UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

UMA EXTENSÃO DOS AXIOMAS DE PEANO PARA A CONSTRUÇÃO DOS INTEIROS

Fred Charles Alves de Brito

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho

Campina Grande - PB
Agosto/2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

B862e Brito, Fred Charles Alves de.

Uma extensão dos axiomas de peano para a construção dos inteiros / Fred Charles Alves de Brito. – Campina Grande, 2017.

78 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho”.

Referências.

1. Número - Natural. 2.Número - Inteiro. 3. Axiomas. I. Barbosa Sobrinho, Jaime Alves. II. Título.

CDU 51(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Uma Extensão Dos Axiomas De Peano Para A Construção Dos Inteiros

por

Fred Charles Alves de Brito

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

UMA EXTENSÃO DOS AXIOMAS DE PEANO PARA A CONSTRUÇÃO DOS INTEIROS

por

Fred Charles Alves de Brito

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Edelweis J. Tavares Barbosa

Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa - UFPE

Luiz Antônio Medeiros

Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG

Jaime Alves Barbosa Sobrinho

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2017

Dedicatória

A Deus, que sempre me inspira maiores conquistas. E a Douglas Braga Lira, meu grande companheiro e maior incentivador da realização deste projeto.

Agradecimentos

A Deus por cada momento de aprendizado que me permite nesta grande aventura que é a vida.

A Douglas Braga Lira com o qual compartilho sonhos e muitas alegrias, além dos percalços que surgem. Mas nossa união tem os superado, ficando cada vez mais robusta e preparada para os desafios futuros. Sua compreensão e apoio durante os momentos de desânimo me trouxeram até aqui. Não tenho dúvida!

À equipe das Escolas Reunidas Duque de Caxias, em Caruaru-PE, pelo apoio na viabilização de minha caminhada neste mestrado.

Ao Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho por ter me orientado, contribuindo com esta pesquisa.

Aos professores que se disponibilizaram a compor a banca examinadora: o Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros, nosso atual coordenador e também professor neste curso; e o Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (UFPE), meu professor e orientador durante a graduação no IFPE, em Pesqueira-PE.

A todos os professores do PROFMAT - UFCG pelas aulas que proporcionaram e os conhecimentos que compartilharam durante todo o curso e ao Prof. Dr. Aparecido Jesuíno, ex-coordenador, que me recebeu no início do curso.

A todos os meus colegas com os quais compartilhei muitos desafios durante o curso e também comemorei cada passo dado nesta caminhada. Obrigado pelos conselhos e ensinamentos. Em especial, agradeço aos colegas que me deram tantas caronas nesta estrada entre Caruaru-PE e Campina Grande-PB. Obrigado por me reservarem um lugar na vida de todos vocês. Sinto-me honrado em ter convivido com cada um durante este tempo de estudos. Com vocês, aprendi a ser um professor melhor e, acima de tudo, uma pessoa mais humana.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

Número, como hoje é entendido, é uma entidade abstrata, produto propriamente humano, empregado em processos de contagem e enumeração. Na escola, se aprende que existem números naturais e inteiros, além de outros. Os naturais estão ligados principalmente à noção de sucessor, enquanto os demais às noções de medida e orientação. Procurou-se neste trabalho demonstrar que os inteiros podem ser construídos de forma axiomática e indutiva, tal como é feito para os naturais com os axiomas de Peano. As orientações pedagógicas e as pesquisas sobre a ideia de número instigam novas abordagens na escola. Com isso, buscou-se contribuir para inovação nas aulas de matemática sobre conjuntos numéricos, visto que há uma dificuldade considerável em se trabalhar com números inteiros negativos por boa parte dos estudantes.
Palavras Chaves: Natural. Inteiro. Axiomas.

Abstract

Number, according to current understanding, is an abstract entity, human product, employed in processes of count and enumeration. In school, people learn natural and whole numbers, including others. Natural numbers are bound up with notion of successor, whereas whole numbers are bound up with notions of measure and direction. This work searched to demonstrate an axiomatic and indutive construction for whole numbers, just like we build natural numbers using Peano's axioms. Pedagogical instructions and researches about idea of number instigate new approaches in school. Hence, we seek to contribute with innovative classes about numerical sets, since very students face difficulties with negative whole numbers.

Keywords: Natural. Whole. Axioms.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A atenção voltada para os números na escola foca principalmente nas operações, relações e propriedades inerentes a cada conjunto numérico. No decorrer dos anos escolares, antes mesmo que se fale de números naturais, inteiros ou outros, o ensino e aprendizagem dos números liga-se muito à ideia de quantidade, justificada por um estudo "contextualizado". Mas o grande problema deste tipo de estudo é trabalhar com uma maior abstração no momento em que as aulas de Matemática sobre conjuntos numéricos exigem.

Adentrando a discussão sobre este problema, foi proposta aqui uma construção axiomática para os números inteiros, semelhantemente ao que Peano[1] fez com os números naturais. Embora não seja tão importante definir a ideia de número para se propor e fazer uma construção do conjunto $\mathbb{Z}$, buscou-se fazer um panorama histórico desta ideia, querendo não somente elencar os porquês das dificuldades dos estudantes em operarem com números inteiros. Mas também encontrar uma abordagem que contribua com a superação dessas dificuldades. A hipótese é que existe uma forma de apresentar os números inteiros próximo daquilo que é feito com os naturais.

Além disso, apresentou-se também as construções já conhecidas para $\mathbb{N}$ a partir dos axiomas de Peano e da definição de equipotência de conjuntos em Frege[2], bem como para $\mathbb{Z}$ com a ideia de subtração equivalente. Colocou-se, assim, a nova construção para $\mathbb{Z}$ em paralelo ao que já é tradicionalmente adotado para a construção de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Ficou, então, demonstrado que, a partir das noções de sucessor e de antecessor e mediante uma função bijetiva (intitulada sucessora) juntamente com a proposição de três axiomas, é possível se construir todos os elementos de $\mathbb{Z}$, munidos das operações de adição e de multiplicação e da relação de ordem. Em especial, destacou-se o Princípio da Indução Inteira e suas aplicações em demonstrações.

Ao final, foi proposto e discutido como fazer algumas aplicações em sala de aula,

[1]Giuseppe Peano (1858-1932) propôs, em sua obra *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, publicada em 1889, um conjunto de proposições mínimas e suficientes para construir $\mathbb{N}$ (RIPOLL, 2015, p. 52).

[2]Friedrich Ludwing Gottlob Frege (1848-1925) propôs uma definição de "número cardinal" em 1879, que, mais tarde, em 1901, foi independentemente proposta por Bertrand Russel (ALMEIDA, 2013, p. 145).

levando em consideração que o mais importante é o trabalho conceitual, enfatizando as ideias estruturadoras para um melhor ensino e aprendizagem dos conjuntos numéricos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Fazer uma construção axiomática e indutiva de $\mathbb{Z}$, propondo possíveis aplicações para o estudo dos números inteiros.

1.1.2 Objetivos específicos

1. Detalhar como a ideia de número foi sendo desenvolvida e utilizada durante a história;
2. Descrever as dificuldades do ensino e aprendizagem sobre números, em especial os inteiros, em paralelo com as orientações pedagógicas;
3. Apresentar a construção do conjunto $\mathbb{N}$ através dos axiomas de Peano e das ideias de Frege;
4. Apresentar a construção do conjunto $\mathbb{Z}$ através da ideia de subtração equivalente;
5. Apresentar um novo modo de construção do conjunto $\mathbb{Z}$ através de axiomas, análogo ao que Peano fez para os naturais;
6. Propor aplicações em sala de aula a partir desta nova construção do conjunto $\mathbb{Z}$.

1.2 Organização

O capítulo 2 é um aprofundamento sobre a ideia de número. Descrevendo a maneira como gradativamente essa ideia vai sendo trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, são apontadas algumas causas que levam às dificuldades na abstração dos números inteiros. São também descritos alguns direcionamentos pedagógicos presentes em documentos oficiais sobre o ensino e aprendizagem de números inteiros na escola, além de como a ideia de número se processa e desenvolve nas práticas humanas e a noção de antecessor, fundamental para esta análise.

O capítulo 3 apresenta a construção do conjunto $\mathbb{N}$ através dos axiomas de Peano. Apresenta-se, inicialmente, a noção fundamental de sucessor. Depois, é visto como a ideia de número separou-se das práticas de contagem, descrevendo sua abstração no contexto da Grécia Antiga. Em seguida, mostra-se como os trabalhos de Frege e Peano foram importantes para a formalização da ideia de número natural, e sua relação com a correspondência um a um. Destacam-se em especial os axiomas de Peano para a estruturação de conjunto $\mathbb{N}$, e a utilidade do Princípio da Indução Finita na demonstração de propriedades inerentes aos naturais. Paulatinamente, vão sendo definidas as operações e a relação de ordem dos naturais, como também é demonstrado que ficam bem definidas, além de suas propriedades básicas. Completada a construção de $\mathbb{N}$, discutem-se as contribuições de Frege e Peano, melhorando o entendimento sobre a ideia de número e as dificuldades de abstrai-la na escola.

O capítulo 4 apresenta a construção do conjunto $\mathbb{Z}$ através da ideia de subtração equivalente. É, inicialmente, descrito como em geral se busca contextualizar a ideia de número inteiro durante os anos escolares, limitando a compreensão dos estudantes sobre esta ideia. Depois, são apresentadas as contribuições de Argand e Gauss para a aceitação definitiva dos inteiros negativos como números verdadeiros. Define-se o conjunto $\mathbb{Z}$ como aquele constituído por classes de equivalência, munindo-o das operações e da relação de ordem, demonstrando que ficam bem definidas, além de suas propriedades básicas. Mostra-se por que $\mathbb{N}$ é considerado um subconjunto de $\mathbb{Z}$. E constata-se a maior elaboração de uma ideia de número como entidade abstrata.

O capítulo 5 apresenta o novo modo de construção dos inteiros. São definidos três axiomas para construção dos inteiros. Os inteiros são "enfileirados" através das noções de sucessor e antecessor e de uma função bijetiva, chamada sucessora. Destaca-se o Princípio da Indução Inteira, utilizando-o para demonstrar propriedades inerentes aos inteiros. Também é feita uma abordagem sobre a potência inteira da função sucessora e suas propriedades, e as consequência que disto decorrem. O conjunto $\mathbb{Z}$ também é munido das operações, propriedades básicas e da relação de ordem nesta nova construção.

O capítulo 6 trata de aplicações em sala de aula, buscando superar dificuldades encontradas na Educação Básica sobre o ensino e aprendizagem do conjunto $\mathbb{Z}$. Além disso, procurou-se mostrar como o Princípio da Indução Inteira também pode ser utilizado para fazer demonstrações, tal como feito com o Princípio da Indução Finita nas demonstrações de proposições sobre os naturais.

Ao final, são feitas as considerações finais decorrentes desta pesquisa e apresentadas as referências bibliográficas.

Capítulo 2

Uma Discussão Sobre a Ideia de Número

2.1 Abordagem inicial

A ideia de número é uma das mais fundamentais à Matemática. E, antes de discutir a construção de conjuntos numéricos, é necessário um aprofundamento a partir dos pontos de vista histórico e psicológico do que vem a ser um número. Ou seja, não é possível abordar a construção de conjuntos de coisas sobre as quais não se tem uma noção consistente. De um modo geral, "números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelo que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza" (LIMA et all, 2012, p. 29).

Ao que parece, o primeiro conjunto numérico com o qual as pessoas têm contato na vida é o conjunto dos números naturais. Mesmo para aqueles que estudam e pesquisam em Matemática, quando pensam em número, acabam se remetendo quase que automaticamente àqueles números usados para contagem. Dificilmente alguém pensaria em números negativos ou em frações para definir o que é um número, embora tais números estejam presentes em diversas situações. Menos ainda pensaria em um número irracional, tal como $\sqrt{2}$ ou π. O que dizer então de um número complexo? Obviamente, os que estudam Matemática sabem que existem noções fundamentais para se chegar a uma construção rigorosa de um conjunto numérico.

2.2 Os obstáculos em sala de aula

Durante o desenvolvimento deste trabalho, uma imagem que se fez muito presente foi a de um professor de Matemática que, no seu primeiro dia de aula em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, apresenta aos estudantes os conjuntos numéricos. Começa pelos naturais e, logo em seguida, passa para os inteiros. Não serão abordados os demais conjuntos porque não são foco deste trabalho. Continuando, não se quer aqui fazer um julgamento da maneira como um ou outro professor de Matemática executa sua função.

Chama-se, no entanto, a atenção para um tipo de apresentação dos conjuntos numéricos que não esclarece minimamente por que os naturais e os inteiros são daquela maneira e não de outra forma. Em outras palavras, o que realmente caracteriza tais conjuntos? Por muitas razões, provavelmente, uma caracterização mais minuciosa destes conjuntos não ocorre na Educação Básica, ao menos da forma rigorosa com que os matemáticos estão habituados.

Fazendo uma descrição da prática escolar, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, os números naturais são trabalhados como inteiros positivos. Os estudantes são ensinados a praticar as operações fundamentais com esses números.

> Não por acaso, uma parte significativa da *alfabetização matemática*, nas séries iniciais do ensino fundamental, é dedicada ao estudo desses números, sua escrita, seus usos e significados, suas operações elementares, e a resolução de problemas envolvendo estas operações (RIPOLL, 2015, p. 1).

Ainda nesta etapa escolar, já são introduzidas as frações. De fato, não há rigorosamente nenhum grande erro nisto. Mas é perceptível uma preocupação apenas com o cotidiano dos estudantes sem uma maior atenção à ideia de número. Isto fica ainda mais evidente quando são introduzidos os números inteiros, coisa que geralmente só acontece lá nos anos finais do Ensino Fundamental. Neste período, a prática de ensino reforça a ideia de medida. Predomina a ideia de que "os professores devem fazer um esforço considerável na tentativa de contextualizar a matemática, tentando torná-la realista e, portanto, relevante. Isso contudo pode ser uma armadilha" (WALL, 2014, p. 12).

Diferentemente dos naturais, os inteiros não emergiram de práticas de contagem. Então outras noções estão por trás da ideia de inteiro. Observa-se nesta descrição evolutiva de uma prática escolar ainda muito presente em inúmeras redes de ensino que os números são abordados como se fossem ideias aceitas sem um maior aprofundamento, quase que arbitrariamente. Mesmo fazendo relações entre esses diferentes conjuntos numéricos, tais relações ficam muito vagas, pouco fundamentadas. Por exemplo, quando se define o conjunto dos naturais como um subconjunto dos inteiros, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, dá-se a impressão que $\mathbb{Z}$ simplesmente possui também números negativos enquanto que $\mathbb{N}$ possui apenas os positivos. Embora a afirmação dada não seja falsa, não fica clara que propriedade $\mathbb{Z}$ possui tal que nela se inclua $\mathbb{N}$. Tal apresentação dá margem para uma compreensão de que $\mathbb{N}$ é apenas uma parte de $\mathbb{Z}$. Ou seja, $\mathbb{N}$ não seria um conjunto com características particulares. Pressupõe-se tais características serem condição para um status de conjunto. Doutro modo, não passaria apenas de um subconjunto com algum destaque notável. Há uma considerável diferença em compreender que as condições que $\mathbb{Z}$ satifaz também são igualmente satisfeitas por $\mathbb{N}$. É recorrente também não ficar claro para muitos estudantes que 1 e -1, por exemplo, são números diferentes. E quando vão praticar as operações com números inteiros negativos aí as dificuldades ficam ainda mais evidentes. Isto se deve ao fato de que a ideia de número inteiro baseia-se, além da noção de contagem, nas noções de medida e orientação (RIPOLL, 2016, p. 3). Porém, apesar das práticas em sala de aula de alguma forma salientarem essas noções, parece que a maioria dos estudantes não atinge essa compreensão satisfatoriamente. Buscando facilitar a aprendizagem dos estudantes, professores de Matemática associam os números inteiros negativos à noção de falta.

> Os números negativos podem ser concebidos a partir da incorporação de uma ideia de *falta* na noção de contagem, que corresponde à necessidade de se registrar "ganhos" e "perdas" em situações em que se precisa tanto aumentar como diminuir grandezas indefinidamente (RIPOLL, 2015, p. XXXIV).

Mas essa noção está mais próxima de um ato de contextualizar que da construção de uma ideia mais sólida de número inteiro. De fato, para medir temperaturas muito frias na escala Celsius, por exemplo, precisamos fazer uso dos números inteiros negativos. É perceptível a tentativa de contextualizar a ideia de número inteiro ao cotidiano dos estudantes. "Alguns contextos concretos sugerem a ideia de quantidade menores do que zero, por exemplo, dívidas, temperaturas, altitude" (RIPOLL, 2016, p. 4). De certo modo, esta atitude vista em algumas práticas escolares é compreensível e até mesmo, quem sabe, didaticamente justificável. Porém, no mínimo se desconfia de que a atitude seja forçosa, sem a pretensão de se fazer uma análise pejorativa. Pois diversos estudantes continuam sentindo dificuldade em trabalhar com números negativos, e isto é pela própria História da Matemática ainda mais justificável.

> Hoje em dia, a apresentação mais comum dos diferentes tipos de número segue a sua organização como inclusão de conjuntos numéricos. No entanto, esse modelo é muito recente. Somente no século XIX foi proposta a noção de conjunto e somente no XX essa noção foi adotada como base para o edifício matemático. Sendo assim, expor a evolução dos tipos de número admitidos em matemática partindo de conjuntos numéricos é um anacronismo indesejável. Se queremos entender o surgimento de novos números a partir dos problemas em que se inserem, ainda que sejam problemas matemáticos, precisamos inverter a ordem lógica de exposição para atingir a ordem de invenção (RIPOLL, 2016, p. 6-7).

O que se quer destacar é que a ideia de número inteiro não vem dos tais contextos em que os números são utilizados no cotidiano das pessoas, como já se mencionou anteriormente.

2.3 As orientações pedagógicas

A partir do que já está posto, a prática escolar demanda uma nova forma de apresentação dos conjuntos numéricos. Como já dito, apenas serão focados os conjuntos dos naturais e, especialmente, dos inteiros. Os parâmetros curriculares nacionais de Matemática para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental (6^o e 7^o anos) apontam para a importância dos estudantes reconhecerem os números naturais e inteiros em diversos contextos, tanto cotidianos quanto históricos. Inclusive sugerem a proposição de situações-problema onde as ideias de falta, diferença, orientação e deslocamento possam ser exploradas (BRASIL, 1998, p. 71). Entretanto, também deixam bem claro que a contextualização no ensino e aprendizagem dos números inteiros deve ser melhor refletida:

> Ao buscar as orientações para trabalhar com números inteiros, deve-se ter presente que as atividades propostas não podem se limitar às que se apóiam em situações concretas, pois nem sempre essas concretizações explicam os significados das noções envolvidas. É preciso ir um pouco além e possibilitar, pela extensão dos conhecimentos já construídos para os naturais, compreender e justificar algumas das propriedades dos números inteiros (BRASIL, 1998, p. 100).

Já os parâmetros curriculares de Matemática para o quarto ciclo do Ensino Fundamental (8^o e 9^o anos) e para o Ensino Médio parecem implicitamente apontar para a continuidade desta abordagem dos naturais e dos inteiros. Entretanto, embora as orientações dos parâmetros estejam de acordo com o que foi discutido até aqui, a motivação desta pesquisa busca uma outra rota, que não é necessariamente contrária ao exposto. Ou seja, em primeiro lugar, os inteiros serão construídos de forma axiomática e indutiva. Só, então, serão traçadas estratégias de como abordar os inteiros em sala de aula, à luz deste novo modo de construção para $\mathbb{Z}$.

2.4 As pesquisas sobre a origem da ideia de número

A discussão inicial deste trabalho centra-se mais do que na forma como os números naturais e inteiros são construídos. Procurou-se fazer uma descrição evolutiva das ideias de número natural e número inteiro. Como já dito, os naturais são os primeiros números com que as pessoas se habituam. Talvez por isso quando o professor de Matemática escreve no quadro um tal conjunto de números simbolizado por $\mathbb{N}$ nenhum estudante estranhe, ainda que não se elenquem as suas propriedades. Pesquisas em História da Matemática e Etnomatemática apontam para uma origem neurofisiológica da ideia de número. Essa ideia se "cristaliza" em práticas. Pois

> o conhecimento é um processo cujo produto é obtido através de negociações de significado que resulta na atividade social dos indivíduos e é abarcado pelo contexto cultural no qual os indivíduos estão inseridos (RADFORD, 2011, p. 93).

Pelo que se discute e transparece nas mais diversas pesquisas, uma das práticas mais primárias que está relacionada com a ideia de número é certamente a contagem (ROQUE, 2012, p. 35-47; ALMEIDA, 2013, p. 35). Ora, uma das grandes finalidades dos números naturais é justamente o ato de contar, independente do sistema numérico. A ideia de número natural emerge, portanto, da prática de contagem. Mas é necessário dizer que as práticas de contagem são anteriores à ideia abstrata de número. Ou seja, as contagens eram feitas de forma concreta, sem uma necessária preocupação com uma ideia de número. No entanto, como afirmam outros pesquisadores, saber e fazer não estão dissociados.

> As distintas maneiras de fazer (práticas) e de saber (teorias), que caracterizam uma cultura, são parte do conhecimento compartilhado e do comportamento compatibilizado. Assim como comportamento e conhecimento, as maneiras de saber e de fazer estão em permanente interação. São falsas as dicotomias entre saber e fazer, assim como entre teoria e prática (D'AMBROSIO, 2011, p. 19).

Pode-se então afirmar que há uma interação entre a ideia de número natural e a prática concreta de contagem. Embora ainda haja questões que para os pesquisadores da área não estão claras, segundo ALMEIDA (2013, p. 76) as teorias levantadas parecem concordar com as seguintes assunções:

Assunção $\mathbb{A}_1$ Existe um símbolo inato com um valor inteiro, UM = 1;

Assunção $\mathbb{A}_2$ Há uma regra que associa o número ao seu sucessor;

Assunção $\mathbb{A}_3$ Tal regra possui um mecanismo acumulador inato de tal maneira que a diferença entre dois valores consecutivos é sempre igual a um;

Assunção $\mathbb{A}_4$ Existe um mecanismo inato que permite a generalização, construindo-se assim uma sequência ilimitada de naturais.

Tais assunções obviamente estão em concordância com os axiomas de Peano, propostos no fim da século XIX. Isto não significa que os axiomas de Peano sejam ideias inatas presentes na cognição humana. Mas isto reforça a impressão de que o conjunto dos números naturais é o primeiro na experiência humana.

> Nesta perspectiva, o problema de contagem consiste em comparar quantidades de conjuntos finitos de objetos. (...) Tal estratégia não envolve diretamente o conceito de número e, de fato, já era empregada por grupos humanos na pré-história (...). Um número natural é um "rótulo" dado a todos os conjuntos de objetos que podem ser postos em correspondência um a um entre si, isto é, que têm a mesma quantidade de elementos. (...) Desta forma, o conceito de número natural é uma abstração que emerge da noção concreta de contagem, por meio de correspondências um a um (RIPOLL, 2016, p. XXX).

Provavelmente, por isso seja o primeiro com que os estudantes entrem em contato nas atividades escolares. Por outras razões, algumas bem óbvias, não poderia ser diferente. Apesar disso, as assunções elencadas anteriormente apenas destacam a presença de um mecanismo acumulador e outro de generalização, que partem da unidade. Não se sabe ao certo se Peano partiu da ideia da presença de tais mecanismos ao propor axiomas associados ao princípio de recorrência denominado de princípio de indução.

Enfim, pode ser dito que há muitas evidências mostrando que em diversas práticas a ideia de número natural evolui simultaneamente com a ideia de número (usada para representar numerosidades ou quantidades, na contagem e operações matemáticas). Mas com a ideia de número inteiro o processo não acontece da mesma forma. Há evidências de que alguns povos antigos já consideravam os números inteiros negativos, como os chineses, por exemplo. “Os matemáticos chineses, parecem ter sido capazes de tratar números negativos nos passos intermediários na resolução de equações” (BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2010, p. 95-96). Por outro lado, aqui no Ocidente números negativos só ganharam status de número depois de séculos de brigas e frustrações. Por muito tempo, números negativos eram considerados quantidades fictícias, imaginárias ou absurdas, já que sua concepção no mundo real não havia atingido um considerável nível de concordância e aceitação entre os matemáticos. As dúvidas sobre sua legitimidade desapareceriam somente com o estudo dos sistemas algébricos (RIPOLL, 2016, p. XXXIV-XXXV).

2.5 A noção de antecessor

A proposta deste trabalho é a de investigar outra possível relação entre os naturais e os inteiros. Observe-se que a partir da noção de contagem é possível fazer uma ampliação dos naturais para os inteiros. Daí, como os axiomas de Peano se baseiam nas noções de contagem e de sucessor, aqui a busca terá como guia tais axiomas a fim de que também a ideia de número inteiro seja construída. A contagem no conjunto dos números naturais é frequentemente considerada em ordem crescente e segue infinitamente. Ou seja, começa do 0 e vem 1, 2, 3, ... E se essa contagem fosse decrescente, sem limitar-se ao zero? Daí, da mesma forma que os números naturais, os números inteiros negativos poderiam ganhar a “naturalidade” de que gozam os inteiros positivos. É preciso, portanto, considerar a existência de outros números que as práticas habituais de contagem, mesmo em ordem decrescente, não o fizeram. Isto se deve justamente ao fato de que no início a contagem era uma prática primordialmente concreta, por comparação. Fazia-se uma associação entre determinada quantidade de elementos à uma mesma quantidade de coisas usadas para contar. Este método é conhecido como *correspondência um-a-um*. Isto é comumente ilustrado pela alegoria de um pastor usando pedras para contar as ovelhas de seu rebanho.

> Evidentemente, o conto do pastor de ovelhas na pré-história (que é muito narrado em livros de história da matemática em geral) é absolutamente ficcional. Entretanto, ilustra as estratégias que antecederam os sistemas de numeração. Sobretudo, mostra o fato de que essas estratégias eram puramente *concretas* e se baseavam meramente na comparação entre coleções de coisas, sem que se houvesse desenvolvido uma noção *abstrata* de número (muito menos de conjunto) (RIPOLL, 2015, p. 6).

Como também riscos feitos por tribos antigas, talhados em ossos ou pedras, para contar a duração dos dias e das estações (ALMEIDA, 2013, 158-170). Mas isso aparentemente nunca foi feito com quantidades menores que zero. De fato, não há razões lógicas para se fazer uma correspondência um-a-um com tais quantidades. A proposta, por isso, limita-se ao ambiente abstrato. Ou seja, a contagem decrescente considerada não envolverá a correspondência um-a-um, por causa de sua ligação com representações concretas. Entretanto, os mecanismos de acumulação e generalização serão mantidos, viabilizando esta investigação. O zero passará a ter o significado de referencial, a partir da noção de orientação. Mas aparecerá outra noção que não é comumente considerada: a de antecessor.

Capítulo 3

Peano e os Números Naturais

3.1 A noção de sucessor

O *conjunto dos números naturais* é frequentemente descrito como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Inicialmente, como já dito, é constatado que, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, os estudantes são habituados a trabalhar com esses números, sem aprofundar melhor as propriedades desse conjunto numérico. Mas não há impedimento para esse aprofundamento ser feito nesta fase escolar. Ao contrário, como se pode deduzir de Ripoll (2015, p. 50-51), sua caracterização pode ser dada da seguinte maneira:

$\mathbb{P}_1$ Há um ponto inicial, a partir do qual são tomados os sucessores de cada elemento gerado;

$\mathbb{P}_2$ Este ponto inicial não é sucessor de nenhum elemento;

$\mathbb{P}_3$ Cada elemento sucessivo é sempre diferente de qualquer outro até então gerado;

$\mathbb{P}_4$ A sucessão de elementos vai se dando indefinidamente.

Essas afirmações contemplam a caracterização formal dos naturais e são adequadas ao entendimento de um estudante ao menos nos anos finais do Ensino Fundamental. Como se vê, a noção de sucessor tem papel central na conceituação dos números naturais.

> Assim, a noção de sucessor não deve ser tratada de uma forma protocolar na escola (por exemplo, em exercícios do tipo *"Qual é o sucessor do antecessor do sucessor de 21?"*) e sim como uma ideia estruturante para o conjunto dos naturais (RIPOLL, 2015, p. 55).

A ideia de trabalhar essa noção em sala de aula é para justamente os estudantes terem a oportunidade de captar a forma como o conjunto se organiza.

3.2 Um panorama histórico dos números naturais

3.2.1 Contagem versus abstração

Como já observado, a ideia de número natural se desenvolveu paralelamente à ideia de número. Pode-se afirmar que a correspondência um-a-um das mais antigas práticas de contagem está na origem dessa ideia. A História da Matemática mostra que em alguns povos a abstração da ideia de número já era perceptível. Na Grécia Antiga, essa separação do número de atividades concretas já era comum. Havia muitas definições para *arithmos* (ALMEIDA, 2013, p. 194-196). Não é à toa que a *teoria dos números naturais* é também conhecida como *aritmética* (RIPOLL, 2015, p. 48). Neste contexto grego, não havia consenso de que o número fosse apenas uma *qualidade das coisas*. Sem se elencar e aprofundar as diversas definições que os gregos dessa época deram para número, é sabido que a ideia de número por vezes era tratada como *uma essência, uma substância, uma coisa*. Essa coisa era considerada por alguns uma unidade pura e por outros uma unidade sensível. Portanto, nesse momento fica nítida a separação da ideia de número das práticas de contagem. No entanto, os gregos ainda mantinham uma relação bem idiossincrática de número com a enumeração e a medição das coisas, e até mesmo com a essência das próprias coisas, como fica evidente nos pitagóricos (ROQUE, 2012, p. 111). Todavia, é certo que o ato de contar (fazer) não perdeu sua vinculação com a ideia de número (saber). O importante é que a ideia de número passou por profundas transformações neste contexto, o que permitiu um ambiente propício para sua formalização. Só que a atual formalização viria apenas com longos processos de discussões entre os matemáticos.

3.2.2 Frege e a ideia de número

Passados alguns séculos, a atual ideia sólida de número é devida em muito aos trabalhos de Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) e de Giuseppe Peano (1858-1932). Entretanto, Frege e Peano diferem-se em seus fundamentos. Enquanto as ideias de Peano residem na noção de sucessor, Frege se baseia na noção de equipotência entre dois conjuntos. Segue adiante a definição de número por Frege: "Dado um conjunto $\mathbb{S}$ de elementos, o número é a classe de todos os conjuntos equipotentes a $\mathbb{S}$ [1]" (ALMEIDA, 2013, p. 146). Essa ideia de cardinalidade presente em Frege vem justamente da noção de correspondência um-a-um. Mas o que não fica claro é o que realmente vem a ser um número nesta definição. O número passa existir em Frege no momento em que se possa fazer uma correspondência um-a-um entre dois ou mais conjuntos de tal maneira que as quantidades entre todos seja a

[1] Segundo Almeida (2013, p. 146), nesta definição há uma fusão entre um *predicado extra-lógico* e um *axioma não-lógico*. Dizer *O número é ...* significa nominar algo, associar um símbolo a alguma coisa. E, neste caso, se está fazendo a nominação fundamentando-se na noção primitiva de correspondência um-a-um entre todos os conjuntos considerados: *a classe de todos os conjuntos equipotentes a* $\mathbb{S}$.

mesma.

Sabe-se hoje que dois conjuntos X e Y são cardinalmente equivalentes se existir uma função bijetiva $f : X \longrightarrow Y$ (LIMA, 2013, p. 52; LIMA et all, 2012, p. 50). Só que, embora haja uma definição da ideia de número, Frege depende de um ato de nominação para que o número possa passar a existir. Em outras palavras, o número é o próprio nome que se dá a ele. Por isso, não fica essencialmente claro o que é o número. Todavia é costume de grande parte das pessoas definir que um número nada mais é que um símbolo ou uma palavra. Por exemplo, ao dizer que *um* ou 1 é um número, nada mais se está fazendo do que nominando um objeto. O processo de dar nome ao objeto parece ser amplamente aceito como uma forma legítima de definição para número.

> O mesmo acontece com as definições matemáticas, objetos matemáticos passam a "existir" por força da sua definição. Lembramos, portanto, a crucialidade da doutrina do nome sob o ponto de vista histórico, seguindo *(sic)* a qual alguma coisa passa a existir após receber um nome (ALMEIDA, 2013, p. 147).

Mas, saindo desse senso comum, a ideia de número não pode ser esgotada em suas nominações. Quando um italiano fala *uno* e um norte-americano fala *one*, ambos estão nominando o mesmo objeto. Ou seja, por trás de ambas nominações existe um único número, que se pode simbolizar por 1 na tentativa de universalizar a coisa independente da língua nativa.

> Estudos em diversas culturas apontam que essa intuição de número é comum a todos os humanos, independentemente da língua, educação, cultura, distância geográfica ou grau de instrução matemática. Ainda hoje há culturas com um reduzido léxico de palavras para número, tão limitado que incluem apenas palavras para "um", "dois" e "muitos", mas mesmo assim possuem uma notável competência não verbal para a aritmética elementar, sublinhando, contudo, que esse conhecimento é mais aproximado que exato (ALMEIDA, 2013, p. 62).

A definição de número para Frege, então, parece pressupor que o italiano e o norte-americano (como qualquer outro indivíduo) têm consciência da correspondência um-a-um. Pois sua definição assemelha-se à "cristalização" da ideia no processo de contagem. A diferença é que ele estende o uso da noção de correspondência um-a-um para classificar diversos conjuntos que possuem a mesma quantidade de elementos, nominando a quantidade dizendo: o número é "tanto". Ora, desde as épocas mais antigas, isso era feito na contagem com apenas dois conjuntos: um era composto pelas coisas a serem contadas e o outro pelas coisas usadas para contar. Assim, a ideia de Frege sobre número é limitada.

> Nessa mesma veia, poder-se-ia tentar dizer: "número cardinal de um conjunto é o conjunto de todos os conjuntos equivalentes a esse conjunto". (...) A definição em causa só se aplica a números cardinais, mas a ideia de número deveria abranger os racionais e, pelo menos, os reais (LIMA et all, 2012, p. 52).

Portanto, a atual ideia de número é mais abrangente. Sabe-se que essa abrangência é devida ao desenvolvimento da própria Matemática. Por outro lado, Peano define axiomas que se aplicam especificamente aos números naturais. Há, portanto, uma preocupação apenas com os naturais, e não com a ideia geral de número.

3.2.3 Os axiomas de Peano

De acordo com algumas pesquisas, num ponto Frege e Peano se equiparam: ambos aceitam a ideia de número como um conceito primitivo. Ou seja, embora a intensão seja dar uma definição à ideia do que seja número, na prática o que se faz é apenas formalizar a ideia (de número natural). Ao que parece, os pesquisadores da Etnomatemática estão mais preocupados em como a ideia de número se processa no cérebro humano (ALMEIDA, 2013, p. 147). Nesta análise, entender a forma como esta ideia se processa não é tão importante. Mas ter consciência da complexidade desse processo se faz necessário no sentido de buscar uma alternativa para intervir nas aulas sobre números inteiros. Como se está tratando de uma inovação na apresentação de conjuntos numéricos, o entendimento das propriedades destes conjuntos por parte dos estudantes pressupõe uma compreensão mínima das propriedades de cada conjunto numérico. A meta é ampliar essa ideia de número que quase se confunde com a ideia de número natural para a ideia de número inteiro. Não se está dizendo aqui que essas ideias estão desconexas. Por motivos já relatados, apenas as ideias de natural e inteiro estão sendo tratadas como extensão dessa ideia originária de número.

Como visto, Frege faz apenas uma definição formal do que seja número, que remete aos nossos números cardinais. Porém, segundo Almeida (2013, p. 147), partindo das noções de número (natural), unidade e da relação de "sucessor", Peano estabelece axiomas que podem ser enunciados como se segue:

Axioma $\mathbb{N}_1$ 1 é um número natural;

Axioma $\mathbb{N}_2$ Todo número natural possui um e apenas um sucessor (o sucessor de x será representado por $S(x)$);

Axioma $\mathbb{N}_3$ 1 não é sucessor de nenhum número natural;

Axioma $\mathbb{N}_4$ Se x e y forem números naturais e $S(x) = S(y)$, então $x = y$.

Axioma $\mathbb{N}_5$ Se 1 possui a propriedade $\mathscr{P}$ e se um número natural n qualquer também possuir $\mathscr{P}$ acarretar que $S(n)$ também possui $\mathscr{P}$, então todo número natural possui $\mathscr{P}$ (Princípio da Indução Finita).

O Princípio da Indução Finita, que está expresso no quinto dos enunciados citados anteriormente, pode ser formalmente escrito como abaixo (RIPOLL, 2015, p. 53; FERREIRA, 2013, p. 17):

Proposição 1 *Seja X um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e $n \in X \Rightarrow S(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.*

Observe-se que o zero não foi considerado nosso número natural inicial. Pois zero só ganharia status de número muito tempo depois (BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2010, p. 80). Mas, para esta análise, isto não é fundamentalmente importante. Voltando a Peano, ele também não diz o que é número. Embora não haja certeza de que sua preocupação também se voltasse à ideia de número, a noção de sucessor em Peano está muito próxima da correspondência um-a-um. Esta proximidade fica perceptível quando são abstraídas as diversas propriedades que se denominam os números de contar (RIPOLL, 2015, p. 2) e combinadas com um princípio de ordenação[2] (ALMEIDA, 2013, p. 148). A diferença é que Peano consegue caracterizar o conjunto dos números naturais de forma plena e desvinculada das práticas concretas de contagem.

3.3 Operações e relação de ordem nos naturais

3.3.1 Os elementos do conjunto

Além disso, em Matemática, para que o conjunto dos números naturais esteja bem estruturado, não basta a definição dos axiomas de Peano. É preciso munir $\mathbb{N}$ com as operações de adição e de multiplicação bem como com a relação de ordem para que o conjunto numérico esteja bem definido. Mas não se quer apenas trabalhar com o já existente formalismo. Esta investigação analisa a maneira como a ideia de número costuma ser construída no ambiente escolar e como pode ser abordada nas aulas diferentemente. Mas também dá a devida atenção à formalização dos conjuntos.

Diante disto, chama a atenção a profundidade no trabalho de Peano em relação ao de Frege. Enquanto a noção de equipotência de conjuntos em Frege depende de um ato de nominação, a noção de sucessor em Peano caracteriza plenamente todos os números naturais. O que se vê é uma relação interna entre os elementos do conjunto: o natural x ou é 0 (que não é sucessor de nenhum outro) ou é sucessor de algum elemento, tendo também seu sucessor. Portanto, a ideia de um mecanismo acumulador e outro generalizador na mente humana que permitem a possibilidade de contar infinitamente estão de alguma forma presentes neste princípio. E destaca-se aqui seu caráter estruturador. Como se vê, $\mathbb{N} = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), ...\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Não existem outros elementos naturais que não sejam estes.

Teorema 3.1 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.[3]

[2]O princípio de ordenação aqui citado não é necessariamente equivalente à noção de sucessor em Peano. Mas sim à uma noção intuitiva e também concreta de organizar os números naturais de maneira crescente.

[3]O teorema citado com sua demonstração se encontra no livro *A Construção dos Números*, de Jamil Ferreira. Para maiores averiguações: FERREIRA, 2013, p. 21.

Demonstração. Para demonstrar a afirmação acima, suponha-se que $X = \{0,1,2,3,...\}$ e $X \subset \mathbb{N}$. Nota-se que $0 \in X$ e também o sucessor de qualquer elemento nele contido. Por indução, $X = \mathbb{N}$. □

3.3.2 A adição nos naturais e suas propriedades

O Princípio da Indução também comprova a consistência da operação de adição nos naturais.

Definição 3.1 *A **adição** em $\mathbb{N}$ é a função $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida para m,n $\in \mathbb{N}$ por:*

$$m + 0 = m;$$

$$m + S(n) = S(m+n)$$

Fixado o valor de $m \in \mathbb{N}$, fica definida a soma com cada um dos números naturais. O Princípio de Indução garante que a soma está definida para todos os naturais. De fato, seja o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid m+n \text{ está bem definida}^{4}, \forall m \in \mathbb{N}\}$. Então, $0 \in A$ e $n \in A \Rightarrow S(n) \in A$. Isto é, A satizfaz as hipóteses do Princípio de Indução, portanto, $A = \mathbb{N}$.

Desde o Ensino Fundamental, é ensinado aos estudantes que a adição em $\mathbb{N}$ possui algumas propriedades básicas. Essas propriedades também podem ser demonstradas pelo Princípio de Indução.

Teorema 3.2 *São verdadeiras $\forall m,n,p \in \mathbb{N}$ as seguintes afirmações:*

1. *elemento neutro da adição: $n + 0 = n$;*
2. *comutatividade da adição: $m + n = n + m$;*
3. *associatividade da adição: $(m+n) + p = m + (n+p)$;*
4. *cancelamento da adição: $m + p = n + p \Rightarrow m = n$.*

Demonstração. Seja o conjunto $X_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n + 0 = n\}$. Nota-se que $0 \in X_1$, pois $0 + 0 = 0$, pela definição da adição. Agora, considere-se válido que $k + 0 = k$. Então, $(k+1) + 0 \overset{S(0)=1}{=} (k + S(0)) + 0 = S(k+0) + 0 = S(k) + 0 = S(k) = k+1$. Logo, $X_1 = \mathbb{N}$. Está demonstrada a propriedade do elemento neutro da adição. □

[4] Em alguns casos, a definição do objeto matemático é enunciado em termos de alguma forma da representação para esse objeto. Nestes casos, é preciso mostrar que o objeto fica *bem definido*, isto é, que, de fato, *independe da representação escolhida*. (...) As definições devem ser enunciadas da tal forma que o resultado encontrado seja sempre o mesmo - isto é, de forma que os objetos matemáticos não fiquem *mal definidos*. É preciso mostrar, portanto, que isto não ocorre (RIPOLL, 2016, p. 37).

Seja o conjunto $X_2 = \{n, m \in \mathbb{N} \mid m+n = n+m\}$. Nota-se que $0 \in X_2$, pois $m+0 = 0+m = m$, pela definição da adição e pela propriedade do elemento neutro. Agora, considere-se válido que $m+k = k+m$. Então, $m+(k+1) = m+S(k) = S(m+k) = S(k+m) = k+S(m) = k+S(0+m) = k+S(0)+m = k+1+m = (k+1)+m$. Logo, $X_2 = \mathbb{N}$. Está demonstrada a propriedade da comutatividade da adição. $\square$

Seja o conjunto $X_3 = \{m, n, p \in \mathbb{N} \mid (m+n)+p = m+(n+p)\}$. Nota-se que $0 \in X_3$, pois $(m+n)+0 = m+n = m+(n+0)$, pela definição da adição e pela propriedade do elemento neutro. Agora, considere-se válido que $(m+n)+k = m+(n+k)$. Então, $(m+n)+(k+1) = (m+n)+S(k) = S((m+n)+k) = S(m+(n+k)) = m+S(n+k) = m+(n+k+1) = m+(n+(k+1))$. Logo, $X_3 = \mathbb{N}$. Está demonstrada a propriedade da associatividade da adição. $\square$

Seja o conjunto $X_4 = \{m, n, p \in \mathbb{N} \mid m+p = n+p \Rightarrow m = n\}$. Nota-se que $0 \in X_4$, pois $m+0 = n+0 \Rightarrow m = n$, pela definição da adição e pela propriedade do elemento neutro. Agora, considere-se válido que $m+k = n+k \Rightarrow m = n$. Então, $m+(k+1) = (m+k)+1 = S(m+k) = S(n+k) = (n+k)+1 = n+(k+1) \Rightarrow m = n$, pela associatividade da adição. Logo, $X_4 = \mathbb{N}$. Está demonstrada a propriedade do cancelamento da adição. $\square$

3.3.3 A multiplicação nos naturais e suas propriedades

Além da adição, a multiplicação também está bem elucidada em $\mathbb{N}$.

Definição 3.2 *A **multiplicação** em $\mathbb{N}$ é a função $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida para $m,n \in \mathbb{N}$ por:*

$$m \cdot 0 = 0;$$

$$m \cdot S(n) = m \cdot n + m$$

Fixado o valor de $m \in \mathbb{N}$, também fica definida a multiplicação com cada um dos números naturais. O Princípio de Indução garante que a multiplicação está definida para todos os naturais. De fato, seja o conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n \textit{ está bem definida, } \forall m \in \mathbb{N}\}$. Então, $0 \in B$ e $n \in B \Rightarrow S(n) \in B$. Isto é, B satizfaz as hipóteses do Princípio de Indução, portanto, $B = \mathbb{N}$.

Desde o Ensino Fundamental, também é ensinado aos estudantes que a multiplicação em $\mathbb{N}$ possui algumas propriedades básicas. Essas propriedades também podem ser demonstradas pelo Princípio de Indução.

Teorema 3.3 *São verdadeiras $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$ as seguintes afirmações:*

1. *elemento neutro da multiplicação: $n \cdot 1 = n$;*

2. *distributividade da multiplicação em relação à adição:* $(m+n)\cdot p = m\cdot p + n\cdot p$;

3. *associatividade da multiplicação:* $(m\cdot n)\cdot p = m\cdot(n\cdot p)$;

4. *comutatividade da multiplicação:* $m\cdot n = n\cdot m$;

5. *se* $m\cdot n = 0$, *então,* $m = 0$ *ou* $n = 0$.

Demonstração. Seja o conjunto $Y_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n\cdot 1 = n\}$. Nota-se que $0 \in Y_1$, pois $0\cdot 1 = 0\cdot S(0) = 0.0+0 = 0$, pela definição da multiplicação. Agora, considere-se válido que $k\cdot 1 = k$. Então, $(k+1)\cdot 1 = (k+1)\cdot S(0) = (k+1)\cdot 0 + (k+1) = 0 + (k+1) = k+1$. Logo, $Y_1 = \mathbb{N}$. Está demonstrada a propriedade do elemento neutro da multiplicação. $\square$

Seja o conjunto $Y_2 = \{n,m \in \mathbb{N} \mid (m+n)\cdot p = m\cdot p + n\cdot p\}$. Nota-se que $0 \in Y_2$, pois $(m+n)\cdot 0 = 0$, pela definição da multiplicação. Agora, considere-se válido que $(m+n)\cdot k = m\cdot k + n\cdot k$. Então, usando as propriedades da adição, $(m+n)\cdot(k+1) = (m+n)\cdot S(k) = (m+n)\cdot k + (m+n) = m\cdot k + n\cdot k + (m+n) = (m\cdot k + m) + (n\cdot k + n) = m\cdot S(k) + n\cdot S(k) = m\cdot(k+1) + n\cdot(k+1)$. Logo, $Y_2 = \mathbb{N}$. Está demonstrada a propriedade da distributividade da multiplicação em relação à adição. $\square$

Seja o conjunto $Y_3 = \{m,n,p \in \mathbb{N} \mid (m\cdot n)\cdot p = m\cdot(n\cdot p)\}$. Nota-se que $0 \in Y_3$, pois $m\cdot 0 = n\cdot 0 = 0$, pela definição da multiplicação. Daí, $(m\cdot n)\cdot 0 = 0 = m\cdot 0 = m\cdot(n\cdot 0)$. Agora, considere-se válido que $(m\cdot n)\cdot k = m\cdot(n\cdot k)$. Então, $(m\cdot n)\cdot(k+1) = (m\cdot n)\cdot S(k) = (m\cdot n)\cdot k + m\cdot n = m\cdot n\cdot(k+1) = m\cdot(n\cdot(k+1))$. Logo, $Y_3 = \mathbb{N}$. Está demonstrada a propriedade da associatividade da multiplicação. $\square$

Seja o conjunto $Y_4 = \{m,n \in \mathbb{N} \mid m\cdot n = n\cdot m\}$. Nota-se que $0 \in Y_4$, pois $m\cdot 0 = 0$, pela definição da multiplicação. Quanto a $0\cdot m$, por indução em m, $0\cdot 0 = 0$. E, se $0\cdot k = 0$, então $0\cdot(k+1) = 0\cdot k + 0\cdot 1 = 0+0 = 0$. Então, também $0\cdot m = 0$. Agora, considere-se válido que $m\cdot k = k\cdot m$. Então, $m\cdot(k+1) = m\cdot k + m\cdot 1 = m\cdot k + m = (k+1)\cdot m$. Logo, $Y_4 = \mathbb{N}$. Está demonstrada a propriedade da comutatividade da multiplicação. $\square$

Seja o conjunto $Y_5 = \{m,n \in \mathbb{N} \mid m\cdot n = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } n = 0\}$. Por indução em m, nota-se que $0 \in Y_5$, pois $0\cdot n = n\cdot 0 = 0$, pela definição da multiplicação e pela propriedade da comutatividade. Agora, considere-se válido que $k\cdot n = n\cdot k = 0$. Então, $(k+1)\cdot n = n\cdot(k+1) = 0 \Rightarrow k\cdot n + 1\cdot n = n\cdot k + n\cdot 1 = 0 \Rightarrow 0+n = 0+n = 0 \Rightarrow n = n = 0$. Daí, $(k\cdot n = n\cdot k = 0) \Rightarrow (S(k)\cdot n = n\cdot S(k) = 0)$. Também por indução em n, nota-se que $0 \in Y_5$, pois $m\cdot 0 = 0\cdot m = 0$, pela definição da multiplicação e pela propriedade da comutatividade. Agora, considere-se válido que $m\cdot k = k\cdot m = 0$. Então, $m\cdot(k+1) = (k+1)\cdot m = 0 \Rightarrow m\cdot k + m\cdot 1 = k\cdot m + 1\cdot m = 0 \Rightarrow 0+m = 0+m = 0 \Rightarrow m = m = 0$. Daí, $(m\cdot k = k\cdot m = 0) \Rightarrow (m\cdot S(k) = S(k)\cdot m = 0)$. Ou seja, quando $m\cdot n = 0$, então, $m = 0$ ou $n = 0$. Reciprocamente, facilmente se conclui que $m = 0$ *ou* $n = 0 \Rightarrow m\cdot n = 0$. $\square$

Fica claro, então, que a soma $m+n$ significa tomar o sucessor n vezes a partir de m. Enquanto a multiplicação $m \cdot n$ significa somar n, m vezes, consigo mesmo.

3.3.4 A relação de ordem nos naturais

Falta apenas definir que $\mathbb{N}$ é ordenado. A ordem nos naturais é um caso particular de relações binárias sobre um conjunto. Ou seja, o ambiente para se estabelecer uma relação binária entre os elementos de um conjunto A é o produto cartesiano $A \times A$.

Definição 3.3 *Uma* ***relação binária*** *em um conjunto A é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times A$.*

No caso, relações binárias em $\mathbb{N}$ ocorrem no ambiente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Para que a relação seja de ordem, ela precisa satisfazer três condições.

Definição 3.4 *Uma relação binária $\mathscr{R}$ em um conjunto A é chamada uma* ***relação de ordem*** *se satisfaz as seguintes condições:*

1. *reflexiva: $a\mathscr{R}a$, $\forall a \in A$;*

2. *antissimétrica: $a\mathscr{R}b$, $b\mathscr{R}a \Rightarrow a = b, \forall a, b \in A$;*

3. *transitiva: $a\mathscr{R}b$, $b\mathscr{R}c \Rightarrow a\mathscr{R}c$, $\forall a, b, c \in A$.*

Considera-se aqui as relações de ordem elementares que são feitas no conjunto dos números naturais. Remetendo às contagens de associação um-a-um, quando feita uma comparação entre dois conjuntos tal que se constata haver mais elementos em um deles, sabe-se que o número deste conjunto é maior a partir de uma noção de ordenamento crescente dos naturais, a qual já foi citada anteriormente (item 3.2.3). Mas uma comparação entre naturais pode ser feita de diversas formas. É dada uma definição formal para ordem nos naturais abaixo.

Definição 3.5 *Sejam m,n $\in \mathbb{N}$.*

$$m \leq n \text{ se } \exists p \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = p + m.$$

$$m < n \text{ se } m \leq n \text{ e } m \neq n.$$

De fato, trata-se de uma relação de ordem. Pois $m\mathscr{R}m$, já que $m = 0 + m$, ou seja, $m \leq m$. Logo, cumpre com a condição de ser reflexiva. Se $m\mathscr{R}n, n\mathscr{R}m \Rightarrow m \leq n, n \leq m$. Daí, existem p e q tais que $n = p + m$ e $m = q + n$. Fazendo as devidas substituições, $n = p + q + n$. Pela propriedade do cancelamento nos naturais, $p + q = 0 \Rightarrow p = q = 0 \Rightarrow m = n$. Logo, cumpre com a condição de ser antissimétrica. Por fim, se $m\mathscr{R}n, n\mathscr{R}k \Rightarrow m \leq n, n \leq k$. Daí, existem p e q tais que $n = p + m$ e $k = q + n$. Fazendo as devidas substituições, $k = q + p + m$. Considerando $s = q + p$, então $k = s + m \Rightarrow m \leq k \Rightarrow m\mathscr{R}k$. Logo, cumpre com a condição de ser transitiva. Embora já se saiba que a relação de ordem para $\mathbb{N}$ definida acima cumpra as três condições, ainda não se sabe se ela é uma *ordem total*.

Definição 3.6 *Uma relação de ordem $\mathscr{R}$ em um conjunto A é dita ser uma* ***ordem total*** *se quaisquer dois elementos de A estão relacionados, ou seja: tem-se $a\mathscr{R}b$ ou $b\mathscr{R}a, \forall a, b \in A$. Caso contrário, $\mathscr{R}$ é dita uma* ***ordem parcial****.*

Intuitivamente, nota-se que a relação de ordem definida para $\mathbb{N}$ acima só pode recair em um destes três casos: $m = n, m > n$ ou $n > m$.

Teorema 3.4 *Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos que uma, e apenas uma, das relações seguintes ocorre:*

$$\mathbf{m} < \mathbf{n} \textit{ ou } \mathbf{m} = \mathbf{n} \textit{ ou } \mathbf{m} > \mathbf{n}$$

Este teorema é conhecido como ***Lei da Tricotomia dos Naturais****.*

Demonstração. Duas destas relações não podem ocorrer simultaneamente. Porque $m = n = 0$, já deixa claro que um não pode ser maior ou menor que o outro. E $m = 0 \neq n \Rightarrow m < n$ ou $m \neq 0 = n \Rightarrow m > n$. Para $m \neq n, m \neq 0 \neq n$, a incompatibilidade é a mesma. Quanto a $m < n$ e $m > n$ ocorrerem simultaneamente, $n = p + m$ e $m = q + n$. Fazendo a substituição, $m = q + p + m \Rightarrow p = q = 0 \Rightarrow m = n$. $\square$

Depois disto, o conjunto M que será apresentado comportará os três casos. Fixado o valor do natural m, considere-se o conjunto de naturais $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n = m, n < m, n > m,$ *em que uma e apenas uma das condições se verifica* $\}$. De fato, $0 \in M$ pois $m = 0$ ou $m > 0$. Não faz sentido $m < 0$, já que 0 não é sucessor de nenhum outro. Resta saber, $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \in M \Rightarrow k + 1 \in M$. Ora, se $k = m$, então $m + 1 = k + 1 \Rightarrow m < k + 1 \in M$. Se $k < m \Rightarrow k + 1 < m + 1 \Rightarrow m + 1 = p + k + 1, p \in \mathbb{N}^*$. Neste caso, se $p = 1, m = k + 1 \in M$. E se $p > 1, m > k + 1 \in M$. Por fim, se $k > m \Rightarrow k + 1 > m + 1 \Rightarrow m < k + 1 \in M$. Logo, pelo Princípio da Indução, $M = \mathbb{N}$. Portanto, a relação de ordem definida para $\mathbb{N}$ é uma ordem total. Com isso, esta discussão contempla toda a estrutura algébrica do conjunto dos números naturais $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$.

3.4 Rompendo com o senso numérico

Todas essas coisas levam a algumas constações. Primeiramente, que há notória diferença entre Frege e Peano: o primeiro tende a limitar-se a uma equiparação entre conjuntos e o outro abrange a infinitude dos naturais em seus axiomas. Também interessa notar a possibilidade da existência de uma ideia de número que está muito próxima do que se considera hoje número natural. De alguma forma, isto explica a dificuldade dos estudantes trabalharem com quantidades negativas. A proximidade da ideia de número com a ideia de número natural não é só uma impressão. As pessoas vão formando essa ideia a partir de suas atividades concretas, como a contagem. Neste momento, a ideia de número ainda está limitada ao chamado *senso numérico*.

> O senso numérico é, portanto, uma propriedade de um estímulo que é definida pelo número de elementos discrimináveis que contém. O senso numérico, portanto, envolve o conceito de número cardinal de um conjunto. (...) O senso numérico é, consequentemente, independente da linguagem e possui uma longa história evolucionária. (ALMEIDA, 2013, p. 62).

Na escola, os estudantes desenvolvem esse senso associando quantidades aos signos ou numerais. Daí, até mesmo ao efetuarem adições e subtrações, por exemplo, o número termina sendo associado à sua representação decimal (uma extensão da nominação presente no trabalho de Frege). Logo, o estudo dos números fica limitado às práticas de contar, representar e manipular alguns algoritmos. Por isso,

> (...) refletir sobre que propriedades da estrutura da conjunto $\mathbb{N}$ são necessárias para garantir a existência e a unicidade da representação de um número natural em um sistema posicional da base β. Esta reflexão é fundamental para o ensino de números naturais na escola básica, uma vez que grande parte do conteúdo lá tratado depende da representação decimal - incluindo os algoritmos para as operações elementares (RIPOLL, 2015, p. 24).

Contudo, até mesmo Frege e principalmente Peano superam essas práticas em seus trabalhos sobre a ideia de número natural. Como visto, os axiomas de Peano se diferenciam da correspondência um-a-um a partir da noção de sucessor. Deve-se, portanto, destacar aos estudantes as noções principais, rompendo com uma apresentação superficial e destacando a estrutura do conjunto. Por isso, é perceptível a adequação de que tais noções sejam trabalhadas na sala de aula também.

Enfim, diante de tudo isso, aqui neste capítulo foram colocados em paralelo o processo da formação da ideia de número e a formalização dos números naturais. Não há uma explicação definitiva de como ocorrem os processos internos da formação da ideia de número. Frege e Peano ao que parece apenas assumem que essa ideia existe. O primeiro formaliza uma definição para número cardinal, enquanto o outro propõe axiomas que expressam as propriedades do conjunto dos números naturais. Tanto a noção de equipotência de conjuntos de Frege quanto a noção de sucessor de Peano têm alguma relação com a correspondência um-a-um dos métodos de contagem. Entretanto, ambos conseguiram desvincular a ideia de número das práticas concretas. Observa-se a existência de senso comum que tende a equiparar a ideia de número natural com a ideia de número, mesmo sendo coisas diferentes.

Outra constatação é que a formalização dos números naturais está ligada a uma ideia bem mais elaborada de número. Tal elaboração será melhor detalhada e explorada no próximo capítulo.

Capítulo 4

Números inteiros e a subtração equivalente

4.1 Os números inteiros e a contextualização no ensino

Após se abordar a formalização dos naturais em paralelo com a formação da ideia de número, será construída uma discussão sobre o seguinte conjunto numérico:

$$\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Como se sabe, este é chamado de *conjunto dos números inteiros*. A primeira dúvida que pode surgir para um estudante é por que tal conjunto é representado pela letra $\mathbb{Z}$. Afinal de contas, os naturais são representados pela letra $\mathbb{N}$. Parece uma bobagem. Mas isto já pode representar o anúncio de um conjunto numérico que pressupõe uma maior elaboração. Na verdade, o $\mathbb{Z}$ é originário de uma palavra alemã, *Zahl*, que significa número (FERREIRA, 2013, p. 37). Coincidência ou não, a história dos números inteiros está ligada à de um famoso matemático alemão, a qual será abordada mais adiante.

Como visto, o conjunto dos números naturais está ligado às mais antigas práticas de contagem. Não é por acaso que os naturais são os números usados para contar. Mas a ideia de número inteiro não surgiu com a mesma utilidade. De fato, não se necessita de números negativos para fazer uma contagem. Porém, há indícios de que as crianças relacionem os inteiros negativos inicialmente com a contagem. Como destaca Wall (2014),

> Mesmo que algumas crianças nas regiões do norte enxerguem números negativos no termômetro, uma das primeiras representações que muitas crianças veem está na linha de números à esquerda do zero. As crianças tendem a generalizar suas habilidades de contagem para acomodar os números negativos... (p. 71)

Ainda que Wall (2014) esteja descrevendo o comportamento de crianças de uma determinada região, tal comportamento pode ser generalizado nas devidas proporções a todos os estudantes. Daí, algumas abordagens sobre números inteiros no ensino básico acertam quando associam esses números às noções concretas de contagem ou de medida (RIPOLL, 2016, p. 3).

Por outro lado, no entanto, na escola geralmente aos estudantes são apresentados os números racionais positivos antes mesmo de terem aulas sobre números inteiros. Só que os inteiros são um subconjunto dos racionais.

> A sequência na qual os diferentes números são abordados no ensino básico não é a mesma das inclusões dos conjuntos numéricos sob a perspectiva da Matemática, nem a mesma do desenvolvimento histórico. Por exemplo, no ensino básico as frações são introduzidas antes dos números negativos, enquanto na sequência matemática das inclusões tem-se $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (RIPOLL, 2015, p. XXXV).

Como já dito, nos primeiros anos do Ensino Fundamental são mais trabalhadas as noções de contagem e de medida. Nesta fase, há um forte movimento para um ensino dito "contextualizado". Para esta análise, talvez fosse melhor dizer que há uma ideia de *número fracionário* presente nas aulas de Matemática nos primeiros anos do Ensino Fundamental, que não é propriamente a ideia de *número racional*. Note-se que a definição de número racional já exige o conhecimento da ideia de número inteiro:

Definição 4.1 *Sejam os números $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Denomina-se todo número da forma $\boldsymbol{x} = \dfrac{p}{q}$ de número racional. Ou seja, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}$.*

Ora, os parâmetros curriculares para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, apontam para importância de trabalhar os diversos significados que podem ter um número racional. Dentre estes, estão os significados de parte/todo e de razão (BRASIL, 1998, p. 102). Ambos expressam relações entre números inteiros (sem considerar todos os elementos de $\mathbb{Z}$). Aparentemente, tais significados são explorados da maneira esperada pelos parâmetros. Em alguns problemas propostos aos estudantes aparece a ideia de razão: "... dois números estão na razão $a : b$". Esta ideia vem dos gregos antigos. Mas lá se tinha uma relação entre grandezas de mesmo tipo. Então, "a noção de razão usada na época não equivalia a uma fração entre números" (ROQUE, 2012, p. 117). Além disso, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, geralmente há o entendimento de que um inteiro não pode ser representado por uma fração. Ou seja, se $p > q$ e p é múltiplo de q, então o resultado da divisão $\dfrac{p}{q}$ é um inteiro, diferenciado daquilo que é entendido como parte.

> Até o início dos anos mais avançados do fundamental, os alunos partem dessas experiências com frações e outras instruções para construir uma concepção das frações baseadas na ideia de parte/todo. (...), a maioria das discussões sobre frações no ensino fundamental é baseada na noção de todo (ou, pode-se dizer, de unidade) e em problemas de divisão associados a isso (WALL, 2014, p. 114-115).

Isso mostra que o trabalho feito com alguns números racionais realmente não leva em consideração a ideia de número inteiro. Pois se limita a alguns números racionais positivos. Então, fica claro o seguinte: as ideias associadas às frações nos anos iniciais Ensino Fundamental estão mais ligadas (talvez por falta de um maior aprofundamento) à noção de medida e aos problemas onde se fazem presentes.

Além das noções de contagem e medida, os estudantes precisam também da noção de orientação para entender o que seja um número inteiro (RIPOLL, 2016, p. 3). Esta ideia é trabalhada muitas vezes pelo mesmo processo de tentar "contextualizar" as ideias matemáticas. Contextos de medição de altitudes, de medição de temperaturas, de saldos bancários e de saldos no placar de um torneio esportivo, por exemplo, podem no princípio ajudar a firmar nos estudantes a ideia de orientação. Mas isto é muito mais próximo de uma extensão da noção de medida. E aqui se enfatiza que esta tal contextualização não pode ser o fundamento da ideia de inteiro. Como o conjunto dos números inteiros tende a ser apresentado especificamente a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, pode-se afirmar que nesta fase os estudantes consigam um maior nível de abstração. Ou seja, o número pode ser trabalhado objetivamente como uma coisa, uma ideia sem necessidade de objetos sensíveis para existir.

4.2 Um panorama histórico dos números inteiros

Se para entender a ideia de número inteiro é necessário um maior nível de abstração, em que momento a Matemática aderiu a este requisito? Somente na primeira metade do século XIX, os inteiros juntamente com os complexos seriam aceitos como números de fato. Neste momento, foram fornecidas interpretações geométricas para suas estruturas algébricas e de ordem (RIPOLL, 2016, p. 8-9). Serão abordadas com maiores detalhes apenas as interpretações relativas aos números inteiros. Como se sabe, os números inteiros são apresentados em um reta orientada. O matemático suíço Jean-Robert Argand (1768-1822) foi o primeiro a propor alguma "realidade" aos números inteiros, num artigo intitulado *Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas* publicado entre 1813 e 1814 (RIPOLL, 2016, p. 9; ROQUE, 2012, p. 443). Neste momento, números inteiros negativos eram apenas considerados quantidades imaginárias. O que Argand descreve em seu artigo é a ideia de se tomar uma balança de dois pratos A e B. Inicialmente, no prato B não se coloca nenhuma quantidade. Já no prato A, partindo de uma unidade de peso ***a***, é possível ser colocada a quantidade de peso equivalente a ***a, 2a, 3a***, e tantos quantos se queira. Também é possível se fazer retiradas de pesos ***a*** até que a balança restabeleça o equilíbrio com a quantidade 0 no prato A. A ideia que Argand sustenta é de que se pode continuar retirando pesos do prato A, mesmo estando zerado. Basta para isso começar a colocar pesos ***a, 2a, 3a***, e tantos quanto se queira no prato B. Ou seja, colocar pesos no prato B equivale a retirar no prato A. Através da analogia desta balança na qual reúne as noções de quantidade absoluta e orientação, Argand consegue dar aos inteiros negativos uma realidade de números. Daí, as quantidades positivas e negativas representadas na balança podem ser também descritas na forma de uma reta orientada, com o zero como referencial. A proposta era que essas quantidades vistas como *imaginárias* deveriam ser consideradas *relativas*. A ideia de Argand permitiu também que as operações com números negativos ganhassem sentido. Na multiplicação, por exemplo, deve-se adotar a noção de reflexão.

Embora se deva dar o devido valor ao trabalho de Argand, este era considerado apenas um matemático marginal. Por outro lado, o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) já era um matemático de renome nesta época. Em 1831, Gauss publica sua obra *Metafísica das grandezas imaginárias* (RIPOLL, 2016, p. 15; ROQUE, 2012, p. 448). Ele foi o primeiro matemático influente a defender as quantidades imaginárias. Para Gauss, as quantidades imaginárias não precisavam de uma "realidade". Eram objetos plenamente abstratos com os quais se pode fazer relações de significado. A Matemática precisa apenas trabalhar com a enumeração e comparação destas relações. Nos números inteiros, a noção de orientação leva à relação de identidade ou oposição. Por exemplo, se tomarmos os números -1 e $+1$ temos objetos de espécies diferentes: um negativo e outro positivo. No entanto, o que vai importar não são suas substâncias, mas sim as relações que há entre eles. Por exemplo, um pode neutralizar o outro. A partir disto, as quantidades imaginárias foram reconhecidas como entidades matemáticas verdadeiras.

Visto tudo isso, nota-se que a construção da ideia de número inteiro requereu uma transformação profunda na ideia de número. Paulatinamente, surgiu a necessidade de uma ideia de número não apenas associada à representação de quantidades, onde a ideia de número natural se situa no contexto das práticas de contagem. Ora, número natural tem uma ligação muito forte com uma *ideia concreta de número*. Porém, a ideia de número inteiro passou por um processo que se situa na evolução da própria Matemática como ciência. Por isso, número inteiro está ligado a uma *ideia abstrata de número*. "A passagem dos números positivos para os negativos envolve uma ressignificação do próprio *conceito de número*" (RIPOLL, 2016, p. 3). Interessante é também constatar que uma maior abstração dos naturais se dá posteriormente ao reconhecimento dos números inteiros, embora abstração já existisse. Pois

> O desenvolvimento do conceito de número, apesar de ter sido impulsionado por necessidades concretas, implica um tipo de abstração. (...) Contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato. A matemática antiga não era puramente empírica nem envolvia somente problemas práticos (ROQUE, 2012, p. 39).

Enquanto somente anos mais tarde a proposição dos axiomas de Peano levaria à ideia de número natural separada da realidade concreta, a ideia de número inteiro já era algo bem abstrato desde do momento em que eram consideradas apenas "quantidades imaginárias".

Não se sabe ao certo se Peano foi influenciado por ambiente mais abstrato da Matemática. Só se pode afirmar que esta ideia mais elaborada de número também se estendeu aos naturais, já que podemos pensá-los como números inteiros positivos.

4.3 As classes de equivalência nos números inteiros

Após situado em seu contexto histórico, sabe-se que os elementos de $\mathbb{Z}$ são formalmente definidos como *classes de equivalência*. Para se obter classes de equivalência é necessário definir *relações de equivalência*. Lembre-se de que Gauss deixa claro que o importante é o significado das relações entre as entidades matemáticas. Ao que parece, parte-se desta ideia para definir os números inteiros. Mas das relações de que entidades são definidos os números inteiros? Ora, o conjunto dos números inteiros é construído a partir do conjunto dos números naturais (RIPOLL, 2015, p. 41; FERREIRA, 2013, p. 35). Mais especificamente, de relações entre os números naturais definem-se os números inteiros. A construção do número inteiro ocorre mediante uma relação binária entre naturais: *a subtração equivalente*. Esta relação binária corresponde a uma relação de equivalência. Então, a formalização de $\mathbb{Z}$ passa necessariamente pela especificação de cada um destes itens.

4.3.1 Classe de equivalência em uma relação

Diante do relatado sobre o pensamento de Gauss, entende-se que houve uma importância dada às relações entre objetos matemáticos que eram considerados "quantidades imaginárias". Ou seja, os registros citados da História da Matemática focam na cidadania dos números inteiros negativos (bem como dos complexos). Mas a conhecida formalização dos inteiros parte de relações binárias entre objetos que já tinham esta cidadania: os naturais. Para tal, define-se o que é uma relação de equivalência.

Definição 4.2 *Uma relação binária $\mathscr{R}$ em um conjunto A é chamada uma* ***relação de equivalência*** *se possuir as seguintes propriedades:*

1. *reflexiva: $a\mathscr{R}a$, $\forall a \in A$;*

2. *simétrica: $a\mathscr{R}b \Rightarrow b\mathscr{R}a, \forall a,b \in A$;*

3. *transitiva: $a\mathscr{R}b$, $b\mathscr{R}c \Rightarrow a\mathscr{R}c$, $\forall a,b,c \in A$.*

Mas por que é necessário definir uma relação de equivalência? Seja o conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ formado por pares ordenados de números naturais (a,b). Como visto, as operações de soma $+ : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e de multiplicação $\cdot : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estão bem definidas em $\mathbb{N}$. Entretanto, a operação de subtração em $\mathbb{N}$ não tem o mesmo significado. Pois se fizermos $(a-b)$ nem sempre a diferença será um número natural. Basta que para isso $a < b$. Para superar o impasse, a Matemática recorre à noção de relação de equivalência. Apesar do formalismo com que está definida acima, tal noção é amplamente trabalhada desde o Ensino Fundamental. Ela está presente na ideia de frações equivalentes, onde não por acaso é preservada a palavra equivalente (RIPOLL, 2016, p. 26). Dando sequência, note-se que as subtrações $(3-7)$ e $(1-5)$ não têm significado em $\mathbb{N}$. Pois os minuendos de cada subtração são menores do que os subtraendos. É comum nas salas de aula tais operações não fazerem o mínimo sentido para inúmeros estudantes. Por comparação, pode-se afirmar que $(3-7) = (1-5)$. De modo análogo, $(3+5) = (7+1)$. Daí, pode-se generalizar para a seguinte relação, que será simbolizada por $\simeq$:

Definição 4.3 *Em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, define-se a relação $\simeq$ por:*

$$(a,b) \simeq (c,d) \Longleftrightarrow a+d = b+c$$

Do exemplo citado, (3,7) $\simeq$ (1,5). Agora, é preciso provar que esta relação binária é uma relação de equivalência. Para isso, ela deve possuir as propriedades *reflexiva, simétrica* e *transitiva*.

Teorema 4.1 *A relação binária $\simeq$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. De fato, a relação é reflexiva pois $(a,b) \simeq (a,b)$, já que $a+b = b+a$. Isto é garantido porque a soma em $\mathbb{N}$ possui comutatividade. A relação é simétrica pois $(a,b) \simeq (c,d) \Rightarrow a+d = b+c \Rightarrow c+b = a+d \Rightarrow (c,d) \simeq (a,b)$. Isto também é garantido pela comutatividade da soma em $\mathbb{N}$. Para provar a transitividade da relação, sejam $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $(a,b) \simeq (c,d)$ e $(c,d) \simeq (e,f)$. Obtém-se as igualdades (1) e (2) abaixo. □

$$(a,b) \simeq (c,d) \Rightarrow a+d = b+c \Rightarrow a+d+f = b+c+f \tag{4.1}$$

$$(c,d) \simeq (e,f) \Rightarrow c+f = d+e \Rightarrow b+c+f = b+d+e \tag{4.2}$$

De (1) e (2), conclui-se que:

$$a+d+f = b+d+e \Rightarrow a+f = b+e \Rightarrow (a,b) \simeq (e,f) \tag{4.3}$$

Logo, a relação é transitiva. Isto é garantido pela propriedade cancelativa da adição em $\mathbb{N}$.

4.3.2 Uma relação como classe de equivalência

Então fica comprovado que $\simeq$ é uma relação de equivalência. Denomina-se $\simeq$ de *subtrações equivalentes*. A partir dela, sejam tomados pares ordenados de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que estão relacionados com $(3,7)$. Por exemplo, $(3,7) \simeq (1,5) \simeq (2,6) \simeq (4,8)$. Se forem tomados todos os pares que estão relacionados com $(3,7)$, então será formada a classe de equivalência $[(3,7)] = \{(3,7),(1,5),(2,6),(4,8),...\}$.

Definição 4.4 *Se $\mathscr{R}$ é uma relação de equivalência no conjunto A e $a \in A$, então o conjunto*

$$[a] = \{b \in A \mid b\mathscr{R}a\}$$

*é chamado de **classe de equivalência** determinada por a. Neste caso, o elemento a é chamado um representante da classe $[a]$.*

No exemplo, o par ordenado $(3,7)$ é um representante para a classe determinada. Mas $[(3,7)] = [(1,5)] = [(2,6)] = [(4,8)]$. Ou seja, qualquer elemento da classe de equivalência pode determiná-la e ser seu representante. Isto porque as propriedades da relação de equivalência implicam no seguinte: $a\mathscr{R}b \Leftrightarrow [a] = [b]$. Demonstrando, supõe-se $c \in [a] \Rightarrow c\mathscr{R}a$. Por transitividade, $b\mathscr{R}a \Rightarrow c\mathscr{R}b$. Daí, $c \in [b] \Rightarrow [a] \subset [b]$. Analogamente, $[b] \subset [a]$. Portanto, $[a] = [b]$. Reciprocamente, supõe-se $[a] = [b]$. Então, $a \in [a] = [b]$. Portanto, $a\mathscr{R}b$.

Observa-se que, pela relação de equivalência, cada par ordenado pertence a uma única classe de equivalência. Logo, ocorre uma partição do conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em classes pela relação $\simeq$. Assim, forma-se um conjunto de classes de equivalência.

Definição 4.5 *Seja $\mathscr{R}$ uma relação de equivalência no conjunto A. Então, o conjunto de todas as classes de equivalência determinadas em A pela relação $\mathscr{R}$ é chamado **conjunto quociente** de A pela relação $\mathscr{R}$ e denotado por:*

$$A/\mathscr{R} = \{[a] \mid a \in A\}.$$

A relação $\simeq$ determina o conjunto quociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\simeq$. Cada uma dessas classes de subtrações equivalentes constitui um novo objeto matemático, ao qual se nomina *número inteiro*. Portanto, o conjunto $\mathbb{Z}$ é formado pela união dessas classes de equivalência. Ou seja, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\simeq$.

Definição 4.6 *O conjunto quociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\simeq$, constituído pelas classes de equivalência $[(a,b)]$, se denota por $\mathbb{Z}$ e será chamado de conjunto dos números inteiros. Assim,*

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\simeq) = \{[(a,b)] \mid (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

4.4 Operações e relação de ordem nos inteiros

4.4.1 A noção intuitiva de subtração

Da mesma forma que em $\mathbb{N}$, é necessário munir $\mathbb{Z}$ de operações de adição e de multiplicação bem como da relação de ordem para que o conjunto numérico fique bem definido.

Diferentemente de $\mathbb{N}$, as operações em $\mathbb{Z}$ são definidas a partir de noção intuitiva de subtração. Logo, $[(a,b)] = (a-b)$. A ideia é representar a soma e o produto de duas classes de equivalência como uma classe de equivalência também. Neste momento, as operações em $\mathbb{Z}$ não serão identificadas com as operações em $\mathbb{N}$.

Assim, sejam as classes de equivalência $[(a,b)] = (a-b)$ e $[(c,d)] = (c-d)$. A soma $[(a,b)] + [(c,d)]$ será $(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d)$. Representa-se, então, o resultado como a classe de equivalência $[(a+c,b+d)]$. E a multiplicação $[(a,b)] \cdot [(c,d)]$ será $(a-b)\cdot(c-d) = ac-ad-bc+bd = (ac+bd)-(ad+bc)$. Representa-se, então, o resultado como a classe de equivalência $[(ac+bd,ad+bc)]$.

4.4.2 A adição nos inteiros

Definição 4.7 *Sejam* $[(a,b)]$ *e* $[(c,d)] \in \mathbb{Z}$*. Define-se a soma* $[(a,b)] + [(c,d)]$ *como sendo o inteiro* $[(a+c,b+d)]$.

É possível mostrar que a soma em $\mathbb{Z}$ está bem definida, ou seja, que o resultado independe dos representantes das classes de equivalência escolhidos. Sejam $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(c_1,d_1)$ e $(c_2,d_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tais que $(a_1,b_1) \simeq (a_2,b_2)$ e $(c_1,d_1) \simeq (c_2,d_2)$. Pela definição de $\simeq$, $a_1+b_2 = a_2+b_1$ e $c_1+d_2 = c_2+d_1$. Logo, pela comutatividade da soma em $\mathbb{N}$, tem-se que:

$$
\begin{gathered}
a_1+b_2+c_1+d_2 = a_2+b_1+c_2+d_1 \\
(a_1+c_1)+(b_2+d_2) = (a_2+c_2)+(b_1+d_1) \\
(a_1+c_1,b_1+d_1) \simeq (a_2+c_2,b_2+d_2)
\end{gathered}
$$

.

4.4.3 A multiplicação nos inteiros

Definição 4.8 *Sejam* $[(a,b)]$ *e* $[(c,d)] \in \mathbb{Z}$*. Define-se o produto* $[(a,b)] \cdot [(c,d)]$ *como sendo o inteiro* $[(ac+bd,ad+bc)]$.

Também é possível mostrar que a multiplicação em $\mathbb{Z}$ está bem definida, ou seja, que o resultado independe dos representantes das classes de equivalência escolhidos. Sejam $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(c_1,d_1)$ e $(c_2,d_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tais que $(a_1,b_1) \simeq (a_2,b_2)$ e $(c_1,d_1) \simeq (c_2,d_2)$. Pela definição de $\simeq$, $a_1+b_2 = a_2+b_1$ e $c_1+d_2 = c_2+d_1$. Usando as propriedades da adição em $\mathbb{N}$, tem-se que:

$$
\begin{gathered}
(a_1+b_2)\cdot(c_1+d_2) = (a_2+b_1)\cdot(c_2+d_1) \\
a_1c_1+a_1d_2+b_2c_1+b_2d_2 = a_2c_2+a_2d_1+b_1c_2+b_1d_1 \\
a_1c_1+a_1d_2+b_2c_1+b_2d_2+b_2d_2 = a_2c_2+a_2d_1+b_1c_2+b_1d_1+b_2d_2
\end{gathered}
$$

Vê-se que $b_2c_1 + b_2d_2 = b_2c_2 + b_2d_1$. Fazendo a substituição no primeiro membro e adicionando c_1d1 a ambos os membros, tem-se:

$$a_1c_1 + a_1d_2 + b_2c_2 + b_2d_1 + b_2d_2 = a_2c_2 + a_2d_1 + b_1c_2 + b_1d_1 + b_2d_2$$
$$a_1c_1 + a_1d_2 + b_2c_2 + b_2d_1 + b_2d_2 + b_1d_1 = a_2c_2 + a_2d_1 + b_1c_2 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_1d_1$$

Desde de que $b_1c_1 + b_1d_2 = b_1c_2 + b_1d_1$, através de manipulações algébricas, obtém-se:

$$a_1c_1 + b_2c_2 + b_1d_1 + a_1d_2 + b_2d_1 + b_2d_2 = a_2c_2 + a_2d_1 + b_1c_1 + b_1d_2 + b_1d_1 + b_2d_2$$

Como $a_1d_2 + b_2d_2 = a_2d_2 + b_1d_2$ e substituindo-se no primeiro membro,

$$a_1c_1 + b_2c_2 + b_1d_1 + a_2d_2 + b_1d_2 + b_2d_1 = a_2c_2 + b_1c_1 + b_2d_2 + a_2d_1 + b_1d_2 + b_1d_1$$

$$a_1c_1 + b_2c_2 + b_1d_1 + a_2d_2 + b_2d_1 = a_2c_2 + b_1c_1 + b_2d_2 + a_2d_1 + b_1d_1$$

Segue-se também que $a_2d_1 + b_1d_1 = a_1d_1 + b_2d_1$. Fazendo a substituição no segundo membro,

$$a_1c_1 + b_1d_1 + a_2d_2 + b_2c_2 + b_2d_1 = a_2c_2 + b_2d_2 + b_1c_1 + a_1d_1 + b_2d_1$$
$$(a_1c_1 + b_1d_1) + (a_2d_2 + b_2c_2) = (a_1d_1 + b_1c_1) + (a_2c_2 + b_2d_2)$$
$$(a_1c_1 + b_1d_1) + (a_2d_2 + b_2c_2) = (a_2c_2 + b_2d_2) + (a_1d_1 + b_1c_1)$$
$$(a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1) \simeq (a_2c_2 + b_2d_2, a_2d_2 + b_2c_2)$$

4.4.4 As propriedades das operações nos inteiros

Como se sabe, na Educação Básica costuma-se ensinar que as operações de adição e de multiplicação em $\mathbb{Z}$ também possuem as propriedades abaixo.

Teorema 4.2 *São verdadeiras* $\forall\ [(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in \mathbb{Z}$ *as seguintes afirmações:*

1. *associatividade da adição:* $([(a,b)] + [(c,d)]) + [(e,f)] = [(a,b)] + ([(c,d)] + [(e,f)])$;
2. *comutatividade da adição:* $[(a,b)] + [(c,d)] = [(c,d)] + [(a,b)]$;
3. *elemento neutro da adição:* $\exists\ z \in \mathbb{Z}$ *tal que* $[(a,b)] + z = [(a,b)]$;
4. *elemento inverso da adição:* $\forall\ [(a,b)]\ \exists\ [(a',b')] \in \mathbb{Z}$ *tal que* $[(a,b)] + [(a',b')] = z$;

5. *associatividade da multiplicação:* $([(a,b)]\cdot[(c,d)])\cdot[(e,f)] = [(a,b)]\cdot([(c,d)]\cdot[(e,f)])$*;*

6. *comutatividade da multiplicação:* $[(a,b)]\cdot[(c,d)] = [(c,d)]\cdot[(a,b)]$*;*

7. *elemento neutro da multiplicação:* $\exists\ u \in \mathbb{Z}$ *tal que* $[(a,b)]\cdot u = [(a,b)]$*;*

8. *cancelamento da multiplicação:* $[(a,b)]\cdot[(e,f)] = [(c,d)]\cdot[(e,f)] \Rightarrow [(a,b)] = [(c,d)]$*;*

9. *distributividade da multiplicação em relação à adição:* $([(a,b)]+[(c,d)])\cdot[(e,f)] = [(a,b)]\cdot[(e,f)]+[(c,d)]\cdot[(e,f)]$.

Demonstração. Para demonstrar as propriedades acima, serão usadas as propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{N}$.

1. (Associatividade da adição $\mathbb{Z}$) Observa-se que $([(a,b)]+[(c,d)])+[(e,f)] = [(a+c,b+d)]+[(e,f)] = [((a+c)+e,(b+d)+f)] = [(a+(c+e),b+(d+f)] = [(a,b)]+[(c+e,d+f)] = [(a,b)]+([(c,d)]+[(e,f)])$. $\square$

2. (Comutatividade da adição $\mathbb{Z}$) Observa-se que $[(a,b)]+[(c,d)] = [(a+c,b+d)] = [(c+a,d+b)] = [(c,d)]+[(a,b)]$. $\square$

3. (Elemento neutro da adição $\mathbb{Z}$) Considere-se $z = [(x,y)] \in \mathbb{Z}$ tal que $[(a,b)]+[(x,y)] = [(a,b)]$. Daí, $[(a,b)]+[(x,y)] = [(a,b)] \Rightarrow [(a+x,b+y)] = [(a,b)] \Rightarrow a+x = a$ e $b+y = b \Rightarrow x = 0$ e $y = 0$. Então, $z = [(0,0)] = \{(n,n),\forall n \in \mathbb{N}\}$ é o elemento neutro da adição em $\mathbb{Z}$. $\square$

4. (Elemento inverso da adição $\mathbb{Z}$) Se $[(a,b)]+[(a',b')] = z$, que é o elemento neutro da adição, então $(a+a',b+b') = [(0,0)] \Rightarrow a+a'+0 = b+b'+0 \Rightarrow a+a' = b+b' \Rightarrow a'+a = b+b' \Rightarrow (a',b') = (b,a)$. Logo, $[(a',b')] = [(b,a)]$ é a forma do inverso aditivo $\forall\ [(a,b)] \in \mathbb{Z}$. $\square$

5. (Associatividade da multiplicação $\mathbb{Z}$) Observa-se que $([(a,b)]\cdot[(c,d)])\cdot[(e,f)] = [(ac+bd,ad+bc)]\cdot[(e,f)] = [((ac+bd)\cdot e+(ad+bc)\cdot f,(ac+bd)\cdot f+(ad+bc)\cdot e] = [(ace+bde+adf+bcf,acf+bdf+ade+bce)] = [(ace+adf+bcf+bde,acf+ade+bce+bdf)] = [(a\cdot(ce+df)+b\cdot(cf+de),a\cdot(cf+de)+b\cdot(ce+df))] = (a,b)\cdot(ce+df,cf+de) = [(a,b)]\cdot([(c,d)]\cdot[(e,f)])$. $\square$

6. (Comutatividade da multiplicação $\mathbb{Z}$) Observa-se que $[(a,b)]\cdot[(c,d)] = [(ac+bd,ad+bc)] = [(ca+db,cb+da)] = [(c,d)]\cdot[(a,b)]$. $\square$

7. (Elemento neutro da multiplicação $\mathbb{Z}$) Considere-se $u = [(x,y)]$ tal que $[(a,b)] \cdot [(x,y)] = [(a,b)]$. Então, $[(a,b)] \cdot [(x,y)] = [(a,b)] \Rightarrow [(ax+by, ay+bx)] = [(a,b)] \Rightarrow ax+by+b = a+ay+bx \Rightarrow ax+b\cdot(y+1) = a\cdot(1+y)+bx \Rightarrow (ax,bx) = (a\cdot(1+y), b\cdot(1+y)) \Rightarrow x = 1+y \Rightarrow u = [(1+y,y)]\ \forall\, y \in \mathbb{N}$. Um representante para a classe de equivalência é $(1,0)$, quando $y=0$. Logo, $u = [(1,0)]$ é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{Z}$. $\square$

8. (Cancelamento da multiplicação) Observa-se que $[(a,b)] \cdot [(e,f)] = [(c,d)] \cdot [(e,f)] \Rightarrow [(ae+bf, af+be)] = [(ce+df, cf+de)] \Rightarrow ae+bf+cf+de = af+be+ce+df \Rightarrow e\cdot(a+d)+f\cdot(b+c) = e\cdot(b+c)+f\cdot(a+d) \Rightarrow a+d = b+c \Rightarrow a+d = c+b \Rightarrow [(a,b)] = [(c,d)]$. $\square$

9. (Distributividade da multiplicação em relação à adição) Por fim, observa-se que $([(a,b)] + [(c,d)]) \cdot [(e,f)] = [(a+c, b+d)] \cdot [(e,f)] = [((a+c)\cdot e + (b+d)\cdot f, (a+c)\cdot f + (b+d)\cdot e)] = [((a+c)\cdot e, (a+c)\cdot f)] + [((b+d)\cdot f, (b+d)\cdot e)] = [(ae+ce, af+cf)] + [(bf+df, be+de)] = [(ae,af)] + [(ce,cf)] + [(bf,be)] + [(df,de)] = [(ae,af)] + [(bf,be)] + [(ce,cf)] + [(df,de)] = [(ae+bf, af+be)] + [(ce+df, cf+de)] = [(a,b)] \cdot [(e,f)] + [(c,d)] \cdot [(e,f)]$. $\square$

4.4.5 A relação de ordem nos inteiros

Agora, só falta definir a relação de ordem em $\mathbb{Z}$. Mas não é possível fazer isso a partir da noção intuitiva de subtração, usada para definir a soma e a multiplicação em $\mathbb{Z}$. Pois a subtração nem sempre tem significado em $\mathbb{N}$. Dessa forma,

Definição 4.9 *A relação de ordem em $\mathbb{Z}$ é definida por*

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \Leftrightarrow a+d \leq b+c$$

*Diz-se ainda que $[(a,b)] < [(c,d)]$ se $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ e $[(a,b)] \neq [(c,d)]$, e a denomina-se **ordem estrita**.*

Demonstração. Como já se sabe, para ordem em $\mathbb{Z}$ estar bem definida é preciso cumprir as três condições: reflexiva, antissimétrica e transitiva. De fato, é reflexiva, pois $[(a,b)] \leq [(a,b)] \Leftrightarrow a+b \leq b+a$. Também é antissimétrica, pois se $[(a,b)] \leq [(c,d)] \Leftrightarrow a+d \leq b+c$ e $[(c,d)] \leq [(a,b)] \Leftrightarrow c+b \leq a+d$, então existem p e q tais que $b+c = p+a+d$ e $a+d = q+b+c$. Fazendo as substituições, $a+d = q+p+a+d$. Daí, $p+q = 0 \Rightarrow p = q = 0 \Rightarrow a+d = b+c \Rightarrow a-b = c-d \Rightarrow [(a,b)] = [(c,d)]$. E também é transitiva, já que se $[(a,b)] \leq [(c,d)] \Leftrightarrow a+d \leq b+c$ e $[(c,d)] \leq [(e,f)] \Leftrightarrow c+f \leq d+e$, então existem p e q tais que $b+c = p+a+d$ e $d+e = q+c+f$. Sendo $p+q = s$ e fazendo as substituições,

$d+e=q+c+f \Rightarrow d+e+b=q+c+b+f \Rightarrow d+e+b=q+p+a+d+f \Rightarrow e+b=q+p+a+f \Rightarrow e+b=s+a+f \Rightarrow a+f \leq e+b \Rightarrow [(a,b)] \leq [(e,f)]$. $\square$

Só que ainda falta saber se a relação de ordem acima que foi definida para $\mathbb{Z}$ é uma ordem total. Assim,

Teorema 4.3 *Para quaisquer $[(a,b)],[(c,d)] \in \mathbb{Z}$, temos que uma, e apenas uma, das relações seguintes ocorre:*

$$[(\mathbf{a},\mathbf{b})] < [(\mathbf{c},\mathbf{d})] \text{ ou } [(\mathbf{a},\mathbf{b})] = [(\mathbf{c},\mathbf{d})] \text{ ou } [(\mathbf{a},\mathbf{b})] > [(\mathbf{c},\mathbf{d})]$$

*Este teorema é conhecido como **Lei da Tricotomia dos Inteiros**.*

Demonstração. Bem, dados $[(a,b)],[(c,d)] \in \mathbb{Z}$, pela tricotomia dos naturais, necessariamente uma, e somente uma, das situações ocorre: $a+d < b+c; b+c < a+d; a+d = b+c$. $\square$

Com isso, esta discussão contempla toda estrutura algébrica do conjunto dos números inteiros $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$.

4.5 Uma cópia algébrica

No primeiro capítulo, já foi dito que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, isto é, $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Ao menos no Ensino Médio, são frequentes aulas de Matemática onde se ensina que os números naturais estão contidos no conjunto dos números inteiros. Porém, o que torna verdadeiro um número natural ser equiparado a um inteiro positivo? Especificando melhor, será que existe alguma relação entre as ideias de número natural e de número inteiro?

Definidas as estruturas $(\mathbb{N},+,\cdot,\leq)$ e $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$, ainda não há nenhuma garantia de que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Porém, se $a > b$ no elemento $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$, a subtração $(a-b)$ terá como resultado um número natural. Então, $\forall [(a,b)] \in \mathbb{Z},\ a > b \Rightarrow a-b = n,\ n \in \mathbb{N}$. Logo, há indícios de que em $\mathbb{Z}$ existe um subconjunto que está em bijeção com $\mathbb{N}$.

Definição 4.10 *Seja $\bar{\mathbb{N}} = \{[(n,0)] \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}$ e a função*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{N} &\longrightarrow \bar{\mathbb{N}} \\ n &\mapsto [(n,0)] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Observa-se que $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow [(x_1,0)] = [(x_2,0)] \Rightarrow x_1 - 0 = x_2 - 0$. Daí, pela relação $\simeq$, $x_1 - 0 = x_2 - 0 \Leftrightarrow x_1 + 0 = x_2 + 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. Logo, ϕ é injetiva. Agora, já foi comentado que $\forall [(a,b)] \in \mathbb{Z},\ a > b \Rightarrow a-b = n,\ n \in \mathbb{N}$. Assim, $a-b = n-0 \Rightarrow [(a,b)] = [(n,0)]$. Logo, ϕ é sobrejetiva. Com isso, está demonstrado que ϕ é bijetiva. Entretanto, apenas provar a bijeção $\bar{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}$ não é suficiente. Também é necessário saber se as operações de adição e de multiplicação bem como a relação de ordem se comportam da mesma forma que em $\mathbb{N}$. Então, deve-se demonstrar também que

Definição 4.11

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$$
$$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$
$$a \leq b \Leftrightarrow \phi(a) \leq \phi(b)$$

Demonstração. De fato, observa-se que

$$\phi(a+b) = [(a+b,0)] = a+b-0 = a+b = (a-0)+(b-0) = [(a,0)]+[(b,0)] = \phi(a)+\phi(b)$$

$$\phi(a \cdot b) = [(a \cdot b,0)] = [(a \cdot b+0,0+0)] = [(a \cdot b+0 \cdot 0, a \cdot 0+b \cdot 0)] = [(a,0)] \cdot [(b,0)] = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

Quanto à relação de ordem,

$$(\Longrightarrow) a \leq b \Rightarrow a+0 \leq b+0 \Rightarrow [(a,0)] \leq [(b,0)] \Rightarrow \phi(a) \leq \phi(b)$$
$$(\Longleftarrow) \phi(a) \leq \phi(b) \Rightarrow [(a,0)] \leq [(b,0)] \Rightarrow a-0 \leq b-0 \Rightarrow a \leq b$$

□

Com isso, fica provado que $\bar{\mathbb{N}}$ se comporta da mesma forma que $\mathbb{N}$, e que as operações de ambos os conjuntos se identificam. Isto é, que a estrutura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ possui uma *cópia* da estrutura $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$. Portanto, se pode considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Teorema 4.4 *Seja $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$. Então, vale uma e somente uma das alternativas:*

$$(i)[(a,b)] = [(0,0)];$$
$$(ii) \exists n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \; tal \; que \; [(0,n)];$$
$$(iii) \exists n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \; tal \; que \; [(n,0)].$$

Demonstração. Da noção intuitiva de subtração $[(a,b)] = (a-b)$, pode-se refletir sobre os casos seguintes:

1. Quando $a = b, a-b = 0$. Neste caso, o par ordenado $(0,0)$ é o grande representante do número inteiro $[(0,0)] = \{(n,n), \forall n \in \mathbb{N}\}$;

2. Quando $a < b$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = n+a \Rightarrow a+n = 0+b \Rightarrow (a,b) \simeq (0,n) \Rightarrow [(a,b)] = [(0,n)]$;

3. E quando $a > b$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = n+b \Rightarrow a+0 = n+b \Rightarrow (a,b) \simeq (n,0) \Rightarrow [(a,b)] = [(n,0)]$;

□

Desse teorema, segue que $\mathbb{Z}$ pode ser escrito como união disjunta de três subconjuntos: $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$, onde

1. $[(0,0)] = \mathbf{0}$ é o zero (isto é, o neutro aditivo) de $\mathbb{Z}$;
2. $\mathbb{Z}^+ = \bar{\mathbb{N}}^* = \{[(n,0)] \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a > \mathbf{0}\}$ é conjunto dos inteiros positivos ou inteiros maires que zero, que é identificado com $\mathbb{N}$;
3. $\mathbb{Z}^- = \{[(0,n)] \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a < \mathbf{0}\}$ é conjunto dos inteiros negativos ou inteiros menores que zero.

4.6 A regra dos sinais

Além de tudo isso, ainda cabe uma análise sobre a conhecida *regra dos sinais*. Na Educação Básica, isso é também trabalhado com os estudantes na maioria das vezes por transferência forçada. Ou seja, aquela história do "É assim e pronto!" Porém, tal regra é consequência direta da estrutura de $\mathbb{Z}$.

Teorema 4.5 *Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$. Então:*

1. $p \cdot 0 = 0$;
2. $-(-p) = p$;
3. $p \cdot (-q) = (-p) \cdot q = -(p \cdot q)$;
4. $(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$.

Demonstração. Demonstrando, sejam $p = [(x,y)]$ e $q = [(u,v)]$. Ora, $p \cdot 0 = [(x,y)] \cdot [(0,0)] = [(x \cdot 0 + y \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y)] = [(0+0, 0+0)] = [(0,0)] = 0$. □

O inverso aditivo de $p = [(x,y)]$ é $-p = [(y,x)]$. Portanto, reciprocamente o inverso aditivo de $-p = [(y,x)]$ é $p = [(x,y)]$. Isto é, $-(-p) = p$. □

Observa-se que $p \cdot (-q) = [(x,y)] \cdot [(v,u)] = [(x \cdot v + y \cdot u, x \cdot u + y \cdot v)] = [(y \cdot u + x \cdot v, y \cdot v + x \cdot u)] = [(y,x)] \cdot [(u,v)] = (-p) \cdot q$. E, já que $p \cdot (-q) = (-p) \cdot q = [(x \cdot v + y \cdot u, x \cdot u + y \cdot v)]$ e $p \cdot q = [(x \cdot u + y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u)]$, então $p \cdot (-q) = (-p) \cdot q = -(p \cdot q)$. □

Por fim, $(-p) \cdot (-q) = [(y,x)] \cdot [(v,u)] = [(y \cdot v + x \cdot u, y \cdot u + x \cdot v)] = [(x \cdot u + y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) = p \cdot q$. □

4.7 Número como quantidade e número como entidade

Como visto, os conjuntos númericos são estruturas bem definidas. A discussão sobre a evolução de uma ideia de número conduziu a uma ideia de elementos munidos de operações e relações. Para definir os números naturais, bastaram apenas os axiomas de Peano. Tais números estão muito ligados a uma noção primária de correspondência um-a-um. Mas a noção de sucessor conseguiu desprender os naturais de sua utilidade prática, definindo-os com uma maior abstração. Embora os axiomas de Peano sejam da segunda metade do século XIX, os números naturais sempre possuíram status de números. Por outro lado, para que os números inteiros ganhassem tal status, foi necessário uma ideia de número muito mais abrangente que aquela ligada à correspondência um-a-um. Somente a partir das ideias de quantidades relativas de Argand e de entidades matemáticas dotadas de relações de Gauss é que os inteiros negativos tiveram aceitação garantida. Isto é particularmente importante para a prática escolar na Educação Básica. Do ponto de vista da História da Matemática e da Etnomatemática, se a definição da ideia de número está ligada às práticas, é preciso considerar que a Matemática possui um conjunto de práticas que estão em constante modificação. Portanto, os mais diversos contextos com suas práticas matemáticas contribuíram para definições do que seria um número e suas classificações: natural, inteiro, racional, real, complexo. Do ponto de vista das realidades concretas, é bem mais fácil apreender a ideia de número natural do que a ideia de número inteiro. Qualquer turma de estudantes da Educação Básica deixa isso bem claro. Mas, do ponto de vista da própria Matemática como ciência, não se pode deixar as aulas limitadas a uma contextualização que não permite ao estudante desenvolver uma maior abstração. Por isso, é preciso destacar como os números são construídos, destacar as ideias que estruturam os conjuntos. Como se viu, as ideias de sucessor e de relações de equivalência são adequadas ao entendimento dos estudantes.

Ao finalizar este capítulo, chama-se a atenção para dois fatos. Primeiramente, durante a definição de $\mathbb{Z}$, constata-se a existência de um subconjunto seu ($\bar{\mathbb{N}}$) que é uma cópia algébrica de $\mathbb{N}$. Para esta análise, existe mais do que uma definição de números. Obviamente, quando as estruturas $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ e $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ são definidas, não se considera inicialmente que exista uma bijeção entre um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$, bem como que as operações e as relações ordem sejam equivalentes em ambos os conjuntos. Por isso, são necessárias demonstrações que deixem clara a validade disto. Então, mesmo que em um momento histórico a ideia de número precisasse de uma realidade concreta e em outra época se viu que isso não era mais necessário, isso não quer dizer que haja necessariamente duas ideias de número. Há apenas duas formas de se definir o que é um número: a ideia de número como *quantidade* e a ideia de número como *entidade*. Alguns dessas entidades matemáticas têm representações na realidade concreta, podem ser expressas como quantidades. Já outras, mesmo não possuindo suas representações correspondentes no mundo sensível, continuam sendo verdadeiramente números. Isto ficou nítido nas discussões e demonstrações neste capítulo.

Outro fato muito importante é que a construção de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ implica basicamente na inclusão dos inversos aditivos dos números naturais, ou seja, os números negativos. Do teorema (4.4) e da propriedade do inverso aditivo da adição em $\mathbb{Z}$, é fácil concluir que $[(n,0)]$ e $[(0,n)]$ são inversos aditivos. Logo, $\forall[(a,b)] \in \mathbb{Z}$, tem-se que $[(a,b)] \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow [(b,a)] \in \mathbb{Z}^-$. Estando os inteiros definidos por classes, passa-se a ser possível resolver qualquer subtração, mesmo aquelas que não têm significado em $\mathbb{N}$. Para as aulas de matemática na Educação Básica, isso é fundamental. Pois fica não só assegurado que a notação $+n$ ou $-n$, com $n \in \mathbb{N}$, dá conta de representar todos os elementos de $\mathbb{Z}$ (RIPOLL, 2016, p. 47). Mas que a aprendizagem dos números depende do entendimento das propriedades de cada conjunto e não de contextos de aplicações práticas. Embora tenha-se destacado aqui que saber e prática não estão dissociados, as práticas que estão realmente ligadas à ideia de número são aquelas que se identificam com a própria prática científica em Matemática. Portanto, ao menos naquilo que diz respeito à ideia de número, a ciência Matemática é o paradigma mais adequado à prática escolar.

Além disso, a tomada de definições de maneira independente para $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ dá margem para uma tomada de definição nova: uma construção dos números inteiros a partir dos axiomas de Peano. Ora, Peano definiu axiomas que captam as propriedades dos naturais. Diferente de Frege, ele não nominou os naturais. Só os definiu. Ora, a possibilidade da proposição de axiomas não se limita necessariamente às propriedades dos naturais. Então, pode-se considerar que existem números anteriores ao zero que não são quantidades no sentido concreto que tem essa palavra. A ideia que entra em cena com essa consideração é a noção de antecessor. O próximo capítulo também destacará esta ideia.

Capítulo 5

Novo Modo de Construção dos Inteiros

5.1 Introdução

Conforme o título do capítulo sugere, na abordagem aqui se procura uma forma diferenciada de enxergar os números inteiros, com uma apresentação mais semelhante ao que ocorre com os números naturais, buscando se ter uma interpretação mais "natural" destes, ao menos do ponto de vista didático. Conforme observado no capítulo 3, os números naturais, com todas as suas operações e propriedades, são basicamente consequências do enfileiramento dos objetos sucessor a sucessor, tendo como ponto de partida um elemento denotado por 0. Já se for observada a construção para os inteiros, abordada no capítulo 4, os mesmos também podem ser enfileirados através da seguinte extensão da definição de função sucessora aos inteiros por:

$$S_{\mathbb{Z}}([(m,n)]) = [(S_{(\mathbb{N})}(m),n)];\; m,n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

A diferença substancial no caso dos inteiros é que, não existe um ponto de partida e a "fila" se estende indefinidamente em duas direções, que serão distinguidas como direção dos números sucessores e a outra a dos números antecessores. Nesse caso, nomeando-se algum elemento da fila como elemento de referência (o qual é representado por 0), serão construídos os inteiros, com todas as suas operações e propriedades, como visto no capítulo anterior, simplesmente como consequência desse enfileiramento, como ocorre com os números naturais.

5.2 Extensão dos Axiomas de Peano aos Inteiros

A função sucessora definida nos inteiros por 5.1, satisfaz propriedades que serão suficientes e utilizadas, nesse capítulo, como axiomas para a construção dos inteiros, com todas as suas propriedades conhecidas, conforme apresentadas no capítulo anterior, quais sejam:

$\mathbb{P}_1$ Todo inteiro tem um sucessor e um antecessor, únicos e distintos;

$\mathbb{P}_2$ A função sucessora é bijetiva e sua inversa é a função antecessora

$\mathbb{P}_3$ (Princípio de Indução Inteira) Se um subconjunto $X \subset \mathbb{Z}$ satisfaz:

$$\begin{cases} \text{a) } X \neq \emptyset; \\ \text{b) } x \in X \Rightarrow S_{\mathbb{Z}}(x) \in X,\ A_{\mathbb{Z}}(x) \in X. \end{cases} \Longrightarrow X = \mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Para justificar as propriedades $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, que em verdade são propriedades semelhantes, basta lembrar das propriedades da função $S_{\mathbb{N}}(n) = n+1$, a definição dos inteiros como classe de equivalência de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (representado por $[(m,n)]$; $m,n \in \mathbb{N}$), a definição da função sucessora dada por (5.1) e a antecessora, definida em $\mathbb{Z}$ por:

$$A_{\mathbb{Z}}([(m,n)]) = [(m, S_{\mathbb{N}}(n))];\ m,n \in \mathbb{N}, \tag{5.3}$$

mais o fato simples de se verificar que $[(m,n)] = [(S_{\mathbb{N}}(m), S_{\mathbb{N}}(n))]$. Quanto à propriedade $\mathbf{P}_3$, definindo $\mathbb{Z}^+ = \{[(m,n)] \in \mathbb{Z};\ m \geq n\}$ e $\mathbb{Z}^- = \{[(m,n)] \in \mathbb{Z};\ m \leq n\}$, tem-se que

$$\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z},\ \ \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{[0,0]\} = \{0_{\mathbb{Z}}\} \tag{5.4}$$

e além disso, considerando-se

$$S_{\mathbb{Z}^+} = S_{\mathbb{Z}}\Big|_{\mathbb{Z}^+},\ \ S_{\mathbb{Z}^-} = A_{\mathbb{Z}}\Big|_{\mathbb{Z}^-} \tag{5.5}$$

é simples verificar que $\mathbb{Z}^+$ com a função sucessora $S_{\mathbb{Z}^+}$ satisfaz todos os axiomas de Peano apresentados no capítulo 3 (e de modo análogo $\mathbb{Z}^-$ com a função sucessora $S_{\mathbb{Z}^-}$). Portanto, definindo-se $X^+ = X \cap \mathbb{Z}^+$ e $X^- = X \cap \mathbb{Z}^-$ tem-se que $[(0,0)] \in X^+$ e $[(0,0)] \in X^-$ (pois do fato de que $X \neq \emptyset$ é possível deduzir que $[(0,0)] \in X$ e daí conclui-se direto da definição de X^+ e de X^-). Portanto, da propriedade $\mathbf{P}_3$ conclui-se pela propriedade de Peano nos naturais, $\mathbb{N}_3$, que $X^+ = \mathbb{Z}^+$ e $X^- = \mathbb{Z}^-$. Como por definição $X = X^+ \cup X^-$, tem-se por (5.4) que $X = \mathbb{Z}$, conforme enuncia $\mathbf{P}_3$.

A abordagem que se busca dar aos inteiros aqui não se preocupa com a natureza intrínseca destes e, como ocorre na definição dada aos naturais, apenas considera-se os inteiros, $\mathbb{Z}$, como um conjunto não vazio, formado por elementos desconhecidos que chamaremos de números inteiros e que tem associado uma função responsável por fazer o papel de "enfileirar" os seus elementos, e que também será denominada por função sucessora, denotada por $S(x)$, o sucessor de $x \in \mathbb{Z}$, satisfazendo aos seguintes axiomas:

Axioma $\mathbb{Z}_1$ A função que associa a cada $x \in \mathbb{Z}$ o seu sucessor, $S(x) \in \mathbb{Z}$, é bijetiva;

Axioma $\mathbb{Z}_2$ Existe um elemento de referência $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $S(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1 \neq 0$;

Axioma $\mathbb{Z}_3$ (Princípio de Indução Inteira) Se um subconjunto $X \subset \mathbb{Z}$ satisfaz:

$$\begin{cases} \text{a) } X \neq \emptyset; \\ \text{b) } x \in X \Rightarrow S(x) \in X,\ A(x) \stackrel{\text{def}}{=} S^{-1}(x) \in X. \end{cases} \Longrightarrow X = \mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

A função $A \overset{\text{def}}{=} S^{-1}$ que aparece em (5.6) será denominada de antecessora e o seu valor $A(x) \in \mathbb{Z}$ é o antecessor de $x \in \mathbb{Z}$.

Um bom exercício é a verificação de que a condição $X \neq \emptyset$ em (5.6) pode ser substituída pela condição $0 \in X$ (ou equivalentemente $1 \in X$). Outra observação importante é a possibilidade de enxergar os números naturais como subconjunto dos números inteiros, através do seguinte procedimento de identificação indutiva, em $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} 0_{\mathbb{N}} \overset{\text{ident.}}{=} 0 \in \mathbb{Z} \\ S_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}) = 1_{\mathbb{N}} \overset{\text{ident.}}{=} S(0) = 1 \in \mathbb{Z} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{Se } \; n_{\mathbb{N}} \overset{\text{ident.}}{=} n \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_{\mathbb{N}}(n_{\mathbb{N}}) \overset{\text{ident.}}{=} S(n) \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.7}$$

Assim, usando-se o princípio de indução dos naturais, conclui-se que:

$$\mathbb{N} \overset{\text{def}}{=} \{0_{\mathbb{N}},\ 1_{\mathbb{N}},\ 2_{\mathbb{N}},\ 3_{\mathbb{N}},...\} \overset{\text{ident.}}{=} \{0,\ 1,\ 2,\ 3,...\} \subset \mathbb{Z} \tag{5.8}$$

Um outro caminho aparentemente diferente de se enxergar a inclusão obtida com as identificações apresentadas nas equações (5.7) e (5.8), é observar que a função sucessora inteira restrita ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, $S_{|\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}$ aqui identificado por (5.8) como um subconjunto dos inteiros), satisfaz a todos os axiomas de Peano, conforme foi abordado no capítulo 3.

Outro resultado imediato que segue-se dos axiomas acima é que a função sucessora (inteira) não possui ponto fixo (semelhante ao caso dos naturais). Consequentemente o mesmo ocorre com a função antecessora, por ser a sua inversa, ou seja:

Proposição 2 $S(x) \neq x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Considere $X = \{x \in \mathbb{Z};\ S(x) \neq x\}$, então tem-se pelo axioma $\mathbb{Z}_2$ que $0 \in X$ e obviamente $X \neq \emptyset$. Agora, se $x \in X$ tem-se por definição que $S(S(x)) \neq S(x)$, pois do contrário, aplicando-se a função A a identidade $S(S(x)) = S(x)$ contraporia-se a hipótese de que $S(x) \neq x$ (analogamente $S(A(x)) \neq A(x)$, pois do contrário, aplicando-se agora a função S a identidade $x = S(A(x)) = A(x)$ novamente iria se contrapor a hipótese de que $S(x) \neq x$). Portanto, tem-se que $S(x),\ A(x) \in X$ e pelo axioma $\mathbb{Z}_3$ conclui-se que $X = \mathbb{Z}$, o que finaliza a demonstração. □

5.3 Potência Inteira de uma Bijeção

A potência de uma função bijetiva pode ser feita para quaisquer função bijetiva entre conjuntos distintos, mas por razões de simplicidade, fica-se restrito ao caso particular de uma função bijetiva em que o seu domínio e contradomínio sejam os mesmos, ou seja, considere um subconjunto $A \neq \emptyset$ e uma função bijetora $f : A \to A$, a definição da potência inteira de f pode ser feita indutivamente através do uso do axioma $\mathbb{Z}_3$ por:

$$\begin{cases} f^0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id}_A; \\ \text{Se } f^x \text{ fica bem definida para } x \in \mathbb{Z}, \Rightarrow f^{S(x)} \stackrel{\text{def}}{=} f \circ f^x \text{ e } f^{A(x)} \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1} \circ f^x. \end{cases} \tag{5.9}$$

Em (5.9), Id_A é a função identidade do conjunto A ($\text{Id}_A(a) = a,\ \forall a \in A$) e f^{-1} é a função inversa de f (existe por conta da bijetividade de f). Um bom exercício que decorre imediatamente do procedimento de induções inteira e (5.9) é mostrar que:

$$\left(\text{Id}_A\right)^x = \text{Id}_A,\ \forall x \in \mathbb{Z} \tag{5.10}$$

Um resultado que segue-se também como consequência do axioma $\mathbb{Z}_3$ e a propriedade associativa da composição de funções é a:

Proposição 3 *Para quaisquer $x \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{cases} f \circ f^x = f^x \circ f \\ f^{-1} \circ f^x = f^x \circ f^{-1} \end{cases} \tag{5.11}$$

Demonstração. Para justificar (5.11), considere-se $X = \{x \in \mathbb{Z};\ f \circ f^x = f^x \circ f \text{ e } f^{-1} \circ f^x = f^x \circ f^{-1}\}$, então é simples observar que $0 \in X$ e daí tem-se naturalmente que $X \neq \emptyset$. E considerando-se agora que $x \in X$ seja um outro elemento qualquer, tem-se que

$$f \circ f^{S(x)} = f \circ (f \circ f^x) \stackrel{x \in X}{=} f \circ (f^x \circ f) = (f \circ f^x) \circ f = f^{S(x)} \circ f$$

na penúltima igualdade utiliza-se a propriedade associativa da operação "$\circ$". Também,

$$\begin{aligned} f \circ f^{A(x)} &= f \circ (f^{-1} \circ f^x) = \underbrace{(f \circ f^{-1})}_{=\text{Id}_A} \circ f^x) = f^x \circ \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{=\text{Id}_A} \\ &= (f^x \circ f^{-1}) \circ f \stackrel{x \in X}{=} (f^{-1} \circ f^x) \circ f = f^{A(x)} \circ f \end{aligned}$$

E analogamente,

$$f^{-1} \circ f^{A(x)} = f^{-1} \circ (f^{-1} \circ f^x) \stackrel{x \in X}{=} f^{-1} \circ (f^x \circ f^{-1}) = (f^{-1} \circ f^x) \circ f^{-1} = f^{A(x)} \circ f^{-1}$$

e

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f^{S(x)} &= f^{-1} \circ (f \circ f^x) = \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{=\text{Id}_A} \circ f^x = f^x \circ \underbrace{(f \circ f^{-1})}_{=\text{Id}_A} \\ &= (f^x \circ f) \circ f^{-1} \stackrel{x \in X}{=} (f \circ f^x) \circ f^{-1} = f^{S(x)} \circ f^{-1} \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que $S(x) \in X$ e $A(x) \in X$ e, pelo axioma $\mathbb{Z}_3$, $X = \mathbb{Z}$, que é o mesmo que afirma a equação (5.11). □

Um fato importante a ser observado é que as potências inteiras de bijeção são também bijeção. Mais precisamente, denotando a inversa de uma função bijetiva f por f^{-1}, tem-se que:

Proposição 4 *Seja $f : A \to A$ uma função bijetiva. Então, para quaisquer inteiro $x \in \mathbb{Z}$ a função f^x é bijetiva e, além disso, sua inversa é*

$$(f^x)^{-1} = (f^{-1})^x \tag{5.12}$$

Demonstração. É suficiente verificar que $f^x \circ (f^{-1})^x = (f^{-1})^x \circ f^x = \mathrm{Id}_A$. Muito bem, pela indução inteira (axioma $\mathbb{Z}_3$), considere $X = \{x \in \mathbb{Z};\ f^x \circ (f^{-1})^x = (f^{-1})^x \circ f^x = \mathrm{Id}_A\}$. É imediata a conclusão de que $0 \in X \neq \emptyset$. Agora, considerando quaisquer $x \in X$, tem-se que:

$$f^{S(x)} \circ (f^{-1})^{S(x)} \overset{(5.9)}{=} (f \circ f^x) \circ \left(f^{-1} \circ (f^{-1})^x\right) \overset{(5.11)}{=} f^x \circ (f \circ f^{-1}) \circ (f^{-1})^x \overset{x \in X}{=} \mathrm{Id}_A$$

e

$$(f^{-1})^{S(x)} \circ f^{S(x)} \overset{(5.9)}{=} \left(f^{-1} \circ (f^{-1})^x\right) \circ (f \circ f^x) \overset{(5.11)}{=} f^{-1} \circ \left((f^{-1})^x \circ f^x\right) \circ f \overset{x \in X}{=} \mathrm{Id}_A$$

e tem-se que $S(x) \in X$. Analogamente,

$$f^{A(x)} \circ (f^{-1})^{A(x)} \overset{(5.9)}{=} (f^{-1} \circ f^x) \circ \left(\underbrace{(f^{-1})^{-1}}_{=f} \circ (f^{-1})^x\right) \overset{(5.11)}{=} f^x \circ (f^{-1} \circ f) \circ (f^{-1})^x \overset{x \in X}{=} \mathrm{Id}_A$$

e

$$(f^{-1})^{A(x)} \circ f^{A(x)} \overset{(5.9)}{=} \left(\underbrace{(f^{-1})^{-1}}_{=f} \circ (f^{-1})^x\right) \circ (f^{-1} \circ f^x) \overset{(5.11)}{=} f \circ \left((f^{-1})^x \circ f^x\right) \circ f^{-1} \overset{x \in X}{=} \mathrm{Id}_A$$

e tem-se também que $A(x) \in X$. Portanto, o resultado segue-se do axioma $\mathbb{Z}_3$. $\square$

Como as funções sucessora e antecessora são bijeções, a definição das potências inteiras se aplicam às mesmas. Neste caso, tem-se válida a seguinte consequência imediata de (5.12):

Corolário 1 *Para quaisquer inteiro $x \in \mathbb{Z}$, tem-se que:*

$$\begin{cases} (S^x)^{-1} = A^x \\ (A^x)^{-1} = S^x \end{cases} \tag{5.13}$$

Demonstração. Segue-se direto de (5.12) e a definição da antecessora, $A = S^{-1}$. $\square$

Um resultado que caracteriza os inteiros como uma imagem do elemento de referência pela potência inteira da função sucessora, conforme também ocorre com os números naturais, é:

Proposição 5 *Seja $x \in \mathbb{Z}$. Então,*

$$S^x(0) = x \tag{5.14}$$

Demonstração. Buscando-se usar a indução inteira, seja $X = \{x \in \mathbb{Z};\ S^x(0) = x\}$. Segue-se imediato da definição de potência nula que $0 \in X \neq \emptyset$. Considere agora $x \in X$ um outro elemento qualquer. Então,

$$S^{S(x)}(0) \overset{\text{def}}{=} S \circ S^x(0) = S\big(S^x(0)\big) \overset{x \in X}{=} S(x)$$

e

$$S^{A(x)}(0) \overset{\text{def}}{=} \underbrace{S^{-1}}_{=A} \circ S^x(0) = A\big(S^x(0)\big) \overset{x \in X}{=} A(x).$$

Portanto, segue-se da definição de X que, $S(x) \in X$ e $A(x) \in X$ e o resultado fica demonstrado pelo axioma $\mathbb{Z}_3$. $\square$

5.4 Adição nos Inteiros e Suas Propriedades

A Adição dos inteiros é definida de modo similar ao que foi feito com os números naturais, espelhando-se na ideia primitiva da contagem (toma-se um número inteiro x e se calcula sucessivamente y vezes (potência y da sucessora), o outro número inteiro dado y). Ou seja:

$$x + y \overset{\text{def}}{=} S^y(x);\ x, y \in \mathbb{Z} \tag{5.15}$$

Uma observação curiosa, decorrente da proposição (5), e que em verdade poderia ser utilizada para a definição da soma, é que:

$$x + y = \big(S^y \circ S^x\big)(0) \overset{(5.20)}{=} \big(S^x \circ S^y\big)(0) \tag{5.16}$$

Algumas das propriedades da adição seguem-se direto da definição, exemplo:

$$S(x) \overset{(5.9)}{=} S^1(x) \overset{(5.15)}{=} x + 1 \tag{5.17}$$

e

$$A(x) \overset{(5.9)}{=} S^{-1}(x) \overset{(5.15)}{=} x + (-1) \overbrace{=}^{\text{Def. 5.3}} x - 1 \tag{5.18}$$

Dentre outras, não tão imediatas, destacam-se:

1. *Existência de Elemento Neutro*:

$$x + 0 = 0 + x = x,\ \forall x \in \mathbb{Z} \tag{5.19}$$

Demonstração. Segue direto da definição de potência inteira e da proposição (5). $\square$

2. *Comutatividade*:
$$x+y=y+x,\ \forall x,y\in\mathbb{Z} \tag{5.20}$$

Demonstração. Para usar a indução inteira, considere-se para $x\in\mathbb{Z}$ qualquer fixado e $X_x=\{y\in\mathbb{Z};\ x+y=y+x\}$. Segue-se de (5.19) que $0\in X_x\neq\emptyset$. Dado agora $y\in X_x$ qualquer, tem-se que:

$$\begin{aligned} x+S(y) &\overset{\text{def}}{=} S^{S(y)}(x)\overset{(5.9)}{=}\big(S\circ S^y\big)(x)=S\big(S^y(x)\big)=S(x+y)\overset{y\in X_x}{=}S(y+x)=\\ &= S\big(S^x(y)\big)\overset{(5.9)}{=}\big(S\circ S^x\big)(y)\overset{(5.11)}{=}\big(S^x\circ S\big)(y)=S^x\big(S(y)\big)\overset{\text{def}}{=}S(y)+x, \end{aligned}$$

concluindo-se que $S(y)\in X_x$. E analogamente,

$$\begin{aligned} x+A(y) &\overset{\text{def}}{=} S^{A(y)}(x)\overset{(5.9)}{=}\big(S^{-1}\circ S^y\big)(x)=S^{-1}\big(S^y(x)\big)\\ &= S^{-1}(x+y)\overset{y\in X_x}{=}S^{-1}(y+x)=S^{-1}\big(S^x(y)\big)\\ &= \big(S^{-1}\circ S^x\big)(y)\overset{(5.11)}{=}\big(S^x\circ \underbrace{S^{-1}}_{=A}\big)(y)=S^x\big(A(y)\big)\overset{\text{def}}{=}A(y)+x. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se também que $A(y)\in X_x$ e o resultado segue-se do axioma $\mathbb{Z}_3$ (pois $X_x=\mathbb{Z}$). □

Um resultado particular que ficou embutido na demonstração acima foi:

$$\begin{cases} x+S(y)=S(x+y)=S(x)+y\\ x+A(y)=A(x+y)=A(x)+y \end{cases};\forall x,y\in\mathbb{Z}. \tag{5.21}$$

3. *Associatividade*:
$$(x+y)+z=x+(y+z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z} \tag{5.22}$$

Demonstração. Procedendo-se pela indução inteira, considere-se $x,y\in\mathbb{Z}$ quaisquer fixado e $X_{xy}=\{z\in\mathbb{Z};\ (x+y)+z=x+(y+z)\}$. Segue-se de (5.19) que $0\in X_{xy}\neq\emptyset$. Agora dado $z\in X_{xy}$ qualquer, tem-se que:

$$\begin{aligned} (x+y)+S(z) &\overset{(5.21)}{=} S\big((x+y)+z\big)\overset{z\in X_{xy}}{=}S\big(x+(y+z)\big)\\ &\overset{(5.21)}{=} x+S(y+z)\overset{(5.21)}{=}x+\big(y+S(z)\big), \end{aligned}$$

concluindo-se que $S(z)\in X_{xy}$. E, analogamente,

$$\begin{aligned} (x+y)+A(z) &\overset{(5.21)}{=} A\big((x+y)+z\big)\overset{z\in X_{xy}}{=}A\big(x+(y+z)\big)\\ &\overset{(5.21)}{=} x+A(y+z)\overset{(5.21)}{=}x+\big(y+A(z)\big). \end{aligned}$$

Portanto, tem-se também que $A(z)\in X_{xy}$ e o resultado segue-se do axioma $\mathbb{Z}_3$ (pois $X_{xy}=\mathbb{Z}$). □

Uma propriedade que diferencia os inteiros dos números naturais é a:

4. *Existência do Elemento Simétrico*:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists!\ x_s \in \mathbb{Z} \text{ (único) tal que } \ x + x_s = x_s + x = 0. \tag{5.23}$$

Demonstração. Considerando $x_s = A^x(0) \in \mathbb{Z}$ tem-se que:

$$x + x_s \overset{(5.20)}{=} x_s + x = A^x(0) + x \overset{(5.13)}{=} \left(S^x\right)^{-1}(0) + x \overset{\text{def}}{=} S^x\Big(\left(S^x\right)^{-1}(0)\Big) = 0$$

Isso demonstra a existência, quanto à unicidade considere-se que $\tilde{x_s} \in \mathbb{Z}$ também satisfaz $\tilde{x_s} + x = 0$, então:

$$\tilde{x_s} \overset{(5.19)}{=} \tilde{x_s} + 0 \overset{(5.23)}{=} \tilde{x_s} + (x + x_s) \overset{(5.22)}{=} (\tilde{x_s} + x) + x_s = 0 + x_s \overset{(5.19)}{=} x_s$$

Isso conclui a demonstração. $\square$

Daqui em diante, será utilizado com regularidade a seguinte representação para o elemento simétrico:

Notação 1 *Dado $x \in \mathbb{Z}$, o simétrico de x é: $x_s \overset{\text{def}}{=} -x$.*

Conforme visto na demonstração acima,

$$A^x(0) = -x \tag{5.24}$$

Um resultado interessante que ocorre com a potência de uma função bijetiva, e que consolida a escolha da notação acima, é:

Proposição 6 *Seja $f : A \to A$ uma função bijetiva e $x, y \in \mathbb{Z}$. Então,*

$$\begin{cases} \text{a) } f^{(x+y)} = f^x \circ f^y \\ \text{b) } \left(f^x\right)^{-1} = f^{-x} \overset{(5.12)}{=} \left(f^{-1}\right)^x \end{cases} \tag{5.25}$$

Demonstração. De fato, utilizando-se argumentos da indução inteira, considere-se que $y \in \mathbb{Z}$ seja um inteiro dado e defina $X_y = \{x \in \mathbb{Z};\ f^{(x+y)} = f^x \circ f^y\}$. Então, é elementar observar que $0 \in X_y \neq \emptyset$. E para $x \in X_y$ qualquer, tem-se que:

$$\begin{aligned} f^{(S(x)+y)} &\overset{(5.21)}{=} f^{S(x+y)} \overset{(5.9)}{=} f \circ f^{(x+y)} \overset{x \in X_y}{=} f \circ (f^x \circ f^y) = \\ &= (f \circ f^x) \circ f^y \overset{(5.9)}{=} f^{S(x)} \circ f^y, \end{aligned}$$

mostrando que $S(x) \in X_y$. Analogamente,

$$\begin{aligned} f^{(A(x)+y)} &\overset{(5.21)}{=} f^{A(x+y)} \overset{(5.9)}{=} f^{-1} \circ f^{(x+y)} \overset{x \in X_y}{=} f^{-1} \circ (f^x \circ f^y) = \\ &= (f^{-1} \circ f^x) \circ f^y \overset{(5.9)}{=} f^{A(x)} \circ f^y, \end{aligned}$$

mostrando que também $A(x) \in X_y$. Portanto, segue-se pelo axioma $\mathbb{Z}_3$ que $X_y = \mathbb{Z}$, o que conclui a demonstração da primeira equação em (5.25). A segunda equação é imediata se for usada a primeira, já demonstrada, observando-se que:

$$f^x \circ f^{-x} = f^{\left(x+(-x)\right)} = f^0 \overset{(5.9)}{=} \mathrm{Id}_A$$

$\square$

Para composição de funções bijetivas distintas, se elas comutam entre si, tem-se o seguinte resultado relacionado a suas potência.

Proposição 7 *Sejam $f : A \to A$ e $g : A \to A$ funções bijetivas que comutam entre si ($f \circ g = g \circ f$). Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, tem-se que:*

$$\begin{cases} \text{a) } f^x \circ g^y = g^y \circ f^x \\ \text{b) } (f \circ g)^x = f^x \circ g^x \end{cases} \tag{5.26}$$

Demonstração. Inicialmente, considere $X_1 = \{x \in \mathbb{Z};\ f^x \circ g^1 = g^1 \circ f^x\}$. Então, por (5.9) e o fato de que f e g comutam entre si, tem-se que $\{0, 1\} \subset X_1$. Também, como

$$\begin{aligned} (f)^{-1} \circ g^1 &\overset{(5.25)}{=} (f^{-1} \circ g^1) \circ \underbrace{(f \circ f^{-1})}_{=\mathrm{Id}_A} \overset{(5.9)}{=} f^{-1} \circ (g^1 \circ f^1) \circ f^{-1} \\ &\overset{1 \in X_1}{=} \underbrace{(f^{-1} \circ f^1)}_{=\mathrm{Id}_A} \circ (g^1 \circ f^{-1}) \overset{(5.25)}{=} g^1 \circ (f)^{-1}, \end{aligned}$$

tem-se em verdade que $\{-1,\ 0,\ 1\} \subset X_1 \neq \emptyset$. E para quaisquer $x \in X_1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} f^{S(x)} \circ g^1 &\overset{(5.9)}{=} (f \circ f^x) \circ g^1 = f^1 \circ (f^x \circ g^1) \overset{x \in X_1}{=} (f^1 \circ g^1) \circ f^x) \\ &\overset{1 \in X_1}{=} (g^1 \circ f^1) \circ f^x) = g^1 \circ (f \circ f^x) \overset{(5.11)}{=} g^1 \circ f^{S(x)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f^{A(x)} \circ g^1 &\overset{(5.9)}{=} (f^{-1} \circ f^x) \circ g^1 = f^{-1} \circ (f^x \circ g^1) \overset{x \in X_1}{=} (f^{-1} \circ g^1) \circ f^x) \\ &\overset{-1 \in X_1}{=} (g^1 \circ f^{-1}) \circ f^x) = g^1 \circ (f^{-1} \circ f^x) \overset{(5.11)}{=} g^1 \circ f^{A(x)}. \end{aligned}$$

Logo, $S(x) \in X_1$ e $A(x) \in X_1$, seguindo-se do axioma $\mathbb{Z}_3$ que $X_1 = \mathbb{Z}$, ou seja,

$$f^x \circ g = g \circ f^x, \ \ \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{5.27}$$

Por raciocínio semelhante, que será deixado como exercício, mostra-se também que:

$$f^x \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^x, \ \ \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{5.28}$$

Portanto, para justificar o item a), também usando a Indução Inteira, fixe $x \in \mathbb{Z}$, escolhido de modo arbitrário, e defina $X_x = \{y \in \mathbb{Z};\ f^x \circ g^y = g^y \circ f^x\}$. Então, segue-se de (5.9), (5.27) e (5.28) que $\{-1,\ 0,\ 1\} \subset X_x \neq \emptyset$. E, para $y \in X_x$ qualquer, tem-se que:

$$f^x \circ g^{S(y)} \overset{(5.9)}{=} f^x \circ (g^1 \circ g^y) \overset{1 \in X_x}{=} g^1 \circ (f^x \circ g^y) \overset{y \in X_x}{=} (g^1 \circ g^y) \circ f^x \overset{(5.9)}{=} g^{S(y)} \circ f^x$$

e

$$f^x \circ g^{A(y)} \overset{(5.9)}{=} f^x \circ (g^{-1} \circ g^y) \overset{-1 \in X_x}{=} g^{-1} \circ (f^x \circ g^y) \overset{y \in X_x}{=} (g^{-1} \circ g^y) \circ f^x \overset{(5.9)}{=} g^{A(y)} \circ f^x,$$

mostrando que $S(y) \in X_x$ e $A(y) \in X_x$, seguindo-se do axioma $\mathbb{Z}_3$ que $X_x = \mathbb{Z}$, concluindo a justificativa do item a). Quanto ao item b), tem-se também por argumento indutivo que se $X = \{x \in \mathbb{Z};\ (f \circ g)^x = f^x \circ g^x\}$, então conclui-se de imediato que $\{-1,\ 0,\ 1\} \subset X_x \neq \emptyset$. E, para qualquer outro $x \in X$,

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{S(x)} &\overset{(5.9)}{=} (f \circ g) \circ (f \circ g)^x \underbrace{=}_{x \in X} f \circ (g \circ f^x) \circ g^x \\ &\overset{(5.27)}{=} (f \circ f^x) \circ (g \circ g^x) \overset{(5.9)}{=} f^{S(x)} \circ g^{S(x)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{A(x)} &\overset{(5.9)}{=} (f \circ g)^{-1} \circ (f \circ g)^x \underbrace{=}_{-1, x \in X} f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^x) \circ g^x \\ &\overset{(5.28)}{=} (f^{-1} \circ f^x) \circ (g^{-1} \circ g^x) \overset{(5.9)}{=} f^{A(x)} \circ g^{A(x)}, \end{aligned}$$

mostrando que $S(x) \in X$ e $A(x) \in X$, seguindo-se do axioma $\mathbb{Z}_3$ que $X = \mathbb{Z}$, o que conclui a justificativa de b) e da proposição. $\square$

O elemento simétrico também goza de algumas propriedades que são consequências imediatas do que já foi apresentado, quais sejam:

Proposição 8 *Para x,y $\in \mathbb{Z}$, tem-se que:*

$$\begin{cases} \text{a)}\ -(-x) = x \\ \text{b)}\ -(x+y) = (-x)+(-y) \\ \text{c)}\ -S(x) = A(-x) \\ \text{d)}\ -A(x) = S(-x) \end{cases} \tag{5.29}$$

Demonstração. a) é consequência de

$$(-x)+x = x+(-x) = 0 \Rightarrow -(-x) = x$$

b) segue-se de

$$\begin{aligned} (x+y)+((-x)+(-y)) &\overset{(5.20)}{=} (y+x)+((-x)+(-y)) \overset{(5.22)}{=} \big(y+(x+(-x)\big)+(-y) \\ &\overset{(5.23)}{=} (y+0)+(-y) \overset{(5.19)}{=} y+(-y) \overset{(5.23)}{=} 0 \\ &\Rightarrow\ -(x+y) = (-x)+(-y) \end{aligned}$$

c) segue-se de

$$-S(x) \overset{(5.17)}{=} -(x+1) \overset{(5.29)-b)}{=} (-x)+(-1) \overset{(5.18)}{=} A(-x)$$

e d) segue-se de

$$-A(x) \overset{(5.18)}{=} -\big(x+(-1)\big) \overset{(5.29)-b)}{=} (-x)+\big(-(-1)\big) \overset{(5.29)-a)}{=} (-x)+1 \overset{(5.17)}{=} S(-x)$$

□

A última propriedade que será destacada, para a operação de adição, é enunciada tendo-se por base o seguinte:

Definição 5.1 *Chama-se inteiros positivos e, respectivamente, inteiros negativos, aos elementos dos seguintes conjuntos:*

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_+^* = \{S^n(0);\ n \in \mathbb{N}^*\} \overset{(5.8)}{=} \{1,\ 2,\ 3,\ldots\} \\ \mathbb{Z}_-^* = \{A^n(0);\ n \in \mathbb{N}^*\} \overset{(5.24)}{=} \{-1,\ -2,\ -3,\ldots\} \end{cases} \tag{5.30}$$

Observa-se que na definição acima $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. Também, é comum se usar a seguinte nomenclatura:

Definição 5.2 *Chama-se inteiros não negativos e, respectivamente, inteiros não positivos, aos elementos dos seguintes conjuntos:*

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_+ = \{S^n(0);\ n \in \mathbb{N}\} \overset{(5.8)}{=} \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{N} \\ \mathbb{Z}_- = \{A^n(0);\ n \in \mathbb{N}\} \overset{(5.24)}{=} \{0,\ -1,\ -2,\ -3,\ldots\} \overset{\text{def}}{=} -\mathbb{N} \end{cases} \tag{5.31}$$

Propriedade da Tricotomia: Para quaisquer inteiro $x \in \mathbb{Z}$, apenas uma dentre as seguintes condições ocorre:

$$\begin{cases} \text{a) } x \in \mathbb{Z}_+^* \ (x \text{ é um inteiro positivo}); \\ \text{b) } x \in \mathbb{Z}_-^* \ (x \text{ é um inteiro negativo}); \\ \text{c) } x = 0 \ (x \text{ é o elemento de referência}). \end{cases} \tag{5.32}$$

Demonstração. Será suficiente verificar-se que os conjuntos que aparecem em (5.32) satisfazem que a sua união produz todos os inteiros e a interseção entre dois a dois dintintos é vazia. Pois bem, a interseção dois a dois distintas segue imediato por suas definições em (5.30), resta mostrar que o subconjunto $X \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_-^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{Z}$, é em verdade todo o $\mathbb{Z}$. Procedendo-se por indução inteira, é óbvio que $X \neq \emptyset$ $(0 \in X)$. Agora se $x \in X$ é um elemento tomado arbitrário, tem-se as seguintes possibilidades:

a) $x \in \mathbb{Z}_+^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{N}^*$. Neste caso segue-se direto da definição de $\mathbb{Z}_+^*$ que $x = n \in \mathbb{N}^*$, logo:

$$S(x) \overset{(5.17)}{=} x+1 = n+1 \in \mathbb{N}^* \subset X$$

e

$$A(x) \overset{\text{def}}{=} S^{-1}(x) \overset{(5.25)}{=} S^{(-1)}(x) \overset{(5.15)}{=} x+(-1) \in \mathbb{Z}_+ \subset X$$

b) $x \in \mathbb{Z}_-^* \overset{\text{def}}{=} -\mathbb{N}^*$. Neste caso, tem-se da definição de $\mathbb{Z}_-^*$ que $x = -n,\ n \in \mathbb{N}^*$. Daí,

$$S(x) \overset{(5.17)}{=} x + 1 = -n + 1 \overset{(5.29)}{=} -(n-1) \in -\mathbb{N} \subset X$$

e

$$A(x) \overset{\text{def}}{=} S^{-1}(x) \overset{(5.25)}{=} S^{(-1)}(x) \overset{(5.15)}{=} x + (-1) = -n + (-1) \overset{(5.29)}{=} -(n+1) \in -\mathbb{N}^* \subset X$$

c) $x = 0$. Neste caso, tem-se direto das definições que $S(0) = 1 \in \mathbb{N}^* \subset X$ e $A(0) = -1 \in -\mathbb{N}^* \subset X$

Portanto, como em todos os casos tem-se que $S(x) \in X$ e $A(x) \in X$, conclui-se pelo axioma $\mathbb{Z}_3$ que $X = \mathbb{Z}$, o que encerra a demonstração. $\square$

Termina-se esta seção apresentando duas definições que simplificarão escrita no que se segue.

Definição 5.3 *A subtração (diferença) entre os inteiros $x, y \in \mathbb{Z}$ é:*

$$x - y \overset{\text{def}}{=} x + (-y) \overset{(5.24)}{=} x + A^y(0) \tag{5.33}$$

Definição 5.4 *O módulo (valor absoluto) de um inteiro $x \in \mathbb{Z}$ é:*

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, \text{ se } x \in \mathbb{Z}_+ \\ -x, \text{ se } x \in \mathbb{Z}_-^* \ (\Leftrightarrow\ x \notin \mathbb{Z}_+) \end{cases} \tag{5.34}$$

Segue-se direto da equação (5.29), a propriedade da tricotomia (eq. 5.32) e das definições acima, que:

$$-(x-y) = y - x \tag{5.35}$$

e

$$\begin{cases} |x| \in \mathbb{Z}_+ \\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \tag{5.36}$$

5.5 Multiplicação nos Inteiros e Suas Propriedades

A referência para definir-se a operação de multiplicação nos números inteiros, continua tendo por base os mesmos procedimentos feito para os números naturais, através da sua função sucessora. Enquanto a definição da soma tem a ver com a operação de composições da função sucessora (conforme eq. 5.16), a definição do produto tem a ver com as potências da sucessora, mais precisamente:

Definição 5.5 *O produto entre os inteiros x,y $\in \mathbb{Z}$ é:*

$$xy \overset{\text{notação}}{=} x \cdot y \overset{\text{def}}{=} \left(S^x\right)^y(0) \tag{5.37}$$

O resultado que segue-se será útil na demonstração de algumas propriedades dessa operação.

Proposição 9 $\forall x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \text{a) } S(x) \cdot y = x \cdot y + y \\ \text{b) } A(x) \cdot y = x \cdot y - y \end{cases} \tag{5.38}$$

Demonstração. De fato, a justificativa de a) segue-se de:

$$S(x) \cdot y \overset{(5.37)}{=} \left(S^{S(x)}\right)^y(0) \overset{(5.9)}{=} \left(S \circ S^x\right)^y(0) \overset{(5.26)\text{-b)}}{=} S^y\big(\underbrace{(S^x)^y(0)}_{=x \cdot y}\big) \overset{(5.15)}{=} x \cdot y + y$$

e a justificativa de b) é:

$$\begin{aligned} A(x) \cdot y &\overset{(5.37)}{=} \left(S^{A(x)}\right)^y(0) \overset{(5.9)}{=} \left(S^{-1} \circ S^x\right)^y(0) \\ &\overset{(5.26)\text{-b)}}{=} \left(S^{-1}\right)^y\big(\underbrace{(S^x)^y(0)}_{=x \cdot y}\big) \overset{(5.25)\text{-b)}}{=} S^{-y}(x \cdot y) \overset{(5.15)}{=} x \cdot y + (-y) \overset{(5.33)}{=} x \cdot y - y. \end{aligned}$$

□

A próxima propriedade será útil na demonstração da propriedade associativa do produto. Ela tem a ver com as potência de uma bijeção e, de uma certa forma, generaliza e justifica a fórmula usada na definição do produto.

Proposição 10 *Seja $f : A \to A$ uma função bijetiva. Então*:

$$\left(f^x\right)^y = f^{xy} \tag{5.39}$$

Demonstração. Procedendo-se por indução multiplicativa, seja $y \in \mathbb{Z}$ fixo e $X_y = \{x \in \mathbb{Z};\ \left(f^x\right)^y = f^{xy}\}$. Então,

$$\left(f^0\right)^y \overbrace{=}^{(5.9)\text{ e }(5.10)} \mathrm{Id}_A \overset{(5.9)}{=} f^0 \overbrace{=}^{(5.9)\text{ e }(5.10)} f^{(S^0)^y(0)} \overset{(5.37)}{=} f^{0 \cdot y} \Rightarrow 0 \in X_y \neq \emptyset$$

Considerando-se agora $x \in X_y$ qualquer,

$$\begin{aligned} \left(f^{S(x)}\right)^y &\overset{(5.9)}{=} \left(f \circ f^x\right)^y \overset{(5.26)\text{-b)}}{=} f^y \circ \left(f^x\right)^y \overset{y \in X_x}{=} f^y \circ f^{xy} \\ &\overset{(5.25)\text{-a)}}{=} f^{y+xy} \overset{5.20}{=} f^{x \cdot y + y} \overset{(5.38)\text{-a)}}{=} f^{S(x) \cdot y} \Rightarrow S(x) \in X_y \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\begin{aligned} \left(f^{A(x)}\right)^y &\overset{(5.9)}{=} \left(f^{-1} \circ f^x\right)^y \overset{(5.26)\text{-b)}}{=} \left(f^{-1}\right)^y \circ \left(f^x\right)^y \overbrace{=}^{(y \in X_x)\text{ e }(5.25)-b)} f^{-y} \circ f^{xy} \\ &\overset{(5.25)\text{-a)}}{=} f^{(-y)+xy} \overset{5.20}{=} f^{x \cdot y - y} \overset{(5.38)\text{-b)}}{=} f^{A(x) \cdot y} \Rightarrow A(x). \in X_y \end{aligned}$$

Portanto, segue-se do axioma $\mathbb{Z}_3$ que $X_y = \mathbb{Z}$ o que conclui a prova. □

O resultado que segue-se resume também algumas das consequências imediatas da definição dada em (5.37).

Proposição 11 $\forall x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \text{a) } (-1)\cdot x = -x \\ \text{b) } (-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -(x\cdot y) \\ \text{c) } (-x)\cdot(-y) = x\cdot y \end{cases} \tag{5.40}$$

Demonstração. De fato, a) segue-se de,

$$(-1)\cdot x \overset{(5.37)}{=} \left(S^{-1}\right)^x(0) = A^x(0) \overset{(5.24)}{=} -x,$$

b) segue-se de,

$$\begin{aligned}(-x)\cdot y &\overset{(5.37)}{=} \left(S^{-x}\right)^y(0) \overset{(5.25)\text{-b)}}{=} \left((S^x)^{-1}\right)^y(0) \overset{(5.12)}{=} (S^x)^{-y}(0) = x\cdot(-y) \\ &\overset{(5.37)}{=} \left(S^{-x}\right)^y(0) \overset{(5.12)}{=} \left((S^{-1})^x\right)^y(0) \overset{(5.39)}{=} (S^{-1})^{xy}(0) = (-1)\cdot(x\cdot y) \overset{\text{a)}}{=} -(x\cdot y)\end{aligned}$$

e c) segue-se de,

$$(-x)\cdot(-y) \overset{\text{b)}}{=} x\cdot\left(-(-y)\right) \overset{(5.29)\text{-a)}}{=} x\cdot y.$$

□

Dentre muitas outras importantes propriedades que a operação produto satisfaz, destacam-se as fundamentais:

1. *Produto por Zero*:

$$x\cdot 0 = 0\cdot x = 0,\ \forall x \in \mathbb{Z} \tag{5.41}$$

Demonstração. Basta observar que:

$$x\cdot 0 \overset{(5.37)}{=} \left(S^x\right)^0(0) \overset{(5.9)}{=} \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(0) = 0 \overset{(5.10)}{=} \left(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\right)^x(0) \overset{(5.9)}{=} \left(S^0\right)^x(0) \overset{(5.37)}{=} 0\cdot x$$

□

2. *Existência de Elemento Neutro Multiplicativo*:

$$x\cdot 1 = 1\cdot x = x,\ \forall x \in \mathbb{Z} \tag{5.42}$$

Demonstração. De fato:

$$x\cdot 1 \overset{(5.37)}{=} \left(S^x\right)^1(0) \overset{(5.9)}{=} S^x(0) \overset{(5.14)}{=} x \overset{(5.9)}{=} \left(S^1\right)^x(0) \overset{(5.37)}{=} 1\cdot x$$

□

3. *Comutatividade*:

$$x \cdot y = y \cdot x,\ \forall x, y \in \mathbb{Z} \tag{5.43}$$

Demonstração. Procedendo-se por indução multiplicativa, seja $y \in \mathbb{Z}$ fixo, escolhido arbitrariamente, e defina $X_y = \{x \in \mathbb{Z};\ x \cdot y = y \cdot x\}$. Tem-se por (5.41) e (5.42) que $\{0,1\} \subset X_y \neq \emptyset$. Agora, se $x \in X_y$ é outro elemento qualquer, então:

$$\begin{aligned} S(x) \cdot y &\overset{(5.37)}{=} \left(S^{S(x)}\right)^y(0) \overset{(5.9)}{=} \left(S \circ S^x\right)^y(0) \overset{(5.26)\text{-b)}}{=} S^y \circ \left(S^x\right)^y(0) \\ &\overset{x \in X_y}{=} S^y \circ \left(S^y\right)^x(0) \overset{(5.9)}{=} \left(S^y\right)^{S(x)}(0) \overset{(5.37)}{=} y \cdot S(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A(x) \cdot y &\overset{(5.37)}{=} \left(S^{A(x)}\right)^y(0) \overset{(5.9)}{=} \left(S^{-1} \circ S^x\right)^y(0) \overbrace{=}^{(5.26)\text{-b) e } (5.25)\text{-b)}} \left(S^y\right)^{-1} \circ \left(S^x\right)^y(0) \\ &\overset{x \in X_y}{=} \left(S^y\right)^{-1} \circ \left(S^y\right)^x(0) \overset{(5.9)}{=} \left(S^y\right)^{A(x)}(0) \overset{(5.37)}{=} y \cdot A(x). \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que $S(x) \in X_y$ e $A(x) \in X_y$ e o axioma $\mathbb{Z}_3$ assegura que $X_y = \mathbb{Z}$ o que finaliza a demonstração. □

4. *Distributividade*:

$$\begin{cases} \text{a) } x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \\ \text{b) } (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \end{cases};\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z}. \tag{5.44}$$

Demonstração. O item b) segue-se do item a) e da propriedade comutativa. Quanto ao item a), segue-se de:

$$x \cdot (y+z) \overset{(5.37)}{=} \left(S^x\right)^{(y+z)}(0) \overset{(5.26)\text{-b)}}{=} \left(\left(S^x\right)^y \circ \left(S^x\right)^z\right)(0) \overset{(5.39)}{=} \left(S^{xy} \circ S^{xz}\right)(0) \overset{(5.16)}{=} x \cdot y + x \cdot z$$

□

5. *Associatividade*:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z}. \tag{5.45}$$

Demonstração. Fixando-se arbitrariamente $y, z \in \mathbb{Z}$, seja $X_{yz} = \{x \in \mathbb{Z};\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\}$. Então, tem-se por (5.41) e (5.42) que $\{0,1\} \subset X_{yz} \neq \emptyset$. Agora, considerando-se $x \in X_{yz}$ um outro elemento qualquer, tem-se:

$$(S(x) \cdot y) \cdot z \overset{(5.38)\text{-a)}}{=} (x \cdot y + y) \cdot z \overset{(5.44)}{=} (x \cdot y) \cdot z + y \cdot z \overset{x \in X_x}{=} x \cdot (y \cdot z) + y \cdot z \overset{(5.38)\text{-a)}}{=} S(x) \cdot (y \cdot z)$$

e

$$\begin{aligned} (A(x) \cdot y) \cdot z &\overset{(5.38)\text{-b)}}{=} \big(x \cdot y + (-y)\big) \cdot z \overset{(5.44)\text{-b)}}{=} (x \cdot y) \cdot z + (-y) \cdot z \\ &\overset{(5.40)\text{-b)}}{=} (x \cdot y) \cdot z - (y \cdot z) \overset{x \in X_x}{=} x \cdot (y \cdot z) - (y \cdot z) \overset{(5.38)\text{-b)}}{=} A(x) \cdot (y \cdot z). \end{aligned}$$

Então, $S(x) \in X_{yz}$ e $A(x) \in X_{yz}$ o que garante ser $X_{yz} = \mathbb{Z}$, pelo axioma $\mathbb{Z}_3$, e a demonstração termina. $\square$

5.6 Relação de Ordem nos Inteiros

A relação de ordem nos números inteiros é feita tradicionalmente através do uso da propriedade da tricotomia (diz-se que um número negativo é menor que zero e positivo é maior que zero, então define-se "$x < y \Leftrightarrow x - y < 0$" e "$x > y \Leftrightarrow x - y > 0$"). Muito embora se possa definir a relação pela forma tradicional, será utilizada a forma que fica mais semelhante ao processo utilizado com os naturais, qual seja:

Definição 5.6 *Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, diz-se que "x é menor que y" (denotando-se por "x<y") quando x for antecessor de y, ou seja:*

$$x < y \Leftrightarrow x = A^k(y) \Leftrightarrow y = S^k(x) = x + k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}^* \tag{5.46}$$

Um resultado que segue-se direto da propriedade da tricotomia (eq. 5.32) é:

Proposição 12 *Dado $x, y \in \mathbb{Z}$, apenas uma (única) dentre as seguintes condições ocorre:*

$$\text{a) } x < y; \quad \text{b) } y < x; \quad \text{c) } x = 0. \tag{5.47}$$

É comum usar-se também as seguintes notações:

Notação 2 *Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, denota-se:*

$$\begin{cases} \text{a) } x \leq y \Longleftrightarrow x < y \text{ ou } x = y; \\ \text{b) } x > y \Longleftrightarrow y < x; \\ \text{c) } x \geq y \Longleftrightarrow y < x \text{ ou } x = y. \end{cases} \tag{5.48}$$

Mostra-se que a relação "$\leq$" é uma relação de ordem total, ou melhor, satisfaz à:

1. Reflexividade: $x \leq x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

2. Antisimetria: Se $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$.

3. Transitividade: Se $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

4. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

5.7 Nova construção e ideias fundamentais

No modo de construção a partir da ideia de subtração equivalente, são feitas relações binárias entre os números naturais. Chega-se, então, a uma partição do conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por outro lado, a partir da proposição dos três axiomas $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$, construiu-se toda estrutura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ sem obter relações entre elementos anteriormente.

No final do capítulo 4, destacou-se o processo de nominação de Frege. E que Peano não se utiliza desse processo de nominação para definir os elementos do conjunto $\mathbb{N}$. Pois bem, bastou apenas que se adotasse essa noção de contagem e geração indefinida de elementos também no sentido oposto aos naturais para que fossem definidos os demais elementos de $\mathbb{Z}$. A nova construção também não nomina nenhum elemento de $\mathbb{Z}$, apenas os define. Assim, essa ideia de nominação, que não é fundamental para a definição dos naturais, também não é necessária na definição dos inteiros.

Com isso, enquanto em $\mathbb{N}$ existe a ideia de ponto de partida $($0 ou qualquer outro natural$)$ e daí são gerados os demais sucessivamente, um a um, em $\mathbb{Z}$ essa ideia é substituída pela ideia de ponto de referência. Como todos os elementos passam a ter um sucessor e um antecessor, é viável estabelecer um *referencial*. Isto se torna interessante para a prática escolar, pois a noção de contagem pode inicialmente colaborar na abordagem dos números inteiros negativos. Como destacado no capítulo 2, os estudantes usam as habilidades de contagem ao se depararem com os números inteiros.

Assim, é necessário observar que com a definição de um referencial condiciona-se aos inteiros um *atributo de orientação*. Ou seja, se um inteiro z for o referencial definido, então todos os inteiros menores que z o antecedem, bem como todos os inteiros maiores que z o sucedem. Em $\mathbb{N}$ com a noção de sucessor, existe um menor número, mas não um maior. Porém, em $\mathbb{Z}$ com as noções de sucessor e antecessor, não existe menor nem maior número. Então, a *ideia de infinito* acaba sendo *ampliada* em $\mathbb{Z}$. Daí, a *reta numerada* é fundamental para construir e aprofundar esses diversos aspectos em sala de aula.

Também foi visto que a operação de adição nos inteiros foi definida como composição de funções. E a operação de multiplicação como combinação entre as potências da função sucessora. Com o atributo da orientação, a subtração pode ser definida como uma *adição com o simétrico*. E a multiplicação passa a ser vista como uma *ampliação com reflexão*. A consequência é que nos inteiros a soma nem sempre será maior que ou igual a uma de suas parcelas, bem como o produto nem sempre será maior que ou igual a um de seus fatores. Nos naturais, os resultados são números sempre maiores.

Além disso, as propriedades de $\mathbb{Z}$ foram demonstradas durante a nova construção pelo Princípio da Indução Inteira (Axioma $\mathbb{Z}_3$). Torna-se necessário verificar se outras propriedades relativas aos inteiros podem ser demonstradas utilizando este princípio. A análise deve se basear na descrição de condições semelhantes ao Princípio da Indução Finita utilizado para verificar propriedades de $\mathbb{N}$ e em exemplos de demonstrações. No próximo capítulo tudo isso será abordado.

Capítulo 6

Aplicações em sala de aula

6.1 Trabalhando a ideia de orientação

O capítulo anterior mostrou que se pode tomar os inteiros como quantidades enfileiradas, tendo cada uma seu sucessor e antecessor únicos. A partir de uma função bijetiva foi construído todo o conjunto $\mathbb{Z}$, munido das operações de adição e multiplicação e da relação de ordem. Ora, esse enfileiramento se dá indefinidamente em direções opostas.

Então, depois da contagem, a mais imediata noção que estrutura o conjunto $\mathbb{Z}$ é a *ideia de orientação*. Ela é responsável por dar significado à separação entre números positivos e negativos. A ideia de número vem acompanhada agora deste novo atributo. "Assim, todo número inteiro encerra dois atributos, um que está essencialmente vinculado à contagem (quantidade) e outro que traduz uma orientação" (RIPOLL, 2016, p. 64).

Um dos grandes motivos pelos quais se procurou fazer uma construção axiomática para os números inteiros neste trabalho foi amenizar a dificuldade de muitos estudantes em trabalhar com números negativos.

> Curiosamente, a fonte das dificuldades que os alunos têm com números negativos é inerentemente matemática. Ou seja, adicionamos um grupo de novos números aos nossos naturais e zero, e queremos que todo o conjunto de números - que denominamos de *inteiros* - tenha muitos dos atributos dos números naturais (WALL, 2014, p. 72).

Dessa forma, o enfileiramento indefinido de outros números a partir do zero para o sentido oposto aos naturais já traz em si uma ideia que deve ser trabalhada com os estudantes, que é a orientação. Este novo atributo tem implicações importantes, principalmente nas operações para com números negativos. Já ocorre com bastante frequência o uso de situações pelas quais em algum momento os estudantes tenham passado, como cálculo de saldos, mediação de altitudes ou variação de temperaturas. Inclusive, isto é recomendável no início do ensino e aprendizagem de números inteiros na escola (RIPOLL, 2016, p. 63.65; BRASIL, 1998, p. 66). Mas, como será mostrado a seguir, a discussão em sala de aula deve ser mais profunda.

6.1.1 Um referencial para as quantidades orientadas

Como já abordado no capítulo 4, na maioria das vezes os estudantes começam a aprender a operar com os números negativos através de suas habilidades de contar e de medir. Não há nada de estranho em saber que números negativos são utilizados em diversas situações cotidianas. Mas também são frequentes os obstáculos para responder perguntas como:

1. Se Fulano possui saldo R\$ $-100,00$ no banco e Beltrano R\$ $-150,00$, quem está em melhor situação financeira?

2. Determinada cidade registrou durante o primeiro dia de inverno do ano temperatura mínima de -4^oC e máxima de 2^oC. Qual foi a variação de temperatura da cidade neste dia?

3. Um submarino encontra-se a -10000 metros, considerando o nível do mar. Quantos metros percorrerá um torpedo lançado verticalmente pelo submarino para que atinja um alvo a 5000 metros, considerando o nível do mar?

Evidentemente, até o senso comum concorda que, se em lugar de números negativos, tivessem sido usados os termos "devendo R\$ $100,00$ e R\$ $150,00$", "4^oC abaixo" e "10000 metros abaixo do nível do mar", com muito maior facilidade se resolveriam os problemas elencados. Ou seja, o *referencial* aparece mais claramente com a ajuda de certas palavras. Porém, ao explicar situação semelhante ao problema do submarino, Ripoll (2016) esclarece a importância do referencial para a ideia de número inteiro:

> E claro que esta atividade pode ser resolvida sem que o aluno considere números negativos, simplesmente considerando altitude e profundidade separadamente, tendo o nível do mar como referencial, e associando números positivos a ambas. No entanto, para considerar um sistema único que incorpore profundidade e altitude, será necessário empregar símbolos diferentes para distinguir pontos equidistantes, abaixo e acima do nível do mar. A forma mais natural de fazer é (sic) distinção é considerar números positivos e negativos (p. 83).

Como se vê, ter um referencial para o conjunto $\mathbb{Z}$ servirá de instrumento para não só determinar a localização de cada número no ordenamento da "fila". Mas também implica em poder operar com esses números através do entendimento do atributo da orientação. Há, portanto, uma conveniência inicial de se tomar o zero como referencial. Pela construção do conjunto $\mathbb{Z}$ do capítulo anterior, pelo Princípio da Indução Inteira (axioma $\mathbb{P}_3$) a classe de equivalência $[(0,0)] = 0_{\mathbb{Z}}$ é ao mesmo tempo um inteiro não positivo e não negativo.

Nenhuma outra classe de equivalência possui ambos os atributos de não positivo e não negativo. Daí, a partir do zero e pela ideia de orientação podem ser enfileirados todos os inteiros, positivos e negativos.

6.1.2 A ressignificação do zero

Como visto no capítulo anterior, da definição de $\mathbb{Z}^+ = \{[(m,n)] \in \mathbb{Z}; m \geq n\}$, $\mathbb{Z}^- = \{[m,n] \in \mathbb{Z}; m \leq n\}$ e $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ (5.4), conclui-se que existe um elemento no qual temos que $m = n$, comum a $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{Z}^-$. Ou seja, $[(m,m)] = [(n,n)] = [(0,0)] = 0_{\mathbb{Z}}$. A existência desse elemento também se verifica da definição de $\mathbb{Z}^+ = \{S^n(0); n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathbb{Z}^- = \{A^n(0); n \in \mathbb{N}\}$ (5.31), pois $S^n(0) = A^n(0) \Rightarrow S^n(0) = S^{-n}(0) \Rightarrow 0+n = 0+(-n) \Rightarrow 0+n+n = 0+(-n)+n \Rightarrow 0+2n = 0+0 \Rightarrow 2n = 0 \Rightarrow n = 0$. Bem como por (5.24), verifica-se a sua unicidade: $x = 0 \Rightarrow S^x(0) = 0 \Rightarrow S^x(0)+A^x(0) = 0+A^x(0) \Rightarrow A^x(S^x(0)) = A^x(0) \Rightarrow 0 = A^x(0) \Rightarrow 0 = -x$.

Embora esteja destacado que para os inteiros não existe um ponto de partida específico tal como ocorre no caso dos naturais, a conveniência de tomar o zero como *referencial* para o conjunto $\mathbb{Z}$ justifica-se no fato deste inteiro ter o caráter de *nulidade*. Ou seja, ele é o inverso aditivo de si próprio, não existindo em outra posição da "fila" um inteiro diferente que somado a este número obtenha-se zero como resultado.

> É importante observar que, assim, o zero não é "negativo" nem é "positivo", marca justamente a distinção entre esses números. Por exemplo, a quantia "zero" não significa ter nem dever algum valor, é o referencial que distingue essas duas possibilidades, entendidas como opostas (RIPOLL, 2016, p. 69).

A proposta aqui, portanto, é de trabalhar essa ideia de tomar o zero como referencial durante as aulas sobre números inteiros. Não há grandes dificuldades dos estudantes entenderem que $+0$ ou -0 não são *na prática* coisas diferentes. Afinal de contas, acrescentar zero ou subtrair zero, subir zero etapas ou descer zero etapas, adiantar zero passos ou retroceder zero passos... enfim, a nulidade do zero não oferece grandes obstáculos de compreensão. A novidade agora é que, dessa compreensão de nulidade, pode se diferenciar negativo de positivo. Ou seja, a ausência de ambos aspectos, negativo e positivo, num único número é o ponto de partida (referencial) para distinguir números unicamente não negativos daqueles unicamente não positivos. Assim,

> A ressignificação do zero é um dos aspectos fundamentais para a compreensão dos números negativos. Além de manter o significado de ausência de quantidade, como, por exemplo, no caso de não se ter saldo nem positivo nem negativo no banco, o zero passa a ser compreendido também como um *referencial*, que distingue, por oposição, as quantidades negativas das positivas (RIPOLL, 2016, p. 65).

Tomar atividades na sala de aula que ajudem os estudantes a refletirem sobre essa importância do zero pode ser de grande valia no enfrentamento de uma de suas maiores dificuldades: por que um número n é diferente do número $-n$? (Fique claro aqui que ainda não se está falando sobre a ideia de simétrico ou oposto de um inteiro, que será abordada mais à frente). Do ponto vista da ressignificação do zero, pode-se dizer que estudantes estendem para $-n$ a mesma compreensão de número natural dada a n. Como sugestão para superar essa dificuldade, propõem-se atividades que explorem a ideia da nulidade do zero do seguinte modo:

1. Num banco, Fulano possui saldo zero e Beltrano deve zero. Quem está com uma situação financeira mais favorável? Represente através de números a situação de Fulano e a de Beltrano.

2. Num campeonato de tiro ao alvo disputado por Abel e Bruno, a partida deverá ser decida em três jogadas. No final, cada jogador deve somar os pontos obtidos em cada etapa. Ganha quem estiver com a maior pontuação. Na primeira jogada, Abel conseguiu $+5$ pontos e Bruno -3 pontos. Na segunda jogada, Abel conseguiu -2 e Bruno -1. Quem ganhou a partida, se na terceira jogada Bruno obteve $+4$ pontos e Abel -3 pontos?

Aprofundando a ideia de nulidade do zero, a discussão do professor com os estudantes pode reexplorar problemas como do tipo acima citados de forma complementar. O que se está querendo evidenciar é que os mesmos problemas podem ter outros direcionamentos. Por exemplo, após vivenciados os problemas acima com os estudantes, o professor pode perguntar aos mesmos como os problemas podem ser repensados de maneira que haja resultados favoráveis para alguém (ou desfavoráveis). Isto implica em os estudantes pensarem em números que não possuem a nulidade, o que leva necessariamente ao desenvolvimento da ideia de números positivos e números negativos. Daí, os estudantes devem entender que, assim como num termômetro a temperatura $-n$ graus não pode ser interpretada como a temperatura n graus, o mesmo ocorre para os números em si, descontextualizados e tomados como as entidades que são. Dessa forma, durante as aulas

> Além do zero ser ressignificado, também os números naturais passam a receber mais uma distinção: *números positivos*. É a partir da reunião dos já conhecidos *números naturais*, que serão tomados como positivos, do zero (...) e dos *números negativos*, entendidos como opostos dos números positivos... (RIPOLL, 2016, p. 69).

Toma-se, então, o enfileiramento de números a partir da noção de orientação fundamentada na nulidade do zero. Pode-se afirmar que a noção de sucessor e a noção de antecessor tomam como referencial a nulidade do zero. Daí, se constroem todos os números positivos à maneira de Peano, e todos os negativos semelhantemente. Com as ideias de nulidade, positividade e negatividade bem desenvolvidas, a apresentação do conjunto $\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$ ganha mais significado. O passo seguinte é ampliação e exploração da ideia de infinito neste conjunto.

6.1.3 A ampliação da ideia de infinito

Tomando-se a ideia de que um conjunto é infinito se um dado subconjunto deste tiver o mesmo tamanho do conjunto (RIPOLL, 2015, p. 66), facilmente pode ser percebido que o conjunto dos números inteiros é infinito. Mas a ideia de infinito sofre uma ampliação no conjunto $\mathbb{Z}$. Já ficou claro que os inteiros não tem um ponto de partida, como ocorre nos naturais.

> No universo dos números naturais, existe o primeiro número, mas não existe um "último", ou seja, existe o menor número natural, mas não o maior. Com os números inteiros, esse primeiro número deixa de existir. Assim, não existem o maior nem o menor número inteiro... (RIPOLL, 2016, p. 83).

Tal aspecto dos inteiros não pode ser, portanto, apenas abarcado pela noção de sucessor. Daí a importância da noção de antecessor. A construção axiomática do conjunto $\mathbb{Z}$ partiu, por isso, de uma função bijetiva (função sucessora) com a qual é possível determinar o sucessor de cada número, bem como o antecessor de cada tomando a inversa dessa função (função antecessora).

Algumas atividades contextualizadas aqui indicadas podem ajudar a construir as ideias de sucessor e antecessor de maneira mais dinâmica do que o formalismo de se perguntar quem é o "sucessor do antecessor", o "antecessor do sucessor" e outras desse tipo. Uma boa proposta seria aprofundar essas noções a partir do trabalho de Argand, citado no capítulo 4 (item 4.2). A historicidade das ideias pode apoiar a discussão sobre a estruturação do conjunto $\mathbb{Z}$.

> Em muitas situações, o recurso a História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. Assim, a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles (BRASIL, 1998, p. 43).

O trabalho de Argand, embora tenha uma abordagem geométrica, favorece o entendimento da ampliação da ideia de infinito nos inteiros. Pois ajuda a "quebrar" o engessamento de que o infinito começa num ponto e continua indefinidamente. Esse engessamento tem sua origem nas aulas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Não se quer aqui minimizar a importância de um ponto de partida para os naturais. Apenas enfatiza-se que a fixação desse ponto não pode ser tratada como um dogma, uma vez que o entendimento de número inteiro (bem como da ideia de infinito) não pode se limitar a isto. Tendo isto em vista, volta-se a atenção agora para abordagem geométrica dos inteiros com a reta numerada.

6.1.4 A reta numerada

Do enfileiramento dos números inteiros e pelo trabalho de Argand, é preciso compreender que essa organização também leva em consideração a noção de medida. Uma das grandes dificuldades dos estudantes é entender que quanto mais distante um número negativo está do zero menor ele é. Ou seja, a compreensão de infinito ainda está limitada a um ponto de partida e não a um referencial. Pelas noções de sucessor e antecessor é possível também se trabalhar as noções de medida e de posição dos inteiros. Diante disso, a representação dos números inteiros na reta numerada torna-se imprescindível. Isto implica em trabalhar com a reta numerada também de forma conceitual e não simplesmente representativa. "A reta numerada sustenta vários conceitos matemáticos elementares abarcados na abordagem dos inteiros" (RIPOLL, 2016, p. 78). Duas perguntas básicas podem ser um bom começo:

1. O sucessor de um número é maior ou menor do que este número? Isto é válido para todos os inteiros representados na reta?

2. O antecessor de um número é maior ou menor do que este número? Isto é válido para todos os inteiros representados na reta?

Tal como posto, a reflexão destas duas perguntas deve acompanhar a apresentação dos números inteiros na reta numerada. Embora muitos estudantes já saibam localizar os números na reta, por vezes não poucos desconhecem que qualquer quantidade negativa é sempre menor que qualquer outra positiva. E até mesmo que qualquer quantidade negativa é menor que o zero. Deveria ser bem simples fazer essa extensão de ordenamento quantitativo dos naturais para os inteiros. Mas parece que isso também está atrelado às dificuldades com a ampliação da ideia de infinito.

> Às vezes se encontram em livros didáticos representações da reta numerada com duas "setinhas", uma de cada lado. A intenção de tal representação é indicar que a reta numerada é não limitada inferior e superiormente. Entretanto, essa representação pode gerar dificuldades de aprendizagem (RIPOLL, 2016, p. 79).

Esse tipo de representação da reta com duas "setinhas" mostra-se desfavorável à compreensão dos números inteiros, principalmente os negativos. A sugestão é que a reta seja apenas representada com uma seta indicando o crescimento quantitativo dos números, ou seja, no sentido crescente dos naturais (que agora são também os inteiros positivos). Mesmo concordando-se com Ripoll (2016) de que a reta numerada contribui para o entendimento de vários conceitos, como o de módulo de um número inteiro (p. 80), salienta-se que as noções de sucessor e antecessor são propícias para um trabalho mais eficaz em sala de aula. Os estudantes podem ter uma aprendizagem maior, percebendo aquilo que não fica claro na representação dos inteiros na reta, isto é, na sua representação geométrica. Justifica-se a necessidade desse embasamento conceitual a partir de um pensamento daquilo que deve ser observado no estudo da reta real, em relação à interpretações visuais de construções geométricas para soma e produto de números reais:

> O progresso da Ciência e a diversidade de aplicações da Matemática, dos casos mais corriqueiros até a alta tecnologia, há muito tempo deixaram claro que esta visão geométrica, por mais importante que tenha sido e ainda seja, precisa ser complementada por uma descrição algébrica de $\mathbb{R}$. Tal complementação requer que seja feita uma lista de propriedades (axiomas) do conjunto $\mathbb{R}$, a partir das quais todos os fatos sobre números reais podem ser demonstrados. Algo parecido com os axiomas de Peano para números naturais. Só que, naturalmente, uma estrutura mais elaborada, pois $\mathbb{R}$ é uma concepção *bem mais rica e mais sutil* do que $\mathbb{N}$ (LIMA et all, 2012, p. 68).

Do grifo acima, destaca-se também a maior sutileza dos números inteiros em comparação com os naturais. Neste sentido, a reta numerada por si só não garante o entendimento das noções que estão por trás de sua construção. Reitera-se a importância de discutir as duas perguntas anteriormente citadas durante essa abordagem da reta numerada.

6.1.5 Comparação entre números inteiros

É notório que não há possibilidade de se comparar números inteiros sem um bom entendimento do ordenamento destes números. O que deve ser aprofundado neste caso é a ideia de *entidade* em contraposição à ideia de *quantidade*. Embora em Argand a ideia de quantidade se estenda também para os números negativos, um bom trabalho com a reta numerada possibilita que também essa ideia fique clara para estudantes a partir do ordenamento dos inteiros.

> A abordagem da comparação dos números negativos na sala de aula pode (e deve) ser fortemente amparada pela representação desses números na reta numerada. Os alunos já conhecem a ordem definida para os números naturais, que será preservada para comparação entre os números inteiros positivos. Assim, se mantem, por exemplo, a desigualdade $2 < 5$, que fica evidenciada na reta numérica pelo fato de que 2 está à esquerda do 5. É esse entendimento que funda a compreensão de ordem para os inteiros. A comparação entre dois números negativos e entre um número positivo e um número negativo fica indicada pela observação da reta numerada: $-5 < -2$ porque, na reta numerada, -5 está à esquerda do -2; e $-5 < 2$ porque, na reta numerada, -5 está à esquerda do 2 (RIPOLL, 2016, p. 80-81).

Portanto, comparar números negativos entre si e com os positivos depende, ao menos inicialmente, do posicionamento destes na reta. O trabalho com as noções de sucessor e antecessor pode também apoiar a comparação entre estes. Das definições em (5.14) $S^n(0) = n$ e

$A^n(0) = -n$ e pela noção de orientação, o conjunto dos inteiros pode ser ordenado como $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\} = \{..., A^3(0), A^2(0), A^1(0), 0, S^1(0), S^2(0), S^3(0), ...\}$. Assim, os números negativos são vistos todos como antecessores do zero, enquanto os números positivos todos como sucessores do zero.

Uma atividade interessante seria que os estudantes usassem dessa notação para fazer as comparações tomando como referência o zero. Do exemplo citado anteriormente por Ripoll(2016), $2 < 5$ pois $2 = S^2(0)$ e $5 = S^5(0)$. Daí, pelo ordenamento acima, tem-se $0 < S^2(0) < S^5(0)$. Semelhantemente, $-5 = A^5(0)$ e $-2 = A^2(0) \Rightarrow A^5(0) < A^2(0) < 0 \Rightarrow -5 < -2$. Bem como $-5 = A^5(0)$ e $2 = S^2(0) \Rightarrow A^5(0) < 0 < S^2(0) \Rightarrow -5 < 2$. A proposta obviamente é que o uso da notação em atividades escolares sustente o trabalho conceitual como alternativa além da reta numerada. Para evitar confusões com a notação, ela pode ser substituída por expressões como -5 é o número que *antecede o zero cinco casas* e 5 é o número que *sucede o zero cinco casas*. O importante é destacar que a comparação entre os inteiros requer um entendimento da estruturação do conjunto, das ideias que lhe fundamentam.

6.1.6 Os sinais e seus significados

Como já comentado, uma das grandes dificuldades que os estudantes encontram é aceitar que um inteiro n é diferente do inteiro $-n$. A origem dessa dificuldade está no ensino e aprendizagem com números desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Os estudantes acabam atrelando a ideia de número à quantidade que é representada num sistema de numeração. Uma série de regras, operações, propriedades e algoritmos são enfatizados de tal maneira em seus procedimentos que acaba-se por interferir na aprendizagem de outros conceitos importantes nos anos subsequentes da vida escolar.

> O sistema decimal é tão "poderoso" para representar, lidar e operar com números naturais e estamos tão acostumados a tomá-lo como padrão, que às vezes confundimos características das representações com propriedades intrínsecas aos números representados. Isto é, tendemos a confundir o número (como quantidade) com a forma como este é representado (RIPOLL, 2015, p. 78).

Para uma boa parte dos estudantes, os sinais $''+''$ e $''-''$ referem-se apenas às operações de adição e subtração. De fato, a confusão é até justificável. Com respeito aos inteiros (o que na sequência é repassado para os números racionais, e depois para os reais), os sinais envolvem os significados de *identificação de um número como positivo ou negativo* e de *determinação de um simétrico ou oposto* (RIPOLL, 2016, p. 71). Enquanto os números naturais demandam apenas algarismos para representá-los, um número inteiro demanda também o sinal $''+''$ ou $''-''$, dado seu atributo da orientação. Além disso, como ficou evidenciado nos dois capítulos anteriores, uma das propriedades da adição nos inteiros é a existência de elemento simétrico ou oposto para cada número. Isto é, o simétrico ou oposto de um inteiro x é o inteiro $-x$.

Com relação ao significado de positivo ou negativo, atividades simples levando em consideração o ordenamento que foi proposto para o caso da comparação entre números inteiros podem contribuir para uma construção melhor fundamentada do significado do atributo da orientação de um número inteiro. Então, os números negativos serão sempre aqueles números que antecedem o zero, enquanto os positivos os que o sucedem. Já para o significado de simétrico ou oposto, é constatável que

> É justamente neste contexto que surge uma dúvida típica em relação aos números inteiros: *Se n é um número inteiro, -n é negativo ou positivo?* É claro que a resposta depende do fato de n ser positivo ou ser negativo. No entanto, reconhecer que n pode ser um número negativo mesmo sem que o sinal "-" esteja explícito exige abstração (...) Compreender que n pode corresponder a um número negativo tanto como a um número positivo é alcançar a generalização do conceito de número inteiro (RIPOLL, 2016, p. 74).

Entretanto, aqui nesta pesquisa se entende que este segundo significado deve ser melhor aprofundado no trabalho com a adição de inteiros, por se tratar de uma de suas propriedades. Abordar-se-á melhor este significado mais adiante.

6.2 Trabalhando as operações com números inteiros

6.2.1 Adição e subtração

Nas atividades escolares a adição em $\mathbb{Z}$ pode ser interpretada como tomar o número que vem *depois* do inteiro z m vezes, quando m pertencer ao conjunto $\mathbb{Z}_+$. Ou seja, $z+m = z+S^m(0) = S^m(z+0) = S^m(z), z \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}_+$. E quando m pertencer ao conjunto $\mathbb{Z}_-$, ter-se-á que $z+m = z+A^m(0) = A^m(z+0) = A^m(z), z \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}_-$. Isto é, toma-se o número que vem *antes* do inteiro z m vezes.

As noções base desse modo de somar e diminuir não são outras senão a de sucessor e a de antecessor. "A reta numerada pode ser de grande suporte para o tratamento das operações de adição e de subtração com números inteiros" (RIPOLL, 2016, p . 89). Então, pela reta numerada no sentido horizontal, toma-se o número z como ponto de referência e o número m a quantidade de casas que é preciso suceder ou anteceder. Por exemplo, efetuar $(+3)+(+5)$ é sair do $+3$ e suceder 5 casas, chegando na casa do $+8$. Daí, $(+3)+(+5) = (+8)$. Efetuar $(+3)+(-5)$ é sair do $+3$ e anteceder 5 casas, chegando na casa do -2. Daí, $(+3)+(-5) = (-2)$.

Para subtração, basta fazer o contrário do que se fizer para a adição. Nesse caso, subtrair de um inteiro z qualquer outro inteiro positivo $+m$ é anteceder, a partir de z, m casas.

E subtrair de um inteiro z qualquer outro inteiro negativo $-m$ é suceder, a partir de z, m casas. Isto é, efetuar $(+3)-(+5)$ é sair do $+3$ e anteceder 5 casas, chegando na casa -2. Daí, $(+3)-(+5)=(-2)$. E efetuar $(+3)-(-5)$ é sair do $+3$ e suceder 5 casas, chegando na casa $+8$. Daí, $(+3)-(-5)=(+8)$. Como se pode notar, na subtração já se usa um processo de *reflexão*, consequência do atributo da orientação. Ora,$-(-x)=x$, $-S(x)=A(-x)$ e $-A(x)=S(-x)$ (5.29). Logo, por exemplo, $(+3)-(+5)=(+3)-S(4)=(+3)+A(-4)=(+3)+(-5)=(-2)$. E $(+3)-(-5)=(+3)-A(-4)=(+3)+S(-(-4))=(+3)+S(4)=(+3)+(+5)=(+8)$. Isso evidencia a importância de construir com os alunos a ideia de *inverso aditivo*.

> Na extensão dos naturais para os inteiros, a inclusão de inversos aditivos (ou simétricos) possibilita que toda subtração seja expressa como uma adição (com simétrico). Por exemplo, a subtração $7-4$ pode ser expressa como $7+(-4)$. Embora esta subtração já pudesse ser efetuada no universo dos naturais, ela não podia ser expressa como uma adição, pois em $\mathbb{N}$ o número 4 não tem inverso aditivo (RIPOLL, 2016, p. 89).

"Assim, os contatos dos alunos com os significados dos números inteiros podem surgir da análise de situações-problema do campo aditivo" (BRASIL, 1998, p. 98). Mas a recomendação continua sendo trabalhar as operações conceitualmente, e não fixar procedimentos. Uma atividade pode ser vivenciada em etapas. Primeiro, usando a reta numerada para efetuar somas e subtrações simples, de forma que os estudantes possam visualizar os números e suas posições. E, gradativa e posteriormente, para situações sem a reta numerada, evoluindo para a abstração necessária com os inteiros.

6.2.2 Multiplicação

A multiplicação com números naturais é simplesmente a junção de parcelas iguais, de tal maneira que o produto é sempre maior que seus fatores ou igual a um de seus fatores. Esta operação acaba sendo fortemente associada à ideia de *ampliação* como obtenção de quantidade quase sempre elevadas (ou equivalente a um dos fatores). E, de fato, é isso mesmo. Porém, com os números inteiros nem sempre o produto será maior que seus fatores. Além disso, ao se multiplicar dois números positivos o resultado sempre será outro positivo. Porém, a multiplicação de dois números negativos implica também num produto positivo. Isto ocorre porque

> A noção de orientação, incorporada à contagem na expansão dos números naturais para os inteiros, implica em uma ressignificação da multiplicação, que passa a ser interpretada como a composição de uma ampliação com uma reflexão. Essa interpretação se expressa formalmente na definição da multiplicação com números inteiros, a conhecida "regra dos sinais" para a multiplicação (RIPOLL, 2016, p. 92).

No capítulo 4 (item 4.6), a estruturação de $\mathbb{Z}$ a partir da ideia de subtração equivalente leva à demonstração da regra dos sinais de forma não casual. Ou seja, não se trata de uma regra tomada por conveniência.

> A regra dos sinais da multiplicação não é uma "convenção" nem uma "regra arbitrária", e sim a única maneira de se estender a operação da multiplicação dos naturais para os inteiros de tal forma que suas propriedades fundamentais sejam preservadas (...)(RIPOLL, 2016, p. 92).

Ao construir $\mathbb{Z}$ no capítulo 4, foi demonstrado que $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ é um *anel ordenado* (RIPOLL, 2016, p. 57). Com isso, $\mathbb{Z}$ satisfaz as propriedades básicas usuais que são trabalhadas desde o Ensino Fundamental. Entretanto, embora não haja dúvida de que a regra dos sinais tenha sua justa validade, é verdadeiramente um desafio fazer os estudantes compreenderem os fundamentos da regra a tal ponto de não a utilizarem superficialmente.

Há recomendações de se demonstrar que a multiplicação de inteiros positivos por negativos pode ser interpretada como soma de parcelas negativas (BRASIL, 1998, p. 99). Bem como fazer uso de *tabuadas ou tabelas de multiplicação com inteiros* (RIPOLL, 2016, p. 96; BRASIL, 1998, p. 99-100). Aproveitando a familiaridade que os alunos têm com a soma de parcelas repetidas com naturais, a regularidade pode ser estendida com mais facilidade aos inteiros. Para também aprofundar a regra dos sinais, recomenda-se a exploração de um tipo de problema histórico (BRASIL, 1998, p. 100), como destacado no seguinte trecho:

> Algo que os árabes (e também Diofante) entendiam era como expandir produtos da forma: $(x+a)(x-b)$. Eles sabiam que nessa situação negativo vezes negativo resulta em positivo, e negativo vezes positivo, em negativo. Mas aplicavam isso apenas a problemas envolvendo subtrações cujas respostas fossem positivas. Assim, essas "leis dos sinais" eram conhecidas, mas não eram entendidas como regras sobre como operar com coisas independentes chamadas "números negativos"(BERLINGHOFF & GOUVÊA, 2010, p. 97).

Portanto, deve-se buscar justificar com isso os fundamentos de $\mathbb{Z}$. Nesta construção axiomática para os inteiros, a partir da potência da função sucessora se estrutura a regra dos sinais na multiplicação desses números. Isto pode ser percebido com maior clareza na demonstração da proposição 10 (5.40) do capítulo anterior.

6.3 Trabalhando com o Princípio da Indução Inteira em demonstrações

Como visto no capítulo 3, pelo Princípio da Indução Finita (Definição 3.1), foi possível demonstrar proposições referentes aos números naturais. Esta é uma das grandes utilidades desse princípio (LIMA et all, 2012, p. 38; OLIVEIRA & FERNÁNDES, 2010, p. 204).

Da mesma forma que foram verificadas que a adição e multiplicação para os naturais estavam bem definidas (bem como as propriedades dessas operações), muitos outras afirmações podem ser também validadas (ou não).

> Uma grande vantagem do princípio da indução finita é poder provar que uma grande quantidade infinita de afirmações são verdadeiras, simplesmente verificando que uma quantidade finita destas afirmações são verdadeiras (OLIVEIRA & FERNÁNDES, 2010, p. 206)

Em vários exercícios de aplicação, o método da indução é aplicado para fazer demonstrações de *identidades, desigualdades* ou *divisibilidades*. Na nova construção feita para os inteiros, foi definido o axioma da Indução Inteira. Por ele, foram demonstradas as operações nos números inteiros e as suas propriedades, além de algumas proposições. A pergunta é se com o Princípio da Indução Inteira é possível verificar a validade de outras proposições para os números inteiros. Então, torna-se necessário primeiro verificar as condições básicas que fazem com que o Princípio da Indução Finita para os naturais seja aplicável nas demonstrações. E, depois, se há condições semelhantes para o Princípio da Indução Inteira no caso dos inteiros.

Em geral, as condições que permitem a demonstração no caso do Princípio da Indução Finita para os naturais são explicitadas pela analogia de uma fila de dominós em pé, organizados de tal maneira que, derrubada a primeira "pedra", as demais também caem, uma a uma.

> Quais são as condições suficientes para que todas as pedras de dominó sejam derrubadas? São duas: (1) precisamos derrubar a primeira pedra e (2) cada pedra tem que derrubar a próxima da fila. A primeira condição é uma questão de fato - precisamos realmente dar um empurrão. A segunda condição, porém, é uma relação entre as várias pedras de dominó: cada pedra derrubará a próxima somente se a distância entre ela e a próxima for menor que o comprimento das pedras. Se essa relação não for mantida e, algum ponto da fila - isto é, se tem uma pedra que está situada longe demais da sua vizinha - então nesse ponto a cadeia de derrubamentos será interrompida e algumas pedras continuarão em pé (FOSSA, 2009, p. 101).

Então, no caso dos naturais, fica claro que é necessário verificar primeiro se o primeiro número da fila possui a propriedade (*base da indução*) e se, considerando que um dado natural possui a propriedade, isto implica que o próximo número também a tem. Isso vem justamente da ideia fundamental de sucessão. Destaque-se que há um ponto de partida. Este ponto de partida para a indução não tem que ser necessariamente 0 ou 1. Pode ser qualquer outro natural.

> A técnica de indução matemática depende da existência de uma série. Demonstramos que o primeiro elemento da série - seja ele 0, 1, 2, ou qualquer outro número - tem uma certa propriedade. Essa é a base da indução. Depois, demonstramos que se qualquer elemento da série tem a propriedade, o próximo elemento da série também a terá. Dessa forma, demonstramos a nossa cadeia de condicionais que é expressa na proposição (2) (FOSSA, 2009, p. 105-106).

Como citado anteriormente, esta proposta de uma construção axiomática para os números inteiros considera um referencial, demonstrando-se a conveniência do zero ser este referencial. Pois, de fato, pode-se considerar qualquer outro inteiro um referencial, definindo os demais números tomando as ideias de sucessor e antecessor. O que se evidencia a partir da analogia de Fossa (2009) é a necessidade de um "empurrão nos dois sentidos". Tal "empurrão" implica num movimento simultâneo em via dupla da mesma propriedade. Ou seja, a propriedade é estendida a todos os sucessores e antecessores do referencial ao mesmo tempo. E com isso se reforça ainda mais a conveniência do zero ser este referencial. O zero pela sua nulidade encerra em si tanto a não negatividade (sentido dos inteiros positivos) quanto a não positividade (sentido dos inteiros negativos). Portanto, o zero é o caso base mais conveniente para a indução inteira.

Tentando deixar mais claro, o zero vale pelas duas "pedras" que se precisa derrubar primeiro. A "pedra" $+0$ é a que progressivamente derrubará as "pedras" equivalentes aos números positivos. E a "pedra" -0, as "pedras" equivalentes aos números negativos. Argumenta-se isso a partir da proposição 5.31, com o zero como o primeiro elemento do conjunto $\mathbb{N}$ e zero também como o primeiro elemento do conjunto $-\mathbb{N}$. Daí, a analogia do "empurrão nos dois sentidos". Entretanto, não se está dizendo aqui que existam duas "pedras" distintas $+0$ e -0, o que implicaria em $+0 \neq -0$. Apenas que uma mesma "pedra" (zero) por possuir ambos atributos de não-positividade e não-negatividade torna-se, por conveniência, o caso base da Indução Inteira.

Para Fossa (2009), a indução depende da forma seriada dos números (naturais). Semelhantemente, os inteiros também são "enfileirados" de forma seriada, só que em dois sentidos. Por isso, há necessidade de se fazer a demonstração pela Indução Inteira nos dois sentidos da "fila".

> Assim, o Princípio da Indução Finita *caracteriza* o conjunto $\mathbb{N}$ como aquele que é totalmente coberto pelo processo de se tomar o sucessor progressivamente a partir do 0. Quando se faz uma prova por indução, demonstra-se que a propriedade em questão satisfaz as hipóteses do Princípio da Indução e, portanto, é satisfeita por todos os números naturais (RIPOLL, 2015, p. 56-57).

Daí, no caso dos inteiros, também se toma o processo de sucessão. Mas também o de tomar o antecessor indefinidamente. Como todos os números estão distantes um do outro uma diferença equivalente a um, as "pedras" são todas derrubadas sequencialmente sem interrupções. Portanto, o Princípio da Indução Inteira caracteriza o conjunto $\mathbb{Z}$. Então, para se demonstrar uma propriedade ela deve, por isso, satisfazer as hipóteses da indução inteira, contemplando os dois sentidos. Caso a propriedade as satisfaça, todos os inteiros a possuem. A seguir, serão discutidos alguns exemplos aplicando o Princípio da Indução Inteira.

Exemplo 1 *Demonstre que a soma de* 10 *inteiros consecutivos quaisquer é sempre diferente zero.*

Demonstração. Sejam os 10 inteiros consecutivos $z-5, z-4, z-3, z-2, z-1, z, z+1, z+2, z+3$ e $z+4$. Somando todos os números tem-se que $S_{10}(z) = (z-5)+(z-4)+(z-3)+(z-2)+(z-1)+z+(z+1)+(z+2)+(z+3)+(z+4) = 10z-5$. Logo vê-se que $S_{10}(0) \neq 0$, pois $S_{10}(0) = 10 \cdot 0 - 5 = 0 - 5 = -5 \neq 0$. Agora, seja $S_{10}(k) \neq 0$, para um inteiro k. Logo, $10k-5 \neq 0$. Daí, $S_{10}(k+1) = 10(k+1)-5 = 10k+10-5 = 10k+5$. Ora, $10k+5 = 0 \Leftrightarrow 10k = -5$. Mas acontece que -5 não é múltiplo de 10. Então, $10(k+1)-5 \neq 0$. Analogamente, $S_{10}(k-1) = 10(k-1)-5 = 10k-10-5 = 10k-15$. Ora, $10k-15 = 0 \Leftrightarrow 10k = 15$. Mas acontece que 15 também não é múltiplo de 10. Então, $10(k-1)-5 \neq 0$. Logo, $S_{10}(k) \neq 0 \Rightarrow S_{10}(S(k)) \neq 0$ e $S_{10}(A(k)) \neq 0$. Portanto, $S_{10}(z) \neq 0$ é válida $\forall z \in \mathbb{Z}$. É possível perceber também que como $10k-5 \neq 0$ por hipótese, então $10(k+1)-5 = 10k+10-5 = (10k-5)+10$ só será igual a zero se $10k-5 = -10$, ou seja, $10k = -5$, o que não possível pois -5 não é múltiplo de 10. A verificação é análoga para $10(k-1)-5$, terminando a demonstração. □

Obviamente, a demonstração acima pode ser verificada pela fórmula para soma de termos de uma progressão aritmética. Então, seja $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$. Logo, $S_{10} = \dfrac{10(a_1+a_{10})}{2} = 5(a_1+a_{10})$. Ora, a soma só resultaria em zero se a_1 e a_{10} fossem inversos aditivos um do outro. Mas isto só ocorre quando o número de inteiros consecutivos é ímpar. Portanto, sempre que o número de inteiros consecutivos for par, o resultado de sua soma sempre será diferente de zero.

Exemplo 2 *Mostre que a soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.*

Demonstração. Seja a proposição $S(z) : (z-1)^3 + z^3 + (z+1)^3$ é múltiplo de 9. Nota-se que $S(0)$ é válida, pois $(0-1)^3 + 0^3 + (0+1)^3 = (-1)^3 + 0^3 + 1^3 = (-1)+0+1 = 0 = 9 \cdot 0$.

Precisa-se agora provar o passo indutivo, isto é, tendo por hipótese que $S(k)$ é verdadeira para algum $k \in \mathbb{Z}$, mostrar que $S(k+1)$ e $S(k-1)$ também são verdadeiras. Para provar isto, observa-se que $((k+1)-1)^3 + (k+1)^3 + ((k+1)+1)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = k^3 + (k+1)^3 + ((k-1)+3)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k-1)^3 + 3(k-1)^2 \cdot 3 + 3(k-1) \cdot 3^2 + 3^3 = \underbrace{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}_{multiplo\ de\ 9\ (hipotese\ de\ inducao)} + \underbrace{9 \cdot ((k-1)^2 + 3(k-1) + 3)}_{multiplo\ de\ 9}$.

Analogamente, $((k-1)-1)^3+(k-1)^3+((k-1)+1)^3=(k-2)^3+(k-1)^3+k^3=((k+1)-3)^3+(k-1)^3+k^3=(k+1)^3-3(k+1)^2\cdot 3+3(k+1)\cdot 3^2-3^3+(k-1)^3+k^3=\underbrace{(k-1)^3+k^3+(k+1)^3}_{multiplo\ de\ 9\ (hipotese\ de\ inducao)}\ \ \underbrace{-9\cdot((k+1)^2-3(k+1)+3)}_{multiplo\ de\ 9}.$

Logo, pelo Princípio da Indução Inteira, a soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9. $\square$

Exemplo 3 *Prove que* $3^{z-1}<2^{z^2}$ *para todo* $z\in\mathbb{Z}$.

Demonstração. Denota-se por $P(z)$ a propriedade: $3^{z-1}<2^{z^2}$. É claro que $P(0)$ é válida, pois $3^{0-1}<2^{0^2}\Rightarrow 3^{-1}<2^0\Rightarrow \dfrac{1}{3}<1$. Agora supondo que $P(k)$ é verdadeira para algum inteiro k, tem-se que $3^{k-1}<2^{k^2}$. Nota-se que $3<2^{2k+1}$ para todo inteiro $k\geq 1$. Portanto, $3^{k-1}\cdot 3<2^{k^2}\cdot 2^{2k+1}\Rightarrow 3^{k-1+1}<2^{k^2+2k+1}\Rightarrow 3^{(k+1)-1}<2^{(k+1)^2}$. Analogamente, $3^{-1}<2^{-2k+1}$ para todo $k\leq -1$. Portanto, $3^{k-1}\cdot 3^{-1}<2^{k^2}\cdot 2^{-2k+1}\Rightarrow 3^{k-1-1}<2^{k^2-2k+1}\Rightarrow 3^{(k-1)-1}<2^{(k-1)^2}$. Logo, quando $P(k)$ é válida, $P(S(k))$ e $P(A(k))$ também são. E isto termina a demonstração pelo Princípio da Indução Inteira. $\square$

Com as demonstrações dos exemplos acima, constata-se que princípio da Indução Inteira é útil para verificar *identidades, divisibilidades* e *desigualdades* relativas aos números inteiros. Tal como feito com o princípio da Indução Finita, não se recomenda que se aborde esse método na Educação Básica. Porém, em estudos mais avançados seria interessante, como nas graduações ou programas de iniciação científica.

Capítulo 7

Considerações finais

As dificuldades dos estudantes em trabalhar com números inteiros são devidas em grande parte à ausência de uma caracterização mais minuciosa em sala de aula dos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Nesta caracterização devem ser destacadas as ideias estruturantes de cada conjunto. Embora situações cotidianas possam de início contribuir para a abordagem dessas ideias estruturantes, o aprofundamento dessas ideias não pode depender exclusivamente de um ensino e aprendizagem contextualizado.

Buscando contribuir com a superação de tais dificuldades, este trabalho propôs uma construção axiomática e indutiva para os inteiros, tomando como modelo os axiomas de Peano. A ideia fundamental para a construção do conjunto $\mathbb{N}$ é a noção de sucessor. Comparados os ordenamentos dos elementos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, observa-se que em ambos os números são enfileirados indefinidamente de tal maneira que a diferença entre um e outro números consecutivos é sempre igual a um. No caso de $\mathbb{Z}$, este enfileiramento se dá em duas direções opostas. Logo, além da noção de sucessor, em $\mathbb{Z}$ também está presente a noção de antecessor. Então, tomou-se uma função bijetiva denominada de sucessora, com a qual são definidos todos os elementos de $\mathbb{Z}$, munindo-o das operações, da relação de ordem e preservando suas propriedades básicas.

Para justificar uma nova abordagem dos conjuntos numéricos na Escola Básica, este trabalho fez uma exposição sucinta da evolução da ideia de número. Para proposição do novo modo de construção dos inteiros, foi apenas preciso tomar a ideia de número como conceito primitivo. Como visto, inclusive Frege e Peano assim o fizeram em seus trabalhos. Porém, observar as transformações por que passou a ideia de número leva ao entendimento de que, assim como não foi simples chegar à aceitação consensual das quantidades negativas, também é um desafio fazer os estudantes passarem do senso numérico para uma maior abstração dos números. Assim, torna-se notória a importância de se trabalhar ideias ou noções que estão por trás dos conjuntos numéricos. Então, partindo da noção inicial de contagem, da mesma forma que a prática concreta da contagem necessita da abstração da ideia de número natural, estender a noção de contagem para quantidades menores que zero pode ser de utilidade profícua na busca dos estudantes atingirem a abstração dos inteiros.

Nesta análise, foi detectado que a relação entre práticas concretas e abstração dos números se deu de formas variadas durante a História. Os conflitos que tiveram como causa a emancipação das quantidades negativas como números, de uma certa maneira, levam a um melhor entendimento sobre as dificuldades dos estudantes em operarem com números negativos. E também podem iluminar a prática escolar, ajudando a esclarecer melhor a ideia de uma quantidade negativa. Pois os registros históricos sobre processo de formação e evolução da ideia de número têm potencial para colaborar com o processo didático. Nesse sentido, a própria História da Matemática indica o quanto é importante que as ideias fundamentais na construção dos conjuntos numéricos sejam destacadas.

Ao mesmo tempo, com isso, enfatiza-se que um estudo contextualizado sobre números inteiros (e até mesmo sobre os naturais) deve ter o devido ajustamento. Mesmo as práticas concretas com números negativos são limitadas para destacar os atributos que tais números possuem. Basta pensar, por exemplo, numa situação de saldo $(-z)+(+k)$, onde $|-z|>|+k|$, obtendo um saldo negativo. O senso comum em geral compreende que a dívida *diminuiu*. Porém, na sala de aula o professor explica que o saldo *aumentou*. Logicamente, as afirmações são as mesmas. Contudo, é mais adequado inserir as ideias nos contextos de aplicação. E não buscar construir essas ideias a partir dos contextos.

Ripoll (2015; 2016) e os parâmetros curriculares recomendam que, nas aulas sobre conjuntos numéricos, as noções e as propriedades fundamentais dos naturais sejam adequadamente estendidas aos inteiros. Porém, é preciso que os estudantes progressivamente desenvolvam a abstração necessária para resolver situações-problema com inteiros, em especial com quantidades menores que zero. Para isso, destacou-se a viabilidade de um trabalho prioritariamente conceitual nas aulas sobre conjuntos numéricos, onde se proporcione aos estudantes clareza sobre as ideias que estruturam $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ (além dos demais conjuntos numéricos).

No caso do conjunto $\mathbb{Z}$, é crucial que os estudantes tenham ciência do atributo da orientação inerente aos inteiros. Para ordenamento e comparação entre inteiros, as noções de sucessor e antecessor (que foi destacada na nova construção) são suficientes para um bom entendimento dos estudantes. Na nova construção, toma-se o número nulo (zero) como referencial "mais conveniente" e definem-se todos os números negativos como antecessores do zero e todos os positivos como sucessores do zero. Esta definição já fica estabelecida nos axiomas $\mathbb{Z}_1$ e $\mathbb{Z}_2$. Como zero é nulo, o atributo da nulidade também torna-se um referencial para os atributos da negatividade e da positividade dos outros elementos de $\mathbb{Z}$. Daí, ser um antecessor do zero implica em possuir o atributo da negatividade. E ser um de seus sucessores, possuir o atributo da positividade. Consequentemente, este "posicionamento" dos números inteiros torna necessário um aprofundamento da ideia de infinito. Foi visto que com o auxílio da reta numerada muitos desses aspectos podem ficar ainda mais claros. Obviamente, as ideias de contagem, medida, orientação, sucessor e antecessor devem estar associadas às suas representações (sistema de numeração, sinais e reta numerada). Portanto, um trabalho conceitual durante as aulas sobre conjuntos numéricos deve levar em consideração que ideias e representações se iluminam mutuamente.

Sobre as operações de adição e de multiplicação em $\mathbb{Z}$, foi demonstrado na nova construção que estas também podem ser definidas analogamente como em $\mathbb{N}$. Isto é perceptível em (5.15) e (5.38). Em $\mathbb{N}$, soma e produto também são definidos a partir da noção de sucessor. Em conformidade com isto, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental os estudantes são habituados a trabalharem com a resolução de algoritmos que levam a resultados maiores ou iguais a um dos números utilizados. Contudo, com o atributo da orientação, isto é ressignificado em $\mathbb{Z}$. No estudo sobre os números inteiros é preciso, então, esclarecer aos estudantes a importância das ideias de *inverso aditivo para a adição* e de *ampliação com reflexão para a multiplicação*. Algumas atividades tendo a reta numerada, tabelas e tabuadas com inteiros como suporte podem ajudar a aprofundar essas duas ideias, explorando as noções de sucessor e de antecessor.

Além disso, pôde-se comprovar que o Princípio da Indução Inteira é útil na demonstração de propriedades referentes aos números inteiros. Análogo ao Princípio da Indução Finita em $\mathbb{N}$, a base da indução pode ser o zero, como qualquer outro inteiro. Mas, como visto, salienta-se que a nulidade do zero o torna também um caso base mais conveniente. E, em seguida, semelhantemente é feita a verificação do passo indutivo.

Por fim, fica aqui a sugestão de que o produto desta pesquisa seja explorado na prática, em sala de aula, tanto didaticamente (aprofundando as abordagens nas aulas sobre conjuntos numéricos) quanto em outros projetos de pesquisa (verificando a consistência dos resultados apresentados). E outra possibilidade é fazer construções axiomáticas para outros conjuntos numéricos, o que também poderá contribuir para novas abordagens nas aulas de Matemática na Educação Básica.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, Manoel de Campos; *O nascimento da matemática*: a neurofisiologia e a pré-história da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

[2] BERLINGHOFF, Willian P. & GOUVÊA, Fernando Q.; *A matemática através dos tempos*: uma guia fácil e prático para professores e entusiastas, 2^a Ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática.(1^o e 2^o ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática.(3^o e 4^o ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

[6] D'AMBROSIO, Ubiratan; *Etnomatemática*, 4^a Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

[7] FERREIRA, Jamil; *A construção dos números*, 3^a Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[8] FOSSA, John A.; *Introdução às técnicas de demonstração na matemática*, 2^a Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[9] LIMA, Elon Lages et all; *A matemática do Ensino Médio*, Volume 1, 10^a Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] LIMA, Elon Lages; *Análise real*, Volume 1, 12^a Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[11] LIMA, Elon Lages; *Curso de análise*, Volume 1, 14^a Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[12] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins & FERNÁNDES, Adán José Corcho; *Iniciação à Matemática*: um curso com problemas e soluções, 2^a Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[13] RADFORD, Luiz; *Cognição matemática*: história, antropologia e epistemologia. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

[14] RIPOLL, Cydara; *Livro do professor de matemática na Educação Básica*: números naturais, Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[15] RIPOLL, Cydara; *Livro do professor de matemática na Educação Básica*: números inteiros, Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[16] ROQUE, Tatiana; *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[17] WALL, Edward S.; *Teoria dos números para professores do Ensino Fundamental*. Porto Alegre: AMGH, 2014.