UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Desigualdades: Uma Abordagem Através De Problemas

George Ney Almeida Moreira

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB
Março/2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

M838d Moreira, George Ney Almeida.
Desigualdades : uma abordagem através de problemas / George Ney Almeida Moreira. – Campina Grande, 2016.
95f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.
"Orientação: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros".
Referências.

1. Desigualdades. 2. Médias. 3. Aplicações. I. Medeiros, Luiz Antônio da Silva. II. Título.

CDU 517.16(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Desigualdades: Uma Abordagem Através De Problemas

por

George Ney Almeida Moreira †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

DESIGUALDADES: Uma Abordagem Através De Problemas

por

George Ney Almeida Moreira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Prof. Dr. Alciônio Saldanha de Oliveira - UFCG

Prof. Dra. Maria Isabelle da Silva - UEPB

Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Março/2016

Dedicatória

A minha semente, Sofhia Moreira.
Aos meus avós Mundinho e Sara,
aos tios Quinquinha, Solimar, Verônica e Rita (todos *in memorian*).
Também aos mestre da vida
Ana Angélica e Damião Moreira,
por compartilharem de minha luta sincera.

Agradecimentos

Toda construção humana é uma obra social. A finalização deste curso de Mestrado, nesta egrégia instituição, e portanto, a concretização de mais uma importante etapa em minha vida é, por assim dizer, fruto de uma coletividade.

Participaram deste empreendimento, de forma direta ou indireta, durante todos os momentos, inclusive nos que quase faltaram as forças necessárias para continuar, os que seguem:

Margarida, minha querida mãe, que vivia constantemente aflita com minhas penosas viagens e aguardava sempre meu retorno nas madrugadas de sábado com a disposição hercúlea de me fazer um lanchinho antes de eu adormecer.

Meu irmão, professor Jardel Almeida, que trocando sua função de irmão mais novo para irmão mais velho, incentivava-me.

Minha namorada Faêlha Lima, pela disponibilidade e por ter compreendido minhas faltas e temperamento.

O primo Flávio Moreira, extensivo a todos meus tios e primos.

A prima Ana Carmem Moreira, extensivo a todos os familiares "Moreira".

O Pe. Roserlândio, pelas bençãos e orações.

Meus conselheiros, mestre Gerardo Júnior (Absurdo) e minha madrinha Horlaneide Medeiros.

Clóvis Lobo e Neuza Lobo (meus anjos), pela valorosa, gentil e imensurável acolhida.

O amigo Jarbas Sucupira, não fosse ele, as madrugadas gélidas na rodoviária de Campina Grande teriam-me feito tombar.

O amigo-irmão Geraldo Alencar e sua consorte Carol, pela assessoria nas línguas inglesa e portuguesa, respectivamente.

O "Bom Bibi", amigo certo das horas incertas.

Lucina Clementino, Rose Clementino e Joatan Viana, pessoas muito especiais; extensivo a todos os amigos de Cedro/CE.

Dárcio e Erisvandro, parceiros e companheiros de viagem.

Os colegas de curso Mário Sérgio (grande companheiro e excelente amigo), Rubem Silva (amigo sincero), a meiga Raquel Sonaly, o intrigante Elbislâneo Tiburtino, Pedro Abel, Pedro Henrique, Poliana, Gildemberg, Gustavo, Jacenilda, Jorge Luiz, Jorssi, Marcos Alexandre, Sidclei e, muito especialmente, o mestre Renato Ioneris.

Os colegas de trabalho, especialmente os que fazem parte do corpo de funcionários do IFCE (Iguatu e Maracanaú), pela visão compreensiva de algumas “ausências” minhas motivadas pelos compromissos neste curso. Dentre eles, deixaria dívida impagável caso não mencionasse o diretor Djalma Honório, o diretor de ensino Joaquim Branco, minhas queridas coordenadoras Márcia Leyla, Santana e Silvelena, os professores mestres Elion e Eugênio (este, meu conterrâneo e pessoa valiosíssima) e o sapientíssimo Gleivando Magno.

As mestras Joana Gambarini e Iolanda Barcelos, com quem muito aprendi.

Os “irmãos” Milena Albuquerque e Euclides Mariscal.

O dr. Eduardo Freitas Vieira e sua esposa Amanda Zogobi, ex-moradores junto comigo da “mansão Moreno”.

O professor Onofre Campos da Silva Farias, coordenador do PIC/CE.

O novo, grande, inestimável e eterno amigo, dr. João Batista Moreno Neto (meu “pai”), que me hospedou em seu lar e creditou em mim sua confiança.

Por fim, mas não menos importante, minha filha Sofhia Nobre e sua tia, professora dra. Maria Nobre Damasceno, que plantaram em mim, primitivamente, a necessidade e disposição necessárias a esta causa.

A todos eles, meu profundo respeito e gratidão.

Quero externar, também, a todo o corpo docente do PROFMAT/UFCG, em especial ao professor Dr. Aparecido Jesuíno, ao Dr. Alciônio Saldanha, professores Dr. Alexsandro Bezerra, Me. Iraponil, Me. Vandik, Dr. Jefferson Abrantes, Me. Diogo Santana, Dra. Rosana Marques, Dr. Arimatéia Fernandes, bem como para a sempre gentil secretária de pós-graduação do departamento de Matemática, Andrezza Freitas; meu “muito obrigado”.

Singularmente, de forma muito afetuosa e respeitosa, consignar minha irrestrita admiração pelo zelo e compromisso extremados do professor Dr. Luiz Medeiros.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional (curso este que é e será, sem dúvidas, um divisor de águas para o melhor aproveitamento no processo ensino-aprendizagem nas aulas de Matemática pelo país) e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Há um leque bastante grande de aplicações envolvendo o tema Desigualdades. Tais aplicações aparecem desde casos em que não precisamos de quase nenhuma técnica para abordá-las, as que utilizamos resultados mais gerais (como o Princípio da Indução Finita), as que lançam mão de resultados levemente sofisticados (a desigualdade entre as médias) e as que se apropriam de resultados mais fortes (como é o caso da desigualdade de Jensen).

Nossa intenção é percorrer este caminho sempre provocados por problemas que ilustrem a aplicabilidade do conhecimento matemático, pois percebemos no espectro de possibilidades desta temática não um fator que provoque desestímulo, mas sim um modo bastante construtivo e motivador para o trabalho com os estudantes em sala de aula e fora dela.

Palavras Chaves: Desigualdades, Médias, Aplicações.

Abstract

There's a great deal of possibilities involving the theme Inequalities. Such applications are presented in cases which require little technic to be approached, the ones in which we use more general results (Principle of Finite Induction), those that make use of more slightly sophisticated (middle inequalities) as well as those that make use of stronger results (Jensen's Inequalities).

The goal here is to follow this way using mathematic problems to illustrate the applicability of the mathematic knowledge, for we do not see in the specter of possibilities a factor that may cause student's discouragement, but a constructive and motivating way to work with students in or out of class.

Keywords: Inequalities, Means, Applications.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Bem que pelo título este trabalho poderia discorrer sobre alguma análise de ordem econômica e sociológica a despeito das "desigualdades" e seus "problemas" derivados; salvo, evidentemente, pela descrição e logomarca, ambas no topo da capa, que fazem menção ao PROFMAT, Programa de Pós-Graduação em Matemática na Modalidade Profissional, e denunciam de soslaio sua verdadeira intenção.

Convido-os para percorrer um breve caminho, com o olhar fixado inicialmente no retrovisor, no sentido de expor as razões da escolha desta temática, bem como da abordagem aqui proposta.

1.1 Objetivos

Sou licenciado em Matemática pela UECE - Universidade Estadual do Ceará - e comecei minha carreira no magistério quando ainda era estudante naquela instituição. O ano, 1998; o projeto, apoiar jovens e adultos de baixa renda a ingressar na universidade pública. Por inúmeros fatores, que não vou aqui discorrer, o aproveitamento era, na medida das possibilidades, gratificante, haja vista os resultados que iam surgindo. Naquela época, atuava como membro cooperado da COOPEC, instituição criada com a finalidade e propósitos já evidenciados. Tal experiência durou alguns poucos anos. Segui na labuta por outras instituições de caráter público ou privado onde, invariavelmente, o desempenho apresentado pelos meus estudantes era baixo ou muito baixo.

Tive oportunidade, ao longo de mais de uma década, de vivenciar muitas experiências, conhecer e caminhar junto com alguns milhares de estudantes, tomar conhecimento com outros colegas da área de exatas e verificar, com isso, que tal insignificante rendimento era recorrente também entre seus aprendentes. Isso podia soar para alguns como lenitivo ou explicação suficiente e necessária desse "*statu quo*", muito embora, pessoalmente, houvesse muito desconforto. Qual a finalidade de estarmos todos reunidos cotidianamente para aprender se não chegávamos ao fim desejado?

Havia um certo indicativo em minha mente que a corresponsabilidade do professor para alterar isso deveria ser maior que a do estudante. E um vetor de mudança de posição deveria ser então procurar uma melhor qualificação. Infelizmente as opções para um recém licenciado eram poucas: ou ía à área da Educação, ou me embrenhava nos insólitos caminhos da pesquisa técnica em Matemática. Nada que conjugasse equilibradamente ambas as vertentes. Esta última divagação é proposital, é meu expediente para destacar, com confetes e serpentinas, a importância que o programa PROFMAT tem representado para o desenvolvimento do processo ensino aprendizagem da Matemática no país, mas retomemos.

Entre tantos dissabores tive uma experiência bastante exitosa quando em determinado colégio da rede particular de Fortaleza/CE iniciei um projeto de preparação para as Olimpíadas de Matemática. Além das medalhas; o que é principal, havia alunos ávidos por aprender, quanto mais melhor. Essa experiência me levou a outras reflexões e a traçar alternativas diversas no momento de apresentar os conteúdos, aliás, no momento de escolher quais conteúdos apresentar e de que forma fazê-lo. Os objetivos, agora, eram mais palpáveis e atingíveis. Sabía, com tudo isso, que se os estímulos variassem, as respostas poderiam sofrer mudanças positivas.

Curiosamente, havia disponível, numa faixa intermediária de complexidade, outros aspectos da Matemática, que apareciam no rol de preocupações do programa olímpico e eram simplesmente desconsiderados na hora de pensar a matriz curricular desse componente para o ensino regular, ou, na melhor das hipóteses, relegados a segundo, terceiro... último plano. Era, pois, potencialmente vantajosa a estratégia de enriquecer essa matriz e de permitir que, dada sua aplicabilidade, novos conteúdos e novas abordagens trouxessem resultados melhores.

A escolha do tema "desigualdades" está inserida no bojo dessas questões.

Pretendo discutir, assim, os aspectos técnicos desse tópico sempre pensando no viés da aplicabilidade do conhecimento matemático. Sempre que possível, ao longo dessa exposição, lança-se mão de um exemplo prático em detrimento de uma definição mais rigorosa. Critério este que balizará este trabalho e irá diferenciá-lo sobremodo de outros TCC's ([6], [8], [26], [40] etc.) que envolvem a mesma temática. Procurou-se não repetir o que já foi feito. O rol de problemas, a bibliografia, a abordagem, são, no conjunto, inteiramente diversos. Pontua-se tudo a seguir.

1.2 Organização

Iniciamos o **Capítulo 2 - Aplicações Diversas** com uma série de problemas de enfoque prático e/ou imediato, que perpassam várias ideias, a saber: Desigualdades Numéricas, Desigualdade de Bernoulli, Probabilidade, Desigualdade Triangular e Desigualdades na Trigonometria. O critério de escolha desse rol foi, além da visão já exposta que leva em conta a natureza de suas aplicações, a pouca necessidade de uma abordagem mais técnica, a não ser, claro, nos casos em que necessitamos do Princípio da Indução Finita como técnica de prova, conceito sabidamente pouco frequente na formação básica da estudantada em geral.

O **Capítulo 3 - Desigualdades Elementares** versa sobre ideias de complexidade mediana e inicia com o fato bastante natural que para $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, ou ainda, $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \geq 0$. Isso se mostra de grande beleza e de uma multiplicidade de aplicações; derivamos nesse momento, inclusive, a ideia da desigualdade entre as médias, bem como a determinação da área retangular máxima inscrita numa elipse, o cálculo do máximo volume de um paralelepípedo cuja soma das arestas é fixa, o volume mínimo de um elipsóide que encerra uma caixa em forma de paralelepípedo de dimensões fixadas, bem como uma justificativa por haver certa preferência por latas cilíndricas em detrimento de recipientes na forma de paralelepípedo na visita a um supermercado. Continuamos o capítulo com uma apresentação sobre a desigualdade do rearranjo, a seguir a desigualdade de Cauchy-Schwarz e finalizando com uma abordagem generalizante das desigualdades entre as médias, aproveitando neste ínterim para fazer uma intrigante experiência com uso de calculadora.

Começamos o **Capítulo 4 - Desigualdades Avançadas** com breve exórdio de um curso básico de Cálculo para em seguida discutir o problema posto recorrentemente de qual seja o maior dentre os números: e^{π} ou π^{e}. Definimos a ideia de convexidade de funções a partir da derivada segunda e tratamos sobre a desigualdade de Jensen, bem como algumas aplicações, em particular, uma outra generalização de $M_A \geq M_G$, e, por implicações sucessivas, chegamos às desigualdades de Young, Holder e Minkowsky.

O **Capítulo 5 - Outras Aplicações** estabelece mais quatro importantes resultados: com algumas ideias do Cálculo e claro, com o recurso das desigualdades, daremos uma bela demonstração da infinidade dos números primos; com pouco mais que a desigualdade triangular e a enumeração de alguns conjuntos, estabeleceremos algumas conclusões de Geometria Combinatória; localizaremos os zeros de um polinômio no eixo real e no plano complexo; e finalmente, estabeleceremos algumas desigualdades ligadas ao conceito de normas de matrizes com aplicações na aferição do efeito de certas pertubações à matriz dos coeficientes de um sistema.

Capítulo 2

Aplicações Diversas

É preciso que se diga, de início, que uma boa quantidade de aplicações sobre o tema *Desigualdades* não exige nada além de uma boa dose de criatividade. São inúmeros os casos que dispensam qualquer técnica mais sofisticada para estabelecer relações de ordem entre números que gozem de determinadas propriedades.

Para começar a ilustrar esta ideia, daremos alguns exemplos de situações que empregam apenas, e tão somente, conhecimentos básicos de matemática. Em seguida, propomos problemas com tais características, cuja solução, apesar de bastante simples, necessita do argumento de prova indutiva (ideia esta pouco utilizada nas salas de aula do ensino médio) e que se destacam pela elegância e importância de suas aplicações práticas.

De início, apresentamos o problema seguinte, que não está, aparentemente, relacionado com o tema em tela, mas usa o expediente de relacionar dois radicandos equivalentes que irão nos ajudar a estabelecer uma desigualdade que fixa a parte inteira da soma procurada.

Problema 2.1 (KOROVKIN, 1975). *Encontre a parte inteira da soma*

$$s = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

Solução: Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ e observe que

$$2\sqrt{n+1} - 2 < s_n < 2\sqrt{n} - 1. \tag{2.1}$$

De fato, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}_{(*)} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

Desse modo

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}} < \underbrace{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}_{(*)} < \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Que implica em

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \underbrace{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}_{(*)} < \frac{1}{2\sqrt{k}}. \tag{2.2}$$

Agora, utilizando a desigualdade da esquerda da equação (2.2), segue que são verdadeiras as $n-1$ desigualdades seguintes:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2\sqrt{2}} & < & \sqrt{2}-\sqrt{1} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & < & \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & < & \sqrt{n}-\sqrt{n-1}. \end{array}$$

Somando tudo isto chegamos a

$$s_n - 1 < 2(\sqrt{n}-1) \Rightarrow s_n < 2\sqrt{n}-1. \tag{2.3}$$

Ademais, considerando a desigualdade da direita de (2.2), seguem também

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2}-\sqrt{1} & < & \frac{1}{2\sqrt{1}} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & < & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} & < & \frac{1}{2\sqrt{n}}. \end{array}$$

Novamente, somando as desigualdades acima, obtemos

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{1} < \frac{1}{2}\cdot s_n \Rightarrow s_n > 2\sqrt{n+1}-2. \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) obtemos (2.1). Além disso, como $2\sqrt{n}-2 < 2\sqrt{n+1}-2 < s_n < 2\sqrt{n}-1$, conclui-se que,

$$2\sqrt{n}-2 < s_n < 2\sqrt{n}-1. \tag{2.5}$$

Fazendo $n = 1000000$ em (2.5) chegamos a

$$2\sqrt{1000000}-2 < s < 2\sqrt{1000000}-1.$$

Ou seja, $1998 < s < 1999$, ou ainda, $\lfloor s \rfloor = 1998$, onde $\lfloor s \rfloor$ representa a parte inteira de s. $\square$

Neste exemplo que segue, demonstra-se uma desigualdade que aparece de forma explícita, ao contrário do primeiro problema; no entanto, é necessário alguma engenhosidade para concluir o que pretendemos.

Problema 2.2 (FAURING, 2003). *Sejam $n \geq m \geq 1$ e $x \geq y \geq 0$, tais que*

$$x^{n+1} + y^{n+1} \leq x^m - y^m.$$

Demonstrar que $x^n + y^n \leq 1$.

Solução: Como x e y são, ambos, maiores ou iguais a 0, temos

$$x^{n+1} \leq x^{n+1} + y^{n+1} \overset{(hip.)}{\leq} x^m - y^m \leq x^m. \tag{2.6}$$

Dado que $n \geq m \geq 1$, isto é, $n+1 > m \geq 1$; logo, de (2.6) resulta $x \leq 1$, e assim $0 \leq y \leq x \leq 1$. Portanto,

$$(x^n + y^n)(x+y) = \underbrace{x^{n+1} + y^{n+1}}_{hip.} + x^n y + xy^n \leq \underbrace{x^m - y^m}_{hip.} + y + y^m = x^m + y \leq x + y.$$

Se $x + y \neq 0$, da desigualdade $(x^n + y^n)(x+y) \leq x+y$ deduz-se que $x^n + y^n \leq 1$. Por outro lado, se $x + y = 0$, como x e y são não negativos, $x = y = 0$. De onde segue que,

$$x^n + y^n = 0 < 1.$$

□

Um outro exemplo, enquadrado no caso geral daqueles em que pouco necessitamos de recursos para abordá-lo, é:

Problema 2.3 (CARNEIRO, 2006). *Demonstrar que entre dois números racionais quaisquer distintos existem pelo menos um racional e um irracional.*

Solução: Sejam a e b números reais com $a < b$, então valem as desigualdades:

$$a < \frac{a+b}{2} < b \text{ e } a < a + \frac{b-a}{\sqrt{2}} < b.$$

Com efeito, como $a < b$, tem-se:

$$\frac{a}{2} < \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \Rightarrow a < \frac{a+b}{2}.$$

E ainda:

$$\frac{a}{2} < \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b.$$

Logo,

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Além disso, como $b > a$:

$$b-a > 0 \Rightarrow \frac{b-a}{\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow a < a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}.$$

E ainda, como $1 < \sqrt{2}$:

$$(b-a) < \sqrt{2}(b-a) \Rightarrow \frac{b-a}{\sqrt{2}} < b-a \Rightarrow a + \frac{b-a}{\sqrt{2}} < b.$$

Conclui-se, assim, que:

$$a < a + \frac{b-a}{\sqrt{2}} < b.$$

Sejam, agora, p e q números racionais com $p < q$. Evidentemente, $\frac{p+q}{2}$ é um número racional e obedece a condição $p < \frac{p+q}{2} < q$, pelo que vimos antes. Ademais, $\frac{p-q}{\sqrt{2}}$ é um irracional (pois $p-q$ é racional e $\sqrt{2}$ irracional) e, portanto, $p + \frac{p-q}{\sqrt{2}}$ é um irracional compreendido entre p e q, também pelo que concluímos antes, encerrando a demonstração. □

2.1 Desigualdades Numéricas

Nossa estratégia, no caso que segue, é estimar uma desigualdade entre dois números a partir da ideia de compará-los com potências de 2, próximas uma da outra. [12] expõe vários exemplos de tal caso, inclusive cita como criá-los, e informa serem tais problemas chamados "desigualdades a Leningrado". Em síntese, o método consiste em comparar duas potências quaisquer, sempre pensando em um número que tenha potências próximas dos números desejados.

Problema 2.4 (FOMIN, 1996)**.** *Qual número é o maior:*

$$31^{11} \text{ ou } 17^{14}?$$

Solução:

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}.$$

□

Problema 2.5 (FOMIN, 1996)**.** *Qual número é o maior:*

$$1234567 \cdot 1234569 \text{ ou } 1234568^2?$$

Solução: Chame de x o número 1234568. Donde segue que

$$1234567 \cdot 1234569 = (x-1)(x+1) = x^2 - 1 < x^2 = 1234568^2$$

□

Problema 2.6 (FOMIN, 1996)**.** *Qual número é o maior:*

$$100^{100} \text{ ou } 50^{50} \cdot 150^{50}?$$

Solução: De fato, como $100^2 > 50 \cdot 150$ o resultado segue. □

Uma outra maneira de ver isso, que será uma ideia abordada oportunamente, é usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, uma vez que

$$100 = \frac{50+150}{2}.$$

Donde segue

$$\frac{50+150}{2} = 100 > \sqrt{50 \cdot 150} \Rightarrow 100^{100} > 50^{50} \cdot 150^{50}.$$

□

Problema 2.7 (ENGEL, 1998)**.** *Prove que* $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Solução: Sejam

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100},$$
$$B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101} \text{ e}$$
$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99}.$$

Observe que cada fator de B é maior que o respectivo fator de A, de forma que $A < B$; e cada fator de C, a partir do segundo, é menor que o respectivo fator de A, assim, $A > C$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade $A < B$ por A obtemos:

$$A^2 < AB = \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \Rightarrow A < \frac{1}{10}.$$

Agora, multiplicando a desigualdade $A > C$ por A conseguimos:

$$A^2 > AC = \frac{1}{200} > \frac{1}{225} \Rightarrow A > \frac{1}{15}.$$

□

2.2 Desigualdade de Bernoulli

Teorema 2.8 (Bernoulli[1]). *Vale a desigualdade*

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x,$$

onde $x \geq -1$ é um número real e n um natural.

Prova: Usaremos indução sobre n para demonstrar tal desigualdade. Doravante, por questões didáticas, faremos as demonstrações que envolvem o Princípio da Indução Finita em 3 (três) passos, a saber: *Caso Inicial*, *Hipótese de Indução* e *Passo Indutivo*.

1^o Passo: Caso Inicial

Para $n = 1$, tem-se

$$(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x.$$

O que é obviamente verdade.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponhamos que a desigualdade é válida para $n \geq 1$, ou seja, que

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x.$$

3^o Passo: Passo Indutivo

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $(1+x)$, chegaremos a

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x) &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1+nx+x+nx^2\\ &= 1+(n+1)x+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Assim, a desigualdade também é válida para $n+1$.

Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a desigualdade é válida sempre. □

Como uma aplicação desta desigualdade veremos o problema a seguir, que surgiu em uma Olimpíada dos Estados Unidos (USAMO, 1991), cuja engenhosa ideia para solução consta da bibliografia referenciada, a qual adaptamos para facilitar o entendimento.

[1]A afirmação de que vale a desigualdade acima é frequentemente atribuída ao suíço **Jacques Bernoulli** (1654-1705), ilustre integrante desta família que gerou, pelo menos, cinco gerações de matemáticos célebres entre os séculos XVII e XIX. Esta desigualdade tem enormes repercussões no *Cálculo* e na *Análise*.

Problema 2.9 (LOZANSKY, 1996)**.** *Seja*

$$a = \frac{m^{m+1} + n^{n+1}}{m^m + n^n},$$

com m e n inteiros positivos. Prove que $a^m + a^n \geq m^m + n^n$.

Solução: Desde que,

$$\begin{aligned}
a^m + a^n &= m^m \cdot \left(\frac{a}{m}\right)^m + n^n \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^n \\
&= m^m \cdot \left(1 + \frac{a-m}{m}\right)^m + n^n \cdot \left(1 + \frac{a-n}{n}\right)^n \\
&\geq m^m \cdot \left(1 + m \cdot \left(\frac{a-m}{m}\right)\right) + n^n \cdot \left(1 + n \cdot \left(\frac{a-n}{n}\right)\right) \\
&\geq m^m \cdot (1 + (a-m)) + n^n \cdot (1 + (a-n)) \\
&= m^m + n^n + a \cdot (m^m + n^n) - (m^{m+1} + n^{n+1}) \\
&= m^m + n^n.
\end{aligned}$$

□

Problema 2.10. *Você consegue decidir, dados os dois próximos pares de números, qual é o maior dentre eles:* $2^{100} + 3^{100}$ *ou* 4^{80}*;* e^{π} *ou* π^e*?*

Solução: Teceremos comentários sobre o primeiro par de números, $2^{100} + 3^{100}$ e 4^{80}; quanto ao segundo, e^{π} e π^e, analisaremos posteriormente com mais profundidade, muito embora o auxílio de uma calculadora científica consiga dirimir tal dúvida.

De início, veja que

$$2^{100} + 3^{100} < 3^{100} + 3^{100} = 2 \cdot 3^{100}.$$

Vamos mostrar que $4^{80} > 2 \cdot 3^{100}$, pois

$$\left(\frac{4^4}{3^5}\right)^{20} = \left(\frac{256}{243}\right)^{20} > 2.$$

Com efeito,

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{20} > \left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20}.$$

De fato, usando a desigualdade de Bernoulli na desigualdade acima, obtém-se:

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{20} > \left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} \geq 1 + 20 \cdot \left(\frac{1}{20}\right) = 2.$$

Donde se conclui, finalmente, que

$$4^{80} > 2 \cdot 3^{100} > 2^{100} + 3^{100} \therefore 4^{80} > 2^{100} + 3^{100}.$$

□

Vejamos agora um exemplo em que o uso do Princípio da Indução Finita é mais uma vez, como o foi na demonstração da desigualdade de Bernoulli, de grande valia.[2]

Problema 2.11. *Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2}$$

Solução: Usaremos indução sobre n para demonstrar isto.

1^o Passo: Caso Inicial

Veja que para $n = 1$ a desigualdade é válida, pois: $1 > \frac{1}{2}$.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponha que a desigualdade

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2}$$

é válida para um determinado $n \in \mathbb{N}$.

3^o Passo: Passo Indutivo

Vejamos, agora, o que ocorrerá para o sucessor deste n:

$$\begin{aligned}
\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{hip.} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n} &> \\
\frac{n}{2} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n} &> \\
\underbrace{\frac{n}{2}}_{hip.} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n} &= \\
\frac{n}{2} + \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{n+1}{2}.&
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n} > \frac{n+1}{2}.$$

[2]Constam na soma deste problema parcelas da série harmônica, que doravante iremos relacionar com a área sobre a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, abordagem interessantíssima e recorrentemente utilizada desde o século XVII.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Problema 2.12 (MEGA, 1995)**.** *Demonstre que a n-ésima potência do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que a soma das n-ésimas potências dos comprimentos dos catetos, onde n é um inteiro maior que 2.*

Solução: Deveremos mostrar que $a^n > b^n + c^n$, onde b e c são os catetos e a a hipotenusa do triângulo retângulo. Usaremos, novamente, indução sobre n para demonstrar isto.

1^o Passo: Caso Inicial

Veja que para $n = 3$ a desigualdade é válida, pois:

$$a > b \geq c \text{ e } a^2 = b^2 + c^2,$$

donde,

$$a^3 = a \cdot a^2 = a(b^2 + c^2) = ab^2 + ac^2 > bb^2 + cc^2 = b^3 + c^3.$$

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponha que a desigualdade

$$a^n > b^n + c^n$$

é válida para um $n \geq 3$.

3^o Passo: Passo Indutivo

Vejamos, agora, o que ocorrerá para o sucessor deste n:

$$a^{n+1} = a \cdot a^n > a \cdot (b^n + c^n) = ab^n + ac^n > bb^n + cc^n = b^{n+1} + c^{n+1}.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a desigualdade é válida para todo $n \geq 3$. $\square$

Problema 2.13. *Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 3.$$

Solução: Para $k \geq 3$ tem-se, obviamente,

$$k! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k > 2^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Assim, para $n \geq 1$,

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{P.G.}=1+\frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

□

2.3 Desigualdades e Probabilidade

Consideremos agora a importante situação, exposta em [27], que contraria um pouco nossa intuição:

Problema 2.14. *Em uma loteria de N números há um só prêmio. Salvador compra n ($1 < n < N$) bilhetes para uma só extração e Sílvio compra n bilhetes, um para cada uma de n extrações. Qual dos dois jogadores tem mais chance de ganhar algum prêmio?*

Solução: Observe, inicialmente, que a probabilidade de Salvador ganhar algum prêmio é $\frac{n}{N}$. Por outro lado, a probabilidade de Sílvio **não** ganhar nenhum prêmio é $\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$. Logo, a probabilidade de Sílvio ganhar algum prêmio é

$$1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n.$$

Vamos provar que Salvador tem mais chance de ganhar, ou seja, que

$$\frac{n}{N}>1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

O que nada mais é que

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^n>1-\frac{n}{N}.$$

Usaremos indução sobre $n > 1$, com $n \in \mathbb{N}$ fixado, para demonstrar isto.

1^o Passo: Caso Inicial

Para $n = 2$, tem-se

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^2=1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}>1-\frac{2}{N}.$$

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponhamos que a desigualdade é válida para $n \geq 2$, ou seja, que

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^n > 1-\frac{n}{N}.$$

3^o Passo: Passo Indutivo

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $\frac{N-1}{N}$, teremos

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1} > 1-\frac{n}{N}-\frac{1}{N}+\frac{n}{N^2} > 1-\frac{n+1}{N}.$$

Assim, a desigualdade também é válida para $n+1$.

Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a desigualdade é válida sempre.

Logo, Salvador tem mais chances de ganhar. $\square$

A demonstração da validade de

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^n > 1-\frac{n}{N}$$

também é imediata pela desigualdade de Bernoulli.

2.4 Desigualdade Triangular

É fato relativamente natural que num triângulo qualquer cada lado é menor que a soma dos outros dois lados ou, o que nada mais é, cada lado é maior que a diferença dos outros dois lados. Com efeito, sendo a, b e c as medidas dos lados de um triângulo, deve valer:

$$\begin{cases} a < b+c \\ b < a+c \Rightarrow b-c < a \\ c < a+b \Rightarrow c-b < a \end{cases}.$$

Donde podemos escrever:

$$|b-c| < a < b+c.$$

Equivalentemente, podemos reescrever tal desigualdade usando a notação de módulo (ou valor absoluto) para a e b números reais quaisquer. Para isso definamos:

$$|x| = \begin{cases} x, \ se \ x \geq 0 \\ -x, \ se \ x < 0 \end{cases}$$

ou ainda,

$$|x| = máx\{-x, x\}.$$

Disto decorre que $x = |x|$ ou $x = -|x|$, e assim

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ e } -|b| \leq b \leq |b|.$$

Somando ambas as desigualdades simultâneas, membro a membro, chegamos a

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|, \text{ e assim}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

doravante chamada de *desigualdade triangular* para os números a e b.

Ademais, deste último resultado concluímos que

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |(-b)| = |a| + |b| \therefore |a - b| \leq |a| + |b|.$$

Bem como,

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \therefore |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Afirmamos, agora, que dados números não nulos a, b e c, vale ainda a desigualdade triangular. Com efeito,

$$|a + b + c| \leq |a + b| + |c| \leq |a| + |b| + |c|.$$

Utilizando o mètodo de Indução Finita obtemos uma generalização da desigualdade triangular, a saber:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \text{ com } a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Para qualquer quantidade de números a condição de igualdade, na desigualdade triangular, ocorre se, e somente se, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tiverem o mesmo sinal. □

Problema 2.15 (MUNIZ, 2013). *Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \ldots + |x - 100| \geq 50^2.$$

Solução: Usando o fato de que $|a| + |b| \geq |a - b|$ e agrupando os termos equidistantes da nossa soma chegamos a

$$\begin{aligned}
|x - 1| + |x - 100| &\geq |(x - 1) - (x - 100)| = 99 \\
|x - 2| + |x - 99| &\geq |(x - 2) - (x - 99)| = 97 \\
|x - 3| + |x - 98| &\geq |(x - 3) - (x - 98)| = 95 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
|x - 50| + |x - 51| &\geq |(x - 50) - (x - 51)| = 1
\end{aligned}$$

Somando sobre todas as desigualdades acima, e utilizando a fórmula para os n primeiros número ímpares[3], obtemos

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-100| \quad \geq \quad 1+3+\cdots+97+99=50^2.$$

$\square$

Pelo que vimos acima, a mesma desigualdade é válida para uma quantidade par ($2n$) de parcelas e pode ser reescrita como segue

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-2n| \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

Agora, vejamos um interessante problema (devido a **Jakob Steiner**) de encontrar um ponto P no interior do triângulo ABC que minimize a soma

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}.$$

Para tanto, faremos uma leve digressão e consideraremos alguns resultados antes de podermos utilizar, como coadjuvante, a propalada desigualdade triangular.

Teorema 2.16. *Sejam um triângulo ABC e um ponto P, não situado sobre qualquer das retas suportes dos lados AB, AC e BC deste triângulo. Se DEF (com D pertencente à reta determinada por B e C, E pertencente à reta determinada por A e C, F pertencente à reta determinada por A e B) é o* ***triângulo pedal***[4] *de P em relação a ABC, então*

$$\overline{DE}=\overline{PC}\cdot sen\widehat{C},\ \ \overline{EF}=\overline{PA}\cdot sen\widehat{A} \text{ e } \overline{FD}=\overline{PB}\cdot sen\widehat{B}.$$

Prova: Há que se considerar 3 (três) casos possíveis: (i) P pertencer à região angular $\angle ABC$ mas ser exterior ao triângulo ABC, (ii) P sendo interior ao triângulo e (iii) P pertencer à região angular oposta pelo vértice em relação à $\angle ABC$.

Comentaremos o primeiro dos casos, os demais seguem de forma análoga.

Na Figura 2.1 $P\widehat{E}C = P\widehat{D}C = 90^o$, $PEDC$ é inscritível e PC é diâmetro do círculo circunscrito à $PEDC$. Aplicando a lei dos senos a DEC segue o resultado

$$\frac{\overline{DE}}{sen E\widehat{C}D}=\overline{PC}.$$

Analogamente,

$$\overline{EF}=\overline{PA}\cdot sen\widehat{A} \text{ e } \overline{FD}=\overline{PB}\cdot sen\widehat{B}.$$

[3]Usando Indução Finita, mostra-se que $1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2, \forall n\in\mathbb{N}$.

[4]Triângulo que tem por vértices os pés das perpendiculares baixadas do ponto considerado até as retas suportes de seus três lados.

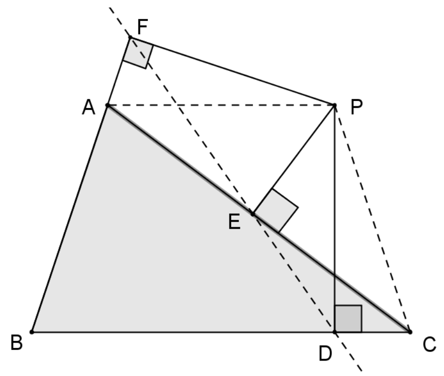


Figura 2.1: Reta de Simson-Wallace

Agora, do **Teorema 2.16** e do Teorema de **Simson-Wallace**[5] podemos obter o que chamamos aqui de Teorema de Ptolomeu Generalizado.

Teorema 2.17 (Ptolomeu Generalizado)**.** *Se ABCD é um quadrilátero convexo cujas diagonais são AC e BD, então*

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}\geq\overline{AC}\cdot\overline{BD},$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, ABCD for inscritível.

Prova:

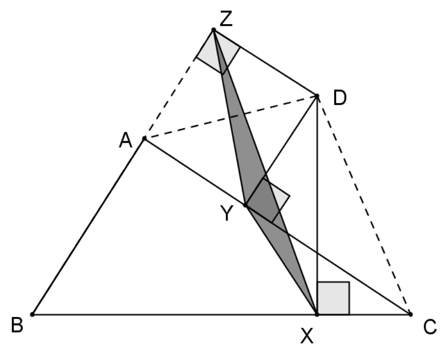


Figura 2.2: Teorema de Ptolomeu Generalizado

Sejam X, Y e Z, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de D sobre as retas BC, AC e AB. Suponhamos, sem perda de generalidade, X e Y sobre os segmentos BC e AC, e Z sobre o prolongamento de AB. Utilizando o **Teorema 2.16** chega-se a:

$$\frac{\overline{XY}}{sen\widehat{C}}=\overline{CD}.$$

[5]**Teorema de Simson-Wallace:** Dados um triângulo ABC e um ponto P não situado sobre qualquer das retas suportes de seus lados, o triângulo pedal de P é degenerado se, e somente se, P estiver sobre o círculo circunscrito a ABC.

De outra forma, a lei dos senos aplicada a ABC dá-nos

$$\frac{\overline{AB}}{sen\widehat{C}} = 2R,$$

onde R é o raio do círculo circunscrito a ABC.

Combinando as duas igualdades acima obtém-se

$$\overline{XY} = \overline{CD} \cdot sen\widehat{C} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{2R}.$$

De forma análoga,

$$\overline{YZ} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{2R} \text{ e } \overline{XZ} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2R}.$$

O Teorema de Simson-Wallace garante que $ABCD$ é inscritível se, e somente se, X, Y e Z são colineares, e isto acarreta em

$$\overline{XY} + \overline{YZ} = \overline{XZ}.$$

Caso $ABCD$ não seja inscritível, a desigualdade triangular garante

$$\overline{XY} + \overline{YZ} \geq \overline{XZ}.$$

Donde, finalmente, usando o que temos para $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$ e $\overline{YZ}$, chega-se a

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2R} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{2R} \geq \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2R},$$

a igualdade ocorrendo se, e somente se, $ABCD$ for inscritível. □

No que segue, voltamos ao **problema de Steiner** para estabelecer sua demonstração.

Problema 2.18 (MUNIZ, 2013)**.** *Minimizar*

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC},$$

em que P é interior ao triângulo ABC.

Solução:

Para tanto, usaremos o Teorema de Ptolomeu Generalizado para triângulos em que seus ângulos internos sejam todos menores que 120^o. Objetivamente, o que faremos é mostrar que para os triângulos que cumprem a condição acima (ângulos internos menores que 120^o), o **ponto de Fermat**[6] do triângulo em tela é o único ponto do plano que resolve o problema de Steiner.

Ora, sabe-se, por um lado,que o ponto P de Fermat satisfaz a condição

[6]Seja ABC um triângulo cujos ângulos internos são menores que 120^o. Considere ainda os triângulos equiláteros BCD, ACE e ABF (*Triângulos Napoleônicos*) exteriores a ABC. Os círculos circunscritos aos triângulos BCD, ACE e ABF interceptam-se todos no mesmo ponto P - dito "*ponto de Fermat*".

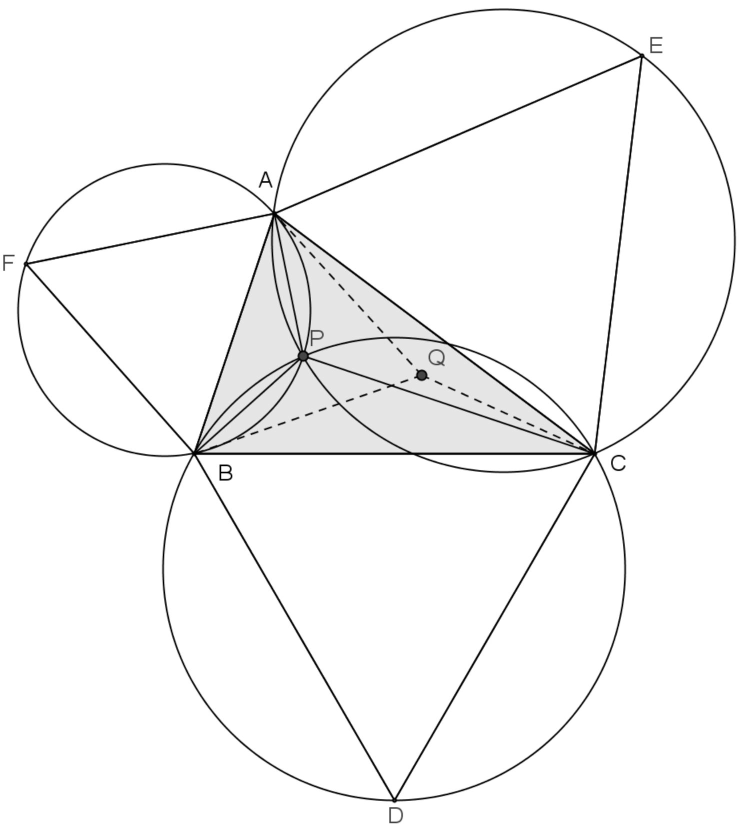


Figura 2.3: Problema de Steiner

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP},$$

onde D, E e F são os vértices dos triângulos napoleônicos BCD, ACE e ABF exteriores a ABC.

Por outro lado, se $Q \neq P$ for um ponto no interior de ABC, então não pode pertencer aos três círculos circunscritos a BCD, ACE e ABF, pois, do contrário, seria igual a P.

Admitamos, sem perda de generalidade, que Q não pertença ao círculo circunscrito a BCD. Aplicando a desigualdade de Ptolomeu no quadrilátero $QBDC$ (não inscritível), chegamos a

$$\overline{BQ} \cdot \overline{CD} + \overline{CQ} \cdot \overline{BD} > \overline{DQ} \cdot \overline{BC}.$$

Ou ainda,

$$\overline{BQ} + \overline{CQ} > \overline{DQ},$$

uma vez que

$$\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}.$$

Finalmente, a desigualdade triangular combinada com o Teorema de Ptolomeu Generalizado para o quadrilátero inscritível $BPCD$ implica em

$$\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ} > \overline{AQ}+\overline{DQ} \geq \overline{AD} = \overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}.$$

O que significa que o ponto P de Fermat é o único ponto que satisfaz o problema de Steiner. □

2.5 Desigualdades na Trigonometria

Problema 2.19 (IEZZI, 1993)**.** *Se a e b são ângulos agudos e positivos, demonstre que*

$$sen(a+b) < sen(a) + sen(b).$$

Solução: Observe que

$$\begin{aligned} x &= sen(a+b) - sen(a) - sen(b) \\ &= sen(a) \cdot cos(b) + sen(b) \cdot cos(a) - sen(a) - sen(b) \\ &= sen(a) \cdot (cos(b) - 1) + sen(b) \cdot (cos(a) - 1). \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow sen(a) > 0 \text{ e } cos(a) < 1; \text{ e}$$

$$0 < b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow sen(b) > 0 \text{ e } cos(b) < 1.$$

Desse modo, $x = sena(cosb - 1) + senb(cosa - 1) < 0$. Isto é,

$$sen(a+b) < sena + senb.$$

□

Problema 2.20. *Determinar o valor máximo de*

$$sen(\alpha_1) \cdot sen(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot sen(\alpha_n),$$

quando

$$tg(\alpha_1) \cdot tg(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot tg(\alpha_n) = 1, \text{ com } 0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}, \text{ para todo } i.$$

Solução: Por hipótese, tem-se que

$$sen(\alpha_1) \cdot sen(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot sen(\alpha_n) = cos(\alpha_1) \cdot cos(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (cos\alpha_n).$$

Donde concluímos que

$$sen(\alpha_1) \cdot sen(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot sen(\alpha_n) = \sqrt{\frac{sen(2\alpha_1)}{2} \cdot \frac{sen(2\alpha_2)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{sen(2\alpha_n)}{2}}.$$

Uma vez que $sen(2\alpha_i) \leq 1$, para todo i, segue que

$$\sqrt{\frac{sen(2\alpha_1)}{2} \cdot \frac{sen(2\alpha_2)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{sen(2\alpha_n)}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2^n}} = 2^{-\frac{n}{2}},$$

com igualdade se, e somente se,

$$sen(2\alpha_1) = sen(2\alpha_2) = \ldots = sen(2\alpha_n) = 1.$$

Isto ocorrendo quando cada α_i é igual a $\frac{\pi}{4}$, caso em que a condição é satisfeita. □

Problema 2.21 (ENGEL, 1998). *Prove que, para reais positivos,*

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

Solução: Esta desigualdade é equivalente a

$$\sqrt{\frac{a}{a+d} \cdot \frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+c} \cdot \frac{d}{a+d}} \leq 1.$$

Fazendo

$$\frac{a}{a+d} = sen^2(\alpha) \text{ e } \frac{b}{b+c} = sen^2(\beta), \text{ com } 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2},$$

e uma vez que $cos^2(\alpha)$ e $cos^2(\beta)$ passam, com a substituição anterior, a valer

$$cos^2(\alpha) = \frac{d}{a+d} \quad \text{e} \quad cos^2(\beta) = \frac{c}{b+c}$$

a desigualdade se transforma em

$$sen(\alpha) \cdot sen(\beta) + cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \leq 1,$$

ou seja, o mesmo que $cos(\alpha - \beta) \leq 1$. □

Problema 2.22. *Mostre que*

$$sen(x) < x < tg(x),$$

para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:

A área do triângulo OBC é menor que a do triângulo setor circular OBC, que por sua vez é menor que a do triângulo OBD, de sorte que

$$\frac{OB \cdot AC}{2} < \frac{x \cdot OB}{2} < \frac{OB \cdot BD}{2}.$$

Considerando o raio $OB = 1$ da circunferência na Figura 2.4, chegamos a

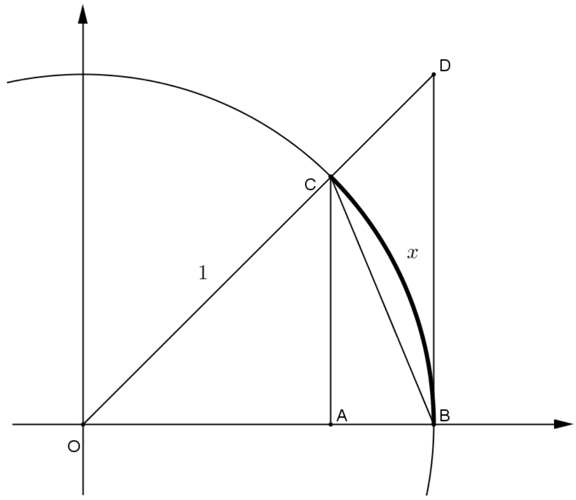


Figura 2.4: Ciclo Trigonométrico - primeiro quadrante

$$OA = cosx, \;\; AC = senx, \;\; BD = \frac{BD}{OB} = \frac{AC}{OA} = \frac{sen(x)}{cos(x)}.$$

Donde segue que

$$sen(x) < x < \frac{sen(x)}{cos(x)}.$$

$\square$

Observe se tomarmos a desigualdade acima, dividirmos por $sen(x)$ e inverter os membros chegamos a

$$1 > \frac{sen(x)}{x} > cos(x).$$

Uma vez que $cosx$ tende a 1, quando x se aproxima de 0 (zero), o membro do meio deve tender para o valor 1, escrevemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1,$$

resultado de fundamental importância num curso introdutório de Cálculo e conhecido como o "*limite trigonométrico fundamental*".

Capítulo 3

Desigualdades Elementares

Apresentamos aqui uma boa gama de situações, em geral de natureza geométrica, em que podemos aplicar conceitos específicos sobre desigualdades.

Não há ainda nesta fase necessidade de um grande arcabouço teórico; as ferramentas utilizadas são poucas, entretanto com resultados bem variados.

3.1 Quadrados e Soma de Quadrados

Um dos pressupostos básicos para avaliar desigualdades é considerar que, para $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, ou ainda, $\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \geq 0$, ocorrendo a igualdade apenas quando os números envolvidos forem todos iguais a 0 (zero).

Nossa estratégia, então, passa a transformar nossas desigualdades em algo semelhante a algum destes dois casos.

Problema 3.1. *Considere o triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c. Prove que*

$$a + b \leq \sqrt{2} \cdot c$$

e diga quando ocorre a igualdade.

Solução: Tomando $x = a - b$ (com $a > 0$ e $b > 0$) na desigualdade $x^2 \geq 0$, chegamos a $a^2 + b^2 \geq 2ab$. O que acarreta

$$2(a^2 + b^2) \geq 2ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \geq a + b.$$

Notando que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, conclui-se que $\sqrt{2} \cdot c \geq a + b$. A igualdade ocorrendo para o caso em que $a - b = 0$, ou seja, quando $a = b$. $\square$

Problema 3.2. *Seja x um número real qualquer. Prove que*

$$4x - x^4 \leq 3.$$

Solução: Devemos provar que $x^4-4x+3\geq 0$. Usando completamento de quadrados chega-se a

$$x^4-2x^2+1+2x^2-4x+2\geq 0 \Rightarrow (x^2-1)^2+2x^2-4x+2\geq 0 \Rightarrow (x^2-1)^2+2(x-1)^2\geq 0.$$

Sendo esta última desigualdade trivialmente verdadeira. □

E agora, utilizaremos a segunda das desigualdades acima $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\geq 0\right)$ para solucionar um sistema de equações, no qual o emprego de métodos mais corriqueiros seria de pouca valia.

Problema 3.3 (ANDREESCU, 2000)**.** *Ache todas as soluções reais do sistema:*

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{4z-1} \\ y+z=\sqrt{4x-1} \\ z+x=\sqrt{4y-1} \end{cases}$$

Solução: Somando as igualdades acima teremos:

$$2x+2y+2z-\sqrt{4x-1}-\sqrt{4y-1}-\sqrt{4z-1}=0.$$

Dividindo ambos os membros por 2 e agrupando os termos chegamos a

$$x-\sqrt{x-\frac{1}{4}}+y-\sqrt{y-\frac{1}{4}}+z-\sqrt{z-\frac{1}{4}}=0 \qquad (3.1).$$

Note que

$$x-\sqrt{x-\frac{1}{4}}=x-\frac{1}{4}-\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Aplicando esta ideia em (3.1) chegamos a

$$\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{z-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

Donde se conclui que

$$\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{y-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{z-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

E assim,

$$x=y=z=\frac{1}{2}$$

$\square$

Experimentemos, agora, tomar $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ na desigualdade $x^2 \geq 0$. Deste modo, ficamos com:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

É evidente que a igualdade ocorre se, e somente se, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, ou seja, quando $a = b$.

Tal desigualdade é conhecida como a *desigualdade entre a média aritmética* $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ *e a média geométrica* $(\sqrt{ab})$.

Há um rápido e elegante artigo do professor Elon Lima, em sua obra *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, intitulado "Fazendo Médias", em que o mesmo expõe uma série de maneiras de se chegar ao mesmo resultado. Reproduziremos aqui uma abordagem geométrica para justificar tal desigualdade.

Para tanto, considere uma circunferência de diâmetro igual a $a+b$, e nesta um triângulo retângulo inscrito como na figura abaixo. Observe, ademais, a altura h relativa à hipotenusa e também sua mediana $m = \frac{a+b}{2}$. Tem-se, por semelhança de triângulos, o clássico resultado de que tal altura h é a média geométrica dos segmentos a e b determinados sobre a hipotenusa. De forma que $h \leq m$, ou seja, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. A igualdade ocorrendo para o caso de termos um triângulo retângulo isósceles, ou seja, $h = m$, ou ainda, $a = b$.

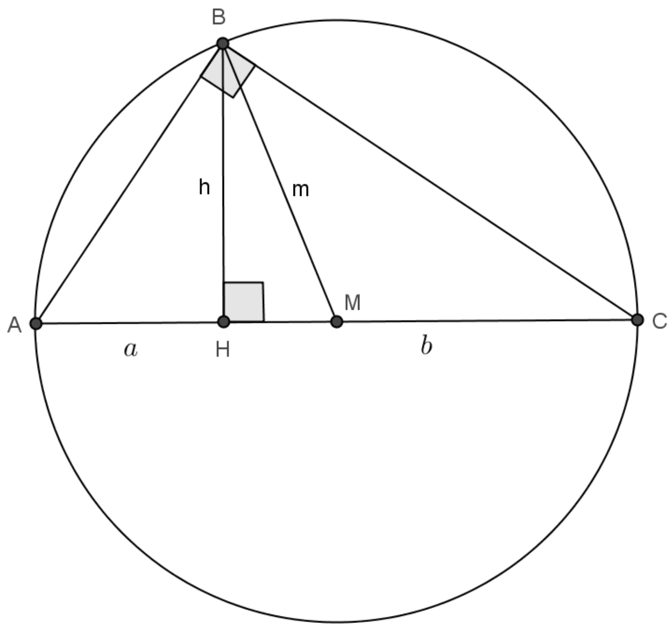


Figura 3.1: Altura e mediana relativas à hipotenusa

Problema 3.4 (ENGEL, 1998)**.** *Prove que* $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$*, para todo* x.

Solução: Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica segue que para a real positivo:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}\Rightarrow a+\frac{1}{a}\geq 2.$$

Ademais,

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Fazendo, agora, $a=\sqrt{x^2+1}$ e usando a desigualdade inicial segue o resultado. □

Problema 3.5 (ENGEL, 1998)**.** *Mostre que se $a_i>0$ para $i=1,2,\ldots,n$ e $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$, então*

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geq 2^n.$$

Solução: Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica segue que

$$\frac{1+a_i}{2}\geq\sqrt{1\cdot a_i},\text{ para } i=1,2,\ldots,n.$$

Assim,

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geq 2^n\cdot\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ldots\sqrt{a_n}=2^n\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=2^n.$$

□

Problema 3.6. *Determinar a área máxima de um retângulo, inscrito na elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ e cujos lados sejam paralelos aos eixos da elipse.*

Solução:

As coordenadas dos quatro vértices desse retângulo serão da forma $(\pm h,\pm k)$. Queremos maximizar a área $A=4hk$ sujeita à condição de restrição

$$\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1.$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica,

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right]\geq\frac{hk}{ab}$$

com igualdade se, e somente se,

$$\frac{h^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2}=\frac{1}{2}.$$

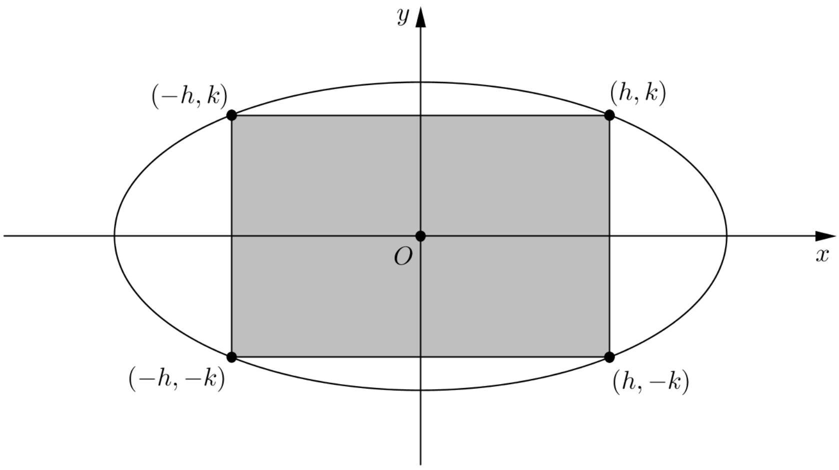


Figura 3.2: Retângulo máximo inscrito na elipse

Assim, a área máxima é $4\dfrac{ab}{2} = 2ab$. $\square$

O que acabamos de ver sobre esta desigualdade envolvendo as médias aritmética e geométrica pode ser estendido para uma quantidade qualquer de números; doravante considerados estritamente positivos, tendo em mente a existência de outras médias a serem oportunamente definidas.

Antes de tentar uma generalização para esta desigualdade, considere aplicar o que sabemos para os números $\dfrac{a+b}{2}$ e $\dfrac{c+d}{2}$.

Com efeito,

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)} \geq \sqrt{(\sqrt{ab})(\sqrt{cd})} = \sqrt[4]{abcd}.$$

A igualdade ocorrendo nas duas desigualdades acima se, e somente se, $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{c+d}{2}$, $a = b$ e $c = d$, e portanto, para $a = b = c = d$.

Este raciocínio pode ser utilizado para uma quantidade de números igual a uma potência qualquer de 2. Mas o que fazer se tivermos, por exemplo, 3 (três) números positivos, digamos $\{a,b,c\}$?

A ideia então é aplicar a desigualdade $M_A \geq M_G$ (onde M_A é a média aritmética e M_G a média geométrica) para os seguintes números: $\{a,b,c,x\}$, em que $x = \sqrt[3]{abc}$. Vejamos:

$$\frac{a+b+c+x}{4} \geq \sqrt[4]{abcx} = \sqrt[4]{x^3x} = x \Rightarrow \frac{a+b+c+x}{4} \geq x \Rightarrow a+b+c \geq 3x.$$

E assim,

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

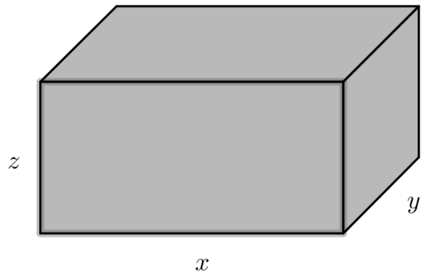


Figura 3.3: Paralelepípedo

É imediatamente válido, da ideia acima, que dentre todos os paralelepípedos cuja soma das 12 arestas é constante e igual a s, o cubo de aresta $\frac{s}{12}$ é o de maior volume.

Com efeito, sejam x, y e z as medidas das três dimensões do paralelepípedo. Isto acarreta $x+y+z=\frac{s}{4}$. Sabe-se, bem assim, que o volume é dado por $V=x\cdot y\cdot z$. Pretende-se maximizar V; o que conseguimos fazendo uso da última desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para 3 (três) números. Ou seja:

$$V=x\cdot y\cdot z\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\left(\frac{\frac{s}{4}}{3}\right)^3.$$

A igualdade ocorrendo no caso em que $x=y=z=\frac{s}{12}$ (cubo de aresta $\frac{s}{12}$).

Problema 3.7 (ENGEL, 1998)**.** *Seja ABC um triângulo, cujas bissetrizes internas AD, BE e CF encontram-se em I. Mostre que*

$$\frac{1}{4}<\frac{IA}{AD}\cdot\frac{IB}{BE}\cdot\frac{IC}{CF}\leq\frac{8}{27}.$$

Solução: Provaremos, de início, a desigualdade da direita. Para tanto, considere a Figura 3.4:

O teorema das bissetrizes internas garante que

$$\frac{b}{p}=\frac{c}{q}\Rightarrow\frac{p}{b}=\frac{q}{c}\Rightarrow\frac{p+q}{b+c}=\frac{p}{b}.$$

Desse modo,

$$p=CD=\frac{ab}{b+c}\text{ e }q=DB=\frac{ac}{b+c}.$$

Portanto,

$$\frac{AI}{ID}=\frac{b}{p}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow\frac{AI}{ID}=\frac{AI}{AI+ID}=\frac{b+c}{a+b+c}.$$

Por analogia,

$$\frac{BI}{BE}=\frac{a+c}{a+b+c}\text{ e }\frac{CI}{CF}=\frac{a+b}{a+b+c}.$$

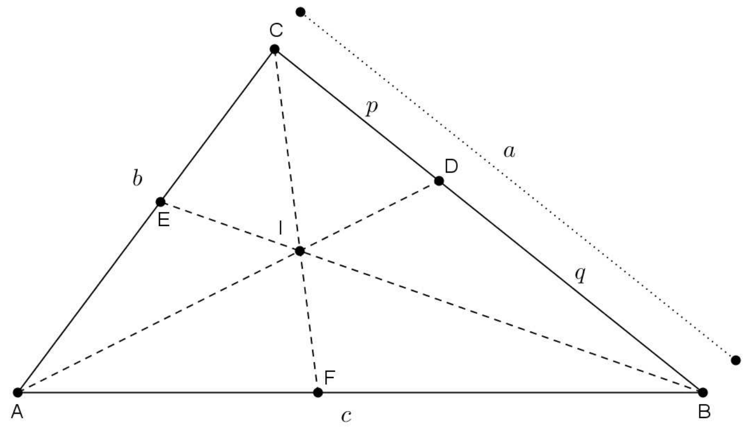


Figura 3.4: Triângulo e seu incentro

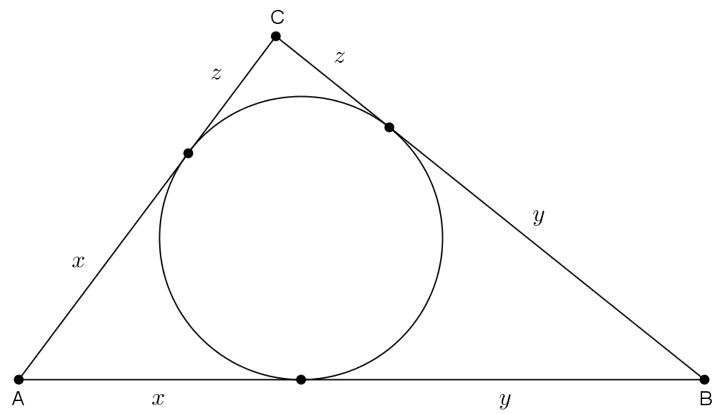


Figura 3.5: Triângulo circunscrito

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica temos:

$$\frac{AI}{ID}\cdot\frac{BI}{BE}\cdot\frac{CI}{CF}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leq\left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3\cdot(a+b+c)}\right]^3=\frac{8}{27}.$$

Agora, para uma prova da desigualdade da esquerda no problema em tela sejam

$$a=y+z,\ b=x+z \text{ e } c=x+y,$$

e ainda

$$r=\frac{x}{x+y+z},\ s=\frac{y}{x+y+z} \text{ e } t=\frac{z}{x+y+z}.$$

Assim,

$$\frac{AI}{AD}=\frac{1}{2}(1+r),\ \frac{BI}{BE}=\frac{1}{2}(1+s) \text{ e } \frac{CI}{CF}=\frac{1}{2}(1+t),$$

com $r+s+t=1$. Portanto,

$$\frac{AI}{AD}\cdot\frac{BI}{BE}\cdot\frac{CI}{CF}=\frac{1}{8}(r+1)(s+1)(t+1)=\frac{1}{8}(1+1+rs+st+tr+rst)>\frac{1}{4}.$$

□

Problema 3.8 (BECKENBACH, 1961, adaptada). *Determinar o volume mínimo de um elipsóide que engloba uma caixa em forma de paralelepípedo de dimensões fixadas.*

Solução:

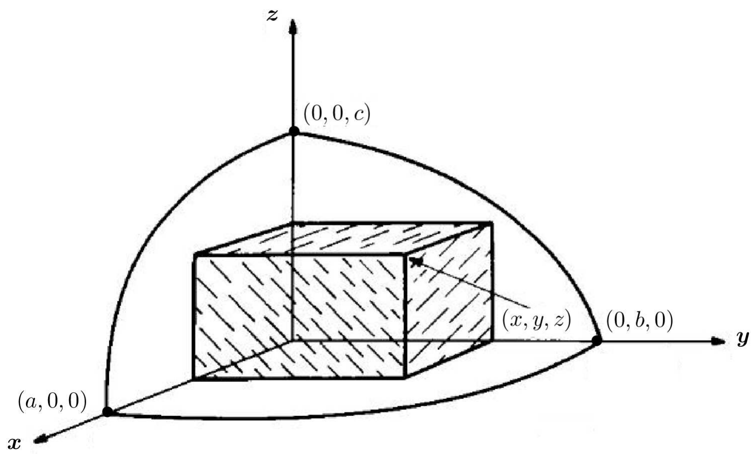


Figura 3.6: Primeiro octante com caixa e elipsóide

Veremos, de início, o problema inverso, a saber: dado um elipsóide, calcular o volume máximo de um paralelepípedo nele contido. Sabe-se da geometria analítica espacial, que um elipsóide, com centro na origem e eixos ao longo dos eixos coordenados, tem equação da forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3.2}$$

onde $2a$, $2b$ e $2c$ representam os comprimentos dos eixos do elipsóide.

Além disso, é intuitivo que o paralelepípedo inscrito terá seu centro na origem e os seus lados paralelos aos eixos coordenados. Dessa forma, se um dos vértices do sólido procurado é o ponto (x,y,z), os demais são dados por

$$(-x,y,z),(x,-y,z),(x,y,-z),(-x,-y,z),(-x,y,-z),(-x,-y,z),(-x,-y,-z).$$

Uma vez que os lados da caixa têm comprimentos $2x$, $2y$ e $2z$, segue que o volume da caixa é dado pela expressão $V=8xyz$. Devemos, assim, maximizar $V=8xyz$ sujeita à condição

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Mais uma vez este problema pode ser resolvido aplicando-se a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. De forma tal que,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) \geq \left(\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Donde,

$$\frac{1}{3} \geq \frac{V^{\frac{2}{3}}}{4(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}}},$$

ou ainda

$$\frac{4}{3}(abc)^{\frac{2}{3}} \geq V^{\frac{2}{3}}.$$

Disso resulta que o volume da caixa é, no máximo, $\dfrac{8abc\sqrt{3}}{9}$. Tal condição ocorrendo se, e somente se,

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3},$$

ou

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\, y=\frac{b}{\sqrt{3}} \text{ e } z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Agora voltemos ao problema original. Vimos que para determinados valores de a, b, c, os valores $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ e $z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$ darão os comprimentos das metades dos lados de uma caixa retangular de volume máximo. Mas no outro sentido, é verdade que, para determinados valores x, y, z, os valores

$$a=\sqrt{3}x,\, b=\sqrt{3}y \text{ e } c=\sqrt{3}z$$

darão o volume mínimo para um elipsóide que contém a caixa? Isto de fato é verdade. Vejamos aqui uma prova.

O volume W do elipsóide (3.2) é dado pela fórmula

$$W=\frac{4}{3}\pi abc,$$

e, para dados x, y, z positivos, queremos escolher números positivos a, b, c satisfazendo a equação (3.2), de tal maneira a minimizar W. A fim de ver a relação recíproca entre os dois problemas, é conveniente considerar

$$a=\frac{1}{X},\, b=\frac{1}{Y},\, c=\frac{1}{Z},$$
$$x=\frac{1}{A},\, y=\frac{1}{B},\, z=\frac{1}{C}$$

A equação (3.2) remodelada torna-se então

$$\frac{(1/A)^2}{(1/X)^2}+\frac{(1/B)^2}{(1/Y)^2}+\frac{(1/C)^2}{(1/Z)^2}=1,$$

ou ainda

$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1;$$

e, sujeito a esta restrição, queremos escolher X, Y, Z, de modo a minimizar

$$W=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Uma vez que o coeficiente $\dfrac{4\pi}{3}$ é uma constante, minimizar W é equivalente a minimizar

$$abc=\frac{1}{XYZ}$$

que, por sua vez, é equivalente a maximizar

$$V'=8XYZ.$$

Mas este é apenas o problema já resolvido, isto é, o problema de determinar a caixa de volume máximo que pode ser inscrita num determinado elipsóide. Tal valor extremo ocorrendo quando

$$X=\frac{A}{\sqrt{3}},\, Y=\frac{B}{\sqrt{3}} \text{ e } Z=\frac{C}{\sqrt{3}}.$$

□

Um outro aspecto bastante prático da desigualdade $M_A \geq M_G$ é a justificativa por haver certa preferência, ao visitarmos um supermercado qualquer e passarmos pelas seções de condimentos e/ou enlatados em geral, por latas cilíndricas em detrimento de recipientes na forma de paralelepípedo. Tal preferência não é apenas de valor consuetudinário, tampouco de ordem estética. A escolha em tela pode até agregar algum destes aspectos ou mesmo ambos, mas, certamente, há uma razão de ordem econômico-financeira para a escolha. Vamos a ela...

Para tanto, considere dois recipientes, um na forma de cilindro, outro, na de um paralelepípedo, os dois com mesmo volume e altura. O consumo de material e o custo de produção destas latas serão menores quando o perímetro da base for menor. A questão passa a ser: fixados um retângulo e uma circunferência de mesma área ($ab=\pi r^2$); quem tem o menor perímetro?

Ora, sabe-se que,

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad &\Rightarrow \quad a+b \geq 2\sqrt{ab} \overset{hip.}{\Rightarrow} a+b \geq 2\sqrt{\pi r^2}\\
&\Rightarrow \quad a+b \geq \sqrt{4pir^2} > \sqrt{\pi^2 r^2} = \pi r\\
&\Rightarrow \quad a+b > \pi r \therefore 2(a+b) > 2\pi r
\end{aligned}$$

Assim, é melhor produzir latas cilíndricas, pois elas tem em sua base uma figura (circunferência) de perímetro menor que a correspondente, de mesma área, e cujo formato é retangular.

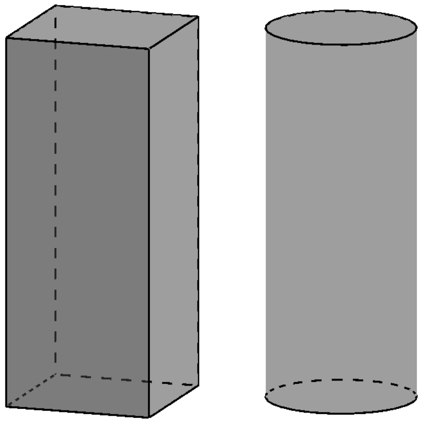
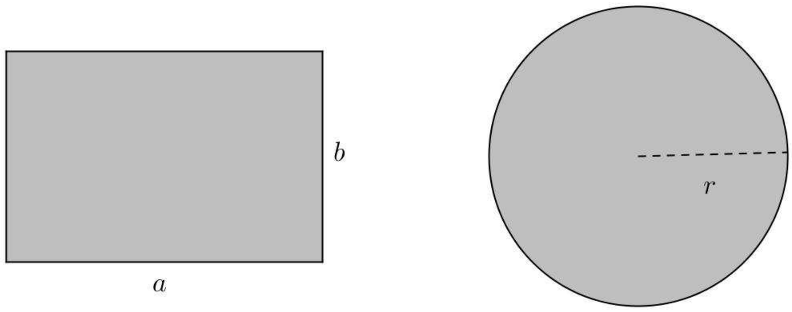


Figura 3.7: Paralelepípedo e Cilindro



$(ab = \pi r^2)$

Figura 3.8: Retângulo e Circunferência

3.2 Desigualdade do Rearranjo

Teorema 3.9. *Sejam $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ e $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ duas sequências de números reais. Seja $\sigma : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ uma permutação qualquer. Então:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Prova: Considere $S = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$, uma soma qualquer, que não seja a soma ordenada $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Então, existe um índice i mínimo tal que $\sigma(i) \neq i$, logo S é da forma:

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_{i-1} b_{i-1} + a_i b_j + \ldots + a_l b_i + \ldots$$

Admita que b_i forme par com a_l, conforme vemos acima. Note ainda que $l > i$ e que $j > i$. Agora vamos montar uma nova soma S' trocando de posição apenas os elementos b_j e b_i:

$$S' = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{i-1}b_{i-1} + a_ib_i + \ldots + a_lb_j + \ldots$$

Tomemos $S' - S$, ficando com:

$$S' - S = a_ib_i + a_lb_j - a_ib_j + a_lb_i = (a_i - a_l)(b_i - b_j) \geq 0$$

Donde se conclui que $S \leq S'$. Conseguimos com isso formar pelo menos mais um par a_ib_i na nossa soma. Logo, se aplicarmos sucessivas vezes esta operação de *rearranjo* obteremos:

$$S \leq S' \leq S'' \leq \ldots \leq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

De maneira análoga, conclui-se que a menor das somas é a que forma os pares na ordem inversa. $\square$

Há muito o que se fazer com isto; na verdade esta desigualdade é suficientemente forte para se concluir muitas coisas, mesmo a desigualdade generalizada entre as médias aritmética e geométrica pode ser demonstrada usando-se o rearranjo como ferramenta. Vejamos abaixo como desenvolver esta técnica em alguns problemas.

Problema 3.10. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos. Prove que*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Solução: Podemos supor, sem perda de generalidade,

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n,$$

o que acarreta então ser

$$\frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{1}{a_n}.$$

Assim, pela desigualdade do rearranjo, a soma mínima (S_{min}) ocorre quando tomarmos as duas sequências na ordem inversa, ou seja,

$$S_{min} = a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} = n.$$

E finalmente, qualquer soma produzida por outra reordenação dos termos será maior que S_{min}, particularmente a que nos interessa:

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{a_2} + a_2 \cdot \frac{1}{a_3} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{a_1} \geq S_{min} = n.$$

$\square$

E como uma aplicação deste último resultado, vamos dar a primeira prova neste trabalho da desigualdade $M_A \geq M_G$, onde

$$M_A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \text{ e } M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n},$$

com os $x_i^{\prime}s$ números reais positivos.

Para isto, suponha $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ e sejam

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \text{ e } b_k = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{G^k}, \text{ com } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Assim, $b_n = 1$ e

$$n \leq \frac{b_1}{b_n} + \frac{b_2}{b_1} + \ldots + \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \ldots + \frac{a_n}{G}.$$

O que acarreta

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

$\square$

Problema 3.11. *Sejam a, b, c reais positivos. Prove que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solução: Suponha, sem perda de generalidade, $a \leq b \leq c$; o que acarreta

$$b + c \geq a + c \geq a + b.$$

Desta última sequência de desigualdades, segue que:

$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{a+b}.$$

Assim, da desigualdade do rearranjo, segue que a soma máxima (S_{max}) é atingida tomando-se as duas sequências acima na mesma ordem:

$$S_{max} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Com efeito, qualquer outra reordenação dos termos e respectivas somas produzidas são menores que S_{max}, em particular:

$$S_{max} \geq \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

$$S_{max} \geq \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c}.$$

Somando estas duas desigualdades chegamos a

$$2 \cdot S_{max} \geq 3 \Rightarrow S_{max} \geq \frac{3}{2}.$$

□

Problema 3.12. *Sejam a, b, c reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que*

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solução: Supondo, sem perda de generalidade, $a \leq b \leq c$, tem-se que

$$a^2 \leq b^2 \leq c^2.$$

Da mesma forma, nossa suposição acarreta em $b+c \geq a+c \leq a+b$, e isto implica em

$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{a+b}.$$

Donde,

$$S_{max} = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}.$$

E assim,

$$S_{max} \geq \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+c} + \frac{a^2}{a+b}$$

$$S_{max} \geq \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{a+c} + \frac{b^2}{a+b}.$$

Somando estas duas últimas desigualdades chega-se a

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_{max} &\geq \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{a^2+c^2}{a+c} + \frac{a^2+b^2}{a+b} \\ &\overset{MQ \geq MA}{\geq} \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2} \\ &= a+b+c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc} = 3. \end{aligned}$$

O que acarreta

$$S_{max} \geq \frac{3}{2}.$$

□

Para simplificar nossas contas e tornar mais evidente o emprego da desigualdade do rearranjo, considere a notação particular seguinte:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{bmatrix} := a_1 b_1 \ldots z_1 + a_2 b_2 \ldots z_2 + \ldots + a_n b_n \ldots z_n \tag{3.1}$$

.

Problema 3.13 (ENGEL, 1998). *Ache o valor mínimo de* $\dfrac{sen^3(x)}{cos(x)} + \dfrac{cos^3(x)}{sen(x)}$, *com* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Solução: As sequências $(sen^3(x), cos^3(x))$ e $\left(\dfrac{1}{sen(x)}, \dfrac{1}{cos(x)}\right)$ tem ordenações opostas.

Assim, de posse da notação (3.1), segue que:

$$\begin{bmatrix} sen^3(x) & cos^3(x) \\ \dfrac{1}{cos(x)} & \dfrac{1}{sen(x)} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} sen^3(x) & cos^3(x) \\ \dfrac{1}{sen(x)} & \dfrac{1}{cos(x)} \end{bmatrix} = 1.$$

□

Problema 3.14 (ENGEL, 1998). *Prove a desigualdade*

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Solução: Usando a notação (3.1), como definido acima, agora para três sequências, e a desigualdade do rearranjo obtemos

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix},$$

pois na primeira matriz as três sequências estão igualmente ordenadas, enquanto na segunda matriz não. □

Problema 3.15 (ENGEL, 1998). *Sejam* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *números reais positivos. Mostre que*

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \ldots + x_n^{n+1} \geq x_1x_2\ldots x_n \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Solução: Procedendo como no exemplo anterior, chegamos a

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_1 & \ldots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix},$$

pois na primeira matriz as sequências estão igualmente ordenadas, enquanto na segunda matriz não. □

Teorema 3.16 (Chebychev). *Sejam* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ *e* $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ *duas sequências de números reais. Então:*

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

Ocorrendo igualdade se, e somente se, uma das sequências for constante[1].

[1] De forma análoga, tomando-se $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ no teorema acima, obteríamos

Prova: Usando a desigualdade do rearranjo obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Somando estas expressões sobre todas as permutações σ e observando que cada termo $a_i b_j$ aparecerá $(n-1)!$ vezes do lado esquerdo teremos:

$$(n-1)! \sum_{i,j} a_i b_j \leq n! \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

E dividindo esta expressão por $n.n!$ teremos:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}$$

Esta igualdade ocorrerá se, e somente se, uma das sequências for constante, pois caso ambas não sejam constantes, poderemos escolher uma permutação σ para que $S < S' \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ de acordo com a demonstração do rearranjo e isso faria com que a desigualdade de Chebychev ficasse estrita, pois esta é a soma sobre todas as permutações. □

Teorema 3.17. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos e k um natural. Então:*

$$\frac{{a_1}^k + {a_2}^k + \ldots + {a_n}^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^k,$$

ocorrendo igualdade se, e somente se, todos os $a_i^{\prime}s$ forem iguais ou $k \in \{0, 1\}$.

Prova: Usaremos indução sobre k nesta demonstração.

1^o Passo: Caso Inicial

O resultado acima é trivialmente verdadeiro para k=1.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponha que o resultado é válido para $k-1$, com $k > 1$.

3^o Passo: Passo Indutivo

Como ambos os membros da desigualdade acima são invariantes por permutações dos índices $1, 2, \ldots, n$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Daí, ${a_1}^{k-1} \leq {a_2}^{k-1} \leq \ldots \leq {a_n}^{k-1}$ e da desigualdade de Chebychev obtemos:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \ldots + a_n^{k-1}}{n}\right) \leq \frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right) \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}.$$

Da hipótese de indução, tem-se

$$\frac{a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+\ldots+a_n^{k-1}}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{k-1}$$

Combinando as duas desigualdades acima, segue o resultado. A condição de igualdade segue do Teorema 3.16. □

3.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Teorema 3.18 (Cauchy-Schwarz)**.** *Dados $2n$ números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, temos:*

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2},$$

valendo a igualdade se, e somente se,

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Prova: Iniciaremos com um fato simples. Dados a e b números reais quaisquer vale que:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Isto acarreta

$$a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \tag{3.4}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a=b$. Tomando

$$A=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} \text{ e } B=\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2},$$

considere os números:

$$\overline{a_i}=\frac{a_i}{A} \text{ e } \overline{b_i}=\frac{b_i}{B}, \text{ com } A\neq 0 \text{ e } B\neq 0.$$

Substituindo estes novos números em (3.4) conseguiremos as desigualdades abaixo:

$$\begin{aligned}
\overline{a_1}\overline{b_1} &\leq \frac{\overline{a_1}^2}{2}+\frac{\overline{b_1}^2}{2}\\
\overline{a_2}\overline{b_2} &\leq \frac{\overline{a_2}^2}{2}+\frac{\overline{b_2}^2}{2}\\
&\cdots\cdots\cdot\\
\overline{a_n}\overline{b_n} &\leq \frac{\overline{a_n}^2}{2}+\frac{\overline{b_n}^2}{2}.
\end{aligned}$$

Somando todas estas desigualdades obtém-se:

$$\overline{a_1}\overline{b_1}+\overline{a_2}\overline{b_2}+\ldots+\overline{a_n}\overline{b_n} \leq \left(\frac{\overline{a_1}^2}{2}+\frac{\overline{a_2}^2}{2}+\ldots+\frac{\overline{a_n}^2}{2}\right)+\left(\frac{\overline{b_1}^2}{2}+\frac{\overline{b_2}^2}{2}+\ldots+\frac{\overline{b_n}^2}{2}\right) \tag{3.2}$$

Note ainda que

$$\overline{a_1}^2+\overline{a_2}^2+\ldots+\overline{a_n}^2=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{A^2}=1.$$

E, do mesmo modo

$$\overline{b_1}^2+\overline{b_2}^2+\ldots+\overline{b_n}^2=\frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{B^2}=1.$$

Substituindo estas duas últimas conclusões no segundo membro da desigualdade (3.2) obtém-se:

$$\overline{a_1}\overline{b_1}+\overline{a_2}\overline{b_2}+\ldots+\overline{a_n}\overline{b_n} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

O que acarreta em:

$$\frac{a_1}{A}\cdot\frac{b_1}{B}+\frac{a_2}{A}\cdot\frac{b_2}{B}+\ldots+\frac{a_n}{A}\cdot\frac{b_n}{B}\leq 1$$

ou

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leq AB.$$

A igualdade ocorrendo se, e somente se,

$$\overline{a_1}=\overline{b_1},\,\overline{a_2}=\overline{b_2},\,\ldots,\,\overline{a_n}=\overline{b_n},$$

o que equivale a

$$\frac{a_1}{A}=\frac{b_1}{B},\,\frac{a_2}{A}=\frac{b_2}{B},\,\ldots,\,\frac{a_n}{A}=\frac{b_n}{B},$$

ou ainda

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}.$$

□

Usando os vetores $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ e $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ podemos reescrever a desigualdade de Cauchy-Schwarz como

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem linearmente dependentes, o que em outras palavras significa dizer um deles ser múltiplo do outro.

No que segue apresentamos algumas aplicações desta ddesigualdade.

Problema 3.19. *Achar o valor máximo de* $f(x) = 3 \cdot sen(x) + 4 \cdot cos(x)$, *com* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Solução: Na desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois números,

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

façamos $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $b_1 = sen(x)$ e $b_2 = cos(x)$. O que nos leva a

$$|3 \cdot sen(x) + 4 \cdot cos(x)| \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{sen^2(x) + cos^2(x)} = 5.$$

Desse modo

$$3 \cdot sen(x) + 4 \cdot cos(x) \leq 5,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se,

$$\frac{3}{sen(x)} = \frac{4}{cos(x)} \Rightarrow tg(x) = \frac{3}{4}.$$

□

Problema 3.20 (ENGEL, 1998)**.** *Estabelecer uma majoração para a função*

$$y = a \cdot sen(x) + b \cdot cos(x),$$

com $a > 0$, $b > 0$ *e* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Solução: A desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que

$$(a \cdot sen(x) + b \cdot cos(x))^2 \leq (a^2 + b^2)(sen^2(x) + cos^2(x)) = a^2 + b^2,$$

o valor máximo $y_{max} = \sqrt{a^2 + b^2}$ é satisfeito se, e somente se,

$$\frac{a}{b} = \frac{sen(x)}{cos(x)} = tg(x).$$

□

Problema 3.21 (KLAMKIN, 1988)**.** *Dado que a, b, c, d, e são números reais tais que*

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16 \end{cases}$$

Determine o valor máximo de e.

Solução: Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para (a, b, c, d) e $(1, 1, 1, 1)$ teremos

$$|a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d \cdot 1| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}$$

Quadradando esta desigualdade obtemos

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq (a+b+c+d)^2 \tag{3.6}$$

.

Vejamos ainda que

$$\begin{cases} a+b+c+d = 8-e \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 16-e^2 \end{cases}$$

Substituindo as duas igualdades deste sistema na desigualdade (3.6) chegamos a

$$4(16-e^2) \geq (8-e)^2 \Rightarrow e(5e-16) \leq 0.$$

Assim, $\frac{16}{5} \geq e \geq 0$. O valor máximo $\frac{16}{5}$ sendo obtido quando $a=b=c=d=\frac{6}{5}$.
Analogamente, poderíamos encontrar o valor máximo de a_n, onde

$$\begin{gathered} a_1+a_2+\ldots+a_n = K \\ {a_1}^2+{a_2}^2+\ldots+{a_n}^2 = L, \end{gathered}$$

e os $a_i's$ números reais, observando que K e L devem satisfazer $\frac{L}{n} \geq \left(\frac{K}{n}\right)^2$. A igualdade ocorrendo se os $a_i's$ forem todos iguais. □

Problema 3.22 (FAURING, 2007). *Os números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 3$, tem soma igual a 1. Demonstrar a desigualdade:*

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)} + \ldots + \frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)} \geq \frac{n^2}{3}.$$

Solução: Para tornar as coisas mais simples, denotemos

$$a_i = \frac{x_i}{x_{i+1}(x_i+x_{i+1}+x_{i+2})}, \;\; b_i = x_i+x_{i+1}+x_{i+2}, \text{ com } i = 1,2,\ldots,n,$$

com os subíndices considerados no módulo n (quer dizer, $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$, $\ldots$).

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, aplicada aos números $\sqrt{a_i}$ e $\sqrt{b_i}$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{x_{i+1}}}\right)^2.$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica conseguimos

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{x_{i+1}}} \geq n \left[\left(\frac{x_1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} = n.$$

De forma que,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 3\sum_{i=1}^{n} x_i = 3.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2})} = \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{x_{i+1}}}\right)^2 \geq \frac{n^2}{3}.$$

Para que ocorra a igualdade é necessário que haja igualdade quando se aplica a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Isto ocorre se, e somente se,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_1}.$$

Se $x_i = max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, então $\dfrac{x_{i-1}}{x_i} \leq 1$ e $\dfrac{x_i}{x_{i+1}} \geq 1$.

Por outro lado, $\dfrac{x_{i-1}}{x_i} = \dfrac{x_i}{x_{i+1}}$, do que se deduz que todas as frações são iguais a 1. Portanto, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ e dado que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, obtemos:

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}.$$

Reciprocamente, para esta seleção de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a igualdade ocorre. □

Problema 3.23 (BARBEAU, 1995). *Ache a menor distância entre o plano $Ax+By+Cz = 1$ e o elipsóide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Assuma que A, B e C são todos positivos e que o plano não intercepta o elipsóide.

Solução: Sejam (u, v, w) e (p, q, r) pontos do elipsóide e do plano, respectivamente. Queremos minimizar

$$D^2 = (u-p)^2 + (v-q)^2 + (w-r)^2.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$D^2 \cdot (A^2 + B^2 + C^2) \geq [A(u-p) + B(v-q) + C(w-r)]^2 = [1 - (Au + Bv + Cw)]^2,$$

a igualdade ocorrendo quando (p, q, r) puder ser escrito na forma $(u+\lambda A, v+\lambda B, w+\lambda C)$.

Uma vez que o plano e o elipsóide não se intersectam,

$$1 > Au + Bv + Cw.$$

Assim, para minimizar D, devemos maximizar $Au + Bv + Cw$.

Novamente, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)\cdot(a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2)\geq(Au+Bv+Cw)^2,$$

com a igualdade ocorrendo se (u,v,w) puder ser escrito na forma $(\mu Aa^2,\mu Bb^2,\mu Cc^2)$.

Consequentemente,

$$max(Au+Bv+Cw)=\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}$$

e a menor distância é

$$D_{min}=\frac{1-\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Essa distância sendo atingida quando

$$\begin{aligned}(u,v,w) &= (\mu Aa^2,\mu Bb^2,\mu Cc^2)\\ \mu^2(A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2) &= 1,\\ (p,q,r) &= (u+\lambda A,v+\lambda B,w+\lambda C)\\ \text{e}&\\ \lambda &= \frac{1-\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}}{A^2+B^2+C^2}.\end{aligned}$$

□

3.4 Desigualdades entre Médias

O conceito de *médias* tem uma importância bastante relevante em vários problemas cotidianos. Vejamos a seguir as 4 (quatro) principais médias matemáticas e um exemplo rápido de onde empregar cada conceito.

- média aritmética (M_A): nos dá a *renda média* de um vendedor que percebe três diferentes valores em meses consecutivos;
- média geométrica (M_G): calcula o aumento *percentual médio* de um produto que sofre reajustes consecutivos;
- média harmônica (M_H): estabelece a *velocidade média* de um móvel que percorre as mesmas distâncias a velocidades constantes diferentes;
- média quadrática (M_Q): esta ideia está intimamente ligada ao cálculo do *desvio padrão*, conceito estatístico que mede a qualidade das aproximações de uma lista de números em relação a determinado valor.

Pretendemos provar que para qualquer quantidade de números reais positivos vale:

$$M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H,$$

onde MA, MG, MH e MQ são definidas abaixo.

- Média Aritmética: $M_A = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$
- Média Geométrica: $M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$
- Média Harmônica: $M_H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}}$
- Média Quadrática: $M_Q = \sqrt{\dfrac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2}{n}}$

Teorema 3.24 (Desigualdades das Médias)**.** *Se $x_1, x_2, ..., x_n$ são números reais positivos e MA, MG, MH e MQ, são suas médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, nessa ordem, então*

$$M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H.$$

Além do mais, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Prova: [Parte 1: $M_A \geq M_G$]

Antes de iniciarmos uma demonstração algébrica, vejamos uma interessante reformulação ´´física” da desigualdade $M_A \geq M_G$, apresentada em [42].

Problema 3.25. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, com produto $p = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ e soma $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Prove que o maior valor de p é obtido quando todos os x_i são iguais, isto é, quando $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

Solução:

Imagine os n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como pontos ´´físicos” na reta numérica, cada um com peso unitário. O centro de massa desse sistema está localizado na média aritmética de valor $A := \dfrac{s}{n}$.

Com efeito, note que é possível mover tais pontos de tal maneira que eles continuem a se equilibrar em A, o que é equivalente a dizer que as suas somas permanecem constantes.

Nossa estratégia é considerar situações onde os x_i não são todos iguais e mostrar que podemos fazê-los “mais iguais” aumentando seu produto sem aumentar suas somas. Se todos os pontos não estão agrupados em A, então, pelo menos um estará à esquerda de A (chame-o de L) e o outro (que nós chamaremos de R) estará à direita de A. Desses dois pontos, mova o que estiver mais próximo de A na direção de A e o outro de tal forma que o ponto de equilíbrio entre os dois pontos não se altere.

Perceba que a distância entre os dois pontos diminuiu, mas o seu ponto de equilíbrio permanece sem mudança, e com o produto dos números que representam a posição dos dois

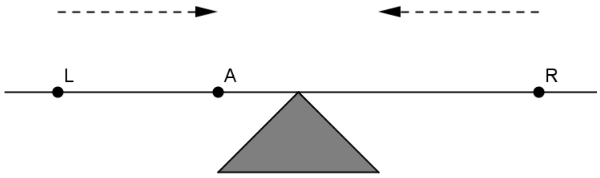


Figura 3.9: Ponto de equilíbrio

pontos aumentando, pois, como já vimos antes para o caso de dois números o produto é maximizado quando os fatores são iguais.

Agora, já que a soma dos dois pontos não foi mudada, a soma de todos os n pontos não mudou.

Podemos repetir sempre o mesmo procedimento com dois pontos quaisquer de nossa escolha de tal forma que:

- um número que inicialmente não era igual à A, torne-se mais próximo de A;
- a soma de todos os n números não mude;
- o produto dos n números aumente.

Finalmente, como há uma quantidade finita de números, esse processo terminará quando todos ele forem iguais à A; momento em que o produto será máximo. □

Depois dessa breve justificativa "física" do resultado pretendido, voltemos a considerar algebricamente a parte do teorema que diz ser $M_A \geq M_G$.

Uma demonstração deste importante resultado já foi vista por rearranjo. No entanto, há diversas outras formas, usando técnicas diferentes, para provar esta parte do teorema pretendido. O livro [5] contém mais de 50 desses caminhos. Repetiremos aqui o imaginado por **George Polya** (1888-1985). A forte desigualdade de Jensen será também outra oportunidade para discutirmos o resultado. Afora isto, apresentaremos no **Apêndice** a clássica e também brilhante demonstração baseada em **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) e que se utiliza do Princípio da Indução Finita.

De início, tem-se que $e^x \geq 1+x$.

Com efeito, definamos o logaritmo natural de a (lna) como sendo a área limitada pelo eixo das abscissas, pela curva $y = \dfrac{1}{x}$ e pelas retas verticais $x = 1$ e $x = a$. Como esta região está contida no retângulo de altura 1 e base $a-1$, temos que $lna \leq (a-1)$. Tomando $a = (1+x)$, obtemos $ln(1+x) \leq x$, ou, equivalentemente, $e^x \geq 1+x$, valendo a igualdade apenas se $a = 1$, ou seja, $x = 0$.

Na desigualdade $e^x \geq 1+x$ iremos substituir x por $\dfrac{x_i}{MA} - 1$, com $M_A = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ e para $i = 1, 2, ..., n$, de onde obtemos as relações:

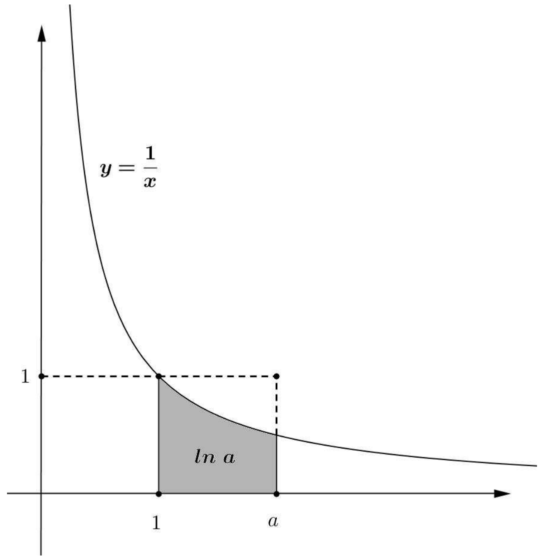


Figura 3.10: Área sob a hipérbole

$$
\begin{array}{rcl}
e^{\frac{x_1}{A} - 1} & \geq & \dfrac{x_1}{MA} \\
e^{\frac{x_2}{A} - 1} & \geq & \dfrac{x_2}{MA} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
e^{\frac{x_n}{A} - 1} & \geq & \dfrac{x_n}{MA}
\end{array}
$$

Multiplicando todas as desigualdades acima obtemos

$$e^{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{MA} - n} \geq \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{MA^n}$$

Mas $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \cdot MA$, logo

$$1 \geq \frac{MG^n}{MA^n} \Rightarrow M_A \geq M_G, \text{ onde } M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

É evidente que a igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{x_i}{MA} - 1 = 0$, ou seja, $x_i = MA$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Em outros termos, a desigualdade $M_A \geq M_G$ significa tão somente que: para n números reais positivos de soma constante, o produto dos mesmos será *máximo* quando todos os números forem iguais, já quando o produto desses n números for constante, sua soma será *mínima* quando todos os números forem iguais.

Uma aplicação bastante interessante e imediata do que acabamos de ver é podermos estabelecer uma majoração para o fatorial de n, a saber

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \text{ para } n \geq 2.$$

De fato, da desigualdade $M_A \geq M_G$, obtém-se:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{(n+1) \cdot n}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

Note, neste caso, que a desigualdade é estrita, pois os números considerados são diferentes.[2]

Prova: [Parte 2: $M_G \geq M_H$]

Para provarmos que $M_G \geq M_H$ basta aplicar $M_A \geq M_G$ para os números $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

Vejamos:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}} \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

com a igualdade ocorrendo quando $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n}$, ou seja, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Combinando as duas partes já demonstradas do teorema sobre as médias, conclui-se que

$$M_A \geq M_G \geq M_H.$$

□

Depois de visto isso, sugiro uma pequena experiência com uso de calculadora.

Experimente digitar um número qualquer e teclar repetidamente a tecla *raiz quadrada* ($\sqrt{\ }$). Perceberemos, ao testar esse procedimento algumas vezes, que, independentemente do número inicial escolhido, o valor final no visor é sempre igual a 1.

Por que isso ocorre?

Veremos uma justificativa para esse "estranho" fenômeno.

Claro que nossas ferramentas serão as *desigualdades*, mais precisamente, as desigualdades entre as médias aritmética, geométrica e harmônica.

Considere para tanto o conjunto de n números: 1, 1, 1, ..., 1, a, com a real positivo.

Aplicando-se o resultado $M_A \geq M_G \geq M_H$, chegamos a:

[2] É possível estabelecer, outrossim, uma cota inferior para $n!$. Para tanto, tem-se que $log(n!) = log2 + log3 + \ldots + logn = \sum_{k=2}^{n} logk$. Desse modo, $log(n-1)! < \int_1^n logt dt < log(n!)$. Calculando-se a integral, chega-se a $log(n-1)! < n \cdot logn - n + 1 < log(n!)$. Uma vez que a função log é injetiva e crescente, aplicando a exponencial, segue que

$$n! > e^{n \cdot (logn) - n + 1} = e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

$$\frac{1+1+1+\cdots+1+a}{n} \geq \sqrt[n]{1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1\cdot a} \geq \frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{1}+\frac{1}{a}}.$$

Isto implica em

$$\frac{n}{n-1+\frac{1}{a}} \leq \sqrt[n]{a} \leq \frac{n-1+a}{n}$$

ou ainda

$$1+\frac{a-1}{an-a+1} \leq \sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n}.$$

Portanto, se n tender a infinito, os lados esquerdo e direito das desigualdades convergem para 1 (um). Isto acarreta em $\sqrt[n]{a}$ tender a 1 (um).

Problema 3.26. *(SAVCHEV, 1999) Seja $p(x)$ um polinômio de grau $n > 1$, com coeficientes inteiros e n raízes reais, não todas iguais, no intervalo $(0,1)$. Demonstrar que o valor absoluto do coeficiente principal de $p(x)$ é maior que ou igual a 2^n+1.*

Solução: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as raízes de $p(x)$ e a seu coeficiente principal (ou dominante). Podemos fatorar $p(x)$ como segue

$$p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \forall x.$$

Como $p(x)$ tem coeficientes inteiros, seus valores em 0 e em 1 também são inteiros. Ademais, os inteiros $p(0)$ e $p(1)$ são diferentes de zero, pois todas as raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estão compreendidas estritamente entre 0 e 1. Consequentemente,

$$\begin{aligned} 1 \leq |p(0)p(1)| &= |a^2(-1)^n x_1(1-x_1)\cdot x_2(1-x_2)\cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n)| \\ &= a^2 x_1(1-x_1)\cdot x_2(1-x_2)\cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n), \end{aligned}$$

com $0 < x_k < 1$ e $k = 1, 2, \ldots, n$.

Agora, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, temos pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica que

$$x_k(1-x_k) \leq \frac{1}{4},$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_k = \frac{1}{2}$.

Dessa forma, obtemos

$$1 \leq a^2 x_1(1-x_1)\cdot x_2(1-x_2)\cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n) < \frac{a^2}{4^n},$$

donde

$$|a| > 2^n.$$

Levando em conta que a é inteiro, segue que $|a| \geq 2^n + 1$. $\square$

No capítulo final, retornaremos ao tema *polinômios* para estabelecer uma região anular no plano complexo onde estejam localizadas as raízes desses tais polinômios.

Prova: [Parte 3: $M_Q \geq M_A$]

Para demonstrar que vale

$$\sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

basta tomar $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ na desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Assim, ficamos com

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}.$$

Evidentemente, valendo a igualdade se, e somente se,

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \ldots = \frac{a_n}{1},$$

ou seja, quando todos $a_i's$ forem iguais.

Problema 3.27 (ENGEL, 1998)**.** *Minimize*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

para $0 \leq x_i \leq 1$ *e* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Solução: Aplicando a desigualdade $M_Q \geq M_A$ é imediato que o valor mínimo de

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

é atingido quando $x_i = \frac{1}{n}$, para todo i. $\square$

Capítulo 4

Desigualdades Avançadas

4.1 Exórdio de Cálculo

São dois os aspectos preponderantes para analisar o comportamento de funções deriváveis: os intervalos em que elas crescem ou decrescem e sua concavidade (para cima ou para baixo). É resultado de um curso básico de Cálculo que tal crescimento está ligado à primeira derivada e sua concavidade está relacionada à derivada segunda. Vejamos brevemente como tudo ocorre.

Seja $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua em todo ponto de seu domínio. Um ponto $t\in(a,b)$ é dito *máximo local* de f se exite um intervalo aberto $I_t\subset(a,b)$ contendo t tal que $f(t)\geq f(x),\forall x\in I_t$. Caso ocorra $f(t)\leq f(x),\ \ \forall x\in I_t$, t será dito *mínimo local* de f. Em qualquer dos dois casos t é dito um ser um ponto *extremo local* ou *extremo relativo* de f.

Proposição 1. Seja f uma função real definida num intervalo aberto $(a,b), a<b$. Se f tiver um extremo relativo em $t\in(a,b)$, então $f'(t)=0$, se $f^{'}(t)$ existir.

A Proposição anterior fornece uma condição necessária para que um ponto $t\in(a,b)$ seja um extremo relativo, mas ela não é suficiente. Por isso, é necessário investigar os pontos onde a função f não possui derivada, sucitando a definição de ponto crítico: $t\in(a,b)$ é um *ponto crítico* de $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se $f^{'}(t)=0$ ou se $f^{'}(t)$ não existir.

Proposição 2. Seja a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Examinando o sinal de $f'(x)$ podemos dizer que:

(i) $f'(x)>0$ em $(a,b)\Leftrightarrow f$ é crescente em (a,b);

(ii) $f'(x)\geq 0$ em $(a,b)\Leftrightarrow f$ é não-decrescente em (a,b);

(iii) $f'(x)<0$ em $(a,b)\Leftrightarrow f$ é decrescente em (a,b);

(iv) $f'(x)\leq 0$ em $(a,b)\Leftrightarrow f$ é não-crescente em (a,b).

Relembremos também mais dois outros importantes resultados ligados a tais conceitos:

Proposição 3. [Teste da Derivada Primeira] Seja a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a,b) contendo o número t e suponha que f é derivável em todos os pontos de (a,b), exceto possivelmente em t,

(i) Se exitem $\delta_1, \delta_1 > 0$ tais que $f'(x) > 0, \forall x \in (t-\delta_1, t)$ e $f'(x) < 0, \forall x \in (t, t+\delta_2)$ então f tem máximo local em t.

(ii) Se exitem $\delta_1, \delta_1 > 0$ tais que $f'(x) < 0, \forall x \in (t-\delta_1, t)$ e $f'(x) > 0, \forall x \in (t, t+\delta_2)$ então f tem mínimo local em t.

(iii) Se f' não muda de sinal em algum intervalo de centro t então t não é extremo relativo de f.

Proposição 4. [Teste da Derivada Segunda] Seja f uma função derivável em um intervalo (a,b) e seja $t \in (a,b)$ tal que $f'(t) = 0$. Se f"(t) existe e

(i) se $f''(t) < 0$, então f possui um máximo local em t.

(ii) se $f''(t) > 0$, então f possui um mínimo local em t.

Agora, após este breve retrospecto, estamos aptos a discutir a segunda pergunta do **Problema 2.10**, sobre quem é maior dentre os números: e^{π} ou π^e. Claro que poderíamos simplesmente calcular com aproximação de apenas uma casa decimal cada um destes números para concluir que

$$e^{\pi} > \pi^e.$$

No entanto, este problema é um caso particular de uma ideia mais geral:

$$e^x \geq x^e, \forall x \geq 0,$$

a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = e$.

Assim, não apenas $e^{\pi} > \pi^e$, mas $e^2 > 2^e$, $e^3 > 3^e$, $e^{10} > 10^e$, $e^{\sqrt{3}} > (\sqrt{3})^e$, etc.

Considere, pois, $f(x) = x^e \cdot e^{-x}, x \geq 0$. Observe que $f(0) = 0$ e $f(x) > 0, \forall x > 0$. Desta forma, $x = 0$ é um mínimo global ou absoluto de f. Além disso, sendo f é derivável em toda a reta, buscaremos os pontos críticos de f estudando a equação $f'(x) = 0$.

Calculando tal derivada, obtém-se

$$f'(x) = (ex^{e-1} - x^e) \cdot e^{-x},$$

que se anula apenas em $x = 0$ e $x = e$.

A Tabela 4.1 fornece o sinal da derivada de f no seu domínio.

	0	$0 < x < e$	e	$x > e$
sinal f'	0	+	0	-

Tabela 4.1: Sinal da derivada da função $f(x) = x^e e^{-x}$.

Analisando o sinal da derivada, vemos que $x = e$ é um ponto de máximo absoluto para f, cujo valor absoluto de f é $1 = f(e)$.

Portanto,

$$x^e \cdot e^{-x} \leq 1, \forall x \geq 0,$$

a igualdade ocorrendo somente quando $x = e$.

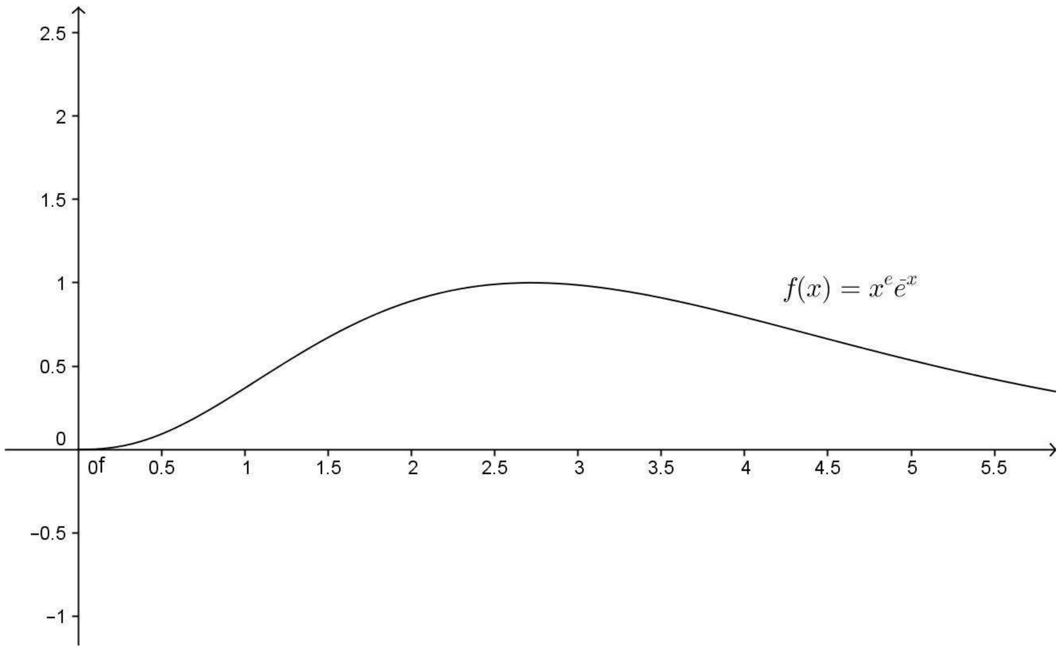


Figura 4.1: Gráfico da função $f(x) = x^e \cdot e^{-x}$

Isto ajuda a explicar por que e^{π} e π^e têm valores tão próximos, o que faz com que não seja imediatamente óbvio qual dos dois é maior, e mais ainda, o gráfico mostra que se um número x for muito próximo de e, então $x^e \cdot e^{-x}$ é próximo de 1 e portanto x^e é próximo de e^x.

Depois desta interessante aplicação do Cálculo, vamos avançar na direção pretendida e conhecer a desigualdade de Jensen.

4.2 Desigualdade de Jensen

Teorema 4.1. *(Jensen) Seja $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ e $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$, $a_i \in \mathbb{R}$. Se $f'' \geq 0$ (f é convexa) em todo o intervalo (a,b), então*

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + ... + a_n f(x_n) \geq f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n).$$

Se, por outro lado, tivermos $f'' \leq 0$ (f é côncava) em (a,b) a desigualdade mudará de sinal:

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \ldots + a_n f(x_n) \leq f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n).$$

Prova: Usaremos indução sobre $n \geq 2$ para o caso em que $f'' \geq 0$; a outra situação se procede de modo inteiramente análogo.

1^o Passo: Caso Inicial

O caso $n = 2$ é trivial, pois nos dá a própria condição de convexidade.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponha agora que, para um $n > 2$ fixado, $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0,1]$, com $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, tenhamos

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \in (a,b) \text{ e}$$
$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \dots + a_nf(x_n).$$

3^o Passo: Passo Indutivo

Considere agora

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in (a,b) \text{ e } a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in [0,1],$$

com

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = 1.$$

Veja que para $a_{n+1} = 1$, teremos $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ e não resta nada a justificar. Caso contrário, tomemos

$$y = \frac{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}{1 - a_{n+1}} = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n,$$

com cada $b_j = \dfrac{a_j}{1 - a_{n+1}}$.

Uma vez que $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1$, segue da hipótese que $y \in (a,b)$. Disto e do fato de f ser convexa, obtemos

$$\begin{aligned} f(a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1}) &= f\left[(1 - a_{n+1})\left(\frac{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}{1 - a_{n+1}}\right) + a_{n+1}x_{n+1}\right] \\ &= f[(1 - a_{n+1})y + a_{n+1}x_{n+1}] \\ &\leq (1 - a_{n+1})f(y) + a_{n+1}f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Aplicando a outra parte da hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} f(y) &= f(b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n) \\ &\leq b_1f(x_1) + b_2f(x_2) + \dots + b_nf(x_n) \\ &= \frac{a_1}{1 - a_{n+1}}f(x_1) + \frac{a_2}{1 - a_{n+1}}f(x_2) + \dots + \frac{a_n}{1 - a_{n+1}}f(x_n), \end{aligned}$$

Dessas duas desigualdades, concluímos o que queríamos. $\square$

A força desta desigualdade pode ser percebida utilizando-a para demonstrar a desigualdade $M_A \geq M_G$ de forma simples e rápida.

Com efeito, sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais positivos de tal sorte que existam $x_1, \ldots, x_n$ também números reais quaisquer, com $a_i = ln(x_i)$, para todo i. Usando o fato de $f(x) = ln(x)$ ser uma função côncava (pois $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$) e aplicando Jensen obtemos

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right),$$

donde segue

$$ln(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_n}) \leq ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

Portanto, por f ser crescente, vale que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$\square$

Problema 4.2 (STEELE, 2004). *Se $0 < r_k < \infty$, e se o nosso investimento de um dólar no ano k cresce para $1 + r_k$ dólares no final do ano, chamamos r_k o retorno do nosso investimento no ano k. Mostre que o valor $V = (1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_n)$ de nossos investimentos após n anos deve satisfazer à condição*

$$(1+r_G)^n \leq \prod_{k=1}^{n}(1+r_k) \leq (1+r_A)^n,$$

onde

$$r_G = \sqrt[n]{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n} \text{ e } r_A = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}.$$

Solução:

A desigualdade da direita decorre de $M_A \geq M_G$ aplicada aos $a_k = 1 + r_k$, com $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+r_k)} \leq \frac{(1+r_1) + (1+r_2) + \ldots + (1+r_n)}{n} = 1 + \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n},$$

e assim,

$$(1+r_A)^n \geq \prod_{k=1}^{n}(1+r_k).$$

Já a desigualdade da esquerda decorre da desigualdade de Jensen aplicada à função convexa $f(x) = ln(1+e^x)$ e de tal sorte que para cada k, $1 \leq k \leq n$, ocorra $r_k = e^{x_k}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{ln(1+e^{x_1}) + ln(1+e^{x_2}) + \ldots + ln(1+e^{x_n})}{n} &\geq ln\left[\frac{(1+e^{x_1}) + (1+e^{x_2}) + \ldots + (1+e^{x_n})}{n}\right] \Rightarrow \\
\frac{ln(1+e^{x_1}) \cdot (1+e^{x_2}) \cdot \ldots \cdot (1+e^{x_n})}{n} &\geq ln\left(\frac{n + e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots + e^{x_n}}{n}\right).
\end{aligned}$$

E isto implica em

$$\prod_{k=1}^{n}(1+r_k) \geq \left(1 + \frac{\overbrace{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}^{n \cdot r_A}}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{n \cdot r_G}{n}\right)^n = (1+r_G)^n.$$

$\square$

Vejamos mais alguns casos onde é interessante aplicarmos a desigualdade de Jensen.

Problema 4.3. *Sejam $x_i \in \mathbb{R}$ tais que $0 < x_i < \pi$, e*

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Prove que

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\operatorname{sen} x_i}{x_i}\right) \leq \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^n.$$

Solução:

Expandindo a desigualdade acima ficamos com

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x_1}{x_1}\right) \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x_2}{x_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\right) \leq \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^n.$$

Aplicando ln (logaritmo natural) na desigualdade acima obtém-se:

$$\frac{ln\left(\frac{\operatorname{sen} x_1}{x_1}\right) + ln\left(\frac{\operatorname{sen} x_2}{x_2}\right) + \ldots + ln\left(\frac{\operatorname{sen} x_2}{x_2}\right)}{n} \leq ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right).$$

Tomando $f(x) = ln\left(\frac{senx}{x}\right)$; se provarmos que $f''(x) < 0$ a desigualdade de Jensen garante o que queremos.

Ora,

$$f'(x) = \frac{x}{senx} \cdot \left(\frac{(cosx) \cdot x - (senx)}{x^2}\right) = \frac{(cosx) \cdot x - senx}{x \cdot (senx)} = cotgx - \frac{1}{x}.$$

Logo,

$$f''(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{x^2}.$$

Desse modo,

$$f''(x) \leq 0 \iff \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \iff x \geq senx.$$

O que de fato é verdade para $x \in (0, \pi)$. $\square$

Problema 4.4. *(FAURING, 2003) Sejam a, b e c a medida dos lados opostos, respectivamente, aos ângulos (em radianos) α, β e γ de um triângulo ABC de semiperímetro s. Prove que:*

$$\frac{bc}{\alpha \cdot (s-a)} + \frac{ca}{\beta \cdot (s-b)} + \frac{ab}{\gamma \cdot (s-c)} \geq \frac{12s}{\pi}$$

Solução:

Sejam R e r os raios, respectivamente, das circunferências circunscrita e inscrita ao triângulo. Sabe-se que

$$abc = 4Rrs,\ \operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = \frac{r}{s-a},\ a = 2R \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$$

(e do mesmo modo para B e C).

Então,

$$\frac{bc}{\alpha \cdot (s-a)} + \frac{ca}{\beta \cdot (s-b)} + \frac{ab}{\gamma \cdot (s-c)} = s \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cdot \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\beta \cdot cos^2 \dfrac{\beta}{2}} + \frac{1}{\gamma \cdot cos^2 \dfrac{\gamma}{2}} \right) \tag{4.1}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada a

$$(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma}) \text{ e } \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot cos \dfrac{\alpha}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\beta} \cdot cos \dfrac{\beta}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma} \cdot cos \dfrac{\gamma}{2}} \right)$$

obtemos

$$\left(\frac{1}{\cos \dfrac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos \dfrac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos \dfrac{\gamma}{2}} \right)^2 \leq (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cdot \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\beta \cdot \cos^2 \dfrac{\beta}{2}} + \frac{1}{\gamma \cdot cos^2 \dfrac{\gamma}{2}} \right).$$

Logo,

$$\frac{1}{\alpha \cdot cos^2 \dfrac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\beta \cdot cos^2 \dfrac{\beta}{2}} + \frac{1}{\gamma \cdot cos^2 \dfrac{\gamma}{2}} \geq \frac{\left(\dfrac{1}{cos \dfrac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{cos \dfrac{\beta}{2}} + \dfrac{1}{cos \dfrac{\gamma}{2}} \right)^2}{\pi}, \tag{4.2}$$

pois $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Pela convexidade da função $y=\dfrac{1}{\cos x}$, $0\le x<\dfrac{\pi}{2}$, a desigualdade de Jensen garante que

$$\frac{\dfrac{1}{cos\dfrac{\alpha}{2}}+\dfrac{1}{cos\dfrac{\beta}{2}}+\dfrac{1}{cos\dfrac{\gamma}{2}}}{3}\ge\frac{1}{cos\left(\dfrac{\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}}{3}\right)}.$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{cos\dfrac{\alpha}{2}}+\frac{1}{cos\dfrac{\beta}{2}}+\frac{1}{cos\dfrac{\gamma}{2}}\ge\frac{3}{cos\dfrac{\pi}{6}}=\frac{3}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3} \tag{4.3}$$

Por (4.1), (4.2) e (4.3), obtemos

$$\frac{bc}{\alpha(s-a)}+\frac{ca}{\beta(s-b)}+\frac{ab}{\gamma(s-c)}\ge\frac{s}{\pi}\cdot(2\sqrt{3})^2=\frac{12s}{\pi}$$

$\square$

Problema 4.5 (Índia, 1995)**.** *Sejam* x_1 , x_2, …, $x_n\in\mathbb{R}^*$ *tais que* $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. *Prove que:*

$$S=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\ge\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Solução:

Tome $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$. Devemos mostrar que:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right).$$

Ou seja:

$$S\ge n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)=n\cdot\frac{\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{n}{n-1}} \tag{4.4}$$

Para que isso tudo funcione devemos ter $f''(x)>0$.

Vejamos:

$$\begin{aligned}
f(x)=x\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}} \quad &\Rightarrow\quad f'(x)=1\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}+x\cdot-\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)\\
&\Rightarrow\quad f'(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot x\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}\\
&\Rightarrow\quad f''(x)=\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot[(1-x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\cdot x\cdot(1-x)^{-\frac{5}{2}}].
\end{aligned}$$

No intervalo $[0,1]$, $f''(x)>0$ e volta-se para (4.4).

Problema 4.6. *Sejam a, b, c* > 0. *Prove que:*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Solução: Dividindo-se as três frações do primeiro membro da desigualdade, respectivamente, por a^2, b^2 e c^2 obtêm-se:

$$\frac{a}{1+\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{b}{1+\left(\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{c}{1+\left(\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}\right)^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Donde,

$$\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{c}{a+b+c}\cdot$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}\right)^2}\geq\frac{1}{3}.$$

Seja, então, $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{b}$ e $z=\frac{a}{c}$ e considere a função $f(t)=\frac{1}{1+t+t^2}$.

É fácil ver que para $t>0$, temos $f''(t)>0$. Logo, f é convexa. Pela desigualdade de Jensen, segue que se

$$\alpha=\frac{a}{a+b+c},\ \beta=\frac{b}{a+b+c}\ \text{e}\ \gamma=\frac{c}{a+b+c},$$

e por consequência $\alpha+\beta+\gamma=1$,

$$\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot f(y)+\gamma\cdot f(z)\geq f(\alpha x+\beta y+\gamma z)=f(1)=\frac{1}{3}$$

□

Teorema 4.7. *($M_A \geq M_G$ - generalizada) Sejam $x_1,x_2,...,x_n$ números reais não negativos e $a_1+a_2+...+a_n=1$, com os $a_{i's}$ números positivos. Vale que:*

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{a_i}\leq\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot x_i,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Prova: Observe inicialmente que se existir i para o qual $x_i=0$ a desigualdade vai valer, com a igualdade se verificando se $x_i=0,\forall i=1,2,\ldots n$. Assim, vamos supor $x_1,x_2,...,x_n$ números reais positivos e $a_1,a_2,\ldots,a_n$ números reais positivos, com $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Usando o fato de $f(x)=ln(x)$ ser uma função côncava (pois $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$) e aplicando a desigualdade de Jensen obtemos:

$$a_1 \cdot ln(x_1) + a_2 \cdot ln(x_2) + \ldots + a_n \cdot ln(x_n) \leq ln(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n) \Rightarrow$$
$$ln(x_1)^{a_1} + ln(x_2)^{a_2} + \ldots + ln(x_n)^{a_n} \leq ln(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n) \Rightarrow$$
$$ln((x_1)^{a_1} \cdot (x_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (x_n)^{a_n}) \leq ln(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n),$$

e pelo fato de f ser crescente, vale o resultado que queremos. □

4.3 Young, Holder e Minkowsky

Há outros modos de demonstrar essas três fortes desigualdades. No entanto, preferimos a forma como segue haja vista nos parecer a mais didática para a nossa sequência. A primeira delas (Young) deriva imediatamente de ($M_A \geq M_G$ - generalizada), as demais são implicações sequenciais da primeira.

Teorema 4.8 (*Young*)**.** *Sejam a e b reais não-negativos e $p, q > 1$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a^p = b^q$.

Prova: Usando o Teorema 4.7 ($M_A \geq M_G$ - generalizada) para os números $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$ e $w_1 = \frac{1}{p}$, $w_2 = \frac{1}{q}$, temos:

$$\prod_{i=1}^{2} (x_i)^{w_i} \leq \sum_{i=1}^{2} w_i \cdot x_i,$$

chegamos a

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq (a^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b^q)^{\frac{1}{q}} = ab.$$

□

Teorema 4.9 (*Holder*)**.** *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números não negativos e $p, q > 1$, satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$ e $(y_1^q, y_2^q, \ldots, y_n^q)$ forem proporcionais.

Prova: Sejam $u = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ e $v = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Pela desigualdade de Young,

$$\frac{x_i}{u}\frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{u}\right)^q, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Isto implica em

$$\frac{1}{uv}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leq \frac{1}{pu^p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p\right) + \frac{1}{qv^q}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^q\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{uv}{pu^p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p\right) + \frac{uv}{qv^q}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^q\right) = \frac{uv}{p} + \frac{uv}{q} = uv.$$

□

Usando a desigualdade de Holder, podemos provar a seguinte desigualdade - devida a Minkowski - generalizando a desigualdade triangular.

Teorema 4.10 (*Minkowsky*)**.** *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números não negativos e $p > 1$, então*

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ forem proporcionais.

Prova: Para a demonstração desta desigualdade considere a identidade abaixo e nela façamos $z_i = (x_i + y_i)^{p-1}$. Então,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i.$$

Usando a desigualdade de Holder obtemos,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} =$$
$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right]^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] =$$
$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}}} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Donde,

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Problema 4.11. *Seja ABCDEFGH um cubo de aresta unitária. Determinar o menor perímetro do triângulo PQR, com P, Q e R, pertencentes, respectivamente, aos lados AB, CG, EH.*

Solução:

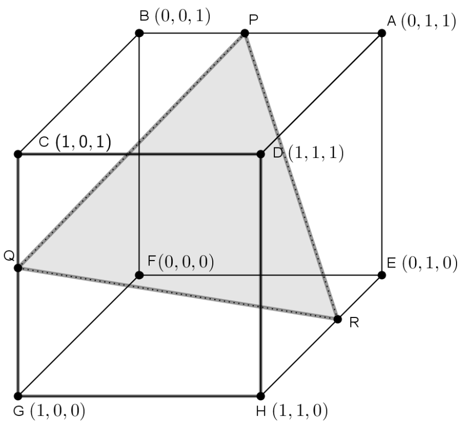


Figura 4.2: Cubo de aresta unitária

Considere, no sistema de coordenadas cartesianas, o ponto F do cubo coincidindo com a origem e os demais pontos como na figura. Vejamos ainda que

$$P = (0,c,1),\ Q = (1,0,a) \text{ e } R = (b,1,0), \text{ em que } 0 \leq a,b,c \leq 1.$$

Desse modo, deve-se estabelecer o valor do perímetro m (mínimo), tal que

$$m = \sqrt{a^2+(1-b)^2+1} + \sqrt{b^2+(1-c)^2+1} + \sqrt{c^2+(1-a)^2+1}.$$

Pela desigualdade de Minkowski

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} + \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2} + \sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2} \geq \sqrt{(x_1+y_1+z_1)^2+(x_2+y_2+z_2)^2+(x_3+y_3+z_3)^2},$$

com

$$(x_1,x_2,x_3) = (1,a,1-b),\ (y_1,y_2,y_3) = (1,b,1-c) \text{ e } (z_1,z_2,z_3) = (1,c,1-a),$$

chegamos a

$$m^2 \geq 9 + s^2 + (3-s)^2 = 2\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{2}, \text{ onde } s = a+b+c.$$

Desde que

$$2\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{2}$$

atinge seu valor mínimo quando $s = \dfrac{3}{2}$, tem-se $m^2 \geq \dfrac{27}{2}$. Isso tudo ocorrendo quando $a = b = c = \dfrac{1}{2}$. Assim, $m_{min} = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$. $\square$

Capítulo 5

Outras Aplicações

Nesta parte final, estabeleceremos mais quatro importantes aplicações envolvendo *desigualdades*.

De começo, com algumas ideias do Cálculo e claro, com o recurso das desigualdades, daremos uma bela demonstração da infinidade dos números primos.

Depois, com pouco mais que a desigualdade triangular e a enumeração de alguns conjuntos previamente construídos, estabeleceremos conclusões bastante atraentes da *Geometria Combinatória*.

A terceira das aplicações diz respeito à localização dos zeros de um polinômio. Neste sentido, procuraremos determinar um círculo de raio R (função dos coeficientes de $p(z)$) que contenha as raízes de $p(z)$, e mais, encontraremos um círculo de centro na origem e de determinado raio r (também função dos coeficientes de $p(z)$), cujas raízes são exteriores a tal círculo. Das duas desigualdades estabelecidas nas condições anteriores surgirá uma região anular que contém as raízes de $p(z)$.

Por fim, estabeleceremos algumas desigualdades ligadas ao conceito de *Normas de Matrizes* e veremos de que maneira poderemos aplicar tais resultados para medir o efeito de certas perturbações à matriz dos coeficientes de um sistema.

5.1 Desigualdades e a Infinidade dos Primos

Para ilustrar esta seção inicial do último capítulo rememoremos que é devido a Euclides o clássico resultado, usando ideia bastante simples e engenhosa, de que a lista de primos é infinita. No entanto, é preciso esclarecer que a literatura guarda outros brilhantes e rápidos argumentos sobre tal conclusão. Tais demonstrações perpassam a Teoria dos Números - com o uso dos *números de Fermat*, o Cálculo, a Análise e mesmo a Topologia. Reproduziremos aqui um argumento do Cálculo elementar que usa desigualdades e a ideia de definir o logaritmo natural como a área sob a hipérbole, ideia esta frequentemente utilizada neste estudo.

Com efeito, seja $\pi(x) := \sharp\{p \leq x; p \in \mathbb{P}\}$ a quantidade de primos que são menores ou iguais a x. Considere ainda $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ a lista ordenada crescentemente dos primos e o logaritmo natural de n definido como a área limitada pela curva $\frac{1}{x}$ e pelas retas $x = 1$ e $x = n$ acima do eixo OX.

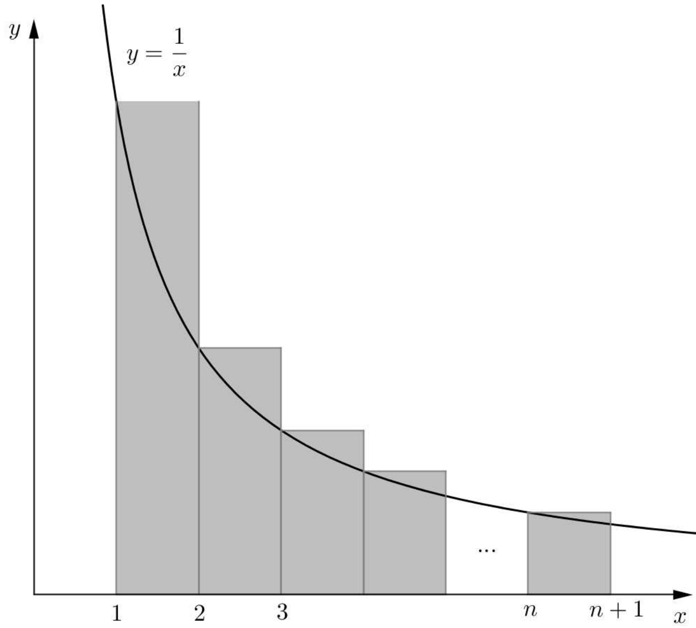


Figura 5.1: Função degrau superior

Comparemos a área sob o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ com a função degrau superior, de modo que vale

$$ln(x) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq \sum \frac{1}{m} \tag{5.1}$$

, com tal soma envolvendo os $m \in \mathbb{N}$ que possuem somente divisores primos $p \leq x$.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, cada m pode ser escrito de modo único como $\prod_{p \leq x} p^{k_p}$. Desse modo, a soma anterior pode ser reescrita como segue

$$\prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k} \right).$$

O termo entre parênteses, na expressão acima, é a soma dos termos de uma progressão geométrica, de modo que podemos reescrever em (5.1)

$$ln(x) \leq \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \left(\frac{p}{p-1} \right) = \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{p_k}{p_k - 1}.$$

Donde se conclui que $p_k \geq k + 1$; logo

$$\frac{p_k}{p_k - 1} = 1 + \frac{1}{p_k - 1} \leq 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}.$$

O que acarreta

$$ln(x) \leq \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{k+1}{k} = \pi(x) + 1.$$

Desse modo, como $ln(x)$ não é limitado, segue que $\pi(x)$ também não o é, e portanto, existe uma infinidade de primos. $\square$

5.2 Geometria Combinatória

A geometria combinatória é um ramo da Matemática relativamente novo e chama a atenção por preocupar-se com problemas aparentemente simples, mas cujas soluções exigem grande grau de sofisticação.

Nesta seção utilizaremos a desigualdade triangular para resolver três problemas ligados a esta área de estudos.

Problema 5.1. *Dados uma circunferência de centro O e raio igual a 1 e n pontos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$*, quaisquer no plano, mostre que existe um ponto M sobre essa circunferência tal que:*

$$\mid \overrightarrow{MA_1} \mid + \mid \overrightarrow{MA_2} \mid + \ldots + \mid \overrightarrow{MA_n} \mid \geq n$$

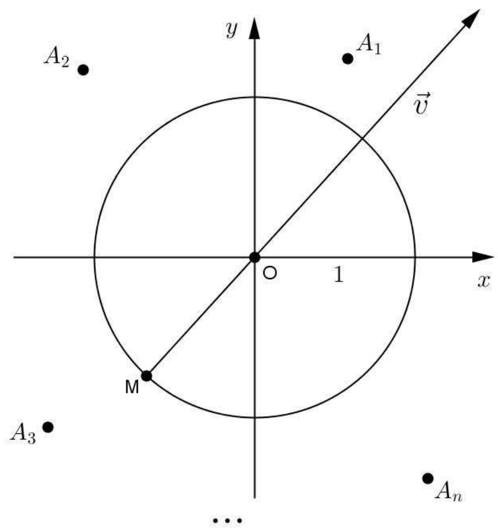


Figura 5.2: Circunferência de raio igual a 1

Solução: Observe, de início, que:

$$\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}.$$

De forma que

$$S = \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{MA_i}| = \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}|.$$

Da desigualdade triangular ($|a|+|b| \geq |a+b| \geq |a|-|b|$), chegamos a:

$$\begin{aligned} S &= |\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}| + |\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_2}| + \ldots + |\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_n}| \\ &\geq |\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_n}| \\ &= \left| n \cdot \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \right| \end{aligned}$$

Como a soma $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}$ é fixa, vamos chamar de $\vec{v}$. Queremos M tal que

$$|n \cdot \overrightarrow{MO} + \vec{v}| \geq n.$$

Perceba que se $\vec{v} = 0$, então basta tomar M qualquer ponto da circunferência unitária centrada no ponto O. Caso contrário, tomando M de tal modo que $\overrightarrow{MO}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos e tenham o mesmo sentido, chega-se a:

$$S \geq |n \cdot \overrightarrow{MO} + \vec{v}| = n + |\vec{v}| > n$$

□

Problema 5.2 (Ioguslávia)**.** *Seja M um polígono convexo de perímetro p. Prove que os lados de M podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos A_1 e A_2 tais que $|S(A_1) - S(A_2)| \leq \frac{p}{3}$, onde $S(A_j)$ denota a soma das distâncias das arestas pertencendo a A_j, $j = 1, 2$.*

Solução:

A desigualdade triangular garante que

$$a_1 < \underbrace{a_2 + a_3 + \ldots + a_n}_{p-a_1} \Rightarrow a_1 < \frac{p}{2}$$

Pensemos, então, em dois casos:

Caso 01: $\exists a_i$, tal que $\frac{p}{3} \leq a_i < \frac{p}{2}$

Suponha sem perda de generalidade

$$\frac{p}{3} \leq a_1 < \frac{p}{2}$$

Donde teremos $A_1 = \{a_1\}$ e $A_2 = \{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Portanto,

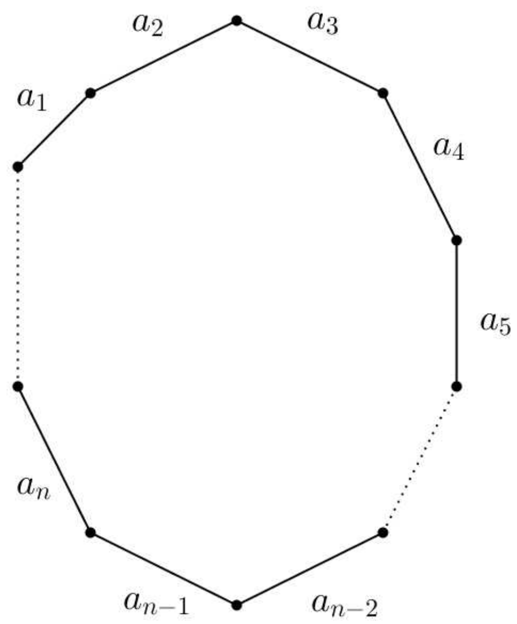


Figura 5.3: Polígono convexo de perímetro p

$$|S(A_1) - S(A_2)| = S(A_2) - S(A_1) \leq \frac{2p}{3} - \frac{p}{3} = \frac{p}{3}. \text{ [OK!]}$$

Caso 02: $a_i < \dfrac{p}{3}, \forall i$

Comecemos com o seguinte algoritmo: Ponha todos os lados em A_1: $\begin{cases} A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \\ A_2 = \{\} \end{cases}$

No passo i, todos os lados até a_i passam para o conjunto A_2:

passo 1: $\begin{cases} A_1 = \{a_2, a_3, \ldots, a_n\} \\ A_2 = \{a_1\} \end{cases}$

passo 2: $\begin{cases} A_1 = \{a_3, a_4, \ldots, a_n\} \\ A_2 = \{a_1, a_2\} \end{cases}$

....

passo n: $\begin{cases} A_1 = \{\} \\ A_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \end{cases}$

Seja $S_i = S(A_1) - S(A_2)$, no passo i: $S_0 = p, \ldots, S_n = -p$

Observe que S vai diminuindo:

$$\begin{cases} S_i = (a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_i) \\ S_{i+1} = (a_{i+2} + a_{i+3} + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{i+1}) \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações acima chegamos a

$$S_i - S_{i+1} = 2a_{i+1} < \frac{2p}{3}.$$

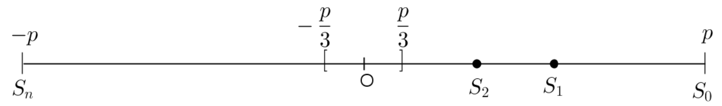


Figura 5.4: Existência de um S_i

Assim, necessariamente, teremos um S_i tal que $|S_i| \leq \dfrac{p}{3}$. $\square$

Problema 5.3. *No interior de um círculo de raio n, $n \in \mathbb{N}$, estão situados $4n$ segmentos de comprimento 1 cada. Prove que, dada uma reta arbitrária ℓ, existe uma reta ℓ', paralela ou perpendicular a ℓ, que tem um ponto em comum com pelo menos dois dos $4n$ segmentos dados.*

Solução: Tracemos o quadrado circunscrito com os lados paralelos e perpendiculares a ℓ. Para cada segmento a_i, $1 \leq i \leq 4n$, sejam x_i sua projeção sobre $\overline{AB}$ e y_i sua projeção sobre $\overline{AD}$. Pela desigualdade triangular,

$$x_i + y_i \geq |a_i| = 1.$$

Donde

$$\sum_{i=1}^{4n} x_i + y_i \geq 4n \Rightarrow \sum_{i=1}^{4n} x_i + \sum_{i=1}^{4n} y_i \geq 4n.$$

Sem perda de generalidade,

$$\sum_{i=1}^{4n} x_i \geq 2n.$$

Com efeito, se todos os $x_{i's}$ forem disjuntos teríamos:

$$2n = \overline{AB} > \sum_{i=1}^{4n} x_i \geq 2n. \text{ [Absurdo!]}$$

Logo, existem x_i e x_j com interseção.
Portanto, a paralela a ℓ por essa interseção deve cortar os segmentos a_i e a_j.
De forma análoga, se nossa hipótese fosse $\sum_{i=1}^{4n} y_i \geq 2n$, teríamos a perpendicular a ℓ. $\square$

5.3 Localização dos Zeros de um Polinômio

Iniciaremos agora com um teorema sobre polinômios de coeficiente dominante unitário e raízes reais. Tal teorema é uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz e visa a estabelecer limitantes para suas raízes, com tais limitantes sendo função dos coeficientes a_{n-1} e a_{n-2} e do grau do polinômio.

Teorema 5.4. *Seja $p(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_0$ um polinômio de raízes reais, assim suas raízes pertencem ao intervalo cujas extremidades são*

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} \cdot a_{n-2}}$$

Prova: Seja $(x-r)(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_{n-1})$ a forma fatorada do nosso polinômio $p(x)$; assim, pelas relações de Girard

$$-a_{n-1} = r + r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1} \text{ e}$$
$$a_{n-2} = r(r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}) + \sum_{i<j} r_i r_j.$$

Donde se conclui que

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - r^2 = \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz a $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ e $(1, 1, \ldots, 1)$, segue que

$$(a_{n-1} + r)^2 = (r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1})^2 \leq (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 = (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - r^2),$$

O que acarreta

$$r^2 + \frac{2a_{n-1}}{n} \cdot r + \frac{2(n-1)}{n} \cdot a_{n-2} - \frac{n-2}{n} \cdot a_{n-1}^2 \leq 0.$$

Portanto, todas as raízes de $p(x)$ estão entre as duas raízes da função quadrática acima. $\square$

Teorema 5.5. *Se $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ é um polinômio de coeficientes complexos e grau n, $A = max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n-1}|\}$ e $A' = max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$, então as raízes de $p(z)$ pertencem ao círculo de centro na origem e raio $R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$. Outrossim, tais raízes de $p(z)$ estão fora do círculo centrado na origem e raio $r = \frac{1}{1 + \frac{A'}{|a_0|}}$.*

Prova: Com efeito, para $|z|>1$, e utilizando-se da desigualdade triangular ($|a+b| \geq |a|-|b|$) aplicada em $p(z)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \geq \cdots \\
&\geq |a_n||z^n| - (|a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \\
&\geq |a_n||z|^n - A(|z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1) = |a_n||z|^n - A\left(\frac{|z|^n-1}{|z|-1}\right).
\end{aligned}$$

Mas veja que

$$|a_n||z|^n - A\left(\frac{|z|^n-1}{|z|-1}\right) = |a_n||z|^n - A\frac{|z|^n}{|z|-1} + A\frac{1}{|z|-1} > \left(|a_n| - \frac{A}{|z|-1}\right)|z|^n.$$

O que acarreta

$$|p(z)| > \left(|a_n| - \frac{A}{|z|-1}\right)|z|^n.$$

Desse modo, se $|z| > 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$, então $|p(z)| > 0$, ou seja, $p(z)$ nunca se anulará para todo $|z| > 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$.

Logo, se z_0 é uma raiz qualquer de $p(z)$, tem-se

$$|z| < 1 + \frac{A}{|a_n|} \tag{5.2}$$

.

Ademais, seja $x = \dfrac{1}{z}$. Assim,

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = a_n\frac{1}{x^n} + a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{1}{x} + a_0.$$

Tome $q(x) := x^n p_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Daí,

$$\begin{aligned}
q(x) &= x^n\left(a_n\frac{1}{x^n} + a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{1}{x} + a_0\right) \\
&= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n
\end{aligned}$$

Do resultado (5.2) segue que se x_0 é um zero de q, então

$$|x_0| < 1 + \frac{A'}{|a_0|} \Rightarrow |\frac{1}{z}| < 1 + \frac{A'}{|a_0|}.$$

Assim, considerando $z_k \neq 0$ um zero de $q(z)$ e, portanto, $\dfrac{1}{z_k}$ um zero de $p(z)$, obtém-se que

$$|z_k| > 1 + \frac{A'}{|a_0|} \tag{5.3}$$

.

De (5.2) e (5.3) conclui-se que todos os zeros de $p(z)$ estão localizados na região anular

$$S = \{z \in \mathbb{C}; r < |z| < R\},$$

onde

$$r = \frac{1}{1 + \dfrac{A'}{|a_0|}} \text{ e } R = 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

Teorema 5.6. *Seja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ um polinômio de coeficientes reais e grau n, tal que $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots a_1 \geq a_0$, com $a_0 \cdot a_n \neq 0$. Então, todos os zeros de $p(z)$ pertencem ao círculo determinado por $|z| \leq \dfrac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}$.*

Prova:

Considere a identidade

$$r(z) := z^n q\left(\frac{1}{z}\right) \tag{5.4}$$

onde

$$q(z) = a_n z^{n+1} + (1-z)p(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |r(z)| = \left|z^n q\left(\frac{1}{z}\right)\right| &= \left|a_0 z^n + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^{n-k}\right| \\ &\leq |a_0||z|^n + \left|\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^{n-k}\right| \\ &\leq |a_0||z|^n + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \cdot |z|^{n-k}. \end{aligned}$$

Logo, para $|z| \leq 1$, temos

$$|r(z)| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = |a_0| + a_n - a_0.$$

Utilizando a identidade (5.4) na desigualdade acima, chegamos a:

$$\left|q\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|z|^n}.$$

Isto acarreta em

$$|q(z)| \leq (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n, \text{ com } |z| \geq 1.$$

Nesta mesma condição, ou seja, $|z| \geq 1$, e utilizando a desigualdade triangular ($|a+b| \geq |a| - |b|$) aplicada em $|(z-1)p(z)|$ conclui-se que

$$\begin{aligned}
|(z-1)p(z)| &= |a_n z^{n+1} - q(z)| \\
&\geq |a_n||z|^{n+1} - |q(z)| \\
&\geq |a_n||z|^{n+1} - (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n \\
&= |a_n||z|^n \left[|z| - \left(\frac{(|a_0| - a_n + a_0)}{|a_n|} \right) \right].
\end{aligned}$$

Desde que $a_n \geq a_0$, tem-se $|a_n - a_0| = a_n - a_0$, portanto

$$r = \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \geq 1.$$

Veja ainda que para $|z| > r$, teríamos $|(z-1)p(z)| > 0$ e $p(z)$ não possuiria raízes em $|z| > r$. Isto significa que as raízes do polinômio encontram-se em $|z| \leq r$. $\square$

5.4 Normas de Matrizes

A ideia aqui é tentar quantificar, como já havíamos adiantado antes, o efeito que pequenas perturbações na matriz de coeficientes de um sistema irão provocar na solução de tal sistema. Faremos isto aferindo a sensibilidade desse sistema a essas variações através de seu *número condicional*, conceito este intrinsecamente ligado à ideia da *norma de matrizes*.

De forma geral, a norma de um vetor v - de um **espaço vetorial normado V**- é o número real ||**v**|| que satisfaz as propriedades:

(i) $||\mathbf{v}|| \geq 0$, com a igualdade ocorrendo somente para o caso de $\mathbf{v} = 0$;

(ii) $||\alpha\mathbf{v}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{v}||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. (desigualdade triangular)

Relacionaremos pelo teorema que segue as noções de *norma* com *produto interno*.

Teorema 5.7. *Se V é um espaço vetorial munido de produto interno, então:*

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \forall v \in V,$$

é uma norma em V.

Prova:

(i) $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \Longleftrightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$;

(ii) $||\alpha v|| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\alpha| \cdot ||v||$;

(iii) $||u+v||^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \overset{Cauchy}{\leq} ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2 \therefore ||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$.

No entanto, há diversas outras formas de definir normas. Vejamos isto para o caso de vetores em $\mathbb{R}^n$:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$
$$||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|, \text{ (\textit{norma uniforme})},$$

ou, em geral,

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Esta última é particularmente comum para $p = 2$,

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

.

Agora, para o caso do espaço das matrizes, considere a norma definida como segue - chamada de Frobenius[1]:

$$||A||_F = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Antes de irmos às suas propriedades, primeiro justifiquemos que, de fato, esta definição obedece às condições para uma *norma*.

De fato, pode-se observar que as 3 (três) primeiras condições são satisfeitas, a julgar por esta *norma* puder ser vista como uma norma no espaço euclidiano.

Vamos mostrar agora a condição de consistência, a saber,

$$||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

Com efeito, tomemos $C = AB$. Assim,

$$||AB||_F^2 = ||C||_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, chega-se a

$$||AB||_F^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2\right).$$

Que é o mesmo que

$$||A \cdot B||_F^2 \leq ||A||_F^2 \cdot ||B||_F^2.$$

□

São propriedades da norma de Frobenius:

[1] A norma de Frobenius define na verdade uma família de normas de matrizes, pois é uma norma em $\mathbb{R}^{m\times n}$, para qualquer seleção de m e n.

F_1**:** $||A||_F = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} ||a_j||_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$, onde a_j: j-ésima coluna de A;

F_2**:** $||A||_F = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{m} ||a(i,:)^T||_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$, onde $a(i,:)$: i-ésima linha de A;

F_3**:** $||Ax||_2 = \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \overset{Cauchy}{\leq} \left[\sum_{i=1}^{m} ||x||_2^2||a(i,:)^T||_2^2\right]^{\frac{1}{2}} = ||A||_F||x||_2$, com $x \in \mathbb{R}^n$;

F_4**:**

$$\begin{aligned} ||AB||_F &= ||(Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_r)||_F = \left(\sum_{i=1}^{r} ||Ab_i||_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ||A||_F \left(\sum_{i=1}^{r} ||b_i||_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||A||_F \cdot ||B||_F, \text{ onde } B_{n\times r} = (b_1, b_2, \ldots, b_r) \end{aligned}$$

.

Como a norma de Frobenius satisfaz as três condições gerais da definição de norma e, além disso, satisfaz Cauchy-Schwarz (por [F_4]):

(i) $||A^n|| \leq ||A||^n$ e,

(ii) se $||A|| < 1$, então $||A^n|| \to 0$ quando $n \to \infty$.

É oportuno também salientar que uma norma matricial $||\cdot||_M$ em $\mathbb{R}^{m\times n}$ é *compatível* com a norma vetorial $||\cdot||_V$ em $\mathbb{R}^n$ quando ocorrer:

$$||Ax||_V \leq ||A||_M \cdot ||x||_V, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Considere, além do mais, a *norma de operador*

$$||A|| = max\frac{||Ax||}{||x||}, x \neq 0.$$

e a existência de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que maximiza $||A||$.

Por questões de conveniência, recorreremos ao cálculo da norma de A utilizando

$$||A||_1 = max\frac{||Ax||_1}{||x||_1} \text{ e } ||A||_\infty = max\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty}$$

em detrimento de $||A||_2$, por exemplo.

O Teorema seguinte sugere uma forma razoável de como proceder nos dois casos sobreditos.

Teorema 5.8. *Seja a matriz $A_{m\times n}$, então:*

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right) \tag{5.1}$$

e

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) \tag{5.2}$$

Prova: Provaremos somente (5.1); uma vez que (5.2) é análoga. Seja

$$\alpha = max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| = \sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|$$

onde k representa o número da coluna onde ocorre o valor máximo. Tem-se que

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j\right)^T$$

donde,

$$||Ax||_1 = \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^{n}\left(|x_j|\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right) \leq \alpha\cdot\sum_{j=1}^{n}|x_j| = \alpha\cdot||x||_1$$

De modo que,

$$\frac{||Ax||_1}{||x||_1} \leq \alpha \Rightarrow ||A||_1 = max\frac{||Ax||_1}{||x||_1} \leq \alpha \tag{5.3}$$

Vale também que,

$$||Ae_k||_1 = ||a_k||_1 = \alpha, \text{ com } ||e_k|| = 1.$$

De tudo isto chegamos a,

$$||A||_1 = max\frac{||Ax||_1}{||x||_1} \geq \frac{||Ae_k||_1}{||e_k||_1} = \alpha. \tag{5.4}$$

De (5.3) e (5.4)

$$||A||_1 = \alpha$$

□

Agora estamos prontos para falar sobre o condicionamento de uma matriz e estabelecermos uma desigualdade que nos dirá algo sobre como se comporta (ou não) a solução de um sistema ao alterar levemente sua matriz de coeficientes.

Por definição, diremos que uma matriz é *bem condicionada* quando pequenas alterações em seus elementos não provocarem grandes mudanças na solução de $Ax = b$, em caso contrário ela será dita *mal condicionada*. A análise desta situação, é, na prática, muito importante, pois a coleta de dados no mundo real é bastante imprecisa e contém erros de natureza intrínseca.

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz invertível de tal forma que $Ax = b$. Chamemos de x a solução exata deste sistema e x' uma solução aproximada, de forma que o vetor $e = x - x'$ será o erro da solução. Além disso, $||e||$ e $\dfrac{||e||}{||x||}$ serão, respectivamente, o erro absoluto e o erro relativo de nossa solução. Para avaliar o que representa a solução aproximada x' podemos substituí-la no sistema original e observar a diferença entre $b' = Ax'$ e b, de forma que o vetor $r = b - b' = b - Ax'$ poderá ser calculado sem maiores problemas.

O *resíduo relativo* $\dfrac{||b - Ax'||}{||b||} = \dfrac{||r||}{||b||}$ assim, poderá ou não, ser uma boa estimativa para o erro relativo; o que dependerá fundamentalmente do condicionamento de A. Isto ocorrerá da seguinte maneira: “se A for mal condicionada, o resíduo relativo pode ser muito menor do que o erro relativo. Por outro lado, para matrizes bem condicionadas, o erro relativo e o resíduo relativo são bastante próximos” (LEON, 1998, p. 304).

Ora,

$$r = b - Ax' = Ax - Ax' = Ae \Rightarrow e = A^{-1}r$$

Tem-se por resultado anterior que,

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$$

De forma que,

$$||e|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||r|| \text{ e } ||r|| = ||Ae|| \leq ||A|| \cdot ||e||$$

Das duas últimas desigualdades acima, conclui-se que

$$\frac{||r||}{||A||} \leq ||e|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||r|| \tag{5.9}$$

.

Neste último resultado, dado que $Ax = b$ e $x = A^{-1}b$, chega-se a

$$\frac{||b||}{||A||} \leq ||x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||r|| \tag{5.10}$$

.

Dividindo (5.9) por (5.10),

$$\frac{1}{||A|| \cdot ||A^{-1}||}\frac{||r||}{||b||} \leq \frac{||e||}{||x||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}||\frac{||r||}{||b||}$$

Fazendo $||A|| \cdot ||A^{-1}|| = cond(A)$ (número condicional de A) na desigualdade acima

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{||r||}{||b||} \leq \frac{||e||}{||x||} \leq cond(A)\frac{||r||}{||b||}$$

Perceba que se $cond(A)$ estiver próximo de 1, o erro relativo e o resíduo relativo estarão próximos e, ao contrário, se $cond(A)$ "for grande, o erro relativo pode ser muitas vezes maior do que o resíduo relativo" (LEON, 1998, p. 305).

Exemplo 1:

(LEON, 1998) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

e assim

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, $||A||_\infty = 9$ e $||A^{-1}||_\infty = \dfrac{8}{3}$.

Logo,

$$cond_\infty(A) = 9 \cdot \frac{8}{3} = 24.$$

$\square$

Exemplo 2:

(LEON, 1998) Supondo $x' = (2,0;0,1)^T$ a solução do sistema $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 = 9 \end{cases}$ determinar o resíduo r e o resíduo relativo $\dfrac{||r||_\infty}{||b||_\infty}$.

Solução:

$$r = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,0 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ e } \frac{||r||_\infty}{||b||_\infty} = \frac{0,5}{9} = \frac{1}{18}.$$

$\square$

Veja no **Exemplo 1** que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é solução, o erro é dado por

$$e = x - x' = \begin{pmatrix} -1,0 \\ 0,9 \end{pmatrix},$$

com erro relativo

$$\frac{||e||_\infty}{||x||_\infty} = \frac{1,0}{1}$$

sendo 18 vezes o resíduo relativo.

O que não surpreende, pois o $cond(A) = 24$.

Capítulo 6

Conclusões

O enfoque dado aqui ao tema “desigualdades”, abordando-o do ponto de vista de sua aplicabilidade, propõe ser uma estratégia de atrair mais a atenção do aprendente, bem como de minorar o efeito devastador que abordagens pouco significativas causam no processo ensino-aprendizagem.

É pertinente, outrossim, para dar força a uma discussão, muitas vezes latente, de se montar uma nova matriz curricular para o ensino médio, abandonando o que é, muitas vezes, desnecessário, e fazendo-se a opção correta de trabalharmos uma matemática mais provocadora, prática e instigante. Neste tocante, o tópico em tela, por toda a construção feita neste TCC, mesmo de forma incipiente ou como mero embrião, é bastante construtivo do ponto de vista de toda a gama de possibilidades que sugere.

Favorece, ademais, uma mudança na ordem com a qual trabalhamos metodologicamente os conceitos em sala de aula. Sugere-se mudar, pelo menos no ensino básico, a maneira como são desenvolvidas as ideias, pois muitas vezes falamos sobre o geral para em seguida particularizar ou dá os exemplos, tão necessários à significação do que pretendemos desenvolver.

Soma-se a isso tudo a observação de o manancial de autores e livros versando sobre desigualdades ser extremamente grande e variado. Bem verdade que tal material está muito frequentemente escrito em língua estrangeira, o que não podemos deixar ser argumento para desencorajar a atitude de trabalhá-lo.

Finalmente, deixar consignada a enorme satisfação e o prazer que a pesquisa de um tema tão rico pode nos favorecer como vetor formador de nossa visão sobre a sublime ciência Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. *Mathematical Olympiad Challenges*. New York, Birkhäuser, 2000.

[2] AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter M. *As provas estão n'O LIVRO*. São Paulo, Edgard Blücher, 2002.

[3] BARBEAU, Edward J.; KLAMKIN, Murray S.; MOSER, William O. J. *Five Hundred Mathematical Challenges*. Washington/DC, MAA, 1995.

[4] BECKENBACH, Edwin; BELLMAN, Richard. *An Introduction to Inequalities*. New York, Random House, 1961.

[5] BULLEN, P. S.; MITRINOVICS, D. S.; VASIC, P. M. *Means and their Inequalities*. Dordrecht, Reidel, 1988.

[6] CAMPELO, Alexandre Francisco. *A Desigualdade Triangular e a Desigualdade de Jensen*. Fortaleza, UFC, 2013. Disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertações>. Acesso em 19 out 2015.

[7] CARNEIRO, Emanuel; DE PAIVA, Francisco Antônio M.; CAMPOS, Onofe. *Olimpíadas Cearenses de Matemática: Ensino Médio 1981–2005*. Fortaleza, Realce, 2006.

[8] CARVALHO, Valessa Z. F. Sousa. *Funções Convexas com Aplicações em Problemas de Olimpíadas de Matemática*. Teresina, UFPI, 2013. Disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertações>. Acesso em 19 out 2015.

[9] ENGEL, Arthur. *Problem-Solving Strategies*. New York, Springer, 1998.

[10] FAURING, Patricia; GUTIÉRREZ, Flora; PETRAZA, Juan Carlos. *Olimpíadas Internacionales: Problemas de Entrenamiento 2*. Buenos Aires, Red Olímpica, 2003.

[11] FAURING, Patricia; GUTIÉRREZ, Flora; SAVCHEV, Svetoslav. *Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática 1996-2006*. Buenos Aires, Red Olímpica, 2007.

[12] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. *Mathematical Circles (Russian Experience*. USA, AMS, 1996.

[13] HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, George. *Inequalities*. Cambridge, Cambridge University Press, 1952.

[14] HONSBERGER. *More Mathematical Morsels*. USA, MAA, 1991.

[15] GELSON. *Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria*, vol. 3. São Paulo, Atual, 1993.

[16] KLAMKIN, Murray S. *USA Mathematical Olympiads 1972-1986*, vol. 33. Washington/DC, MAA, 1988.

[17] KOROVKIN, P. P. *Inequalities*, vol. 33. Moscow, Mir Publishers, 1975.

[18] LANDAU, Edmund. *Elementary Number Theory*. New York, Chelsea Publishing, 1958.

[19] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*, vol. 1. São Paulo, Harbra, 1990.

[20] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações*. Rio de Janeiro, LTC Editora, 1998.

[21] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, SBM, 1991.

[22] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*, vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro, IMPA, 2002.

[23] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[24] LOZANSKY, Edward; ROUSSEAU, Cecil. *Winning Solutions*. New York, Springer-Verlag, 1996.

[25] MEGA, Élio; WATANABE, Renate. *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 1a. a 8a. (problemas e resoluções)*. São Paulo, Atual Editora, 1995.

[26] MENEZES, Alessandro Monteiro de. *O Uso de Desigualdades na Resolução de Problemas*. Manaus, UFAM, 2014. Disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertações>. Acesso em 19 out 2015.

[27] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática Discreta*, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

[28] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais*, vol. 1. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

[29] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Geometria*, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

[30] MARQUES, Larissa Ferreira. *Zeros de Polinômios Perturbados*. Presidente Prudente, UESP, 2013. Disponível em <http://repositorio.unesp.br>. Acesso em 19 out 2015.

[31] Normas da ABNT – NBR 6023: *Elaboração de referências*, (2000). Disponível em <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/RegulamentoseNormas/ABNT-NBR6023.pdf>. Acesso em 19 out 2015.

[32] NOBLE, Ben; DANIEL, James W. *Álgebra Linear Aplicada*. New Jersey, Prentice-Hall, 1977.

[33] POSAMENTIER, Alfred S.; SALKIND, Charles T. *Challenging Problems in Algebra*. Ney York, Dover Publications, 1988.

[34] RADULESCU, Teodora-Liliana T.; RADULESCU, Vicentiu D.; ANDREESCU, Titu. *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis*. New York, Springer, 2009.

[35] RPM: Revista do Professor de Matemática, n. 05, 15, 17, 18, 20, 27, 28, 29, 31. Rio de Janeiro, SBM.

[36] SANTOS, Iguer Luis Domini dos; SILVA, Geraldo Nunes. *Zeros de Polinômios*. Rio de Janeiro, UFRJ, s/a. Disponível em <http://www2.peq.coppe.ufrj.br>. Acesso em 19 out 2015.

[37] SAVCHEV, Svetoslav; ANDREESCU, Titu. *Mathematical miniatures*. Washington/DC, MAA, 2003.

[38] STEELE, J. Michael. *The Cauchy-Schwarz Master Class*. USA, MAA, 2004.

[39] STEWART, Ian. *Incríveis passatempos matemáticos*. Rio de Janeiro, Zahar, 2010.

[40] VELAME, Gabriel Carvalho. *Uma Abordagem sobre Desigualdades e suas Aplicações*. Cruz das Almas, Universidade Federal do Recôncavo Bahiano, 2014. Disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertações>. Acesso em 19 out 2015.

[41] ZAWAIRA, Alexander; HITCHCOCK, Gavin. *A Primer for Mathematics Competitions*. New York, Oxford University Press, 2009.

[42] ZEITZ, Paul. *The Art and Craft of Problem Solving*. USA, John Wiley & Sons, 1999.

Apêndice A

Desigualdade MA–MG

Neste Apêndice apresentaremos mais uma demonstração da desigualdade *MA–MG* (*generalizada*).

Conforme antecipamos na Seção 3.4, p. 52, tal demonstração é devida ao grande matemático francês Augustin-Louis Cauchy, responsável direto pelo rigor na *Análise*, típico da matemática moderna.

A estratégia desta demonstração baseia-se no Princípio da Indução Finita e consta de duas partes: na primeira delas, considera-se uma quantidade de termos que seja potência de 2, a próxima parte da prova é estender a validade de *MA–MG* para qualquer quantidade de termos, aplicando-se para isso a desigualdade para uma quantidade n (que não seja uma potência de 2) de números positivos e $2^k - n$ cópias da média geométrica de tais n números.

Mas antes de irmos às contas, enunciaremos mais uma vez o **Teorema** *MA–MG* (*generalizado*).

Teorema A.1 ($M_A \geq M_G$)**.** *Se a_1, a_2, …, a_n são números reais positivos e MA e MG, são suas médias aritmética e geométrica, então*

$$M_A \geq M_G.$$

Além do mais, a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Prova:

Devemos provar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Faremos a prova em dois passos:

(i) $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \Leftrightarrow n=2^k (k\in\mathbb{N})$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

(ii) a desigualdade é verdadeira para qualquer quantidade de números, e a igualdade ocorre se, e só se, $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Prova de (i): Usaremos indução sobre $k\geq 1$, e consideremos $n=2^k$ a quantidade dos números em que aplicaremos nossas médias.

1^o Passo: Caso Inicial

Para $k=1$, $(n=2)$, temos

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0,$$

o que é verdade. E mais: $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2=0 \Leftrightarrow a_1=a_2$.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponha que (i) seja verdade, ou seja, que para $n=2^k$ números positivos ocorra

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}, \text{ com } n=2^k.$$

3^o Passo: Passo Indutivo

Vejamos o que ocorre para n^{k+1} números:

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n})}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}+\frac{\sum\limits_{i=n+1}^{2n}a_i}{n}\right] \geq$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=n+1}^{2n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right] \geq \left[\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\prod_{i=n+1}^{2n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\prod_{i=1}^{2n}a_i\right)\right]^{\frac{1}{2n}}.$$

Para haver igualdade, devemos ter igualdade em todas as passagens. Assim, deve ocorrer

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n},$$
$$\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n} = \sqrt[n]{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot\ldots\cdot a_{2n}}$$
$$\text{e } \frac{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}+\sqrt[n]{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot\ldots\cdot a_{2n}}}{2} = \sqrt[2n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot\ldots\cdot a_{2n}}.$$

Para as duas primeiras igualdades, a hipótese garante que

$$a_1=a_2=\ldots=a_n \text{ e } a_{n+1}=a_{n+2}=\ldots=a_{2n}.$$

Já a última igualdade ocorre se, e somente se,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}.$$

Estas duas condições juntas implicam que devemos ter

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{2n}.$$

É também evidente que se os números forem todos iguais a igualdade está garantida.

Prova de (ii): Seja agora $n > 1$ um natural qualquer e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos.
Tome k de tal maneira que $2^k > n$.
Aplicando $M_A \geq M_G$ para os n números $\{a_1, \ldots, a_n\}$ e $2^k - n$ cópias de $a = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, obtemos

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n + a + \ldots + a}{2^k} \geq = \sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a^{2^k - n}} = \sqrt[2^k]{a^n \cdot a^{2^k - n}} = a \Rightarrow$$
$$a_1 + \ldots + a_n + (2^k - n) \cdot a \geq 2^k a \Rightarrow \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq a = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Para haver igualdade, pelo item (i), deve ocorrer

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a = \ldots = a.$$

Em particular, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
Evidentemente, se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ vale a igualdade. □