



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO NUMÉRICO DA CÚPULA
DE BRUNELLESCHI, FLORENÇA**

Trabalho de Conclusão de Curso

SABRINA LIMA FECHINE DE ALENCAR

Orientadora: Prof. Eng. Dra. Marília Marcy Cabral De Araújo

Coorientador: Prof. Arq. Roberto Corazzi

Campina Grande – Paraíba – Brasil

Julho, 2020

SABRINA LIMA FECHINDE DE ALENCAR

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO NUMÉRICO DA CÚPULA
DE BRUNELLESCHI, FLORENÇA**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação
apresentado à Unidade Acadêmica de
Engenharia Civil da Universidade Federal de
Campina Grande para encerramento do
componente curricular e conclusão da
graduação em Engenharia Civil.

Orientadora: Prof. Eng. Dra. Marília Marcy
Cabral de Araújo

Coorientador: Prof. Arq. Roberto Corazzi

Campina Grande – Paraíba – Brasil

Julho, 2020

*A minha mãe, Socorro, e ao meu pai, Joaquim,
que sempre gostaram de solucionar
mistérios e enfrentar desafios, juntos.*

Sabrina Lima Fechine de Alencar, Julho 2020

*Entrando all'interno della Cattedrale
ci si trova sotto il cielo della Cupola
e che poi all'esterno, la Cupola
si innalza verso il cielo, verso l'immensità.*

*Tutto questo, con la sua immensità, semplicità e
originalità-proporzionalità-armonia
ci trasmette la Cupola di ser Brunellesco.....dettoPippo...*

Roberto Corazzi ¹

¹ Página 87 Power Point, conferência de 11.02.2020

AGRADECIMENTOS

Antes de dar início, gostaria de agradecer primeiramente à Deus pela oportunidade de estar concluindo esse trabalho em meio à pandemia, e por ter me guiado durante toda esta etapa, que se finaliza agora. Gostaria também de agradecer e dedicar esse trabalho aos meus pais, Socorro e Joaquim, que sempre nos incentivaram a seguir nossos sonhos e nos apoiaram em todas as nossas decisões para que pudéssemos nos tornar aquilo que sonhamos. Tudo que me tornei, devo a eles.

Não poderia esquecer dos meus irmãos, Stéphanie e Joaquim, que me acompanharam durante o desenvolvimento do trabalho, e me incentivaram a cursar italiano, ponto fundamental para que essa pesquisa pudesse ser realizada. Agradeço também ao meu noivo, Bel, que esteve comigo nos momentos mais difíceis e quando eu pensei que não seria capaz de solucionar diversos problemas que surgiram durante o processamento dos resultados, me apoiou e me deu forças para continuar.

A minhas avós Eunice, Dulce, meus avôs Cosme (*in memoriam*) e Joaquim, agradeço a cada um por compartilharem e se orgulharem de cada etapa que avançamos na vida, sem vocês, não poderíamos chegar até aqui, obrigada por cada gesto de afeto, carinho e confiança, que são essenciais para o progresso pessoal e profissional. Agradeço também, a minha irmã de coração, Morgana, que sempre acreditou em todos os meus propósitos, comemorou comigo em cada etapa concluída e incentiva cada vez mais a ir atrás dos meus sonhos. A minha prima Bea, que no nosso único dia em Florença imediatamente renunciou nossos planos de passeio para procurarmos a bibliografia necessária para desenvolver esse projeto.

Agradeço imensamente à Professora Marília Marcy, minha orientadora e acima de tudo, minha amiga, que também me incentivou e me auxiliou durante todo o processo de desenvolvimento deste trabalho, e que aceitou essa missão de desvendar os mistérios da Cúpula de Brunelleschi ao meu lado, empregando horas dos seus dias para atender minhas ligações e minhas dúvidas, até mesmo nos domingos, e compartilhou comigo a felicidade de ver cada um desses resultados recém processados.

Ao Professor Roberto Corazzi, a mais sincera gratidão, por ter aceitado ser coorientador de um trabalho de conclusão de curso de uma aluna que ao menos conhecia, e por ter se dedicado tanto para explicar da maneira mais clara e precisa todas as técnicas e elementos utilizados por Filippo Brunelleschi para erguer essa obra-prima da engenharia. Agradeço

também por todo carinho e atenção em todas as etapas desse trabalho, e que sem seu auxílio, não seria possível obter tantos detalhes fundamentais para os resultados obtidos, além de se dispor a esclarecer todas as minhas dúvidas, independente do fuso horário ao qual estávamos submetidos.

Hélio, meu companheiro de graduação, parceiro de todas as batalhas acadêmicas e também pessoais durante esses 5 anos, só tenho a agradecer pela confiança no meu trabalho, e por sempre me incentivar a ir atrás dos meus objetivos, por mais difíceis que eles parecessem ser, e que desde o primeiro vestígio da ideia de iniciar essa jornada na Cúpula de Brunelleshi, ele estava ao meu lado dizendo que eu seria capaz e que seria o início da realização de um sonho, e aqui estamos.

Ao Professor Alessandro Giordano, obrigada pelas excelentes aulas de italiano e por todo auxílio durante a revisão bibliográfica desse trabalho; assim como, à Diogo Amaral, pela assistência na utilização do software e por esclarecer diversas dúvidas no decorrer do processamento dos modelos numéricos.

Por fim, agradeço a todos que fizeram parte da minha formação como engenheira civil nesses 5 anos, por toda confiança e assistência, a todos os momentos de descontração essenciais para finalizar uma etapa tão importante, mais especificamente às minhas amigas da Escola Virgem de Lourdes, Lillian, Rayanne, Larissa e Ester. Aos meus amigos e companheiros da universidade Bia e Igor. À Professora Dayse, Izabelle, Andréa e Aline, por serem excelentes profissionais e também amigas, e à Professora Patrícia, com a qual iniciei na carreira científica e de pesquisadora, e me auxiliou no início dessa jornada acadêmica.

RESUMO

Construída à 55,00 metros do solo, com altura interna de 32,00 m e diâmetro interno de 45,40 metros erguida sobre um plano octogonal, a Cúpula da Catedral Santa Maria del Fiore, localizada em Florença, na Itália, é a maior cúpula já construída sem a utilização de armação. Com 584 anos (2020 – 1436 ano de conclusão) e pesando cerca de 29.000 toneladas, é considerada uma das maiores façanhas da engenharia. Assim, avaliando a suntuosidade da Cúpula de Santa Maria del Fiore bem como a maneira da qual foi construída, o presente trabalho buscou desenvolver um modelo numérico da Cúpula capaz de proporcionar análises de tensões da estrutura frente ao peso próprio, e validação baseada em bibliografia científica, confrontando distintos modelos para verificação do desempenho das técnicas *spinapesce* e *corda blanda* adotada por Brunelleschi. Com o desenvolvimento tridimensional dos elementos da Cúpula de Brunelleschi, selecionaram-se três elementos portantes para análise: cúpula interna, setor de base e *Tamburo*. O início do assentamento *spinapesce* na cota 7,00 m garantiu a diminuição das tensões de tração nos *occhi* das *vele* da cúpula interna e a diminuição da extensão desses esforços nas arestas, em cerca de 7,10 m. Quanto a utilização de uma base na cúpula interna em blocos de pedra (0,00 m – 7,00 m), verificou-se uma redução de 45,50%, em média, dos valores máximos obtidos no modelo contendo uma base de tijolos. Avaliando a utilização da técnica da *corda blanda*, verificou-se também que ela reduziu a extensão das tensões de tração nas arestas do modelo em aproximadamente 3,50 m, e garantiu que a cúpula octogonal pudesse ser construída tal qual uma cúpula de rotação. Comparando o modelo 04, tal qual realizado por Brunelleschi, e o *Tamburo* com a bibliografia, observou-se que as zonas de tração e compressão no extradorso e intradorso dos modelos coincidiram com os da bibliografia, superando o intervalo de valores daqueles indicados na bibliografia, nas extremidades. No caso da cúpula interna, tais valores devem-se a subdivisão do modelo em elementos que permitiram o fluxo de tensões relativos a *spinapesce* e a *corda blanda*.

Palavras-chave: Cúpula; Brunelleschi; *Spinapesce*; *Corda blanda*.

ABSTRACT

Costruita a 55,00 metri dal suolo, con un'altezza interna di 32,00 metri, un diametro interno di 45,40 metri alzata su un piano ottagonale, la Cupola della Cattedrale di Santa Maria del Fiore, situata a Firenze, è la cupola in muratura più grande costruita senza usare i ponteggi verticali. Ha 584 anni (2020-1436 anno di completamento) e un peso di circa 29.000 tonnellate, è considerata una delle più grandi opere dell'ingegneria. Pertanto, guardando la Cupola di Santa Maria del Fiore e il modo in cui è stata costruita, nel presente lavoro ho cercato di sviluppare un modello numerico della Cupola in grado di fornire analisi delle tensioni della struttura rispetto al proprio peso e convalida basata sulla bibliografia scientifica, confrontando diversi modelli per verificare le prestazioni delle tecniche di spinapesce e corda blanda adottate da Brunelleschi. Con lo sviluppo tridimensionale degli elementi della Cupola del Brunelleschi, tre importanti elementi portante sono stati selezionati per l'analisi: cupola interna, settore di base e tamburo. L'inizio della posa spinapesce al livello di 7,00 m ha assicurato una riduzione delle sollecitazioni di trazione negli occhi delle vele interne della Cupola e una diminuzione dell'estensione di questi sforzi negli sponi, di circa 7,10 m. Per quanto riguarda l'uso di una base nella cupola interna sviluppata in blocchi di pietra (0,00 m - 7,00 m), si è verificata una riduzione del 45,50%, in media, dei valori massimi ottenuti nel modello contenente una base di mattoni. Valutando l'uso della tecnica della corda blanda, si è anche scoperto che riduceva di circa 3,50 m l'estensione delle sollecitazioni di trazione negli sponi del modello e si assicurava che la cupola ottagonale potesse essere costruita come una cupola rotante. Confrontando il Modello 04, come eseguito da Brunelleschi e il tamburo con la bibliografia, è stato osservato che le zone di trazione e compressione nell'intradosso e estradosso dei modelli coincidevano con quelle della bibliografia, superando l'intervallo di valori indicato nella bibliografia alle estremità. Nel caso della cupola interna, questi valori sono dovuti alla suddivisione del modello in elementi che hanno permesso il flusso di tensioni legate alla spinapesce e alla corda blanda.

Parole chiave: Cupola; Brunelleschi; Spinapesce; Corda blanda.

ABSTRACT

Built at 55.00 meters from the ground, with an internal height of 32.00 m and an internal diameter of 45.40 meters erected on an octagonal plane, the Dome of the Cathedral Santa Maria del Fiore, located in Florence, Italy, is the largest masonry dome ever built without using vertical supports. Has 584 years old (2020 – 1436 conclusion year) and weighing around 29,000 tonnes, it is considered one of the greatest feats of engineering. Thus, evaluating the sumptuousness of the Santa Maria del Fiore Dome as well as the manner in which it was built, the present work sought to develop a numerical model of the Dome capable of providing analysis of stresses of the structure against its own weight, and validation based on scientific bibliography, comparing different models to verify the performance of the *spinapesce* and *corda blanda*, techniques adopted by Brunelleschi. With the three-dimensional development of the elements of the Brunelleschi Dome, three important elements were selected for analysis: internal dome, base sector and *Tamburo*. The start of the *spinapesce* settlement at the 7.00 m level ensured a decrease in the tensile stresses in the *occhi* of the internal dome and a decrease extent of these efforts at the edges, by around 7.10 m. Regarding the use of a base in the internal dome developed in stone blocks (0.00 m - 7.00 m), there was a reduction of 45.50%, on average, of the maximum values obtained in the model containing a base of bricks. Evaluating the use of the *corda blanda* technique, it was also found that it reduced the extension of the tensile stresses at the edges of the model by approximately 3.50 m, and ensured that the octagonal dome could be built just like a rotation dome. Comparing Modelo 04, as performed by Brunelleschi, and *Tamburo* with the bibliography, it was observed that the traction and compression zones on the intrados and extrados of the models coincided with those in the bibliography, exceeding the range of those values at the ends. In the case of the internal dome, these values are due to the subdivision of the model in elements that allowed the flow of tensions related to *spinapesce* and the *corda blanda*.

Keywords: Dome; Brunelleschi; *Spinapesce*; *Corda blanda*.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Razão Áurea	38
Tabela 2: Resumo dos modelos e respectivos elementos estruturais considerados	58
Tabela 3: Características físicas das estruturas portantes da Cúpula de Brunelleschi.....	93
Tabela 4: Resumo dos aspectos construtivos do Modelo 01 e Modelo 03.....	94
Tabela 5: Resumo dos aspectos construtivos do Modelo 02 e Modelo 03.....	101
Tabela 6: Resumo dos aspectos construtivos do Modelo 02 e Modelo 04.....	106
Tabela 7: Resumo dos aspectos construtivos do Modelo 04 e Modelo 05.....	110
Tabela 8: Intervalo de valores para cada zona de tração e compressão avaliadas nos modelos para validação da cúpula interna.	116
Tabela 9: Intervalo de valores para cada zona de tração e compressão avaliadas nos modelos para validação do <i>Tamburo</i> e setor de base.....	119

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Plantas sobrepostas do projeto de Arnolfo di Cambio e a posterior ampliação.	24
Figura 2: Guindaste Bovino de Filippo Brunelleschi.....	25
Figura 3: Esboço de uma embarcação com roda d'água pelo inventor Francesco di Giorgio, de Siena.	26
Figura 4: Gru Girevole da <i>Lanterna</i> , pelo modelo desenvolvido por Leonardo da Vinci. 65 x 75 x 75 cm. Departamento de Construções, Universidade de Florença, 1976.....	26
Figura 5: Detalhe da pintura “ <i>Gli Arcangeli Michele, Raffaele e Gabriele con Tobiolo</i> ” (1470-1471), de Biagio d'Antonio, que representa a utilização da Gru Girevole na construção da <i>Lanterna</i> da Cúpula de Santa Maria del Fiore.....	26
Figura 6: Painel de Lorenzo Ghiberti.....	31
Figura 7: Painel de Filippo Brunelleschi.....	31
Figura 8: Planimetria da Catedral de Santa Maria del Fiore, indicando as tribunas.	33
Figura 9: Assentamento espinha de peixe: (a) indicado em uma cúpula esférica; (b) corte transversal de uma cúpula esférica.	35
Figura 10: Comparação entre parábola e catenária.	36
Figura 11: (a) <i>Sesto di quinto acuto</i> ; (b) <i>Sesto di quarto acuto</i>	36
Figura 12: Indicação da <i>Lanterna</i> e do <i>Tamburo</i>	37
Figura 13: Representação da forma geométrica assumida nos cabos em função das cargas aplicadas: : (a) duas cargas pontuais; (b) carga distribuída em plano horizontal; (c) carga distribuída seguindo a geometria do cabo.	40
Figura 14: Indicação dos meridianos e paralelos de uma cúpula.....	41
Figura 15: Representação da linha de empuxo: (a) no maciço MN12 (b) nos maciços MNLK.	42
Figura 16: (a) Indicação das tensões atuantes em uma cúpula de rotação submetida ao peso próprio; (b) Indicação das tensões de arco.	43
Figura 17: Representação da tendência das cúpulas de fissurarem ao longo dos meridianos.....	44
Figura 18: (a) Detalhe dos tijolos dispostos à <i>spinapesce</i> durante o restauro dos afrescos; (b) Disposição do assentamento <i>spinapesce</i> em uma <i>vela</i> da cúpula externa.....	44
Figura 19: (a) <i>Sphere Spirals</i> , Escher, 1958; (b) Curva do assentamento <i>spinapesce</i> se aproximando dos polos da Cúpula.....	45
Figura 20: A característica do assentamento <i>spinapesce</i> e as dimensões de diversos tijolos nas porções das <i>vele</i> 1, 5 e 6, da Cúpula de Brunelleschi.....	47

Figura 21: Detalhe da disposição dos tijolos <i>corda blanda</i>	48
Figura 22: (a) <i>Spinapesce</i> intercalada com tijolos horizontais sobre plano horizontal; (b) <i>Spinapesce</i> intercalada com tijolos horizontais sobre superfície curvilínea.....	49
Figura 23: (a) Esquema isométrico da vela gerada por uma porção do cilindro elíptico; (b) Detalhe da vela.	50
Figura 24: (a) Indicação do cone de rotação que interceptam as <i>vele</i> ; (b) Indicação das <i>corde blanda</i> geradas pela intercessão do cone de rotação com as <i>vele</i>	50
Figura 25: Representação da <i>corda blanda</i> em diferentes cotas.....	51
Figura 26: Representação do assentamento <i>spinapesce</i> , <i>corda blanda</i> e os outros diversos elementos construtivos da Cúpula de Brunelleschi.	52
Figura 27: (a) Elemento tetraedro; (b) Elemento hexaedro.	53
Figura 28: Fluxograma da metodologia adotada.....	56
Figura 29: Elementos constituintes da Cúpula de Brunelleschi.	61
Figura 30: Vista isométrica do modelo tridimensional da cúpula interna.....	62
Figura 31: Vistas (a) inferior e (b) superior da cúpula interna..	63
Figura 32: (a) Vista frontal e (b) lateral de um <i>occhio</i> da cúpula interna.....	63
Figura 33: Vista frontal dos <i>occhi</i> da cúpula interna e a indicação de alguns deles na vista interna da Cúpula.....	64
Figura 34: Vista dos <i>occhi</i> da cúpula interna, de onde se observa uma parte dos afrescos da Cúpula.....	64
Figura 35: Detalhe dos arcos horizontais do sistema intermediário de contrafortes.....	65
Figura 36: Vista isométrica do modelo tridimensional do sistema intermediário de contrafortes.	66
Figura 37: (a) Vista superior e (b) vista inferior do modelo tridimensional do sistema intermediário de contrafortes.....	67
Figura 38: Corredor interno entre as duas cúpulas, e ao fundo, é possível visualizar o contraforte angular.....	67
Figura 39: Indicação dos <i>camminamenti</i> no modelo tridimensional do sistema intermediário de contrafortes.	67
Figura 40: Representação isométrica da disposição da primeira cadeia de arenito.	68
Figura 41: (a) Visualização da segunda cadeia de arenito interrompida pela escada de acesso entre as cúpulas; (b) Vigas transversais da terceira cadeia de arenito vistas do terceiro caminhamento (entre os contrafortes medianos).	69
Figura 42: Vista isométrica do modelo tridimensional das cadeias de arenito.	69

Figura 43: Vista frontal do modelo tridimensional das cadeias de arenito.....	70
Figura 44: Detalhe das vigas transversais do modelo tridimensional das cadeias de arenito.	70
Figura 45: Vista isométrica das superfícies tridimensionais locadas sobre as cadeias de arenito.	71
Figura 46: Vista de duas seções da cadeia de madeira passando entre as cúpulas.	71
Figura 47: Vista isométrica do modelo tridimensional da viga de madeira.....	72
Figura 48: Vista isométrica do modelo tridimensional da viga de madeira inserida na estrutura da Cúpula.....	72
Figura 49: (a) Representação em perspectiva das escadas entre o primeiro e segundo <i>camminamento</i> (b) Representação em perspectiva das escadas de acesso entre o terceiro <i>camminamento</i> e o <i>Serraglio</i>	73
Figura 50: Vista isométrica do modelo tridimensional das escadas entre as duas cúpulas.....	74
Figura 51: (a) Imagem das escadas entre os <i>camminamenti</i> ; (b) Vista isométrica do modelo tridimensional das escadas entre as duas cúpulas, para acesso aos <i>camminamenti</i>	74
Figura 52: (a) Imagem das escadas de acesso entre o terceiro <i>camminamento</i> e o <i>Serraglio</i> ; (b) Vista isométrica do modelo tridimensional das escadas de acesso ao <i>Serraglio</i>	75
Figura 53: (a) Vista superior das escadas entre as cúpulas; (b) Vista inferior das escadas entre as cúpulas.....	75
Figura 54: Vista isométrica do modelo tridimensional do <i>Serraglio</i>	76
Figura 55: (a) Vista frontal do modelo tridimensional do <i>Serraglio</i> e indicação do corte AA'; (b) Vista superior do corte AA' do modelo tridimensional do <i>Serraglio</i>	76
Figura 56: (a) Escadas de acesso à base da <i>Lanterna</i> (b) Último corredor de acesso ao <i>Serraglio</i> (c) Detalhe de um compartimento interno do <i>Serraglio</i>	76
Figura 57: (a) Vista da <i>Lanterna</i> ; (b) Detalhe do corredor para caminhamento na <i>Lanterna</i> ; (c) Vista interna da <i>Lanterna</i>	77
Figura 58: Vista isométrica do modelo tridimensional da <i>Lanterna</i>	78
Figura 59: (a) Vista superior do modelo tridimensional da <i>Lanterna</i> ; (b) Vista inferior do modelo tridimensional da <i>Lanterna</i>	78
Figura 60: Setor de base da Cúpula (setor sul) com vista das vigas de arenito do primeiro <i>camminamento</i>	79
Figura 61: Vista isométrica do modelo tridimensional do setor de base.	79
Figura 62: Vista superior do modelo tridimensional do setor de base.	80
Figura 63: Vista isométrica do modelo tridimensional do <i>Tamburo</i> e do setor de base.	81
Figura 64: Vista interna de parte do tamburo.	81

Figura 65: (a) Vista norte da Cupola (b) Detalhe de uma vela.....	82
Figura 66: Telhas da cobertura.....	82
Figura 67: Vista isométrica do modelo tridimensional da cúpula externa.	83
Figura 68: (a) Vista superior do modelo tridimensional da cúpula externa; (b) Vista inferior do modelo tridimensional da cúpula externa.	83
Figura 69: (a) Vista frontal e (b) lateral de um <i>occhi</i> da cúpula externa.	84
Figura 70: Vista frontal dos <i>occhi</i> da cúpula externa.....	84
Figura 71: Detalhe dos <i>occhi</i> da cúpula externa.	85
Figura 72: Vista isométrica do modelo tridimensional dos <i>Costoloni</i>	85
Figura 73: (a) Vista parcial de dois <i>Costoloni</i> (b) Detalhe de um <i>Costoloni</i>	86
Figura 74: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: cúpula interna, cadeias de arenito, <i>camminamenti</i> sobre as cadeias de arenito e o setor de base.	86
Figura 75: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: cúpula interna, <i>occhi</i> internos, sistema intermediário de contrafortes, <i>camminamenti</i> sobre cadeias de arenito, cadeias de arenito e setor de base.....	87
Figura 76: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: cúpula externa, <i>Costoloni</i> superior, <i>occhi</i> externo, <i>Serraglio</i> e <i>Lanterna</i>	88
Figura 77: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: detalhe da cúpula externa com o <i>Serraglio</i> e <i>Costoloni</i>	88
Figura 78: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: modelo completo com detalhes dos elementos internos.....	90
Figura 79: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi.	91
Figura 80: Seção transversal do Modelo Tridimensional da Cúpula de Brunelleschi, detalhe para os elementos das cúpulas.	92
Figura 81: Indicação do contato entre o <i>Tamburo</i> e a cúpula interna.	94
Figura 82: (a) Vista isométrica do Modelo 01; (b) Vista isométrica do Modelo 01 com a malha tetraédrica.	95
Figura 83: (a) Vista isométrica do Modelo 02; (b) Vista isométrica do Modelo 02 com a malha tetraédrica.	95
Figura 84: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 01; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 03.	96
Figura 85: (a) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, nas regiões dos <i>occhi</i> do Modelo 01; (b) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, nas regiões dos <i>occhi</i> do Modelo 03.....	97

Figura 86: (a) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, na região inferior das <i>vele</i> do Modelo 01; (b) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, na região inferior das <i>vele</i> do Modelo 03.	97
Figura 87: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 01; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 03.	98
Figura 88: (a) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, na região entre os <i>occhi</i> das <i>vele</i> do Modelo 01; (b) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, na região entre os <i>occhi</i> das <i>vele</i> do Modelo 03.	98
Figura 89: (a) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +34,00 MPa nas arestas do Modelo 01; (b) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +34,00 MPa nas arestas do Modelo 03.	99
Figura 90: (a) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 01; (b) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 03.	100
Figura 91: (a) Detalhe das tensões na região inferior no extradorso das <i>vele</i> do Modelo 01; (b) Detalhe das tensões na região inferior no extradorso das <i>vele</i> do Modelo 03.	100
Figura 92: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 03.	102
Figura 93: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 03.	102
Figura 94: (a) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +25,00 MPa nas arestas do Modelo 02; (b) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +25,00 MPa nas arestas do Modelo 03.	103
Figura 95: (a) Tensões no extradorso da cúpula externa do Modelo 02; (b) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 03.	104
Figura 96: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são inferiores à -1,00 MPa no extradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são inferiores à -1,00 MPa no extradorso da cúpula interna do Modelo 03.	104
Figura 97: (a) Indicação das regiões do extradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou inferiores à -3,00 MPa nas arestas do Modelo 02; (b) Indicação das regiões do extradorso da	

cúpula interna, cujas tensões são iguais ou inferiores à -3,00 MPa nas arestas do Modelo 03.	105
Figura 98: (a) Vista isométrica do Modelo 04; (b) Vista isométrica do Modelo 04 com a malha tetraédrica	106
Figura 99: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 04.	107
Figura 100: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 04.....	108
Figura 101: (a) Indicação das regiões do extradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +3,00 MPa nas arestas do Modelo 02; (b) Indicação das regiões do extradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +3,00 MPa nas arestas do Modelo 04.	108
Figura 102: (a) Tensões no extradorso da cúpula externa do Modelo 02; (b) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 04.	109
Figura 103: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são inferiores à -1,00 MPa no extradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são inferiores à -1,00 MPa no extradorso da cúpula interna do Modelo 04.....	110
Figura 104: (a) Vista isométrica do Modelo 05; (b) Vista isométrica do Modelo 05 com a malha tetraédrica.....	111
Figura 105: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 04; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 05.	111
Figura 106: (a) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 04; (b) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 05.	112
Figura 107: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 04; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do modelo de Fanelli e Fanelli (2004); (c) Tensões no intradorso da cúpula interna do modelo de Bartoli et al. (2015).	113
Figura 108: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões estão entre 0,00 e +10,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 04; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões estão entre +20,00 e +80,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 04. ...	114
Figura 109: Indicação das regiões cujos valores de tensões estão entre -1,00 e -6,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 04.	115
Figura 110: (a) Vista isométrica do Modelo 06; (b) Vista isométrica do Modelo 06 com a malha tetraédrica.....	117

Figura 111: (a) Tensões na região interna do <i>Tamburo</i> do Modelo 06; (b) Tensões na região interna do <i>Tamburo</i> do modelo de Fanelli e Fanelli (2004).....	118
Figura 112: Indicação das regiões cujos valores de tensões estão entre 0,00 e -6,96 MPa na região interna do <i>Tamburo</i> do Modelo 06.....	119

GLOSSÁRIO

Braccia: Unidade de medida linear em vigor em Florença até o século XIX, que equivale a aproximadamente 0,584 m.

Camminamento (singular); Camminamenti (plural): Percurso em forma de anel que se encontra entre o extradorso e intradorso de uma cúpula. A Cúpula de Santa Maria del Fiore possui três *camminamenti*, posicionados em diferentes cotas.

Catenaria: Curva que se obtém mantendo um fio fixo nas extremidades e sujeito apenas à força da gravidade. Uma catenária invertida representa a forma ideal de um arco que deve suportar apenas seu próprio peso.

Corda blanda: Técnica construtiva adotada por Brunelleschi para a construção da Cúpula, que consiste no assentamento dos tijolos horizontais sobre uma superfície curvilínea, resultado da intersecção de um cone de rotação com a superfície da vela.

Costoloni di spigolo: São estruturas em mármore que partem dos vértices da geometria de base da Cúpula, e convergem com a base da Lanterna, possuindo geometria de *sesto di quarto acuto*.

Extradorso: Plano superior externo convexo de um arco ou cúpula.

Intradorso: Indica a superfície interna e inferior de um arco ou cúpula.

Lanterna: Frequentemente utilizada em igrejas na época do renascimento, a construção localizada no topo da Cúpula, permite ventilação e incidência de luz no seu interior.

Occhi (plural), Occhio (singular): Aberturas quadradas nas *vele* da Cúpula, que garantem ventilação e luminosidade ao interior da construção e no espaço entre cúpulas.

Oculos: Indica uma abertura circular no centro de uma cúpula, originado na antiguidade, e é uma característica da arquitetura bizantina e neoclássica.

Serraglio: Elemento estrutural de conexão entre as cúpulas, sobre o qual foi erguido a *Lanterna*.

Spinapesce: Técnica construtiva adotada por Brunelleschi para a construção da Cúpula, que consiste na inserção de tijolos na vertical, com o lado comprido perpendicular ao lado comprido dos tijolos horizontais.

Tamburo: Elemento estrutural de suporte e transmissão dos esforços até o solo, sobre a qual a Cúpula é erguida.

Vele (plural), Vela (singular): Superfície curva de um dos lados do octógono da Cúpula, cuja altura equivale à altura da construção.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	22
2. OBJETIVOS	28
2.1. OBJETIVO GERAL	28
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	28
3. REFERENCIAL TEÓRICO	29
3.1. A CÚPULA DE BRUNELLESCHI	29
3.2. ASPECTOS CONSTRUTIVOS	39
3.2.1. TEORIA DO ARCO DE ALVENARIA	39
3.2.2. CÚPULAS EM ALVENARIA	41
3.2.3. ASSENTAMENTO ESPINHA DE PEIXE	44
3.2.4. CORDA BLANDA	48
3.3. MODELAGEM NUMÉRICA- ELEMENTOS FINITOS	53
4. METODOLOGIA	56
4.1. Revisão Bibliográfica	56
4.2. Desenvolvimento do Modelo Tridimensional da Cúpula	57
4.3. Processamento do modelo contendo as malhas de elementos finitos	57
4.4. Validação do modelo	59
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	60
5.1. Desenvolvimento do Modelo Geométrico da Cúpula no AutoCAD	60
5.1.1. Cúpula Interna	62
5.1.2. Occhi da Cúpula Interna	63
5.1.3. Sistema Intermediário de Contrafortes	65
5.1.4. Cadeias de Arenito	68
5.1.5. Camminamenti sobre as Cadeias de Arenito	70
5.1.6. Viga de Madeira	71

5.1.7.	Escadas entre as cúpulas	73
5.1.8.	<i>Serraglio</i>	75
5.1.9.	<i>Lanterna</i>	77
5.1.10.	Setor de Base	78
5.1.11.	<i>Tamburo</i>	80
5.1.12.	Cúpula Externa	81
5.1.13.	<i>Occhi</i> Cúpula Externa	83
5.1.14.	<i>Costoloni</i>	85
5.1.15.	Modelo Tridimensional da Cúpula de Brunelleschi	86
5.2.	Processamento do modelo contendo as malhas de elementos finitos	93
5.2.1.	Características físicas	93
5.2.2.	Modelo 01 e Modelo 03.....	94
5.2.3.	Modelo 02 e Modelo 03.....	101
5.2.4.	Modelo 02 e Modelo 04.....	105
5.2.5.	Modelo 04 e Modelo 05.....	110
5.3.	Validação do Modelo	112
5.3.1.	Modelo 04: Cúpula Interna	113
5.3.2.	Modelo 06: <i>Tamburo</i>	117
6.	CONCLUSÃO	120
7.	PERSPECTIVA DE TRABALHOS FUTUROS	122
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

1. INTRODUÇÃO

Contando com mais de dois mil anos de história e berço do Renascimento, Florença é um município italiano de 382.258 (2017) habitantes e capital da Toscana. Localizada na latitude 43° 46' 45" N e longitude 11° 14' 46" E, encontra-se em uma vasta planície atravessada pelo Rio Arno e contornada por colinas.

Por volta de 1268, a cidade recebeu um grande impulso no setor das artes e literatura, contando com renomados artistas como Dante, Giotto, Arnolfo di Cambio, Leonardo da Vinci, Michelangelo ou Filippo Brunelleschi, Florença foi elevada à categoria “cidade-farol” do Humanismo e do Renascimento, que marcaram o apogeu do esplendor da cidade (BONECHI, 1996), que contou com o apoio dos Medici, grandes mecenas e grandes colecionadores de arte que dominaram a cidade por mais de três séculos, responsáveis pelos tesouros artísticos locais.

Um dos primeiros artistas do Renascimento foi Filippo Brunelleschi (1377-1446), que além de descobrir a perspectiva (fundamental para a arte a partir de então), foi responsável pela construção da maior cúpula já erguida sem armadura e sem a ajuda de escoramentos de madeira, estabelecendo regras matemáticas que proporcionaram o desenvolvimento de diversas outras construções (MACHADO, 2004). Ainda hoje, Brunelleschi e outros florentinos como Donatello e Masaccio são considerados os precursores da “renascença”, e segundo McCarthy (1956), “[...] os Florentino, de fato, inventaram a Renascença, o que quer dizer que eles inventaram o mundo moderno”.

Atuando em vários campos das artes-arquitetura, escultura, pintura, coroplástica, os artistas renascentistas projetaram, esculpiram, modelaram e pintaram na busca contínua da perfeição, “[...] do grau máximo de conhecimento em cada campo do saber humano.” (POGGI, SANDRELLI, *et al.*, 1999).

Em princípios do século XV Florença ainda conservava um aspecto rural, mas a população chegava a 50 mil habitantes, e se tornara uma das cidades mais prósperas da Europa. Grande parte de sua riqueza provinha da indústria de lã, iniciada pelos monges Umiliati pouco depois de sua chegada em 1239:

“Fardos de lã inglesa – a melhor do mundo- eram levados dos mosteiros de Cotswolds para serem lavados no Rio Arno, penteados, cardados, tecidos em teares de madeira e em seguida tingidos com lindas cores: vermelho, feito de cimbre²

² Tipo de madeira que serve de molde e suporte a arcos e abóbodas.

trazidos do litoral do mar Vermelho, ou amarelo-brilhante, obtido de açafrões³ que cresciam nos campos próximos à cidade de San Gimignano. O resultado eram os tecidos mais caros e cobiçados da Europa.” (KING, 2013)

Assim, devido a prosperidade, Florença experimentara no século XIV um surto de construções nunca visto na Itália, desde os tempos dos antigos romanos. Eram ainda exploradas pedras de arenito de coloração marrom-dourada, a areia do Rio Arno que, por ser dragada e filtrada em cada enchente, possui excelente qualidade para utilização em argamassa, bem como cascalhos vindos do leito do rio Arno (KING, 2013).

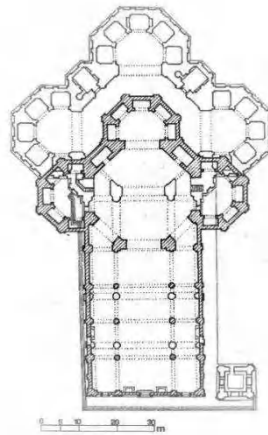
Assim, em 1296, sobre o projeto de um dos maiores arquitetos da época, Arnolfo di Cambio, foi iniciada a construção da Catedral Santa Maria del Fiore que durante muitos anos, foi a maior igreja do cristianismo. Construída à 55 metros do solo, com altura interna de 32,0 m e diâmetro interno de 45,4 metros erguida sobre um plano octogonal, a Cúpula da Catedral Santa Maria del Fiore, localizada em Florença, na Itália, é a maior cúpula já construída sem a utilização de armação.

No projeto de 1296, a catedral havia sido projetada dispendo de uma cúpula de base octogonal com diagonal interna de cerca de 36 metros erguida sobre um “*Tamburo*”, de 18 *braccia*, ou seja, a base de sustentação sobre a qual a Cúpula seria construída seria de aproximadamente 10,5 m (CORAZZI e CONTI, 2005). No entanto, em 1397 foi realizada uma comissão da qual o projeto foi ampliado (Figura 1), de modo que a Catedral de Santa Maria del Fiore se tornasse a maior e mais bela entre todas da cristandade. Assim, a cúpula de base octogonal projetada, deveria cobrir um vão de 72 *braccia* (42,0 m) e se erguer a uma altura de 144 *braccia* (84,0 m) em relação ao nível do solo; logo, o *Tamburo* aumentaria cerca de 3 *braccia* sua altura inicial, passando dos 10,5 m para aproximadamente 13 m (FANELLI e FANELLI, 2004).

Pesando cerca de 29.000 toneladas, após a sua construção em 1436 a Cúpula foi acrescida de uma *Lanterna*, de cerca de 750 toneladas, frequentemente utilizada em igrejas na época do renascimento, para permitir a ventilação e incidência de luz no seu interior.

³ *Crocus Sativus*

Figura 1: Plantas sobrepostas do projeto de Arnolfo di Cambio e a posterior ampliação.



Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2005)

Considerada uma das maiores façanhas da engenharia, a Cúpula de Santa Maria del Fiore é centro de estudos não só na Itália, mas em todo mundo. Tal fascinação pelo monumento histórico que possui cerca de 600 anos, deve-se à aspectos e técnicas construtivas que, ainda hoje, requerem um conhecimento teórico aprofundado de resistência dos materiais e relacionados à estabilidade e dinâmica da Cúpula.

Dentre os aspectos mais consideráveis do ponto de vista da engenharia, é que a Cúpula de Santa Maria del Fiore foi construída sem nenhum tipo de armadura, e escoramento de madeira durante a fase construtiva. O vão de 45,4 m e com altura aproximada de 32 m, foi coberto utilizando-se, principalmente, tijolos de argila, cimento pozolânico e vigas de arenito, que conferem em grande parte a estabilidade da construção.

Iniciada a construção em 1420 e finalizada em 1436, um grande debate realizado pelos dirigentes responsáveis pela construção da Cúpula, Opera del Duomo, foi referente a maneira pela qual tal estrutura, de dimensões descomuns para a época, seria erguida sem a utilização de nenhum tipo de escoramento. Muitas seriam as inconveniências técnicas advindas da utilização de escoramentos para a construção da Cúpula: grande quantidade de madeira, montagem, desmontagem e ao próprio dia-a-dia no canteiro de obras, que dificultaria consideravelmente a locomoção e trabalho dos operários. Logo, a Cúpula seria construída de modo a permanecer auto-portante durante todas as etapas construtivas e, principalmente, após a finalização da obra, que teria que suportar o peso próprio considerável, hoje estimada em 29.000 toneladas e mais 750 toneladas advindas da *Lanterna*.

Filippo Brunelleschi, conhecido ourives da região, foi responsável pela construção do suntuoso monumento e, para garanti-la sem o escoramento, utilizou-se de uma técnica chamada

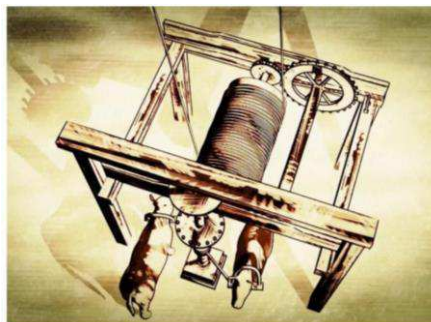
de “*spinapesce*”, que consiste na inserção de blocos de tijolos na vertical, intercalando os blocos horizontais, impedindo o deslizamento na direção do eixo da construção, devido ao ângulo de cerca de 60° com a horizontal, nas cotas mais altas da Cúpula.

Uma outra característica que dificultava ainda mais a construção da Cúpula sem o escoramento, era o fato dela ter sido projetada com base octogonal, ou seja, possuiria vértices que seriam centros de descontinuidades e, conseqüentemente, centros de concentração de tensões.

Brunelleschi frequentou o ateliê de diversos artistas adquirindo, o conhecimento sobre as características de diversos materiais, e foi responsável pela construção de todo o maquinário utilizado para a construção da Cúpula, que se baseavam em três máquinas utilizadas pelos antigos: o guincho, o plano inclinado e a alavanca (CORAZZI e CONTI, 2011). Dentre os mais significativos, estão:

- **Guindaste Bovino (1421)**: Ocupou seu lugar no octógono, em cima de uma plataforma de 8,80 m e de 4,50 m de altura, foi especialmente construída para os bois, que trabalharam durante os 12 anos seguintes. O guindaste era preso por diversas engrenagens que transmitiam entre si, o movimento giratório por meio de rodas dentadas de diversos tamanhos. Acredita-se, que até que a Cúpula ficasse pronta, o guindaste elevaria mármore, tijolos, pedra e argamassa, com um peso estimado total de 35.000 toneladas (KING, 2013). Na Figura 2, verifica-se uma representação gráfica de como era o guindaste bovino.

Figura 2: Guindaste Bovino de Filippo Brunelleschi.

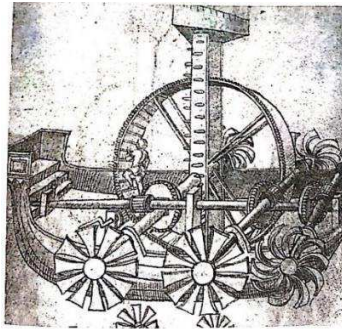


Fonte: (POZZA, 2015)

- **Badalone (1426)**: Para diminuir os custos de transporte de mármore para revestimento externo de Santa Maria del Fiore, Brunelleschi

projetou ainda um barco contendo uma grande plataforma de madeira, que ao atravessar o rio, era puxada por outros barcos, e quando trafegando em terra, era puxado por bois; Tal invento, foi significativo na redução de custos. Nenhum desenho do invento foi deixado por Brunelleschi, no entanto, pela Figura 3, pode-se ter uma ideia de como era o Badalone.

Figura 3: Esboço de uma embarcação com roda d'água pelo inventor Francesco di Giorgio, de Siena.



Fonte: (KING, 2013)

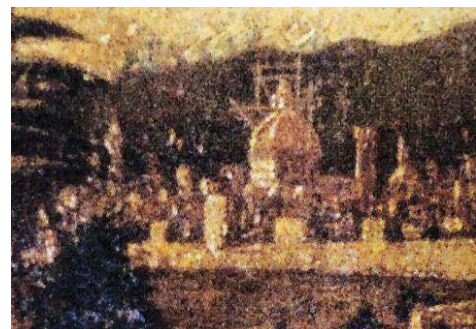
- **Gru Girevole (1446):** Utilizada para a construção da *Lanterna*, esta máquina era constituída de uma estrutura rolante circular de madeira, com altura regulável e provida de uma estrutura (braço) horizontal, permitindo o movimento e carregamento nas duas dimensões. Na Figura 4, pode-se observar um modelo da máquina Gru Girevole desenvolvido por Leonardo da Vinci, e na Figura 5, observa-se a utilização da máquina na construção da *Lanterna*, em um recorte da pintura “*Gli Arcangeli Michele, Raffaele e Gabriele con Tobiolo*” (1470-1471), de Biagio d'Antonio.

Figura 4: Gru Girevole da *Lanterna*, pelo modelo desenvolvido por Leonardo da Vinci. 65 x 75 x 75 cm. Departamento de Construções, Universidade de Florença, 1976.



Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

Figura 5: Detalhe da pintura “*Gli Arcangeli Michele, Raffaele e Gabriele con Tobiolo*” (1470-1471), de Biagio d'Antonio, que representa a utilização da Gru Girevole na construção da *Lanterna* da Cúpula de Santa Maria del Fiore.



Fonte: (FANELLI e FANELLI, 2004)

Admirável e imponente estrutura, a Cúpula de Brunelleschi além de ser um dos mais queridos monumentos da cidade de Florença, é uma das construções mais simbólicas referentes ao desenvolvimento científico advindo do Renascimento Italiano, bem como, uma das mais icônicas quando se trata de enigma da engenharia.

Centro de pesquisas em várias partes do mundo, não só a Cúpula, mas o próprio Filippo Brunelleschi, devido a tamanho engenho e competência que revolucionou o renascimento italiano, foram tema de vários poemas, escritos, pinturas e esculturas:

“E ele girou o céu, tendo a Terra tantos anos sem uma ama querida e um espírito divino, que Filippo deixou em seu mundo a maior e mais alta cúpula de todas as outras feitas no tempo antigo, e também no tempo moderno. E podemos dizer com certeza que os antigos nunca foram tão alto com suas cúpulas, para não correrem um risco tão grande, ao ponto de lutarem com o céu; como realmente, parece que sua Cúpula luta: ao acordar, ela extorquiou tanta altura, que as montanhas ao redor de Florença se parecem com ela.” (FANELLI e FANELLI, 2004),

escreve Giorgio Vasari (1511-1574), pintor, arquiteto e renomado biógrafo, que deixou como legado, o reconhecido *Le vite de' più eccellenti pittori, scultori e architettori*, uma série de biografias que cobre todo o cânone artístico estendido entre os séculos XIV e XVI.

Assim, avaliando a suntuosidade da Cúpula de Santa Maria del Fiore bem como a maneira da qual foi construída, o presente trabalho busca desenvolver um modelo numérico da Cúpula capaz de proporcionar análises de tensões da estrutura frente ao peso próprio, após a validação baseada em bibliografia científica, além de confrontar distintos modelos para verificação do desempenho das técnicas *spinapesce* e *corda blanda* adotada por Brunelleschi.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

Desenvolver e validar o modelo geométrico da Cúpula da Catedral de Santa Maria del Fiore, em Florença, por meio da comparação dos resultados obtidos de tensões frente ao peso próprio da construção, e comparação com a bibliografia.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolvimento de um modelo geométrico 3D da Cúpula de Brunelleschi;
- Verificação dos valores de tensões em função do peso próprio da construção, no modelo desenvolvido;
- Confrontar modelos para verificação do desempenho das técnicas construtivas *spinapesce* e *corda blanda*;
- Validar o modelo com auxílio da bibliografia.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

3.1. A CÚPULA DE BRUNELLESCHI

No dia 19 de agosto de 1418 foi anunciado o concurso para apresentação de modelos e projetos de construção da Cúpula da Catedral de Santa Maria del Fiore, afinal, o *Tamburo* sobre o qual seria construído a Cúpula já estava finalizado. O grande problema do projeto de 1397, era a exigência da construção da gigantesca cúpula, com os suportes invisíveis, já que ele não dispunha de indicações técnicas. Além disso, uma outra discussão entrava em questão quanto a execução prática de sua construção: a estrutura temporária de escoramento de madeira necessária para a sustentação da alvenaria da Cúpula enquanto a argamassa secava (KING, 2013).

Para as cúpulas semiesféricas, a técnica construtiva é simples: são construídos gradativamente anéis concêntricos de tijolos sobrepostos (em paralelo), que vão sendo comprimidos à medida que são erguidos. O controle geométrico da construção, poderia ser feito com bastões ou um arame metálico, que rotacionava a partir do centro da base e servia como guia para determinar a inclinação dos tijolos. (CORAZZI e CONTI, 2011).

A construção de cúpulas perfeitamente esféricas, no entanto, é possível de ser realizada sem o escoramento. Admitindo que cada camada de alvenaria forma um arco horizontal, à medida que estes arcos vão sendo construídos, arcos verticais também vão sendo formados, logo, cada pedra/tijolo é mantido em seu lugar por meio das pressões da alvenaria adjacente (KING, 2013), resultando assim, em uma cúpula auto sustentada. A Cúpula de Santa Maria del Fiore, no entanto, não era semicircular; na verdade, por possuir a base octogonal, os anéis de alvenaria formados durante a construção, não seriam contínuos, logo, não haveria uma distribuição uniforme das forças em todas as direções.

Para a construção do escoramento que garantisse que os tijolos da Cúpula fossem apoiados enquanto a argamassa se consolidasse, era necessária uma grande quantidade de madeira, cerca de 700 árvores, que na época, seu custo de obtenção era tão alto quanto o do mármore, por oferecer as mesmas dificuldades logísticas (Ibid., p.58) (KING, 2013), além disso, o madeiramento deveria suportar a gigantesca carga da Cúpula até a finalização da obra: a Cúpula pesa cerca de 29.000 toneladas e sua construção durou 16 anos (CORAZZI e CONTI, 2005). Mesmo que a questão financeira e a resistência das escoras do madeiramento não fossem um problema, a retirada do madeiramento após a finalização da obra seria impraticável, talvez

a operação mais arriscada de todo o processo construtivo. devido a suas grandes dimensões (Ibid., p.29) (CORAZZI e CONTI, 2005).

Logo, o desenvolvimento de um projeto técnico executivo para a construção da Cúpula que seria construída à 55,00 m acima do solo, cobrindo um vão de 45 m e seguindo a geometria adotada no modelo de 1367, parecia impossível.

No concurso de 1418, foram apresentados dezessete projetos, porém, o júri da Opera del Duomo - mais rica e poderosa cooperação de ofícios de Florença, a dos comerciantes de Lã, que financiou a construção da catedral (CORAZZI e CONTI, 2005) – se debruçou sobre dois deles: o de Filippo Brunelleschi, e o de Lorenzo Ghiberti, que há vinte anos, em 1398, já haviam disputado o famoso concurso para as portas do Batistério de San Giovanni. Ainda desconhecido, Lorenzo Ghiberti, saiu vitorioso.

Filippo Brunelleschi, também chamado de Pippo, nasceu em Florença em 1377. Morava no bairro de San Giovanni, a pouca distância a oeste de Santa Maria del Fiore, cresceu acompanhando “[...] o funcionamento cotidiano dos guinchos movidos a rodas dentadas e graus projetadas para suspender blocos de mármore e de arenito ao ponto mais alto do edifício[...]” (KING, 2013). A sua primeira formação foi em uma “scuola di abaco”⁴, e ao ingressar entre os oito e doze anos, Brunelleschi obteve suas primeiras noções de aritmética e geometria, incluindo os estudos de perspectiva (CAPRETTI, 2003), conhecimento utilizado para a pintura “Battistero di Firenze”, uma experiência de perspectiva linear realizada em 1413 ou antes, na qual, segundo King (2013), Domenico da Prato se refere a ele como “[...] o engenhoso e perito em perspectiva Filippo di Ser Brunellesco, notável por sua habilidade e fama [...]”.

Fascinado pela mecânica, aos 15 anos, Filippo entrou como aprendiz na oficina de um amigo da família, um ourives chamado Benincasa Lotti, pois naquela época, além de fabricarem joias, os ourives também criavam os relógios. Logo, os conhecimentos na área da química, mecânica e matemática, bem como do comportamentos dos materiais, obtidos por Brunelleschi durante sua juventude, foram essenciais para as próximas etapas da sua vida (KING, 2013).

No inverno de 1400-1401, foi anunciado o concurso para o segundo par de portas de bronze do Batistério de Florença. Segundo Walker (2005), o Batistério era como a igreja oficial

⁴ Escolas onde o ensino é praticado para comerciantes e técnicos, semelhante às escolas profissionais ou escolas técnicas, atuais.

da República Florentina, símbolo da própria Florença, mantendo o imaginário quanto ao efetivo papel da Igreja na vida cívica do povo.

Quase dois anos após o anúncio da competição para as portas do Batistério, no final de 1402 e início de 1403, um comitê formado por trinta e quatro especialistas foi nomeado pela Calimala, guilda⁵ dos mercadores mais antiga e próspera de Florença, para avaliar os painéis e anunciar o vencedor (WALKER, 2005). O painel de Lorenzo Ghiberti (Figura 6) foi o escolhido, entretanto, acredita-se que ao comparar seu trabalho ao de Brunelleschi (Figura 7), os juízes “[...] ficaram perplexos e maravilhados[...], não se sentindo à vontade para voltar atrás com sua decisão” (WALKER, 2005), convocando assim, ambos artistas para trabalharem em parceria. Não satisfeito com a decisão, Brunelleschi recusou a convocação, entregando para Lorenzo Ghiberti a missão da criação das portas do Batistério.

Figura 6: Painel de Lorenzo Ghiberti



c

Fonte: (CAPRETTI, 2003)

Figura 7: Painel de Filippo Brunelleschi



Fonte: (CAPRETTI, 2003)

Após a renúncia da parceria com Ghiberti para a criação das portas do Batistério, reconhecidas como uma das grandes obras-primas florentinas, Filippo partiu para Roma. “Sabedor do projeto de uma cúpula para a catedral de Florença- uma cúpula que até então ninguém sabia como construir-, Filippo deve ter tido interesse especial nos métodos de construção de abóbodas usados pelos antigos romanos.” (KING, 2013). Brunelleschi chegou à cidade em companhia do escultor Donatello, analisando e calculando as medidas e proporções utilizadas nas construções.

Começando com a intenção de estudar escultura antiga, Filippo Brunelleschi passou a estudar vários tipos de edifícios, templos, edifícios octogonais, basílicas, aquedutos, banhos,

⁵ Associação que agrupava, em certos países da Europa durante a Idade Média, indivíduos com interesses comuns (negociantes, artesãos, artistas) e visava proporcionar assistência e proteção aos seus membros.

arcos, anfiteatros e todos os templos de pedra. Segundo Capretti (2003), ele tentou definir ainda, os detalhes estruturais das possíveis fôrmas utilizadas como base de apoio temporária para construção de arcos de pedra, entendendo suas técnicas construtivas, e imaginando as máquinas que poderiam ter sido usadas para fabricá-las. No entanto, o Panteão foi a construção de interesse primordial para o ourives.

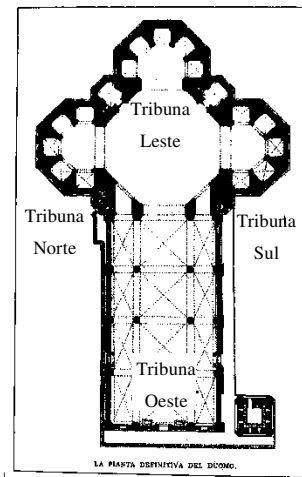
Mesmo sendo de base circular, a abóboda do Panteão também não possuía sinais visíveis de apoio, assim como evidenciado no projeto da Cúpula de Santa Maria del Fiore, de 1367. Brunelleschi pôde verificar alguns aspectos construtivos utilizados para erguer a maior cúpula já construída até o momento, e entre eles, observou que a base da abóboda foi erguida com uma espessura de 7 m, utilizando cerca de cinco mil toneladas de concreto em camadas horizontais. A medida que a abóboda se ergue, a estrutura afina até os 60 cm, chegando ao “*oculos*”⁶, e nas cotas mais altas, foi utilizado um material mais leve para redução da carga: pequenas *amphorae*, frascos de argila para transporte de óleo de oliva (KING, 2013).

Em 1404, Filippo foi nomeado pela Opera del Duomo para fazer parte de uma comissão de dezenove artistas e artesãos para solucionarem problemas relacionados à construção da Catedral, cujas obras já entravam em seu segundo século (WALKER, 2005), em função de muitas interrupções.

Ao regressar definitivamente para Florença, por volta de 1416, o tambor da Catedral sobre o qual repousaria à futura Cúpula projetada no documento de 1367, já havia sido construído (entre 1410 e 1413), com paredes de aproximadamente 4,27 metros (KING, 2013). Além do tambor, a longa nave e as alas laterais da catedral já estavam prontas, bem como as três “*tribunas*” que dão à catedral a forma de crucifixo (Figura 8).

⁶ Indica uma abertura circular no centro de uma cúpula, originado na antiguidade, e é uma característica da arquitetura bizantina e neoclássica.

Figura 8: Planimetria da Catedral de Santa Maria del Fiore, indicando as tribunas.



Fonte: Adaptada (RICCI, 2014)

No concurso de 19 de Agosto de 1418, para o desenvolvimento de modelos para a construção da cúpula central presente no projeto de 1367, foram sugeridas diversas estruturas: algumas com pilares, arcos e pontes de madeira, enquanto outros propuseram uma cúpula feita de pedra-pome, pilares centrais (WALKER, 2005) e, segundo Corazzi (2005), um dos projetos apresentados sugeria encher a Cúpula de areia, para sustentação provisória.

No entanto, o modelo de Filippo Brunelleschi propunha eliminar completamente a estrutura de sustentação. Sua ideia chamou a atenção, pois até os arcos pequenos eram construídos sobre escoras de madeira:

“[...] uma proposta decididamente inovadora que eliminou as dificuldades de fazer obras temporárias que eram problemáticas em termos de tamanho, peso (próprio e o externo) e a dificuldade de obtenção e pagamento pela madeira, dificultando ainda o movimento das máquinas de elevação de materiais e dos operários durante a construção.” (FANELLI e FANELLI, 2004)

Sem prever a utilização de escoramentos de madeira para o suporte temporário de sustentação da Cúpula, a Opera del Duomo questionava a funcionalidade do modelo de Filippo, pois além de ter que cobrir um vão de cerca de 45,00 metros, seu projeto era constituído de não apenas uma, mas duas abóbodas. Além do mais, a parte mais alta da Cúpula solicitava o assentamento de tijolos em um ângulo de 60 graus em relação à horizontal (KING, 2013).

Devido aos impasses gerados pela inovação do modelo de Brunelleschi, um outro concurso foi realizado em 27 de março de 1420, mas seu modelo foi escolhido para ser executado. Para isso, foi realizado um memorando de 12 parágrafos que descrevia as dimensões das duas

cascas da Cúpula, os sistemas de reforços estruturais, os materiais de construção e entre outras especificações. Tal memorando, no entanto, não descrevia a maneira pela qual seria realizada a construção da Cúpula sem o escoramento temporário, nem como seria realizado o desenvolvimento das cascas após 30 *braccia*, ou seja, a uma distância de aproximadamente 17,50 metros acima do tambor, na qual as juntas da alvenaria estariam formando um ângulo de 30 graus em relação com a horizontal (KING, 2013).

“[...] A fricção por si mesma manteria as pedras em seus lugares até o ângulo de 30 graus, mesmo com a argamassa ainda fresca, e, portanto, não seria necessária a sustentação até aquele ponto. Acima desse nível, no entanto, cada nova fileira de alvenaria se inclinaria mais fortemente, atingindo junto ao topo um ângulo máximo de 60 graus em relação à horizontal.” (KING, 2013)

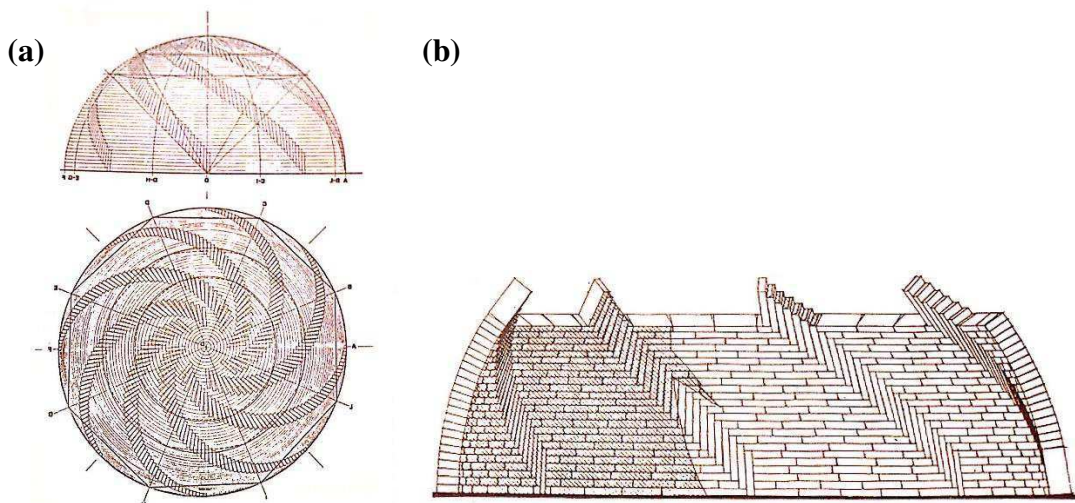
Descrevendo sinteticamente as características fundamentais do projeto da Cúpula, o memorando “[...] foi um documento excepcional, sem precedentes na história [...] da construção das outras grandes catedrais construídas na Itália desde o final do século XIII ” (FANELLI e FANELLI, 2004).

Como especificado no memorando de 1420, quando as cascas chegaram à altura de 24 *braccia*, aproximadamente aos 14 metros, tijolos passaram a ser utilizados ao invés de pedras, a fim de reduzir o peso da estrutura. No entanto, a fim de cobrir o restante da Cúpula sem escoras, inclusive nas regiões que ultrapassavam o ângulo crítico, Brunelleschi assentaria os tijolos de uma forma original, chamada de espinha de peixe (Figura 9).

“ [...] graças ao assentamento espinha de peixe espiralado, pode-se resolver o problema de autossustentação da Cúpula criando cada camada de assentamento como um circuito fechado - graças ao arranjo de filas de tijolos de facas em intervalos regulares - com os anéis inferiores e superiores adjacentes, capazes de se sustentar na conclusão de todo o seu desenvolvimento. Assim, a Cúpula pôde ser realizada como uma forma crescente de auto-sustentação” (FANELLI e FANELLI, 2004).

Segundo Corazzi (2005), quando essa inclinação dos tijolos se torna excessiva, eles tendem a deslizar para baixo até que a argamassa se solidifique. Para evitar que isso ocorra, os tijolos são dispostos verticalmente, com o lado mais longo perpendicular aos paralelos, bloqueando os tijolos ao longo dos paralelos até que a argamassa se solidifique. Logo, verifica-se que tal disposição forma um anel circular "paralelo" completo.

Figura 9: Assentamento espinha de peixe: (a) indicado em uma cúpula esférica; (b) corte transversal de uma cúpula esférica.

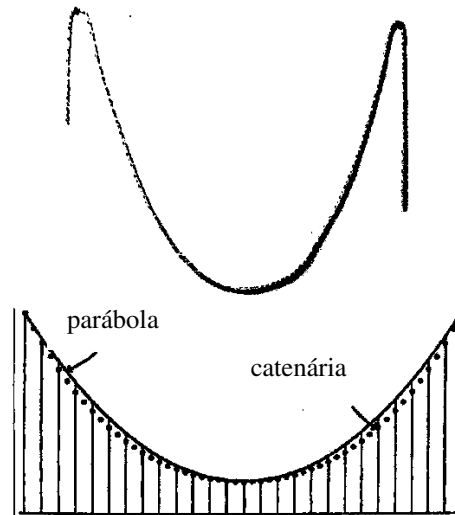


Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

Assim, observa-se que o sistema de assentamento dos tijolos em espinha de peixe, foi um dos elementos fundamentais para que a Cúpula pudesse ter sido construída sem qualquer escoramento temporário. Um outro aspecto relevante para a estabilidade da cúpula autossustentada, é o perfil em forma de “catenária” assumida pela estrutura.

O nome catenária, na verdade, é a forma geométrica assumida por uma corda (Figura 10), quando suspensa em duas extremidades, e conforme demonstrado três séculos após a construção da Cúpula de Santa Maria del Fiore, a catenária é a melhor forma de um arco suportar seu peso próprio. Este formato geométrico é garantido na Cúpula de Brunelleschi, pelos arcos individuais dos tijolos dispostos segundo o assentamento *spinapesce*, e não segundo uma reta horizontal (CORAZZI e CONTI, 2005).

Figura 10: Comparação entre parábola e catenária.

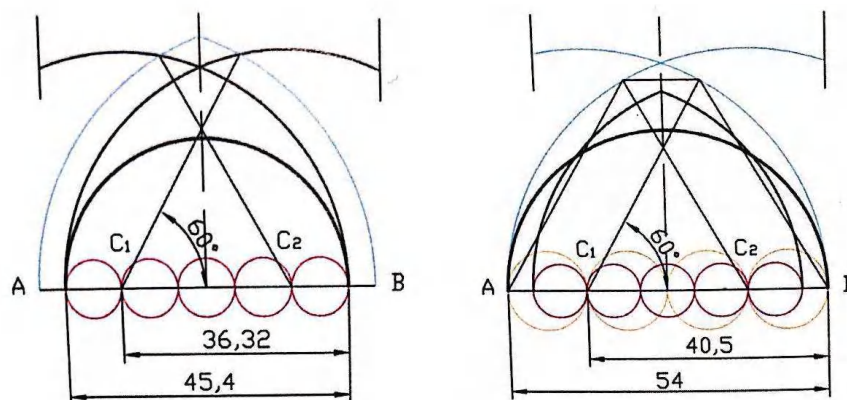


Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2005)

A cúpula interna, cobre um vão de 45,0 m, e, se dividida em cinco partes iguais, obtém-se cada elemento de 9,0 m, conforme indicado na Figura 11-a. Traçando um arco de circunferência de raio de 36,0 m ($45,0 - 9,0 = 36,0$ m), com centro em C_1 , e realizando o mesmo procedimento, mas para o centro C_2 , a reta traçada a partir da intersecção desses dois arcos até o alinhamento AB, é o centro do arco “*di quinto acuto*” (CORAZZI, 2016).

A cúpula externa, no entanto, possui um vão de 54,0 m, e se dividido em quatro partes iguais, cada elemento possui 13,50 m (Figura 11-b). Realizando o mesmo procedimento anterior e traçando um arco de circunferência de 40,50 m com centro em C_1 e C_2 , a reta traçada a partir da intersecção dos arcos até o alinhamento AB, é o centro do arco “*di quarto acuto*” (CORAZZI, 2016).

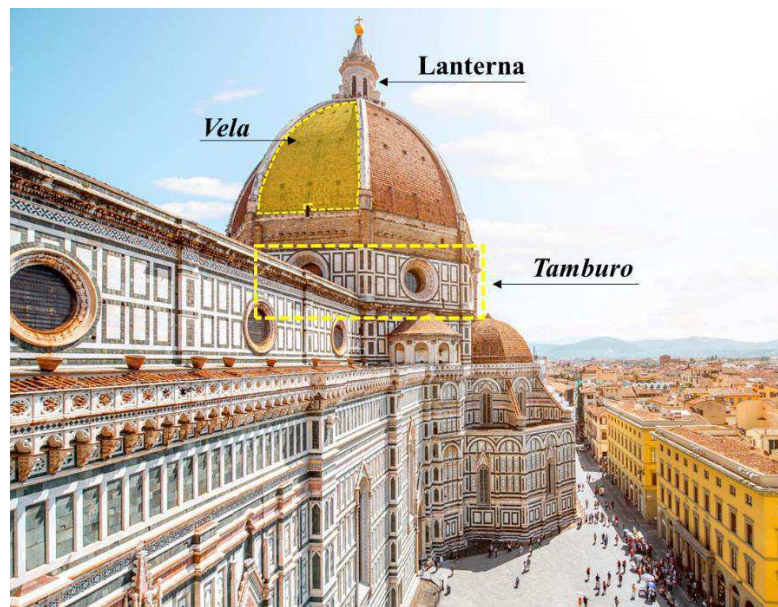
Figura 11: (a) *Sesto di quinto acuto*; (b) *Sesto di quarto acuto*.



Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2005)

Outras características de grande importância, são algumas dimensões presentes na estrutura global da Cúpula. A base da qual a Cúpula é erguida encontra-se à cerca de 55,0 m do solo, apoiada sobre um *Tamburo* de 13,0 m (indicação na Figura 12), com uma altura média de 34 metros e subposta de uma *Lanterna* de 21,0 m (Figura 12). Em ordem crescente, tem-se: 13, 21, 34, 55. Tal sucessão numérica é conhecida como sequência de Fibonacci (CORAZZI e CONTI, 2005).

Figura 12: Indicação da Lanterna e do *Tamburo*.



Fonte: (BELLINI, 2020)

A sequência de Fibonacci consiste na soma dos termos adjacentes, que resultará no termo seguinte:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ...

Uma outra propriedade torna essa sequência considerada uma “progressão divina”, pois o quociente entre o sucessor e o antecessor se aproxima, gradativamente (Tabela 1), do valor de 0,618. Logo, tal razão é conhecida como “razão áurea” ou “divina proporção” (LAURO, 2005).

Tabela 1: Razão Áurea

Sequência de Fibonacci	Razão Áurea (ϕ)	Sequência de Fibonacci	Razão Áurea (ϕ)
1	1,0000000000000000	2584	0,61803405572755
2	0,5000000000000000	4181	0,61803396316671
3	0,6666666666666670	6765	0,61803399852180
5	0,6000000000000000	10946	0,61803398501736
8	0,6250000000000000	17711	0,61803399017560
13	0,6153846153846150	28657	0,61803398820533
21	0,6190476190476190	46368	0,61803398895790
34	0,6176470588235290	75025	0,61803398867044
55	0,6181818181818180	121393	0,61803398878024
89	0,6179775280898880	196418	0,61803398873830
144	0,6180555555555560	317811	0,61803398875432
233	0,6180257510729610	514229	0,61803398874820
377	0,6180371352785150	832040	0,61803398875054
610	0,6180327868852460	1346269	0,61803398874965
987	0,6180344478216820	2178309	0,61803398874999
1597	0,6180338134001250	3524578	0,61803398874986

Fonte: (LAURO, 2005)

Segundo Lauro (2005), as propriedades estéticas e artísticas dessa razão (ϕ) são mostradas no “retângulo áureo”, cujos lados estão na razão de 1 para ϕ , ou de ϕ para 1, sendo considerado como o mais agradável aos olhos humanos. Logo, muitos trabalhos famosos de arquitetura e arte foram baseados no retângulo áureo, e entre eles, a Cúpula de Brunelleschi.

“As tensões e a forma dinâmica (*sesto acuto* e seção de elipse) resultam em uma tensão resultante interna de equilíbrio controlado, com um efeito de ‘cúpula livre’ e suspenso na cidade, resultado do equilíbrio de todas as forças. A Cúpula coordena e organiza, em um conjunto proporcionalmente medido, as massas volumétricas subjacentes: entre a união das costelas, as *vele* esticadas que convergem para a fuga da *Lanterna*, que por sua vez, é definida por setores radiais convergindo para a bola que carrega a cruz.” (FANELLI e FANELLI, 2004).

Pesando cerca de 29.000 toneladas, das quais aproximadamente 2.000 toneladas são de revestimento externo, a Cúpula ficou pronta em agosto de 1436, 16 anos e duas semanas após o início da obra. No entanto, a partir do Renascimento, a maioria das cúpulas passou a possuir *Lanternas* no topo, que além de ser um elemento decorativo, permitia a entrada de luz no interior da Cúpula e facilitava a ventilação (KING, 2013). Assim, no verão de 1436, Filippo Brunelleschi começou a trabalhar no projeto da *Lanterna* para a Cúpula de Santa Maria del Fiore.

Brunelleschi projetou a *Lanterna*, mas não viu sua construção, que iniciou alguns meses antes de sua morte (15 de abril de 1446). Antes do início da construção, houve uma grande

discussão a respeito da estabilidade da Cúpula com a inserção desse elemento arquitetônico, admitindo a sobrecarga adicionada e o risco de colapso. No entanto, a *Lanterna* passa a possuir uma função estrutural, balanceando as forças de tensão de arco na base da Cúpula, permitindo a consolidação da estaticidade do elemento sobre o tambor (KING, 2013).

Conforme mencionado por King (2013), mesmo em épocas de arranha-céus e estruturas com cúpulas gigantes, a Cúpula de Santa Maria del Fiore, erguida sem armadura e sem escoras de madeira, por Filippo Brunelleschi em 1436, foi saudada como uma das maiores façanhas da engenharia do mundo. Muitos foram os poemas em latim compostos em sua homenagem, livros lhe foram dedicados, “[...] biografias foram escritas, artistas esculpiram seu busto e pintaram seu retrato”:

“ Quem, por mais invejoso, não elogiou Brunelleschi como arquiteto, vendo aqui uma estrutura tão grande, pairando acima dos céus, que cobriria todas as cidades da Toscana com sua sombra, sem qualquer ajuda de treliças ou escoramento de madeira, de posse de artifícios que, naquele tempo, era quase impossível [...]” (FANELLI e FANELLI, 2004),

escreve Leon Battista Alberti, no prólogo da edição *De Pictura*, em 1436, dedicando à Brunelleschi e à Cúpula, toda e qualquer definição de grande obra.

3.2. ASPECTOS CONSTRUTIVOS

3.2.1. TEORIA DO ARCO DE ALVENARIA

Um dos mais antigos sistemas construtivos, a alvenaria de pedra e, mais especificamente, o arco de alvenaria, é um dos grandes indícios da evolução da ciência estrutural ao longo do tempo (NUNES, 2009) que, conjuntamente com a cúpula e abóboda, se fundamentou em regras estruturais baseadas no conhecimento empírico.

Definido como um elemento estrutural que transmite seu peso próprio e sobrecargas a dois apoios, por meio de esforços normais simples de compressão, o arco é um sistema estrutural de forma-ativa que transite cargas por esforços de tração (NUNES, 2009).

O arco como elemento estrutural surge da necessidade de se vencer grandes vãos com o mínimo de apoios intermediários e, além da grande economia de material e desempenho de funções estéticas, a curvatura introduz ganhos significativos de resistência.

3.2.1.1. ARCO CATENÁRIO

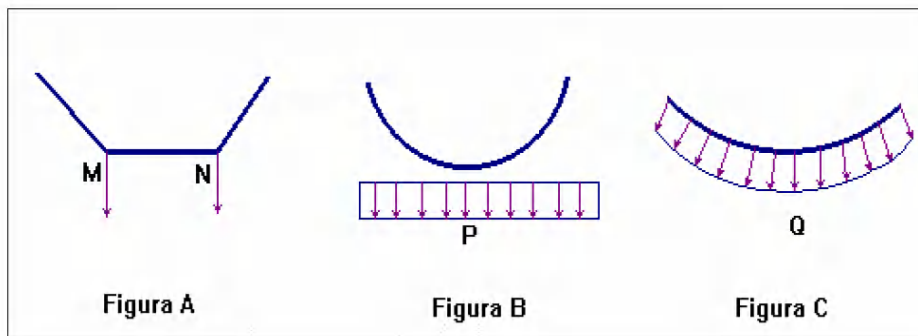
A catenária (Figura 10) é definida como uma curva de equação transcendente que representa o formato de um cabo suspenso pelas extremidades sob a ação do seu peso próprio:

$$y = \frac{e^x + e^{-ax}}{2a} \quad (1)$$

onde, a é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente e a tensão com a qual ela é segura (TALAVERA, 2008).

Na Figura 13, pode-se verificar a ação de diferentes forças que atuam em um cabo, permitindo a visualização das formas assumidas em função da distribuição das cargas nele, verificando-se que enquanto na Figura 13-b a carga é uniformemente distribuída ao longo de um plano horizontal, (suspensão em parábola) na Figura 13-c a carga distribuída atua ao longo do cabo, caracterizando uma suspensão catenária.

Figura 13: Representação da forma geométrica assumida nos cabos em função das cargas aplicadas: (a) duas cargas pontuais; (b) carga distribuída em plano horizontal; (c) carga distribuída seguindo a geometria do cabo.



Fonte: (TALAVERA, 2008)

A catenária invertida passou a ser utilizada para a construção de arcos, pela excelente capacidade de sustentação do peso próprio (NUNES, 2009):

“[...] a forma que um fio flexível assume quando submetido a uma dada situação de carregamento, quando invertida, é a forma do arco ideal (de alvenaria) para a mesma situação de carregamento, ou, em outras palavras, a estática do arco em compressão é a mesma do cabo flexível em tração [...]”

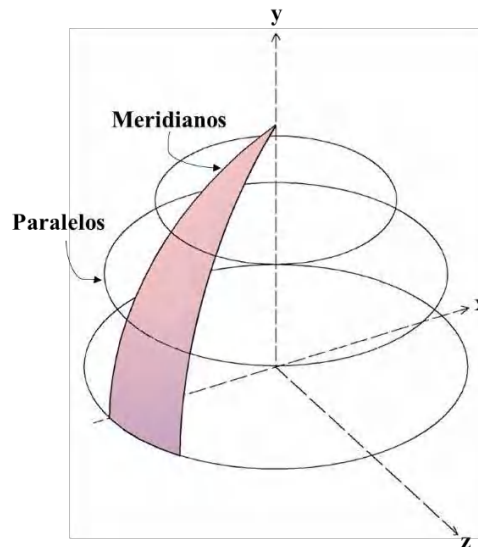
Segundo Heyman (1972, *apud* Nunes, 2009), “[...] nenhuma senão a catenária é a figura de um arco verdadeiro, legítimo. E quando um arco de qualquer outra forma se sustenta é porque há uma catenária em sua espessura.”, referindo-se assim, à linha de pressão, o equilíbrio e os mecanismos de colapso do arco.

De maneira geral, a linha de empuxo é definida como o lugar geométrico dos pontos por onde passam as resultantes dos esforços por um determinado plano de corte, e é dependente da forma, do carregamento da estrutura estudada bem como dos planos de corte escolhidos (NUNES, 2009).

3.2.2. CÚPULAS EM ALVENARIA

Uma cúpula pode ser considerada uma superfície de revolução gerada pela rotação de um arco em relação à um eixo central, e constituída por alinhamentos curvos tridimensionais e contínuos segundo duas direções mutuamente ortogonais: meridianos e paralelos, conforme indicado na Figura 14.

Figura 14: Indicação dos meridianos e paralelos de uma cúpula.



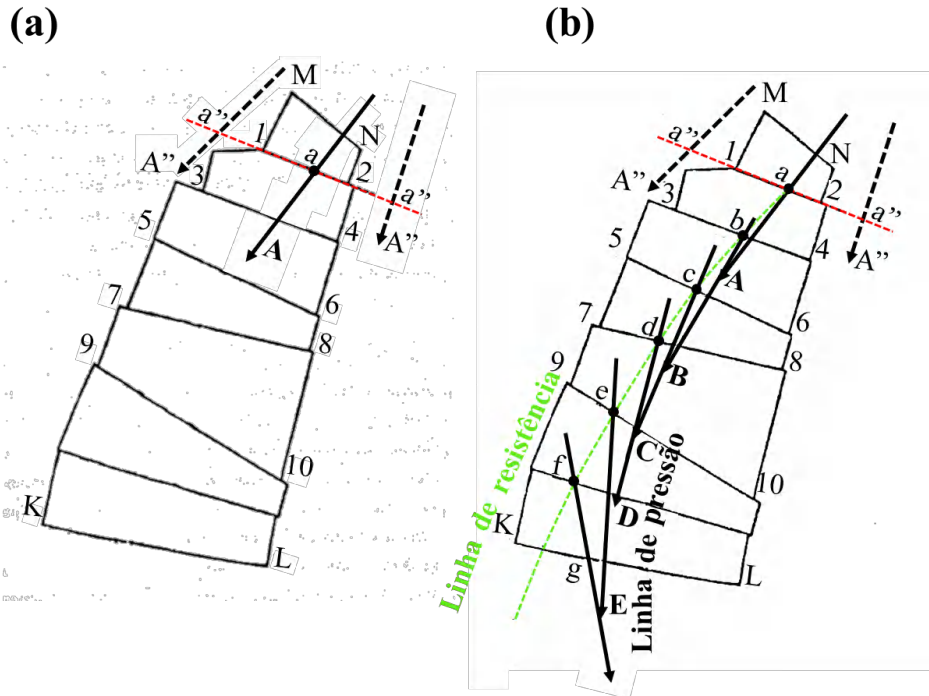
Os métodos estáticos usuais para modelar as cúpulas (daquelas mais simples às mais complexas) são fundamentais nas análises do comportamento do arco e a de uma superfície curva (NUNES, 2009).

Partindo do pressuposto de que a construção de um anel fechado é submetida à esforços normais simples de compressão, a linha de pressão permite a transmissão desses esforços dentro da alvenaria, e para cada linha de pressão, há uma representação possível de situação de equilíbrio.

Considerando a Figura 15 e admitindo que “MNLK” é um maciço de alvenaria, sem argamassa em suas juntas e seja “1a2” um plano que corta a estrutura e “A” a resultante de todas as forças que atuam no maciço, a Figura 15-a indica a representação gráfica da linha de empuxo, como sendo “A”, essa resultante das forças (NUNES, 2009).

Na Figura 15-b, foi realizado o mesmo procedimento para todos os maciços representados, e fica evidenciada que a linha de pressão depende da forma, do carregamento e dos planos de corte da estrutura avaliada.

Figura 15: Representação da linha de empuxo (a) no maciço MN12 (b) nos maciços MNLK.

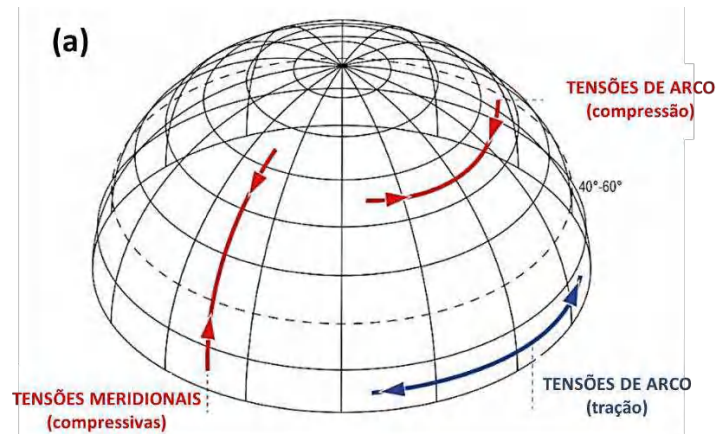


Fonte: (NUNES, 2009).

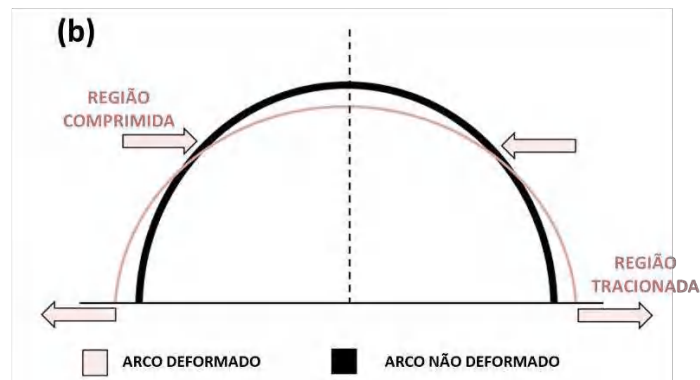
Considerando a distribuição das linhas de pressão nos arcos, verifica-se que a construção das cúpulas em alvenaria consiste na construção de sucessivos anéis auto-portantes sobrepostos, que ao serem erguidos, formarão meridianos submetidos também a tensões de compressão entre alvenarias adjacentes.

Quando submetidas ao carregamento gravitacional, as tensões nos meridianos das cúpulas de alvenaria são de compressão. No entanto, as tensões nos anéis são de compressão na parte superior (entre o ângulo de 45° e de 60° partindo do topo da cúpula) e de tração abaixo dessa angulação (ERCOLE, 2019), como indicado na Figura 16.

Figura 16: (a) Indicação das tensões atuantes em uma cúpula de rotação submetida ao peso próprio; (b) Indicação das tensões de arco.



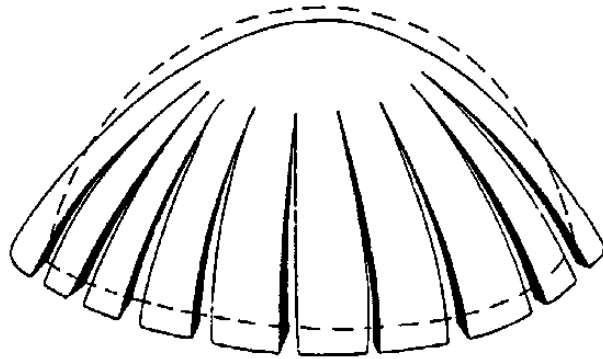
Fonte: (ERCOLE, 2019)



Em virtude da baixa resistência à tração da alvenaria, é muito comum o desenvolvimento de fissuras em cúpulas desse tipo construtivo (Figura 17). Segundo Heyman (1966) citado por Ercole (2019) as rachaduras verticais estão localizadas na parte inferior da cúpula devidas às tensões de arco, evidenciadas na Figura 16-b e Figura 17, geralmente não causam problemas de estabilidade, uma vez que já são projetadas para suportar o carregamento gravitacional e permanente.

Dessa maneira, a questão fundamental da análise de segurança estrutural das cúpulas é a avaliação da sua geometria, e se ela permite equilibrar seu próprio peso e das outras cargas verticais permanentes.

Figura 17: Representação da tendência das cúpulas de fissurarem ao longo dos meridianos.

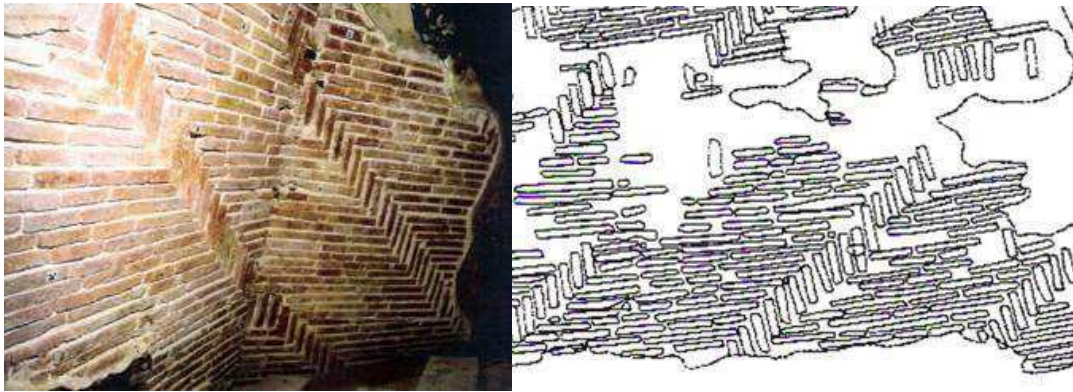


Fonte: (FACCIO, 2013)

3.2.3. ASSENTAMENTO ESPINHA DE PEIXE

Conforme mencionado no item 3.1, o assentamento em espinha de peixe consiste na inserção de tijolos na vertical, com o lado comprido perpendicular ao lado comprido dos tijolos dispostos horizontalmente, conforme indicado na Figura 18.

Figura 18: (a) Detalhe dos tijolos dispostos à *spinapesce* durante o restauro dos afrescos; (b) Disposição do assentamento *spinapesce* em uma *vela* da cúpula externa.



Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

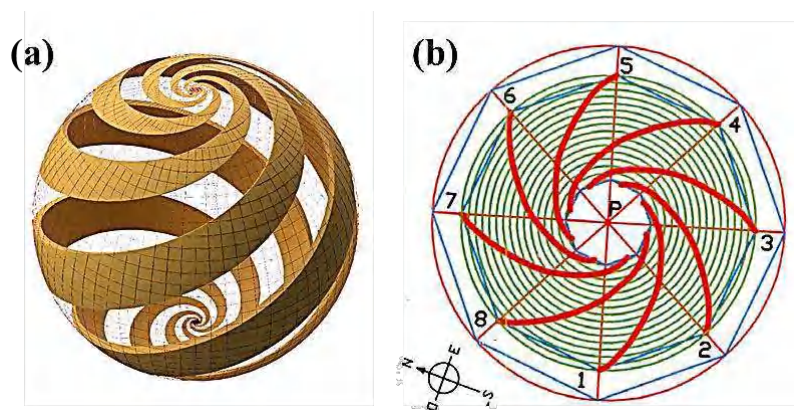
Segundo Corazzi e Conti (2011), a técnica espinha de peixe foi usada anteriormente a construção da Cúpula de Brunelleschi pelos bizantinos; no entanto, para cúpulas de rotação de base circular construídas sem escoramentos, tem-se como exemplo as cúpulas existentes em território iraniano. Acredita-se que Filippo tenha se deparado com algumas construções que utilizaram desta técnica durante sua estadia em Roma.

Uma das grandes dificuldades de construção da Cúpula, é sua forma octogonal. O método mais comum de construir uma cúpula nesse estilo, segundo (CORAZZI, 2012) é a utilização de apoios verticais (escoramento), com o mesmo formato da estrutura a ser construída, que a sustentam durante a construção e depois são desmontados, deixando-a autônoma.

Brunelleschi, no entanto, propusera um método para construção da Cúpula sem escoramentos e, portanto, encontrou uma maneira de erguê-la como se fosse uma base circular, ou seja, são construídos anéis concêntricos de tijolos sobrepostos, que vão sendo comprimidos à medida que são erguidos. A única desvantagem dessa técnica de construção é que, à medida que a Cúpula é erguida, os tijolos se inclinam cada vez mais; para evitar o deslizamento antes que a argamassa cure, alguns tijolos são dispostos na vertical (à cutelo) em intervalos regulares (no caso da Cúpula, uma distância central de cerca de 1,20 m, mas nem sempre constante de baixo para cima), ou seja, verticalmente de acordo com planos radiais com o lado mais longo perpendicular aos paralelos (CORAZZI, 2012).

Essa técnica é chamada de *spinapesce* e foi usada pelos arquitetos islâmicos, que o haviam aprendido com os bizantinos e estes, provavelmente, o haviam aprendido com os antigos romanos. Nas cúpulas hemisféricas, o desenvolvimento do *spinapesce* cria uma curva loxodrómica, ou linha de rumo, ou seja, que formam um ângulo constante com os meridianos. A curva do *spinapesce* se aproxima cada vez mais dos polos da Cúpula (Figura 19-b), como pode ser observado em alguns desenhos de Escher, em particular o intitulado *Sphere Spirals*, (CORAZZI, 2012) no qual uma esfera envolvida em uma família de espirais é representada (Figura 19-a).

Figura 19: (a) *Sphere Spirals*, Escher, 1958; (b) Curva do assentamento *spinapesce* se aproximando dos polos da Cúpula.



Fonte: (CORAZZI, 2012), adaptado

Uma estrutura de base octogonal, como a de Santa Maria del Fiore, apresenta maiores dificuldades na aplicação dessa técnica: formada por oito velas, sua estrutura não possui a mesma continuidade que as cúpulas circulares. Apesar dessas dificuldades, Brunelleschi ainda utiliza a técnica de espinha de peixe, para garantir a estabilidade dos segmentos durante a construção, mas deve dispor os tijolos ao longo de linhas semelhantes às hélices cilíndricas.

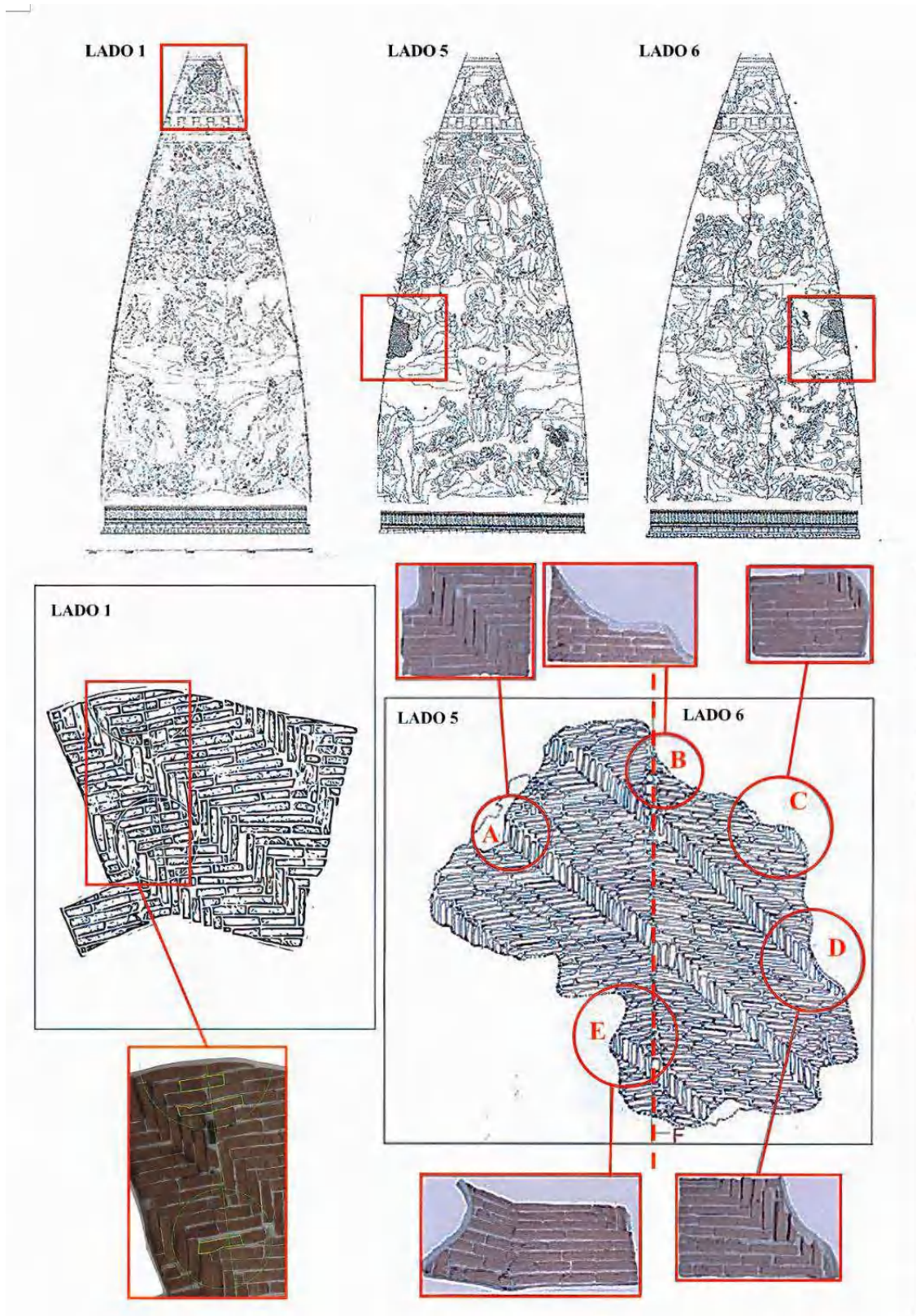
Outra peculiaridade interessante é que a família de espirais que circunda essa estrutura está em uma direção concordante com a direção norte. Segundo Corazzi (2012):

“o tipo de curva que descreve a *spinapesce* é uma linha de rumo que forma ângulos de 45° com os geradores do cilindro elíptico; portanto, a curva é uma hélice cilíndrica. Nesse caso em particular, as curvas em *spinapesce* não são apenas linhas de rumos que formam ângulos constantes com os geradores do cilindro, mas também geodésicas (linha mais curta que une dois pontos de uma superfície).”

Para cada *vela* da Cúpula, há cerca de dez *spinapesce*, e estão localizados a uma distância de cerca de 1,79 metros um do outro, envolvendo cerca de 20,00 a 25,00 m da Cúpula. Os tijolos posicionados ao longo dos meridianos até o topo, ou seja, à cutelo, medem 45 cm de altura e sempre permanecem perpendiculares à horizontal em qualquer altura da Cúpula.

Durante a restauração dos afrescos por Vasari e Zuccari (afrescos que decoram o interior da Cúpula de Brunelleschi), foram desenvolvidos modelos de vidro-resina de porções das *vele* 1 (oeste), 5 (leste) e 6 (nordeste), das quais pode-se deduzir a característica do *spinapesce*, bem como as distintas dimensões dos tijolos utilizados no assentamento, que são muito maiores do que os de um tijolo tradicional (CORAZZI, 2012), como pode ser visto na Figura 20. Além disso, pode-se ver que em duas *vele* o tijolo foi esculpido para fazer com que a inclinação das duas *vele* mantenham-se adjacentes e, em certos pontos, a espessura da argamassa é maior que a do tijolo.

Figura 20: A característica do assentamento *spinapesce* e as dimensões de diversos tijolos nas porções das *vele* 1, 5 e 6, da Cúpula de Brunelleschi.



Fonte: (CORAZZI, 2012), adaptado

3.2.4. CORDA BLANDA

Além da técnica construtiva *spinapesce*, que foi usada nos antigos edifícios seljúcidas (século X) e nas mesquitas posteriores de Isfahan e Ardistan (século XI), Brunelleschi também utilizou uma técnica chamada “*corda blanda*”, que seguem uma linha curva no centro das *vele* e se elevam próximas as arestas.

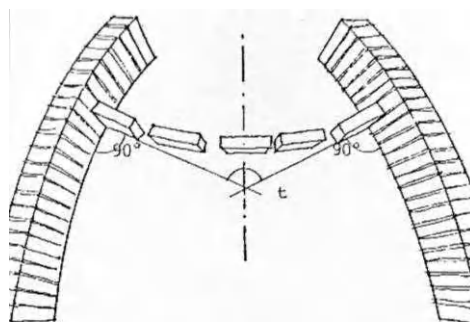
O uso dessa técnica na construção da Cúpula de Santa Maria del Fiore, de base octogonal, deriva dos princípios de uma técnica típica de cúpula de rotação, onde os tijolos são dispostos ao longo de circunferências: os paralelos.

Nas cúpulas esféricas, os tijolos, localizados nos paralelos, inclinam-se para o centro; portanto, são encontrados em superfícies cônicas que têm seu vértice no centro da esfera. Se na Cúpula de Santa Maria del Fiore, que tem uma base octogonal, os tijolos fossem dispostos de acordo com anéis octogonais, estes, nas junções entre duas velas adjacentes, formariam tais vértices. Tais discontinuidades nos pontos em que ocorrem as maiores concentrações de tensões, causariam danos perigosos à estabilidade da Cúpula (CORAZZI e CONTI, 2011).

Segundo Corazzi e Conti (2011), Brunelleschi havia notado que a cúpula octogonal do Batistério de Florença era construída dessa maneira e, de fato, as fissuras haviam aparecido nas arestas. No entanto, neste caso, não houve problemas de estabilidade pois a construção possui um suporte externo para sustentação da cúpula.

A Cúpula de Santa Maria del Fiore não tinha estrutura externa para sustentá-la. Então, para impedir que as superfícies de assentamento de tijolos formassem cantos nas bordas, Brunelleschi a construiu como se fosse uma cúpula de rotação. Para este fim, os tijolos das *vele* adjacentes foram colocados no mesmo nível nos cantos, como mostra a Figura 21, e cada um desses planos perpendiculares à aresta correspondente.

Figura 21: Detalhe da disposição dos tijolos *corda blanda*.

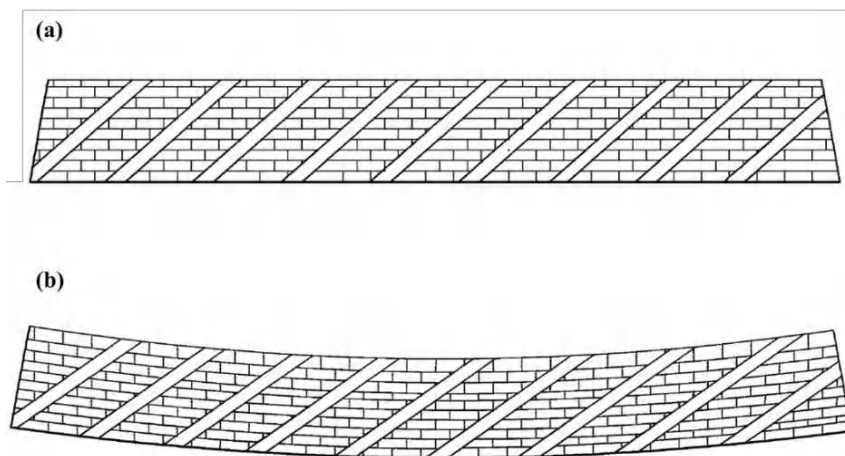


Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

Continuando esse arranjo dos tijolos em cada *vele*, observa-se que eles são dispostos sobre superfícies curvas (pertencentes a superfícies cilíndricas das *vele*), de modo a serem ortogonais aos meridianos da Cúpula, como ocorre nas cúpulas de rotação (CORAZZI e CONTI, 2011).

Assim, diferentemente da disposição de tijolos sobrepostos sobre superfícies planas horizontais intercalados por tijolos perpendiculares (Figura 22-a), à cutelo, Brunelleschi adotou o assentamento de tijolos sobrepostos segundo superfícies curvilíneas, conforme indicado na Figura 22-b.

Figura 22: (a) *Spinapesce* intercalada com tijolos horizontais sobre plano horizontal; (b) *Spinapesce* intercalada com tijolos horizontais sobre superfície curvilínea.



Com o assentamento dos tijolos horizontais sobre a superfície curvilínea, as tensões nas arestas da Cúpula seriam amenizadas, evitando o surgimento de fissuras como as observadas no Batistério por Brunelleschi. Acredita-se que tal decisão foi tomada graças à sugestão de um amigo matemático, Paolo Toscanelli, de modo que, assim como um diagrama de um momento fletor de uma viga de comprimento L , as tensões máximas estariam localizadas no comprimento $L/2$.

Segundo Corazzi (2011), as superfícies curvilíneas correspondem aos paralelos das cúpulas hemisféricas, precisamente porque são sempre perpendiculares às linhas do meridiano. Desta forma, é obtida uma cúpula semelhante à da rotação e, portanto, auto sustentável durante a fase de construção.

Sabendo que a geometria de uma vela pode ser obtida pela porção de um cilindro elíptico, conforme indicado na Figura 23 (que atende à geometria de *sesto di quinto acuto* para a cúpula interna e *quarto di quinto acuto* para a cúpula externa), segundo a interpretação de Salvatore Di Pasquale, cada *corda blanda* é resultado da interseção de um cone de rotação com a superfície

da *vela* (Figura 24), mantendo constante a inclinação em relação ao centro do cilindro elíptico, para cada *vela* de assentamento dos tijolos.

Figura 23: (a) Esquema isométrico da *vela* gerada por uma porção do cilindro elíptico; (b) Detalhe da *vela*.

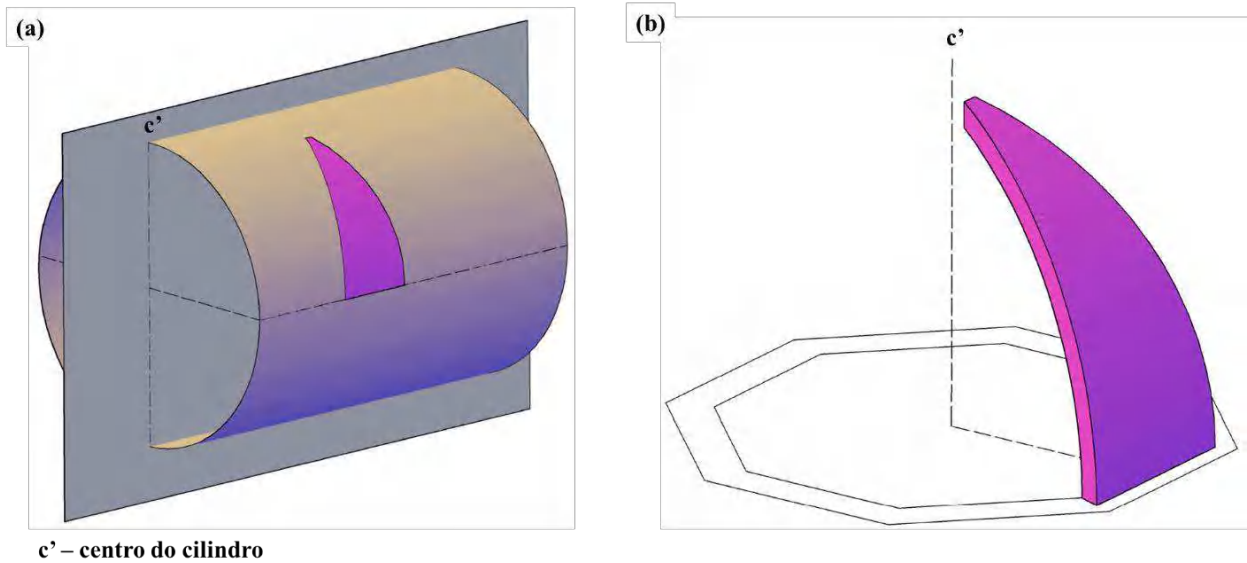
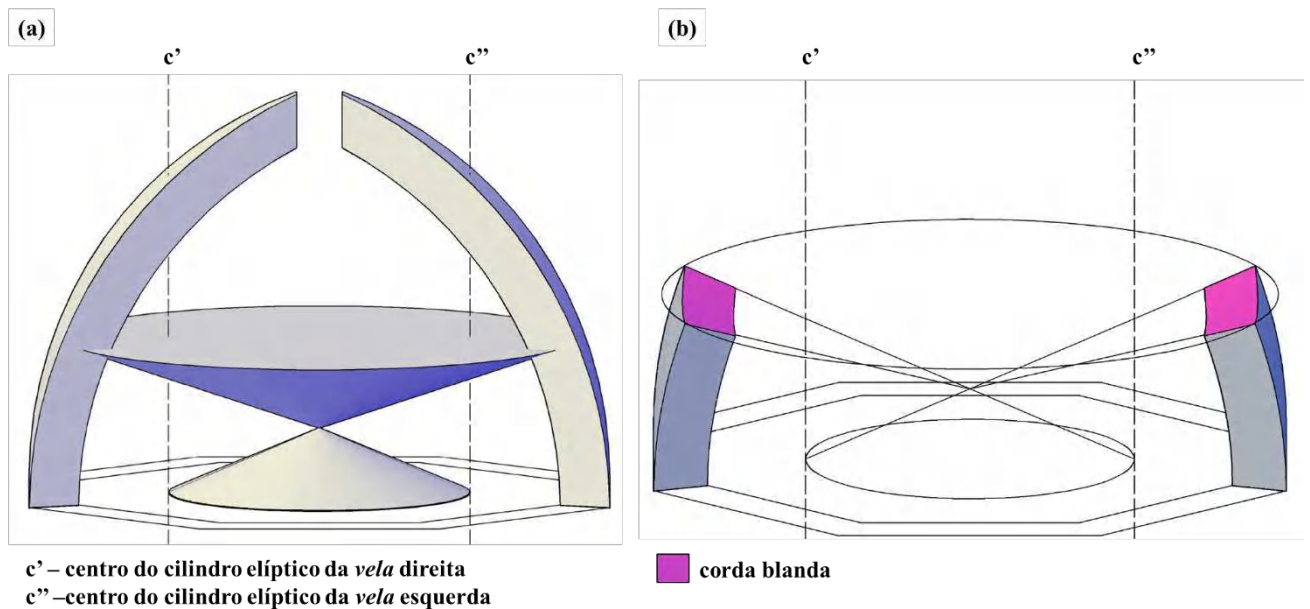
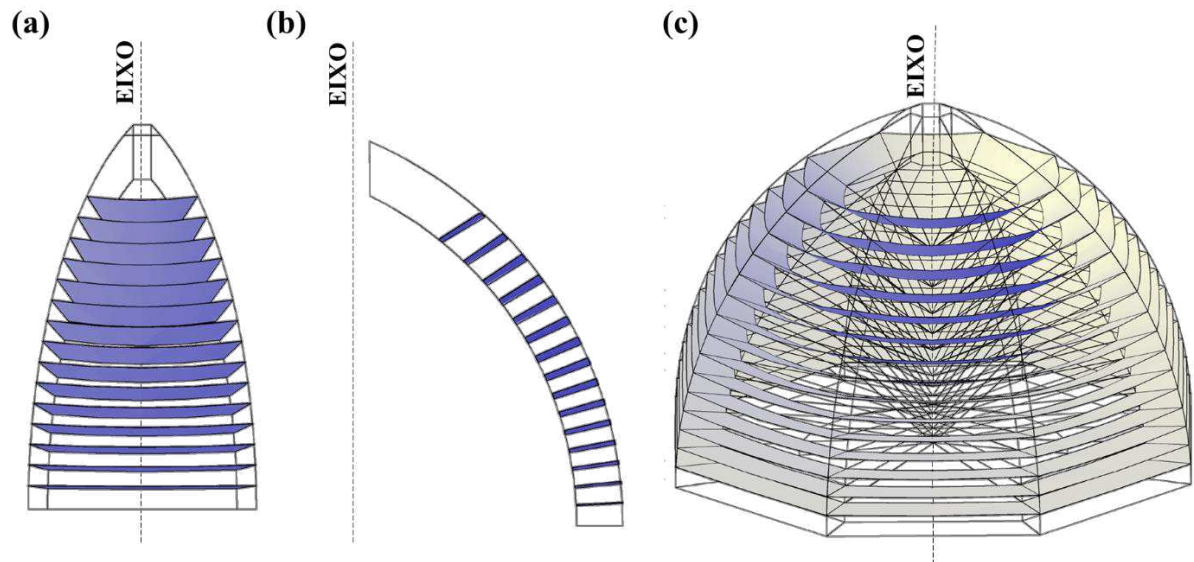


Figura 24: (a) Indicação do cone de rotação que interceptam as *vele*; (b) Indicação das *corde blanda* geradas pela intercessão do cone de rotação com as *vele*.



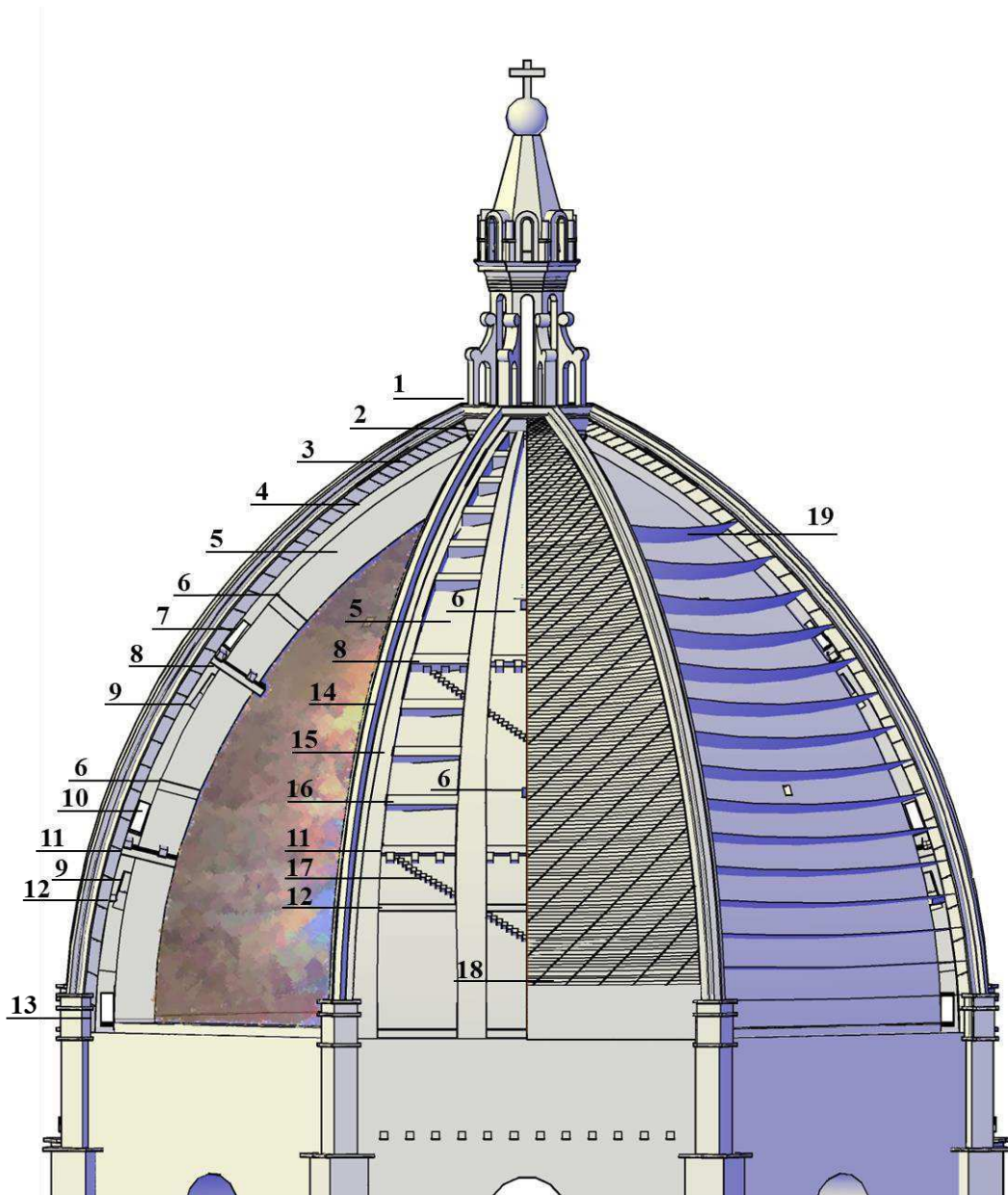
Na Figura 25, encontram-se alguns detalhes com diversas superfícies curvas e representações das *corde blande* geradas pela interseção do cone de rotação com as *vele*, para distintas cotas.

Figura 25: Representação da *corda blanda* em diferentes cotas.



Assim, a parte mais baixa da Cúpula é constituída por blocos de pedra arenito, da cota 0,00 m à cota 7,00 m, sobre planos horizontais. A partir da cota 7,00 m, Brunelleschi substituiu os blocos de pedra por tijolos, para redução da massa da estrutura, e deu início ao assentamento *spinapesce* e *cordablanda*, como indicado na Figura 26 com a representação de outros elementos que constituem a Cúpula de Brunelleschi.

Figura 26: Representação do assentamento *spinapesce*, *corda blanda* e os outros diversos elementos construtivos da Cúpula de Brunelleschi.



- | | |
|---|--|
| 1 - Lanterna | 11 - Segunda Cadeia de Arenito |
| 2 - <i>Serraglio</i> | 12 - Viga de Madeira |
| 3 - Cúpula Externa | 13 - Primeiro <i>camminamento</i> |
| 4 - Sistema Intermediário de Contrafortes | 14 - <i>Costoloni</i> |
| 5 - Cúpula Interna | 15 - Contrafortes |
| 6 - <i>Occhi</i> da Cúpula Interna | 16 - Arcos Horizontais |
| 7 - Terceiro <i>camminamento</i> | 17 - Escadas |
| 8 - Terceira Cadeia de Arenito | 18 - Representação do assentamento <i>spinapesce</i> |
| 9 - Acesso às escadas | 19 - Representação do assentamento <i>corda blanda</i> |
| 10 - Segundo <i>camminamento</i> | |

3.3. MODELAGEM NUMÉRICA- ELEMENTOS FINITOS

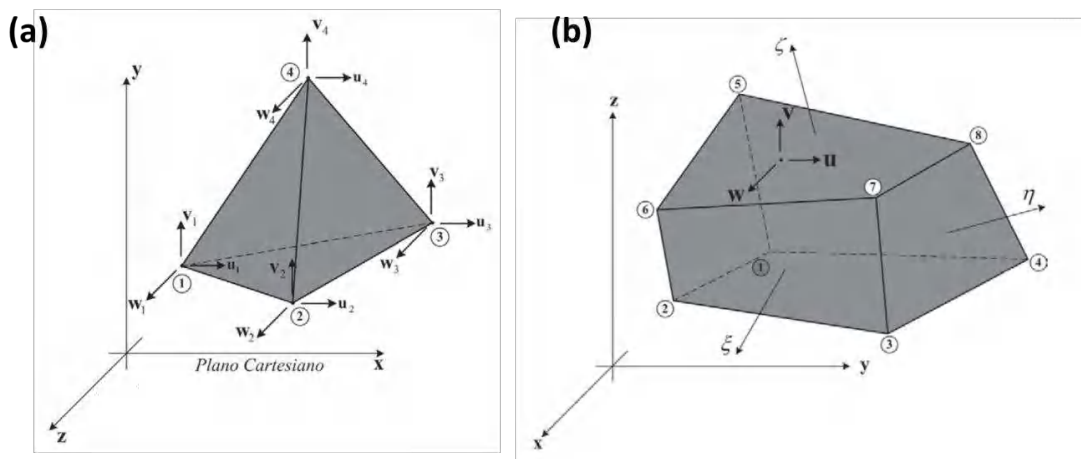
O Método dos Elementos Finitos (MEF) tem como principal objetivo a determinação dos estados de tensão e deformação de sólidos submetidos a carregamentos. Tais análises eram feitas pela resolução de sistemas de equações de derivadas parciais que regem o fenômeno e, para isso, recorria-se às séries de Fourier, que devido à complexidade, limitava as análises em função da sua homogeneidade e geometria (AZEVEDO, 2003).

Assim, a característica principal do MEF é a divisão do corpo estudado em elementos finitos, conectados por nós, para posterior obtenção de uma solução aproximada para a característica avaliada (SANTOS e NETO, 2016). Com o grande desenvolvimento dos recursos computacionais ao longo dos anos, o método passou a ser empregado para uma ampla variedade de formas geométricas e múltiplos materiais, sujeitos a diversos tipos de carregamento.

Para uma análise coerente dos resultados gerados em softwares que realizam modelagens numéricas de elementos estruturais, é necessário o domínio dos conceitos bases que regem o entendimento do comportamento de uma estrutura, como grau de liberdade, deslocamentos generalizados, forças generalizadas, equilíbrio, matriz de rigidez, vetor de solicitação, condições de apoio, etc (AZEVEDO, 2003).

Para análises de sólidos tridimensionais, existem diversos tipos de elementos, os mais comuns, são o tetraedro e o hexaedro, indicados Figura 27. Neste trabalho, será utilizado o elemento tetraédrico.

Figura 27: (a) Elemento tetraedro; (b) Elemento hexaedro.



Fonte: (VAZ, 2011)

De maneira geral, os elementos tetraédricos são geometricamente versáteis e são usados em muitos algoritmos de malha automática, pela facilidade em mesclá-los. Por esse motivo, é comumente utilizado em sólidos de forma. No entanto, uma boa malha de elementos hexaédricos geralmente fornece uma solução de precisão equivalente a um custo menor, por possuírem uma taxa de convergência e sensibilidade à orientação da malha melhores (DASSAULTSYSTÈMES®, 2017).

Exemplificando o caso do elemento tetraedro, os campos que descrevem os deslocamentos no interior do elemento são polinômios lineares em x , y e z , conforme indicado na Equação 2 (VAZ, 2011).

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z; \\ v(x, y, z) &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8z; \\ w(x, y, z) &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z; \end{aligned} \quad (2)$$

A escolha de polinômios lineares de 4 termos com 12 coeficientes incógnitos a_i pode agora ser justificada pelas 12 condições de contorno indicadas na Equação 3, onde u_i , v_i e w_i são os deslocamentos nodais relativos aos eixos x , y e z , respectivamente.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_1(x, y)u_i; \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_1(x, y)v_i; \\ w(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_1(x, y)w_i; \end{aligned} \quad (3)$$

Sabendo que o volume do elemento é representado pela variável Vol , indicada na Equação 4, e \mathbf{B} é a matriz de compatibilidade cinemática que transforma deslocamentos nodais em deformações no interior do elemento, tem-se submatrizes \mathbf{B}_i que representam a parcela de \mathbf{B} relativa ao nó i , conforme indicada na Equação 5 (VAZ, 2011). Na Equação 6, são indicados os coeficientes b_i , c_i e d_i .

$$Vol = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$$B_i = \frac{1}{6Vol} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} b_i &= - \begin{bmatrix} 1 & y_i & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{bmatrix}; \\ c_i &= + \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_m & 1 & z_m \end{bmatrix}; \\ d_i &= - \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_m & y_l & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (6)$$

Admitindo que os nós i, j, k e l seguem a sequência “ $i, j, k, l; i, j, k, l \dots$ ”, se a numeração local dos nós 1, 2, 3 e 4 corresponder aos nós globais 7, 9, 12, 15, \mathbf{B}_1 , que corresponde ao nó 7 global, será formada com as coordenadas dos nós $j = 9, k = 12$ e $l = 15$. Já \mathbf{B}_2 , que corresponde ao nó 9 global, será formada com as coordenadas dos nós $j = 12, k = 15$ e $l = 7$ e assim sucessivamente (VAZ, 2011).

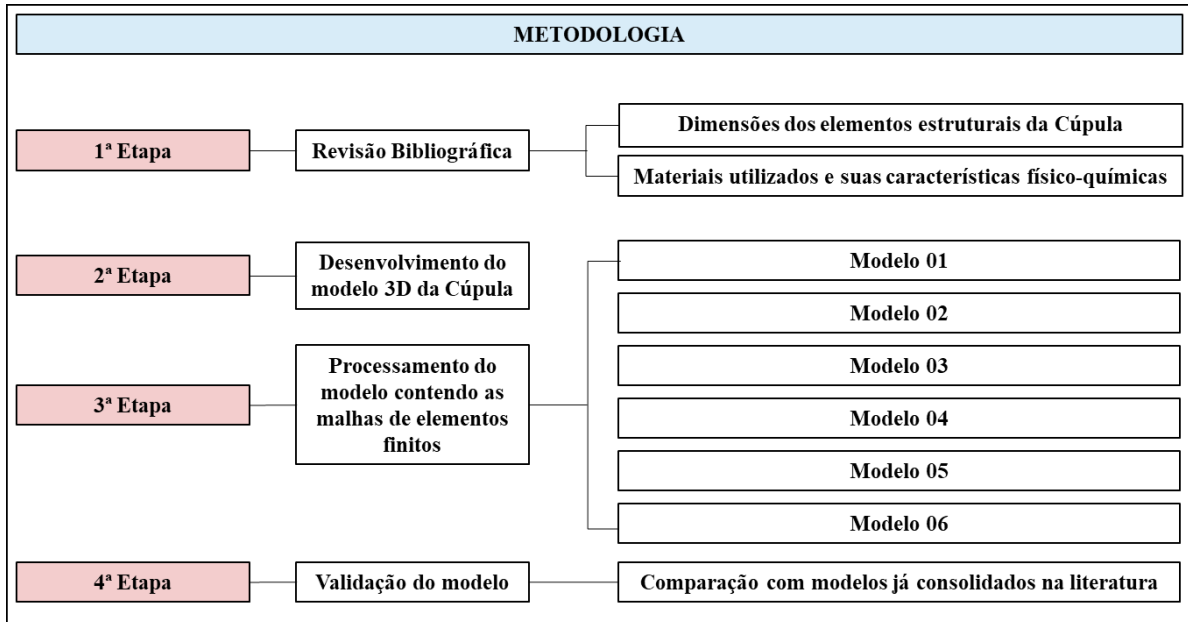
No caso dos elementos hexaedros, as equações são referentes aos 8 nós, cada um contendo 3 graus de liberdade. Deste modo, o sistema passa a ter polinômios de 8 termos e, portanto, com 24 coeficientes.

Dessa maneira, utilizando o princípio dos deslocamentos nodais com auxílio de software computacional, será possível determinar o estado de tensão dos modelos desenvolvidos submetidos aos respectivos carregamentos, para validação com os dados da bibliografia.

4. METODOLOGIA

A fim de desenvolver, analisar tensões e validar o modelo geométrico da Cúpula da Catedral de Santa Maria del Fiore, este trabalho foi dividido em quatro etapas, conforme indicado na Figura 28.

Figura 28: Fluxograma da metodologia adotada.



4.1. Revisão Bibliográfica

Admitindo que a Cúpula de Santa Maria del Fiore foi construída no ano de 1420, poucas foram as informações deixadas por escrito ao que se refere o método construtivo adotado por Filippo Brunelleschi, com exceção do memorando de 1420. No memorando, são descritas as dimensões da cúpula interna e externa, os sistemas de reforços estruturais, os materiais de construção e outras especificações, porém, de maneira superficial, não permitindo o conhecimento de todas as técnicas utilizadas para o desenvolvimento da estrutura.

Assim, ao longo dos anos, diversos estudiosos debruçaram-se diante da construção, de modo a estudar e descobrir a maneira como a Cúpula foi erguida, bem como as técnicas utilizadas para o desenvolvimento de cada etapa construtiva, os materiais utilizados, maquinários e ferramentas adotadas.

Dessa maneira, a primeira etapa do projeto consistiu na realização de uma revisão bibliográfica para identificação e especificação das técnicas construtivas utilizadas por

Brunelleschi para a construção da Cúpula de Santa Maria del Fiore, especificando as dimensões de cada elemento estrutural e as características físicas dos materiais constituintes.

4.2. Desenvolvimento do Modelo Tridimensional da Cúpula

A segunda etapa do projeto consistiu no desenvolvimento gráfico do modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi, e do *Tamburo*, com auxílio da ferramenta de modelagem tridimensional do software de desenho técnico AutoCAD (AUTOCAD®, 2020).

4.3. Processamento do modelo contendo as malhas de elementos finitos

Com o modelo tridimensional desenvolvido, os elementos portantes da estrutura global da Cúpula foram selecionados e exportados para o software de análise de elementos finitos ABAQUS (DASSAULTSYSTÈMES®, 2014), para geração das malhas de elementos finitos tetraédricos.

A escolha do software se deu em função da sua capacidade de modelagem de elementos e de materiais, uma vez que o ABAQUS permite a previsão do comportamento e o desempenho de estruturas complexas, além de possuir uma malha automatizada, facilitando pequenos ajustes.

Com a inserção das malhas no modelo geométrico tridimensional, os elementos estruturais selecionados foram processados no software ABAQUS para a determinação das tensões da estrutura em função do seu peso próprio.

Admitindo que a Cúpula de Brunelleschi possui alguns elementos construtivos que foram essenciais para sua estabilidade e construção sem a utilização de escoramento, foram desenvolvidos alguns modelos para determinação quantitativa e desempenho estrutural desses elementos na construção, conforme detalhado a seguir e resumido na Tabela 2..

- **MODELO 01:** Modelo com o assentamento *spinapesce* iniciando a partir da cota 3,50 m da cúpula interna para verificação do desempenho do método construtivo iniciando em uma cota mais baixa.
- **MODELO 02:** Modelo com o assentamento *spinapesce* iniciando na cota 7,00 m, tal como realizado por Brunelleschi, sobre uma **base construída com blocos de pedra**, sobrepostos em planos paralelos horizontais, da cota 0,00 m à cota 7,00 m.

- **MODELO 03:** Modelo com o assentamento *spinapesce* iniciando na cota 7,00 m, sobre uma **base construída com tijolos** sobrepostos em planos paralelos horizontais, da cota 0,00 m à cota 7,00 m. Tal modelo tem o objetivo de verificar o desempenho estrutural dos blocos quadrados de pedra utilizado por Brunelleschi nesta base.
- **MODELO 04:** Modelo adotado por Brunelleschi, com o assentamento *spinapesce* e *corda blanda* iniciando na cota 7,00 m, sobre uma base construída com blocos quadrados de pedra sobrepostos em planos paralelos horizontais, da cota 0,00 m à cota 7,00 m, com o objetivo de verificar o desempenho estrutural da *corda blanda*.
- **MODELO 05:** Modelo considerando a construção convencional de tijolos horizontais sobrepostos sobre planos horizontais a partir da cota 7,00 m, e abaixo dessa cota, blocos quadrados de pedra dispostos da mesma maneira. Tal modelo tem como intuito o confronto de tensões com o Modelo 04 utilizado por Brunelleschi, caso fosse possível a utilização de escoramentos para a construção da Cúpula.
- **MODELO 06:** Modelo do *tamburo* e setor de base, como constituintes de uma única estrutura, para melhor confronto com a bibliografia.

Tabela 2: Resumo dos modelos e respectivos elementos estruturais considerados

	Modelo 01	Modelo 02	Modelo 03	Modelo 04	Modelo 05	Modelo 06
<i>Spinapesce</i> a partir da cota 3,50 m	X					T A M B U R O
<i>Spinapesce</i> a partir da cota 7,00 m		X	X	X		
Base em tijolos (0,00 m – 7,00 m)			X			
Base em blocos de pedra (0,00 m – 7,00 m)		X		X		
<i>Corda blanda</i> a partir da cota 7,00 m				X		
Tijolos sobrepostos em planos horizontais					X	

Para cada um dos modelos descritos anteriormente, foram considerados o carregamento advindo da massa da Lanterna, do sistema intermediário de contrafortes, e da cúpula externa, que

são transmitidos à cúpula interna, setor de base e ao *Tamburo*. A pressão equivalente aos elementos anteriormente descritos sobre os elementos portantes, foi devidamente distribuída e ajustada de acordo com as superfícies trabalhadas em cada modelo.

Para a distribuição de pressões advindas da Lanterna, sistema intermediário de contrafortes e cúpula externa, foram utilizados os volumes obtidos pelos modelos desenvolvidos no AutoCAD, e as respectivas massas foram definidas a partir dos valores de densidade dos materiais da bibliografia.

4.4. Validação do modelo

A validação do modelo da cúpula interna e do *Tamburo* foi realizada com a comparação da distribuição de tensões obtidas por meio dos modelos de Fanelli e Fanelli (2004) e de Bartoli (2015).

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

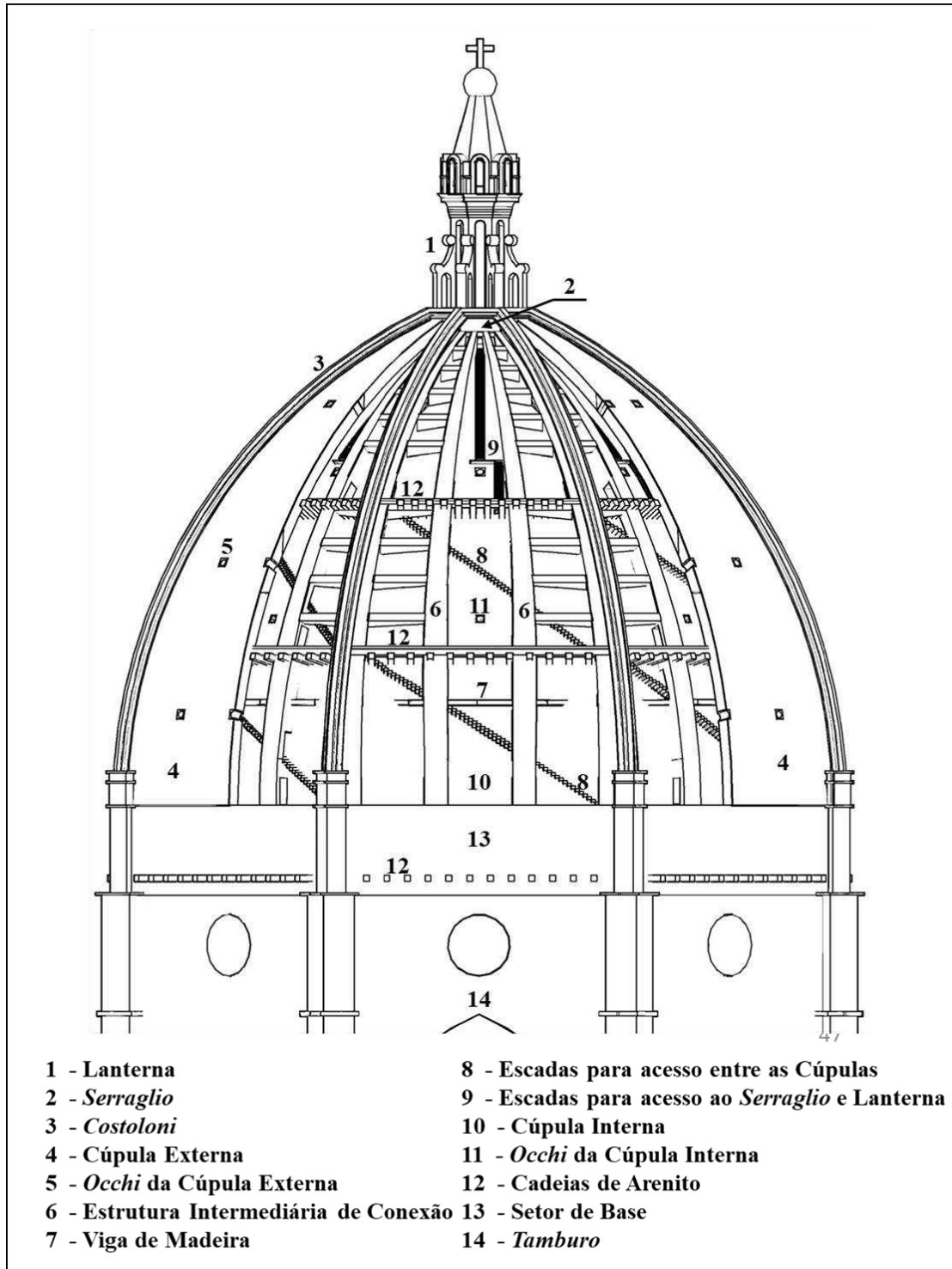
No item 5.1, estão expostos os modelos tridimensionais desenvolvidos para cada elemento constituinte da Cúpula. No item 5.2, são comparados os modelos da cúpula interna a fim de verificar o desempenho das técnicas construtivas adotadas por Brunelleschi. Por fim, no item 5.3, é realizada a validação do modelo da cúpula interna e do *Tamburo*.

5.1. Desenvolvimento do Modelo Geométrico da Cúpula no AutoCAD

A Cúpula de Brunelleschi é constituída de 14 elementos, sendo eles (Figura 29):

- | | |
|---|---|
| - <i>Lanterna</i> | - Escadas de acesso entre as Cúpulas |
| - <i>Serraglio</i> | - Escadas de acesso à <i>Lanterna</i> e ao <i>Serraglio</i> |
| - <i>Costoloni</i> | - Cúpula interna |
| -Cúpula externa | - <i>Occhi</i> da cúpula interna |
| - <i>Occhi</i> da cúpula externa | - Cadeias de Arenito |
| - Sistema intermediário de contrafortes | - Setor de Base |
| - Viga de Madeira | - <i>Tamburo</i> |

Figura 29: Elementos constituintes da Cúpula de Brunelleschi.



Assim, com as dimensões de cada elementos, foi possível desenvolver a modelagem geométrica tridimensional de cada um deles, e gerar o modelo tridimensional da Cúpula.

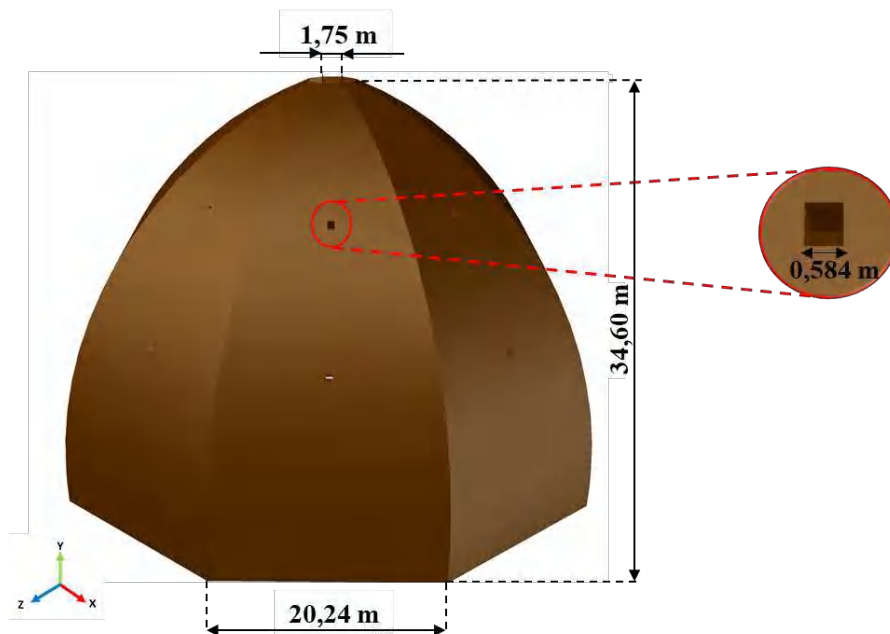
5.1.1. Cúpula Interna

A cúpula interna é uma estrutura de sustentação, de espessura aproximadamente igual a 2,20 m, com altura aproximada de 34,60 m, e de geometria octogonal, cuja circunferência circunscrita possui diâmetro de 45,0 m (elemento 10 da Figura 29). A base da cúpula interna localiza-se à uma cota aproximadamente 55,0 m acima do solo, e a partir da cota 62,00 m (ou 7,00 m admitindo 0,00 m como a base da cúpula interna) é constituída de tijolos que foram desenvolvidos no próprio canteiro de obra.

As superfícies que cobrem o plano octogonal na altura de 34,60 m sob o qual a Cúpula é erguida são chamadas de *vele*, de modo que cada uma das oito *vele* são compostas por duas aberturas quadradas, de lado 0,58 m, que possuem a função de iluminar e ventilar o espaço existente entre a cúpula interna e externa.

Na Figura 30, é possível verificar o modelo tridimensional desenvolvido da cúpula interna, em vista isométrica.

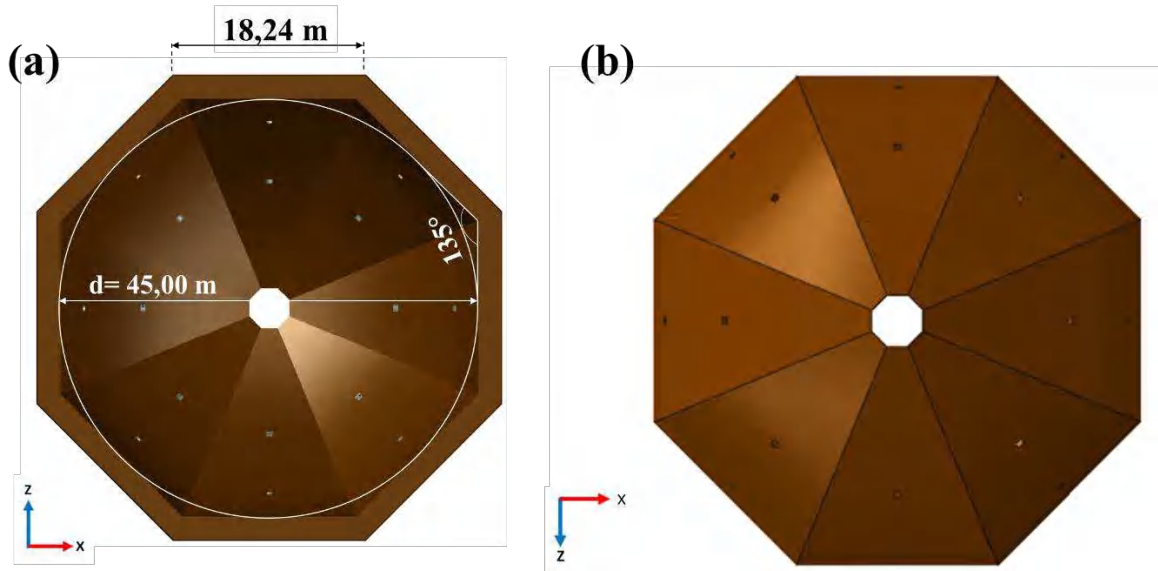
Figura 30: Vista isométrica do modelo tridimensional da cúpula interna.



Conforme pode ser observado na Figura 30, a cúpula interna possui uma abertura superior octogonal, chamado de *oculo*, de lado 1,75 m, com o objetivo de garantir a iluminação e ventilação no interior da Catedral de Santa Maria del Fiore.

Na Figura 31, são representadas as vistas inferior e superior do modelo tridimensional da cúpula interna, respectivamente.

Figura 31: Vistas (a) inferior e (b) superior da cúpula interna.



5.1.2. Occhi da Cúpula Interna

Aberturas nas *vele* da cúpula interna, os *occhi* são responsáveis pela iluminação e ventilação entre as cúpulas (elemento 11 da Figura 29). Possuem um comprimento de 2,20 m, e seção quadrada de 0,58 m, aproximadamente, com uma abertura central circular (Figura 32).

Os *occhi* são feitos de um material típico da construção florentina por volta do século XI, *pietraforte*, sendo uma rocha de arenito com a presença de algumas adições de minerais carbonáticos.

Na Figura 33, encontra-se o modelo tridimensional dos *occhi* da cúpula interna e a vista do interior da Cúpula, sendo possível observar os *occhi*. Na Figura 34, são evidenciadas duas imagens dos *occhi* da cúpula interna, de onde é possível observar uma parte dos afrescos que decoram o interior da Cúpula, na Catedral.

Figura 32: (a) Vista frontal e (b) lateral de um *occhio* da cúpula interna.

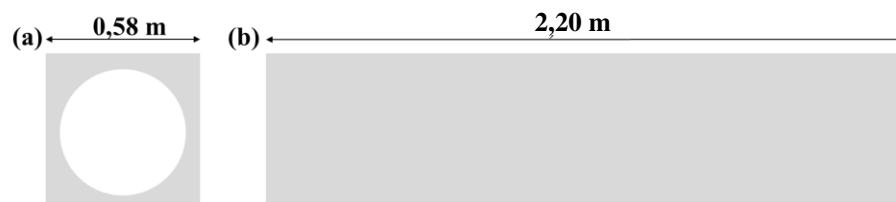


Figura 33: Vista frontal dos *occhi* da cúpula interna e a indicação de alguns deles na vista interna da Cúpula.

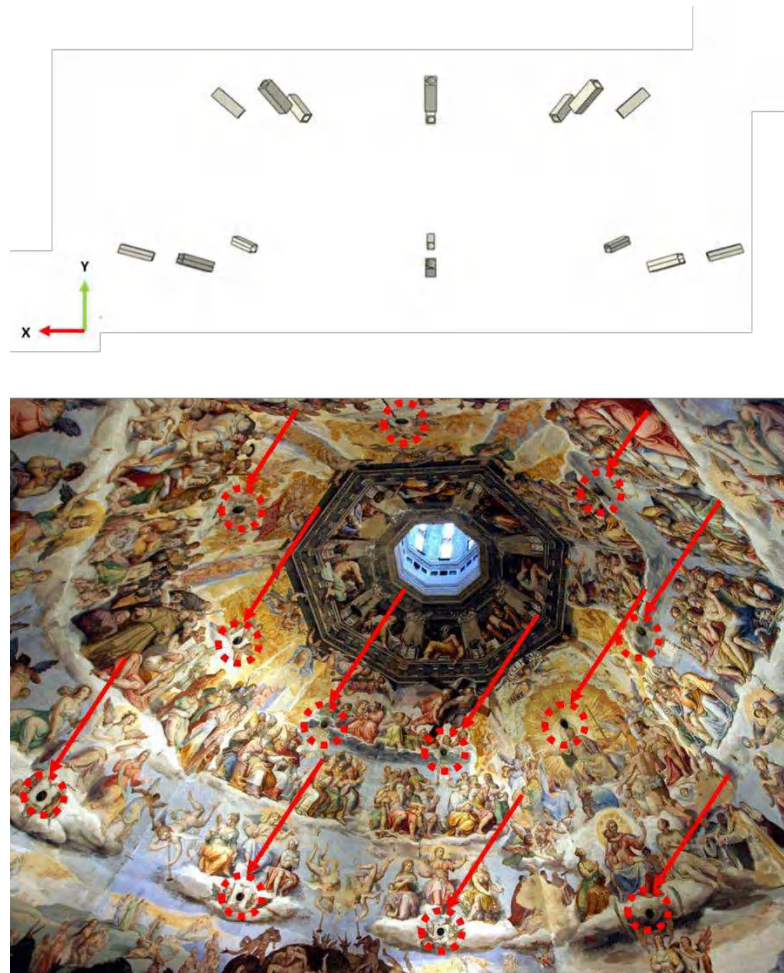


Figura 34: Vista dos *occhi* da cúpula interna, de onde se observa uma parte dos afrescos da Cúpula.



Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

5.1.3. Sistema Intermediário de Contrafortes

Entre a cúpula interna e a cúpula externa, encontra-se um sistema intermediário de contrafortes, de alvenaria, conectando-as (elemento 6 da Figura 29), de altura aproximada de 32,30 m, constituída de um sistema de 24 contrafortes de 1,20 m de espessura: 16 medianos e 8 angulares, 1 para cada aresta.

A largura dos contrafortes medianos é de 1,75 m na base, e estreita até atingir 0,40 m no topo. Os contrafortes angulares, no entanto, possuem largura de 3,50 m na base, e 0,80 m no topo (Figura 39).

Além dos 24 contrafortes, o sistema intermediário de contrafortes é constituído de 144 arcos horizontais (como é possível ver na Figura 35), sendo 18 para cada *vela*, interligados entre os contrafortes angulares e medianos, e distribuídos em nove níveis nos dois terços superiores da estrutura, com uma distância vertical de aproximados 2,50 m entre si.

Figura 35: Detalhe dos arcos horizontais do sistema intermediário de contrafortes.



Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

Quanto a função estrutural dos arcos horizontais, alguns pesquisadores analisaram sua atuação na Cúpula.

Rowland J. Mainstone, arquiteto e engenheiro civil e estrutural afirma que os nove arcos horizontais locados entre os contrafortes, foram projetados como reforços para que a cúpula externa viesse a ser construída como uma cúpula de rotação, de tal modo que serviriam de auxílio à *corda blanda*. (CORAZZI, CONTI e MARINI, 2005).

Já Paolo Alberto Rossi, afirma que o assentamento dos tijolos em *corda blanda* não significaria que a Cúpula foi construída verdadeiramente como uma cúpula de rotação, mas permite atenuar as discontinuidades no encontro entre as *vele*, juntamente com os oito contrafortes angulares (CORAZZI e CONTI, 2011).

Salvatore Di Pasquale, também arquiteto e acadêmico italiano que também investigou a estática da Cúpula de Brunelleschi, dividia o sistema intermediário de contrafortes em um conjunto formado por um sistema vertical e outro horizontal (CORAZZI, CONTI e MARINI, 2005), ou seja:

- o conjunto vertical como sendo constituído dos contrafortes medianos e angulares, que transmitem o carregamento para o solo;
- o conjunto horizontal, no entanto, é constituído pelos arcos horizontais que se sucedem ao mesmo nível, e constroem arcos circulares em nove níveis, de modo que juntamente com os tijolos posicionados em pontos específicos, garantem uma solução momentânea de fechamento dos anéis circulares, que neutralizam a tendência natural das cúpulas de ruírem.

Na Figura 36, encontra-se o modelo tridimensional desenvolvido, do sistema intermediário de contrafortes, e na Figura 37, a vista superior e inferior.

Figura 36: Vista isométrica do modelo tridimensional do sistema intermediário de contrafortes.

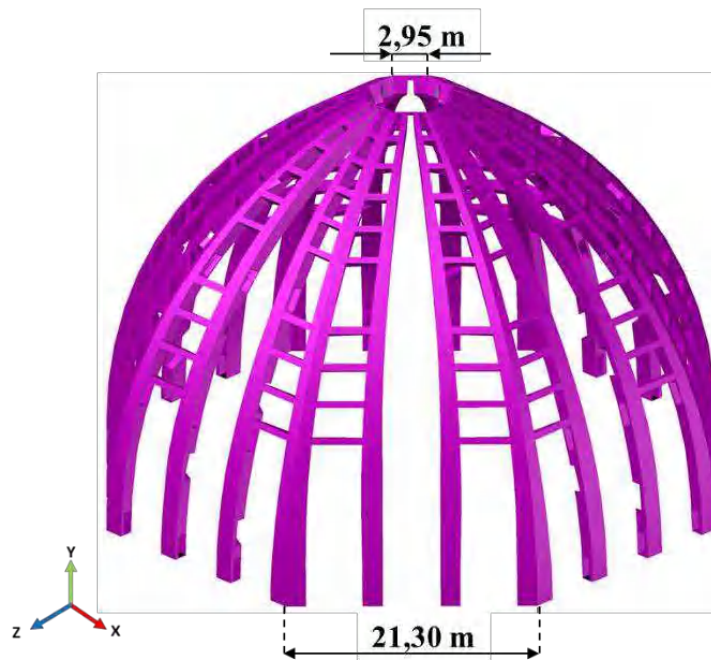
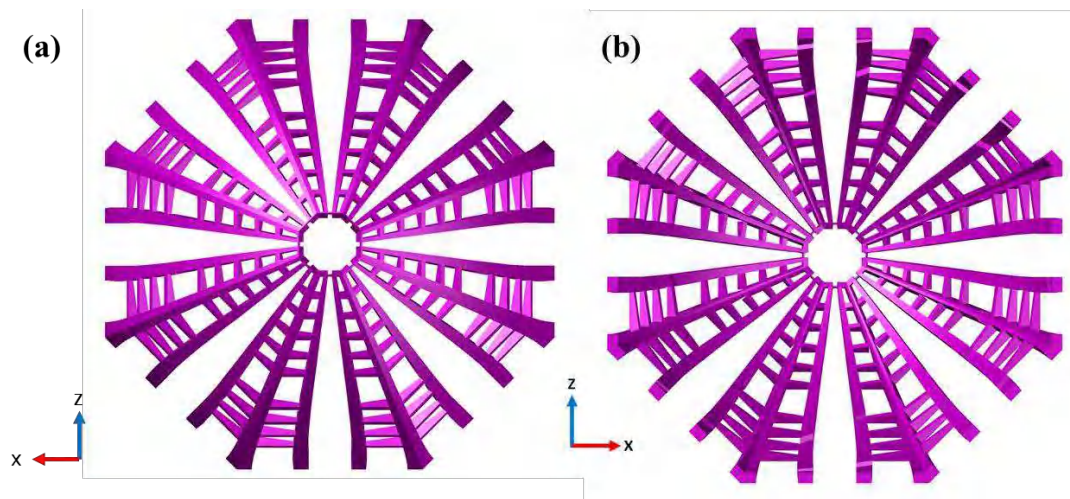
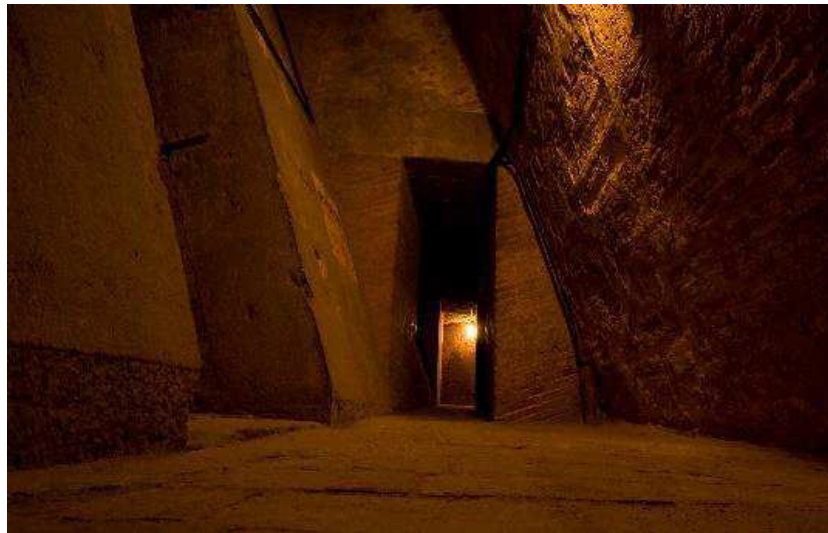


Figura 37: (a) Vista superior e (b) vista inferior do modelo tridimensional do sistema intermediário de contrafortes.



O sistema intermediário de contrafortes é composto por algumas aberturas e corredores, que garantem o acesso à região entre as cúpulas, como indicado na Figura 38.

Figura 38: Corredor interno entre as duas cúpulas, e ao fundo, é possível visualizar o contraforte angular.

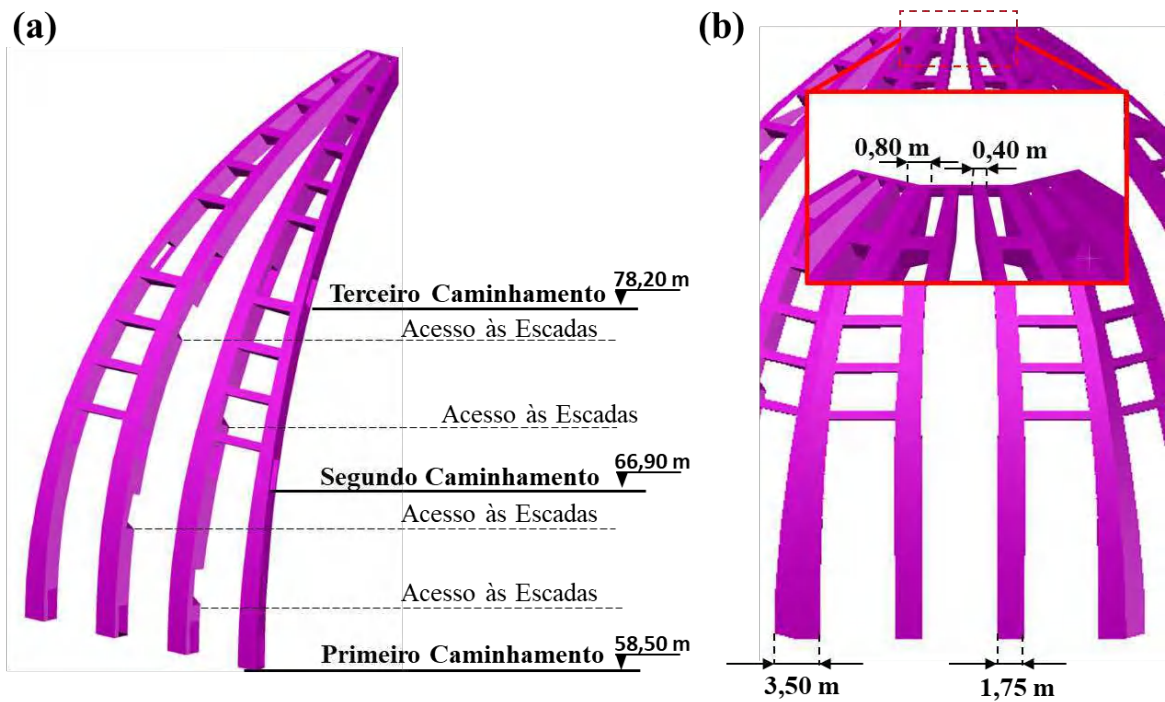


Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

Na Figura 39, indicam-se os três níveis das aberturas, *camminamenti* (passagens), por onde é possível realizar uma volta completa entre as estruturas, assim como, os acessos por onde passam as escadas.

O primeiro *camminamento*, encontra-se a na cota 58,50 m em relação ao solo, o segundo *camminamento*, na cota 66,90 m, e o terceiro *camminamento*, está localizado na conta 78,20 m.

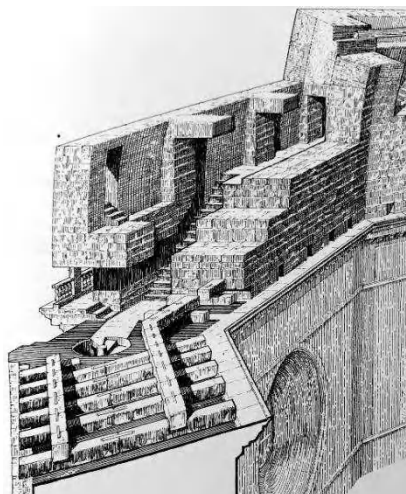
Figura 39: Indicação dos *camminamenti* no modelo tridimensional do sistema intermediário de contrafortes.



5.1.4. Cadeias de Arenito

As cadeias de arenito (elemento 12 da Figura 29) são três elementos de reforço da estrutura, locados entre as cúpulas, cuja primeira cadeia encontra-se aproximadamente na cota 52,70 m (Figura 40) em relação ao solo.

Figura 40: Representação isométrica da disposição da primeira cadeia de arenito.

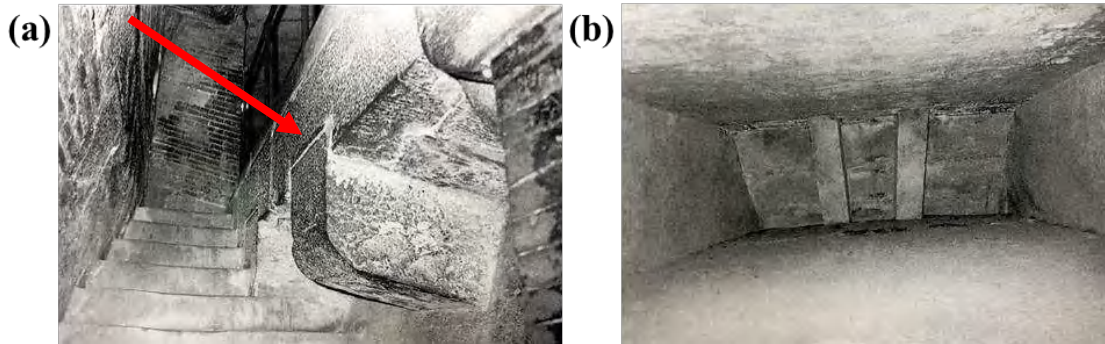


Fonte: (IPPOLITO e PERONI, 2007)

A segunda cadeia de arenito, encontra-se na cota 66,90 m e a terceira, na conta 78,20 m (Figura 42), da estrutura global.

Cada uma das três cadeias é composta por 12 vigas transversais de cada lado, totalizando 96 vigas transversais por cadeia, com seção transversal quadrada de lado 0,44 m, e comprimento de 2,65m.

Figura 41: (a) Visualização da segunda cadeia de arenito interrompida pela escada de acesso entre as cúpulas; (b) Vigas transversais da terceira cadeia de arenito vistas do terceiro caminhamento (entre os contrafortes medianos).



Fonte: (IPPOLITO e PERONI, 2007)

Na Figura 42 e Figura 43, é possível observar o modelo tridimensional das cadeias de arenito e, na Figura 44, é representado um detalhe das vigas transversais.

Figura 42: Vista isométrica do modelo tridimensional das cadeias de arenito.

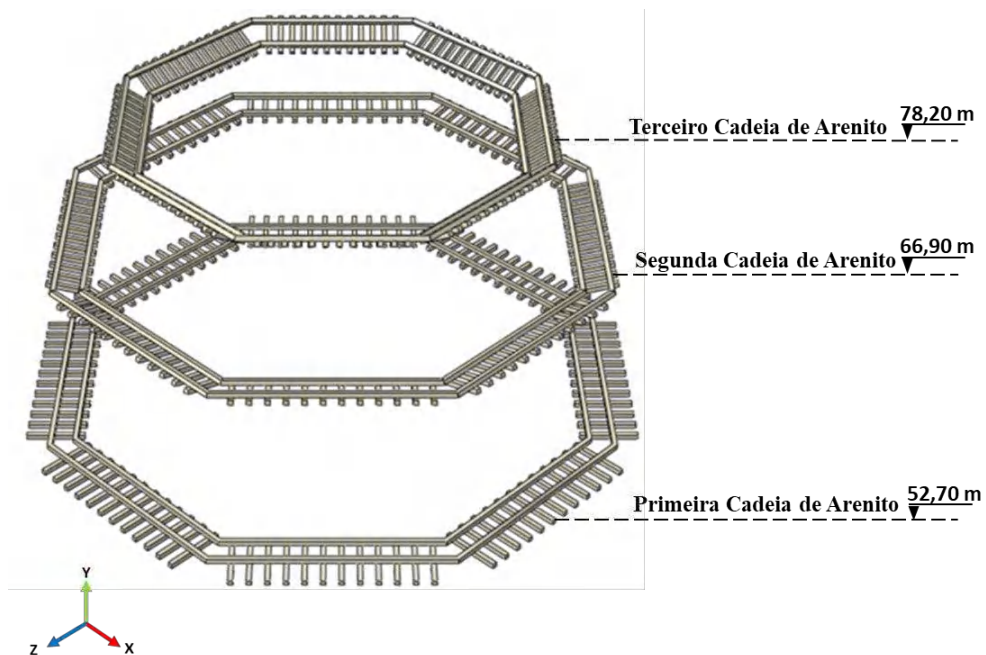


Figura 43: Vista frontal do modelo tridimensional das cadeias de arenito.

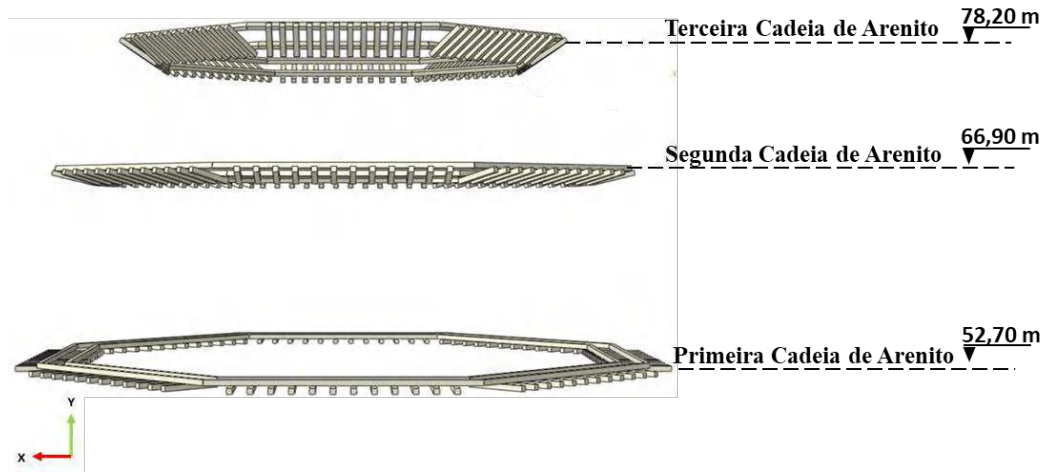
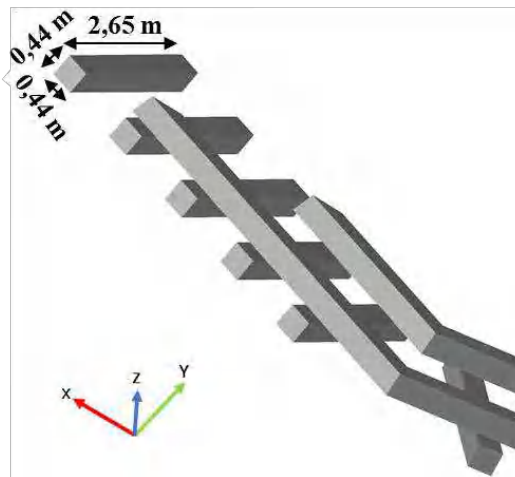


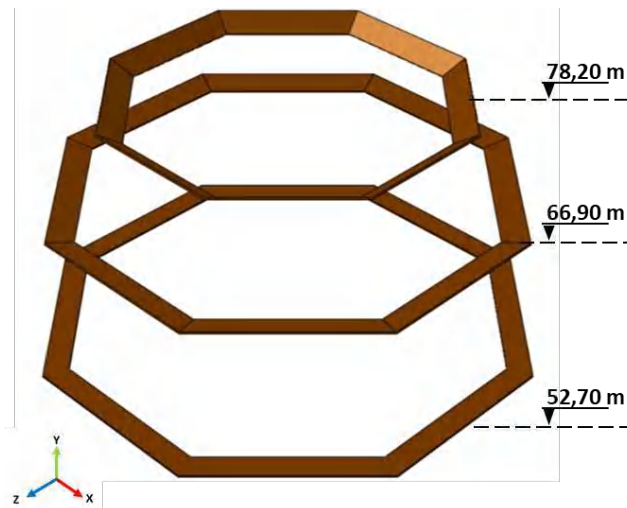
Figura 44: Detalhe das vigas transversais do modelo tridimensional das cadeias de arenito.



5.1.5. *Camminamenti* sobre as Cadeias de Arenito

Admitindo que os *camminamenti* são dispostos em três níveis sobre as cadeias de arenito, foram modeladas superfícies para garantir esse acesso, conforme indicado na Figura 45, com espessura de 0,20 m.

Figura 45: Vista isométrica das superfícies tridimensionais locadas sobre as cadeias de arenito.



5.1.6. Viga de Madeira

Além das cadeias de arenito, a estrutura global da Cúpula de Brunelleschi dispõe de uma única viga de madeira de castanheira (elemento 7 da Figura 29), que atravessa a região entre as cúpulas, e pode ser vista entre o primeiro e segundo *camminamento* (Figura 46). Situada à uma cota de 62,70 m, é composta de 24 paralelepípedos de seção quadrada de lado 0,35 m, interligados entre si por ganchos metálicos, compondo uma circunferência de raio aproximado de 24,40 m.

Figura 46: Vista de duas seções da cadeia de madeira passando entre as cúpulas.



Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

Na Figura 47, verifica-se o modelo tridimensional da viga de madeira, e na Figura 48, um detalhe dos paralelepípedos que formam a viga.

Figura 47: Vista isométrica do modelo tridimensional da viga de madeira

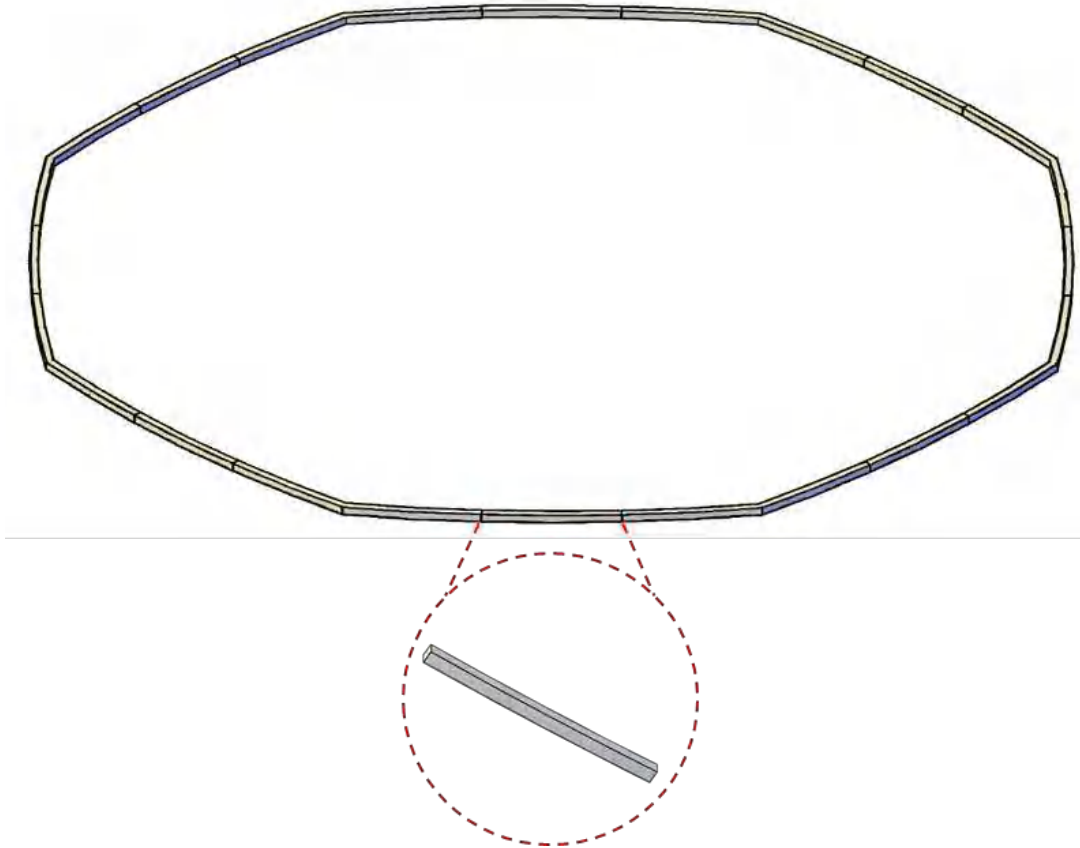
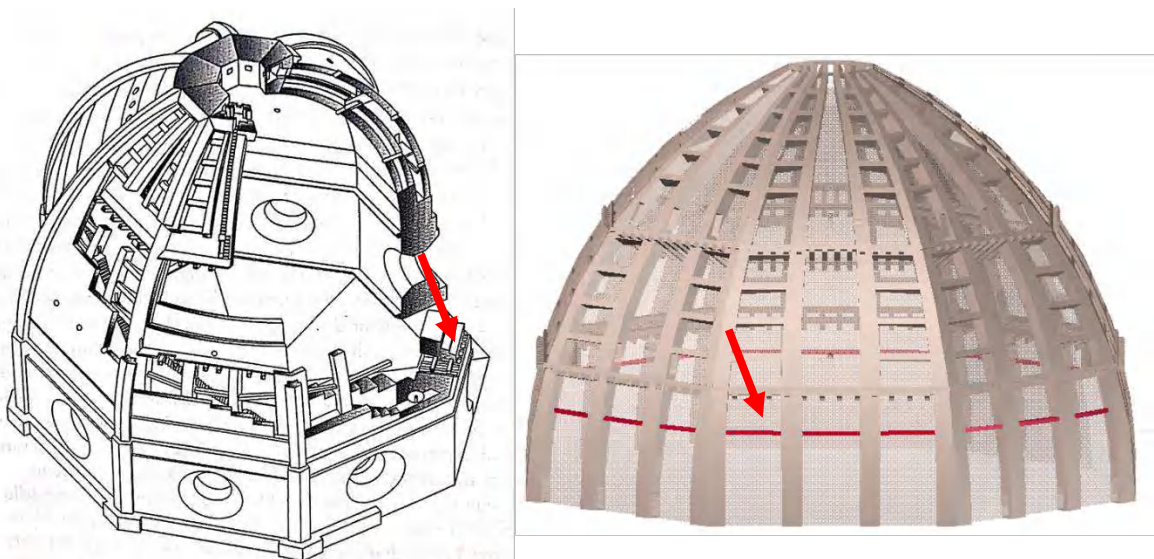


Figura 48: Vista isométrica do modelo tridimensional da viga de madeira inserida na estrutura da Cúpula.



Fonte: (CORAZZI, 2013)

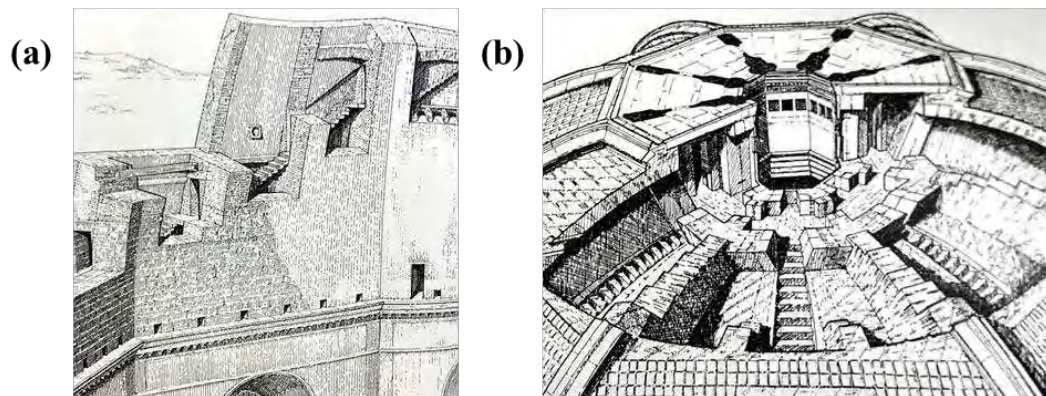
5.1.7. Escadas entre as cúpulas

Para garantir o acesso entre as cúpulas e o acesso à *Lanterna*, na parte superior do óculo, foram construídas escadarias de acesso (elemento 8 da Figura 29). No modelo tridimensional das escadas, foram desenvolvidos degraus com altura média de 0,20 m e piso médio de 0,30 m, que possuem uma inclinação gradativa em torno do centro do octógono, para garantir a perpendicularidade com a superfície da cúpula interna.

As escadas têm origem na cota 58,7 m, no primeiro *camminamento*, e o primeiro lance de degraus atinge a cota do segundo *camminamento*, 66,90 m (Figura 49-a). O segundo lance de degraus, parte do segundo *camminamento*, para o terceiro *camminamento*, na cota 78,20 m.

No nível do terceiro *camminamento*, um novo lance de degraus surge que dará acesso ao *Serraglio*, e posteriormente, a *Lanterna* (Figura 49-b).

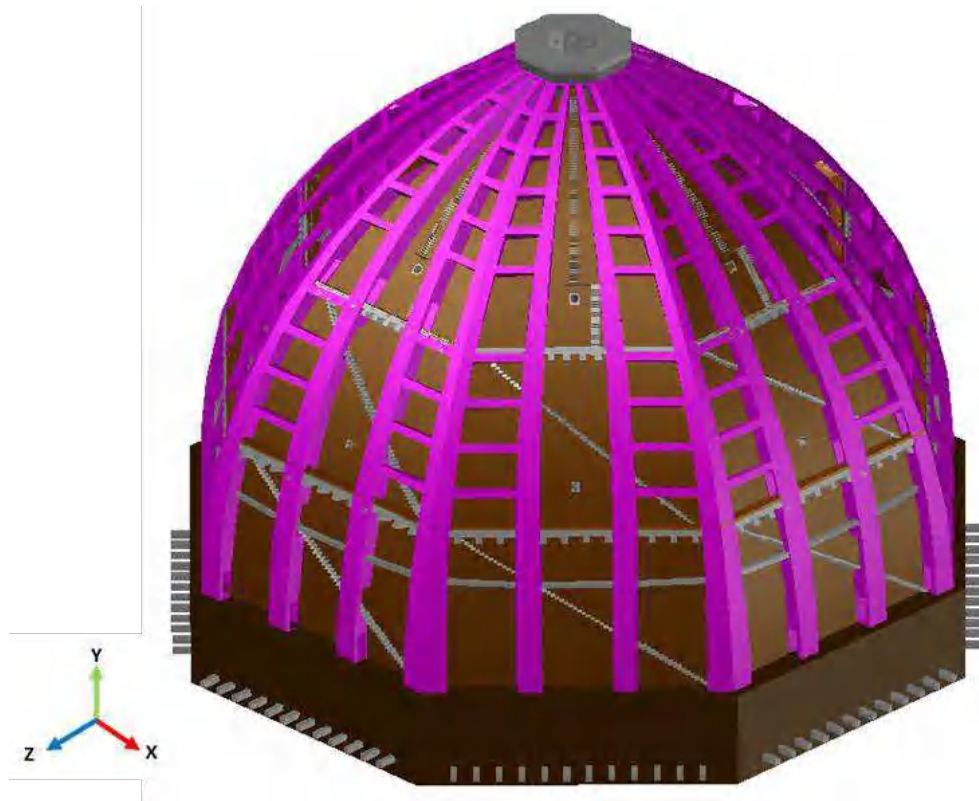
Figura 49: (a) Representação em perspectiva das escadas entre o primeiro e segundo *camminamento* (b) Representação em perspectiva das escadas de acesso entre o terceiro *camminamento* e o *Serraglio*.



Fonte: (IPPOLITO e PERONI, 2007)

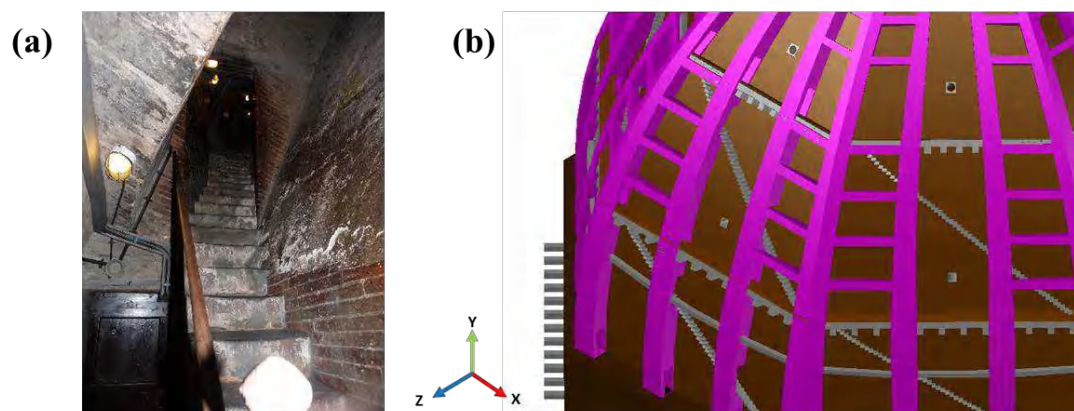
Na Figura 50, são representadas uma imagem e o modelo tridimensional das escadas entre as duas cúpulas, de acesso aos *camminamenti*.

Figura 50: Vista isométrica do modelo tridimensional das escadas entre as duas cúpulas.



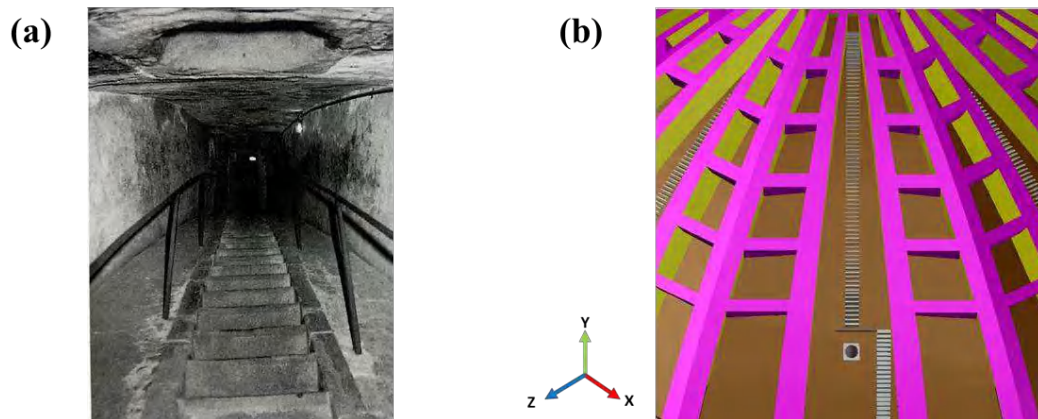
Na Figura 51 e Figura 52, são representadas imagens e detalhes do modelo tridimensional das escadas de acesso, entre os *camminamenti* e o acesso ao *Serraglio*.

Figura 51: (a) Imagem das escadas entre os *camminamenti*; (b) Vista isométrica do modelo tridimensional das escadas entre as duas cúpulas, para acesso aos *camminamenti*.



Fonte: (a) (CORAZZI e CONTI, 2011)

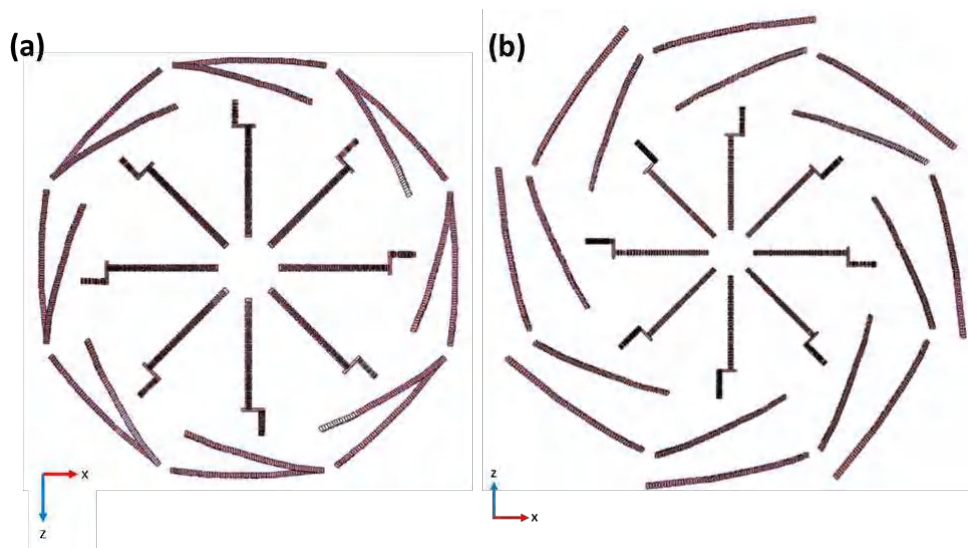
Figura 52: (a) Imagem das escadas de acesso entre o terceiro *camminamento* e o *Serraglio*; (b) Vista isométrica do modelo tridimensional das escadas de acesso ao *Serraglio*.



Fonte: (a) (IPPOLITO e PERONI, 2007)

Na Figura 53, estão a vista inferior e superior do modelo tridimensional das escadas entre as cúpulas.

Figura 53: (a) Vista superior das escadas entre as cúpulas; (b) Vista inferior das escadas entre as cúpulas.

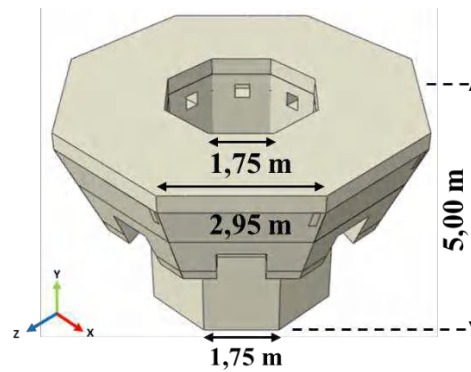


5.1.8. *Serraglio*

O *Serraglio*, elemento 2 da Figura 29, tem a função estrutural de redistribuição das forças, como uma pedra angular, garantindo maior estabilidade à estrutura global e atuando como um elemento de conexão entre as cúpulas e a *Lanterna*.

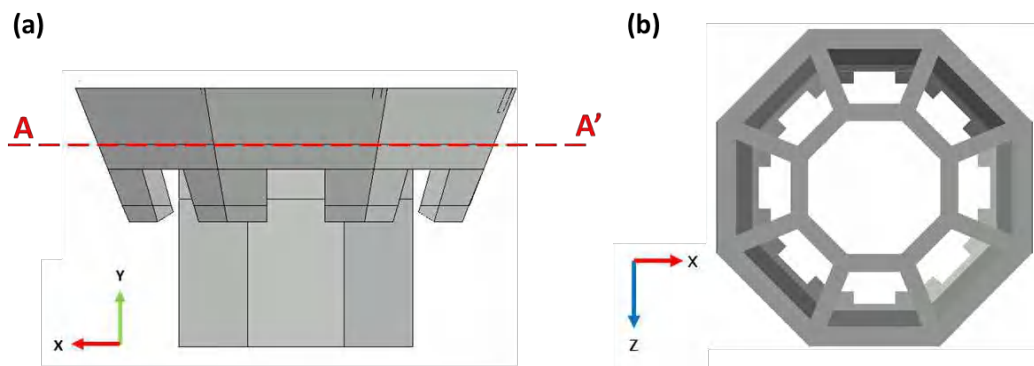
Fabricado em arenito, possui diâmetro de aproximadamente 7,00 m, com altura de 5,00 m. Possui um formato octogonal, de lado externo igual a 2,95 m, e uma abertura octogonal no centro, o óculo, com lado de 1,75 m, como indicado na Figura 54.

Figura 54: Vista isométrica do modelo tridimensional do *Serraglio*.



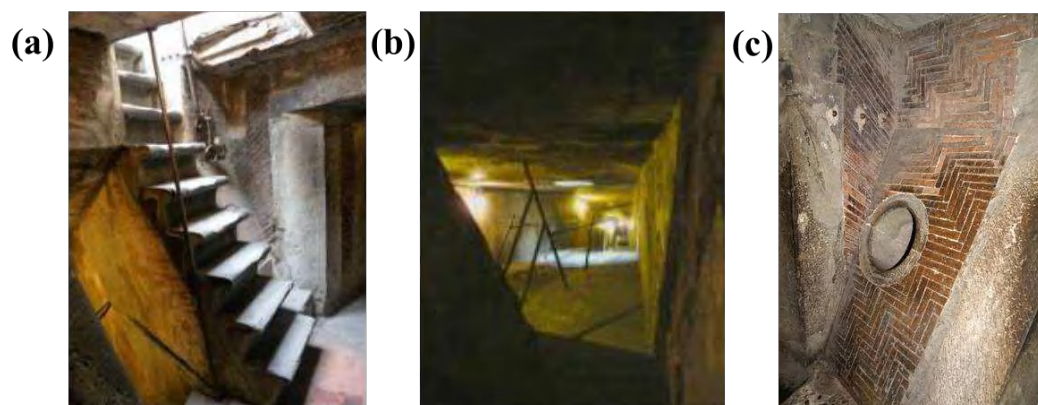
Conforme representado na Figura 55, o *Serraglio* é constituído de 16 vigas de 0,44 m de lado, em sua parte superior, sobre as quais, a *Lanterna* é posicionada.

Figura 55: (a) Vista frontal do modelo tridimensional do *Serraglio* e indicação do corte AA'; (b) Vista superior do corte AA' do modelo tridimensional do *Serraglio*.



Na Figura 56, são representadas algumas imagens internas do *Serraglio*.

Figura 56: (a) Escadas de acesso à base da *Lanterna* (b) Último corredor de acesso ao *Serraglio* (c) Detalhe de um compartimento interno do *Serraglio*.



Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

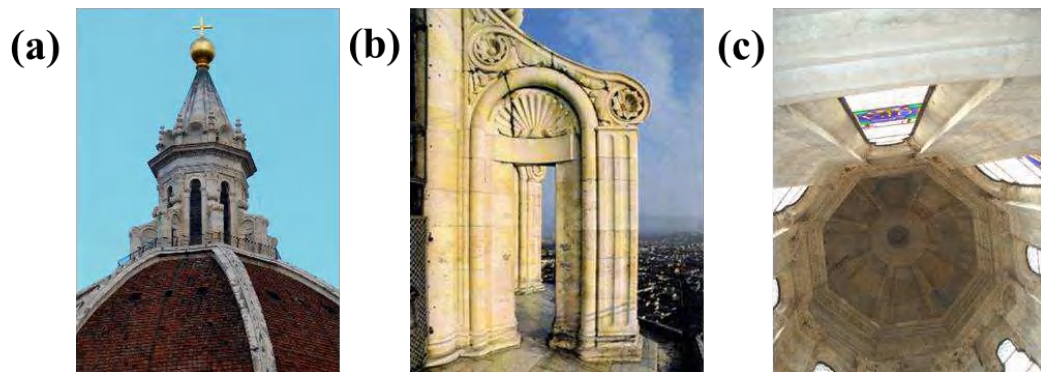
5.1.9. Lanterna

A partir do renascimento, a maioria das cúpulas passou a possuir *Lanterna* em seu topo, com utilidade decorativa e prática, permitindo a entrada de luz no interior da Cúpula e facilitando a ventilação. Assim, a *Lanterna* em mármore, da Catedral de Santa Maria del Fiore, também projetada por Brunelleschi possui forma octogonal, constituída de oito contrafortes que são erguidos alinhados às oito arestas (*Costoloni*) da Cúpula, e com uma altura de 21,0 m.

Na parte superior da *Lanterna*, está locada uma esfera em bronze recoberta de ouro, de 2,40 m de diâmetro com uma cruz no topo, fazendo com que a estrutura global da Cúpula de Brunelleschi possua uma altura equivalente a aproximadamente 115,0 m.

Na Figura 57, são evidenciadas algumas imagens da *Lanterna*.

Figura 57: (a) Vista da *Lanterna*; (b) Detalhe do corredor de caminhamto na *Lanterna*; (c) Vista interna da *Lanterna*.



Fonte: Roberto Corazzi

Assim, a Figura 58 evidencia o modelo tridimensional desenvolvido da *Lanterna*, bem como a vista superior e inferior do modelo, na Figura 59-a e Figura 59-b, respectivamente.

Figura 58: Vista isométrica do modelo tridimensional da *Lanterna*.

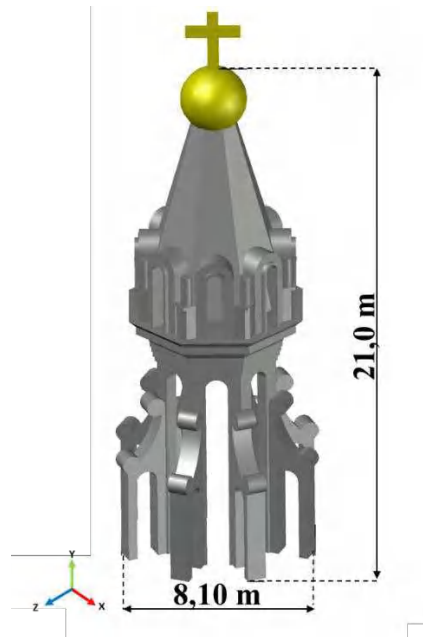
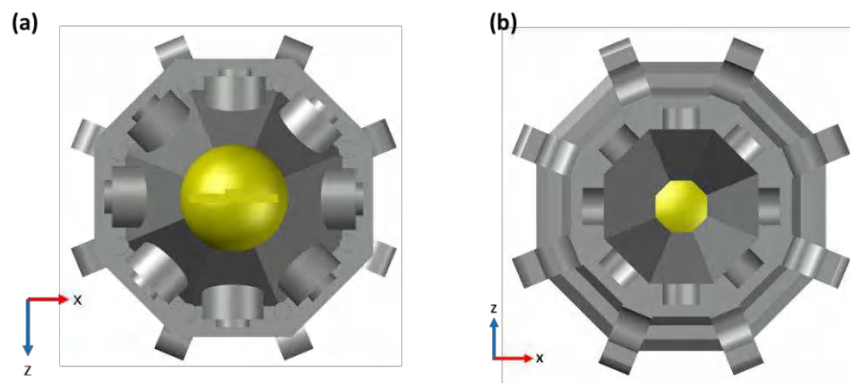


Figura 59: (a) Vista superior do modelo tridimensional da *Lanterna*; (b) Vista inferior do modelo tridimensional da *Lanterna*.



5.1.10. Setor de Base

Elemento sobre o qual a Cúpula é construída e constitui a primeira cadeia de arenito, sendo a única região na qual, realmente, é possível verificar sua presença, como evidenciado na Figura 60 e localizado no elemento 13 da Figura 29.

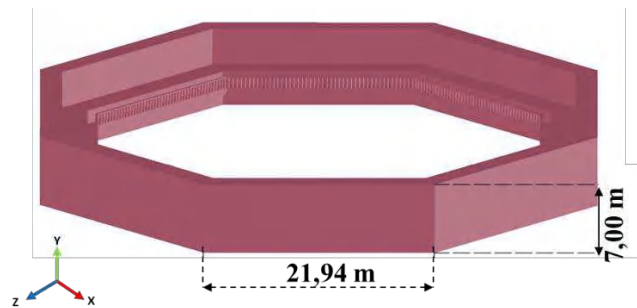
Figura 60: Setor de base da Cúpula (setor sul) com vista das vigas de arenito do primeiro *camminamento*.



Fonte: (a) (IPPOLITO e PERONI, 2007); (b) (CORAZZI e CONTI, 2011)

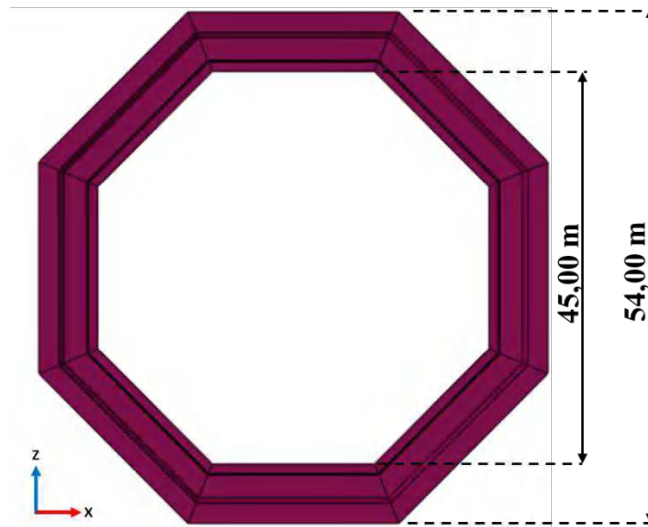
O modelo tridimensional do setor de base desenvolvido com uma altura aproximada de 7,00 m, e lado equivalente a 21,94 m, conforme indicado na Figura 61, cuja circunferência circunscrita internamente possui diâmetro de 45,00 m, e externamente, de 54,00 m.

Figura 61: Vista isométrica do modelo tridimensional do setor de base.



Admitindo a base do setor de base como cota 0,00 m, a cúpula interna é erguida na cota 1,00 m, e a cúpula externa e o sistema intermediário de contrafortes possuem suas respectivas bases posicionadas na cota 3,50 m. A Figura 62 apresenta a vista superior do modelo do setor de base.

Figura 62: Vista superior do modelo tridimensional do setor de base.



5.1.11. Tamburo

O *Tamburo* é o elemento estrutural que representa toda a parte comprimida entre o topo dos pilares (cota 28,00 m) e a cota da base da cúpula interna (55,00 m), absorvendo as 29.000 toneladas estimadas, advindas do peso da Cúpula e seus respectivos elementos (elemento 14 da Figura 29). Porém, a maior parte dos estudiosos admitem que o *Tamburo* é a região que fica entre os vértices dos quatro arcos sobre o topo dos pilares (42,10 m), e a cota da base da cúpula interna, resultando em uma altura aproximada de 13,00 m.

Dessa maneira, preferiu-se desenvolver toda a estrutura sobre a qual a Cúpula é apoiada, para permitir análises mais amplas e significativas, conforme indicado na Figura 63. Na Figura 64, é apresentada uma vista interna do *Tamburo*.

Figura 63: Vista isométrica do modelo tridimensional do *Tamburo* e do setor de base.

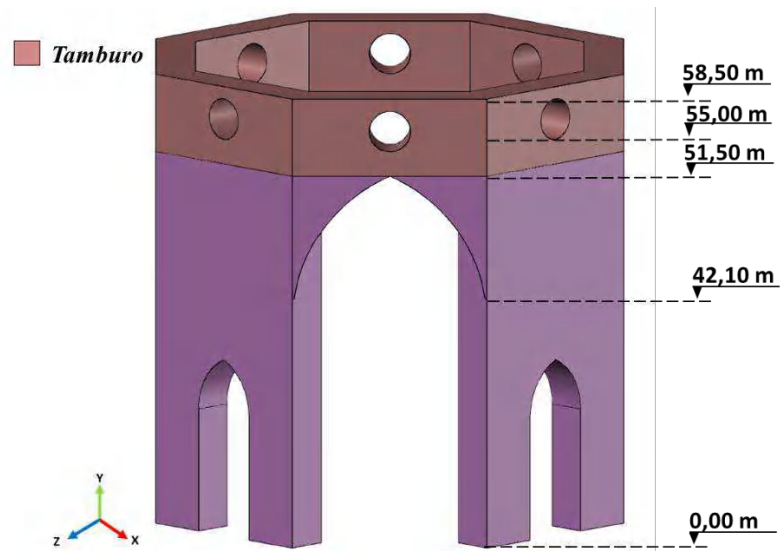


Figura 64: Vista interna de parte do tamburo.



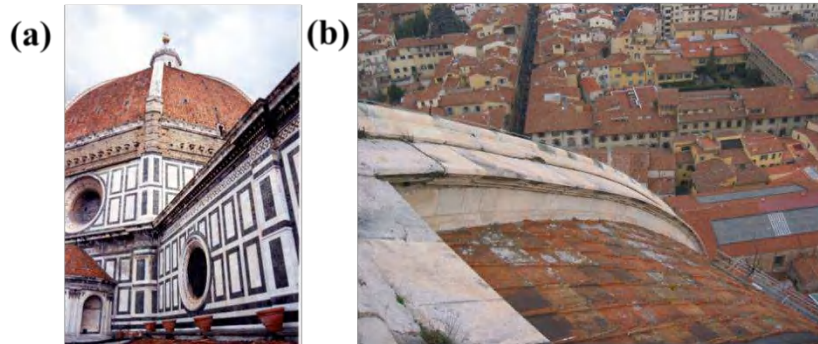
Fonte: Roberto Corazzi

5.1.12. Cúpula Externa

É a cúpula de proteção contra intempéries (elemento 4 da Figura 29 e mais detalhado na Figura 65), possui espessura aproximada de 0,90 m, com diagonal interna de 54,00 m e altura

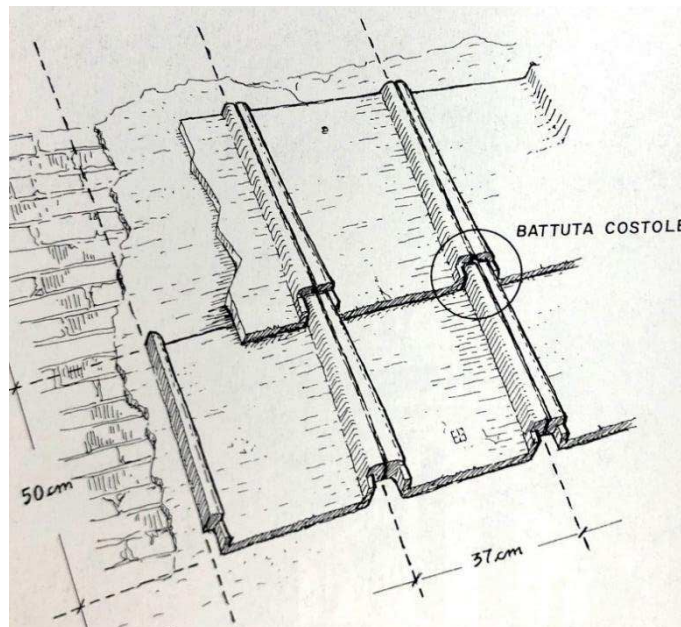
de 33,20 m. Das 29.000 toneladas, cerca de 2.000 são advindas do revestimento externo, composto por aproximadamente 30.000 telhas de terracota rosa de dimensões de 0,37 x 0,50 m, assentadas sobre um manto de cal e conectadas entre si por ganchos metálicos (Figura 66).

Figura 65: (a) Vista norte da Cupola (b) Detalhe de uma vela.



Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

Figura 66: Telhas da cobertura.



Fonte: (IPPOLITO e PERONI, 2007)

Assim como a cúpula interna, a cúpula externa também possui *occhi* em suas *vele*, no entanto, cada *vela* é composta por 9 aberturas, com as mesmas dimensões que os da cúpula interna. Quanto a abertura superior, o *oculo*, possui a mesma dimensão da cúpula interna, octogonal de lado 1,75 m.

Na Figura 67, está representado o modelo tridimensional da cúpula externa, e a vista superior e inferior na Figura 68-a e Figura 68-b, respectivamente.

Figura 67: Vista isométrica do modelo tridimensional da cúpula externa.

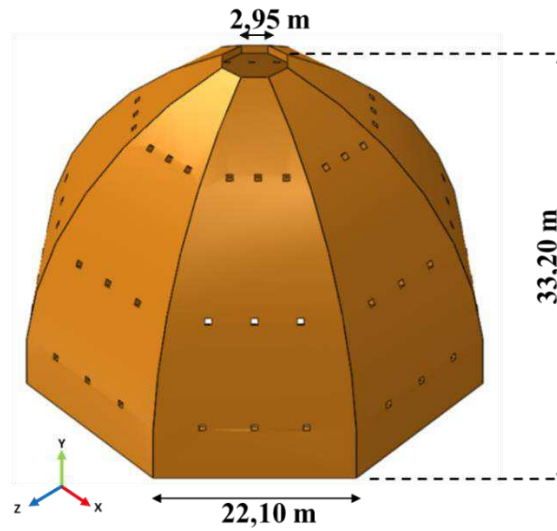
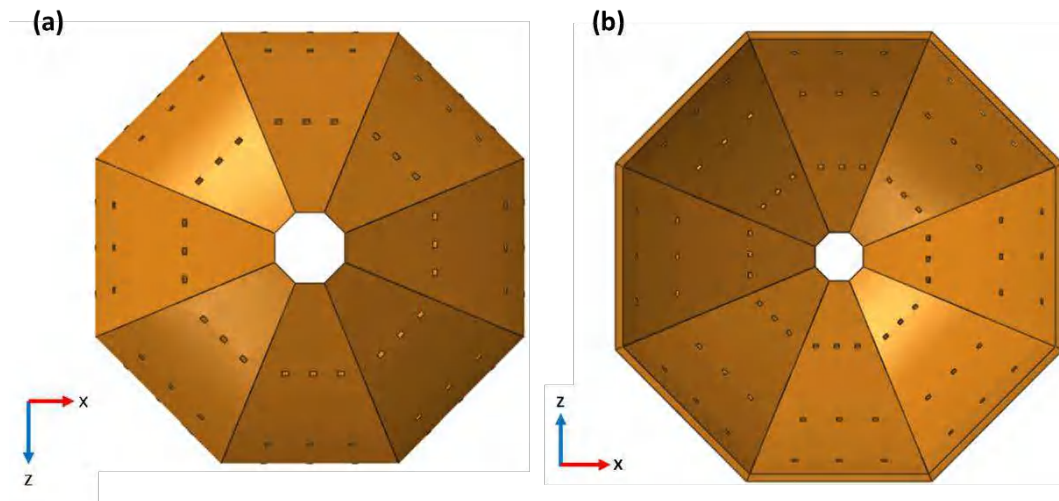


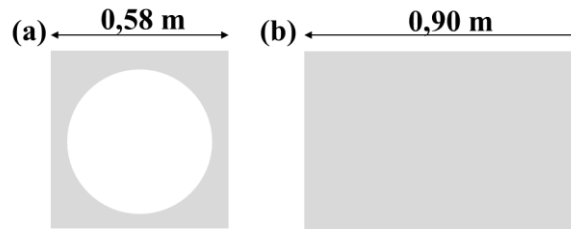
Figura 68: (a) Vista superior do modelo tridimensional da cúpula externa; (b) Vista inferior do modelo tridimensional da cúpula externa.



5.1.13. Occhi Cúpula Externa

Simbolizado como elemento 5 da Figura 29, os *occhi* da cúpula externa possuem a mesma seção transversal quadrada de 0,58 m, assim como os da cúpula interna, no entanto, possuem um comprimento de 0,90 m, com uma abertura central circular (Figura 69).

Figura 69: (a) Vista frontal e (b) lateral de um *occhi* da cúpula externa.



Nas Figura 70 e Figura 71, é possível observar o modelo tridimensional e alguns detalhes dos *occhi* da cúpula externa.

Figura 70: Vista frontal dos *occhi* da cúpula externa.

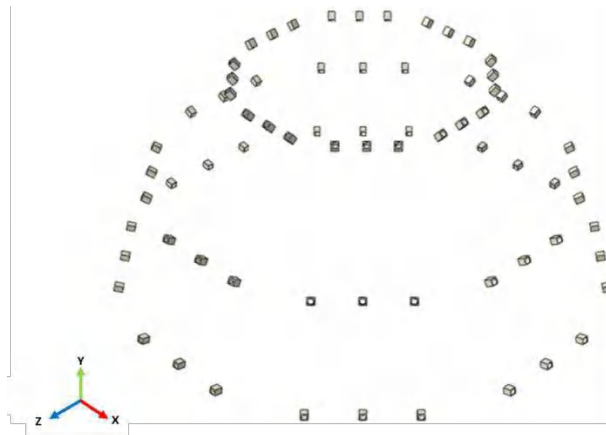
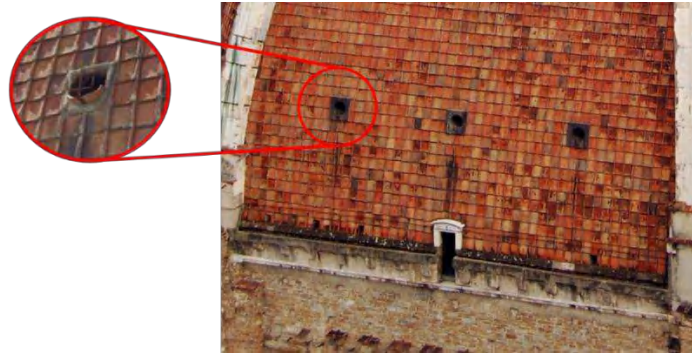


Figura 71: Detalhe dos *occhi* da cúpula externa.

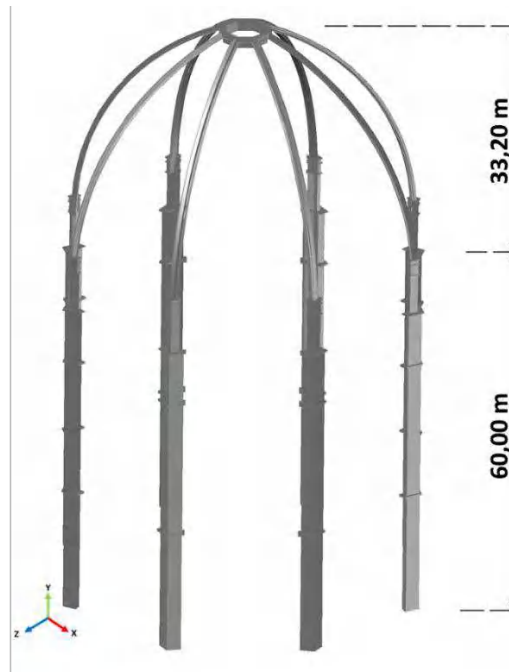


Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011), adaptado

5.1.14. *Costoloni*

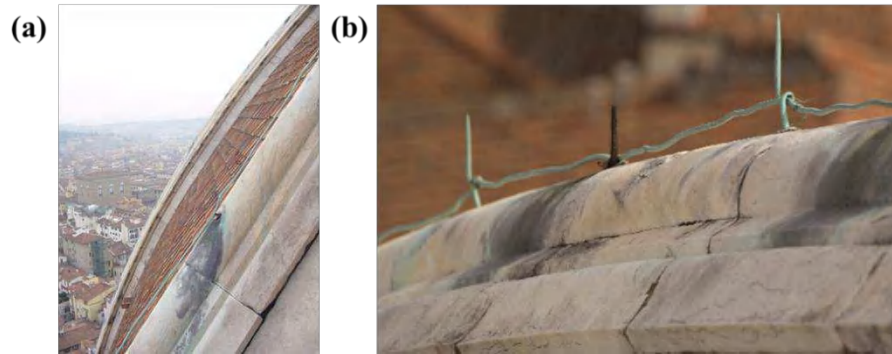
Os *Costoloni* externos de mármore possuem a função arquitetônica de compor as arestas da Cúpula e do *Tamburo*, de cota inicial 0,00 m e se estende até o topo da cúpula externa, à cota 91,70 m, conforme indicado no elemento 3 da Figura 29 e mais detalhado na Figura 72.

Figura 72: Vista isométrica do modelo tridimensional dos *Costoloni*.



Na Figura 73 são apresentadas duas imagens de detalhes dos *Costoloni*.

Figura 73: (a) Vista parcial de dois *Costoloni* (b) Detalhe de um *Costoloni*.



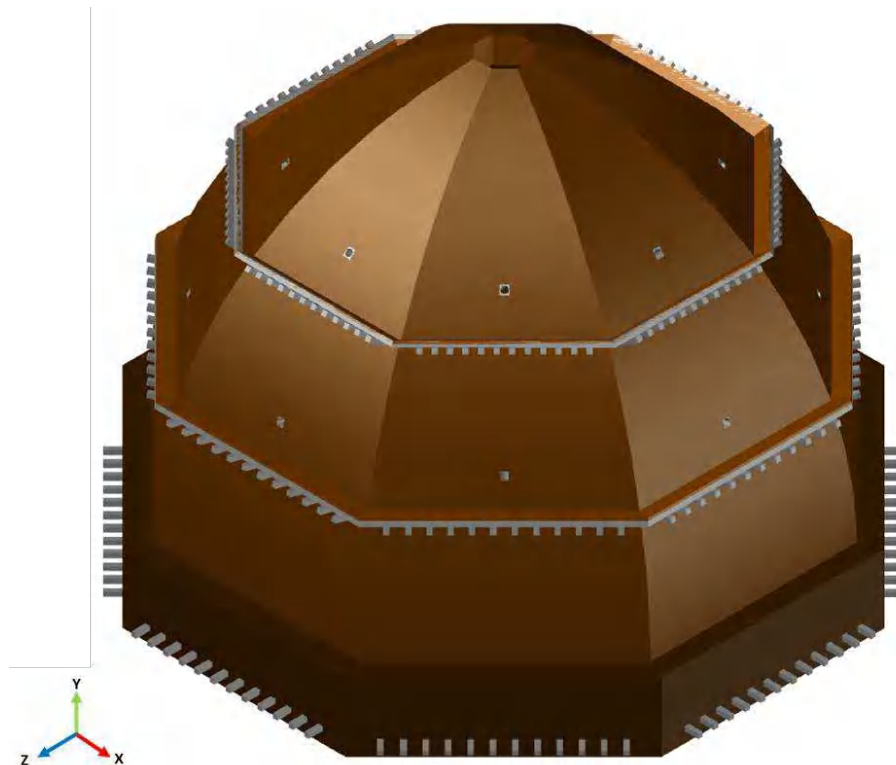
Fonte: (CORAZZI e CONTI, 2011)

5.1.15. Modelo Tridimensional da Cúpula de Brunelleschi

Assim, com todos os elementos isolados modelados tridimensionalmente, foi possível realizar a montagem e gerar o modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi.

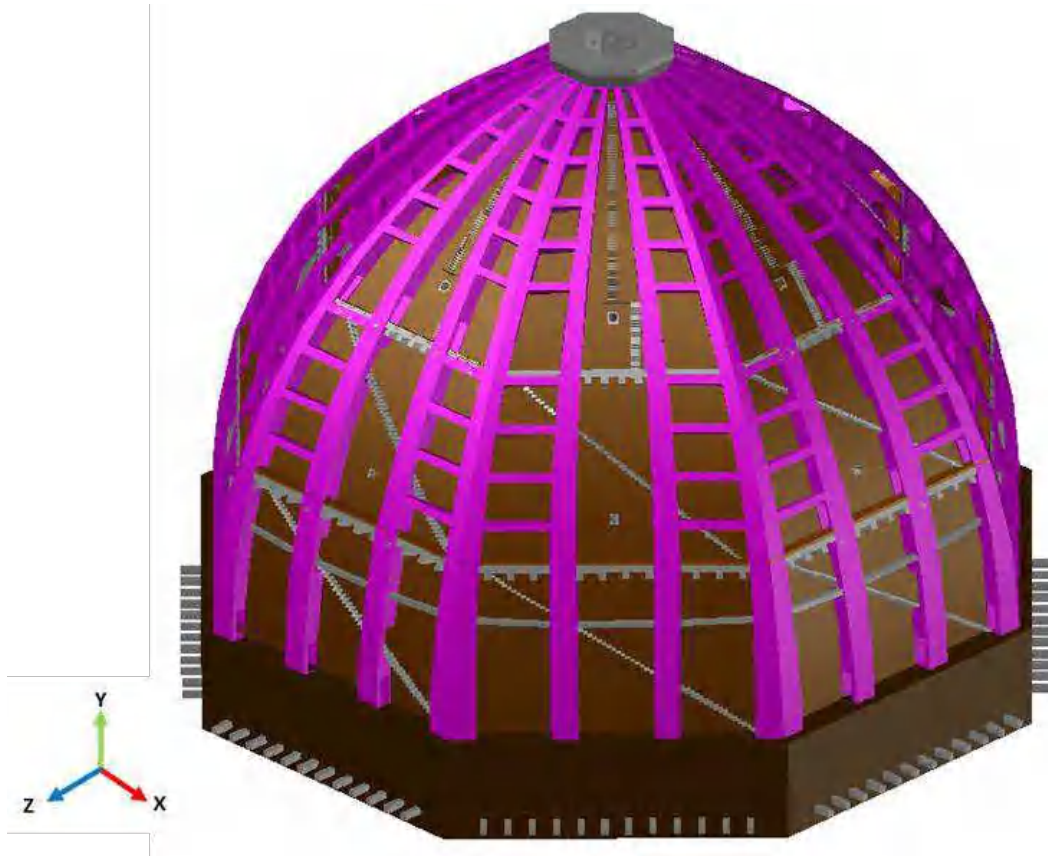
Dessa maneira, a Figura 74 evidencia a cúpula interna e seus respectivos *occhi*, as cadeias de arenito, os *camminamenti* sobre as cadeias de arenito e o setor de base.

Figura 74: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: cúpula interna, cadeias de arenito, *camminamenti* sobre as cadeias de arenito e o setor de base.



Já a Figura 75, representa a mesma configuração Figura 74, no entanto, acrescentando o sistema intermediário de contrafortes, as escadas entre as cúpulas e o *Serraglio*.

Figura 75: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: cúpula interna, *occhi* internos, sistema intermediário de contrafortes, *camminamenti* sobre cadeias de arenito, cadeias de arenito e setor de base.



Na Figura 76, no entanto, são evidenciadas a cúpula externa com os respectivos *occhi* e os *Costoloni* nas arestas, e a *Lanterna* sobre o *Serraglio*, de modo que na Figura 77 encontra-se um detalhe da presença do *Serraglio* da cúpula externa.

Figura 76: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: cúpula externa, *Costoloni* superior, *occhi* externo, *Serraglio* e *Lantern*.

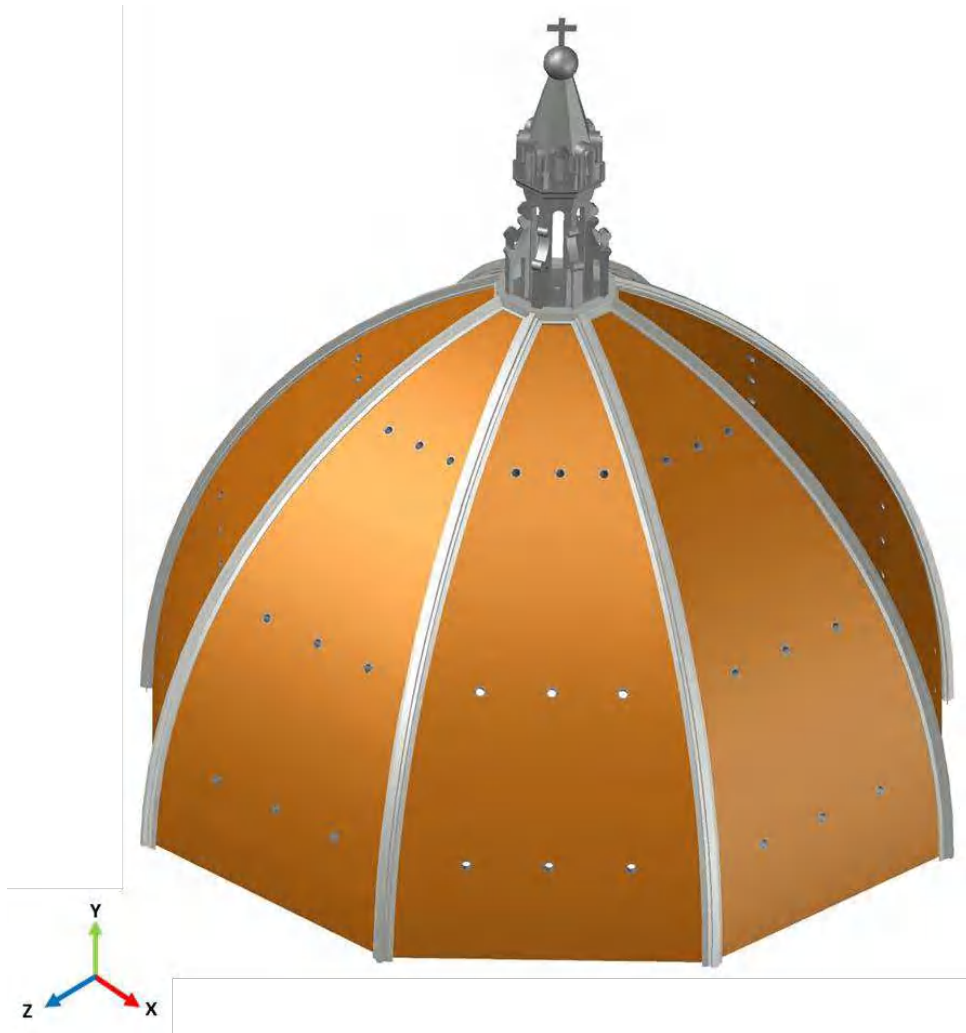
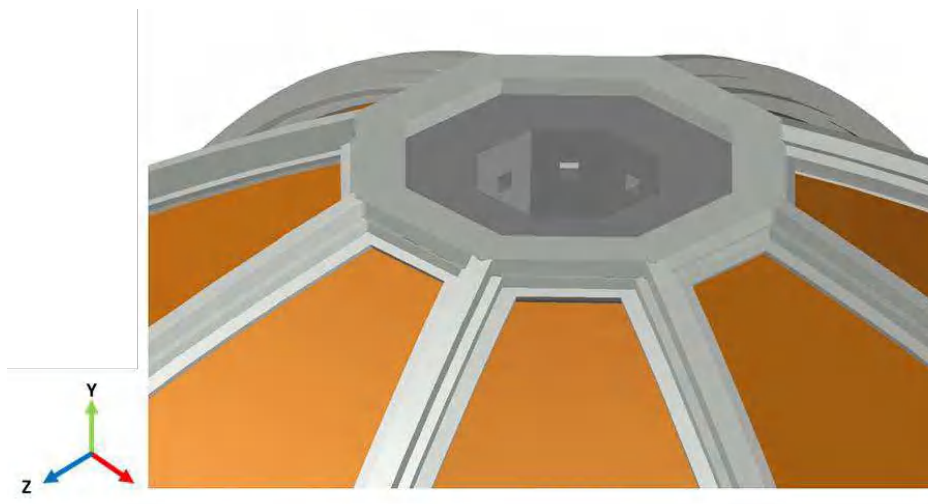


Figura 77: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: detalhe da cúpula externa com o *Serraglio* e *Costoloni*.



As figuras 78 e 79, representam o modelo completo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi, no entanto, na Figura 78, são suprimidos a cúpula externa, respectivos *occhi* e *Costoloni*, para que seja possível a visualização da configuração completa do modelo com os elementos entre cúpulas.

Figura 78: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi: modelo completo com detalhes dos elementos internos.

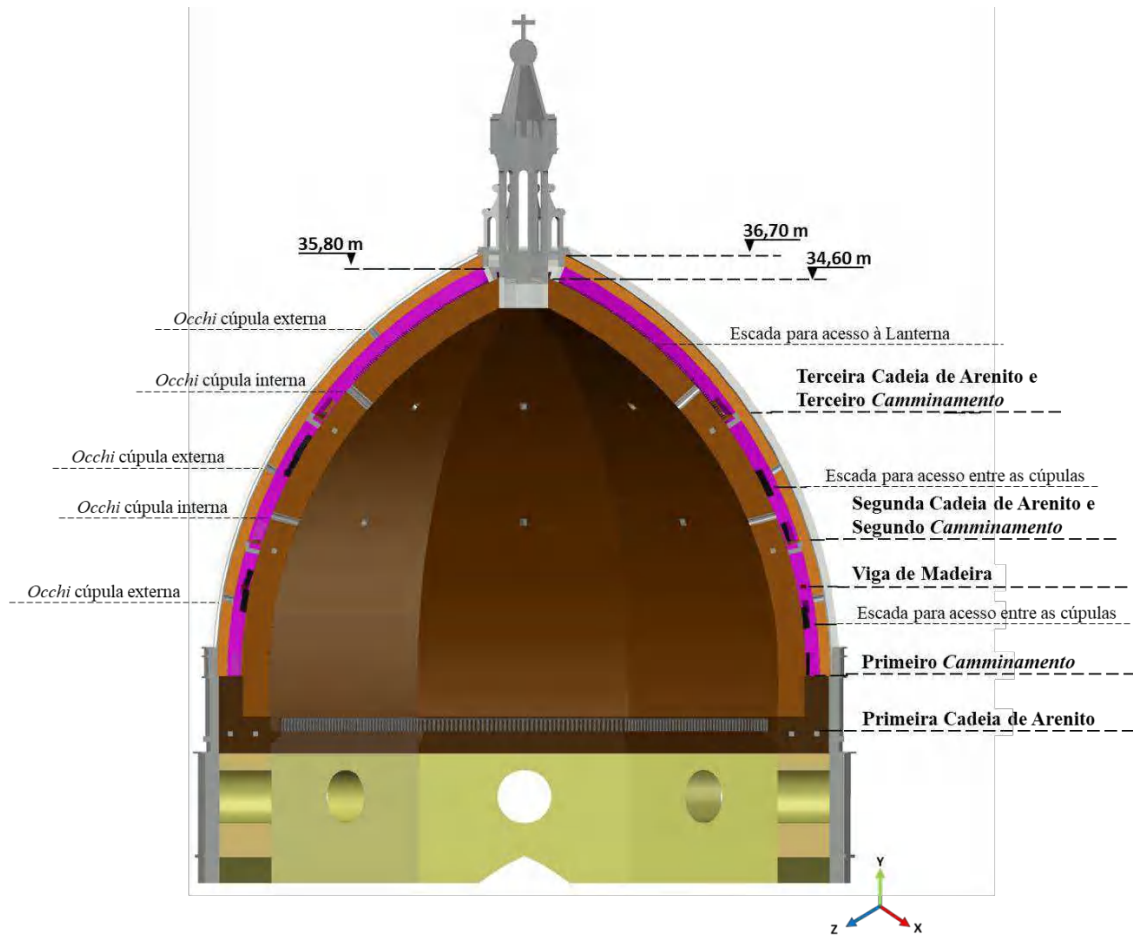


Figura 79: Modelo tridimensional da Cúpula de Brunelleschi.



Por fim, na Figura 80, é representada a seção transversal do modelo tridimensional, com detalhamento e indicação dos elementos estruturais entre cúpulas, e suas respectivas cotas.

Figura 80: Seção transversal do Modelo Tridimensional da Cúpula de Brunelleschi, detalhe para os elementos das cúpulas.



5.2. Processamento do modelo contendo as malhas de elementos finitos

Admitindo que as malhas de elementos finitos são constituídas de nós que, ao se deslocarem, fornecerão respostas ao carregamento aplicado, dos elementos modelados tridimensionalmente, apenas três elementos foram escolhidos para validação do modelo: a cúpula interna, setor de base e o *Tamburo*, por serem os elementos portantes da estrutura.

Para maior facilidade de compreensão das informações, adota-se o prefixo “+” para indicar valores de tensões de tração, e “-” para indicar valores de tensões de compressão.

5.2.1. Características físicas

Como características físicas, foram utilizados os valores de densidade, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson dos materiais constituintes da cúpula interna, setor de base e *Tamburo*.

Barbi et al. (1986) realizaram um estudo voltado para determinação das características físicas, mecânicas e composicionais dos materiais que constituem as estruturas portantes da Cúpula de Brunelleschi. Na Tabela 3, estão indicados os valores das propriedades físicas que serão utilizados no software para análise estrutural.

Tabela 3: Características físicas das estruturas portantes da Cúpula de Brunelleschi.

Material	Densidade	Módulo de elasticidade	Coeficiente de Poisson
	(kg/m ³)	(Pa)	
Blocos de Pedra	2.570	16.416.626.300	0,194
Tijolos	1.550	10.870.965.725	0,18
Argamassa	1.750	7.696.258.920	0,27

Fonte: Barbi, et al. (1986)

5.2.2. Modelo 01 e Modelo 03

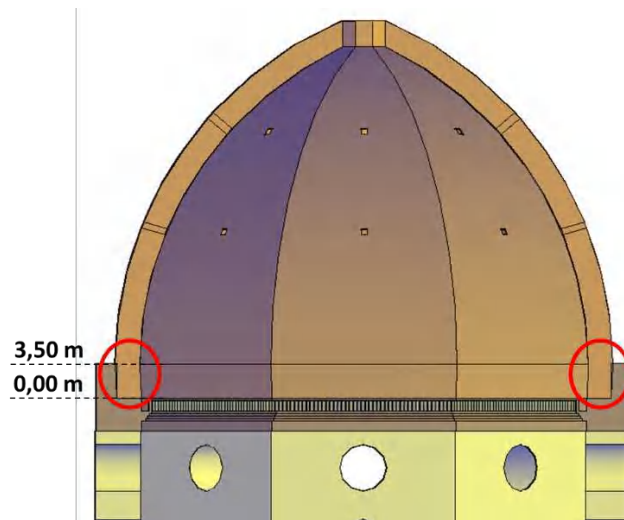
A fim de verificar o assentamento *spinapesce* na cota 7,00 m, foi realizada a comparação das tensões do Modelo 01 e do Modelo 03, cujos aspectos construtivos estão resumidos na Tabela 4.

Tabela 4: Resumo dos aspectos construtivos do Modelo 01 e Modelo 03.

	Modelo 01	Modelo 03
<i>Spinapesce</i> a partir da cota 3,50 m	X	
<i>Spinapesce</i> a partir da cota 7,00 m		X
Base em tijolos (0,00 m – 7,00 m)		X

No Modelo 01, como o objetivo é confrontar as tensões do peso próprio da Cúpula (cúpula interna, sistema intermediário de contrafortes, cúpula externa e Lanterna) no assentamento *spinapesce*, decidiu-se iniciar o assentamento *spinapesce* na cota 3,50 m, pois abaixo dessa cota os tijolos possuem influência da reação do *Tamburo*, conforme indicado na Figura 81.

Figura 81: Indicação do contato entre o *Tamburo* e a cúpula interna.



Nas Figura 82 e Figura 83, são representados o Modelo 01 e Modelo 03, respectivamente, com as geometrias detalhadas na Tabela 4. Na malha do Modelo 01, foram gerados 85.472 elementos tetraédricos, e no Modelo 03, 104.375.

Figura 82: (a) Vista isométrica do Modelo 01; (b) Vista isométrica do Modelo 01 com a malha tetraédrica.

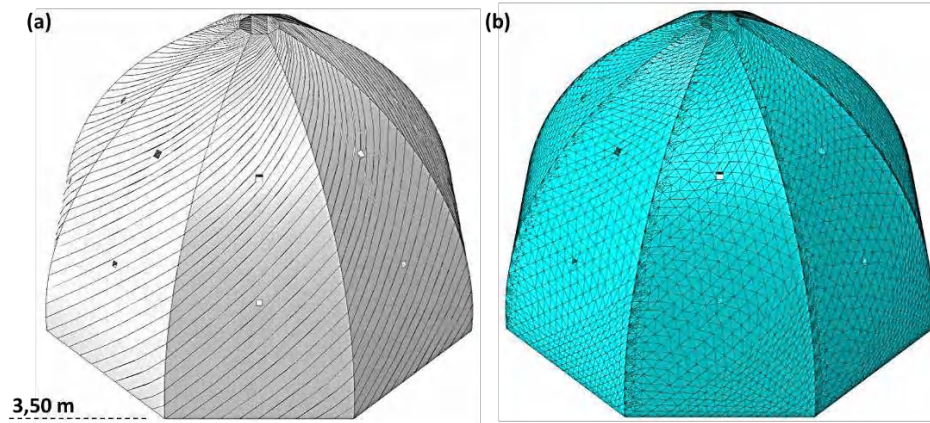
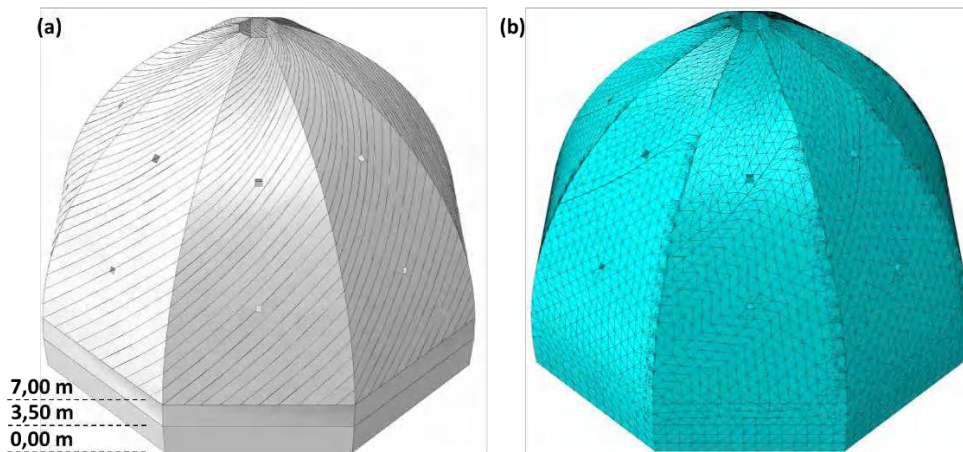
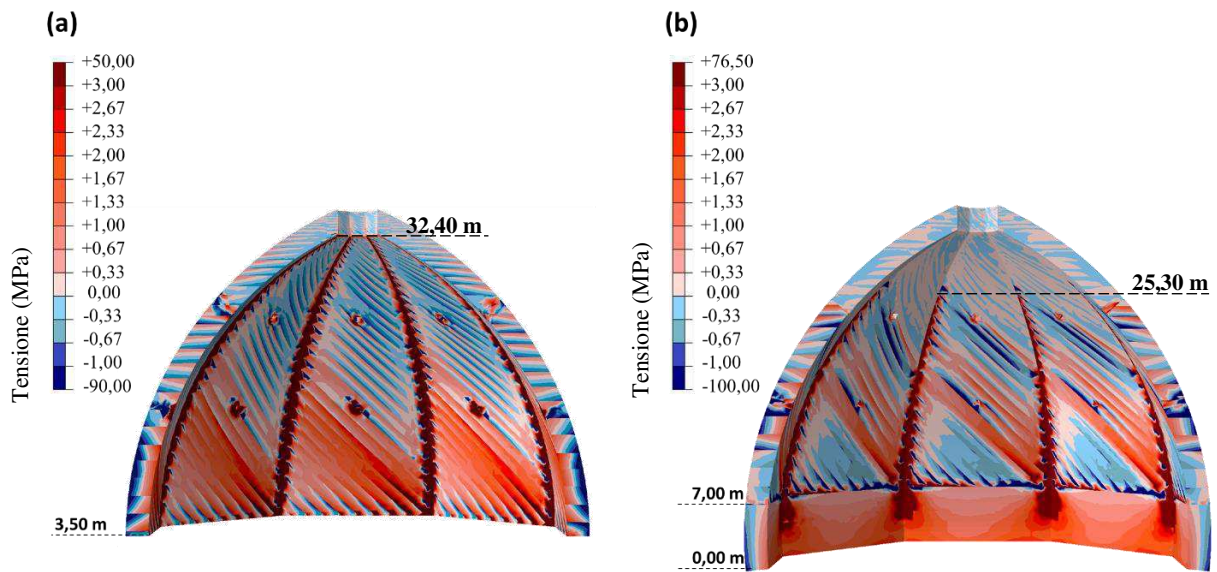


Figura 83: (a) Vista isométrica do Modelo 03; (b) Vista isométrica do Modelo 03 com a malha tetraédrica



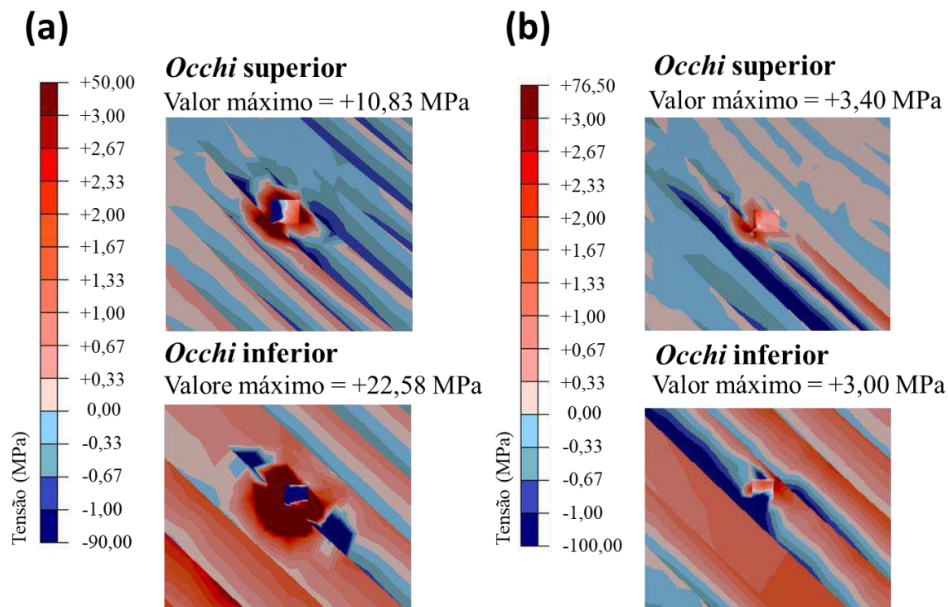
Conforme indicadas na Figura 84, o Modelo 03 contendo o assentamento *spinapesce* iniciando na cota 7,00 m sobre uma base de tijolos, garante a atenuação dos esforços de tração nas arestas de encontro das *vele*. Enquanto no Modelo 01 (Figura 84-a) as tensões de tração se estendem até o topo da cúpula interna, no Modelo 03 (Figura 84-b) essas tensões elevadas cessam pouco depois do *occhio* superior, com uma diminuição de aproximadamente 7,10 metros de atuação.

Figura 84: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 01; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 03.



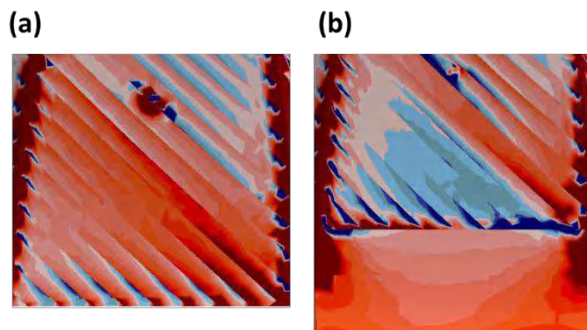
Analisando a Figura 84, verifica-se que não apenas as tensões das arestas são atenuadas com a inserção de uma base de tijolos dispostos em planos horizontais da cota 0,00 m a 7,00 m, mas também as tensões próximas aos *occhi*, zonas de descontinuidades da cúpula interna, de aproximadamente 86,71 % (+22,58 MPa no Modelo 01 e +3,00 MPa no Modelo 03) proximidades dos *occhi* inferior e de 68,61 % (+10,83 MPa no Modelo 01 e +3,40 MPa no Modelo 03) nos *occhi* superior, conforme especificado na Figura 85.

Figura 85: (a) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, nas regiões dos *occhi* do Modelo 01; (b) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, nas regiões dos *occhi* do Modelo 03.



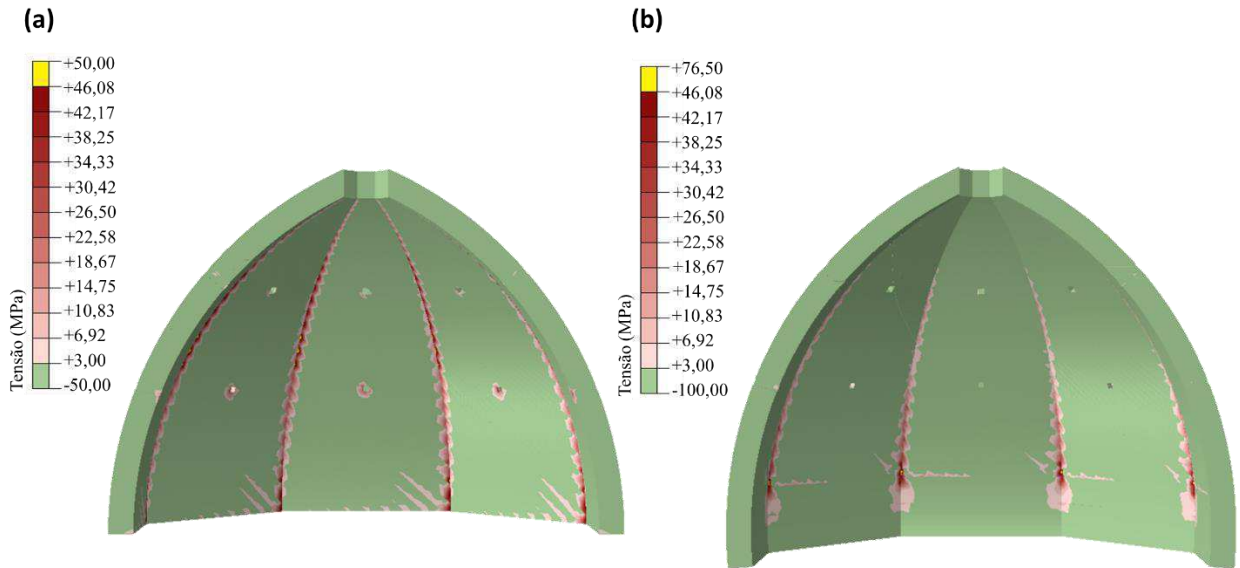
Com a comparação dos gráficos de tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 01 e Modelo 03 indicados na Figura 84, identifica-se ainda a atenuação das regiões tracionadas na parte inferior das *vele*. Enquanto no Modelo 01 a parte tracionada inferior das *vele* é de cerca de 185,00 m², essa área reduz para 79,46 m², cerca de 42,95% da área inicial, que podem ser melhores identificadas na Figura 86.

Figura 86: (a) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, na região inferior das *vele* do Modelo 01; (b) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, na região inferior das *vele* do Modelo 03.



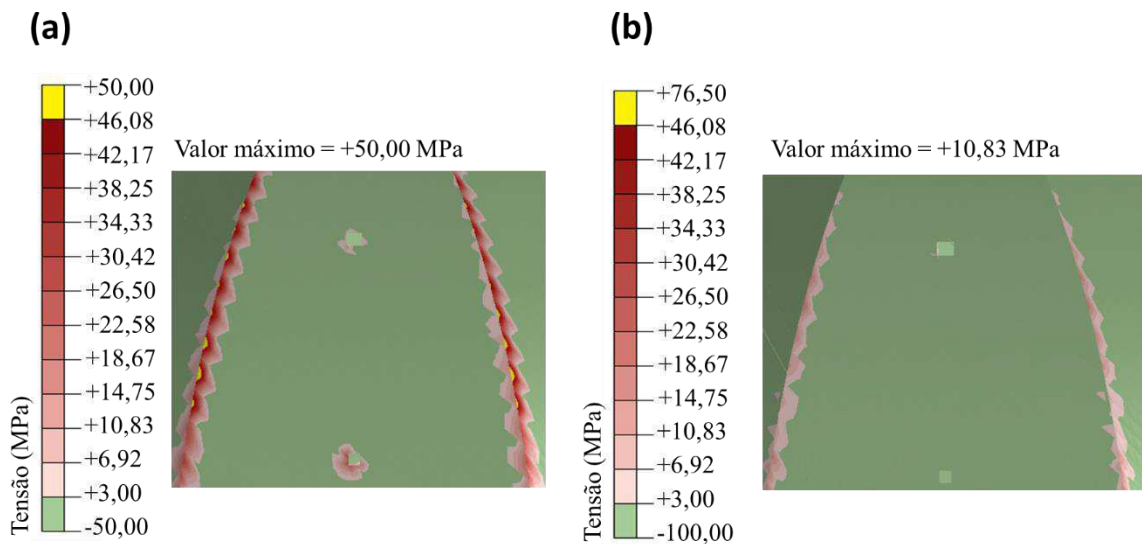
A fim de analisar a variação dos valores de tração das arestas da cúpula interna dos modelos, na Figura 87 são representadas as regiões cujas tensões são superiores +3,00 MPa (valores que ultrapassam a variação de tensões que ocorre na maior parte da cúpula).

Figura 87: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 01; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa na intradorso da cúpula interna do Modelo 03.



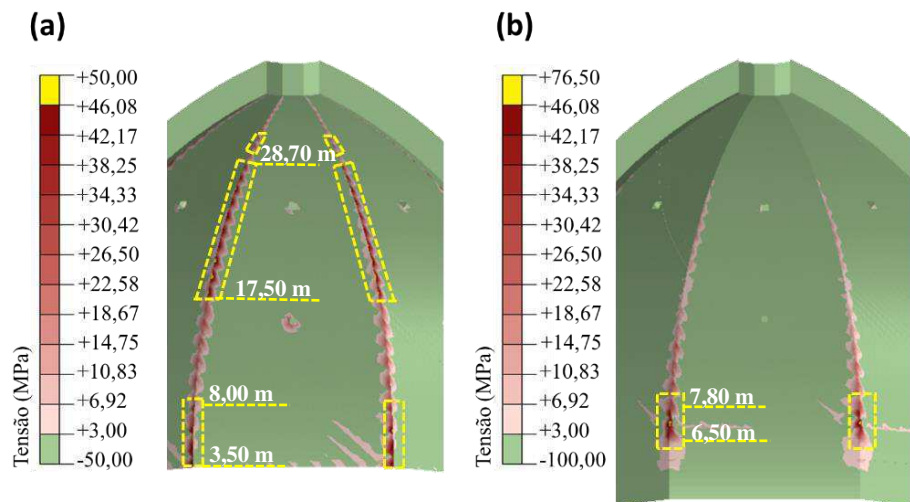
Analisando os valores das arestas situadas entre os *occhi* das vele, essa diminuição foi de cerca de 78,34 % (+50,00 MPa no Modelo 01 e +10,83 MPa no Modelo 03), conforme identificada na Figura 88, contendo um detalhe dessas regiões.

Figura 88: (a) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, na região entre os *occhi* das vele do Modelo 01; (b) Detalhe das tensões no intradorso da cúpula interna, na região entre os *occhi* das vele do Modelo 03.



Pelo confronto das regiões representadas na Figura 87, observa-se ainda que apesar do valor máximo do Modelo 01 ser inferior que aquele do Modelo 03 (+50,00 MPa no Modelo 01 e +76,50 MPa no Modelo 03), as tensões a partir de +34,00 MPa (aquelas de maiores valores encontrados) encontram-se distribuídas na maior parte da extensão das arestas (Figura 89-a, da cota 3,50 m à 8,00 m e da cota 17,50 m à 28,70 m). Já no Modelo 03, as tensões iguais ou superiores à +34,00 MPa encontram-se concentradas nas arestas próximas à parte inferior das *vele*, e mais especificamente nos pontos de encontro entre o assentamento *spinapesce* e a base de tijolos horizontais (Figura 89-b, da cota 6,50 m à 7,80 m).

Figura 89: (a) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +34,00 MPa nas arestas do Modelo 01; (b) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +34,00 MPa nas arestas do Modelo 03.



Com o confronto dos gráficos de tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 01 e Modelo 03 indicados na Figura 90, identifica-se a atenuação das regiões comprimidas na parte inferior das *vele*. Enquanto no Modelo 01 a parte comprimida inferior das *vele* é de cerca de 137,90 m², essa área reduz para 52,15 m², no Modelo 03, cerca de 37,82% da área inicial, que podem ser melhores identificadas na Figura 91.

Figura 90: (a) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 01; (b) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 03.

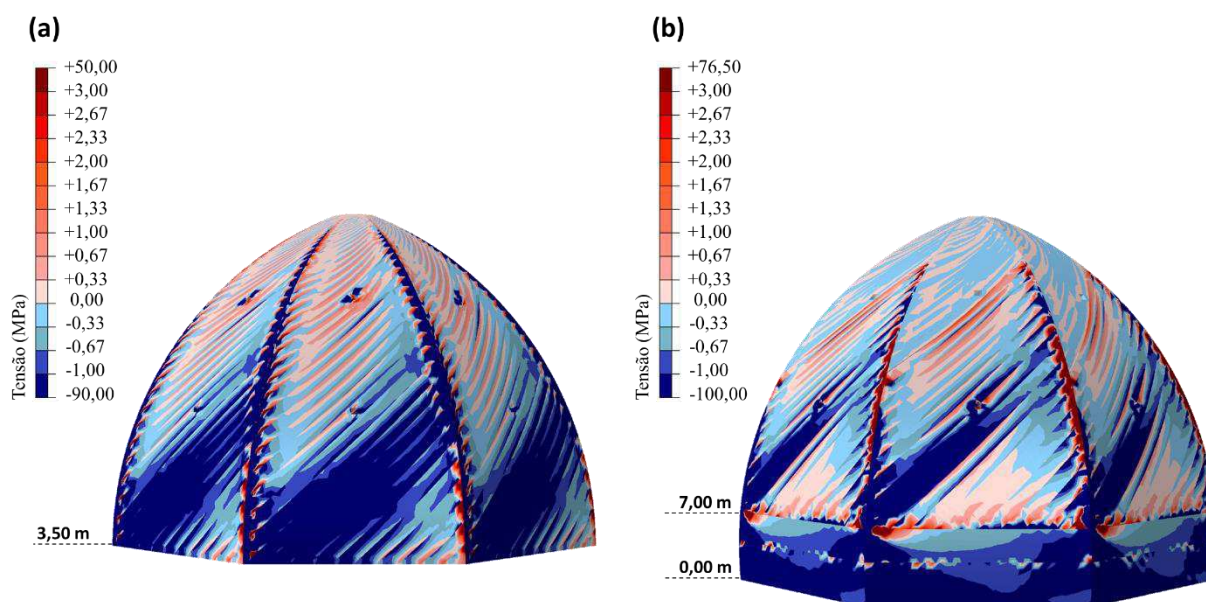
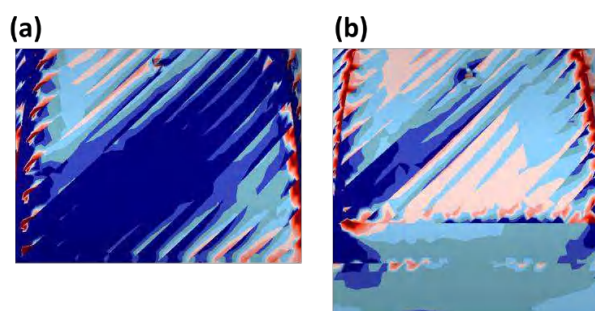


Figura 91: (a) Detalhe das tensões na região inferior no extradorso das *vele* do Modelo 01; (b) Detalhe das tensões na região inferior no extradorso das *vele* do Modelo 03.



Dessa maneira, com os dados analisados foi possível verificar que o início do assentamento *spinapesce* a partir da cota 7,00 m e a inserção de uma base de tijolos sobrepostos em planos horizontais garantiu a diminuição das tensões de tração nas regiões periféricas aos *occhi*, nas arestas e na região inferior das *vele*, bem como, na região de compressão no extradorso da cúpula interna, ou seja, o Modelo 03.

5.2.3. Modelo 02 e Modelo 03

Como foi verificado que a base de tijolos reduz as tensões, a comparação do Modelo 02 com o Modelo 03 consiste em verificar quantitativamente o desempenho da base de blocos de pedra utilizados por Brunelleschi, em contraste com uma base em tijolos. Na Tabela 5, estão indicadas as diferenças entre os dois modelos.

Tabela 5: Resumo dos aspectos construtivos do Modelo 02 e Modelo 03.

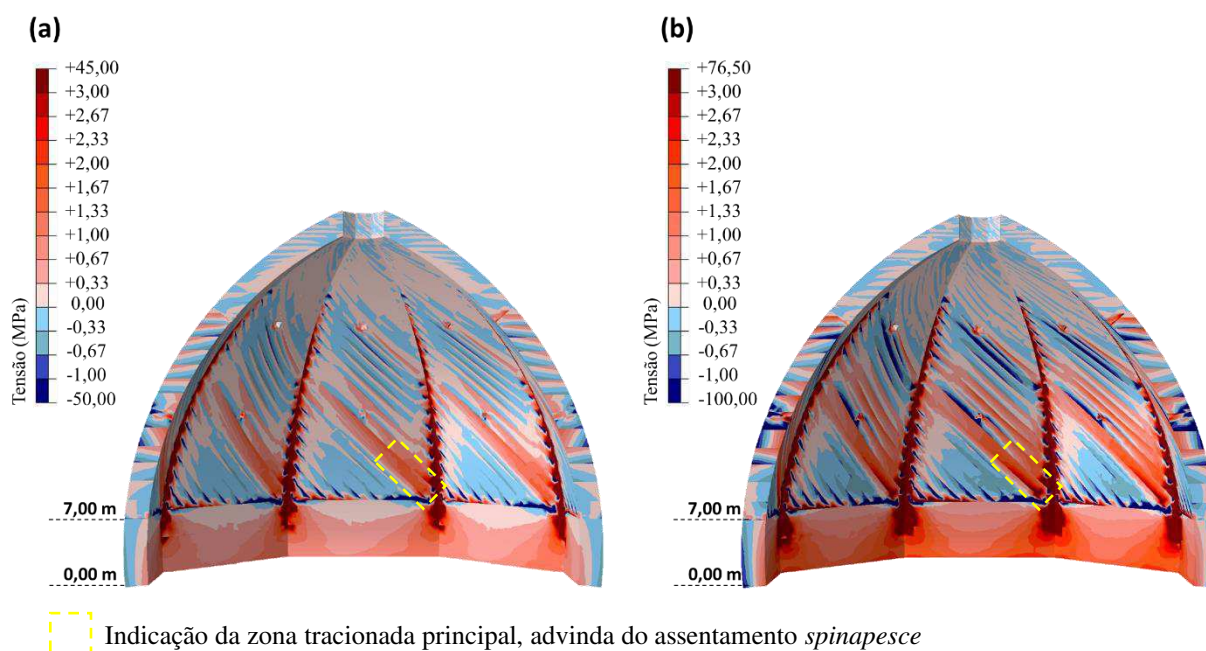
	Modelo 02	Modelo 03
<i>Spinapesce</i> a partir da cota 7,00 m	X	X
Base em tijolos (0,00 m – 7,00 m)		X
Base em blocos de pedra (0,00 m – 7,00 m)	X	

Quanto a representação gráfica e da malha tetraédrica, o Modelo 02 possui a mesma geometria do Modelo 03 identificado na Figura 83, possuindo a mesma quantidade de elementos tetraedros: 104.375.

Com os modelos representados na Figura 92, é possível verificar que a base feita com blocos de pedra, permite uma diminuição das tensões de tração nas arestas da cúpula interna, nas *vele* e, principalmente, na base.

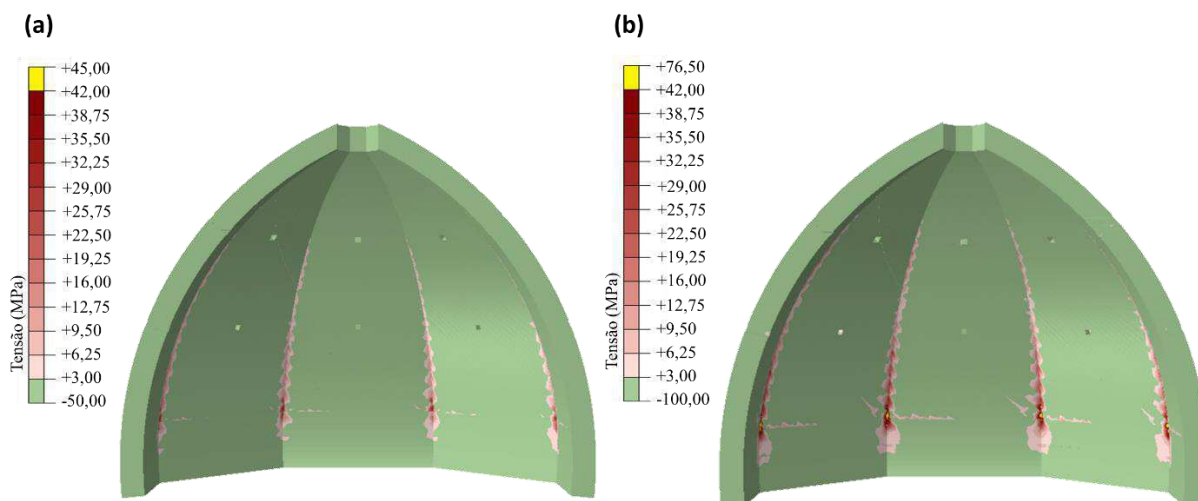
Analisando a Figura 92, verifica-se que a tensão de tração principal advinda do assentamento *spinapesce* na parte inferior das *vele* (parte destacada em amarelo), teve uma diminuição de cerca de 38,22%, nos valores máximos encontrados na região próxima à aresta da cúpula interna, com a utilização de uma base com blocos de pedra (+2,57 MPa no Modelo 02 e +4,16 MPa no Modelo 03).

Figura 92: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 03.



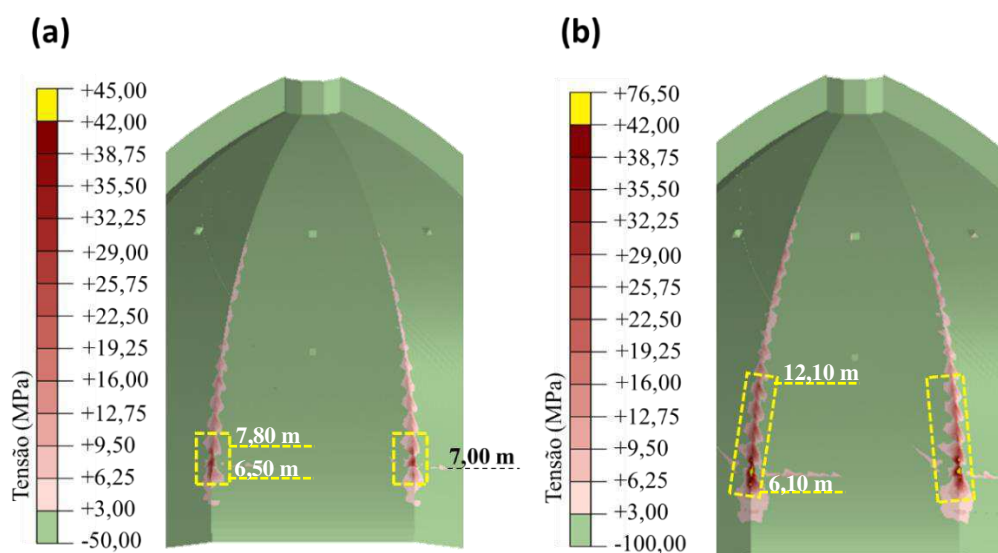
Para analisar a variação de tensões nas arestas da cúpula interna dos modelos, a Figura 93 indica os gráficos com as tensões variando +3,00 MPa a +42,00MPa, para a verificação quantitativa dessa diminuição das tensões.

Figura 93: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso a da cúpula interna do Modelo 03.



Com os detalhes da Figura 94 verifica-se que as regiões com maiores valores de tração no Modelo 03 (superiores à +25,00 MPa), se estendem até a altura dos *occhi* inferiores das *vele*. No Modelo 02, esses valores se estendem até a cota 12,10 m, e observa-se ainda uma redução de extensão na atuação de tensões superiores à +3,00 MPa, em cerca de 4,70 m.

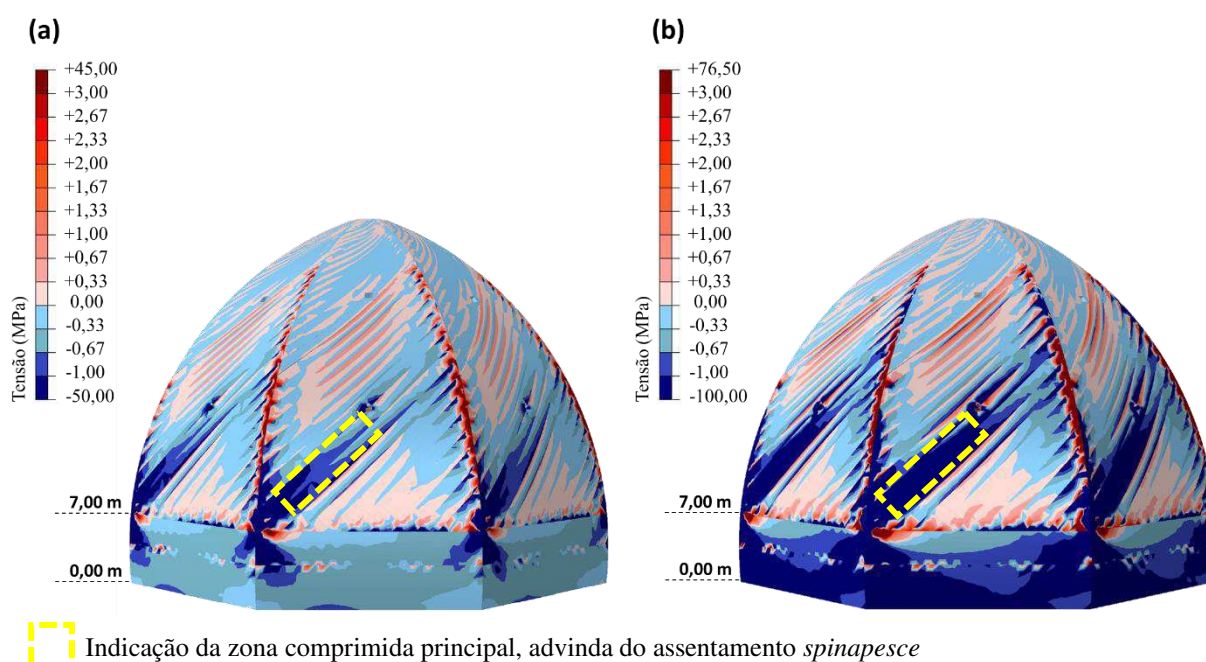
Figura 94: (a) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +25,00 MPa nas arestas do Modelo 02; (b) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +25,00 MPa nas arestas do Modelo 03.



Quanto aos maiores valores de tração e compressão, verifica-se uma diminuição de 50% no valor de compressão do Modelo 02 (-50,00 MPa) em relação aos valores do Modelo 03 (-100,00 MPa). Para o valor máximo de tração obtido nos modelos, verifica-se uma diminuição de aproximadamente 41% no maior valor do Modelo 02 (+45,00 MPa) em relação ao valor do Modelo 03 (+76,50 MPa), que em ambos os modelos, encontram-se na aresta (mais especificamente no vértice) de conexão do assentamento *spinapesce* à base de tijolos e blocos de pedra, conforme indicado na Figura 93.

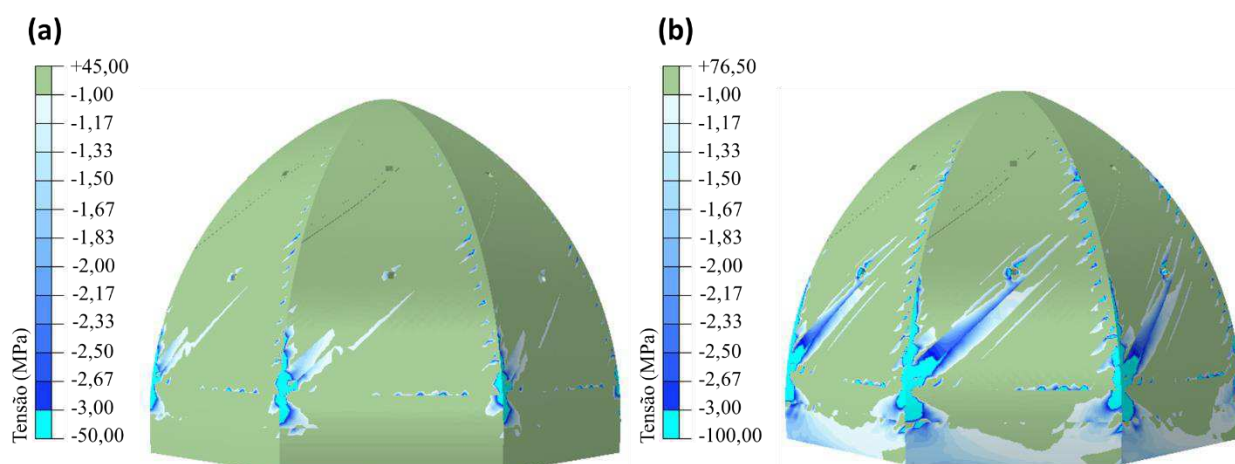
Assim como observado no intradorso da cúpula interna dos modelos, há uma diminuição nos valores de tensão de compressão principal advinda do assentamento *spinapesce* no extradorso da *vele*, como indicado na Figura 95.

Figura 95: (a) Tensões no extradorso da cúpula externa do Modelo 02; (b) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 03.



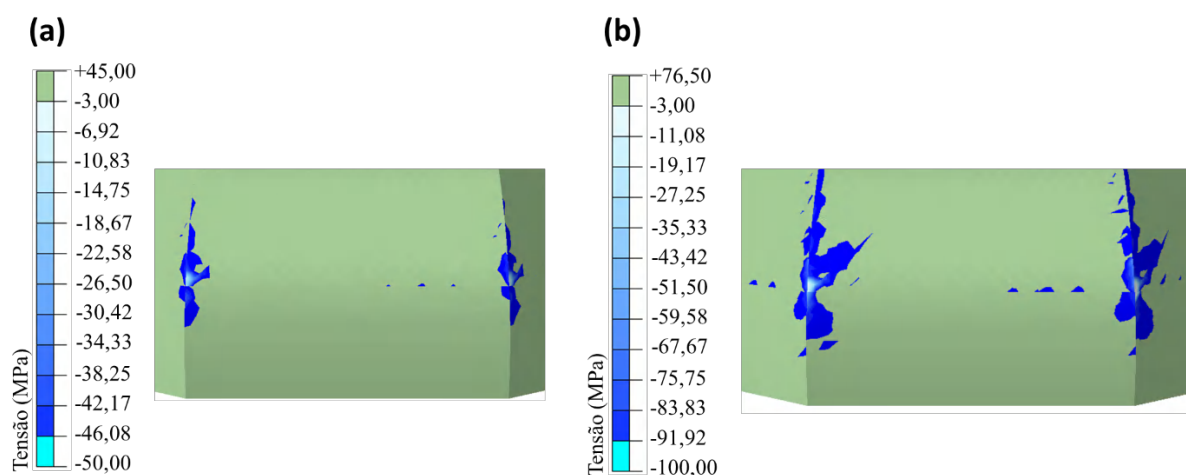
Conforme indicado na Figura 96, verifica-se que essa diminuição atinge cerca de 33,43% na região próxima à aresta da cúpula interna, com a utilização de uma base com blocos de pedra (-2,33 MPa no Modelo 02 e -3,50 MPa no Modelo 03). Observam-se que em ambos os modelos os maiores valores de compressão no extradorso da cúpula interna encontram-se nas regiões de conexão da *spinapesce* à base.

Figura 96: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são inferiores à -1,00 MPa no extradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são inferiores à -1,00 MPa no extradorso da cúpula interna do Modelo 03.



Na Figura 97, estabeleceu-se um intervalo para verificação da variação de tensões nas regiões de valores inferiores à -3,00 MPa, sendo possível observar essa diminuição das tensões de compressão do Modelo 02 em relação ao Modelo 03, em cerca de 50%.

Figura 97: (a) Indicação das regiões do extradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou inferiores à -3,00 MPa nas arestas do Modelo 02; (b) Indicação das regiões do extradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou inferiores à -3,00 MPa nas arestas do Modelo 03.



Assim, é possível verificar que a utilização de uma base de blocos de pedra sobrepostos em planos horizontais da cota 0,00 m à 7,00 m (Modelo 02) em relação a utilização de tijolos (Modelo 03), garante uma diminuição nas tensões das arestas no intradorso da cúpula interna, base, e nas regiões inferiores das veles.

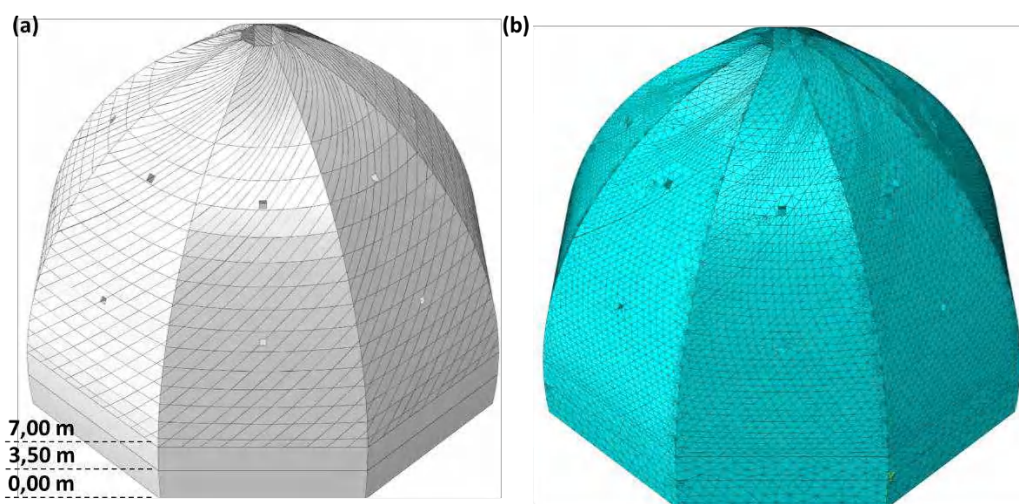
5.2.4. Modelo 02 e Modelo 04

Admitindo que o Modelo 04 foi aquele adotado por Brunelleschi para a construção da Cúpula, ou seja, que utiliza simultaneamente as técnicas de assentamento dos tijolos *spinapesce* e *corda blanda* (Tabela 6), seu confronto com o Modelo 02 tem como objetivo verificar quantitativamente a influência da utilização da *corda blanda* para a diminuição de tensões nas arestas da cúpula interna.

Tabela 6: Resumo dos aspectos construtivos do Modelo 02 e Modelo 04.

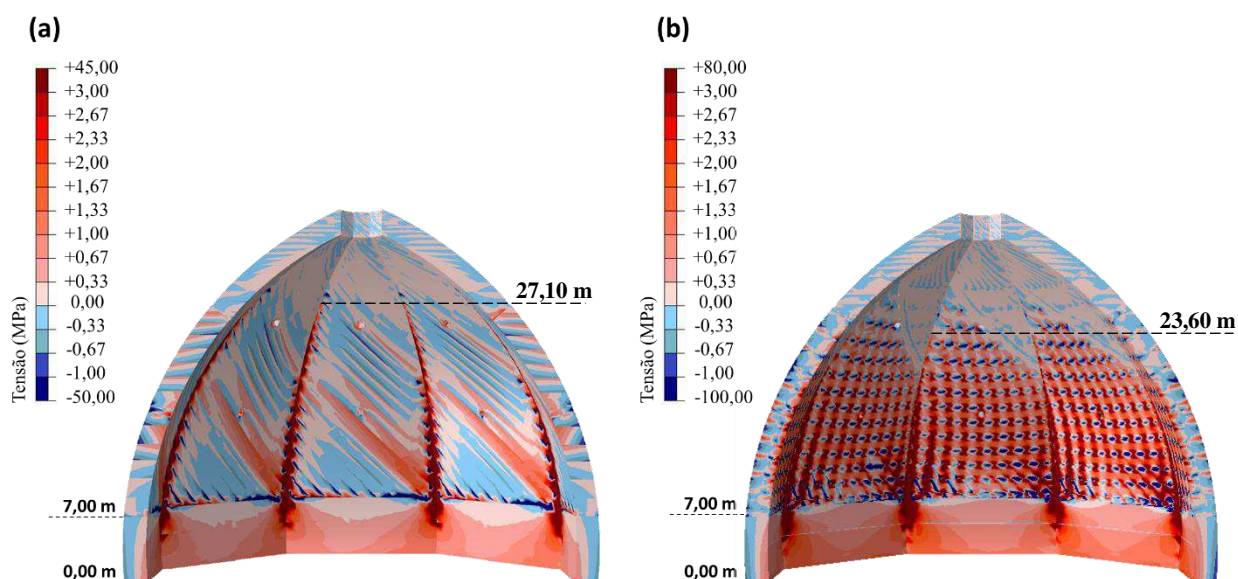
	Modelo 02	Modelo 04
<i>Spinapesce</i> a partir da cota 7,00 m	X	X
Base em blocos de pedra (0,00 m – 7,00 m)	X	X
<i>Corda blanda</i> a partir da cota 7,00 m		X

Na Figura 98 é representada a geometria do Modelo 04 e a malha tetraédrica de elementos finitos, contendo 203.694 elementos.

Figura 98: (a) Vista isométrica do Modelo 04; (b) Vista isométrica do Modelo 04 com a malha tetraédrica

Pela Figura 99, verifica-se a redução do prolongamento das tensões de tração nas arestas da cúpula interna no Modelo 04, com uma redistribuição desses valores superiores à +3,00 MPa para as regiões centrais dos alinhamentos de tijolos em *corda blanda*, tal qual previsto por Brunelleschi. Tal redução no prolongamento das tensões de tração nas arestas, é de aproximadamente 3,50 m, e pode ser melhor observado nos detalhes da Figura 100.

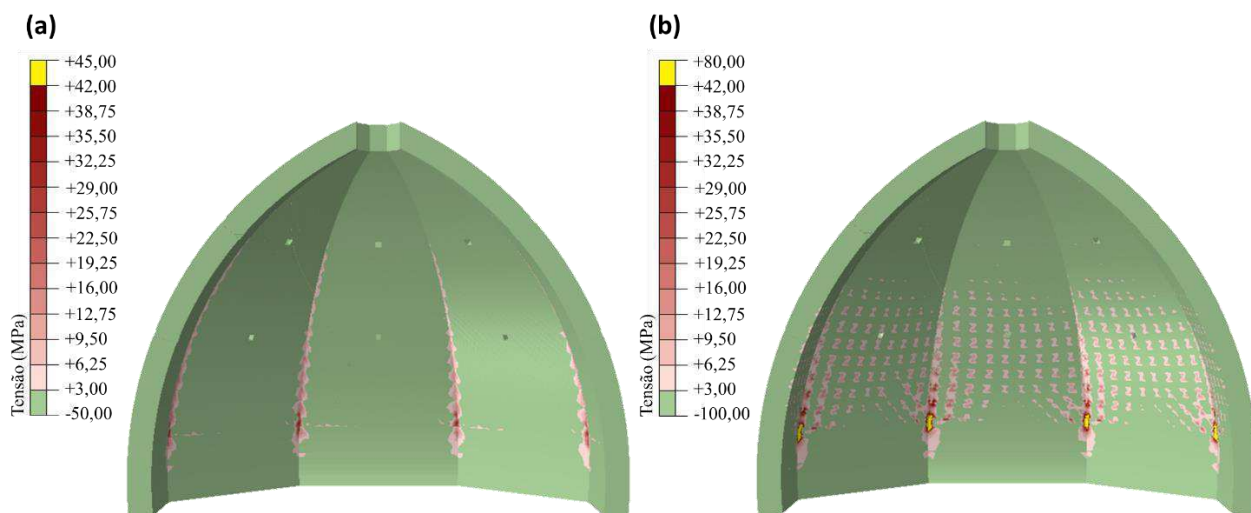
Figura 99: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 04.



Com a mesma Figura 99, verifica-se ainda, que os valores de tração superiores aos +3,00 MPa redistribuídos para a parte central das *vele* localizam-se nos pontos de união entre *spinapesce* e *corda blanda*, uma vez que o modelo foi subdividido em elementos seguindo a geometria, e assim, não foi estabelecido um fluxo de transmissão de tensões nas configurações do software.

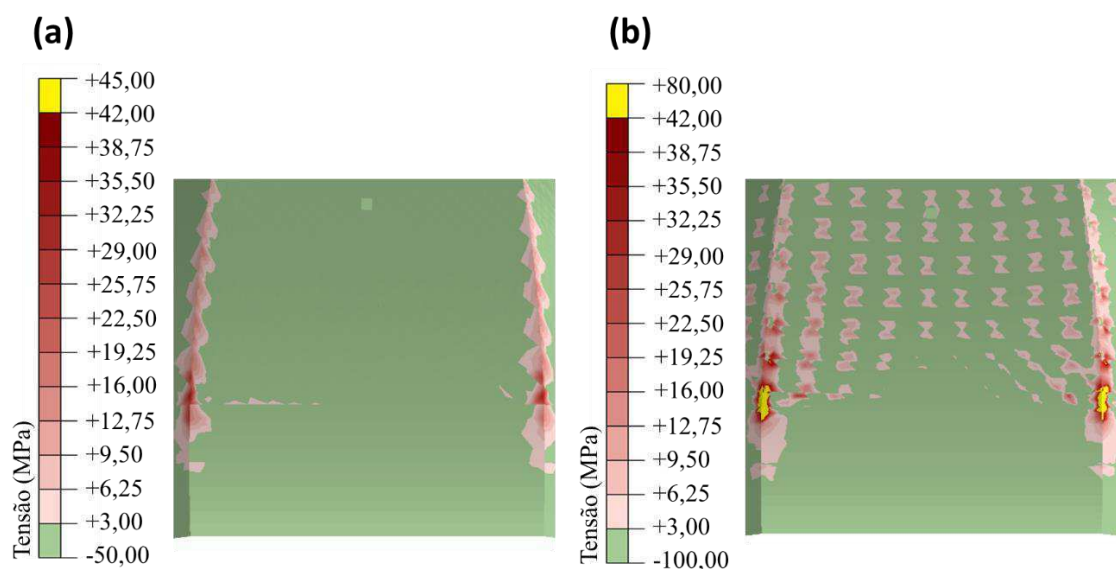
Pela Figura 100, é evidente que as tensões de tração foram transmitidas para o centro das *vele* com a inserção do assentamento *corda blanda*, e possuem valores de aproximadamente +6,25 MPa, chegando a +16,00 MPa nas regiões próximas às arestas.

Figura 100: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são superiores à +3,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 04.



Outro detalhe a ser considerado, é que no Modelo 02 as tensões de tração que se estendem nas arestas até aproximadamente os *occhi* inferiores das *vele*, possuem valores máximos entre +12,75 MPa e +42,00 MPa, conforme indicado no detalhe da Figura 101.

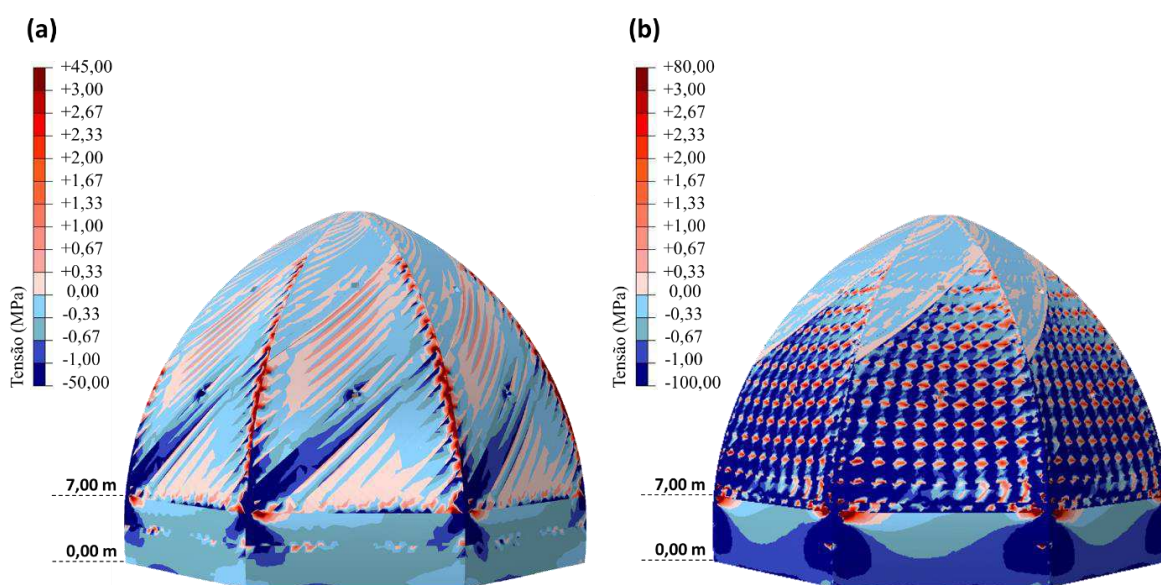
Figura 101: (a) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +3,00 MPa nas arestas do Modelo 02; (b) Indicação das regiões do intradorso da cúpula interna, cujas tensões são iguais ou superiores à +3,00 MPa nas arestas do Modelo 04.



Já no Modelo 04, apesar dessas tensões se estenderem até aproximadamente o mesmo local (*occhio* inferior das *vele*), não possuem uma distribuição com valores gradativos, ou seja, são pontuais, restritos às áreas de encontro do assentamento *spinapesce* com a *corda blanda*, possuindo valores entre +3,00 MPa e +80,00MPa. Tal fato, pode ser advindo de imprecisões na subdivisão da geometria em elementos *spinapesce* e *corda blanda*, e deve ser melhor avaliado e aperfeiçoado em análises futuras.

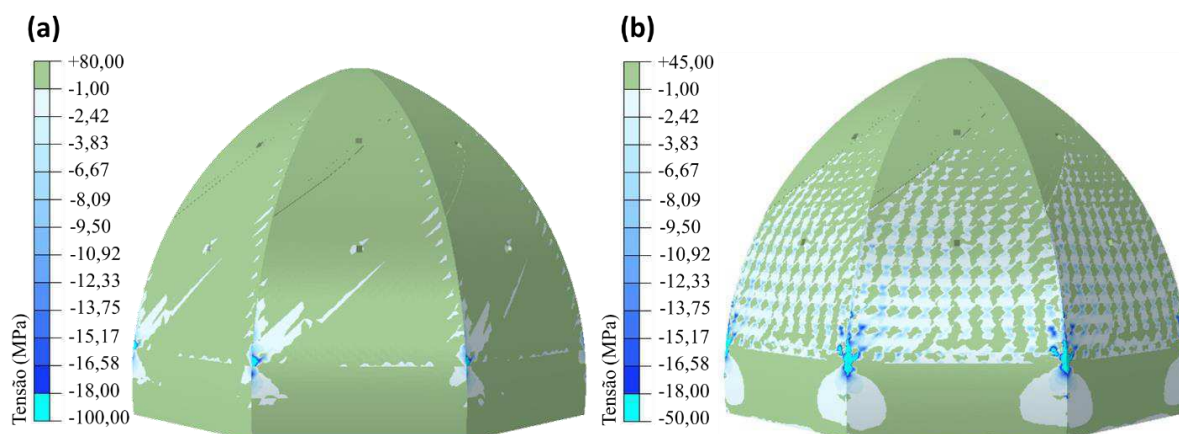
Analisando a Figura 102, observa-se o mesmo fenômeno de redistribuição de tensões na parte central dos alinhamentos da *corda blanda*, ou seja, no centro das *vele*. No entanto, enquanto as arestas do extradorso do Modelo 02 (Figura 102-a) são tracionadas, observa-se que aquelas do Modelo 04 são comprimidas (Figura 102-b), situação extremamente favorável admitindo que a cúpula interna é de alvenaria, que possui maior capacidade de absorção de tensões de compressão.

Figura 102: (a) Tensões no extradorso da cúpula externa do Modelo 02; (b) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 04.



Na Figura 103, são especificadas as regiões cujas tensões de compressão são inferiores à -1,00 MPa, sendo possível verificar que no Modelo 02 (Figura 103-a) as tensões que ultrapassam o valor de -18,00 MPa estão concentradas nas regiões próximas à conexão da *spinapesce* com a base de pedra, assim como no Modelo 04 (Figura 103-b), se estendendo por uma área um pouco maior, em torno da mesma região.

Figura 103: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões são inferiores à -1,00 MPa no extradorso da cúpula interna do Modelo 02; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões são inferiores à -1,00 MPa no extradorso da cúpula interna do Modelo 04.



Com os resultados do confronto do Modelo 02 com o Modelo 04, verificou-se que a *corda blanda* permitiu a redistribuição das tensões das arestas para o centro das *vele*, e aumentou a área de compressão no extradorso da cúpula interna.

5.2.5. Modelo 04 e Modelo 05

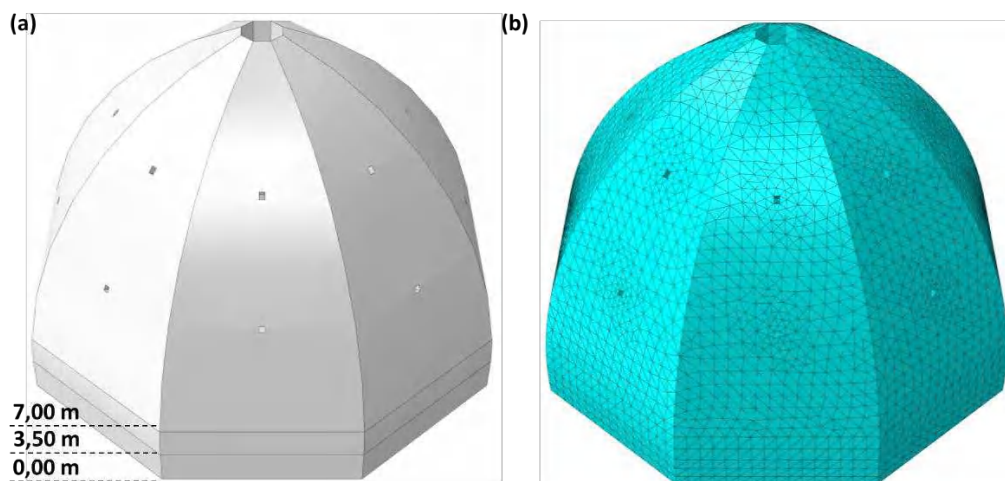
Assim como os confrontos realizados anteriormente, a comparação do Modelo 04 e Modelo 05 têm como objetivo a verificação do desempenho das técnicas construtivas utilizadas por Brunelleschi, porém, comparando com o modelo convencional de tijolos sobrepostos sobre planos horizontais (Tabela 7).

Tabela 7: Resumo dos aspectos construtivos do Modelo 04 e Modelo 05.

	Modelo 04	Modelo 05
<i>Spinapesce</i> a partir da cota 7,00 m	X	
Base em blocos de pedra (0,00 m – 7,00 m)	X	
<i>Corda blanda</i> a partir da cota 7,00 m	X	
Tijolos sobrepostos em planos horizontais		X

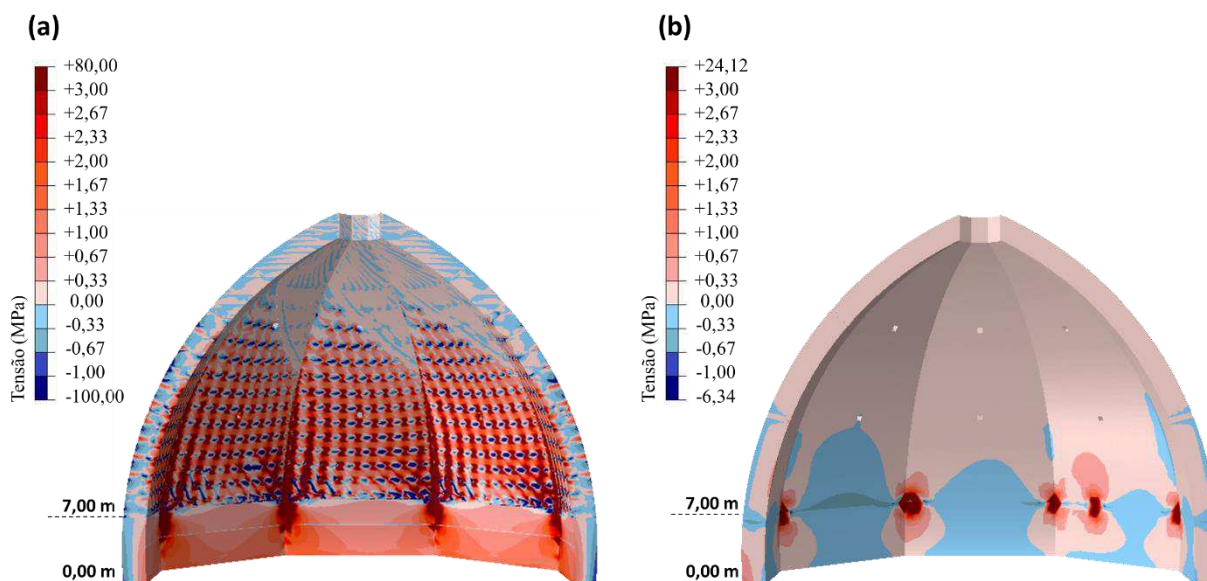
Na Figura 104 é representada a geometria do Modelo 05 e a malha tetraédrica de elementos finitos, contendo 49.236 elementos.

Figura 104: (a) Vista isométrica do Modelo 05; (b) Vista isométrica do Modelo 05 com a malha tetraédrica



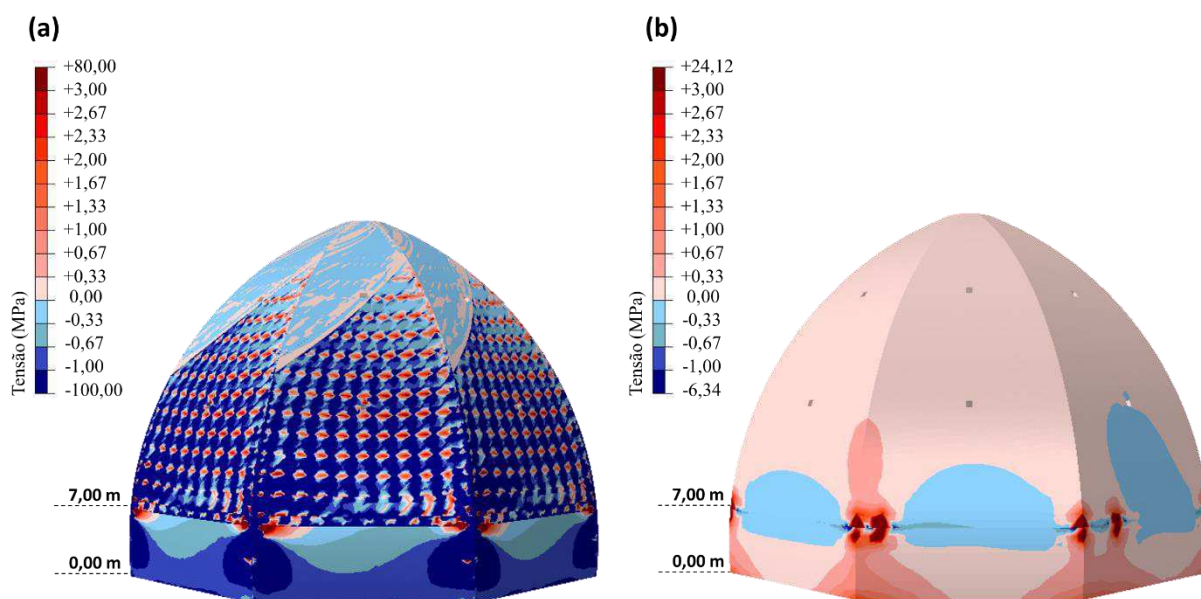
A Figura 105 evidencia a distribuição de esforços no intradorso da cúpula interna para o Modelo 04 (Figura 105-a) e Modelo 05 (Figura 105-b), e a Figura 106, os esforços no extradorso da cúpula interna para ambos os modelos.

Figura 105: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 04; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 05.



Dessa maneira, é possível verificar que enquanto a cúpula interna do Modelo 04 possui o tensões de compressão no extradorso (Figura 106-a), a cúpula interna do Modelo 05 possui majoritariamente tensões de tração.

Figura 106: (a) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 04; (b) Tensões no extradorso da cúpula interna do Modelo 05.



Tal ocorrência permite afirmar que os sistemas construtivos utilizados por Brunelleschi permitem que a Cúpula seja autoportante, e que sua construção pudesse ter sido realizada sem escoramentos devido a compressão dos tijolos tal qual ocorre em cúpulas de rotação (Figura 16), com a distribuição dos esforços entre os elementos adjacentes. A cúpula do Modelo 05 (Figura 106-b), no entanto, é majoritariamente tracionada, ou seja, a menos que fossem utilizados escoramentos, a Cúpula octogonal não poderia ser construída com a técnica convencional dos tijolos sobrepostos em plano horizontais.

5.3. Validação do Modelo

Com base nas análises realizadas, verificou-se que o Modelo 04 é o mais próximo daquele executado por Brunelleschi, isto é, a cúpula considerando o assentamento *spinapesce* e da *corda blanda* a partir de 7,00 m, além de uma base em pedra. Desta forma, foi o escolhido para a validação frente a outros dois modelos da Cúpula de Brunelleschi, existentes na literatura, os modelos de Fanelli e Fanelli (2004) e Bartoli *et al.* (2015).

Para a validação do setor de base e do *Tamburo*, foi utilizado o modelo de Fanelli e Fanelli (2004), pois não foi encontrada a distribuição de tensões referentes da referida estrutura no modelo de Bartoli *et al.* (2015).

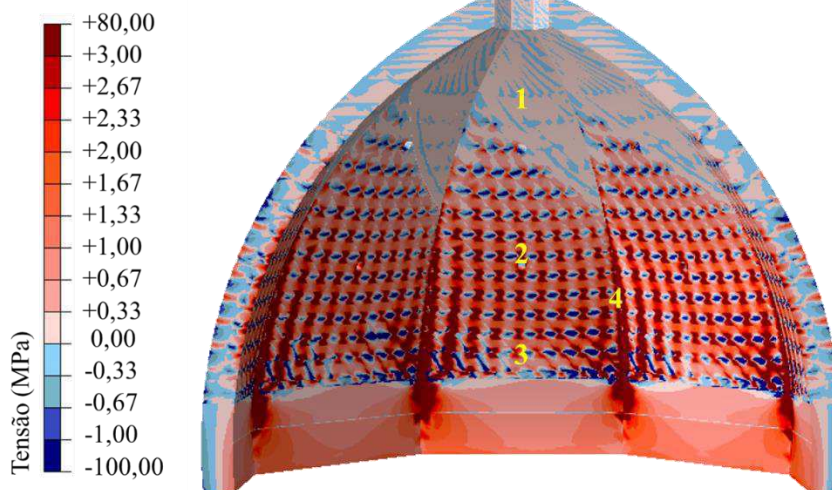
5.3.1. Modelo 04: Cúpula Interna

Conforme mencionado, para a validação do modelo da cúpula interna, foram utilizados os modelos gráficos de distribuição de tensões de Fanelli e Fanelli (2004) e Bartoli et al. (2015), indicados na Figura 107, juntamente com o Modelo 04 desenvolvido.

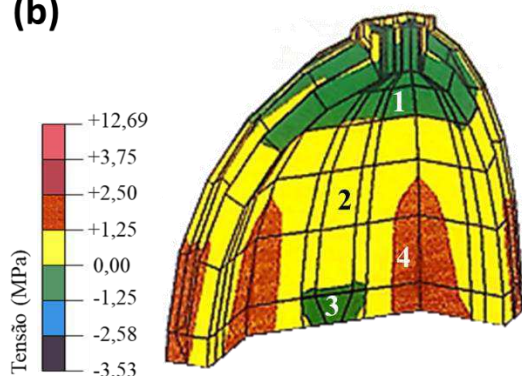
Com a análise da Figura 107, verifica-se inicialmente as zonas de convergências de tensões de tração e compressão. Na Figura 107-a, é possível observar que no topo da cúpula interna (ponto 1) do Modelo 04, são apresentadas zonas de compressão com valores que variam de 0,00 a -0,33 MPa. No modelo de Fanelli e Fanelli (2004), indicado na Figura 107-b, a zona de compressão localizada no topo do modelo (ponto 1) possui valores que variam de 0,00 a -1,25 MPa, e no modelo de Bartoli et al. (2015) (Figura 107-c), a mesma região possui um intervalo de tensões de compressão variando de 0,00 a -0,93 MPa.

Figura 107: (a) Tensões no intradorso da cúpula interna do Modelo 04; (b) Tensões no intradorso da cúpula interna do modelo de Fanelli e Fanelli (2004); (c) Tensões no intradorso da cúpula interna do modelo de Bartoli et al. (2015).

(a)

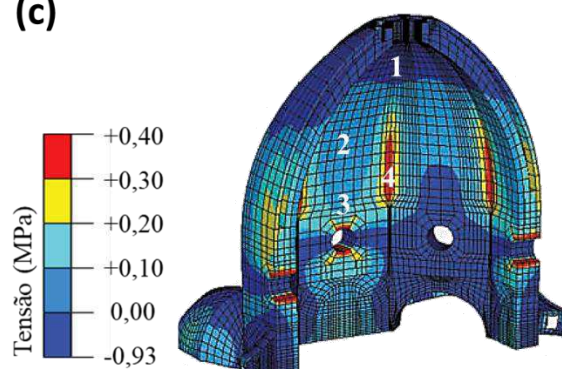


(b)



Fonte: (FANELLI e FANELLI, 2004)

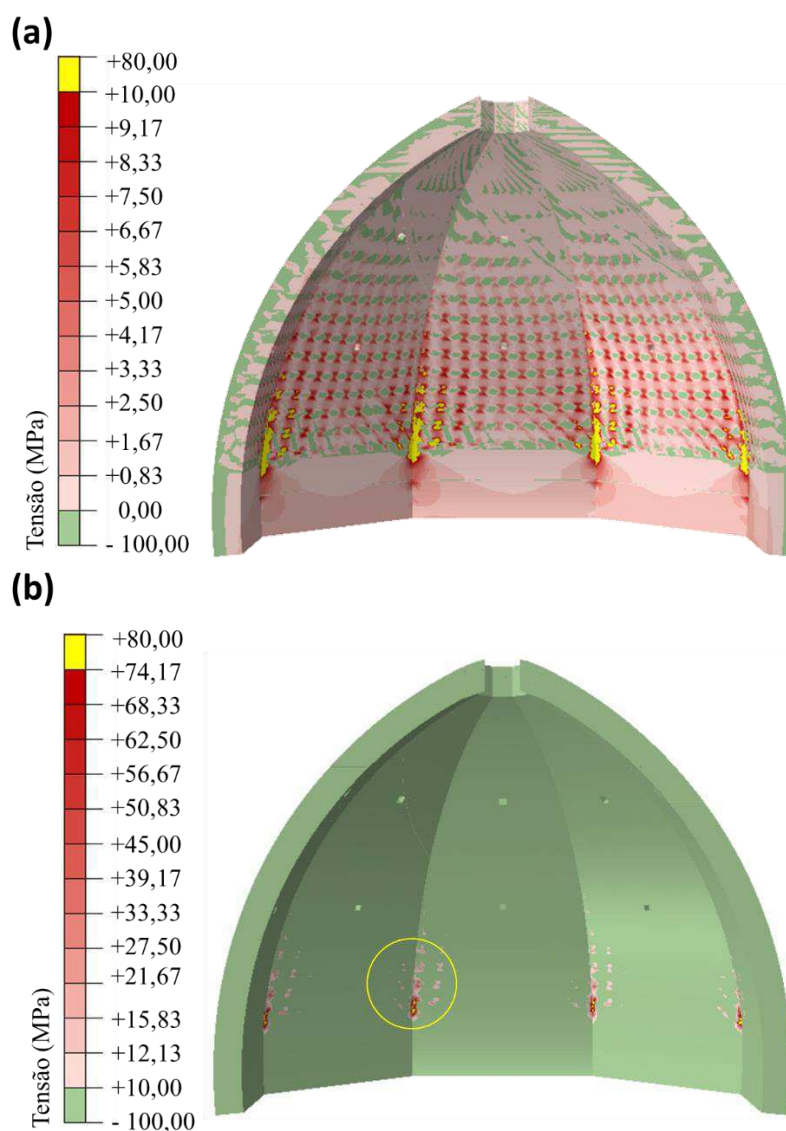
(c)



Fonte: (BARTOLI, BORRI e BETTI, 2015)

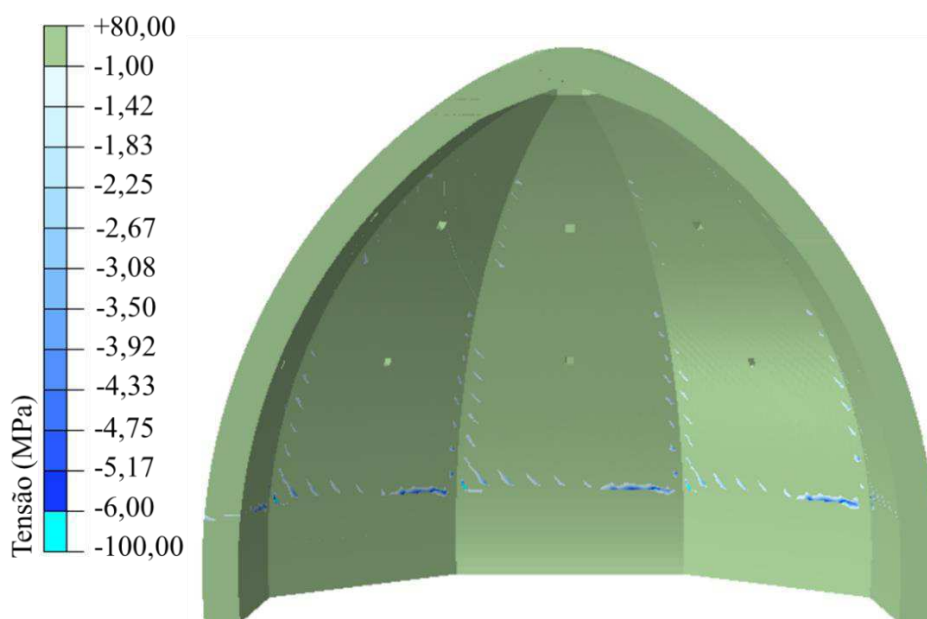
Verificando a parte mediana das *vele* (ponto 2), localizada entre os dois *occhi*, em ambos os modelos da bibliografia Fanelli e Fanelli (2004) (Figura 107-b) e Bartoli et al. (2015), (Figura 107-c) observam-se zonas tracionadas, assim como no Modelo 04 desenvolvido (Figura 107-a). Enquanto os valores de tração do Modelo 04 nessa região encontram-se majoritariamente em um intervalo de valores de 0,00 a +6,25 MPa, conforme detalhado na Figura 108-a, os valores do modelo de Fanelli e Fanelli (2004) variam de 0,00 a +1,25 MPa e de Bartoli et al. (2015), de 0,00 a +0,20 MPa.

Figura 108: (a) Indicação das regiões cujos valores de tensões estão entre 0,00 e +10,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 04; (b) Indicação das regiões cujos valores de tensões estão entre +20,00 e +80,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 04.



Analisando a base das *vele* (ponto 3) aproximadamente na cota 7,00 m, onde tem o contato do assentamento *spinapesce* com a base de blocos de pedra, observam-se algumas sutis regiões de compressão no Modelo 04 (Figura 107-a), assim como no modelo de Fanelli e Fanelli (2004). Esses valores de tensões compressivas no Modelo 04 são detalhadas na Figura 109, onde observa-se que os valores nessa região variam de -1,00 a -6,00 MPa e no modelo de Fanelli e Fanelli (2004), os valores variam de 0,00 a -1,25 MPa. No modelo de Bartoli *et al.* (2015), tais regiões de compressão na base das *vele* não são identificadas.

Figura 109: Indicação das regiões cujos valores de tensões estão entre -1,00 e -6,00 MPa no intradorso da cúpula interna do Modelo 04.



Confrontando os gráficos de tensões nas arestas, nos três modelos da Figura 107, são zonas tracionadas. No Modelo 04 desenvolvido, esses valores de tração variam de +3,00 a +10,00 MPa na maior parte da extensão das arestas (Figura 108-a), possuindo valores superiores à +10,00MPa nas regiões próximas ao encontro do assentamento *spinapesce* com a base de blocos de pedra, como indicado na (Figura 108-b). No modelo de Fanelli e Fanelli (2004), esses valores de tração nas arestas variam de +1,25 MPa a +12,69 MPa, conforme evidenciado na Figura 107-b, e no modelo de Bartoli *et al.* (2015), variam de +0,20 MPa a +0,40 MPa.

Com as numerações inseridas nos três modelos da Figura 107, foi feita a Tabela 8 para facilitar a comparação do intervalo de valores obtidos entre os modelos.

Tabela 8: Intervalo de valores para cada zona de tração e compressão avaliadas nos modelos para validação da cúpula interna.

	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 3	Ponto 4
	Intervalo de Valores (MPa)	Intervalo de Valores (MPa)	Intervalo de Valores (MPa)	Intervalo de Valores (MPa)
Modelo 04	0,00 — -0,33	0,00 — +6,25	-1,00 — -6,00	+3,00 — +10,00
Modelo Fanelli e Fanelli (2004)	0,00 — -1,25	0,00 — +1,25	0,00 — -1,25	+1,25 — +12,69
Modelo Bartoli et al. (2015)	0,00 — -0,93	0,00 — +0,20	0,00 — +0,20	+0,20 — +0,40

Uma outra característica importante para o confronto do Modelo 04, desenvolvido, com os modelos da bibliografia, é que não foram encontradas evidências da maneira como as técnicas construtivas *spinapesce* e *corda blanda* foram consideradas. Como não é possível verificar as zonas de descontinuidades nos encontros da *spinapesce* e da *corda blanda* nos modelos da bibliografia, é provável que os autores tenham definido os fluxos de transmissão de tensões seguindo esses assentamentos de tijolos, no software de análise. Dessa maneira, neste trabalho, preferiu-se fazer a subdivisão do modelo em regiões de transmissão dos esforços em função das técnicas construtivas utilizadas por Brunelleschi, para garantir a proximidade dos resultados com aqueles que atuam na Cúpula, uma vez, que são zonas de concentração de tensões, e, portanto, de grande importância para verificação de zonas susceptíveis à patologias.

Pela análise da Tabela 8, observou-se que as zonas de tração e compressão no intradorso e extradorso do Modelo 04 coincidiram com os da bibliografia, superando o intervalo de valores daqueles indicados na bibliografia, nas extremidades. No entanto, apesar do carregamento da cúpula externa, sistema intermediário de contrafortes e Lanterna terem sido aplicados à cúpula interna do modelo, a maneira como esses elementos deformam também interfere nos resultados de tensão.

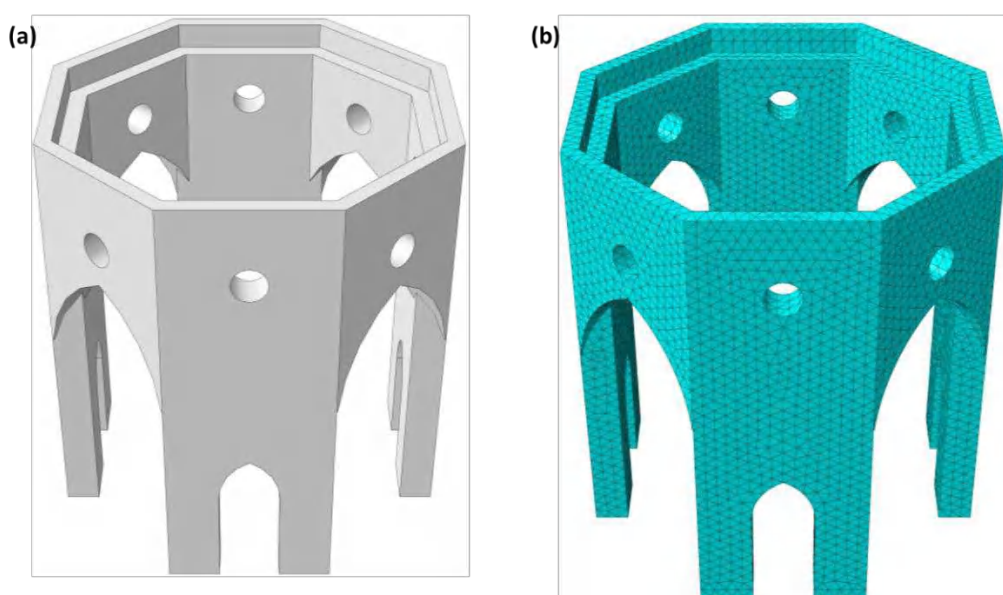
Assim, pode-se afirmar que os valores encontrados são coerentes, e podem ter ultrapassado os valores máximos da bibliografia em função da não inserção do modelo completo da Cúpula (contendo todos os seus elementos), que acarretaria uma análise seria mais detalhada e complexa, principalmente nas arestas, onde o sistema intermediário de contrafortes possivelmente também atua na absorção dos esforços de tração.

5.3.2. Modelo 06: *Tamburo*

A outra validação foi realizada com o confronto do gráfico de distribuição de tensões da estrutura portante da Cúpula, o *Tamburo* e setor de base. Para tal, foi utilizado um único modelo geométrico contendo as duas estruturas, e nas análises a seguir, tal modelo será chamado de Modelo 06 conforme indicado na Figura 110.

Na mesma Figura 110, há a representação do modelo geométrico constituído da malha de elementos finitos, contendo 61.039 elementos tetraédricos.

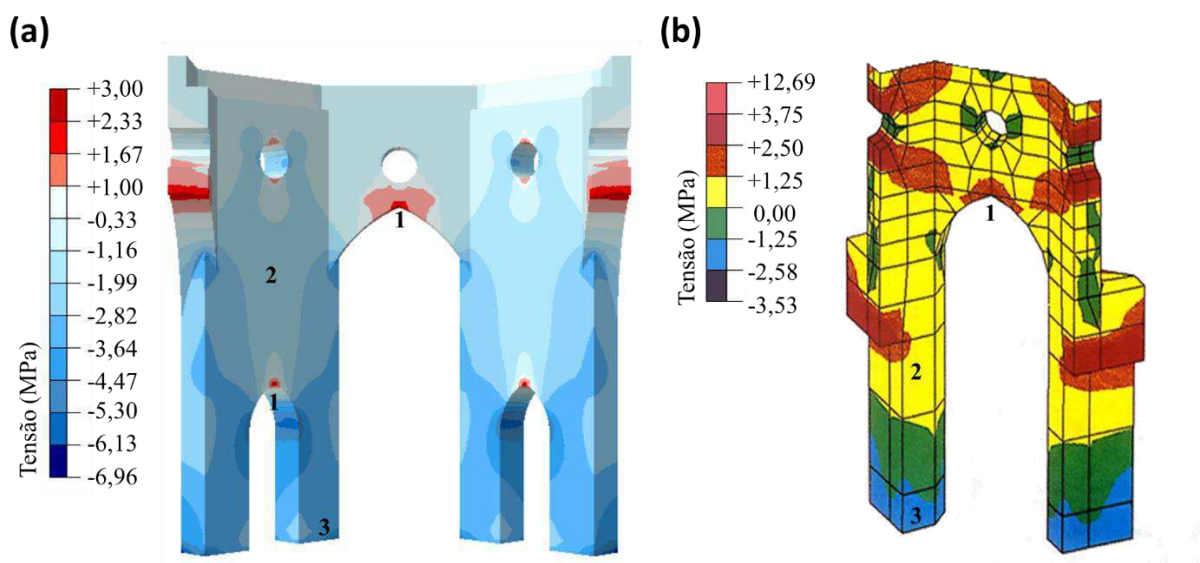
Figura 110: (a) Vista isométrica do Modelo 06; (b) Vista isométrica do Modelo 06 com a malha tetraédrica.



Na Figura 111, são representados o Modelo 06, desenvolvido, e o modelo de Fanelli e Fanelli (2004).

Analisando a Figura 111, observa-se que tanto no modelo de Fanelli e Fanelli (2004) quanto no Modelo 06, há tensões de tração no vértice dos arcos do modelo (ponto 1), que variam de +1,00 a +3,00 MPa no Modelo 06, e de +1,25 a +12,69 MPa no modelo de Fanelli e Fanelli (2004).

Figura 111: (a) Tensões na região interna do *Tamburo* do Modelo 06; (b) Tensões na região interna do *Tamburo* do modelo de Fanelli e Fanelli (2004).

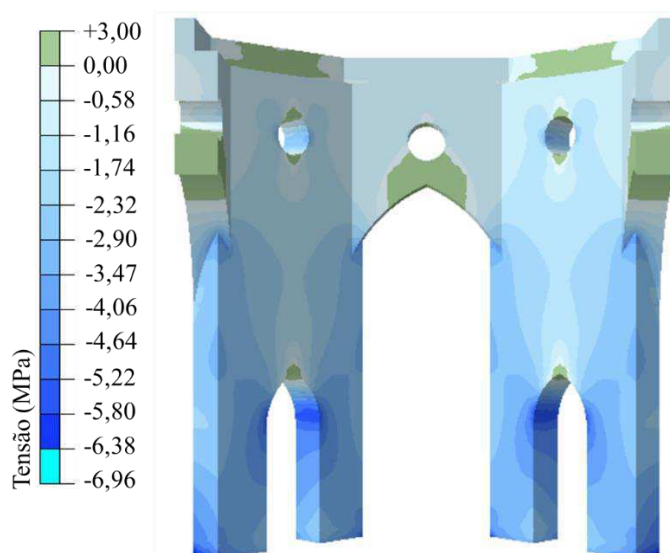


Fonte: (FANELLI e FANELLI, 2004)

No corpo do *Tamburo* (ponto 2), identificam-se tensões de tração de 0,00 a +1,25 MPa no modelo de Fanelli e Fanelli (2004) (Figura 111-a), enquanto no Modelo 06 (Figura 111-b), esses valores são de compressão que variam de 0,00 a -2,90 MPa, como detalhado na Figura 112.

Fazendo uma análise nas regiões próximas à base do *Tamburo* (ponto 3), verifica-se que em ambos os modelos são zonas comprimidas. No modelo de Fanelli e Fanelli (2004), esses valores variam de 0,00 a -3,53 MPa, e no Modelo 06 desenvolvido, esses valores variam de -1,16 a -6,96 MPa.

Figura 112: Indicação das regiões cujos valores de tensões estão entre 0,00 e -6,96 MPa na região interna do *Tamburo* do Modelo 06.



Com as numerações inseridas nos três modelos da Figura 111, foi feita a Tabela 9 para facilitar o confronto do intervalo de valores obtidos entre os modelos.

Tabela 9: Intervalo de valores para cada zona de tração e compressão avaliadas nos modelos para validação do *Tamburo* e setor de base.

	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 3
	Intervalo de Valores (MPa)	Intervalo de Valores (MPa)	Intervalo de Valores (MPa)
Modelo 06	+1,00 — +3,00	0,00 — +1,25	0,00 — -3,53
Modelo Fanelli e Fanelli (2004)	+1,25 — +12,69	0,00 — -2,90	-1,16 — -6,96

Dessa maneira, analisando os dados da Tabela 9, é possível admitir que nas zonas críticas, os valores do Modelo 06 convergem com o modelo da bibliografia, destoando apenas no ponto 2, referente ao corpo do *Tamburo*. No entanto, apesar do carregamento da cúpula interna e demais elementos como cúpula externa, sistema intermediário de contrafortes e Lanterna terem sido considerados no Modelo 06, a maneira como esses elementos deformam também interfere nos resultados de tensão no *Tamburo*. Como foi apenas considerando a pressão desses elementos no Modelo 06, o comportamento do corpo do *Tamburo* de compressão, é coerente.

6. CONCLUSÃO

Avaliando a suntuosidade da Cúpula de Santa Maria del Fiore bem como a maneira como foi construída, o presente trabalho buscou desenvolver um modelo numérico capaz de proporcionar análises de tensões da estrutura frente ao peso próprio. Com o desenvolvimento tridimensional dos elementos da Cúpula de Brunelleschi, foi possível selecionar três elementos portantes para análise. Das análises realizadas na cúpula interna, verificou-se que as técnicas construtivas utilizadas por Brunelleschi foram essenciais para garantir a construção da Cúpula sem a utilização dos escoramentos.

O início do assentamento *spinapesce* na cota 7,00 m garantiu a diminuição principalmente das tensões de tração nos *occhi* das *vele* da cúpula interna (em média 86,71%) e a extensão desses esforços nas arestas da cúpula, em cerca de 7,10 m. Quanto a utilização da base da cúpula interna (0,00 m – 7,00 m) desenvolvida em blocos de pedra, verificou-se também a diminuição da extensão das tensões de tração das arestas da cúpula, em cerca de 4,70 m e uma redução de cerca de 50,00%, em média, dos valores máximos obtidos no Modelo 02 em relação ao Modelo 03, contendo uma base de tijolos.

Avaliando a utilização da técnica da *corda blanda*, verificou-se também que ela reduziu a extensão das tensões de tração nas arestas do modelo em aproximadamente 3,50 m, e garantiu que a cúpula octogonal pudesse ser construída tal qual uma cúpula de rotação.

Comparando o Modelo 04 e o *Tamburo* com a bibliografia, observou-se que as zonas de tração e compressão no intradorso e extradorso dos modelos coincidiram com os da bibliografia, Fanelli e Fanelli (2004) e Bartoli *et al.* (2015), salvo alguns valores indicados nas extremidades dos modelos. No caso da cúpula interna, sugere-se que tais valores devem-se a subdivisão do modelo em elementos que permitiram o fluxo de tensões relativos a *spinapesce* e a *corda blanda* e a análise individual da cúpula interna, que apesar de considerar a sobrecarga dos demais elementos, não foi realizada a análise contendo o sistema intermediário de contrafortes e cúpula externa, e de suas respectivas deformações e desempenhos, por exigir uma análise mais criteriosa e complexa.

Dessa maneira, verifica-se que a Cúpula de Brunelleschi abrange diversas áreas do conhecimento, a saber matemática, arquitetura, engenharia, geometria, análise de materiais de construção e gestão de obras. Como precursor do renascimento florentino, Filippo Brunelleschi estava bem à frente de seu tempo, responsável pelo desenvolvimento de uma magnífica obra da engenharia que mesmo nos dias atuais, é composta de mistérios.

A Cúpula de Brunelleschi permanece erguida por 600 anos depois do início de sua construção, ainda que submetida à diversas intempéries ao longo dos anos, tais como descargas elétricas, sismos e ventanias, cargas dinâmicas que, edifícios atuais, compostos por concreto armado, são constantemente deteriorados e vêm a ruir, mesmo diante de todo avanço científico e tecnológico.

7. PERSPECTIVA DE TRABALHOS FUTUROS

Apesar de terem sido cumpridos os objetivos definidos para este trabalho, existem alguns tópicos que podem ser detalhados em trabalhos futuros, principalmente, porque foi necessário realizar algumas simplificações para essa análise inicial do desempenho das técnicas construtivas utilizadas na Cúpula de Brunelleschi (utilização apenas da cúpula interna), para obtenção de conclusões gerais. Assim, algumas sugestões para estudos futuros são:

- Modelo contendo o assentamento *spinapesce* e a *corda blanda* para a cúpula externa, sistema intermediário de contrafortes e cúpula interna, simultaneamente;
- Análise do *Tamburo* juntamente com a cúpula interna, cúpula externa, sistema intermediário de contrafortes e Lanterna;
- Assentamento *corda blanda* para cada camada de tijolos;
- Influência da *Lanterna* como aduela de fecho;
- Desempenho estrutural das cadeias de arenito e viga de madeira;
- Estudo detalhado considerando coeficientes de segurança para verificação da resistência dos materiais frente às solicitações da Cúpula.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUTOCAD®. AutoDesk®, 2020. Disponível em: <<https://www.autodesk.com.br/education/free-educational-software>>.

AZEVEDO, Á. F. M. **Método dos elementos Finitos**, Porto, 2003.

BARBI, L. et al. **Indagine sperimentale sui materiali costituenti la Cupola di Santa Maria del Fiore**. Università di Firenze- Facoltà di architettura- Atti del Dipartimento di Costruzioni, n. 1, 1986.

BARTOLI, G.; BORRI, C.; BETTI, M. **Numerical Modeling of the Structural Behavior of Brunelleschi's Dome of Santa**. International Journal of Architectural Heritage: Conservation, Analysis, and Restoration, p. 24, April 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/15583058.2013.797038>>.

BELLINI, M. **Il Cupolone di Pippo Brunelleschi – Storia e Segreti**, 04 giugno 2020. Disponível em: <<https://www.italyproguide.com/il-cupolone-di-pippo-brunelleschi-storia-e-segreti/>>.

BONECHI, C. E. **O Livro de Ouro de Florença: Toda a cidade e as suas obras de arte**. Florença: [s.n.], 1996. 127 p.

CAPRETTI, E. **Brunelleschi**. 1ª. ed. Firenze-Milano: Giunti Editore S.p.A., 2003.

CARVALHO, J. D. N. **A Contribuição de Enrijecedores Laterais para o efeito arco na Alvenaria Estrutural**. Programa de Pós-Graduação em engenharia Civil, Florianópolis, p. 284, Março 2007.

CAZZANI, A.; MURA, I.; STOCHINO, F. **Statica per l'edilizia storica: Le cupole in muratura**. Università degli Studi di Cagliari. [S.l.], p. 96. 2013-2014.

CORAZZI, R. **La curva "lossodromica" e la spina pesce**. Geometria, costruzione, architettura, giugno 2012.

CORAZZI, R. **La Cupola del Brunelleschi: il segreto della costruzione**. Firenze: Angelo Pontecorboli, 2013.

CORAZZI, R. **Nel cuore della cupola del brunelleschi**. Disegno per il restauro: olte il rilievo, gennaio 2015.

CORAZZI, R. **La Cupola del Duomo di Firenze: Originalità, proporzione e armonia.** Firenze: Angelo Pontecorboli Editore, 2016.

CORAZZI, R.; CONTI,. **Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze.** Firenze: Angelo Pontecorboli , 2011.

CORAZZI, R.; CONTI, G. **La Cupola di Santa Maria del Fiore raccontata dal suo progettista Filippo Brunelleschi.** Livorno: Sillabe, 2005.

CORAZZI, R.; CONTI, G.; MARINI, S. **Cupola di Santa Maria del Fiore: Tra ipotesi e realtà.** Pitagora Editrice Bologna, 2005.

DASSAULTSYSTEMES®. ABAQUS, 2014.

DASSAULTSYSTEMES®, A. **Solid (continuum) elements**, 2017. Disponível em: <<https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEEXCRefMap/simaexc-c-docproc.htm>>. Acesso em: 29 Junho 2020.

ERCOLE, A. **Modellazione strutturale delle cupole in muratura: Il caso della Chiesa della SS. Trinità di Torino.** Tesi di Laurea Magistrale, Aprile 2019.

FACCIO, P. **Teoria e Tecnica delle Costruzioni Storiche.** Università Iuav di Venezia. [S.l.], p. 54. 2013-2014.

FANELLI, G.; FANELLI, M. **La Cupola del Brunelleschi: Storia e futuro di una grande struttura.** Firenze: Mandragora, 2004.

IPPOLITO, L.; PERONI, C. **La Cupola di Santa Maria del Fiore.** 2ª. ed. Roma: Carocci, 2007.

KING, R. **O Domo de Brunelleschi.** Tradução de S.Duarte. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2013.

LAURO, M. M. **A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura.** Exacta, São Paulo, p. 15, 2005.

MACHADO, L. H. M. **Conheça Florença: Berço do Renascimento.** São Paulo: Editora Nova Alexandria, 2004. 232 p.

MARCY, M. C. D. A. **Metodologia Baseada em Redes Neurais Artificiais para a Detecção de Danos Estruturais.** Tese de Doutorado, Brasília, DF, 2017. 203.

MCCARTHY, M. **The Stones of florence and Venice Observed**. United States of America: Penguin Books, 1956. 281 p.

MONTEIRO, A. M. M. **Análise Estrutural da Cúpula e do Edifício do Panteão Nacional em Lisboa**. Técnico Lisboa. [S.l.], p. 130. 2018.

NUNES, P. C. C. **Teoria do Arco de Alvenaria: Uma Perspectiva Histórica**, Brasília, p. 176, Abril 2009.

PEREIRA, O. J. B. A. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos na Análise de Problemas Planos de Elasticidade**. Instituto técnico superior, 2005.

POGGI, C. et al. **Tesori fiorentini del Rinascimento**. Firenze: [s.n.], 1999. 137 p.

POZZA, D. V. **Cúpula da Catedral de Florença: Análise utilizando o Método dos Elementos Finitos**, Porto Alegre, 04 Dezembro 2015.

RICCI, M. **Il genio di Filippo Brunelleschi e la costruzione della Cupola di Santa Maria del Fiore**. Città di Castello: Sillabe, 2014.

SANTOS, M. S. D.; NETO, J. P. **Análise de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos**, 2016.

TALAVERA, L. M. B. **Parábola e catenária: história e aplicação**, São Paulo, 2008.

VAZ, L. E. **Método dos elementos finitos em Análise de Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda, 2011.

WALKER, P. R. **A Disputa que Mudou a Renascença: Como Brunelleschi e Ghiberti marcaram a hist[oria da arte**. Tradução de Maria Alice Máximo. Rio de Janeiro: Record, 2005.