



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIDADE DE FÍSICA ACADÊMICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estrelas de Solitons Oscilantes com Rede de Paredes de Domínios

STEPHEN OWUSU

CAMPINA GRANDE

-FEVEREIRO 2017-

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIDADE DE FÍSICA ACADÊMICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estrelas de Solitons Oscilantes com Rede de Paredes de Domínios

STEPHEN OWUSU

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física da Universidade
Federal de Campina Grande, como requisito
para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de
Brito

CAMPINA GRANDE

-FEVEREIRO 2017-

O97e Owusu, Stephen.
 Estrelas de solitons oscilantes com rede de paredes de domínios /
 Stephen Owusu. – Campina Grande, 2017.
 70 f. : il. color.

 Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina
 Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
 "Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito".
 Referências.

 1. Física. 2. Estrelas de Solitons Oscilantes. 3. Redes de Paredes de
 Domínios. 4. Einstein-Klein-Gordon. I. Brito, Francisco de Assis.
 II. Título.

CDU 539.12-12(043)

STEPHEN OWUSU

ESTRELAS DE SÓLITONS OSCILANTES COM REDE DE PAREDES DE DOMÍNIOS

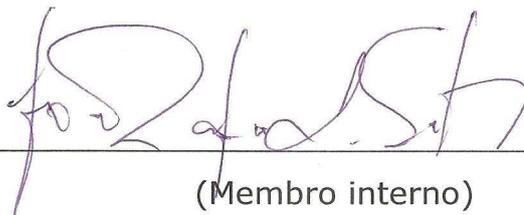
Dissertação aprovada em 23/02/2017

BANCA EXAMINADORA



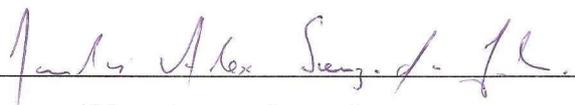
(Presidente)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – CG

AGRADECIMENTOS

A Deus por sua força e orientação ao longo de todo o meu trabalho.

Ao Prof. Dr. Francisco de Assis Brito, por sua orientação, assistência necessária e por trabalhar ativamente para garantir que chegássemos aos objetivos desta pesquisa.

À minha família, especialmente aos meus pais, Sr. e Sra. Owusu, pelo seu amor, orientação e encorajamento ao longo da minha vida. Aos meus irmãos, Benjamin, Esther e Samuel por fornecerem uma inspiração sem fim.

Aos professores e funcionários de Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande por sua colaboração. Aos colegas estudantes de Mestrado, pela cooperação e amizade.

Aos meus irmãos de Gana, Patrick, Salomão, Ebenezer, Maxwell, Adamu, Bismark, Proper, Vera e Elijah, ao apoio durante esta jornada acadêmica, obrigado.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer à CAPES pelo seu apoio financeiro.

Sumário

1	Introdução	1
2	Quebra Espontânea de Simetria e Defeito Topológico	5
2.1	Equação de Klein-Gordon (EKG)	5
2.2	Quebra Espontânea de Simetria	6
2.2.1	Simetria $U(1)$	7
2.3	Transição de Fase	9
2.3.1	Quebra espontânea de simetria relacionada à transição de fase térmica	11
2.3.2	Campo escalar real	12
2.4	Paredes de Domínios	14
2.5	Energia da Parede (Método de Bogomol'nyi)	18
2.6	Paredes dentro das Paredes	20
3	Estrelas de Solitons Oscilantes	24
3.1	Equações de Campo de Einstein	24
3.2	Equações de Einstein com Matéria	26
3.3	Equação de Klein-Gordon no Campo Gravitacional	27
3.4	O Modelo	28
3.4.1	Problema do autovalor e condições de contorno para configurações de equilíbrio	31

4	Estrelas de Soliton Oscilantes com Rede de Paredes de Domínios	35
4.1	O Modelo	35
4.1.1	Escolhendo o potencial apropriado	37
4.2	Equações de Einstein-Klein-Gordon para três campos escalares	39
4.2.1	Equações de Einstein	39
4.2.2	Equações de Klein-Gordon	41
4.3	Análise numérica	43
4.3.1	Caso 1. Perturbações do potencial	44
4.3.2	Caso 2. Perturbações da concha da estrela	53
5	Discussões e Conclusões	63

Resumo

As estrelas de solitons oscilantes (também conhecidas como "oscillatons"), isto é, os objetos auto-gravitantes, descritos por uma solução solitônica do sistema acoplado de equações de Einstein-Klein-Gordon (EKG) foram estudadas por muitos autores. As "Oscillatons" podem ser classificadas em dois ramos, o ramo estável e o instável. O ramo estável é a parte em que a estrela atingiu a massa crítica (limite de massa superior M_c), após esta massa crítica a estrela entra em regime de instabilidade. Neste regime ocorre o colapso gravitacional e a fase final deste colapso é a formação de um buraco negro. Neste trabalho estudamos os "Oscillatons" com rede de paredes de domínios. Consideramos uma Lagrangeana com três campos escalares reais acoplados via potencial escalar. Nós escolhemos um potencial apropriado para suportar a formação de rede de paredes de domínios com as "oscillatons". Com pequenas perturbações aplicadas a este potencial, calculamos numericamente as equações de EKG e analisamos o perfil de massa desse novo objeto. Desse resultado discutimos como a estabilidade das "oscillatons" são afetadas pela rede.

Palavras-chave: Estrelas de solitons oscilantes; Einstein-Klein-Gordon; Rede de paredes de domínios.

Abstract

Oscillating soliton stars (also known as oscillatons) i.e self-gravitating objects, described by a solitonic solution to the coupled system of Einstein-Klein-Gordon equations (EKG) have been studied by numerous authors. Oscillatons can be classified into two branches, the stable and unstable branch. The stable branch is the part where the star has not yet reach a critical mass (upper mass limit M_c), after this critical mass the star enters a regime of instability, in this regime gravitational collapse occurs and final stage of this collapse is the formation of a black hole. In this work we study oscillatons with network of domain walls. We consider a Lagrangian with three scalar fields coupled among themselves by a potential. We choose an appropriate potential to admit the formation of network of domain walls with the oscillatons. With small perturbations applied to this potential, we then compute the EKG equations numerically and analyze the mass profile of this new object. From this results we discuss how the stability of the oscillatons are affected by the network.

Keywords: Oscillating soliton stars; Einstein-Klein-Gordon; Network of domain walls

Capítulo 1

Introdução

Uma nova classe de objetos astronômicos foi proposta por Friedberg, Lee e Pang (1987) e chamou estes objetos estrelas de solitons [1, 2, 3]. Estrelas de solitons são objetos de interesse porque exibem algumas propriedades notáveis. De acordo com a Relatividade Geral, se uma estrela se torna maciça (M) o suficiente, ou captação de matéria maior que um valor crítico M_c , a estrela sofre processos violentos, ou expulsa parte de sua massa e tornam-se numa estrela de nêutrons ou numa anã branca com $M < M_c$, ou colapsa em um buraco negro. Estrela fria ordinária como uma anã branca ou estrela de nêutrons não podem ter massa maior que cinco massas solares ($5M_\odot$ com momento angular zero) [4, 5]. Por outro lado, é muito interessante saber que uma estrela solitônica é um tipo de configuração que pode ter uma grande massa ($> 5M_\odot$), um volume muito pequeno e uma densidade muito alta. Por exemplo, uma estrela mini-soliton poderia ter um raio de $6 \times 10^{10} cm$, com uma massa de $10^{10} kg$ e uma densidade de 10^{41} vezes a de uma estrela de nêutrons [6]. A possibilidade da existência de tal objeto em um universo primitivo, pode levá-lo a ser um bom candidato de semente primordial de estruturas galácticas. De acordo com a teoria do Big Bang, o universo primitivo estava em condições de alta temperatura e alta densidade. É de interesse estender nossas discussões sobre estrelas de solitons para incluir temperatura finita e investigar a época em que estrelas de solitons podem ocorrer. É um fenômeno bem conhecido que abaixo de uma determinada temperatura crítica (T_c),

a simetria de um campo escalar é espontaneamente quebrada, e esta simetria quebrada é restaurada em uma temperatura acima da temperatura crítica. A condensação de um campo escalar numa transição de uma fase simétrica $\langle\phi\rangle = 0$ para o vácuo físico onde $\langle\phi\rangle \neq 0$, tem sido descrita essencialmente como um fenômeno clássico em termos de um potencial clássico (veja um exemplo sobre este tópico no capítulo 2). Quando a simetria discreta é espontaneamente quebrada, por exemplo simetria Z_2 , uma parede de domínios pode se formar. Para outras simetrias Z_N , com $N > 2$ temos uma possibilidade de ter interseção de paredes de domínios formando junções e, em seguida, rede de paredes de domínios. No contexto da estrela de solitons existe uma possibilidade de esta rede de parede de domínios ser aprisionada em sua superfície [7]. Foi considerada a possibilidade de paredes esféricas bidimensionais para capturar segmentos de parede que formam uma rede. Esta possibilidade dá origem a uma rede de paredes de domínios na superfície da estrela de solitons. Isto é possível quando se considera um modelo de três campos escalares reais.

Vamos considerar a extensão da estrela solitônica via inclusão da gravidade e considerando tanto a geometria do espaço-tempo quanto o campo de matéria oscilando no tempo. Tem sido desde há muito conhecido que as teorias de campo clássicos admitem solução não-topológica, ou seja, soluções que têm massas não nulas finitas, confinada às regiões finitas de espaço para todos os tempos, livres de singularidade, e que não são topológicas [8]. A condição necessária para a existência de um soliton não-topológico é que deve haver uma lei de conservação aditiva. As condições de contorno no infinito são as mesmas para o estado de vácuo. Por causa da ausência de topologia não-trivial, a estabilidade de solitons não-topológicos depende de qual é tipo de solução com energia mais baixa. Nos últimos tempos, uma grande atenção foi dedicada a essas soluções no problema da matéria escura na cosmologia. A natureza da matéria escura, que representa a maioria da massa no Universo, é um dos principais problemas pendentes da astrofísica moderna. Ainda que freqüentemente assumido que a matéria escura não colide, não

há nenhuma razão a priori para acreditar que este é o caso. (ver por exemplo, Spergel e Steinhardt 2000). Também há uma forte indicação de que uma matéria escura é não-bariônica. À luz disto, vários tipos de campos não-bariônicos para vários tipos de sistemas, solitons não-topológicos foram propostos e estudados para suas funções astrofísicas. Estes incluem Q-bolas [9], estrelas de solitons escalares e estrelas de boson [10]. São configurações formadas por campos escalares complexos, através de acoplamentos não-lineares de campo escalar e outros campos de matéria ou gravidade. Modelos de teoria de campos não-lineares têm uma estrutura muito rica. A teoria do campo escalar, com apenas acoplamentos lineares admite apenas soluções de onda plana. Para que as soluções de soliton possam existir nas teorias clássicas de campo, deve haver a possibilidade de existência de correntes de Noether conservadas. Nos casos apresentados acima, a corrente conservada é resultado da simetria global $U(1)$ dos campos complexos. Mas no caso do campo escalar real, devido à ausência de tal simetria não há solução de soliton não-topológico. Pode-se mostrar que um campo escalar real maciço que satisfaz a equação de Klein-Gordon pode formar um objeto solitônico auto-gravitante quando acoplado à gravidade de Einstein. Esta nova nova classe de objeto não é estática, mas periódico no tempo. Nós chamamos esses objetos estrelas de soliton oscilantes [11].

Neste trabalho iremos investigar a formação de redes com a estrela soliton oscilante e estudar como a rede afeta a estabilidade da estrela através da análise do perfil de massa. Nós executamos essa ideia começando com modelo apropriado, descrito por três campos escalares reais, introduzidas em [13]. O modelo contém uma série de parâmetros, e a escolha apropriada de potencial produz uma estrela de soliton com rede de paredes de domínios. Além disso, um ajuste na forma de pequenas perturbações aplicadas ao potencial indicarão onde a rede é formada em relação à estrela soliton oscilante. Isto pode dar origem a três possibilidades, que é ter a rede formada no interior, sobre a superfície, ou fora da estrela. Analisamos a estabilidade deste novo tipo de objeto auto-gravitante e seu papel significativo na cosmologia, como candidato à matéria escura, ou

a fonte significativa de ondas gravitacionais.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma: No capítulo 2 iremos descrever o princípio da quebra espontânea de simetria e defeito topológico. No capítulo 3, estudamos em detalhes estrela de soliton oscilantes. Capítulo 4 contém estrela de soliton com rede de paredes de domínios. Finalmente, o capítulo 5 comentará, discutirá e resumirá o trabalho.

Capítulo 2

Quebra Espontânea de Simetria e Defeito Topológico

Este capítulo apresenta uma prévia da equação de Klein-Gordon, o estudo da quebra espontânea de simetria e como ela está relacionada a uma transição de fase térmica. Considerando um lagrangeano simples, nós iremos escolher um potencial efetivo ϕ^4 e estudar como o comportamento do potencial efetivo irá restaurar espontaneamente ou quebrar a simetria do modelo. Finalmente, neste capítulo, descrevemos paredes de domínio com estruturas internas.

2.1 Equação de Klein-Gordon (EKG)

Vamos considerar um exemplo que consiste na teoria de Klein-Gordon livre com uma fonte arbitrária $\rho(x)$.

O lagrangeano que descreve essa teoria é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \rho\phi, \quad (2.1)$$

Onde ρ é a fonte. Aplicando a equação de movimento de Euler-Lagrange ao campo ϕ ,

obtemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi + \rho, \quad (2.2)$$

e

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \partial^\mu \phi, \quad (2.3)$$

Daí a equação de movimento fica

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = \rho. \quad (2.4)$$

Quando consideramos um sistema livre de fonte ($\rho = 0$), a equação pode ser escrita como

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0. \quad (2.5)$$

A equação (2.5), é a equação de Klein-Gordon no espaço plano (espaço de Minkowski).

Esta equação está escrita na forma manifestamente covariante.

2.2 Quebra Espontânea de Simetria

O fenômeno da quebra espontânea de simetria acontece quando o sistema possui simetria, porém o seu estado fundamental não é invariante sob esta simetria [43, pp. 15]. Muitas vezes, um sistema tem simetrias que não são compartilhadas pelo estado fundamental ou estado de vácuo [43, pp. 141]. Quebra espontânea de simetria não é o mesmo que uma quebra explícita de simetria. Quebra de simetria explícita é causada por uma força externa que quebra ativamente a simetria. Aparece como um termo de quebra de assimetria no Lagrangiana ou em outro formalismo a partir do qual as equações de movimento podem ser derivadas. Quebra espontânea de simetria não requer uma força externa. As equações de movimento e os lagrangeanos ainda obedecem a simetria quebrada espontaneamente. A simetria considerada neste exemplo é a simetria rotacional de uma haste em torno de seu eixo, como mostrado na Figura 2.1 (a) [37, pp. 282]. A simetria pode

ser quebrada aplicando uma força externa a uma extremidade da haste: a haste dobrará e perderá sua simetria rotacional como na Figura 2.1 (b). A quebra explícita da simetria; é causada por uma força externa que entra na equação do movimento. O caso de quebra espontânea de simetria é encontrado se é aplicada uma força na direção longitudinal da haste. A haste vai agora também dobrar e já não é rotacionalmente invariante (figura 2.1 (c)). Vale ressaltar duas propriedades desse estado quebrado espontaneamente de simetria. O primeiro é que a direção na qual a haste se dobra é arbitrária. Existem vários "estados de vácuo" que poderiam estar igualmente ocupados: os estados fundamentais são degenerados. A segunda coisa a notar é que as diferentes direções de dobra (os diferentes estados fundamentais) estão relacionadas pela simetria rotacional original. Assim, a simetria não desapareceu, mas está "escondida" na relação entre os estados fundamentais. Isso reflete o fato de que as equações de movimento ainda obedecem a simetria, embora os estados fundamentais não. Por esta razão quebra espontânea de simetria é às vezes chamada de "simetria escondida"[22].

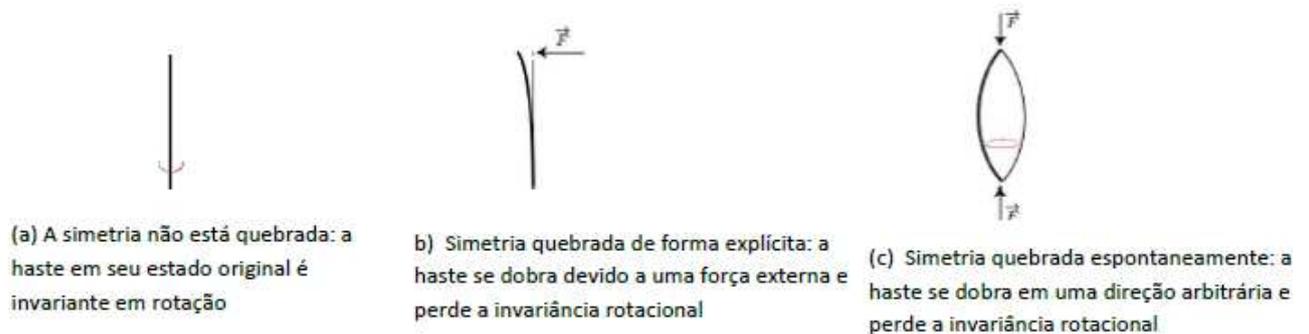


Figura 2.1: Quebra espontânea de simetria como visto na dobra de uma haste

2.2.1 Simetria $U(1)$

Consideremos a seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^* - \lambda(\phi \phi^*)^2, \quad (2.6)$$

onde m , que normalmente é a massa, ∂_μ representa $(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$ e o potencial é $V = m^2\phi\phi^* + \lambda(\phi\phi^*)^2$.

Este modelo simples fornecerá a introspecção nas analogias com a quebra local da simetria do calibre, que será considerada também para o modelo $U(1)$. $U(1)$ é um grupo de simetria interna que descreve por exemplo a conservação da carga elétrica. \mathcal{L} é invariante sob a transformação $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi(x)$ onde α a é uma constante, daí um parâmetro global. Assim temos que

$$\mathcal{L}' = (\partial_\mu\phi')(\partial^\mu\phi'^*) - m^2\phi'\phi'^* - \lambda(\phi'\phi'^*)^2; \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}' = (\partial_\mu e^{i\alpha}\phi)(\partial^\mu e^{-i\alpha}\phi^*) - m^2\phi(e^{i\alpha})\phi^*(e^{-i\alpha}) - \lambda(\phi(e^{i\alpha})\phi^*(e^{-i\alpha}))^2; \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}. \quad (2.9)$$

O estado fundamental pode agora ser obtido minimizando o potencial. Nós temos

$$\frac{\partial V}{\partial|\phi|^2} = 2m^2|\phi| + 4\lambda|\phi|^3, \quad (2.10)$$

onde $|\phi|^2 = \phi\phi^*$.

Resolvendo a equação acima para $m^2 > 0$ em $\phi = 0$ é obtido que o potencial tem uma forma parabólica como mostrado na figura (2.2a) [23].

Para quebra espontânea de simetria o sinal do termo de massa é, contudo, escolhido para ser negativa em vez de positiva: $m^2 < 0$. Quando $m^2 < 0$ o campo $\phi = 0$ descreve o máximo local ao invés do mínimo. Os mínimos são encontrados usando a equação

$$2m^2|\phi| + 4\lambda|\phi|^3 = 0, \quad (2.11)$$

de onde segue-se que $|\phi_0|^2 = (\phi\phi^*)_0 = \frac{-m^2}{2\lambda}$ e, portanto, todos os estados fundamentais têm o mesmo valor absoluto $|\phi_0|$

$$|\phi_0| = \sqrt{\phi_0\phi_0^*} = \sqrt{\frac{-m^2}{2\lambda}}. \quad (2.12)$$

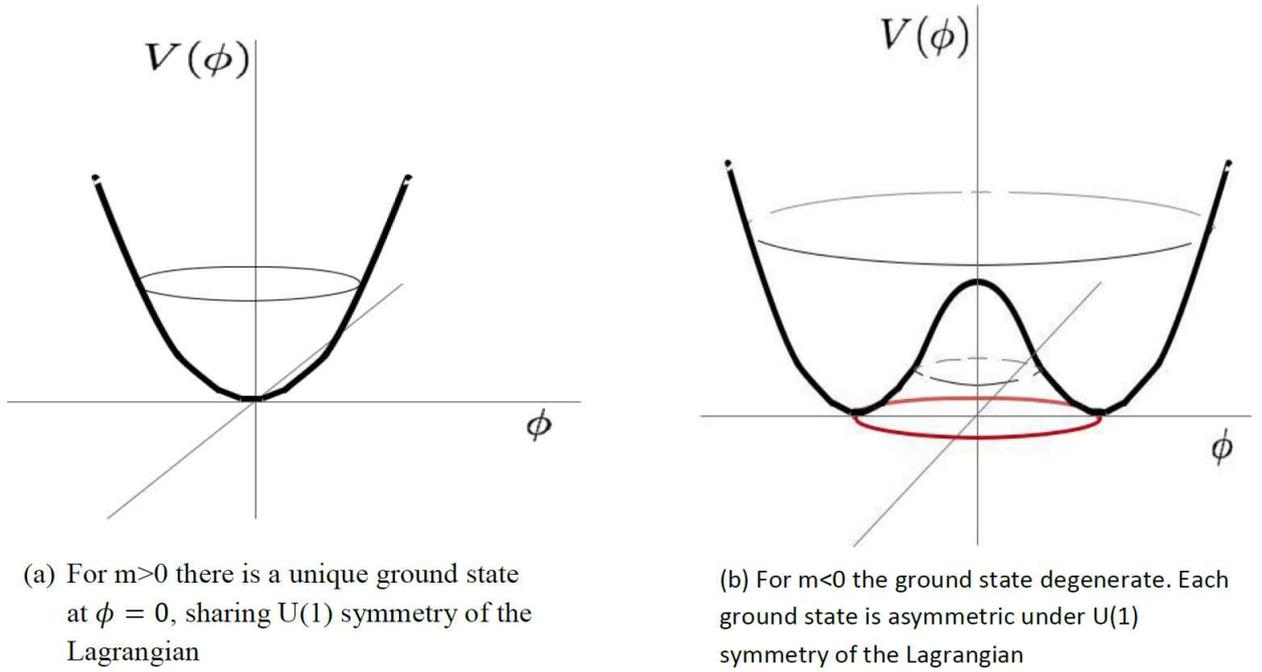


Figura 2.2: O potencial correspondente à lagrangeanas na equação (2.30) para dois valores diferentes de m^2 [22]

Os mínimos deste sistema são assim degenerados; existem vários estados com a mesma energia de vácuo. Na teoria quântica o campo ϕ torna-se um operador tal que a condição mínima se refere ao valor de esperado de vácuo (v.e.v) $|\langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle|^2 = \phi_0^2$.

2.3 Transição de Fase

Transição de fase é uma transformação de um sistema termodinâmico de uma fase ou estado da matéria para outra [45]. Na cosmologia estamos preocupados com os seguinte temas: cromodinâmica quântica (CDQ) e transições de fase eletro-fracas. No modelo cosmológico padrão, após a inflação e após o período de reaquecimento, o universo entra no processo de arrefecimento que continua até hoje. No tempo $t \approx 10^{-12}s$ após Big Bang, a temperatura cai para escalas $\mathcal{O}(100GeV)$ e a transição de fase electroweak ocorre. Neste ponto, uma força eletromagnética e fraca diferencia-se por quebra de simetria

do Modelo Padrão. Em $t \approx 10^{-6}s$, após o Big Bang, o universo atingiu uma temperatura de $\mathcal{O}(100MeV)$. Transição de fase da cromodinâmica quântica ocorre e quarks ficam confinados em hádrons. Esta transição de fase é suscetível a duas interpretações: desconfinamento ou quebra quiral de simetria [46].

Neste trabalho, vamos olhar para as teorias que mostram como diferentes transições de fase quebram as simetrias de um lagrangeano em particular por variação da temperatura e observar os efeitos térmicos no modelo.

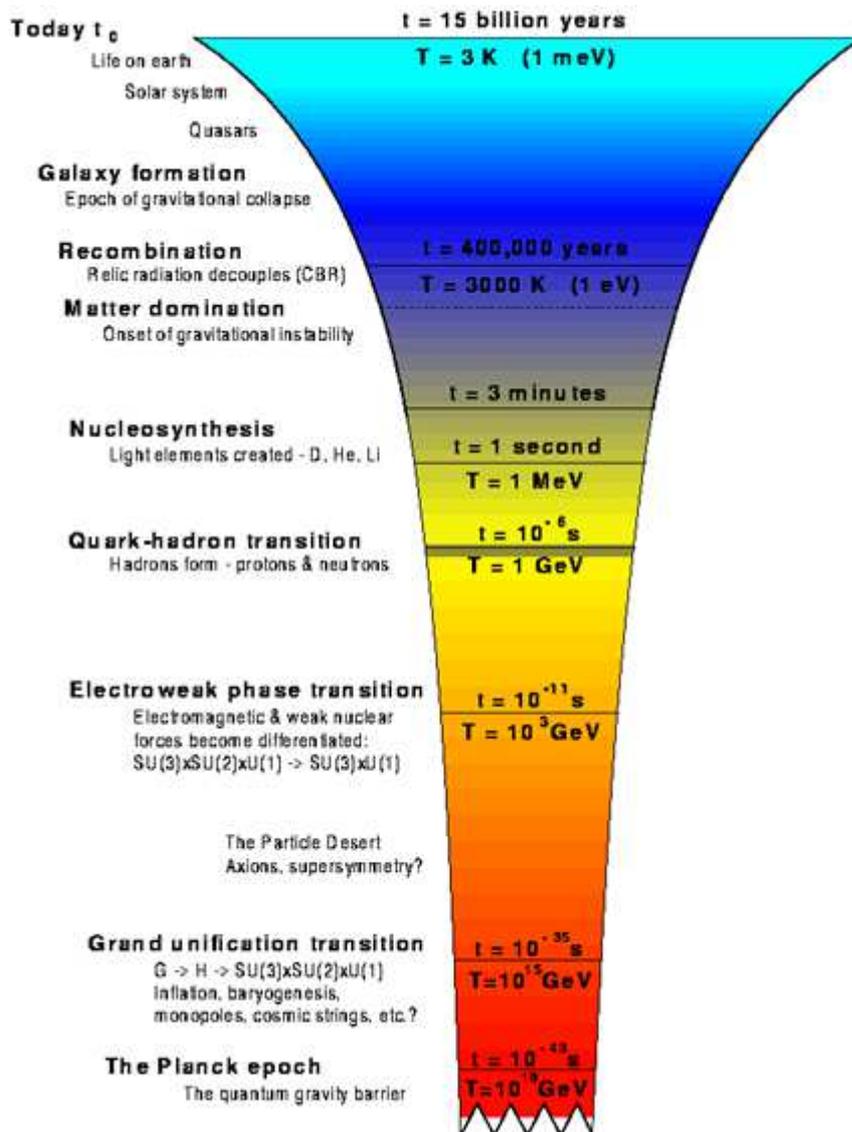


Figura 2.3: História térmica do universo no modelo cosmológico padrão [24]

2.3.1 Quebra espontânea de simetria relacionada à transição de fase térmica

Pesquisas feitas na década de 1970 na teoria de campos em temperatura finita [49] conduziram ao resultado que indica o potencial efetivo dependente da temperatura.

As propriedades termodinâmicas de um sistema físico à temperatura não-zero pode ser calculada a partir da integral de Feynman [38]

$$Z = \int D\phi e^{iS[\phi, \partial_\mu \phi]}. \quad (2.13)$$

em que S é a ação do campo dada por

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.14)$$

Colocando a ação na função de partição, temos

$$Z = \int D\phi e^{i/\hbar \int [d^4x (\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi))]}, \quad (2.15)$$

ou seja,

$$Z = \int D\phi e^{i/\hbar \int [d^4x (-\frac{1}{2} \phi \square \phi - V(\phi_0) - V'(\phi_0) \phi - \frac{1}{2} V''(\phi_0) \phi^2 + \dots)],} \quad (2.16)$$

onde $V'(\phi_0) = dV/d\phi|_{\phi=\phi_0}$. Usando o potencial quartico (ϕ^4) apresentado na seção 2.2.1, $V(\phi_0) = 0$, implicando que $V'(\phi_0) = 0$ temos simplesmente

$$Z = \int D\phi e^{i/\hbar \int [d^4x (-\frac{1}{2} \phi \square \phi - \frac{1}{2} V''(\phi_0) \phi^2)]}. \quad (2.17)$$

Integrando (2.17) temos o potencial efetivo escrito na forma

$$V_{eff} = -\frac{i\hbar}{2} \int d^4x \ln[\square + V''(\phi_0)] \quad (2.18)$$

A transformada de Fourier da equação acima é [50]

$$V_{eff} = -\frac{i\hbar}{2} \int d^4k \ln[-k^2 + V''(\phi_0)] \quad (2.19)$$

Em espaço-tempo euclidiano temos para $\mathbf{k}_0 = \frac{2n\pi}{\beta}$, torna-seo potencial efetivo a temperatura finita

$$V_{eff} = \frac{\hbar}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \ln\left[\left(\frac{2n\pi}{\beta}\right)^2 - \mathbf{k}^2 + V''(\phi_0)\right]. \quad (2.20)$$

O potencial do sistema para altas temperatura é agora modificado e dado por

$$V_{eff}(\phi_0) = V(\phi) + \frac{T^2 V''(\phi_0)}{24}, \quad (2.21)$$

Onde $V(\phi)$ é o potencial escalar original do sistema e $\frac{T^2 V''(\phi_0)}{24}$ é a correção no termo de massa do potencial ($V''(\phi_0) = \frac{d^2 V}{d\phi^2}$ e $T =$ temperatura).

2.3.2 Campo escalar real

Consideremos o potencial ϕ^4 com dois mínimos degenerados,

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (2.22)$$

onde λ é a constante de acoplamento. O potencial efetivo usando a equação (2.24):

$V_T(\phi_0) = V(\phi) + \frac{T^2 V''(\phi_0)}{24}$, onde $V_T(\phi_0)$ é o potencial em temperatura finita, e dado por

$$V_T(\phi_0) = \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{1}{2}\left[m^2 + \frac{T^2}{4}\lambda\right]\phi^2 - \frac{T^2}{24}m^2. \quad (2.23)$$

Redefinindo o termo $m^2 + \frac{T^2}{4}\lambda$ como $m^2(T)$: $m^2(T) = m^2 + \frac{T^2}{4}\lambda$, temos

$$V_T(\phi_0) = \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{1}{2}m^2(T)\phi^2 - \frac{T^2}{24}m^2. \quad (2.24)$$

Por minimização do potencial ($\frac{\partial V_T}{\partial \phi} = 0$), temos

$$\lambda\phi_0^3 + m^2(T)\phi_0 = 0, \quad (2.25)$$

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{-m^2(T)}{\lambda}}. \quad (2.26)$$

Sabemos que $m^2(T) = m^2 + \frac{T^2}{4}\lambda$ e em alguma temperatura crítica (T_c), $m^2(T_c) = 0$.

Definindo $T_c^2 = -\frac{4m^2}{\lambda}$, temos

$$m^2(T) = m^2 \left[1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right] \quad (2.27)$$

A partir da equação (2.30), a equação (2.29) torna-se

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda} \left[1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right]}. \quad (2.28)$$

Vamos discutir explicitamente os mínimos do modelo. Para $T \geq T_c$, o potencial tem um único mínimo $\phi = 0$. Quando T é menor que T_c , $\phi = 0$ será um máximo e dois mínimos equivalentes aparecerão (ver figura 2.4). A partir deste resultado, vemos que em $T \leq T_c$ o sistema tem que escolher um dos dois mínimos e ao fazê-lo, há quebra espontânea de simetria. Separando uma fase de baixa temperatura, onde a simetria é espontaneamente quebrada e uma fase de alta temperatura, onde a simetria é restaurada. O ponto crítico pode ser estimado utilizando a aproximação de alta temperatura, e corresponde à temperatura em que o termo massa muda de sinal.

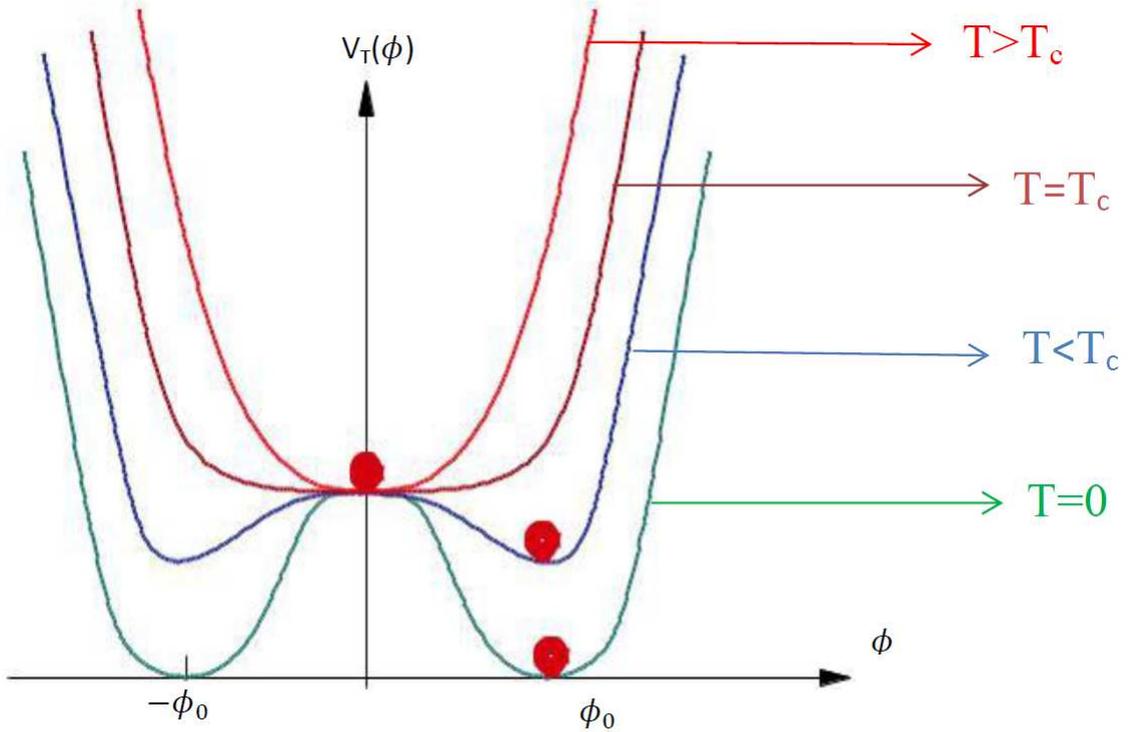


Figura 2.4: Transição de fase para potencial efetivo como uma função do campo escalar em diferentes temperaturas em comparação com um valor crítico [24].

2.4 Paredes de Domínios

Uma parede de domínios é um tipo de solução topológica que ocorre sempre que uma simetria discreta é espontaneamente quebrada. Paredes de domínios também são chamadas de "kinks". Paredes de domínio aparecem em diversos ramos da física, por exemplo, em sistemas de matéria condensada que está presente no material ferromagnético, ferroelétrico e também na cosmologia [20, 26, 27]. As paredes podem ser vistas como estruturas semelhantes a membranas, aproximadamente bidimensionais imersas no espaço tridimensional, visto como a imersão em (3,1) dimensões de soluções estáticas de modelo em (1,1) que possuem simetria Z_2 .

Na teoria de campos, para obter as paredes do domínios usamos uma densidade

lagrangeana que envolve o campo escalar dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi), \quad (2.29)$$

e tomaremos $V(\phi)$ como sendo o potencial geral com dois mínimos degenerados dada por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \phi_0)^2; \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow V(\phi) = V_0 \left(\frac{\phi^2}{\phi_0^2} - 1 \right)^2. \quad (2.31)$$

O potencial tem dois mínimos: $\phi = \pm\phi_0$, que é relacionado pela simetria reflexiva. O "v\u00e1cuo", \u00e9 marcado pela configura\u00e7\u00e3o cl\u00e1ssica do campo degenerada com menor energia, $V(\phi) = V(-\phi)$. A barreira de potencial que os separa \u00e9 $V_0 = \frac{\lambda\phi_0^4}{4}$. O potencial escalar possui uma forma como mostrado na figura (2.5). Isso \u00e9 semelhante ao exemplo apresentado na se\u00e7\u00e3o (2.4.2).

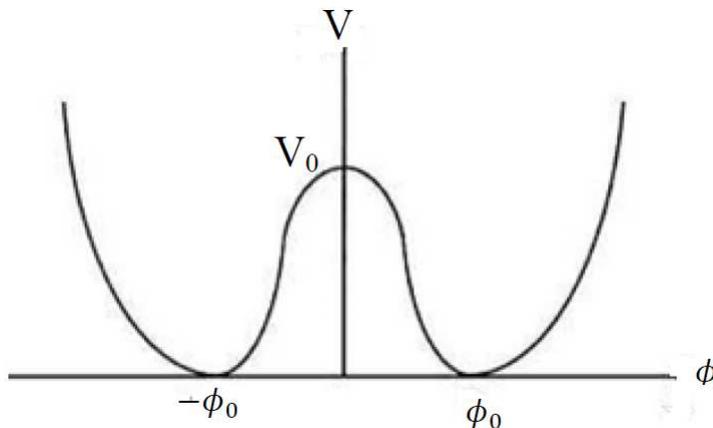


Figura 2.5: Representa\u00e7\u00e3o do potencial

Quando consideramos uma solu\u00e7\u00e3o de soliton unidimensional, onde $\phi = \phi(r)$, a equa\u00e7\u00e3o do movimento \u00e9 dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.32)$$

Substituindo o potencial dado na equação (2.33) dá o resultado

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \left(\frac{\phi^2}{\phi_0^2} - 1 \right) = 0. \quad (2.33)$$

A solução que satisfaz a equação diferencial acima é

$$\phi(r) = \phi_0 \tanh \left(\frac{\sqrt{2V_0}}{\phi_0} r \right), \quad (2.34)$$

Quando definimos $\frac{\sqrt{2V_0}}{\phi_0}$ como a a solução torna-se

$$\phi(r) = \phi_0 \tanh(ar). \quad (2.35)$$

Observamos que, quando $r \rightarrow \infty$, $\phi = \phi_0$ e $r \rightarrow -\infty$, $\phi = -\phi_0$ —veja Figura (2.6). Isso dá a configuração com condição de contorno $\phi(\pm\infty) = \pm\phi_0$. Esta solução é conhecida como uma parede de domínios, porque existe uma parede entre os dois estados mínimos de energia do campo ϕ ; esta parede tem uma espessura $\mathcal{W}_0 \approx \frac{1}{a}$. Podemos dizer que a solução define a conexão entre as duas configurações do potencial como mostrado na Figura (2.7). Chamamos soluções com tais características de defeitos topológicos como "kinks" e "anti-kinks".

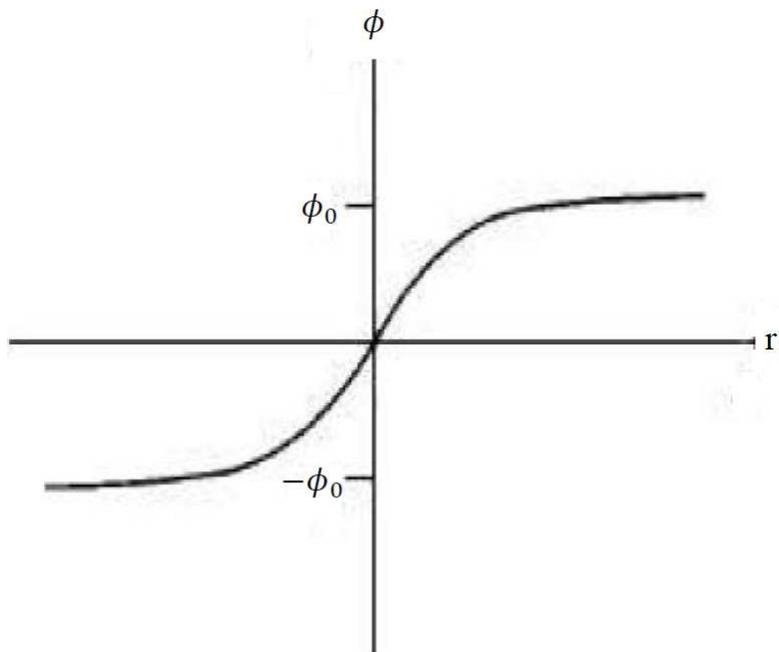


Figura 2.6: Solução da parede do domínios

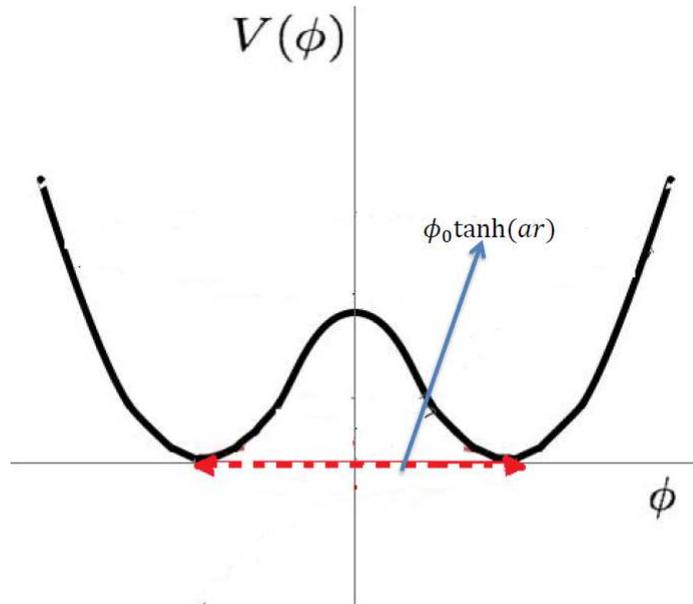


Figura 2.7: Representação da solução que liga as duas configurações de mínimos do potencial

2.5 Energia da Parede (Método de Bogomol'nyi)

Em vez de resolver a equação de movimento diretamente, como feito na seção (2.4), podemos também obter a solução de kink por um método inteligente descoberto por Bogomol'nyi [29]. O método é para obter a equação diferencial de primeira ordem pela manipulação da energia funcional da forma

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dr \rho(r) \quad (2.36)$$

$$= \int dr \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\phi')^2 + V(\phi) \right] \quad (2.37)$$

$$= \int dr \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\phi' \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \pm \sqrt{2V(\phi)} \phi' \right]. \quad (2.38)$$

Quando consideramos um campo estático, temos

$$E = \int dr \frac{1}{2} \left(\phi' \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} dr \sqrt{2V(\phi)} \phi'. \quad (2.39)$$

Então, a energia é minimizada se

$$\phi' \mp \sqrt{2V(\phi)} = 0 \Rightarrow \phi' = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.40)$$

O valor mínimo da energia é

$$E_{min} = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} dr \sqrt{2V(\phi)} \phi'. \quad (2.41)$$

Estamos interessados apenas nos valores positivos da energia,

$$E_{min} = \int_{-\infty}^{\infty} dr W_\phi \phi' = \int_{-\infty}^{\infty} W = W(\phi(r \rightarrow \infty)) - W(\phi(r \rightarrow -\infty)) = \Delta W, \quad (2.42)$$

onde W é o superpotencial e o subscrito denotam diferencial em relação ao campo. O superpotencial está relacionado ao potencial da forma

$$V = \frac{W_\phi^2}{2}. \quad (2.43)$$

Podemos encontrar a energia da equação (2.45)

$$E_B = \Delta W, \quad (2.44)$$

onde E_B é a energia Bogomol'nyi . Para encontrar W colocamos a equação (2.33) na equação (2.46) e integramos

$$W = \sqrt{2V_0} \left(\frac{\phi^3}{3\phi_0^2} - \phi \right). \quad (2.45)$$

Usando a condição de contorno $\phi(\pm\infty) = \pm\phi_0$:

$$W(\phi(r \rightarrow +\infty)) = \frac{2}{3}\sqrt{2V_0}\phi_0, \quad (2.46)$$

$$W(\phi(r \rightarrow -\infty)) = -\frac{2}{3}\sqrt{2V_0}\phi_0. \quad (2.47)$$

Portanto

$$E_B = \frac{4}{3} \left(\sqrt{2V_0}\phi_0 \right). \quad (2.48)$$

O fator $\sqrt{2V_0}\phi_0$ representa a escala de massa do modelo (massa da parede).

Podemos definir a energia em termos da espessura da parede como

$$E_B = \frac{8}{3}V_0\mathcal{W}_0 \quad (2.49)$$

A energia é proporcional à altura do potencial e à espessura da parede, o que significa que a energia é localizada (confinada) numa região do espaço.

2.6 Paredes dentro das Paredes

Vamos agora estudar, a possibilidade de paredes de domínio aprisionarem outras paredes de domínios, (paredes com estrutura internas). Consideramos um modelo em $(1 + 1)$ dimensões supersimétrico com dois campos escalares reais gerando uma simetria $Z_2 \times Z_2$ descrita pela seguinte densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\nu\chi)^2 - V(\phi, \chi), \quad (2.50)$$

onde $V(\phi, \chi)$ é o potencial. O potencial $V(\phi, \chi)$ pode ser representado em termos de um superpotencial $W(\phi, \chi)$ da forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right)^2 \right] \quad (2.51)$$

A forma mais geral de um superpotencial com uma simetria $Z_2 \times Z_2$ como estudado em Refs [30, 31, 32, 33] para modelar grande número de sistemas é

$$W(\phi, \chi) = -\lambda a^2 \phi + \frac{\lambda \phi^3}{3} + \mu \phi \chi^2, \quad (2.52)$$

onde λ e μ são constantes de acoplamento adimensionais reais e positivas. O potencial $V(\phi, \chi)$ da modelagem com o superpotencial acima é dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2 + (2\mu^2 + \lambda\mu) \phi^2 \chi^2 - \lambda\mu a^2 \chi^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \chi^4. \quad (2.53)$$

Usando a densidade lagrangeana (2.53), as equações clássicas de Euler-Lagrange de movimento são

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (2.54)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0. \quad (2.55)$$

Para simplificar consideramos configurações de campo estático unidimensionais $\phi \equiv \phi(r)$ e $\chi \equiv \chi(r)$, o que resulta nas seguintes equações de movimento

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = 2\lambda^2\phi(\phi^2 - a^2) + \phi\chi^2(4\mu^2 + 2\lambda\mu), \quad (2.56)$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = 2\mu^2\chi(\chi^2 - a^2) + \phi^2\chi(4\mu^2 + 2\lambda\mu). \quad (2.57)$$

Considerando o fato de que o sistema é supersimétrico, estas equações são resolvidas por configurações que também resolvem o par de equações diferenciais de primeira ordem [34]

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{dW}{d\phi} = \lambda(\phi^2 - a^2) + \mu\chi^2, \quad (2.58)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{dW}{d\chi} = 2\mu\phi\chi. \quad (2.59)$$

As soluções que resolvem as equações de primeira ordem acima são as soluções BPS [30, 34]

i) Tipo I:

$$\begin{aligned} \phi &= -a \tanh(\lambda ar) \\ \chi &= 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

ii) Tipo II:

$$\begin{aligned} \phi &= -a \tanh(2\mu ar) \\ \chi &= \pm a \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} - 2 \operatorname{sech}(2\mu ar) \end{aligned} \quad (2.61)$$

O primeiro par das soluções representa uma parede de domínios sem estrutura, enquanto o segundo par uma parede de domínios com estrutura interna. Em ambas as configurações o sistema tem a mesma energia de Bogomol'nyi $E_B = (4/3)\lambda a^3$, independentemente do fato de que o primeiro conjunto de solução não tem estrutura interna,

enquanto no segundo conjunto temos. Vemos que na solução tipo II, quando o campo $\phi \rightarrow 0$ no núcleo da parede de domínios- ϕ , $\phi(r \approx 0) \approx 0$ o campo χ desenvolve um valor máximo, como mostrado na Figura (2.8). Com isso podemos concluir que a dinâmica dentro da parede de ϕ -domínio ($\phi \approx 0$) é governada por uma lagrangeana efetiva dado por

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V_{eff}(\chi). \quad (2.62)$$

Onde $V_{eff}(\chi)$ é o potencial efetivo dado por

$$V_{eff}(\chi) = \frac{1}{2} \left(\chi^2 - \frac{\lambda}{\mu} a^2 \right)^2. \quad (2.63)$$

Podemos representar uma parede de domínio particular pelas soluções de kink / anti-kink

$$\chi = \pm a \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \tanh \left(\mu \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} x_i \right). \quad (2.64)$$

Aqui x_i representa alguma coordenada estendida ao longo da parede de domínios- ϕ . A equação (2.67) descreve uma parede de domínios $2d$ chamada paredes de domínios- χ . Com os dois tipos de soluções apresentadas acima (2.63) e (2.64) com a mesma energia. Embora a solução do tipo II tenha estrutura interna e a solução de tipo I esteja sem estrutura sugere que toda a configuração de energia de tipo I aparece distribuída em blocos de construção na configuração tipo II. Tais blocos de construção são estruturas internas feitas de paredes de domínios- $2d$ χ dados por (2.67).

Como a parede externa fica ao longo do plano (x, y) , a parede interna deve estar localizada em alguma reta $x_i = ax + by$. Em resumo, para uma teoria em $(3+1)$ dimensões as paredes de domínios descritas pelo campo ϕ são bidimensionais e as paredes de domínios produzidas pelo campo χ são unidimensionais.

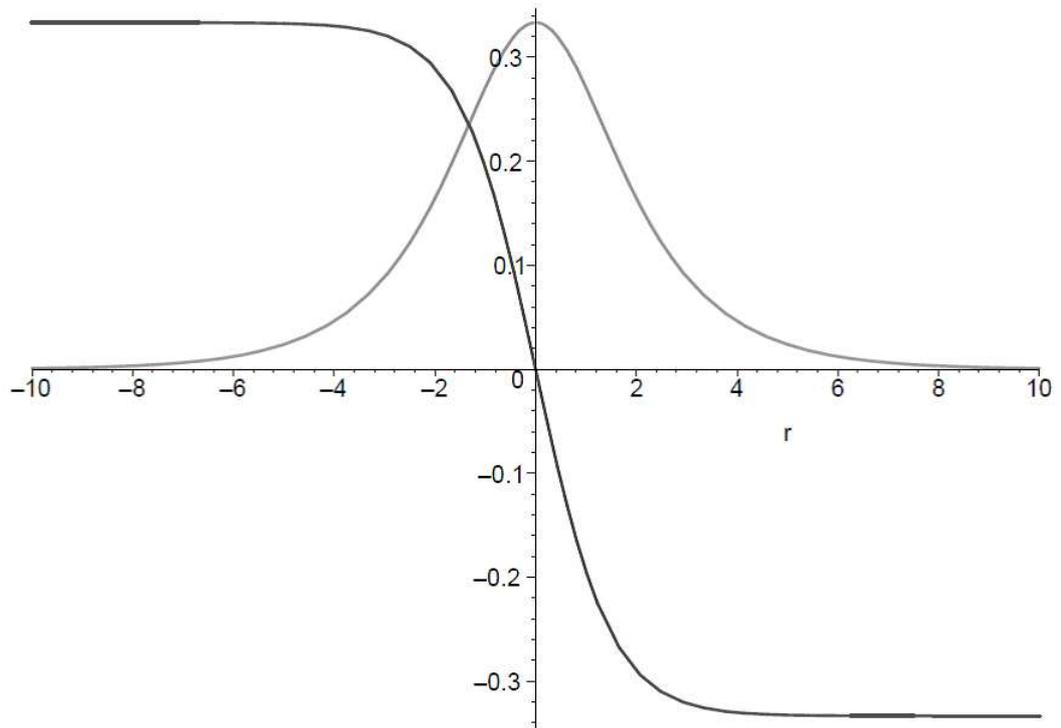


Figura 2.8: O campo χ está localizado dentro ($\phi \approx 0$) da parede de domínios- ϕ (anti-kink, a curva variando de 0,3 para -0,3 quando x vai de $-\infty$ para ∞)

Capítulo 3

Estrelas de Solitons Oscilantes

Neste capítulo, vamos começar com uma breve introdução às equações básicas da Relatividade Geral (equação de Einstein) e equação de Klein-Gordon gravitacional. Finalmente neste capítulo vamos juntar a equação de Einstein a uma equação de campo de matéria para formar um objeto solitônico auto-gravitante chamado estrelas de soliton oscilantes.

3.1 Equações de Campo de Einstein

A Relatividade Geral é uma teoria relativística da gravidade (as equações que descrevem a dinâmica dos campos gravitacionais). Examinaremos uma teoria da gravidade que usa o espaço-tempo curvo para representar os efeitos da gravidade sobre as trajetórias das partículas. Para isso teremos claramente que estudar a matemática da curvatura [41, 5],

Curvatura no espaço-tempo

A idéia central da Relatividade Geral é que a matéria deve responder à geometria movendo-se de certa maneira, e a geometria deve, por sua vez, responder à matéria pela curvatura. A curvatura pode assim ser definida a partir do desalinhamento de vetores após o transporte ao longo de curvas fechadas. Para resolver isso, primeiro precisamos de algum meio

para transportar vetores ao longo de curvas. Começamos por generalizar o conceito de derivada direcional \mathbb{R}^n definindo uma conexão linear ou afim ou diferenciação covariante em um colector.

Conexão afim Γ : No espaço curvo, variações nos tensores são afetadas pelo fato de que os vetores de base estão torcendo e girando de ponto de espaço-tempo para ponto de espaço-tempo. O coeficiente de conexão Γ mede as mudanças nos vetores de base através da relação

$$\nabla_\nu e_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda, \quad (3.1)$$

aqui ∇_ν mede as mudanças ao longo da base e_λ . Em qualquer base de coordenadas ($[e_\mu, e_\nu] = 0$) os coeficientes de conexão são dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}]. \quad (3.2)$$

Onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo com assinatura $(-1, 1, 1, 1)$.

Tensor de Riemann $R_{\mu\alpha\nu}^\beta$: A curvatura espaço-temporal resulta em geodésicas. A medição do desvio de uma geodésica de outra implica quantificar esta curvatura através do tensor de curvatura de Riemann. No espaço plano (0 curvatura) deve desaparecer. As componentes do tensor de curvatura de Riemann em termos do coeficiente de conexão (conexão afim) são

$$R_{\mu\alpha\nu}^\beta = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta + \Gamma_{\eta\alpha}^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\eta - \Gamma_{\eta\nu}^\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\eta. \quad (3.3)$$

Através da contração de dois índices obtemos o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda, \quad (3.4)$$

que obedece a propriedade simétrica

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (3.5)$$

com mais uma contração temos o escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu \quad (3.6)$$

3.2 Equações de Einstein com Matéria

Na relatividade geral, a métrica é o campo fundamental que caracteriza as propriedades geométricas e gravitacionais do espaço-tempo, e a ação deve ser uma função de $g_{\mu\nu}(x)$. A ação padrão para a métrica é a ação de Hilbert. A ação de Einstein-Hilbert na relatividade geral é a ação que produz a equação através do princípio da mínima ação. Com a assinatura métrica $(+, -, -, -)$, a parte gravitacional da ação é dada por [47, p. 180]

$$S_{E.H} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.7)$$

onde, $g = \det g_{\mu\nu}$ e $\kappa^2 = 8\pi G$ constante de Einstein (G é constante gravitacional). Para mais campos envolvidos, como campos de matéria, devemos adicionar o termo de matéria ao termo de ação de Einstein-Hilbert: $S = S_{E.H} + S_m$ (Gravidade + matéria), onde $S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m$ é a ação para o campo da matéria (\mathcal{L}_m é a lagrangeana para o campo de matéria).

Por exemplo: Vamos considerar $\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$.

A ação mais completa pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right]. \quad (3.8)$$

O princípio de mínima ação nos diz que a variação dessa ação em relação à métrica é zero, produzindo

$$\delta S = 0. \quad (3.9)$$

Podemos escrever a equação de campo de Einstein como

$$R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} R = \kappa^2 T_{\mu\sigma}, \quad (3.10)$$

onde $T_{\mu\sigma} = \partial_\mu\phi\partial_\sigma\phi - g_{\mu\sigma}\mathcal{L}_m$ é o tensor de energia-momento.

A equação acima é conhecida como equação de campo da relatividade geral, ou equação de campo de Einstein. Podemos também escrever a equação (3.10) como $G_{\mu\sigma} = \kappa^2 T_{\mu\sigma}$. Onde ($G_{\mu\sigma} = R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}R$) é conhecido como tensor de Einstein. Com $T_{\mu\sigma}$, o tensor de energia- momento, sendo uma quantidade conservada $\nabla_\mu T^{\mu\sigma} = 0$, que descreve os efeitos da matéria na teoria.

3.3 Equação de Klein-Gordon no Campo Gravitacional

Como estamos trabalhando no espaço curvo, é apropriado para nós definir a equação de Klein-Gordon no espaço curvo. Na relatividade geral, ou na presença de gravitação, temos que usar a lagrangiana apropriada

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right). \quad (3.11)$$

Vamos encontrar a equação de movimento para este nova lagrangeana usando equações de movimento de Euler-Lagrange (2.8). Tomando a primeira parte temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}. \quad (3.12)$$

A segunda parte das equações produz:

$$\partial_{\mu'}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu'}\phi)} = \partial_{\mu'}\left[\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\delta_{\mu'}^\mu g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\nu\phi g^{\mu\nu}\delta_{\mu'}^\nu\right)\right]; \quad (3.13)$$

$$= \partial_{\mu'}\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\partial^{\mu'}\phi + \frac{1}{2}\partial^{\mu'}\phi\right) = \partial_{\mu'}\sqrt{-g}\partial^{\mu'}\phi, \quad (3.14)$$

colocando os dois resultados juntos, obtemos

$$\partial_{\mu'}\sqrt{-g}\partial^{\mu'}\phi + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (3.15)$$

Podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0; \quad (3.16)$$

$$\square\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0, \quad (3.17)$$

onde $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)$ é conhecido como o D'Alembertian no espaço curvo.

3.4 O Modelo

Escalares maciços reais admitem soluções oscilantes auto-gravitantes. Considere, portanto, uma geometria geralmente dependente do tempo, esféricamente simétrica. Vamos considerar exemplo simples de estrela de soliton oscilante, como um campo escalar de Klein-Gordon massivo, associado à gravidade descrito nas Refs. [11, 36, 42]. Na ausência de momento angular consideramos que a solução de soliton é esféricamente simétrica. O elemento de linha esféricamente simétrico é escrito na forma

$$ds^2 = -N^2(t, r)dt + g^2(t, r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi, \quad (3.18)$$

com $N^2(t, r)$ sendo a função de lapso e $g^2(t, r)$ a função métrica radial. Estamos usando a seguinte métrica $g_{tt} = -N^2(t, r)$, $g_{rr} = g^2(t, r)$, $g_{\theta\theta} = r^2$ e $g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$. O determinante do tensor métrico é g , onde

$$-g = r^4 N^2 g^2 \sin^2\theta. \quad (3.19)$$

Encontrando as equações de Einstein-Klein-Gordon (E.K.G)

A conexão afim (coeficiente de conexão) pode ser calculada a partir da equação (3.2).

Os componentes da conexão afim não nulos são:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^r &= \frac{N'N}{g^2}; & \Gamma_{rr}^t &= \frac{g\dot{g}}{N^2}; \\
\Gamma_{tt}^t &= \frac{\dot{N}}{N}; & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot\theta; \\
\Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = \frac{\dot{g}}{g}; & \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{-r}{g^2}; \\
\Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{N'}{N}; & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\cos\theta\sin\theta; \\
\Gamma_{rr}^r &= \frac{g'}{g}; & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r}{g^2\sin^2\theta}; \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}; & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Substituindo os componentes da conexão afim na equação (3.3), obtemos as componentes do tensor de Ricci:

$$R_{tt} = \frac{\ddot{g}}{g} - \frac{N''N}{g^2} + \frac{N'Ng'}{g^3} - 2\frac{N'N}{g^2r} - \frac{\dot{N}\dot{g}}{Ng}; \tag{3.21}$$

$$R_{rr} = -\frac{\dot{g}g}{N^2} - \frac{g'N'}{gN} - \frac{2g'}{gr} + \frac{N''}{N} + \frac{\dot{N}\dot{g}}{N^3}; \tag{3.22}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{3}{g^2} + \frac{2N'r}{g^2N} - \frac{g'r}{g^3}; \tag{3.23}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \left(\frac{1}{g^2} - \frac{g'r}{g^3} - 1 + \frac{N'}{Ng^2r} \right) \sin\theta; \tag{3.24}$$

$$R_{tr} = -\frac{2\dot{g}}{rg}, \tag{3.25}$$

Das equações acima, o escalar de Ricci torna-se

$$R = -\frac{2\ddot{g}}{N^2g} - \frac{2g'N'}{Ng^3} + \frac{2N''}{2g^2} - \frac{2g'}{g^3r} + \frac{2N'}{Ng^2r} + \frac{2\dot{N}\dot{g}}{N^3g} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{g^2r^2} - \frac{2g'}{g^3r} + \frac{2N'}{Ng^2r}. \tag{3.26}$$

O tensor de energia-momento para um escalar real campo $\phi(r, t)$ com um potencial de campo escalar $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ possui as seguintes componentes

$$T_{tt} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + \frac{N^2}{g^2}\phi'^2 + N^2m^2\phi^2 \right); \tag{3.27}$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2}\phi'^2 + \dot{\phi}^2 \frac{g^2}{N^2} - g^2\phi^2; \quad (3.28)$$

$$T_{tr} = \dot{\phi}\phi'; \quad (3.29)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{r^2}{2} \left[\frac{\dot{\phi}}{N^2} - \frac{\phi'}{g^2} - m^2\phi^2 \right]; \quad (3.30)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{r^2 \sin^2\theta}{2} \left[\frac{\dot{\phi}}{N^2} - \frac{\phi'}{g^2} - m^2\phi^2 \right]. \quad (3.31)$$

Da equação (3.10) podemos encontrar as seguintes componentes das equações de Einstein, a componente $t - t$:

$$(g^2)' = -g^2 \left(\frac{g^2 - 1}{r} \right) + 4\pi Grg^2 \left(\frac{\dot{\phi}g^2}{N^2} + \phi'^2 + g^2m^2\phi^2 \right); \quad (3.32)$$

a componente $r - r$:

$$(N^2)' = N^2 \left(\frac{g^2 - 1}{r} \right) + 4\pi Gr(N^2\phi'^2 - N^2g^2m^2\phi^2 + \dot{\phi}^2); \quad (3.33)$$

e a componente $t - r$:

$$\dot{g} = 4\pi Grg\dot{\phi}\phi'. \quad (3.34)$$

Seguimos a equação (3.16) e escrevemos a equação de Klein-Gordon como:

$$\ddot{\phi} - \frac{\dot{N}\dot{\phi}}{N} = \frac{(N^2)'}{2g^2}\phi' + \frac{N^2}{g^2} \left[\phi'' - \frac{(g^2)'\phi'}{2g^2} - \frac{2g\dot{g}}{N^2} \right] + \frac{2N^2\phi'}{g^2r} - m^2N^2\phi, \quad (3.35)$$

Onde ponto representa $\frac{\partial}{\partial t}$ linha denota $\frac{\partial}{\partial r}$.

Por conveniência numérica define-se as quantidades adimensionais $r \rightarrow r/m$, $t \rightarrow t/m$ e $\Phi \rightarrow \frac{\phi}{\sqrt{\kappa^2}}$ onde observamos que a massa bosônica é a escala natural do tempo e da distância.

Devido a não-linearidade das equações de Einstein-Klein-Gordon, é conveniente introduzir novas variáveis; onde $A(r, t) = g^2$ e $C = [g(r, t)/N(r, t)]^2$ [35, 36, 42]. Sendo assim as variáveis consideradas são:

$$A' = -A \left(\frac{A - 1}{r} \right) + \frac{Ar}{2} [C\dot{\Phi}^2 + \Phi'^2 + A\Phi^2]; \quad (3.36)$$

$$C' = \frac{2C}{r} [1 + A(\Phi^2 r^2 - 1)]; \quad (3.37)$$

$$C\ddot{\Phi} + \frac{1}{2}\dot{C}\dot{\Phi} = \Phi'' + \Phi' \left(\frac{2}{r} - \frac{C'}{2C} \right) - A\Phi; \quad (3.38)$$

$$\dot{A} = 2rA\dot{\Phi}\Phi'. \quad (3.39)$$

Estas equações não têm soluções de equilíbrio independentes do tempo (componente métrica estática). As soluções estáticas conhecidas para o sistema têm singularidades ou são topologicamente não triviais [40]. A forma das equações (3.36-3.39) sugere uma expansão periódica da seguinte forma:

$$A(r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}(r) \cos(2j\omega t); \quad (3.40)$$

$$C(r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{2j}(r) \cos(2j\omega t); \quad (3.41)$$

e,

$$\Phi(r, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{2j-1}(r) \cos[(2j-1)\omega t]. \quad (3.42)$$

Em que foi usado o método de separação de variáveis; onde ω é a frequência fundamental. A solução real é uma expansão de Fourier infinita que é convergente [11, 36].

3.4.1 Problema do autovalor e condições de contorno para configurações de equilíbrio

Usando a expansão de Fourier nas equações (3.36-3.38) e estabelecendo coeficiente de Fourier zero, obtém-se um sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas de primeira ordem para $A_{2j}(r)$ e $C_{2j}(r)$, sendo as equações diferenciais de segunda ordem para $\phi_{2j-1}(r)$.

As condições de contorno são dadas pelos seguintes requisitos:

i) Planicidade assintótica; isso exige que, para $r \rightarrow \infty$, $A(r = \infty, t) = 1$ and $\phi(r =$

$\infty, t) = 0$. Essa condição de contorno transforma a métrica em métrica de Minkowski. Isto significa que enquanto nos afastamos da fonte (objeto) encontramos um espaço plano, isto é, um espaço distante do objeto não é curvo. Também, o campo escalar se aproxima de zero (soliton não-topológico) que se conforma à teoria.

ii) Não-singularidades; em $r = 0$, a ausência de singularidade cônica implica $A_{2j}(r = 0) = 0$. A exigência de que os coeficientes métricos sejam finitos em $r = 0$ implica $\phi'(r = 0) = 0$.

As equações (3.36-3.38) tornam-se um problema de autovalor. Portanto, é necessário determinar os valores iniciais $\phi_{2j-1}(0)$, $C_{2j}(0)$ (a frequência é absorvida no componente de tempo) correspondente a um determinado valor central $\phi_1(0)$. Para proceder, truncaremos o sistema de equações após um certo máximo $j = j_{max}$, resolveremos numericamente o problema de autovalor e estudaremos a convergência da série como função de $j = j_{max}$. Neste trabalho, a série é truncada em $j_{max} = 1$.

Uma solução de oscilação típica é mostrada nas figuras 1 e 2. A função métrica radial $g^2(r, t)$, para o caso de $\phi_1(0) = 0,4$ é realizada para g_{2j} para os primeiros valores de j e também o gráfico de coeficiente de Fourier não-zero do campo escalar ϕ - veja Figura 2. Embora estejamos resolvendo equações não-lineares, a série de Fourier converge rapidamente.

Massa (M): Assintoticamente qualquer métrica de estrela do soliton (ou de boson) assemelha-se à métrica de Schwarzschild, que nos permite associar o coeficiente métrico $g_{rr} = (1 - 2M/r)^{-1}$, onde M é a massa ADM definida para um espaço-tempo assintoticamente plano e $g_{rr} = g^2(r, t) = A(r, t)$. Portanto, a massa M pode ser calculada como

$$M = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} \left[1 - \frac{1}{A(r, t)} \right] \frac{M_{Pl}^2}{m} \quad (3.43)$$

Onde r é o ponto mais externo do domínio numérico [48].

Na figura (3) a massa M da estrela é descrita como uma função do campo central $\phi_1(0)$. Esta curva de massa é semelhante àsquelas de anãs brancas, estrelas de nêutrons

e estrelas de bosons, com uma massa máxima dada por $M_c \approx 0,132M_{\text{planck}}^2/m$ para $\phi_{1c}(0) \approx 2,0$. O ramo à esquerda do máximo é o ramo estável tradicionalmente chamado "S-branch". Estabilidade aqui significa que as estrelas neste ramo se movem para novas configurações de massa mais baixa no mesmo ramo sob pequenas perturbações. À direita está o ramo instável chamado "U-branch". Estrelas "U-branch" são inerentemente instáveis a pequenas perturbações e colapsa em buraco negro. Nesse regime, mesmo um pequeno aumento na massa induzirá o colapso da estrela em um buraco negro.

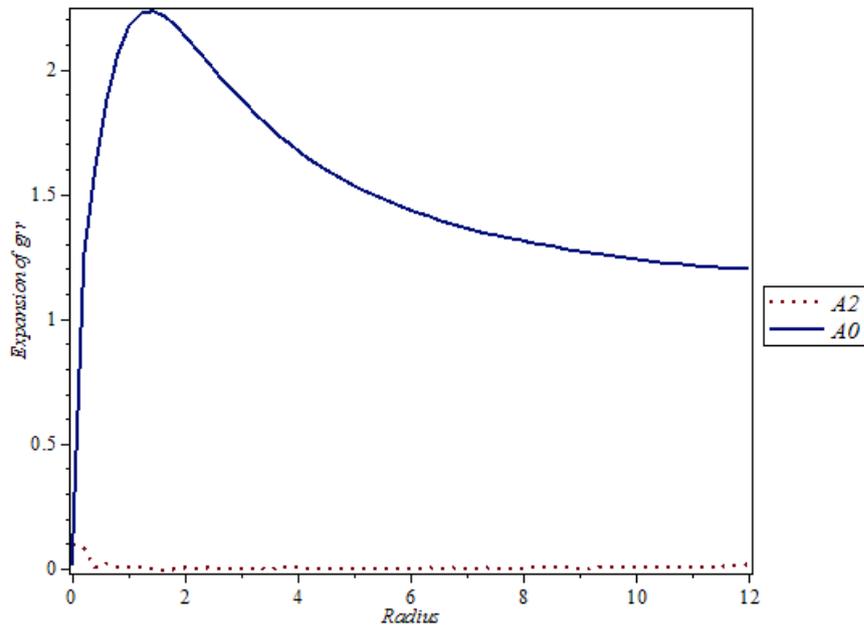


Figura 3.1: Uma solução típica para as equações de auto-valores truncadas ($j_{max} = 1$) da expansão da quantidade métrica g_{rr} .

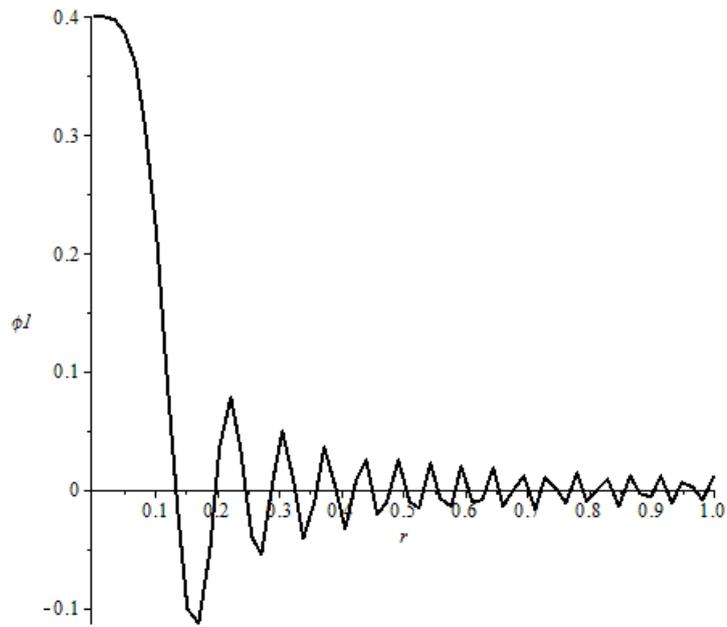


Figura 3.2: Gráfico que representa o campo escalar

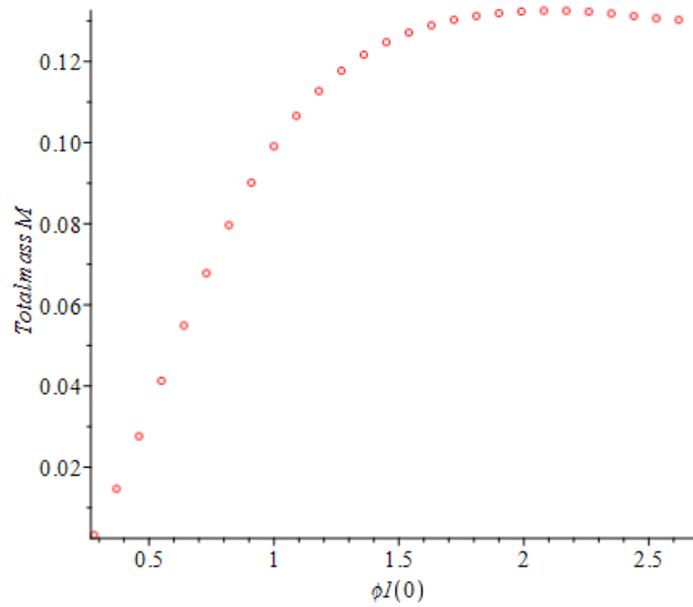


Figura 3.3: A massa total M da estrela de soliton oscilante (em unidades de M_{Planck}^2/m) é plotada como uma função da densidade central $\phi_1(0)$ para as estrelas no seu primeiro estado excitado $\phi_1(0)$.

Capítulo 4

Estrelas de Soliton Oscilantes com Rede de Paredes de Domínios

Vamos explorar a idéia de se ter uma rede de paredes de domínios com uma estrela de soliton oscilante. Neste trabalho, oferecemos um modelo que contém a combinação do mecanismo básico por trás das idéias no capítulo três [11, 42] e as idéias tratadas nas referências [7, 12, 13]. O modelo levará ao cenário de estrelas de soliton oscilantes hospedando uma rede de defeitos. Isso será feito usando uma lagrangeana que é composta de três campos escalares que são acoplados entre si por um potencial. Este potencial é polinomial e contém até a potência de quarta ordem nos campos. Neste capítulo examinaremos as equações de EKG para a lagrangeana que contém três campos escalares com o potencial apropriado. Em seguida, resolvemos o EKG numericamente e estudamos os gráficos dessas soluções.

4.1 O Modelo

A investigação da possibilidade de paredes de domínios para atrair a rede de paredes de domínio em uma superfície de estrelas de soliton foram estudados por [12]. Isso foi inspirado em [13], que trataram da idéia de construir uma rede planar de paredes de

domínios.

O núcleo desta investigação baseia-se no fato de que a simetria subjacente do modelo padrão de partículas elementares possui um grupo $SU(2) \times SU(3)$, e esta é a inspiração básica para considerar um modelo que engendra a simetria $Z_2 \times Z_3$, isto é, a contrapartida discreta de $SU(2) \times SU(3)$. Neste modelo, vamos investigar a formação de rede de paredes de domínios com as estrelas soliton oscilantes. Isto exigirá as idéias combinadas de rede de paredes de domínios e estrelas de soliton oscilantes usando o mecanismo básico das Refs [7, 11, 13, 35, 36]. Por esta razão introduzimos o modelo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - V(\phi, \chi, \sigma). \quad (4.1)$$

Este modelo contém três campos escalares reais acoplados via o potencial $V(\phi, \chi, \sigma)$. Isso será definido mais adiante nesta seção.

A ação descrevendo um auto-gravitante com três campos escalares reais em um espaço curvo é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi + \partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma] - V(\phi, \chi, \sigma) \right) \quad (4.2)$$

A variação desta ação em relação aos campos escalares leva às seguintes equações de movimento

$$\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial\chi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu\chi)} = 0; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial\sigma} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu\sigma)} = 0, \quad (4.5)$$

onde $\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}(\frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi + \partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma] - V(\phi, \chi, \sigma))$. As equações de movimento acima (4.3-4.5) gera as seguintes equações de Klein-Gordon:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) - \frac{\partial V(\phi, \chi, \sigma)}{\partial\phi} = 0; \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\chi) - \frac{\partial V(\phi, \chi, \sigma)}{\partial\chi} = 0; \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\sigma) - \frac{\partial V(\phi, \chi, \sigma)}{\partial\sigma} = 0. \quad (4.8)$$

4.1.1 Escolhendo o potencial apropriado

Estamos considerando um modelo que irá gerar uma rede de domínios com a estrela soliton. Portanto, precisamos escolher o potencial apropriado que fornece a estrela de soliton padrão [1] com a rede de paredes de domínios. Um dos campos deve servir como uma parede de acolhimento para acomodar os outros dois campos, que têm de gerar a simetria Z_3 . O campo sigma considerado abaixo será considerado como o campo de acolhimento neste trabalho [7]. Geralmente, estamos interessados no modelo que deve ser capaz de descrever uma estrela solitônica esférica através do campo escalar σ , quebrando sua simetria Z_2 sob a mudança $\sigma \rightarrow \sigma - (\frac{1}{2})\sigma_0$, para capturar os outros dois campos (ϕ, χ) com uma simetria Z_3 na sua superfície. Obtemos isso considerando o potencial da forma

$$V = \frac{1}{2}\mu^2\sigma^2(\sigma - \sigma_0)^2 + \lambda^2(\phi^2 + \chi^2)^2 - \lambda^2\phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [\lambda\mu(\sigma - \frac{1}{2}\sigma_0)^2 - \frac{9}{4}\lambda^2](\phi^2 + \chi^2) \quad (4.9)$$

onde $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma_0$ são o verdadeiro e falso vacuos correspondendo ao padrão da estrela de soliton.

Modelos com três campos escalares reais têm sido estudados por vários autores. Por exemplo, em um modelo $O(3)$ que admite paredes embutidas instáveis [14], e também em [15], que investiga a estabilidade de kinks deformados em modelo sigma linear $O(3)$. O cenário para a estrela de soliton para aprisionar uma rede de paredes de domínios deve restringir as simetrias do potencial, e a questão de encontrar uma parede de acolhimento que aprisiona uma rede de defeitos dentro da estrutura da supersimetria. [16,17]. Nesse sentido, podemos usar um potencial com simetria Z_N entre os campos ϕ e χ (que deve habitar o interior da parede de domínios formada pelo outro campo σ) para descrever

localmente N- junções na superfície de uma esfera [18] (a superfície da estrela do soliton). Escolhemos $N = 3$, isto é, a simetria Z_3 . Embora esta seja a possibilidade mínima para o aparecimento de junções, também é o centro do grupo $SU(3)$, que é o grupo das interações fortes. Outra possibilidade com a quebra de simetria $Z_3 \rightarrow Z_2$ foi considerada em [18] para descrever um mosaico com 12 pentágonos e 20 hexágonos, que se assemelha à estrutura fullerenó de 60 átomos de carbono. O mecanismo principal para uma parede domínios para aprisionar uma rede de paredes de domínios foi explorado em [18]. O ponto chave aqui é que, como veremos, na superfície da estrela de soliton $\sigma \approx \frac{1}{2}\sigma_0$, e neste local, os campos restantes (ϕ, χ) desenvolvem v.e.v não nulo (condensado) com três fases diferentes que contribuem para formar três junções de paredes de domínios e depois uma rede. No limite em que $\phi, \chi = 0$ a teoria (4.1) - (4.9) permite que o campo σ forme uma solução de soliton. Notamos que tal solução pode ser encontrada usando a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d\sigma}{dR} = \mu\sigma(\sigma - \sigma_0) = W_\sigma, \quad (4.10)$$

onde $W_\sigma = \frac{dW}{d\sigma}$. $W = \mu(\sigma^3/3 - \sigma^2\sigma_0/2)$ é o superpotencial que define o potencial $V(\sigma, 0, 0) = (1/2)W_\sigma^2$ [19]. A integração da equação (4.10) fornece a solução

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{2} \left[1 - \tanh \frac{\mu\sigma_0(R - R_0)}{2} \right]. \quad (4.11)$$

Esta solução indica que na superfície da estrela ($R \simeq R_0$) o campo sigma vai para $(1/2)\sigma_0$. Isto representa aproximadamente [20] uma parede esférica (a superfície da estrela de soliton) com tensão superficial [30]

$$t_h \simeq |W(\sigma_0) - W(0)| = \frac{1}{6}\mu\sigma_0^3. \quad (4.12)$$

Quando $\sigma \simeq (1/2)\sigma_0$ os outros dois campos escalares (ϕ, χ) geram simetria Z_3 e descrevem junções de paredes de domínio que permitem a formação de uma rede [12] na superfície. A solução também indica que fora ($R > R_0$) e dentro ($R < R_0$) a estrela o campo sigma vai para $< (1/2)\sigma_0$ e $> (1/2)\sigma_0$ respectivamente.

Na aproximação de parede fina, cada segmento da rede pode ser representado por uma solução de parede de domínios (kink) da forma explícita

$$\phi = -\frac{3}{4}; \quad (4.13)$$

$$\chi = \frac{3}{4}\sqrt{3} \tanh \sqrt{\frac{27}{8}}\lambda(z - z_0). \quad (4.14)$$

Os demais segmentos são obtidos pela rotação do plano (ϕ, χ) por 120° e 240° graus, que reproduzem o efeito das junções triplas das paredes, permitindo a formação de uma rede, como mostrado na figura abaixo.

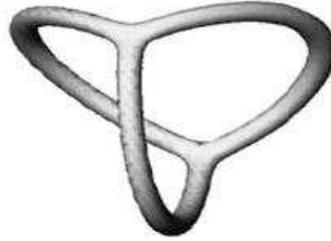


Figura 4.1: Representação de uma rede de paredes de domínio, dentro de uma parede curva, formando junções [51].

4.2 Equações de Einstein-Klein-Gordon para três campos escalares

Nesta seção, calcularemos as equações de EKG para três campos escalares usando o potencial definido pela equação (4.9).

4.2.1 Equações de Einstein

É possível obter a equação de Einstein para três campos escalares acoplados uns aos outros por um potencial usando a variação da ação dada pela equação (4.2) em relação

ao tensor métrico $g^{\mu\nu}$. Isso leva à equação de Einstein da forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{(\phi,\chi,\sigma)\mu\nu}, \quad (4.15)$$

onde $T_{(\phi,\chi,\sigma)\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento para os três campos escalares. A equação (4.15) não é muito diferente da equação (3.10), a única diferença que podemos ver é do tensor de energia-momento. Isso ocorre porque o tensor de energia-momento é o que contém o campo da matéria (campo escalar), de modo que qualquer distorção ou adição ao campo afeta o tensor de energia-momento.

Estamos agora com os três campos escalares (ϕ, χ, σ) e o potencial $V(\phi, \chi, \sigma)$ que estão acoplados entre si. Consideraremos as seguintes condições; i) fixar as constantes $\lambda = \mu = 1$ na escala de energia GeV , ii) consideraremos que apenas o campo sigma é periódico no tempo (onde σ é o campo de acolhimento) e os outros dois campos (ϕ e χ) sendo estáticos. O potencial (equação 4.9) torna-se então

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2(\sigma - \sigma_0)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + \left[(\sigma - \frac{1}{2}\sigma_0)^2 - \frac{9}{4} \right] (\phi^2 + \chi^2). \quad (4.16)$$

O tensor geral de energia-momento é dado por

$$\begin{aligned} T_{(\phi,\chi,\sigma)\mu\nu} &= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi + \partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + \partial^\alpha\chi\partial_\alpha\chi + \partial^\alpha\sigma\partial_\alpha\sigma + V(\phi, \chi, \sigma)]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A componente $t-t$ do tensor de energia-momento,

$$\begin{aligned} T_{(\phi,\chi,\sigma)tt} &= \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + \frac{N^2}{2g^2}(\phi'^2 + \chi'^2 + \sigma'^2) \\ &\quad + \frac{N^2}{2} \left(\frac{1}{2}\sigma^2(\sigma - \sigma_0)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [(\sigma - 1/2\sigma_0)^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right); \end{aligned} \quad (4.18)$$

a componente $r-r$ do tensor de energia-momento,

$$\begin{aligned} T_{(\phi,\chi,\sigma)rr} &= \frac{g^2}{2N^2}\dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2}(\phi'^2 + \chi'^2 + \sigma'^2) \\ &\quad - \frac{g^2}{2} \left(\frac{1}{2}\sigma^2(\sigma - \sigma_0)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [(\sigma - 1/2\sigma_0)^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right); \end{aligned} \quad (4.19)$$

a componente r - r do tensor de energia-momento.

$$T_{(\phi,\chi,\sigma)tr} = \dot{\sigma}\sigma'. \quad (4.20)$$

Usando o elemento de linha simétrico esférico dado na equação (3.31), seguimos Refs [9,10] e escrevemos as equações de Einstein como

componente t - t da equação de Einstein

$$\begin{aligned} (g^2)' &= -g^2 \left(\frac{g^2 - 1}{r} \right) + 4\pi G g^2 r \left[\frac{g^2}{N^2} \dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + \phi'^2 + \chi'^2 \right] \\ &+ 4\pi G g^2 r \left[g^2 \left(\frac{1}{2} \sigma^2 (\sigma - \sigma_0)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [(\sigma - 1/2\sigma_0)^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right) \right]; \end{aligned} \quad (4.21)$$

componente r - r da equação de Einstein

$$\begin{aligned} (N^2)' &= N^2 \left(\frac{g^2 - 1}{r} \right) + 4\pi G r \left[g^2 \dot{\sigma}^2 + N^2 (\sigma'^2 + \phi'^2 + \chi'^2) \right] \\ &+ 4\pi G r \left[N^2 g^2 \left(\frac{1}{2} \sigma^2 (\sigma - \sigma_0)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [(\sigma - 1/2\sigma_0)^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right) \right]; \end{aligned} \quad (4.22)$$

componente t - r da equação de Einstein

$$\dot{g} = 8\pi G r g \dot{\sigma}\sigma'. \quad (4.23)$$

4.2.2 Equações de Klein-Gordon

Para encontrar a Equação de Klein-Gordon usamos as equações (4.6-4.8) com o potencial definido na equação (4.9). A Equação de Klein-Gordon para três campos escalares pode ser escrita como

para o campo σ

$$\ddot{\sigma} - \frac{(\dot{N}^2)\dot{\sigma}}{2N} = \frac{(N^2)'\sigma'}{2g^2} + \frac{N^2}{g^2} \left[\sigma'' - \frac{(g^2)'\sigma'}{2g^2} - \frac{(g^2)\dot{\sigma}}{N^2} \right] + \frac{2N^2\sigma}{r g^2} - N^2 V_\sigma; \quad (4.24)$$

para o campo ϕ

$$\phi'' = \frac{(g^2)'\phi'}{2g^2} - \frac{(N^2)'\phi'}{2N^2} - \frac{2\phi'}{r} + g^2 V_\phi; \quad (4.25)$$

para o campo χ

$$\chi'' = \frac{(g^2)'}{2g^2}\chi' - \frac{(N^2)'}{2N^2}\chi' - \frac{2\chi'}{r} + g^2V_\chi, \quad (4.26)$$

onde $V_\sigma = \frac{\partial V(\sigma, \phi, \chi)}{\partial \sigma}$, $V_\phi = \frac{\partial V(\sigma, \phi, \chi)}{\partial \phi}$, e $V_\chi = \frac{\partial V(\sigma, \phi, \chi)}{\partial \chi}$.

Como no capítulo 3, consideramos a mudança de variáveis ($A(r, t) = g^2$, $C(r, t) = [g(r, t)/N(r, t)]^2$) para lidar com a não-linearidade presente na equação de Einstein. É conveniente efetuar uma nova escala adequada dos parâmetros que conduzem a quantidades adimensionais. Por esta razão, usamos as seguintes variáveis adimensionais

$$4\pi G \approx 1, \quad r \rightarrow r/m, \quad C \rightarrow Cm^2/\omega^2, \quad t \rightarrow \omega t.$$

As equações acopladas de Einstein-Klein-Gordon assumem a forma

$$\begin{aligned} A' &= A \left(\frac{1-A}{r} \right) + Ar [C\dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + \phi'^2 + \chi'^2] \\ &+ A^2r \left[\frac{1}{2}\sigma^2(\sigma - \sigma_0)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [(\sigma - 1/2\sigma_0)^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right]; \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} C' &= \frac{2C}{r} - \frac{2CA}{r} \\ &+ 2CAr \left[\frac{1}{2}\sigma^2(\sigma - \sigma_0)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [(\sigma - 1/2\sigma_0)^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right]; \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$C\ddot{\sigma} = -\frac{1}{2}\dot{C}\dot{\sigma} + \sigma'' + \sigma' \left(\frac{2}{r} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{A}{2}V_\sigma; \quad (4.29)$$

$$C\phi'' = \frac{C'\phi'}{2} - \frac{2\phi'C}{r} + \frac{CA}{2}V_\phi; \quad (4.30)$$

$$C\chi'' = \frac{C'\chi'}{2} - \frac{2\chi'C}{r} + \frac{CA}{2}V_\chi; \quad (4.31)$$

$$\dot{A} = rA\dot{\sigma}\sigma', \quad (4.32)$$

onde um ponto sobre uma função denota $\partial/\partial t$ e a linha denota $\partial/\partial r$. As variáveis $\sigma(r, t)$, $\phi(r)$ e $\chi(r)$ são os campos escalares reais, o campo depende de r e t e os outros dois campos ($\phi(r)$ e $\chi(r)$) dependem apenas do raio.

As soluções mais simples para as equações (4.27) - (4.31) são expansões periódicas da forma

$$A(r, t) = \sum_{j=0}^{J_{max}} A_{2j}(r) \cos(2j\omega t); \quad (4.33)$$

$$C(r, t) = \sum_{j=0}^{J_{max}} C_{2j}(r) \cos(2j\omega t); \quad (4.34)$$

$$\sigma(r, t) = \sum_{j=1}^{J_{max}} \sigma_{2j-1}(r) \cos[(2j-1)\omega t], \quad (4.35)$$

onde ω é a frequência fundamental e J_{max} é o valor de j em que a série é truncada para computação numérica.

4.3 Análise numérica

Para encontrar as configurações de equilíbrio, as equações oscilatórias (4.27-4.31) são resolvidas usando as expansões de Fourier para as funções métrica e escalar. Seguindo o mesmo procedimento do capítulo 3, as soluções são obtidas introduzindo as expansões de Fourier (4.33-4.35) nas equações (4.27-4.31) e ajustando cada coeficiente de Fourier de cada componente de Fourier a zero. As equações de EKG são reduzidas a equações diferenciais ordinárias.

As condições de contorno são determinadas pela necessidade de soluções não-singulares e assintoticamente planas: $A_{2j}(r=0) = 0$, $\phi'(r=0) = 0$, $A(r=\infty, t) = 1$ e $\phi(r=\infty, t) = 0$, para o qual as equações (4.27-4.31) se tornam um problema de autovalor. Assim, é necessário determinar os valores iniciais para C_j depois de especificar o campo

central para $\sigma(0)$, $\phi(0)$ e $\chi(0)$. Todas as análises nesta seção serão feitas truncando a série em $j_{max} = 1$.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o efeito de redes de paredes de domínios em uma estrela solitônica oscilante, com a ajuda de uma lagrangeana contendo três campos escalares (σ, ϕ, χ) , onde o campo sigma (σ) descreve a concha da estrela (campo de acolhimento) e os dois campos escalares restantes (ϕ e χ) são responsáveis pela formação da rede. Para atingir esse objetivo é necessário considerar dois casos em que usamos dois tipos de perturbações.

Caso 1. Perturbações de todo o potencial,

caso 2. Perturbações da concha da estrela (o termo no potencial que controla a superfície da estrela).

4.3.1 Caso 1. Perturbações do potencial

Neste caso, estudamos a formação de redes de paredes de domínio com estrelas de sóliton oscilantes, ajustando σ ao redor do parâmetro σ_0 . Isto leva a pequenas perturbações do potencial, resultando na possibilidade de a rede ser perturbada em torno da superfície da estrela. Isto é feito considerando $\sigma \approx \sigma_0 + \eta$, onde $\eta \ll \sigma_0$ (η é um campo de perturbação). Dependendo de como escolhemos a relação entre σ e σ_0 equação (4.11) nos dirá se a rede é formada dentro da estrela, ou se a rede está exatamente na superfície da estrela, ou fora da superfície da estrela.

Assim conduzindo a estas três possibilidades:

I) Rede formando dentro da estrela ($\sigma \approx \sigma_0 + \eta$)

II) Rede formando na superfície da estrela ($\sigma \approx (1/2)\sigma_0 + \eta$)

III) Rede formando fora da estrela ($\sigma \approx (1/4)\sigma_0 + \eta$).

I. Rede dentro da estrela ($\sigma \approx \sigma_0 + \eta$)

Para termos a rede de paredes de domínios formada dentro da estrela consideramos $\sigma \approx \sigma_0 + \eta$. Quando substituimos esta condição nas equações (4.27-4.30) as equações de EKG tornam-se

$$A' = A \left(\frac{1-A}{r} \right) + Ar \left[C\dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + \phi'^2 + \chi'^2 \right] \quad (4.36)$$

$$+ A^2 r \left[(\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [1/4\sigma^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right];$$

$$C' = \frac{2C}{r} - \frac{2CA}{r} \quad (4.37)$$

$$+ 2CAr \left[(\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [1/4\sigma^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right];$$

$$C\ddot{\sigma} = -\frac{1}{2}\dot{C}\dot{\sigma} + \sigma'' + \sigma' \left(\frac{2}{r} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{1}{2}A\sigma(\phi^2 + \chi^2); \quad (4.38)$$

$$C\phi'' = \frac{C'\phi'}{2} - \frac{2\phi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\phi(\phi^2 + \chi^2) - 3(\phi^2 - \chi^2) + \frac{1}{2}\sigma^2\phi - \frac{9}{2}\phi \right]; \quad (4.39)$$

$$C\chi'' = \frac{C'\chi'}{2} - \frac{2\chi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\chi(\phi^2 + \chi^2) + 6\chi\phi + \frac{1}{2}\sigma^2\chi - \frac{9}{2}\chi \right]. \quad (4.40)$$

Nós impomos as condições de contorno apresentadas na seção (4.3) no sistema de equações acima, e resolvemos numericamente usando o método de Runge Kutta de quarta ordem em Maple. As funções métricas A_0 e A_2 são mostradas na figura (4.2). Pode-se verificar que as condições de contorno necessárias são satisfeitas. A linha contínua mostra o primeiro termo da expansão da série de Fourier, enquanto a linha pontilhada é o segundo termo.

A Figura 4.3 mostra a massa da estrela em função da densidade central $\sigma(0)$, com as densidades centrais dos outros dois campos $\phi(0)$ e $\chi(0)$ mantidos fixos.

Como no exemplo anterior, usamos a seguinte definição de massa ADM:

$$M = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} \left[1 - \frac{1}{A(r, t)} \right] \frac{M_{Pl}^2}{m} \quad (4.41)$$

onde $r \rightarrow \infty$ apenas significa computação na borda da grade [9, 47]. A massa aumenta monotonicamente até atingir um valor $M_c \approx 0,11M_{Pl}^2/m$ (massa crítica) após o que

começa a diminuir. Esse comportamento é exatamente o mesmo para a estrela soliton oscilante sem rede. Massa crítica neste sentido é uma massa máxima combinada de estrela e da rede antes de desmoronar em um buraco negro. Semelhante ao caso sem rede, o ramo à esquerda do ponto máximo é o ramo estável, e à direita é o ramo instável. A presença da rede dentro da estrela alterou a estabilidade da estrela. Como resultado, desacelera o colapso da estrela

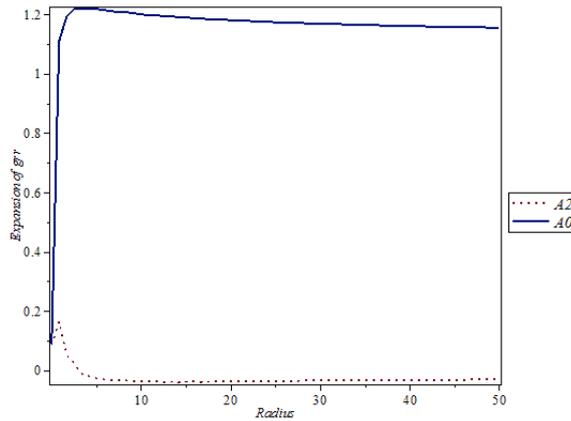


Figura 4.2: O coeficiente métrico $A(r, t)$ e suas duas primeiras expansões A_0 (linha contínua) e A_2 (linha pontilhada), para o campo central $\sigma(0) = 0, 4$.

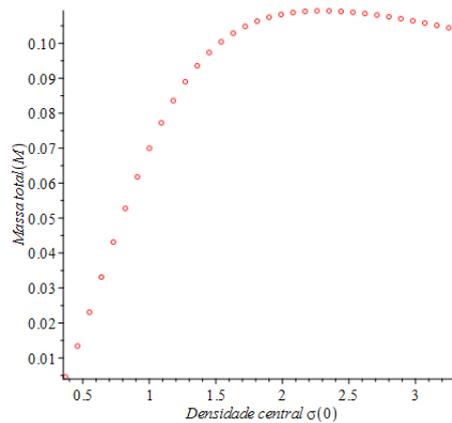


Figura 4.3: O perfil de massa para a "oscillaton" que tem rede de paredes de domínios dentro como uma função da densidade central $\sigma_1(0)$. A massa aumenta até atingir um ponto crítico em $\sigma_c \approx 2, 3$, e $M_c \approx 0, 11M_{PL}^2/m$.

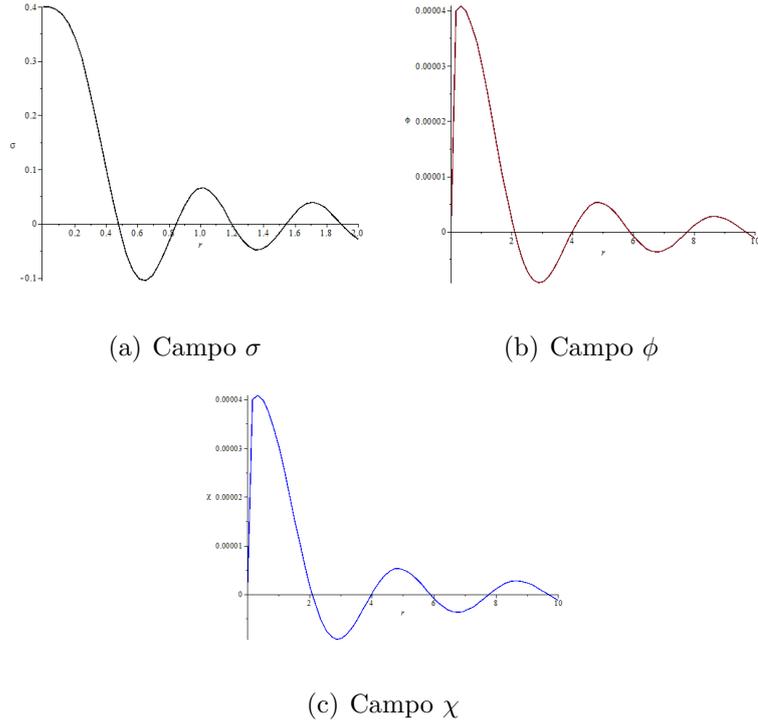


Figura 4.4: O comportamento dos campos escalares quando a rede está dentro: (a) O primeiro estado excitado do campo σ contra r , o campo tende a zero de acordo com a condição de contorno $\sigma(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. (b) O campo ϕ contra r , o campo aumenta para um ponto e, em seguida, começa a diminuir para zero. (c) O campo χ contra r , o mesmo comportamento que o do campo ϕ .

II. Rede na superfície ($\sigma \approx (1/2)\sigma_0 + \eta$)

Veamos o cenário em que a rede é formada na superfície da estrela. A possibilidade de termos a rede na superfície da estrela é perturbar todo o potencial no regime de $\sigma \approx (1/2)\sigma_0 + \eta$, o campo escalar remanescente (ϕ, χ) possui simetria Z_3 , e descreve três junções de paredes de domínio que permitem a formação de rede exatamente na superfície da estrela, como foi apontado pela primeira vez em [12]. Neste caso, as equações de EKG são

$$\begin{aligned}
 A' = & A \left(\frac{1-A}{r} \right) + Ar \left[C\dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + \phi'^2 + \chi'^2 \right] \\
 & + A^2 r \left[\frac{1}{2}\sigma^4 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) - 9/4(\phi^2 + \chi^2) \right];
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$C' = \frac{2C}{r} - \frac{2CA}{r} + 2CAr \left[\frac{1}{2}\sigma^4 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) - 9/4(\phi^2 + \chi^2) \right]; \quad (4.43)$$

$$C\ddot{\sigma} = -\frac{1}{2}\dot{C}\dot{\sigma} + \sigma'' + \sigma' \left(\frac{2}{r} - \frac{C'}{2C} \right) - A\sigma^3; \quad (4.44)$$

$$C\phi'' = \frac{C'\phi'}{2} - \frac{2\phi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\phi(\phi^2 + \chi^2) - 3(\phi^2 - \chi^2) - \frac{9}{2}\phi \right]; \quad (4.45)$$

$$C\chi'' = \frac{C'\chi'}{2} - \frac{2\chi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\chi(\phi^2 + \chi^2) + 6\chi\phi - \frac{9}{2}\chi \right]. \quad (4.46)$$

Invocando as condições de contorno, resolvendo numericamente o problema de autovalor e estudar as soluções resultam nas seguintes observações. Um resultado numérico típico para o coeficiente métrico g_{rr} é mostrado na figura (4.5).

A massa em função da densidade central $\sigma(0)$ para a possibilidade quando a rede está na superfície da estrela é mostrada na figura (4.6). Um ponto importante surge, observamos que a massa aumenta monotonicamente até atingir um ponto (local máximo M_L) $M_L \approx 0,1M_{PL}^2/m$, após o que ele começa a aumentar novamente rapidamente. Isso se comporta de forma diferente dos perfis de massa de uma estrela solitônica oscilante e estrelas de boson. As características deste perfil de massa sugerem que, em vez de se desmoronar ou decair em um buraco negro após atingir o máximo ($\approx 0,1M_{PL}^2/m$), a estrela se estabiliza novamente. Podemos associar essas características à rede na superfície da estrela.

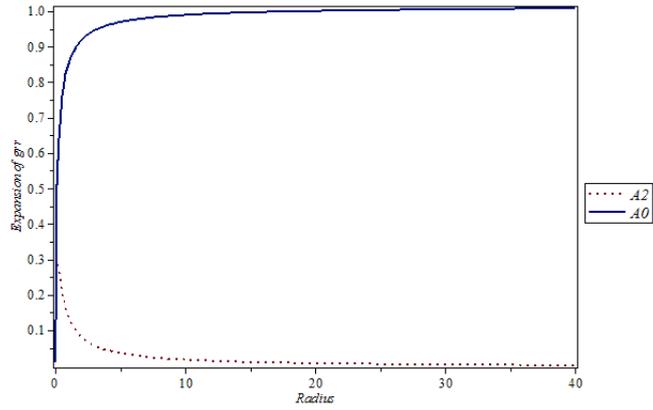


Figura 4.5: O coeficiente métrico $A(r, t) = g_{rr}$ e suas duas primeiras expansões A_0 e A_2 , para a densidade de campo central $\sigma(0) = 0,05$. Para o caso em que a rede está na superfície da estrela.

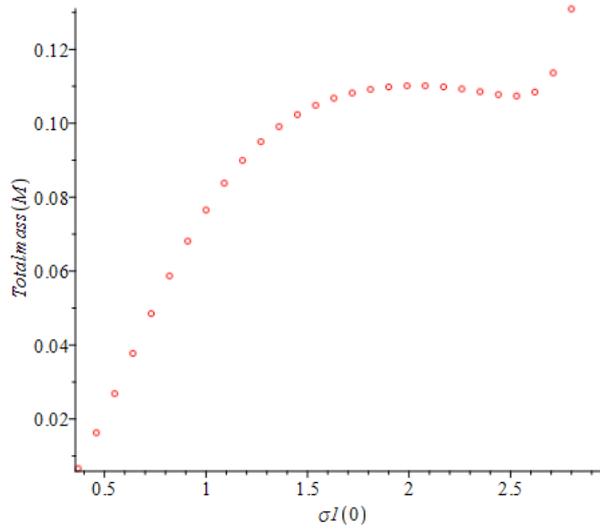


Figura 4.6: O perfil de massa para a oscilação que tem rede de paredes de domínio na superfície como uma função da densidade central $\sigma_1(0)$. A massa aumenta até atingir um valor máximo em $\sigma_c \approx 2,16$, e $M_L \approx 0,1M_{PL}^2/m$.

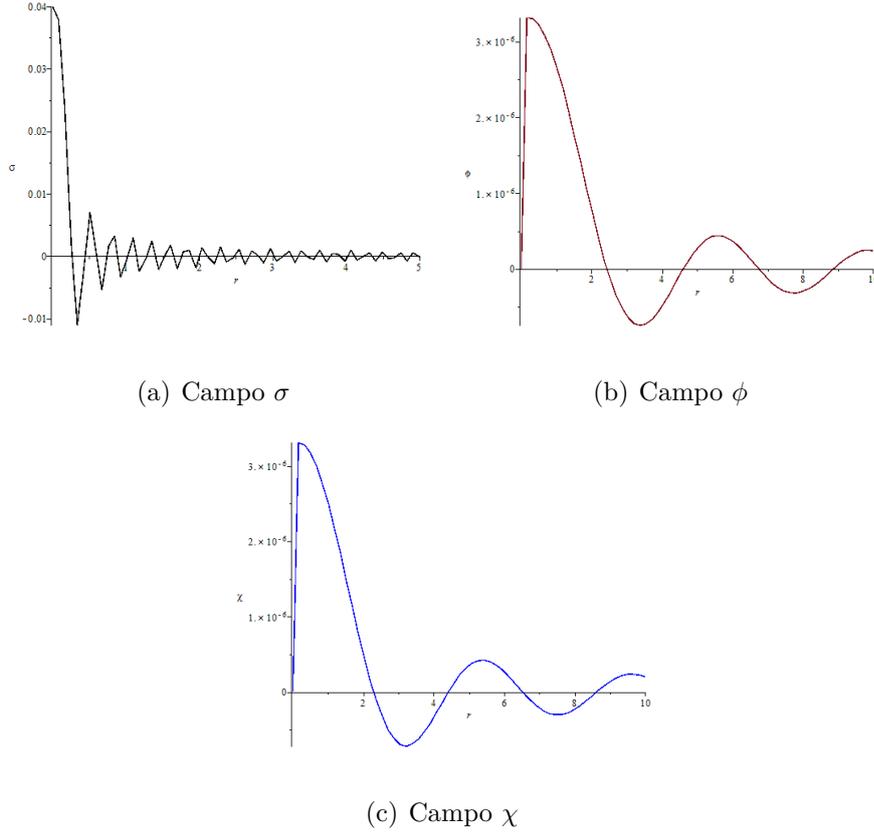


Figura 4.7: Representação dos campos escalares quando a rede está na superfície da estrela.

III. Rede fora da estrela ($\sigma \approx (1/4)\sigma_0 + \eta$)

Agora, voltemos nossa atenção para o caso, no qual consideramos a rede fora da estrela. Esse cenário pode ser realizado usando a condição que $\sigma \approx (1/4)\sigma_0 + \eta$. Neste caso, as equações de EKG tornam-se

$$A' = A \left(\frac{1-A}{r} \right) + Ar \left[C\dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + \phi'^2 + \chi'^2 \right] + A^2 r \left[\frac{9}{2}\sigma^4 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [\sigma^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right]; \quad (4.47)$$

$$C' = \frac{2C}{r} - \frac{2CA}{r} + 2CAr \left[\frac{9}{2}\sigma^4 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [\sigma - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right]; \quad (4.48)$$

$$C\ddot{\sigma} = -\frac{1}{2}\dot{C}\dot{\sigma} + \sigma'' + \sigma' \left(\frac{2}{r} - \frac{C'}{2C} \right) - 9A\sigma^3 - A\sigma(\phi^2 + \chi^2); \quad (4.49)$$

$$C\phi'' = \frac{C'\phi'}{2} - \frac{2\phi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\phi(\phi^2 + \chi^2) - 3\phi^2 + 6\chi^2 + 2\sigma^2\phi - \frac{9}{2}\phi \right]; \quad (4.50)$$

$$C\chi'' = \frac{C'\chi'}{2} - \frac{2\chi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\chi(\phi^2 + \chi^2) + 6\chi\phi + 2\sigma^2\chi - \frac{9}{2}\chi \right]. \quad (4.51)$$

Resolvemos as equações acima (4.47-4.51) submetidas às mesmas condições de contorno (condições de soluções não singular e assintoticamente planas). Uma solução típica para o coeficiente métrico é mostrada na figura (4.8). Da figura. 4.9, observamos que a massa aumenta monotonicamente até atingir valores máximos (massa crítica) $M_c \approx 0,1M_{PL}^2/m$, após o que começa a diminuir. Esse comportamento é exatamente o mesmo para estrelas de soliton oscilantes sem uma rede. Fisicamente, faz sentido porque nesta simulação, a rede está fora da estrela, o que quer dizer que não há rede em sua superfície, ou dentro da estrela, resultando nesse comportamento.

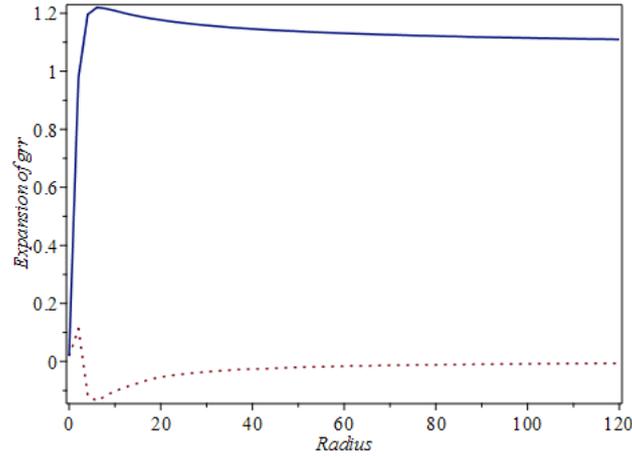


Figura 4.8: O coeficiente métrico $A(r, t)$ e suas duas primeiras expansões A_0 e A_2 , para o campo central $\sigma(0) = 0, 1$.

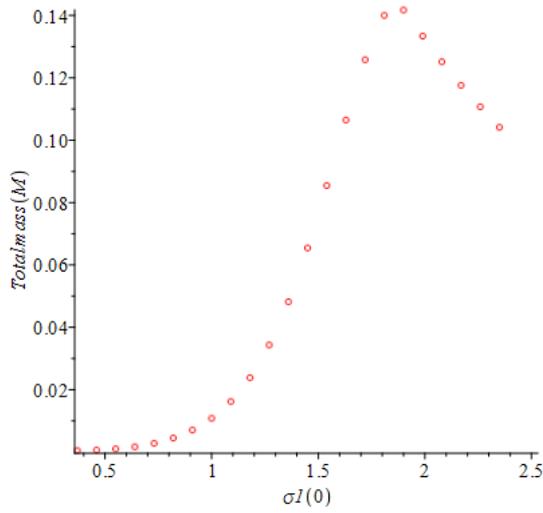
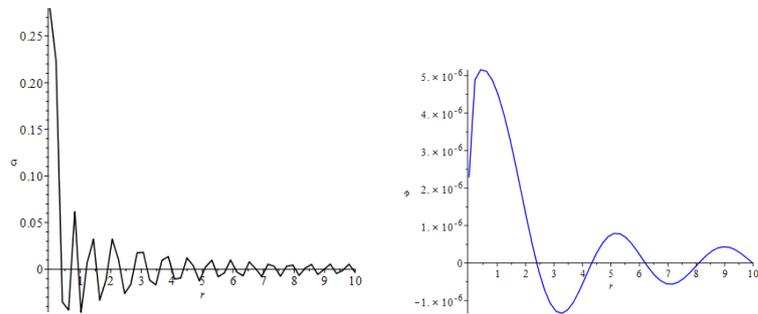
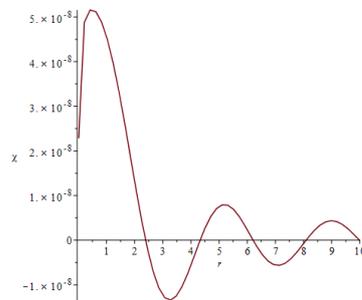


Figura 4.9: O perfil de massa para o "oscillaton" que tem rede de paredes de domínio dentro como uma função da densidade Central $\sigma(0)$. A massa aumenta até atingir um ponto crítico em $\sigma_c \approx 1,8$, e $M_c \approx 0,1M_{PL}^2/m$.



(a) Campo σ

(b) Campo ϕ



(c) Campo χ

Figura 4.10: O primeiro estado excitado dos campos escalares σ , ϕ , e χ , em função de r

4.3.2 Caso 2. Perturbações da concha da estrela

O foco deste caso é estudar pequenas perturbações aplicadas ao termo de superfície $(\sigma - \frac{1}{2}\sigma_0)^2$ no potencial e a investigação do efeito que estas perturbações terão no perfil de massa da estrela. Nós perturbamos a concha introduzindo o campo de perturbação η no termo de superfície no potencial e fixamos o parâmetro $\sigma_0 \approx 1$, levando ao potencial mostrado na equação (4.52). Evoluindo cuidadosamente o campo η em torno de σ_0 , produz pequenas perturbações de concha em torno da rede, deslocando ligeiramente a concha para capturar a rede dentro da estrela, ou deixando a rede fora da estrela. Aqui, quando a superfície da estrela corresponde exatamente à rede, o termo superficial no potencial desaparece ($(\sigma - \frac{1}{2}\eta)^2 \approx 0$); Baseado no conhecimento de que na superfície da estrela $\sigma \approx \frac{1}{2}\sigma_0$. Assim, temos de igualar o termo de superfície na equação (4.52) a zero. Isso gera três possibilidades:

- I) A rede formando dentro da estrela (quando consideramos $\eta \approx 2$),
- II) Rede formando na superfície da estrela ($(\sigma - \frac{1}{2}\eta)^2 \approx 0$),
- III) Rede formando fora da estrela ($\eta \approx \frac{1}{2}$).

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2(\sigma - 1)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [(\sigma - \frac{1}{2}\eta)^2 - \frac{9}{4}](\phi^2 + \chi^2) \quad (4.52)$$

consideramos $\sigma_0 = 1$.

I. Rede dentro da estrela ($\eta \approx 2$)

Para a concha deslocada para além da rede (tendo a rede presa dentro da estrela), perturbamos o sistema fixando o $\eta \approx 2$, levando às seguintes equações de EKG

$$A' = A \left(\frac{1-A}{r} \right) + Ar [C\dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + \phi'^2 + \chi'^2] \quad (4.53)$$

$$+ A^2 r \left[\frac{1}{2}\sigma^2(\sigma - 1)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [(\sigma - 1)^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right];$$

$$C' = \frac{2C}{r} - \frac{2CA}{r} + 2CAr \left[\frac{1}{2}\sigma^2(\sigma - 1)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) \right] \quad (4.54)$$

$$+ 2CAr [((\sigma - 1)^2 - 9/4)(\phi^2 + \chi^2)];$$

$$C\ddot{\sigma} = -\frac{1}{2}\dot{C}\dot{\sigma} + \sigma'' + \sigma' \left(\frac{2}{r} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{1}{2}A[\sigma(\sigma-1)^2 + \sigma^2(\sigma-1) + (\sigma-1)(\phi^2 + \chi^2)] \quad (4.55)$$

$$C\phi'' = \frac{C'\phi'}{2} - \frac{2\phi'C}{r} + \frac{CA}{2} [4\phi(\phi^2 + \chi^2) - 3(\phi^2 - \chi^2) + 2[(\sigma-1)^2 - 9/4]\phi]; \quad (4.56)$$

$$C\chi'' = \frac{C'\chi'}{2} - \frac{2\chi'C}{r} + \frac{CA}{2} [4\chi(\phi^2 + \chi^2) + 6\chi\phi + 2[(\sigma-1)^2 - 9/4]\chi]. \quad (4.57)$$

Resolvemos agora o sistema de equações acima numericamente, passando pelo mesmo processo como feito na seção anterior. Nós investigamos as representações gráficas resultantes das simulações descritas acima. A Figura (4.11) mostra o gráfico de expansão da métrica $A(r, t)$. A convergência da série é significativa, independentemente da não-linearidade das equações.

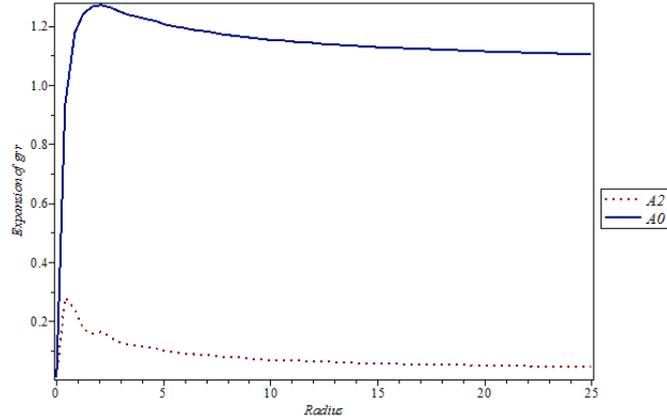


Figura 4.11: O coeficiente métrico $A(r, t)$ e suas duas primeiras expansões A_0 (linha contínua) e A_2 (linha pontilhada), para o campo central $\sigma(0) = 0,6$.

A partir da figura (4.12), o perfil de massa neste caso revela um comportamento diferente, comparado com a situação no primeiro caso. Aqui vemos que a massa sobe monotonicamente a um máximo local $M_L \approx 0.104M_{PL}^2/m$ com uma densidade central crítica de $\sigma_c \approx 1.982$ e então começa a aumentar novamente. Parece que quando se perturba a concha para capturar a rede dentro da estrela, estabiliza-se a estrela, impedindo assim a estrela de colapso.

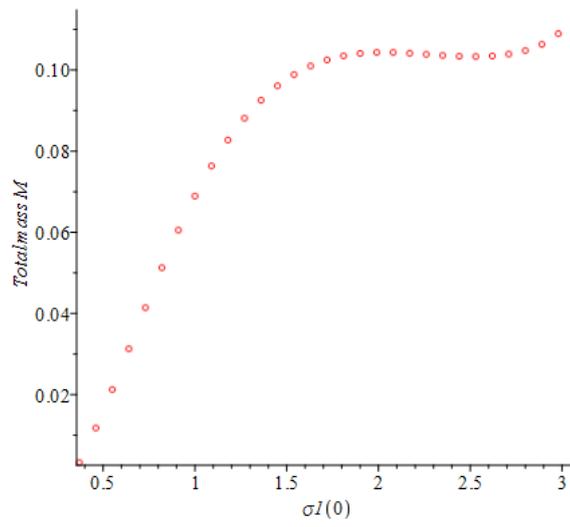


Figura 4.12: O perfil de massa para a "oscillaton" tendo uma rede de paredes de domínios dentro como uma função da densidade central $\sigma(0)$, com máximo local em $\sigma_c \approx 1,982$, $M_L \approx 0,104M_{PL}^2/m$.

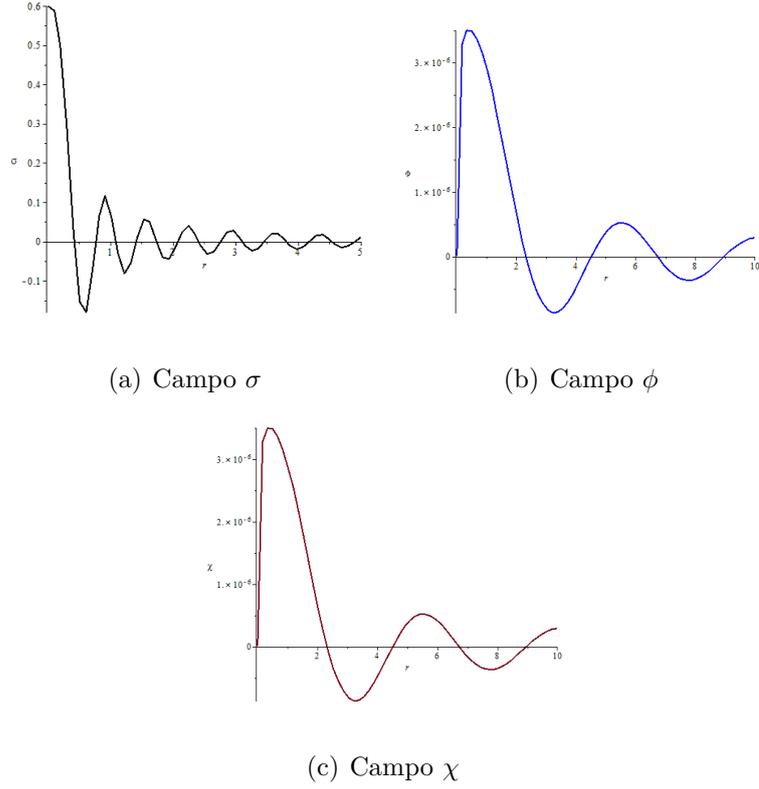


Figura 4.13: (a) O primeiro estado excitado do campo de acolhimento σ_1 com alguns valores de r , o campo tende a zero de acordo com a condição de contorno $\sigma(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. (b) O campo ϕ com alguns valores de r , o campo aumenta para um ponto e, em seguida, começa a diminuir. (c) O campo χ com alguns valores de r .

II. Rede formando na superfície a estrela $((\sigma - \frac{1}{2}\eta)^2 \approx 0)$

Como já foi apontado, para simular a possibilidade de ter a rede na superfície da estrela, precisamos considerar a condição de que o termo de superfície no potencial é aproximadamente zero, $(\sigma - \frac{1}{2}\eta)^2 \approx 0$. As equações de EKG são dadas por

$$\begin{aligned}
 A' &= A \left(\frac{1-A}{r} \right) + Ar [C\dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + \phi'^2 + \chi'^2] \\
 &+ A^2 r \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (\sigma - 1)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) - \frac{9}{4}(\phi^2 + \chi^2) \right];
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
 C' &= \frac{2C}{r} - \frac{2CA}{r} + 2CAr \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (\sigma - 1)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) \right] \\
 &- 2CAr \left[\frac{9}{4}(\phi^2 + \chi^2) \right];
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$C\ddot{\sigma} = -\frac{1}{2}\dot{C}\dot{\sigma} + \sigma'' + \sigma' \left(\frac{2}{r} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{1}{2}A[\sigma(\sigma - 1)^2 + \sigma^2(\sigma - 1)]; \quad (4.60)$$

$$C\phi'' = \frac{C'\phi'}{2} - \frac{2\phi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\phi(\phi^2 + \chi^2) - 3(\phi^2 - \chi^2) - \frac{9}{2}\phi \right]; \quad (4.61)$$

$$C\chi'' = \frac{C'\chi'}{2} - \frac{2\chi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\chi(\phi^2 + \chi^2) + 6\chi\phi - \frac{9}{2}\chi \right]. \quad (4.62)$$

Seguindo as rotinas numéricas usuais, extraímos e discutimos os gráficos resultantes. Podemos ver na figura (4.14), uma função métrica radial típica $A(r, t)$, para o caso de densidade central de $\sigma = 0,4$ é mostrada. A linha contínua mostra o primeiro termo da expansão da série de Fourier, enquanto a linha pontilhada é o segundo termo. Esta rápida convergência da série é típica de todas as configurações que calculamos.

Na figura (4.15) a massa M da estrela é plotada para alguns valores da densidade central $\sigma(0)$. Esta curva de massa é semelhante à configuração apresentada no primeiro caso, com máximo local $M_L \approx 0,1M_{PL}^2/m$. Indica que, novamente a estrela é impedida de colapso em um buraco negro devido à presença de rede em sua superfície. Encontramos que em ambas as perturbações é conveniente ter a rede na superfície da estrela se quisermos aumentar a vida útil da estrela.

A Figura (4.16) mostra o comportamento correspondente dos três campos escalares. Esse comportamento é típico de todas as configurações que calculamos e está de acordo com as condições de contorno.

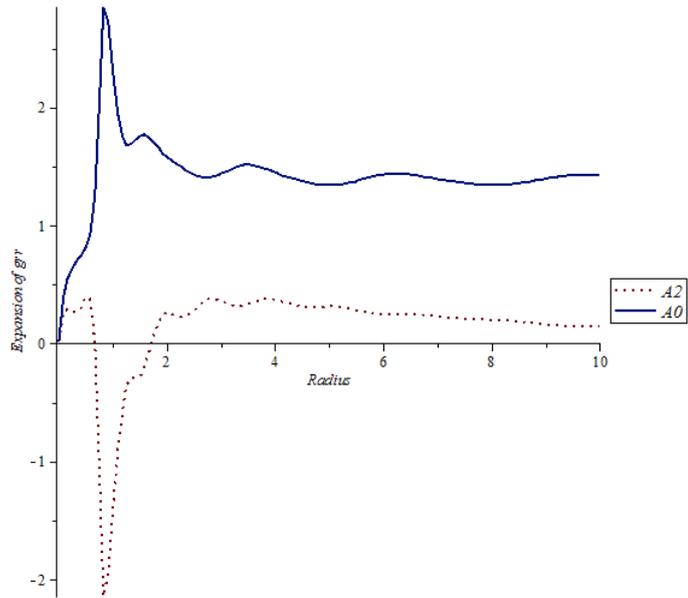


Figura 4.14: O coeficiente métrico $A(r,t)$ e suas duas primeiras expansões A_0 (linha contínua) e A_2 (linha contínua), para o campo central $\sigma(0) = 0,4$, no caso de perturbações da concha

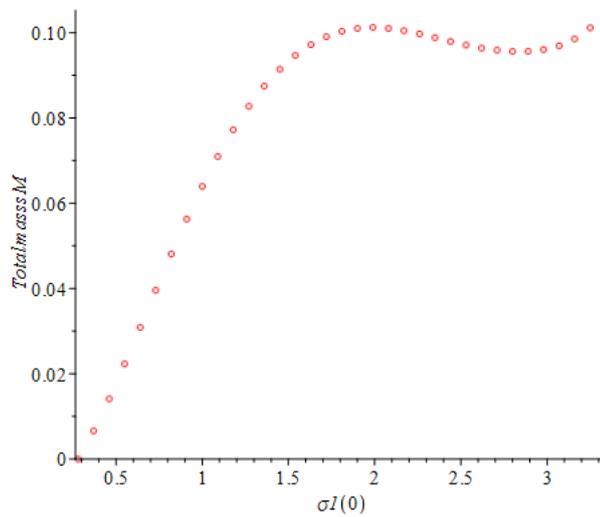


Figura 4.15: O perfil de massa para a oscilação que tem uma rede de paredes de domínios na superfície como uma função da densidade central $\sigma(0)$, com máximo local em $\sigma_c \approx 1.987$, $M_L \approx 0.1M_{PL}^2/m$. Isto é para o caso quando a perturbação é aplicada à concha da estrela.

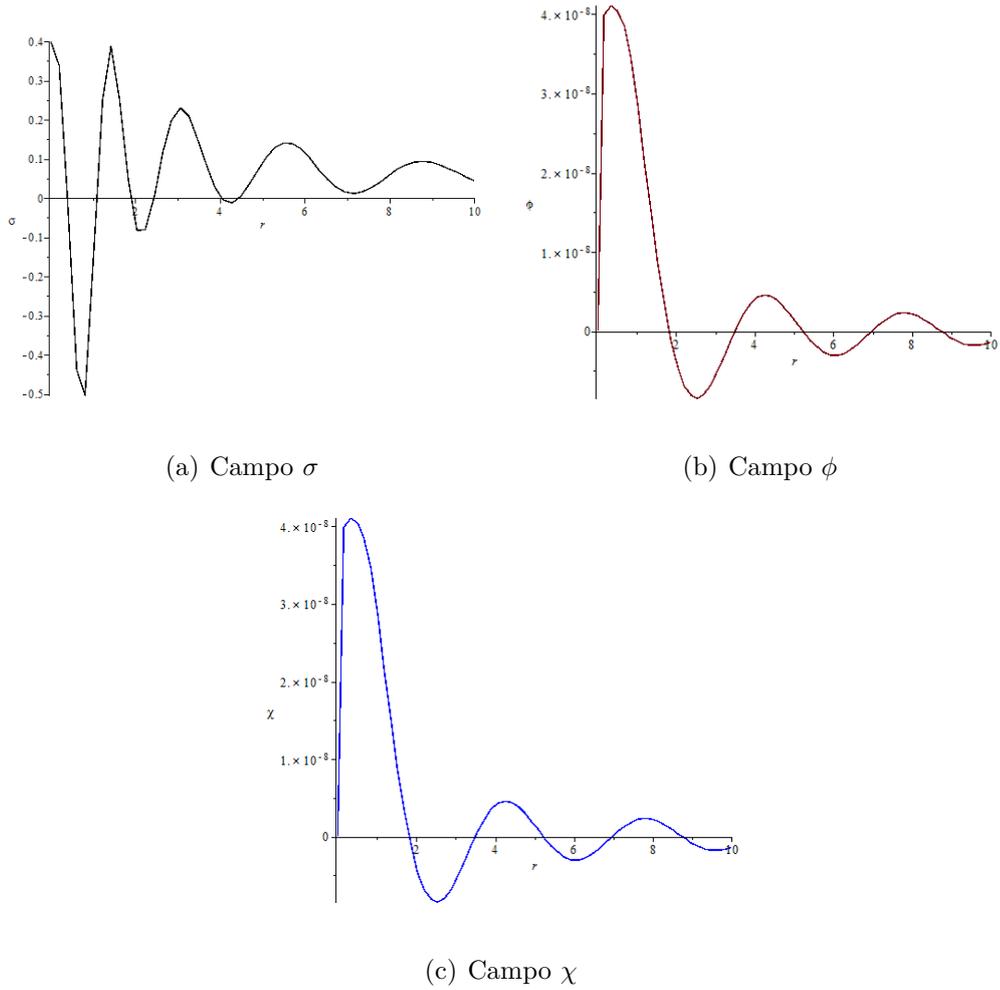


Figura 4.16: O comportamento correspondente dos três campos escalares (σ, ϕ, χ) com alguns valores de r

III. Rede fora da estrela ($\eta \approx \frac{1}{2}$)

Finalmente, estudamos a possibilidade da rede estar fora da estrela sob este tipo de perturbação. Como já mencionado, estamos trabalhando com η em torno do parâmetro $\sigma_0 \approx 1$. Para simular a possibilidade da rede se formar fora da estrela, η tem que ser menor que o parâmetro σ_0 ($\eta < 1$). Para esse efeito, escolhemos $\eta \approx \frac{1}{2}$. Isto produz as seguintes equações de EKG

$$\begin{aligned}
A' &= A \left(\frac{1-A}{r} \right) + Ar \left[C\dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + \phi'^2 + \chi'^2 \right] \\
&+ A^2 r \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (\sigma - 1)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) + [(\sigma - 1/4)^2 - 9/4](\phi^2 + \chi^2) \right];
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
C' &= \frac{2C}{r} - \frac{2CA}{r} + 2CAr \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (\sigma - 1)^2 + (\phi^2 + \chi^2)^2 - \phi(\phi^2 - 3\chi^2) \right] \\
&+ CAr \left[((\sigma - 1/4)^2 - 9/4)(\phi^2 + \chi^2) \right];
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$C\ddot{\sigma} = -\frac{1}{2} \dot{C}\dot{\sigma} + \sigma'' + \sigma' \left(\frac{2}{r} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{1}{2} A [\sigma(\sigma - 1)^2 + \sigma^2(\sigma - 1) + 2(\sigma - 1/4)(\phi^2 + \chi^2)] \tag{4.65}$$

$$C\phi'' = \frac{C'\phi'}{2} - \frac{2\phi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\phi(\phi^2 + \chi^2) - 3(\phi^2 - \chi^2) + 2[(\sigma - 1/4)^2 - 9/4]\phi \right]; \tag{4.66}$$

$$C\chi'' = \frac{C'\chi'}{2} - \frac{2\chi'C}{r} + \frac{CA}{2} \left[4\chi(\phi^2 + \chi^2) + 6\chi\phi + 2[(\sigma - 1/4)^2 - 9/4]\chi \right]. \tag{4.67}$$

Estes últimos conjuntos de equações também correspondem às rotinas numéricas nas seções anteriores. Os resultados numéricos típicos para o coeficiente métrico do sistema são mostrados na figura (4.17). Pode-se verificar que as condições de contorno necessárias são satisfeitas.

O perfil de massa dos resultados numéricos para diferentes "oscillatons" em função de $\sigma(0)$ é mostrado na figura (4.18). O comportamento geral da massa é semelhante ao perfil de massa no primeiro caso, ver figura (4.9). Podemos ver que neste caso há uma massa máxima $M_c \simeq 0.144M_{PL}^2/m$ com $\sigma_c(0) \simeq 3.0$. Este valor crítico é importante, uma vez que foi relatado que os oscilaton com valores centrais inferiores a $\sigma_c(0)$ são estáveis [11]. Em comparação, este caso apresenta um "oscillaton" com atraso de decaimento, isto significa que sob esta perturbação a estrela ficou mais tempo antes de decair em um buraco negro.

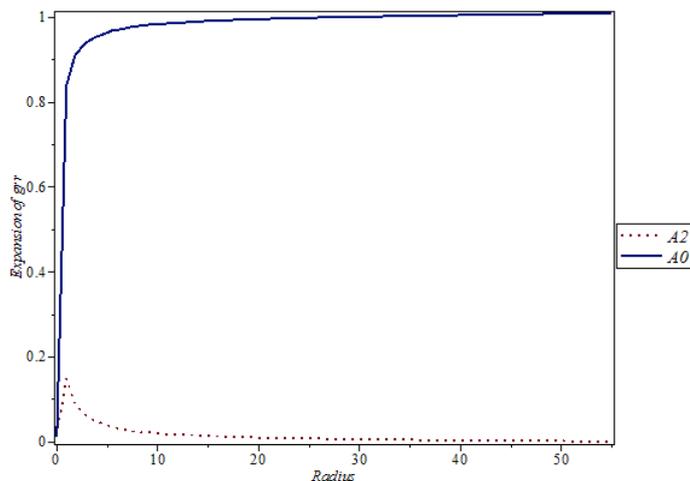


Figura 4.17: O coeficiente métrico $A(r, t)$ e suas duas primeiras expansões A_0 (linha contínua) e A_2 (linha contínua), para o campo central $\sigma(0) = 0,01$, no caso do concha Perturbações

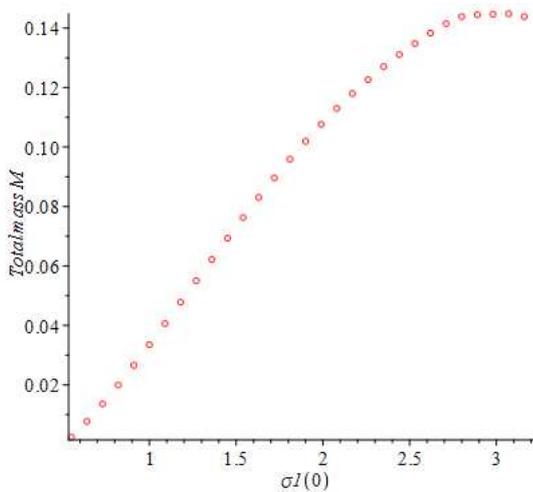
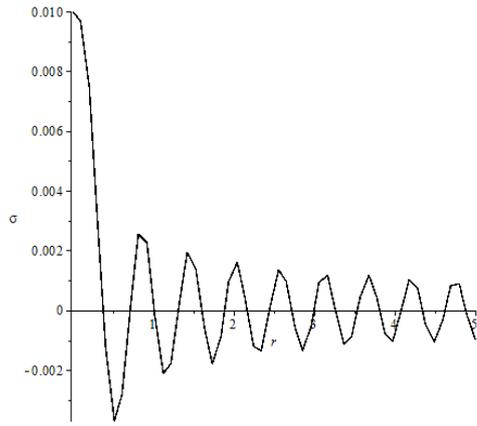
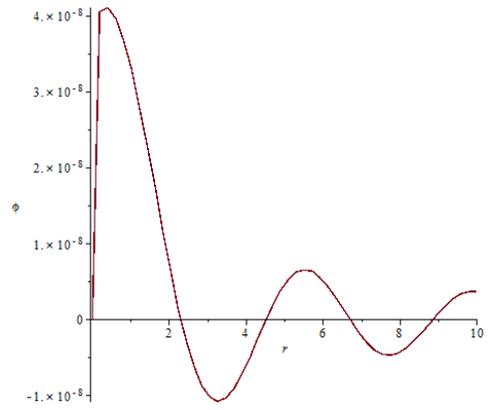


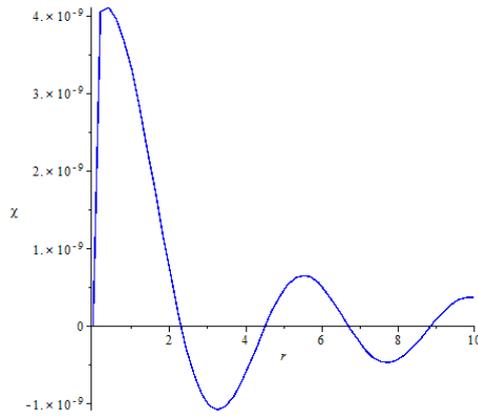
Figura 4.18: O perfil de massa para a "oscillaton" que tem uma rede de paredes de domínio na superfície como uma função da densidade central $\sigma(0)$, com máximo local em $\sigma_c \approx 3,0$, $M_L \approx 0,144M_{PL}^2/m$. Isto é para o caso quando a perturbação é aplicada à concha da estrela.



(a) Campo σ



(b) Campo ϕ



(c) Campo χ

Figura 4.19: O comportamento correspondente dos três campos escalares (σ, ϕ, χ) com alguns valores de r .

Capítulo 5

Discussões e Conclusões

A aproximação mais simples para a solução das equações de Einstein-Klein-Gordon acopladas com rede de paredes de domínio para um elemento de linha esfericamente simétrica foi apresentada. As soluções para equações de Einstein-Klein-Gordon que admitem soluções solitônicas auto-gravitantes "oscillaton" têm sido estudadas por vários autores [10, 11, 42] — ver também rede de paredes de domínios [7, 12, 13]. Neste trabalho apresentamos um modelo que suporta a formação de rede de paredes de domínios como "oscillatons". Isso foi feito através da introdução de uma lagrangeana que contém três campos escalares que são acoplados uns aos outros por um potencial. O potencial foi escolhido para fornecer a estrela de soliton oscilante um padrão esférico com uma rede de paredes de domínios [13]. De acordo com os resultados [42], os "oscillatons" podem ser classificados em dois grupos bem definidos, os de ramos S e U. Os oscillaton de ramo S são configurações de equilíbrio estáveis, que oscilam de acordo com sua frequência fundamental e intrínseca (ω). O ramo U são configurações intrinsecamente instáveis. Uma manifestação da sua natureza instável é que elas rapidamente colapsam em buracos negros se sua massa for aumentada.

Neste trabalho foram utilizados dois tipos de perturbações para simular as três possibilidades. Tendo a rede de paredes de domínio dentro da estrela, ou a rede formando na superfície da estrela, ou a rede envolvida fora da estrela. Estes três cenários podem ser

pensados como três possíveis experiências diferentes que um "oscillaton" pode percorrer na evolução cosmológica. A seção (4.3.1) apresentou o primeiro caso em que consideramos pequenas perturbações para todo o potencial do sistema. Isso foi possível trabalhando o campo σ em torno do σ_0 com a ajuda de uma perturbação de campo η . A próxima seção apresentou o segundo caso em que perturbamos o termo de superfície no potencial, desenvolvendo cuidadosamente o campo η em torno de σ_0 . Estas simulações são desafiadoras devido à não linearidade das equações de Einstein-Klein-Gordon e também devido às características dinâmicas das estrelas de solitons oscilantes, sem configurações de equilíbrio com componentes métricas estáticas. Neste trabalho truncamos o sistema de equações após um máximo de $j = j_{max} = 1$. Embora não tenhamos provado analiticamente que a série representa uma solução exata para as equações de Einstein-Klein-Gordon para o sistema de três campos escalares, temos dado fortes indícios de que a série de fato converge rapidamente, em ambos os casos (Figuras 4.2, 4.5 , 4,8, 4,11, 4,14, 4,17).

Como os principais objetivos deste trabalho são investigar o efeito da rede de paredes de domínios sobre a estabilidade da estrela, investimos muito esforço no perfil de massa de todas as configurações em ambas as perturbações. A partir disso, demonstramos que a rede de paredes de domínios realmente afeta a estabilidade da estrela. As Figs. (4.6, 4.12 e 4.15) apresentam um comportamento diferente dos perfis de massa conhecidos nas teorias (para as estrelas de soliton e boson). Podemos dizer que este objeto tem dois ramos-S, o primeiro ramo-S é para a parte da estrela onde não há rede e o segundo ramo-S pode estar relacionado à rede de paredes de domínios. Estes resultados levaram ao fato de que a estrela se estabiliza quando a rede é formada na superfície da estrela em ambos os casos, deslocando o ponto crítico ainda mais. A partir das simulações, podemos dizer que é energeticamente favorável para a rede ser formada na superfície da estrela, ou seja, a formação de rede na superfície da estrela pode ser um mecanismo cosmológico que pode garantir a estabilidade de uma estrela de soliton oscilante. Além disso, vimos resultados interessantes quando simulamos a possibilidade de ter a rede fora da estrela (Figs 4.9 e

4.18). Descobrimos que seus perfis de massa são semelhantes aos da teoria. Eles têm dois ramos separando a massa máxima. Isso fisicamente faz sentido, uma vez que a rede fora da estrela pode ser interpretada como, nenhuma rede na estrela.

Para o nosso conhecimento esta é a primeira vez que estrelas de soliton oscilantes com rede de paredes de domínios é estudado. Esta investigação levou à descoberta de um novo tipo de objeto auto-gravitante e à existência deste novo objeto que poderá ter implicações cosmológicas e astrofísicas significativas.

Observamos que neste trabalho todas as análises foram feitas sem a consideração da temperatura, ou seja, não consideramos o efeito da temperatura na rede. O modelo apresentado dá espaço para a inclusão de temperatura sob a forma de correções térmicas que modificarão a lagrangeana. Esta questão e muitas outras serão abordadas num futuro próximo.

Bibliografia

- [1] T.D Lee. *Soliton stars and the critical masses of black holes*. Phys. Rev. D. 35, 3637, (1987).
- [2] T.D Lee and Y. Pang. *Fermion soliton stars and black holes*. Phys. Rev. D. 35, 3678, (1987).
- [3] R. Friedberg, T.D Lee and Y. Pang. *Scalar soliton stars and black holes* Phys. Rev. D 35 3658 (1987).
- [4] C.W. Misner K.S Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation* (Feeman, San Francisco, 1973).
- [5] R. M. Wald. *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [6] R. Friedberg, T.D Lee and Y. Pang. *Mini-Soliton stars*. Phys. Rev. D 35 3640.
- [7] Francisco A. Brito and Dionisio Bazeia. *Network of domain walls on soliton stars*. Phy. Rev. D64(2001) 065022: [hep-th/0105296].
- [8] T.D Lee. *Example of four-dimensional soliton solutions and abnormal nuclear states*. Phys. Rep. 23 C, 254, (1976)
- [9] S. Coleman. *Q-balls*. Nucl. Phy. B 262, 263 (1985).
- [10] E. Seidal and W,-M. Suen. *Dynamical evolution of boson stars: Perturbing the ground state*. Phys. Rev. D 42, 384 (1990).

- [11] E. Seidal and W.-M. Suen. *Oscillating soliton stars*. Phys. Rev. Lett. 72, 1659 (1991)
- [12] D. Bazeia and F. A. Brito. *Tiling the plane without supersymmetry*. Phy. Rev. Lett. 84, 1094 (2000).
- [13] D. Bazeia and F. A. Brito. *Entrapment of network of domain walls*. Phys. Rev. D 62, 101701 (R) (2000). [hep-th/0005045].
- [14] 13. S. Alexander, R. Brandenberger, R. Easther, and A. Sonborger, M. Nagasawa and R. Brandenberger. *On the interaction of monopoles and domain walls*. Phys. Lett. B 467, 205 (1999).[hep-ph/9903254].
- [15] A. Alonso Izquierdo, M.A. Gonzalez Leon, J. Mateous Guilarte. *Nonlinearity* 15. 1097 (2002).
- [16] H.S.M. Coxeter. *Regular Complex polytopes. Second Edition* (Cambridge University press, New York, 1991).
- [17] V.P. Frolov and D.V Fursaev. *Black holes with polyhedral multi-string configurations*. *Class. Quant. Grav.* 18,1535 (2001).
- [18] D. Bazeia and F. A. Brito. *Entrapment of network of domain walls*. Phys. Rev, D 62, 101701 (R).
- [19] D. Bazeia and F. A. Brito. *Bags, junctions, and network of BPS and non-BPS defects*. Phys. Rev, D 61, 105019.
- [20] E. W. Kolb and M.S Turner. *The Early Universe*. (Addison-Wesly, 1990).
- [21] Katherine Brading and Elena Castellanni. *editors, Symmetries in Physics; Philosophical reflections*. Cambridge University Press 2003.
- [22] Suzanne Van Dam. *Spontaneous Symmetry in Higgs mechanism* . Phisci. Archie, 2011.

- [23] Johannes Zierenberg. *Spontaneous symmetry breaking*. Faculty of Physics and Earth Sciences University of Leipzig. July 2008.
- [24] T. Prokopec. *Lecture notes for Cosmology: The Standard Cosmological model*, 2008, <http://www.phys.uunl/prokopec/25cm.pdf>.
- [25] A.H Eschenfelder. *Magnetic Bubble Technology* (Springer-Verlay, Berlin, 1981).
- [26] B. A. Strukov and A.P Levanyuk. *Ferroelectric phenomena in Crystals*. (Springer-Verlay, Berlin, 1998).
- [27] A. Vilenkin and E.P.S Shellard. *Cosmic Strings and other Topological Defects*. (Cambridge UP, Cambridge/UK, 1994).
- [28] W.H. Press, B.S. Ryder, D.N. Spergel. *Dynamical evolution of domain walls in an expanding universe*. *Astrophys. J.* 347 (1989) 590.
- [29] Bogolmonyi, E.B. *The Stability of classical Solutions*. *Sov. J. Nucl. Phys.*
- [30] D. Bazeia, M.J. dos Santos, and R.F. Ribeiro. *Solitons in a system of coupled scalar fields*. *Phys. Lett. A* 208 (1995) 84.
- [31] A. de Souza Dutra. *General solutions for some classes of interacting two field kinks*. *Phys. Lett. B* 626 (2005) 249.
- [32] M. Gleiser and N. Stamatopoulos. *Entropic measure for localized energy configurations: Kinks, Bounces, and Bubbles*. *Phys. Lett. B* 713 (2012).
- [33] H. Boschi-Filho and F.A. Brito. *Domain defects in system of two real scalar fields*. *JHEP.* 9904, 028 (1999):[arxiv: hep-th/9811084].
- [34] D. Bazeia and F.A. Brito. *Bags, junctions, and network BPS and non-BPS*. *Phys. Rev, D* 61, 105019 (2000) [arxiv: hep-th/9912015].

- [35] A. Urena-Lopez, T. Matos, R. Becceril. *Inside oscillatons*. Class. Quant. Grav. 196259, (2002).
- [36] M. Alcubierre et al. *Numerical studies of ϕ^2 oscillatons*. Class. Quant. Grav. 20, 2883, (2003).[gr-qc/0301105].
- [37] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2 edition, 1996.
- [38] A.D Kennedy, J. Kuti, S. Meyer, and B.J Pendleton. *Where is the continuum in lattice quantum chromodynamics?*. Phys. Rev. Lett. 54,87 (1985).
- [39] Ashok Das. *Lectures of Quantum Field Theory* . World Scientific Publishing company, 2008.
- [40] T. Kodama, L.C.S de Oliveira, and F.C. Santos. *Properties of a general-relativistic kink solution*. Phys. Rev. D 19, 3576 (1979).
- [41] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology;Principle and Applications of General Theory of Relativity*. J. Wiley & Sons, 1972.
- [42] Balakrishna, J., Bondaresco, R., Danes, G. and Bondarescu, M. *Numerical Simulations of Oscillating Soliton Stars: Excited states in Spherical Symmetry and ground state evolutions in 3D*. Phys. Rev.D, 77, 024028, (2008). [DOI],[ADS],[arxiv: 0710.4131[gr-qc]].
- [43] Vladimir A. Miransky, *Dynamical Symmetry Breaking in quantum Field Theories* .
- [44] Patterns of Symmetry Breaking, Edited by Henry Arodz, Jacek Dziarmega and Wojciech Hubert Zerek .
- [45] Ivancevic, Vladamir G., Ivanceric, Tijana T. *Complex Nonlinearity Chaos, Phase Transitions, Topology change and Path Integrals*.

- [46] D. Sticlet. *Phase transitions in the Early universe*, <http://fyzikn.uniza.sk/~melo/Dorusticlet.pdf>.
- [47] Grøn, Øyrind; Hervik, Sigbjorn (2007). *Einstein's General Theory of Relativity: With modern applications in cosmology* (illustrated ed.). Springer Science and Business Media.
- [48] Baibhav, vishal, and Debaprasad Maity. *Boson Stars in Higher Derivative Gravity*. arXiv preprint, Arxiv:1609.07225.
- [49] L. Dolan and R. Jackiw. *Symmetry behavior at finite temperature*. *Phy. Rev. D* 3321 (1974).
- [50] M. Kaku. *Quantum Field Theory: A modern introduction*. Oxford University press, USA, 1993.
- [51] P. Sutcliffe. *Domain wall network on solitons*. *Phys. Rev. D* 68 (2003) 085004. [hep-th/0305198].