização vai se tornando menos evidente pelo simples fato de já se ter uma teoria construída não havendo necessidade de repetir o que já foi apresentado.

Em relação ao sistema dedutivo, observamos que na citação do PNLD apresentada na página 22 do nosso trabalho, realmente os autores dão um tratamento cuidadoso a Geometria, aplicando de forma coerente e sobre um rigor adequado, o método axiomático em demonstrações pertinentes.

Concluímos assim, que o livro 1, é considerado um material que consegue repassar as informações necessárias ao aluno para a assimilação do que seja o sistema dedutivo e suas devidas aplicações. Quanto a nós, professores, podemos usufruir do livro didático analisado como auxílio na transmissão do conteúdo, todavia, devemos buscar sanar as pequenas lacunas deixadas pelos autores no decorrer do material.

Livro 2

Como mencionamos no decorrer de nossa análise, no livro 2, segundo nossa análise, não é dada a importância necessária ao método axiomático, percebemos que o autor fala de conceitos primitivos, postulados e teoremas, fornece uma ordem de apresentação (Fundo rosa - definições, fundo laranja - teoremas e fundo azul - postulados) que não conduz ao que se esperaria, o importante seria utilizá-los para demonstrar resultados geométricos.

A forma como o sistema dedutivo é exposto, o aluno é um agente passivo no processo ensino-aprendizagem, é levado a aceitar como verdadeiro o que lhe é imposto, pelo autor e pelos desenhos.

As demonstrações apresentadas no final do capítulo analisado aparecem como uma espécie de desencargo de consciência, para não dizer que não foi feita nenhuma demonstração. É como se os conceitos apresentados durante o capítulo seja uma coleção de definições e afirmações que devem apenas ser memorizadas pelo aluno e que não tem nenhuma utilidade.

Enfim, em se tratando do método axiomático o livro 2, na nossa concepção, não seria o material satisfatório na transmissão dessa teoria. Deixa lacunas significativas na compreensão do conteúdo.

Referências Bibliográficas

[1] BARROSO , J. M.; Conexões com a matemática, Vol 2, Editora Moderna, 1ª ed. São Paulo 2010.

[2] BRAZ, F. M. História da Geometria Hiperbólica. Geometria Hiperbólica, Belo Horizonte: UFMG, 2009.

[3] DANTE, Luiz Roberto; Matemática: Contexto e Aplicação, Vol 2, 1ª ed. São Paulo 2011.

[4] DE MORAIS FILHO, D. C.; *Manual de Redação Matemática. Com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na Matemática e um capítulo especial sobre como escrever uma dissertação*, 2ª ed. Fabrica de Ensino. Campina Grande - PB, 2009.

[5] DE MORAIS FILHO, D. C.; Um Convite a Matemática. Coleção Professor de Matemática. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[6] LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual do usuário. In: Em aberto, ano 16, n.69, Brasília, 1996.

[7] LIMA, E. L., MORGADO, A. C., JÚDICE, E. D., WAGNER, E. DE CARVALHO, J. B. P., CARNEIRO, J. P. Q., GOMES, M. L. M., e CARVALHO, P. C. P., Exame de Textos. Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio, VITAE, IMPA e SBM. Rio de Janeiro, 2001.

[8] Normas da ABNT – NBR 6023: *Elaboração de referências*, (2000). Disponível em <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/RegulamentoseNormas/ABNT-NBR6023.pdf>. Acesso em 15 out 2014.

[9] OLIVEIRA, J. B. A. et al. A política do livro didático. São Paulo: Sammus, 1984.

[10] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS - PCNEM: Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemáica e suas tecnologias. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, 1999.

[11] PNLD - 2012. Guia de Livros didáticos . Ensino Médio. Matemática. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2011.