



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Isaac Ferreira de Lima

MODELO DE VON BERTALANFFY E APLICAÇÕES

CUITÉ - PB
2021

ISAAC FERREIRA DE LIMA

MODELO DE VON BERTALANFFY E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientador: Dra Célia Maria Rufino Franco.

CUITÉ - PB

2021

L732m Lima, Isaac Ferreira de.

Modelo de Von Bertalanffy e aplicações. / Isaac Ferreira de Lima. - Cuité, 2021.

52 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2021.

"Orientação: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco".

Referências.

1. Equações diferenciais. 2. Von Beatalanffy - modelo. 3. Modelagem matemática. 4. Matemática aplicada. I. Franco, Célia Maria Rufino. II. Título.

CDU 514.745.8(043)

ISAAC FERREIRA DE LIMA

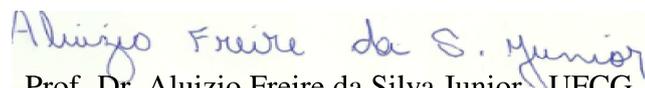
MODELO DE VON BERTALANFFY E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 13 de Outubro de 2021.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dra. Célia Maria Rufino Franco - UFCG
Orientadora


Prof. Dr. Aluizio Freire da Silva Junior - UFCG
Examinador


Prof. Dr. Luciano Martins Barros - UFCG
Examinador

Este trabalho é dedicado aos meus pais,
Joelma e José Iveraldo, por todo amor, carinho e apoio.
Aos meus avós e demais parentes.
Aos meus professores que foram fonte de inspiração e motivação.

AGRADECIMENTOS

Inicio a gradecendo a todos que de alguma maneira ajudou para que hoje eu estivesse escrevendo este TCC, seja eles colegas, amigos, professores ou familiares.

Aos meus pais José Ivanaldo e Joelma, por sempre apoiarem seu filho nesta jornada dos estudos, este apoio foi fundamental para minha chegada até este momento. Ao meu irmão Isafas, por inúmeras vezes e de diversas formas sempre me ajudar. Aos meus avós maternos, Zé Idalino e inácia, que em toda minha vida até o presente momento acreditaram em mim, sempre desejaram o melhor pra mim e permanentemente acreditaram que eu teria um futuro brilhante, e aqui encontro-me sendo o primeiro da família com ensino superior. A minha avó paterna, Carma, quem sempre acreditou e desejou sucesso para minha vida, infelizmente meu avô parteno, Ezequias (in memoriam), que infelizmente não cheguei a conhecer. Aos meus tios(as) por parte de mãe ou de pai, nos quais sempre, torceram pelas minhas vitórias. Agradeço ao meu amorzinho Rafela, que sempre me deu forças nessa jornada, compreensiva e sempre me apoiou.

A professora Célia Maria, que desde o período em que cursei a disciplina de E.D.O. com ela me convidou para eu ser orientando de iniciação científica, que foi uma mãe acadêmica para mim, sempre teve paciência, atenção, na qual ela foi uma das pessoas fundamentais para que essa monografia pudesse ser realizada. A professora Célia é uma pessoa magnífica, educada, compreensiva, dedicada no que faz, atenciosa, agradeço bastante, por todas as contribuições dela, não apenas como professora, orientadora, mas conselhos como uma amiga, na qual lembrarei e serei eternamente grato por tudo.

Aos demais professores do CES que são super acolhedores e atenciosos(pelo menos a maioria) sempre estão dispostos a ajudar seus alunos, em especial aos professores da Matemática, de maneira geral destaco os professores mais especiais do CES na minha concepção: Luciano com seu jeito acolhedor que entusiasma e motiva qualquer um; Aluísio atencioso, responsável, sempre disposto a atender os alunos e fácil de tirar um sorriso; Marciel o professor de muitas universidades e ainda empresário; Jaqueline, Marcela e Fabíola, está infelizmente não faz mais parte do CES, mas são professoras maravilhosas um doce de pessoa; Jorge quem não conhece acha que é bravo, mas na verdade é um amor de pessoa, quando pega amizade é brincalhão, mas sabe dividir a brincadeira e a sala de aula; Vera (Verinha) com seu jeitinho doce de ser; Aluska com seu jeitinho doce e carismático; Ramilton impossível não se encantar com suas aulas e atenção especial que ele dá a cada aluno; Maria de Jesus tímida e na dela e altamente responsável; Glageane a professora simpática e risonha; Célia todas as características que citei no agradecimentos a ela, além de ser um amor de pessoa, simplesmente fantástica. Mas independente

Aos meus amigos que ganhei de Cuité em especial Hilbert e Elisângela. Aos meus

colegas de turma, Carla, Ismael, Joedson, Lucimara, Marcos Sérgio. Aos amigos que passavam o dia no laboratório de matemática estudando enquanto não tinha aula, especialmente a Anailde e Maria da Paz, elas que ajudaram muito durante o curso e neste trabalho na parte normas da ABNT; Natália; Allane; André; Anderson; Leandro; Marcos vagner; Willian; Mônica; Thiago; Eduardo além de primo é colega de curso, sofremos juntos e se ajudemos na escrita do TCC; Jacilene; Ivo; Joyce; Eduarda; Thays; Nathan; Edilza; João Elder; Igor; João Batista; Joelia; Júnior; Ygor magrinho. E não poderia faltar as boas influencias da Física, que no final do curso passei a conviver mais com eles do que os da Matemática, especialmente Luís, Damião e Nallyson, eles ajudaram bastante entre digitação e correção deste TCC; Adelmo; Reinaldo; Ronayde; Hugo; Pablo; Anny; Mariza; Laedson; Rafael; Ysak; Randson. Aos amigos que conheci no grupo de pesquisa, Ismael Araújo, Marcone, Prof. Jair, Prof. Aluísio, Profa. Vera, Profa. Célia, Jéssila, Helymrckson, André, Geovane, as meninas do mestrado Ruth e Tereza, que também fazia parte do grupo de pesquisa.

A UFCG e seus funcionários, em especial os do CES, seja eles técnicos, terceirizados, parte administrativa ou professores. O carinho humano que cada um funcionário desse campus tem tornava nossos dias de estudos menos, aquele "boa tarde", "tudo bem" ou "como vai" faz toda diferença.

Por fim agradeço a CAPES, CNPQ e PRAC (PAEG), que concederam respectivamente bolsas de residencia pedagógica, iniciação científica e auxilio, estas bolsas foram fundamentais para minha chegada nessa etapa do curso.

*“ A Matemática da vida não é saber contar $1 + 2$.
É sim saber que um simples erro do cálculo
pode levar a sérias consequências ”
(Vanessa Ribas Gonçalves)*

RESUMO

Cada vez mais a Matemática se faz presente e necessária em nosso cotidiano. Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre equações diferenciais, com particular referência ao modelo de Von Bertalanffy. Esse trabalho tem como objetivo de encontrar uma equação que melhor descreva os dados experimentais do peso da galinha caipira criada ao ar livre (sem ser em confinamento). A metodologia consiste na parte experimental, em que foi possível coletar os dados (peso da galinha), e na parte teórica, na qual utilizou-se o modelo de Von Bertalanffy generalizado para descrever os dados experimentais peso-idade e calcular os valores dos parâmetros existentes no modelo. Foi discutido qual o melhor momento para se fazer o abate da ave para que o produtor rural possa reduzir gastos e ampliar seus lucros. Com este trabalho foi possível avaliar o processo do crescimento em peso da ave e estimar até que momento é rentável manter a galinha viva.

Palavras-chave: Matemática aplicada. Modelagem Matemática. Equações Diferenciais.

ABSTRACT

At every moment, Mathematics becomes more present and necessary in our daily lives. In this work, a study on Differential Equations was carried out, emphatically on the Von Bertalanffy's model. This research aims to find an equation that more effectively describes the experimental data of this study, referring to the weight of free range chickens raised outdoors (in non-confinement). The methodology consists of the experimental part, of data collection (chicken's weight), and the theoretical part, in which the generalized Von Bertalanffy's model was used to describe the weight-age experimental data, calculate the values of the parameters existing in the model. In this sense, it was possible to discuss the best time to slaughter the bird so that the rural producer can reduce expenses and increase their profits. Thus, with this work, it was possible to evaluate the bird's growth process in terms of its weight and thus estimate how far it is profitable to keep the chicken alive.

Keywords: Applied Mathematics. Mathematical Modeling. Differential Equations.

SUMÁRIO

Introdução	11
1 Uma Introdução às Equações Diferenciais	13
1.1 Classificação de Equações diferenciais e Exemplos	13
1.2 Solução de Uma Equação Diferencial Ordinária	16
1.3 Problema de Valor Inicial	17
1.4 Existência e Unicidade	19
1.5 Equação Linear de Primeira Ordem	20
1.6 Variáveis separáveis	23
1.7 Equação Linear de Segunda Ordem	25
1.7.1 Equações homogêneas com coeficientes constantes	27
1.7.2 Equações Não-Homogênea	29
1.7.3 Método dos Coeficientes Indeterminados	30
1.8 Equação de Bernoulli	31
2 A modelagem Matemática e o Modelo de Von Bertalanffy	33
2.1 Modelagem Matemática	33
2.2 Modelo de Von Bertalanffy aplicado para peixes	36
3 Modelo generalizado e aplicação no crescimento em peso de galinha caipira	41
3.1 Modelo de Von Bertalanffy generalizado	42
3.2 Aplicação do Modelo para o Crescimento em Peso da Galinha Caipira	45
3.2.1 Avaliação do peso máximo p_∞	45
3.2.2 Estimação do parâmetro de alometria γ	46
3.3 Simulação Numérica e análise do modelo matemático	47
4 Conclusão	51
4.1 sugestões para pesquisas futuras	51
Referências	52

INTRODUÇÃO

A Matemática é mais do que uma ciência que trabalha com números, pois ela está presente em diversos momentos do cotidiano. Desde uma simples compra no supermercado, até uma receita de medicamento fornecida por um médico, há a existência de Matemática. Há muito tempo, o ser humano emprega a Matemática para simplificar sua vida e estruturar a sociedade.

A Matemática e sua história se deve por muitos gênios. Muitas invenções e revoluções foram realizadas com ferramentas dessa ciência, como por exemplo, o desenvolvimento e aprimoramento da agricultura. A compreensão dos ciclos naturais possibilitou estudiosos do passado a criar cronogramas precisos de plantio e colheita no momento certo, prever dados estatísticos, nas criações de caprinos, bovinos e algumas aves, entre outros, para o consumo humano, sendo possível prever o melhor momento para a realização do abate, levando em consideração variáveis como o peso e tempo. Com o desenvolvimento dos modelos matemáticos, foi possível fazer previsões do crescimento em peso de um animal em função da sua idade e, portanto, auxiliar na escolha do melhor método de exploração de uma determinada espécie.

Neste contexto, as equações diferenciais tem grande importância na formulação de modelos matemáticos, no qual podemos aplicar a outros domínios. Até certo tempo, a maior parte das aplicações matemáticas era voltada para Ciências Físicas e engenharia. No entanto, há um leque de opções muito maior onde podemos aplicar a matemática, desde as Ciências biológicas até as humanas e sociais. Outro ramo da matemática bem útil no cotidiano é a modelagem matemática de maneira simples e prática para explicar, descrever ou compreender um fenômeno natural.

Geralmente, estudam-se curvas de crescimento por meio do ajuste de funções não-lineares, que possibilitam sintetizar informações de todo o período de vida dos animais. Neste trabalho, será realizado um estudo do modelo de Von Bertalanffy, que trata-se de uma equação não linear que pode ser identificada com uma equação de Bernoulli. Como aplicação do modelo, apresentamos o estudo, desenvolvido por Bassanezi (2006), para descrever o peso por idade do peixe. Além disso, o modelo de Von Bertalanffy generalizado foi adaptado para descrever a curva de crescimento para galinha caipira.

A produção de galinha caipira (frango colonial) no Brasil, está relacionada com a avicultura familiar, contando, para esse fim, com recursos financeiros limitados e recursos naturais existentes na própria propriedade (OLIVEIRA et al., 2019). A galinha caipira é criada de forma livre e sua alimentação inclui grãos, hortaliças, frutas, tubérculos e sementes. Desta forma, difere da criação em confinamento de frango de corte, sendo de crescimento lento com carne mais escura e firme, com sabor acentuado e menos gordura (Figueiredo et al, 2001).

Para tanto, apresenta-se o seguinte objetivo da pesquisa que é estudar o modelo de Von Bertalanffy para descrever o peso da galinha em relação ao tempo, estudar onde as taxas de crescimento de peso são maiores ou menores e estimar o melhor momento para fazer o abate. A modelagem matemática nessa situação é um método utilizado para reduzir gastos desnecessários e otimizar o lucro do produtor.

Esse estudo, trata-se de uma pesquisa quantitativa utilizando uma metodologia baseada em números, métricas e cálculos matemáticos para se obter os resultados previsto na pesquisa. Segundo Knechtel (2014), a pesquisa quantitativa é situada sobre um problema humano ou social, com base no teste de uma teoria e composta por variáveis quantificadas em números, que são analisadas de modo estatístico, com o objetivo de determinar se as generalizações previstas na teoria de confirmação ou não.

No capítulo 1, apresenta-se uma introdução sobre as equações diferenciais, classificação, definição, métodos de solução e exemplos.

Para o capítulo 2, será realizada uma abordagem sobre a modelagem matemática e o modelo de Von Bertalanffy para descrever a curva de crescimento do peixe.

No capítulo 3, apresenta-se o modelo generalizado de Von Bertalanffy e aplicação para galinhas caipira, onde foi desenvolvido um experimento com frangos para validação do modelo.

1 UMA INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste capítulo, será abordado uma introdução sobre as equações diferenciais, classificação, definição, métodos de solução e exemplos.

1.1 Classificação de Equações diferenciais e Exemplos

Antes de começarmos o estudo deste capítulo vale ressaltar que as principais classificações existente no ramo das equações diferenciais é a de distinguir se trata-se de **Equações Diferenciais Ordinárias** das **Equações Diferenciais Parciais**. Esta é uma classificação de grande relevância no estudo das equações diferenciais, por serem bastantes distintas as maneiras para resolver ambas equações. Basicamente baseiam-se em identificar se a função desconhecida depende de uma única variável independente ou de diversas (duas ou mais) variáveis independentes.

Definição 1.1 *Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial (ED)**.*

Se uma equação contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependente em relação a uma única variável independente, ela será chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)**.

Por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} = e^x, \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad e \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \quad (1.1)$$

são exemplos de equações diferenciais ordinárias. Se uma equação envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**.

Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2)$$

são exemplos de equações diferenciais parciais.

Apesar deste trabalho ter foco em EDOs, sempre que for possível explicar um pouco sobre as EDPs também será mencionada ou comparada com as EDOs. Por este trabalho abordar muito sobre as equação diferenciais, a notação utilizada para escrita das equações ordinárias

ao decorrer deste texto será a **notação de Leibniz** dy/dx , d^2y/dx^2 , d^3y/dx^3 , d^4y/dx^4 , (...) ou também a **notação de linha** y' , y'' , y''' , y'''' , (...) Para exemplificar esta notação de linha, podemos reescrever duas equações dadas em (1.1), $y'' - y' + 6y = 0$ e $y' + 5y = e^x$. Geralmente esta notação de linha é utilizada para denotar até as derivadas de grau 3. A 4ª derivada pode ser escrita da forma y^4 , no lugar de y'''' . Mas de forma geral, n -ésima derivada é escrita da seguinte maneira $d^n y/dx^n$ ou $y^{(n)}$. A notação de Leibniz pode ser menos conveniente, mas ela tem vantagens sobre a notação de linha, por deixar de forma clara quem são as variáveis dependente e independente. Da para compreender essa noção quando se tem em uma equação com mais de uma variável independente, pois com a notação de linha fica complicado ou até impossível distinguir cada uma das derivadas. Não será utilizada, a **notação de ponto de Newton** (geralmente conhecida como notação **sujeira de mosca**), esta notação é muito utilizada nas áreas da Física e da Engenharia para denotar as derivadas em relação ao tempo. Por exemplo, a equação diferencial $d^2s/dt^2 = 2$ pode ser escrita como $\ddot{s} = 2$. Para finalizar essas notações, derivadas parciais são muito denotadas por **notação em subscripto** na qual indica as variáveis independentes. Por exemplo a equação diferencial $\partial^2 u/\partial x^2 = \partial^2 u/\partial t^2 - 2\partial u/\partial t$ pode ser reescrita da seguinte maneira: $u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$.

Classificação por Ordem: A ordem de uma equação diferencial (EDP ou EDO) é dado pela derivada de ordem maior da equação. Por exemplo,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \quad (1.3)$$

é uma equação diferencial de ordem 2. O primeiro termo da equação é uma derivada de ordem 2 e o termo que está entre parêntese é uma derivada de ordem 1, logo a ordem desta equação é 2. É muito comum no começo da disciplina de Equações Diferenciais Ordinária o aluno classificar essa equação (1.3) como sendo de ordem 3, pelo fato do termo entre parênteses está elevado a uma potência de 3, mas tem-se que entender que uma derivada elevado a uma certa potência não interfere na ordem da mesma. Pelo lado da simbologia, pode-se representar uma equação diferencial ordinária de ordem n em uma variável dependente da seguinte forma.

$$F[t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t), \dots, u^{(n)}(t)] = 0 \quad (1.4)$$

A equação (1.4) representa uma relação entre uma variável independente t e os valores da função u e suas n primeiras derivadas, u' , u'' , u''' , ..., $u^{(n)}$. É vantajoso, e ao mesmo tempo usual, substituir $u(t)$ por y e $u'(t)$, $u''(t)$, $u'''(t)$, ..., $u^{(n)}(t)$ por y' , y'' , y''' , ..., $y^{(n)}$. Desta forma a equação (1.4) fica da seguinte maneira,

$$F(t, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.5)$$

Por exemplo,

$$y''' + e^t y'' + y y' = t^3 \quad (1.6)$$

é uma equação diferencial de terceira ordem para $y = u(t)$. Em algumas ocasiões, outras letras podem ser utilizadas no lugar de t e y para representar as variáveis independente e dependente; na qual o que cada uma está representando deve ficar claro no contexto.

Supondo que é possível resolver uma equação diferencial ordinária dada para a maior derivada, obtendo

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.7)$$

Iremos considerar apenas equações da forma (1.7). A razão disto é evitar ambiguidades que possa surgir e atrapalhar a compreensão, já que uma única equação da forma (1.5) pode corresponder a diversas equações da forma (1.7). Vejamos um exemplo, a equação

$$(y')^2 + ty' + 4y = 0 \quad (1.8)$$

leva a duas equações,

$$y' = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 16y}}{2} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 16y}}{2}. \quad (1.9)$$

Classificação quanto a linearidade: Uma outra classificação das equações diferenciais é se elas são lineares ou não. A equação diferencial

$$F(t, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.10)$$

é chamada de **linear** se F for uma função linear de variáveis $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Uma definição semelhante é utilizada para as equações diferenciais parciais. Isto significa que uma EDO de n -ésima ordem é linear quando (1.7) for $a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y - g(t) = 0$ ou

$$a_0(t)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{dy}{dx} + a_n(t)y = g(t). \quad (1.11)$$

Por exemplo,

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5} \quad (1.12)$$

$$\frac{dp}{dt} = rp \quad (1.13)$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t) \quad (1.14)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (1.15)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

são equações diferenciais lineares, nas quais as Eq. (1.12)(descreve um objeto em queda), (1.13)(descreve uma certa população) e (1.14)(aplicações de circuitos elétricos) são equações diferenciais ordinárias, já as Eq. (1.15)(equação do calor) e (1.16)(equação da onda) são equações

diferenciais parciais. Uma equação que não se encaixa no formato da expressão (1.11) é uma equação **não-linear**. Veja o exemplo da eq. (1.6) trata-se de uma equação não-linear por conta da expressão yy' . Funções não-lineares da variável dependente ou de suas derivadas, como $\sin y$ ou e^y , não podem aparecer em uma equação linear. Vejamos alguns exemplos,

$$(1 - y)y' + 2y = e^x \quad (1.17)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0 \quad (1.19)$$

todos estes três últimos exemplos são casos de equações diferenciais ordinárias não-lineares. Agora vejamos por qual motivo cada equação não é linear: Eq.(1.17), não é linear por causa da expressão " $(1 - y)y'$ " pois o coeficiente dependente de y está multiplicando y' ; Eq. (1.18), não é linear por conta da expressão " $\sin y$ ", pois $\sin y$ é uma função não linear de y ; Eq. (1.19), não é linear por conta da expressão " y^2 ", pois o termo y^2 tem uma potência diferente de 1.

1.2 Solução de Uma Equação Diferencial Ordinária

Definição 1.2 Solução de uma EDO

Toda função ϕ , definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I , as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem n reproduzem a equação a uma identidade, é denominada uma **solução** da equação diferencial no intervalo.

De modo mais prático, uma solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n (1.7) é uma função ϕ que tem pelo menos n derivadas na qual

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) = 0 \quad (1.20)$$

para todo t em I . Dizemos que ϕ satisfaz a equação diferencial em I . Para nossos propósitos, vamos supor também que uma solução ϕ seja uma função de valores reais.

Intervalo de Definição Se você pensa em solução de uma equação diferencial ordinária consequentemente pensa em um intervalo. O intervalo I mencionado na definição 1.2 é conhecido por **intervalo de definição**, **intervalo de existência**, **intervalo de validade** ou **domínio** da solução e pode ser um intervalo aberto (a, b) , um intervalo fechado $[a, b]$, um intervalo de infinito (a, ∞) , assim por diante.

EXEMPLO 1: verifique se a função indicada é uma solução da equação diferencial dada no intervalo $(-\infty, \infty)$.

(i) $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}; y = \frac{1}{16}x^4$

$$(ii) \quad y'' - 2y' + y = 0 ; y = xe^x$$

Solução: Para verificar se a função dada trata-se de uma solução basta observar após substituir, se ambos lados da equação são iguais para cada x no intervalo dado.

(i) temos,

do lado esquerdo iremos ter a seguinte expressão: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}(4 \cdot x^3) = \frac{1}{4}x^3$ e do lado direito teremos a expressão: $xy^2 = x \cdot \left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2} = x \cdot \left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3$. Logo podemos perceber que ambos os lados são iguais para cada valor real de x . Então realmente $y = \frac{1}{16}x^4$ é solução da equação $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$.

Observação: Veja que $y^{1/2} = \frac{1}{4}x^2$, é a raiz quadrada não negativa de $\frac{1}{16}x^4$.

(ii) temos,

As derivadas de y são: $y'' = xe^x + 2e^x$ e $y' = xe^x + e^x$, daí temos que para cada número real de x . Do lado esquerdo iremos ter a seguinte expressão: $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$ e do lado direito teremos: 0. Logo vemos que ambos os lados são iguais, então temos que $y = xe^x$ realmente é solução da equação $y'' - 2y' + y = 0$.

1.3 Problema de Valor Inicial

É denominado Problema de Valor Inicial (PVI) uma equação diferencial que satisfaz algumas condições iniciais. Vejamos alguns casos a seguir.

(i) **PVI de Primeira Ordem**

Resolver: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

sujeita a: $y(x_0) = y_0$

(ii) **PVI de Segunda Ordem**

Resolver: $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$

sujeita a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$

(iii) **PVI de Ordem n**

Resolver: $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

sujeita a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

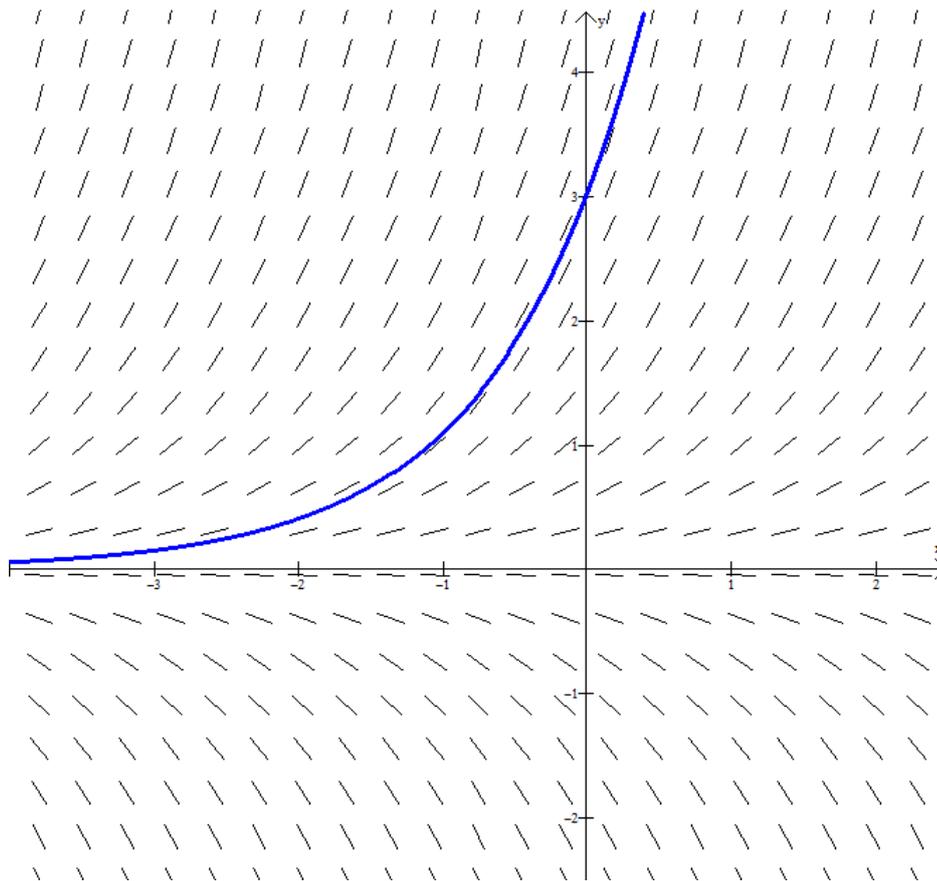
EXEMPLO 1: (PVI de 1ª ordem) Encontre a solução da equação (1.21)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad (1.21)$$

Solução:

$$y(x) = C.e^x \quad C = \pm e^c$$

Figura 1 – Solução do PVI de 1ª ordem(C = 3)



Fonte: Autoria própria

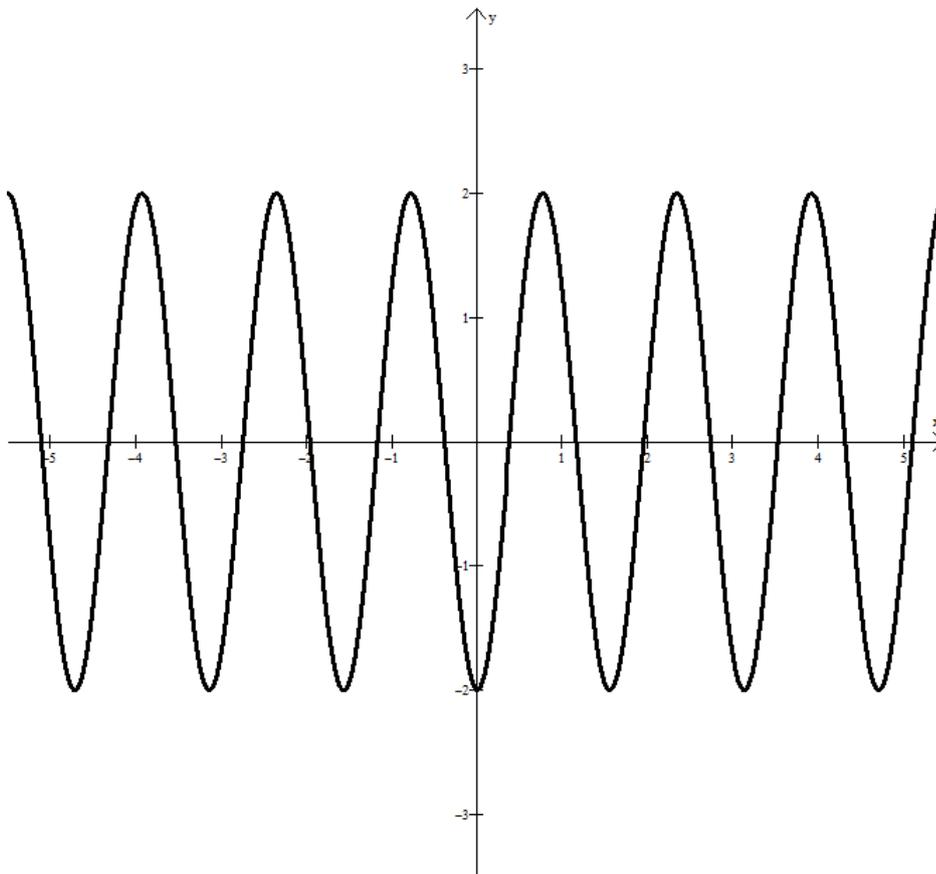
EXEMPLO 2: PVI de 2ª ordem Ache uma solução do problema de valor inicial da equação (1.21).

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad (1.22)$$

Solução:

$$y(x) = -2\cos(4x) + \frac{1}{4}\sin(4x)$$

Figura 2 – Solução do PVI de 2ª ordem



Fonte: Autoria própria

1.4 Existência e Unicidade

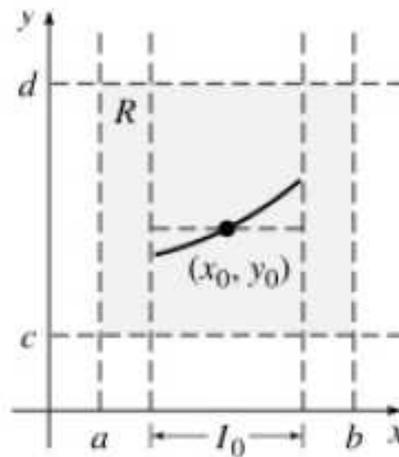
Dois questionamentos devemos fazer sobre um problema de valor inicial é:

- (i) A solução deste problema realmente existe ?
- (ii) Caso exista, ela é única ?

Teorema 1.4.1 *Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contém o ponto (x_0, y_0) . Se $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são contínuas em R , existe algum intervalo $I_0 : x_0 - h < x < x_0 + h$, $h > 0$, contido em $a \leq x \leq b$, e uma única função $y(x)$, definida em I_0 , que é uma solução do problema de valor inicial (item (i) da seção 1.3).*

O resultado precedente é um dos teoremas de existência e unicidade mais populares de equações lineares de primeira ordem, pois os critérios de continuidade de $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são relativamente fáceis de serem verificados. A representação gráfica do Teorema 1.4.1 está ilustrada na figura 3.

Figura 3 – Região R retangular



Fonte: ZILL, 2003

1.5 Equação Linear de Primeira Ordem

Vejam agora as equações diferenciais lineares de primeira ordem. Vale recordar da seção 1.1 deste mesmo capítulo que uma equação diferencial é linear quando é de primeiro grau na variável dependente e em todas suas derivadas. Quando a equação (1.11) da seção 1.1 ocorre o caso $n = 1$, temos uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Uma equação diferencial de primeira ordem é uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.23)$$

na qual f trata-se de uma função das variáveis x e y . Um exemplo bem comum de uma equação linear de primeira ordem é:

$$\frac{dy}{dx} = -ay + b \quad (1.24)$$

onde a e b são constantes dadas.

Definição 1.3 Equação Linear

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.25)$$

é chamada de **equação linear**.

Uma equação linear pode ser dividida em dois tipos: **Homogênea** é quando $g(x) = 0$; **não homogênea** é quando $g(x) \neq 0$.

Forma Padrão: Fazendo a divisão de ambos os lados de (1.25) por $a_1(x) \neq 0$, obtemos a **forma padrão**, de uma equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \quad (1.26)$$

no qual P e f são contínuas em um intervalo I .

A equação (1.24) pode ser resolvida pelo método de integração direta. Desde que, $a \neq 0$ e $y \neq a/b$, podemos reescrever a equação (1.24) da seguinte forma

$$\frac{dy/dx}{y - (b/a)} = -a. \quad (1.27)$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\ln|y - (b/a)| = -ax + C, \quad (1.28)$$

agora aplica-se a função exponencial em ambos lados, disto temos:

$$|y - \frac{b}{a}| = e^{-ax+C}, \quad (1.29)$$

a partir disto resulta na solução geral da equação (1.24):

$$y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax} \quad (1.30)$$

Infelizmente, o método de solução direta tem limitações na qual não possibilita a resolução da equação geral (1.26), então para este tipo de equação é utilizando um outro método. O método que será utilizado a seguir, existe graças a Leibniz, este método consiste em multiplicar a equação diferencial (1.26) por uma função $\mu(x)$, escolhida afim de obter uma equação que seja facilmente integrável. Esta função $\mu(x)$ é chamada de **fator integrante**.

Multiplicando ambos os lados da equação (1.26) por $\mu(x)$, obtemos:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)f(x) \quad (1.31)$$

Observe a expressão a esquerda da igualdade existente na equação (1.31), note que $\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \frac{d}{dx}(\mu(x)y)$, disto percebe-se que é a derivada de $\mu(x)y$, se:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)) = \mu(x)p(x) \quad (1.32)$$

Supondo que $\mu(x) > 0$, então temos:

$$\frac{d(\mu(x))/dx}{\mu(x)} = p(x) \quad (1.33)$$

Integrando (1.33), chegamos a seguinte expressão:

$$\ln \mu(x) = \int p(x)dx + c. \quad (1.34)$$

se $c = 0$, então:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \quad (1.35)$$

Descobrimos a expressão que determina nosso $\mu(x)$, vamos voltar a nossa equação (1.32), temos que:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)f(x), \quad (1.36)$$

integrando ambos os lados da expressão (1.36), obtemos:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)f(x)dx + c, \quad (1.37)$$

onde c é uma constante arbitrária de integração.

Quando a integral da equação (1.37) não pode ser calculada em termos de funções elementares, então a solução é dada da seguinte maneira:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int_{x_0}^x \mu(x)f(x)dx + c \right], \quad (1.38)$$

onde x_0 na expressão (1.38) é um limite de integração conveniente.

Exemplo 3: Resolva o problema de valor inicial a seguir

$$\begin{cases} 2\frac{dy}{dx} + y = e^{x/3} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1.39)$$

Antes de começar, vamos dividir a equação (1.39) por 2 para que a mesma fique na forma padrão, assim obtemos:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} = \frac{e^{x/3}}{2} \quad (1.40)$$

Daí, temos a equação da forma padrão (1.26), onde $p(x) = 1/2$ e $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/3}$. Então podemos encontrar o fator integrante que é:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{2}dx} = c \cdot e^{x/2} = e^{x/2}, \quad \text{para } c = 1 \quad (1.41)$$

Agora multiplicando a expressão $\mu(x)$ pela equação (1.40) obtemos:

$$\begin{aligned} (e^{x/2})y' + (e^{x/2})\frac{1}{2}y &= \frac{1}{2}(e^{x/2})e^{x/3} \\ \frac{d}{dx}(e^{x/2}y) &= \frac{1}{2}e^{(\frac{x}{2} + \frac{x}{3})} \\ \frac{d}{dx}(e^{x/2}y) &= \frac{1}{2}e^{5x/6} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Integrando a expressão da equação (1.42) obtemos:

$$ye^{x/2} = \int \frac{1}{2}e^{5x/6}dx$$

$$y = \frac{1}{e^{5x/6}} \left[\frac{16}{25} e^{5x/6} + c \right]$$

$$y = \frac{3}{5} e^{2x/6} + ce^{-x/2}$$

$$y(x) = \frac{3}{5} e^{x/3} + ce^{-x/2} \quad (1.43)$$

Encontramos a solução geral quando chegou-se ao resultado da equação (1.43), agora aplicando a condição inicial vamos encontrar a solução particular:

$$1 = y(0)$$

$$1 = \frac{3}{5} e^{0/3} + ce^{0/2}$$

$$1 = \frac{3}{5} + c \Rightarrow 1 - \frac{3}{5} = c \Rightarrow c = \frac{2}{5}$$

Feito isto fazemos a substituição do valor de c na equação (1.43), assim obtemos a solução particular:

$$y(x) = \frac{3}{5} e^{x/3} + \frac{2}{5} e^{-x/2} \quad (1.44)$$

1.6 Variáveis separáveis

Nesta seção iremos abordar um método de resolução de EDOs de primeira ordem.

Definição 1.4 Equação separável

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

é chamada de separável ou de variáveis separáveis.

Considere a Eq. diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.45)$$

Na seção anterior consideramos equações lineares de 1ª ordem, mas se a Eq. (1.45) for não-linear, não existe um método universalmente aplicável para resolver a equação. Vamos considerar uma subclasse das equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por um processo de integração direta.

Para identificar esta classe de equações, vamos colocar primeiramente, a Eq. (1.45) da seguinte forma

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.46)$$

É sempre possível fazer isso definindo $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$, mas podem existir também, outras maneiras. Neste caso em que M depende apenas de x e N depende apenas de y , a equação anterior fica da seguinte forma

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.47)$$

esta equação anterior é dita **separável**, ou na forma diferencial

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (1.48)$$

Para resolver a Eq. (1.47), basta integrar as funções M e N . Isto é,

$$\int M(x)dx + \int N(y) = 0 \quad (1.49)$$

Suponha que H_1 e H_2 sejam primitivas das funções M e N , respectivamente. Então: $H_1'(x) = M(x)$ e $H_2'(y) = N(y)$, substituindo na equação (1.47), temos:

$$H_1'(x) + H_2'(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

note que:

$$H_2'(y) \frac{dy}{dx} = \frac{dH_2(y)}{dx}$$

Logo, a equação (1.48) pode ser escrita, na forma:

$$H_1'(x) + \frac{d}{dy} H_2(y) = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dy} [H_1(x) + H_2(y)] = 0$$

integrando ambos os lados teremos:

$$H_1(x) + H_2(y) = c \quad (1.50)$$

onde C é uma constante arbitrária, na qual pode ser encontrada fazendo $x = x_0$ e $y = y_0$, teremos

$$H_1(x_0) + H_2(y_0) = c$$

substituindo o valor de c em (1.50), iremos obter:

$$[H_1(x) - H_1(x_0)] + [H_2(y) - H_2(y_0)] = 0$$

Para melhor entender as equações separáveis iremos ver alguns exemplos a seguir,

$$\frac{dy}{dx} = y^2 x e^{3x+4y} \quad (1.51)$$

$$\frac{dy}{dx} = y + \operatorname{sen} x \quad (1.52)$$

As equações são, separável e não separável, respectivamente. Na primeira equação (1.51) podemos fatorar $f(x, y) = y^2 x e^{3x+4y}$ como

$$f(x, y) = y^2 x e^{3x+4y} = (x e^{3x})(y^2 e^{4y}),$$

na qual pode-se ter $M(x) = x e^{3x}$ e $N(y) = y^2 e^{4y}$. Mas na equação (1.52), não é possível fazer o mesmo ou seja não há como expressar $y + \operatorname{sen} x$ como um produto de função de x por uma função de y .

Exemplo 4: Mostre que a Eq.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{1-3y^2}$$

é separável e encontre uma Equação para suas curvas integrais.

Solução: temos, $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{1-3y^2} \Rightarrow (1-3y^2)dy = 3x^2 dx \Rightarrow -3x^2 + (1-3y^2)dy = 0$ é separável como $M(x) = -3x^2$ e $N(y) = 1-3y^2$.

Integrando a equação temos,

$$\begin{aligned} \int -3x^2 dx + \int (1-3y^2) dy &= 0 \\ \Rightarrow -x^3 + y - y^3 &= c \end{aligned}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Considerando o caso em que $y(10) = 0$, então:

$$\begin{aligned} -10^3 + 3 \cdot 0 - 0^3 &= c \\ -10^3 = c &\Rightarrow c = -10^3 \end{aligned}$$

logo, $-x^3 + y - 3y^3 = -10^3$

1.7 Equação Linear de Segunda Ordem

Uma equação diferencial de segunda ordem é dada da seguinte maneira

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1.53)$$

onde f é uma função dada.

A equação (1.53) é dita uma equação diferencial **linear** se a função f tem a forma a seguir:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y, \quad (1.54)$$

ou seja, se f é linear em y e y' . Na equação (1.54) g , p e q são funções especificadas da variável independente x , mas não dependente de y . Neste caso, podemos reescrever a equação (1.53) sendo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (1.55)$$

Nem sempre iremos encontrar a equação da forma (1.55), é bem comum em vez da equação (1.55) encontrarmos, a equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x). \quad (1.56)$$

Se $P(x) \neq 0$, podemos dividir toda a equação (1.56) por $P(x)$, obtendo assim a equação (1.55) com

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} \quad g(x) = \frac{G(x)}{P(x)}. \quad (1.57)$$

Ao se discutir uma equação do tipo (1.55) e tentar resolvê-la deve-se restringir um intervalo em que as funções p , q e g sejam contínuas.

É importante mencionar que a Eq. (1.53) não for do tipo (1.55) ou (1.56), então ela é considerada uma equação **não-linear**.

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é dita **homogênea** se na Eq.(1.55) $g(x) = 0$. Se $g(x) \neq 0$, então pode-se dizer que a Eq.(1.55) é **não-homogênea**. Estas classificações básicas são de suma importância nas equações lineares de 2ª ordem para escolha do método que possa solucionar a equação diferencial.

Em casos em que equações do tipo das (1.53), (1.55) ou (1.56) que seja acompanhada de um par de condições $y(x) = y_0$ e $y'(x) = y_1$, onde y_0 e y_1 são números dados, então temos um PVI de 2ª ordem que foi apresentado no item (ii) da seção (1.3).

Podemos fazer novamente dois questionamentos que foi feito anteriormente na seção (1.4), só que agora em relação ao problema de valor inicial de 2ª ordem:

- (i) A solução deste problema realmente existe ?
- (ii) Caso exista, ela é única ?

Teorema 1.7.1 *Considere o problema de valor inicial*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

$$y(x) = y_0, \quad y'(x) = y_1$$

onde p , q e g são contínuas em um intervalo aberto I . Então, existe exatamente uma solução $y = \phi(x)$ desse problema, e a solução existe em todo o intervalo I .

Teorema 1.7.2 (Princípio da superposição)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1.58)$$

Então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, onde c_1 e c_2 são constantes.

Dependência Linear: As funções f e g são ditas *L.D.* no intervalo I se existem constantes K_1 e k_2 , com uma delas diferente de zero tais que:

$$k_1f(x) + k_2g(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Independência Linear: As funções f e g são ditas *L.I.* no intervalo I se,

$$k_1f(x) + k_2g(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$$

Crítérios para Independência Linear: Se f e g são funções deriváveis em um intervalo aberto I e se

$$\mathbf{W}(f, g)(x_0) = \begin{vmatrix} f(x_0) & g(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) \end{vmatrix} = fg' - gf' \neq 0$$

Para algum $x_0 \in I$, dizemos que f e g são *L.I.* $W(f, g)$ é chamado de **wronskiano** das funções f e g . Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação (1.65) e $W(y_1, y_2) \neq 0$ então dizemos que as funções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 1.7.3 (Teorema de Abel)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

onde, p e q são funções contínuas num intervalo aberto I , então:

$$W(y_1, y_2) = ce^{-\int p(x)dx}$$

1.7.1 Equações homogêneas com coeficientes constantes

Para uma EDO de 2ª ordem ser classificada dessa forma, os termos $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ da equação (1.56) devem ser constantes e $G(x)$ deve ser igual a zero.

Considerando o caso particular da equação diferencial linear de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1.59)$$

onde a , b e c são constantes. Se tentarmos uma solução da forma $y = e^{mx}$, então, após fazer essa substituição a equação (1.59) torna-se:

$$\begin{aligned} a(e^{mx})'' + b(e^{mx})' + c(e^{mx}) &= 0 \\ am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} &= 0 \\ e^{mx}(am^2 + bm + c) &= 0. \end{aligned}$$

Uma vez que e^{mx} não se anula para valores reais de x , logo essa função exponencial irá satisfazer a EDO (1.59) se e somente se m for escolhido como uma raiz da equação quadrática.

$$am^2 + bm + c = 0. \quad (1.60)$$

A equação (1.60) é chamada de **equação auxiliar** da equação diferencial (1.59) e alguns autores chamam de equação característica. Uma vez que as duas raízes de (1.60) são $m_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ e $m_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$, então teremos três formas da solução geral de (1.59), na qual cada uma corresponde a um dos três casos:

- m_1 e m_2 são reais e distintas ($b^2 - 4ac > 0$),
- m_1 e m_2 são reais e iguais ($b^2 - 4ac = 0$) e
- m_1 e m_2 são números complexos ($b^2 - 4ac < 0$)

Caso I: Raízes Reais e Distintas Sob a hipótese de que a equação (1.60) tenha duas raízes distintas, m_1 e m_2 , teremos duas soluções $y_1 = e^{m_1x}$ e $y_2 = e^{m_2x}$. Vemos que essas funções são linearmente independente em $(-\infty, \infty)$ e, portanto, forma um conjunto fundamental. Segue então que a solução geral de (1.60) neste intervalo é

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}. \quad (1.61)$$

Caso II: Raízes Reais e iguais Quando $m_1 = m_2$, temos necessariamente uma única solução exponencial, $y_1 = e^{m_1x}$. Da fórmula de resolução da equação quadrática obtemos que $m_1 = -b/2a$, já que a única maneira de termos $m_1 = m_2$. Teremos a segunda solução da equação dada pela fórmula a seguir:

$$Y_2 = xe^{m_1x}. \quad (1.62)$$

Então temos que a solução geral é dada pela equação (1.63)

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}. \quad (1.63)$$

Caso III: Raízes Complexas Conjugadas Se m_1 e m_2 forem complexas, logo

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad m_2 = \alpha - i\beta,$$

onde α e $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$. Com a finalidade mais prática de expressar com funções mais reais da solução em vez de exponenciais complexas, consideramos a fórmula de Euler:

$$e^{i\Theta} = \cos \Theta + i \operatorname{sen} \Theta,$$

onde Θ é um número real qualquer. A partir desta fórmula de Euler temos

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x \quad e \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x, \quad (1.64)$$

onde usamos $\cos(-\beta x) = \cos(\beta x)$ e $\sin(-\beta x) = -\operatorname{sen}(\beta x)$. Observe que, primeiro somando e então subtraindo as duas equações de (1.63), iremos obter respectivamente,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2 \cos(\beta x) \quad e \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \operatorname{sen}(\beta x).$$

Sabemos que $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ trata-se de uma solução para qualquer constante c_1 e c_2 , as escolhas $c_1 = c_2 = 1$ e $c_1 = 1, c_2 = -1$ nos dão, respectivamente duas soluções:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad e \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Mas

$$Y_1 = e^{\alpha x} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x} \cos \beta x$$

e

$$Y_2 = e^{\alpha x} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

Logo, por estes dois últimos resultados mostram que $e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ são soluções reais de (1.58). Logo pelo princípio de superposição,

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x). \quad (1.65)$$

1.7.2 Equações Não-Homogênea

Vamos retomar as equações não-homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (1.66)$$

onde p, q e g são funções contínuas em um intervalo aberto I . A equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1.67)$$

onde $g(x) = 0$ e p e q são as mesmas que a Eq. (1.67), é chamada de equação homogênea associada à Eq. (1.66). Uma solução geral de Eq. (1.66) consiste basicamente na soma de uma solução geral $y_h(x)$ da Eq. homogênea como um solução particular da $y_p(x)$ da Eq. (1.66). Ou seja

$$y(x) = y_h + y_p$$

1.7.3 Método dos Coeficientes Indeterminados

O método dos coeficientes indeterminados, também conhecido como método dos coeficientes a determinar, requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular y_p , mas com coeficientes não especificados. Substituímos, então, a expressão hipotética na Eq. (1.66) e tentamos determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita. Se tivermos sucesso, teremos uma solução da equação diferencial (1.66) e podemos usar como a solução particular y_p . Se não for possível determinar os coeficientes, isso significa que não existe solução da forma que supusemos. Quando ocorrer isso deve-se modificar a hipótese inicial e tentar novamente.

De forma simplificada este método consiste em supor uma forma para $y_p(x)$ sem especificar os coeficientes. Em geral é utilizado quando o termo não-homogêneo $g(x)$ é do tipo: função polinomial, função exponencial, função seno ou cosseno.

A seguir veremos um exemplo do método dos coeficientes indeterminados para melhor compreensão da teoria.

Exemplo: encontre uma solução particular da equação

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \operatorname{sen}(x). \quad (1.68)$$

Solução:

Vamos supor que:

$$y_p(x) = a \operatorname{sen}(x) + b \operatorname{cos}(x),$$

onde a e b são coeficientes a serem determinados. temos a seguir a primeira e segunda derivada respectivamente, da hipótese proposta como solução particular do problema (1.68):

$$y_p'(x) = a \operatorname{cos}(x) - b \operatorname{sen}(x) \quad \text{e} \quad y_p''(x) = -a \operatorname{sen}(x) - b \operatorname{cos}(x).$$

Substituindo as derivadas na Eq. (1.68), obtemos:

$$(-a \operatorname{sen}(x) - b \operatorname{cos}(x)) - 3(a \operatorname{cos}(x) - b \operatorname{sen}(x)) - 4(a \operatorname{sen}(x) + b \operatorname{cos}(x)) = 2 \operatorname{sen}(x)$$

$$-a \operatorname{sen}(x) - b \operatorname{cos}(x) - 3a \operatorname{cos}(x) + 3b \operatorname{sen}(x) - 4a \operatorname{sen}(x) - 4b \operatorname{cos}(x) = 2 \operatorname{sen}(x)$$

$$(-a + 3b - 4a) \operatorname{sen}(x) + (-b - 3a - 4b) \operatorname{cos}(x) = 2 \operatorname{sen}(x)$$

$$(-5a + 3b) \operatorname{sen}(x) + (-5b - 3a) \operatorname{cos}(x) = 2 \operatorname{sen}(x)$$

para satisfazer a última expressão, precisamos igualar os coeficientes de $\operatorname{cos}(x)$ e de $\operatorname{sen}(x)$ nos dois lados da equação, desta forma a e b deve satisfazer as equações:

$$-5a + 3b = 2, \quad \text{e} \quad -3a - 5b = 0.$$

Resolvendo a última equação para encontrar os valores de a e b , encontramos $a = -5/17$ e $b = 3/17$, logo temos que a solução particular da Eq.(1.68) é

$$y_p(x) = -\frac{5}{17} \operatorname{sen}(x) + \frac{3}{17} \operatorname{cos}(x).$$

1.8 Equação de Bernoulli

Nesta seção iremos abordar como se resolve uma Equação Diferencial de Bernoulli. Nesta seção também iremos apresentar a ideia de utilizar uma mudança de variável, para reduzir a EDO não-linear para uma EDO linear de primeira ordem. Vale ressaltar que para os casos onde $n = 0$ ou $n = 1$ na Eq.(1.69), são casos em que a EDO é linear e já sabemos como resolver os mesmos.

Definição 1.5 *Uma equação da forma*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

com $n \neq 0$ e $n \neq 1$ em que $p(x)$ e $q(x)$ são funções em um intervalo aberto (a,b) é denominada **Equação Diferencial de Bernoulli**. Note que se $n = 0$, temos uma Eq. diferencial linear completa do tipo $y' + p(x)y = q(x)$ e se $n = 1$, temos uma equação diferencial linear homogênea do tipo $y' + (p(x) - q(x))y = 0$.

Seja a Eq. (1.69) uma equação de Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (1.69)$$

Neste caso, a idéia é realizar uma substituição na equação acima, de modo a transformá-la em uma EDO linear. Primeiramente dividimos ambos os membros da equação (1.69) por y^n , assim obtemos:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x) \quad (1.70)$$

Multiplicando agora (1.70) por $(1 - n)$, obtemos:

$$(1 - n)y^{-n}y' + (1 - n)p(x)y^{1-n} = (1 - n)q(x) \quad (1.71)$$

Tomando $z = y^{1-n}$ e derivando em relação a x , teremos o seguinte resultado

$$z' = (1 - n)y^{-n}y'$$

Substituindo as expressões de z e z' em (1.71), obtemos:

$$z' + (1 - n)p(x)z = (1 - n)q(x)$$

na qual é uma EDO linear da forma

$$z' + p(x)z = q(x) \quad (1.72)$$

onde $p(x) = (1 - n)p(x)$ e $q(x) = (1 - n)q(x)$.

Ao resolver Eq.(1.72), para obter a solução da Eq. (1.69) basta fazer $z = y^{1-n}$ na solução da Eq.

(1.72). Para uma melhor compreensão vejamos um exemplo a seguir.

Exemplo 5:

$$y' + y = e^x y^2 \quad (1.73)$$

é uma equação de Bernoulli onde $p(x) = 1$, $q(x) = e^x$ e $n = 2$ para iniciar a resolução desta equação de Bernoulli vamos dividir a equação (1.73) por y^2 , onde obteremos

$$y' y^{-2} + y^{-1} = e^x. \quad (1.74)$$

fazendo

$$z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2} y'$$

substituindo z e z' na Eq. (1.72) e multiplicando por -1 , temos

$$z' - z = -e^x \quad (1.75)$$

na qual é uma EDO linear do tipo

$$z' + p(x)z = g(x)$$

onde $p(x) = -1$ e $g(x) = -e^x$, logo temos

$$\mu(x) = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$$

Multiplicando a equação (1.75) por $\mu(x)$, temos

$$e^{-x} z' - e^{-x} z = -e^x e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx} (ze^{-x}) = -1$$

$$ze^{-x} = \int -1 dx$$

$$ze = \frac{1}{e^{-x}}(-x + c)$$

$$z(x) = e^x(c - x) \quad (1.76)$$

aqui encontramos a solução da equação (1.75), para sabermos a solução da equação (1.73), basta fazer $z = y^{-1}$ em (1.76)

$$y^{-1} = \frac{1}{y} = e^x(c - x) \Rightarrow y = \frac{1}{e^x(c - x)}$$

Logo a solução da equação de Bernoulli (1.73) pode ser escrita pela expressão $y(x) = 1/(ce^x - xe^x)$.

2 A MODELAGEM MATEMÁTICA E O MODELO DE VON BERTALANFFY

Neste capítulo, será feita uma abordagem sobre a modelagem matemática e o modelo de Von Bertalanffy aplicado para crescimento de peixe.

2.1 Modelagem Matemática

A matemática é uma área que tem um vasto campo de aplicabilidade em nosso cotidiano. Neste sentido, destaca-se a sub-área da matemática conhecida como modelagem Matemática, onde é possível abordar inúmeras aplicações.

Modelos matemáticos podem ser utilizados em diversos campos de atividades do nosso cotidiano, por exemplo: Astronomia, Biologia, Comunicação, Engenharia, Economia, Física, Química, etc.

No dicionário Mini Aurélio Século XXI (2001), dicionário da língua portuguesa, um *modelo* é descrito como "representação em pequena escala de algo que pretende reproduzir em grande". Alguns autores afirmam que, modelo trata-se de uma representação da realidade, não exatamente uma cópia fiel da mesma em todos seus aspectos, mas uma maneira que pode representá-la em escala reduzida. Segundo D'Ambrósio "considera modelo numa ampla acepção, denotando as representações simplificadas, mentais ou não, que os seres humanos fazem sobre a realidade."(apud BARBOSA, 2009, p. 2)

O termo modelo matemático pode ter diferentes conotações e diferentes definições dependendo do ponto de vista.

Vamos fazer algumas comparações entre diferente conceitos. Citaremos concepções de alguns autores, encontradas na literatura, referente ao termo Modelo Matemático.

- Segundo Maki e Thompsom (1973) "um modelo Matemático é um sistema axiomático constituído de termos indefinidos que são obtidos pela abstração e qualificação de ideias essenciais do mundo real."(apud PEREIRA; RITA, 2013, p. 35)
- Segundo Swetz (1992) "Modelo Matemático é uma estrutura Matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão."(apud PEREIRA e RITA, 2013, p. 36)
- Modelo Matemático de um fenômeno é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. (BASSANEZI, 2006, P. 20).

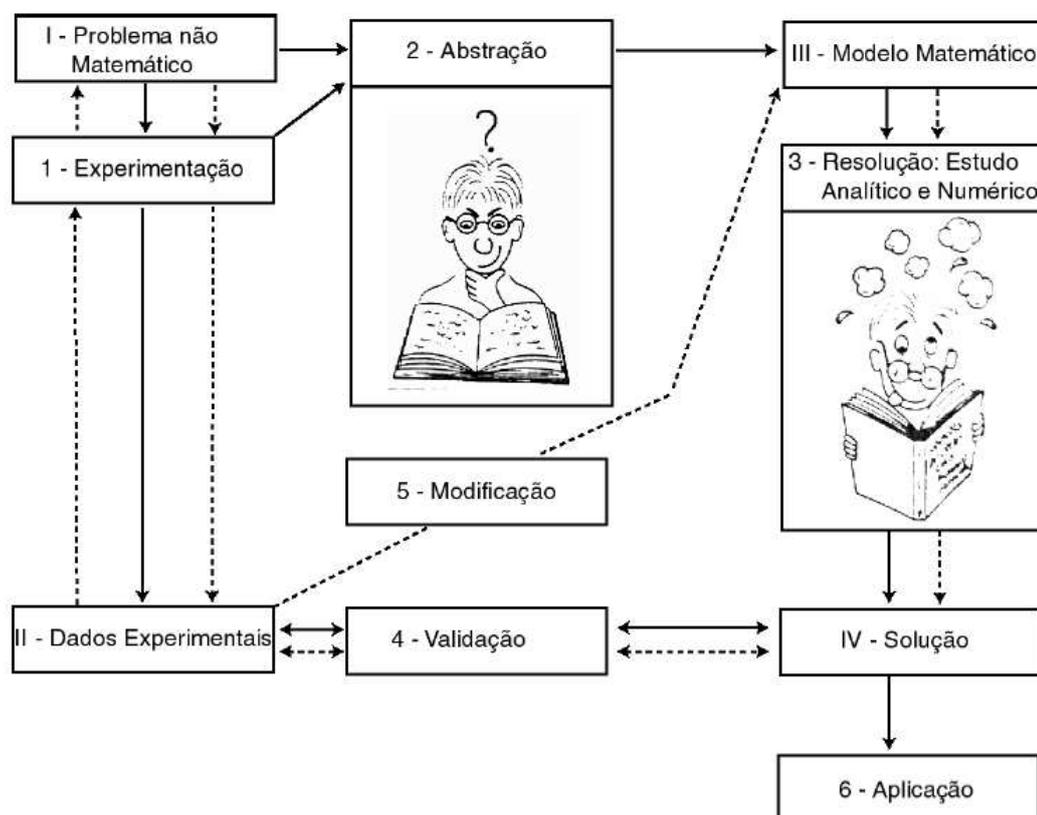
Vamos considerar que, na Matemática, um conjunto de símbolos e relações matemática na qual represente de alguma maneira o objeto estudado, é *um modelo matemático*. Quando refere-se a este tipo de modelo, trata-se do uso da linguagem matemática para descrever um fenômeno em questão.

O processo que tem um intuito de encontrar um modelo matemático ou não, é chamado de *Modelagem*, e considera-se *modelar o ato de construir ou formar um modelo*.

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com finalidade de previsão de tendências. A modelagem matemática consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2006, p.24).

O processo da modelagem matemática de uma situação ou problema real deve seguir algumas etapas. Na figura 4 iremos ilustrar um pequeno esquema que descreve o processo de modelagem matemática reportado por BASSANEZI (2006).

Figura 4 – esquema de modelagem



Fonte: BASSANEZI, 2006

Sobre o esquema acima, as setas contínuas representam a primeira aproximação. A procura por um modelo matemático que melhor represente o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas.

A seguir iremos pontuar e descrever um pouco sobre as etapas do esquema anteriormente apresentado, no qual foi proposto pelo mesmo autor.

- ▶ **Experimentação** - É uma atividade essencial laboratorial onde se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objeto da pesquisa. Entretanto, a contribuição de um matemático nesta fase, muitas vezes pode ser fundamental e direcionar a pesquisa no sentido de facilitar, posteriormente, a determinação das variáveis envolvidas no modelo matemático. A adoção de técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental podem dar maior grau de confiabilidade aos dados obtidos.
- ▶ **Abstração** - É o procedimento que deve levar a formulação dos modelos matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer: a seleção das variáveis, problematização ou formulação dos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que está trabalhando, formulação de hipóteses e a simplificação do problema.
- ▶ **Resolução** - O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente. Como em um dicionário, a linguagem matemática admite "sinônimos" que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural.
- ▶ **Validação** - É o processo de aceitação ou não do modelo proposto e soluções obtidas. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhe são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparados com suas soluções e previsões de valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões será fator predominante para sua validação. Um bom modelo é aquele que tem capacidade de previsão de novos fatos ou relações insuspeitas.
- ▶ **Modificação** - Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções podem não conduzirem a previsões corretas e definitivas.
- ▶ **Aplicação** - Usualmente este termo aplicação de Matemática denota o uso de seus conceitos para a compreensão do fenômeno do mundo real. O modelo matemático, ou mais geralmente, todo fundamento matemático que é ou pode ser, de alguma forma, relativo com a realidade, pode ser visto como pertencente a Matemática Aplicada.

Estes procedimentos realizados na modelagem de um fenômeno não são necessariamente uma sequência que se deve seguir a risca. Estas fases, certas vezes são um pouco complexas e podem envolver começos e recomeços, mas ao longo do processo de modelagem é possível pensar e repensar os métodos e escolhas, e avaliar quando uma solução é viável.

Ao ler estas fases do processo de construção/elaboração da modelagem matemática de um fenômeno qualquer podemos perceber que não é um processo tão simples como um problema de repetição que utiliza os mesmos passos. No entanto, alguns fenômenos pode ocorrer de ter uma simples percepção quanto ao processo de modelagem.

Uma modelagem bem elaborada nos permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e melhor compreender as diferentes situações do fenômeno.

Para Bassanezi (2006), a modelagem matemática tem grande importância no campo de pesquisas científicas, tais como:

- Estímulo para criação/surgimento de novas ideias e técnicas experimentais;
- Pode ser utilizado para fazer interpolação, previsões e extrapolações;
- Um excelente método para o ensino de matemática, seja ele no ensino básico ou superior;
- Suprir as lacunas existentes onde existe a falta de dados experimentais;
- Uma forma de melhor compreender a realidade de um problema e melhor solucionar ele;
- Antecipar tomadas de decisões para uma situação problema do mundo real;

Assim, podemos perceber a utilidade e a importância da modelagem para para descrever problemas do mundo real. Por outro lado, a modelagem matemática é uma metodologia que pode facilitar o processo de ensino aprendizagem .

2.2 Modelo de Von Bertalanffy aplicado para peixes

O biólogo austriaco von Bertalanffy, no ano de 1938, formulou o modelo matemático para analisar o aumento do peso de peixes. Este modelo pode ser encontrado em Bassanezi (2006).

Seja $P(t)$ o peso de cada espécie de peixe, o modelo de Von Bertalanffy estabelece que: "o crescimento do peso do peixe é proporcional à área de sua superfície externa (anabolismo) e o decaimento é proporcional à energia consumida (catabolismo)." Assim,

$$\frac{dp}{dt} = \alpha A - \beta P \quad (2.1)$$

onde,

- α é a constante de anabolismo, representando a taxa de síntese de massa por unidade de área do peixe;
- β é a constante de catabolismo, representa a taxa de diminuição da massa por unidade de massa;
- a área A da superfície externa é proporcional a $p^{2/3}$, pelo princípio da alometria. De fato, o peso é proporcional ao volume e o volume é proporcional ao cubo do comprimento, isto é $p = k_1 l^3$. A área é proporcional ao quadrado do comprimento, isto é, $A = k_2 l^2$. Portanto,

$$p = k_1 l^3 \Rightarrow l^3 = \frac{p}{k_1} \Rightarrow l = \left(\frac{p}{k_1}\right)^{1/3}$$

$$A = k_2 l^2 \Rightarrow A = k_2 \left(\left(\frac{p}{k_1}\right)^{1/3}\right)^2 \Rightarrow A = k p^{2/3} \quad (k = k_2(1/k_1)^{2/3})$$

Logo, a Eq. (2.1) pode ser escrita como uma equação de Bernoulli:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p \quad (2.2)$$

Assim, o modelo proposto por Von Bertalanffy, para crescimento de peixes é dado pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $p = p(t)$ é a massa do peixe em função do tempo t , β a taxa de catabolismo e α a taxa de anabolismo.

Como a equação (2.3) é uma equação de Bernoulli para resolvermos ela temos que fazer uma mudança de variável $z = p^{1-(2/3)} = p^{1/3}$. Logo, $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}p^{(-2/3)}\frac{dp}{dt}$. Dividindo a Eq. (2.3) por $p^{2/3}$, temos:

$$p^{-2/3}\frac{dp}{dt} + \beta p^{1/3} = \alpha$$

Agora, multiplicando esta última equação por $\frac{1}{3}$, obtemos:

$$\frac{1}{3}p^{-1/3}\frac{dp}{dt} + \frac{\beta}{3}p^{1/3} = \frac{1}{3}\alpha$$

Fazendo a mudança de variável, tem-se:

$$\frac{dz}{dt} + \frac{\beta}{3}z = \frac{1}{3}\alpha \quad (2.4)$$

onde percebemos que a equação (2.4) trata-se de uma equação linear, na qual pode ser resolvida pelo método dos fatores integrantes. Seja

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\beta}{3} dt} = e^{\frac{\beta}{3}t}$$

multiplicando a Eq. (2.4) por $e^{\frac{\beta}{3}t}$ tem-se

$$\frac{dz}{dt}e^{(\beta/3)t} + \frac{\beta}{3}e^{(\beta/3)t}z = \frac{1}{3}\alpha e^{(\beta/3)t}$$

$$\frac{d}{dt}ze^{(\beta/3)t} = \frac{1}{3}\alpha e^{(\beta/3)t}$$

integrando ambos lados,

$$ze^{(\beta/3)t} = \int \frac{1}{3}\alpha e^{(\beta/3)t} dt + c$$

$$ze^{(\beta/3)t} = \frac{1}{3}\alpha \frac{3}{\beta} e^{(\beta/3)t} + c$$

$$z = \frac{1}{e^{(\beta/3)t}} \left(\frac{\alpha}{\beta} e^{(\beta/3)t} + c \right)$$

$$z = \frac{\alpha}{\beta} + ce^{(-\beta/3)t}$$

voltando para variável p ,

$$p^{1/3} = \frac{\alpha}{\beta} + ce^{(-\beta/3)t}$$

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + ce^{(-\beta/3)t} \right)^3$$

$$p(t) = \left[\frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} ce^{(-\beta/3)t} \right) \right]^3$$

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} ce^{(-\beta/3)t} \right)^3 \quad (2.5)$$

Logo, a solução geral de (2.2) é dada por (2.5), considerando que $p_0 \approx 0$, podemos determinar o valor da constante c . Temos,

$$p(0) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} ce^{(-\beta/3) \cdot 0} \right)^3$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} c \right)^3$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} c \right)^3 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} c = 0 \quad \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} c = -1$$

$$\Rightarrow c = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Logo,

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 (1 - e^{(-\beta/3)t})^3$$

quando t cresce, $p(t)$ se aproxima de $\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3$ que será seu peso máximo. Portanto,

$$p(t) = p_{max}(1 - e^{(-\beta/3)t})^3 \quad (2.6)$$

Fazendo uma análise geométrica da solução, temos que o valor de $p(t)$ que maximiza $\frac{dp}{dt}$ é obtido considerando $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$.

Derivando $p(t)$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= 3p_{max}(1 - e^{-(\beta/3)t})^2(-e^{-(\beta/3)t})\left(-\frac{\beta}{3}\right) \\ &= \beta p_{max}e^{-(\beta/3)t}(1 - e^{-(\beta/3)t})^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d^2p}{dt^2} &= \beta p_{max} \left[e^{-(\beta/3)t} 2(1 - e^{-(\beta/3)t})(-e^{-(\beta/3)t})\left(-\frac{\beta}{3}\right) + \left(-\frac{\beta}{3}\right)e^{-(\beta/3)t}(1 - e^{-(\beta/3)t})^2 \right] \\ \frac{d^2p}{dt^2} &= 3 \left(\frac{\beta}{3}\right)^2 p_{max}(e^{-(\beta/3)t})(1 - e^{-(\beta/3)t})(3e^{-(\beta/3)t} - 1)\end{aligned}$$

Então: $\frac{d^2p}{dt^2} = 0 \iff t = 0$ ou $t = 3\frac{\ln 3}{\beta}$, temos ainda que:

$$\frac{dp}{dt} = 0 \text{ se } t = 0 \text{ ou } t \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dt} > 0 \text{ se } t > 0.$$

Então $t^* = \frac{3\ln 3}{\beta}$ é ponto de inflexão da curva $p(t)$ e

$$p(t^*) = p_{max}(1 - e^{-\ln 3})^3 = 0,296p_{max}$$

Por exemplo, se uma espécie de peixe só é permitido a pesca com peso superior a 3kg, considere-se:

$$\begin{aligned}p(t^*) = 3 &\Rightarrow 0,296p_{max} = 3 \\ &\Rightarrow p_{max} = 10kg\end{aligned}$$

e que um peixe dessa espécie com menos de 3kgs ainda não procriou.

Observe que para utilizar a Eq. (2.6) para descrever a curva de crescimento de peixe é necessário conhecer o peso máximo P_{max} . De posse dos dados experimentais, é possível determinar o P_{max} pelo Método de Ford-Walford apresentado a seguir.

Método de Ford-Walford

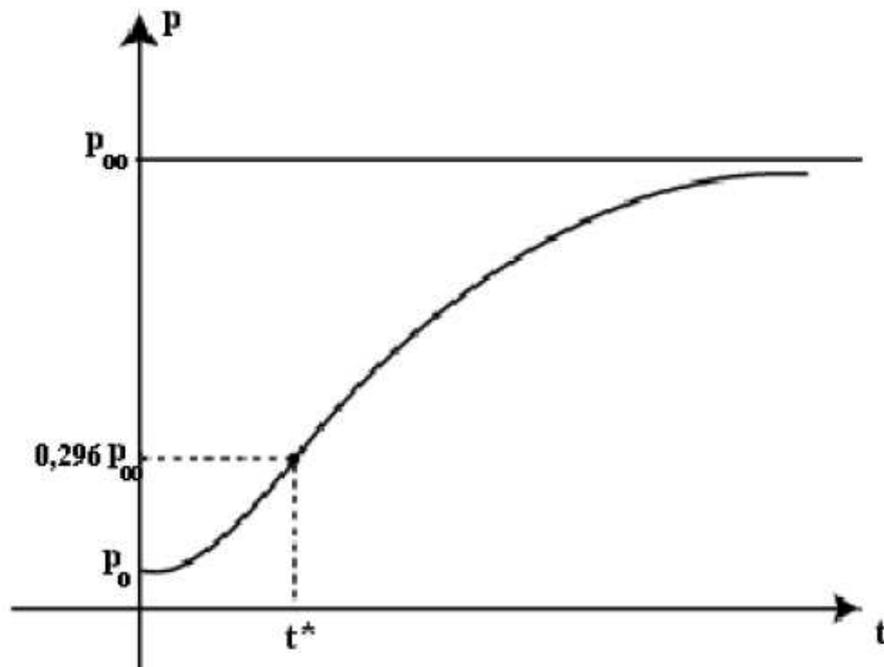
É utilizado para o cálculo do valor assintótico. Considere um conjunto de dados (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ e que

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} y_i = y^*.$$

Seja g uma função que ajusta os pares (y_i, y_{i+1}) , isto é,

$$y_{i+1} = g(y_i)$$

Figura 5 – Crescimento do peso de peixe



Fonte: BASSANEZI, 2006

temos que, $\lim g(y_i) = \lim y_{i+1} = \lim y_i = y^*$ ou seja, a sequência de pontos do plano (y_i, y_{i+1}) converge para (y^*, y^*) e y^* é um ponto fixo da função g :

$$y^* = g(y^*)$$

Assim, se $y_{i+1} = g(y_i)$ então y^* é o valor do limite da sequência y_i se, e somente se, y^* é o ponto fixo de g .

3 MODELO GENERALIZADO E APLICAÇÃO NO CRESCIMENTO EM PESO DE GALINHA CAIPIRA

Neste capítulo iremos apresentar o modelo generalizado de Von Bertalanffy. O modelo generalizado foi adaptado para descrever a curva de crescimento da galinha caipira. Para tanto, foi realizado a coleta dos dados do peso da galinha e o procedimento está descrito a seguir.

Nesta pesquisa, foram utilizadas galinhas (os pintos) de mestiças (sem raça definida) que são popularmente conhecidas como galinha de capoeira (ou galinha caipira) e tendo outras variações linguísticas dependendo da região que se está. Os pintos não foram comprados. Os ovos foram chocados no próprio local de realização dos experimentos. O experimento começou a ser realizado logo após (poucos dias depois) o nascimento, em um sítio localizado na zona rural do município de Sossego-PB, no qual fica a aproximadamente 6km de distância da cidade de Baraúna-PB.

No experimento dispomos de 5 (cinco) pintos que foram devidamente identificados com tinta de cores diferentes. As pesagens foram realizadas semanalmente (aos sábados), utilizando uma balança de cozinha de precisão (Ref:UD130). Foi utilizado um recipiente em cima da balança para que facilitasse que Os animais ficassem parados e o peso das respectivas amostras não ficasse oscilando e assim reduzindo algum erro proveniente desta oscilação. Durante o experimento, 2 (dois) pintos morreram por causas adversas.

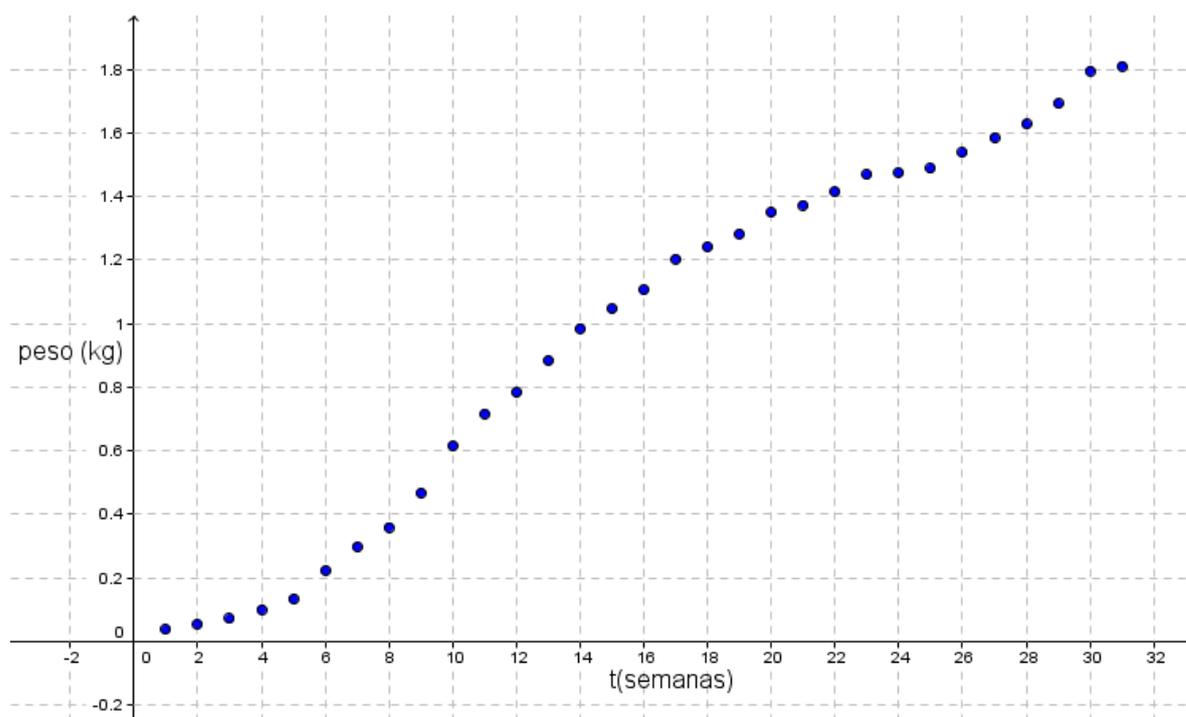
Os dados coletados são apresentados na Tabela 1 e o gráfico de dispersão do peso da galinha caipira (média das três) é apresentado na Figura 6. O peso é dado em quilogramas e a idade em semanas.

Tabela 1 – Dados experimentais do crescimento em peso das aves

Idade(semanas)	P(t) em kg	Idade(semanas)	P(t) em kg	Idade(semanas)	P(t) em kg
1	0,0385	12	0,7835	23	1,469
2	0,0555	13	0,884	24	1,4745
3	0,0725	14	0,985	25	1,488
4	0,101	15	1,0465	26	1,5385
5	0,1345	16	1,106	27	1,5845
6	0,2235	17	1,204	28	1,627
7	0,298	18	1,2415	29	1,6915
8	0,36	19	1,2825	30	1,795
9	0,468	20	1,35	31	1,81
10	0,616	21	1,373		
11	0,717	22	1,415		

Fonte: autoria própria

Figura 6 – Gráfico de dispersão do peso da galinha caipira em relação ao tempo



Fonte: Autoria própria

3.1 Modelo de Von Bertalanffy generalizado

Como apresentado no capítulo 2, Von Bertalanffy obteve experimentalmente um modelo que caracteriza o crescimento(em peso) de peixes. Seu modelo de metabolismo é dado pela

forma de um problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p \\ p(0) = p_0 \approx 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde os parâmetros α e β devem ser considerados como taxas de anabolismo e catabolismo, respectivamente.

A equação diferencial pode ser caracterizada como uma Equação de Bernoulli, com um método de resolução bastante conhecido, na qual a solução é dada pela seguinte expressão:

$$p(t) = p_{\infty} (1 - e^{-kt}),$$

onde p_{∞} é o peso máximo do peixe e $k = \frac{\beta}{3}$ (olhe a seção 2.2).

Observando o modelo clássico de Von Bertalanffy (3.1) o termo $p^{\frac{2}{3}}$ é proveniente da relação de alométrica do peso com a área corporal do peixe. Bassanezi (2006) utilizou o modelo generalizado de Von Bertalanffy no estudo do crescimento de perus, no qual utiliza-se o termo p^{γ} .

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{\gamma} - \beta p \\ p(0) = p_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

A Eq. (3.2) é não linear e sabemos que algumas equações não-lineares são de difícil resolução. O que nos deixa mais tranquilos quanto a resolução desta é a sua classificação, pois a mesma trata-se de uma equação de Bernoulli e uma mudança de variáveis nos conduz a uma equação linear, na qual podemos encontrar sua solução.

Fazendo:

$$z = p^{1-\gamma} \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = (1 - \alpha) \cdot p^{-\alpha} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (3.4)$$

agora substituindo a Eq.(3.2) na equação (3.4), obtemos:

$$\frac{dz}{dt} = (1 - \gamma) \cdot p^{-\gamma} \cdot (\alpha \cdot p^{\gamma} - \beta p)$$

$$\frac{dz}{dt} = (1 - \gamma) \cdot (\alpha - \beta p^{1-\gamma}) \quad (3.5)$$

feito isto iremos substituir a Eq.(3.3) na Eq.(3.5) teremos:

$$\frac{dz}{dt} = (1 - \gamma) \cdot (\alpha - \beta z) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \alpha(1 - \gamma) - \beta z(1 - \gamma)$$

$$\Rightarrow z' + \beta z(1 - \gamma) = \alpha(1 - \gamma) \quad (3.6)$$

Podemos perceber facilmente que a Eq.(3.6) trata-se de uma equação linear de 1º ordem na qual pode ser resolvida pelo método de fator integrante(seção 1.5). Agora iremos resolver a Eq(3.6): A solução da Eq homogênea associada

$$z' + \beta z(1 - \gamma) = 0 \quad (3.7)$$

Seja a Eq (3.7) a equação homogênea da (3.6), logo temos

$$\mu(t) = e^{\beta(1-\gamma)t} \quad (3.8)$$

Feito isto, multiplicando o fator integrante (3.8) em ambos os lados da equação (3.7), integrando e simplificando a equação teremos o seguinte solução homogênea

$$z_h = c.e^{-\beta(1-\gamma)t}. \quad (3.9)$$

Uma solução particular de (3.6) é dada pelo ponto estacionário, isto é $\frac{dz}{dt} = 0$, daí (3.6) passa a ser dada pela Eq (3.10)

$$0 + \beta z(1 - \gamma) = \alpha(1 - \gamma) \quad (3.10)$$

$$z = \frac{\alpha(1 - \gamma)}{\beta(1 - \gamma)} \Rightarrow z_p = \frac{\alpha}{\beta}$$

A solução geral da Eq.(3.6) é dada por uma combinação linear da solução particular com a solução homogênea. Logo

$$z(t) = \frac{\alpha}{\beta} + c.e^{-\beta(1-\gamma)t}$$

$$z(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + c.\frac{\beta}{\alpha}.e^{-\beta(1-\gamma)t} \right). \quad (3.11)$$

Agora iremos voltar para variável p , utilizando Eq(3.3) na Eq. (3.11) obtemos

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + c.\frac{\beta}{\alpha}.e^{-\beta(1-\gamma)t} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (3.12)$$

Sabemos que $p_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty}$, então vamos fazer $t \rightarrow \infty$ para saber o peso máximo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_\infty &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}.c.e^{-\beta.(1-\gamma)t} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right] \\ &\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}.c.e^{-\infty} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ &\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} (1 + 0)^{\frac{1}{1-\gamma}} \end{aligned}$$

$$p_{\infty} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (3.13)$$

Fazendo $k = \beta(1 - \gamma)$, podemos escrever a Eq.(3.12) de forma simplificada:

$$p(t) = p_{\infty} \left(1 + c \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot e^{-kt} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (3.14)$$

Como $p(0) = p_0$, podemos aplicar $t = 0$ para encontrarmos o valor da constante c

$$\begin{aligned} p_0 &= p_{\infty} \left(1 + c \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot e^0 \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \Rightarrow \frac{p_0}{p_{\infty}} = \left(1 + c \cdot \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ &\Rightarrow \left(\frac{p_0}{p_{\infty}} \right)^{1-\gamma} = 1 + c \cdot \frac{\beta}{\alpha} \\ c &= \frac{\alpha}{\beta} \left[\left(\frac{p_0}{p_{\infty}} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

então substituindo (3.15) em (3.14) e simplificando temos a seguinte expressão:

$$p(t) = p_{\infty} \left(1 + \left[\left(\frac{p_0}{p_{\infty}} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-kt} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (3.16)$$

onde $p(0) = p_0$ é o peso inicial e p_{∞} é o peso máximo.

3.2 Aplicação do Modelo para o Crescimento em Peso da Galinha Caipira

A partir dos dados experimentais para galinha caipira (Tabela 1) vamos estabelecer parâmetros (taxa de anabolismo, catabolismo, peso máximo da galinha caipira) e utilizar o modelo de Von Bertalanffy generalizado de modo a oferecer informações ao produtor rural no sentido de melhorar o gerenciamento de seus negócios.

3.2.1 Avaliação do peso máximo p_{∞}

Podemos estimar o valor do peso máximo da galinha utilizando o método de FordWalford. Este método consiste em considerar $p_t = p_{t+1}$ quando o peso está estabilizado.

Fazendo um ajuste linear dos pontos p_t e p_{t+1} e calcular a interseção desta reta com a reta $p_t = p_{t+1}$. Este ponto de intersecção será nosso p_{∞} , pois se o peso em dois instantes consecutivos é o mesmo, significa que não houve aumento de peso, o que só ocorre quando o

valor do peso está estabilizado. A equação da reta ajustada para os 22 últimos valores de p_t , a partir do ponto de inflexão p^* é dada por

$$p_{t+1} = 0,949387p_t + 0,12114.$$

Para verificar se o ajuste feito era bom calculamos o R^2 , para verificar a correlação entre p_{t+1} e p_t . Obtivemos $R^2 = 0,9999$ no qual indica que teve uma ótima correlação entre a reta ajustada e os dados. O ponto de intersecção é calculado fazendo $p_\infty = 0,949387p_\infty + 0,12114 \Rightarrow p_\infty = \frac{0,12114}{1-0,949387} \approx 2,393456$

3.2.2 Estimação do parâmetro de alometria γ

Vários trabalhos reportados na literatura consideram o parâmetro alométrico $\gamma = 2/3$. No entanto, por ser um parâmetro relacionado ‘a área corporal, é mais coerente que cada animal, ou mesmo a classe a que pertence, possua um valor próprio para este parâmetro.

A partir dos dados experimentais da figura 6, podemos observar a existência de um ponto p_* na qual a variação é máxima (ponto de inflexão da curva). Neste caso, devemos ter $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$. Agora derivando a Eq(3.2),

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \alpha\gamma p^{\gamma-1} \frac{dp}{dt} - \beta \frac{dp}{dt}. \quad (3.17)$$

Logo, no ponto de inflexão p_* , temos

$$\alpha\gamma p_*^{\gamma-1} \frac{dp}{dt} - \beta \frac{dp}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} (\alpha\gamma p_*^{\gamma-1} - \beta) = 0.$$

Como sabemos que a taxa de aumento de peso $\frac{dp}{dt}$ é considerado sempre positiva, então temos

$$\alpha\gamma p_*^{\gamma-1} = \beta \Leftrightarrow \gamma p_*^{\gamma-1} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{p_*^{1-\gamma}}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

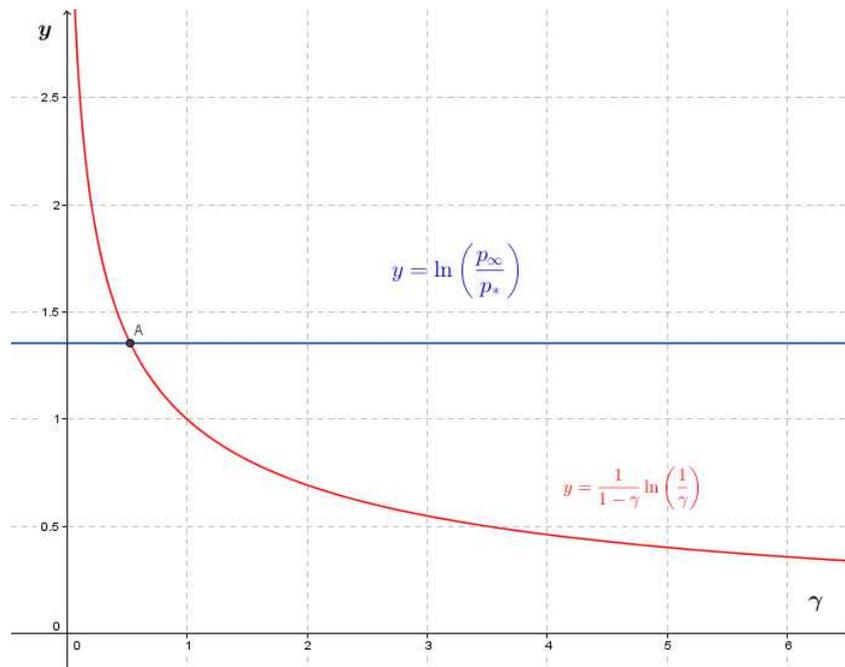
Por outro lado de (3.13), temos $\frac{\alpha}{\beta} = p_\infty^{1-\gamma}$. Logo,

$$\begin{aligned} p_\infty^{1-\gamma} &= \frac{p_*^{1-\gamma}}{\gamma} \Rightarrow \left(\frac{p_\infty}{p_*}\right)^{1-\gamma} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow (1-\gamma) \ln\left(\frac{p_\infty}{p_*}\right) = \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{p_\infty}{p_*}\right) = \frac{1}{1-\gamma} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora vemos que a expressão (3.18) fornece implicitamente o valor do parâmetro γ desde que p_* seja conhecido. Então, dos dados experimentais podemos inferir que $p_* = 0,616$.

Agora com o valor de p_* podemos calcular o valor de γ , no qual pode ser obtido por recursos computacionais, calculando a intersecção das curvas $y = \frac{1}{1-\gamma} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ e $\ln\left(\frac{p_\infty}{p_*}\right)$ como mostra a figura 7 utilizando a intersecção de funções encontramos $\gamma = 0.52$.

Figura 7 – Cálculo geométrico do parametro γ



Fonte: Autoria própria

3.3 Simulação Numérica e análise do modelo matemático

Ajustamos a curva solução do modelo de Von Bertalanffy generalizado (3.16) aos dados de idade-peso da galinha caipira para estimar o valor de k . Para tanto, utilizou-se o programa Statistica (versão 7.0, 2005) com os dados $P_0 = 0, p_\infty = 2,3934, \gamma = 0,52$

A comparação dos dados experimentais com a curva simulada é apresentada na Figura 8.

Com o valor de k , foi possível estimar os parâmetros α e β .

Na equação (3.14) foi utilizando $k = \beta(1 - \gamma)$, substituindo os valores de γ e k nessa expressão, temos:

$$0,069046 = \beta(1 - 0,52) \Rightarrow \beta = \frac{0,069046}{0,48} \Rightarrow \beta = 0,14384583.$$

Com o valor de β agora podemos encontrar o valor de α pela expressão (3.13), temos:

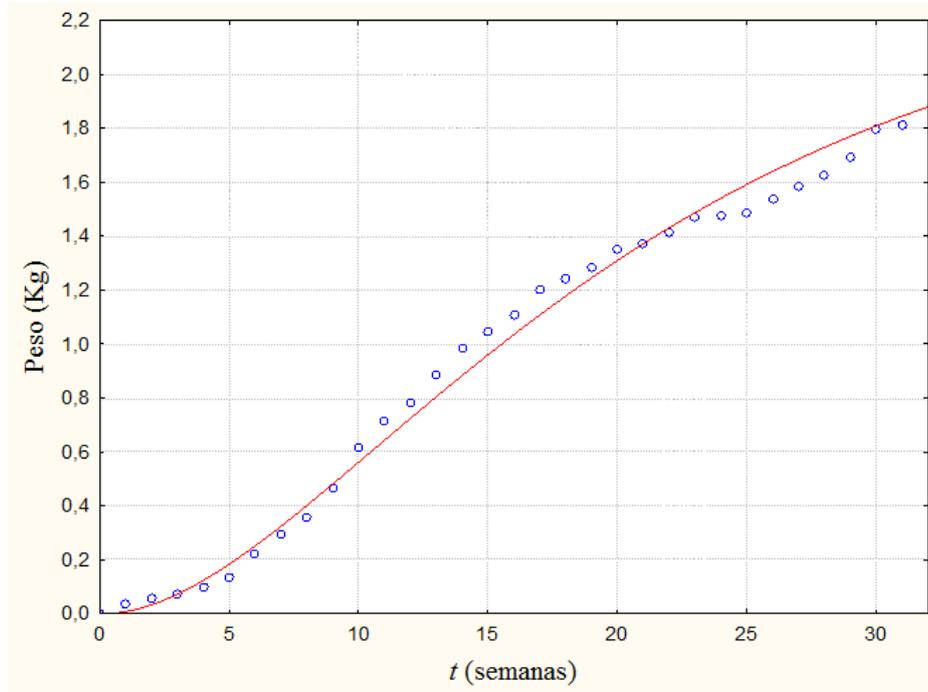
$$(p_\infty)^{1-\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = (0,14384583) * (2,39347)^{0,48} \Rightarrow \alpha = 0,21869089.$$

Agora temos os dados necessários que estava faltando na solução geral e o modelo matemático que foi escolhido para descrever o peso da galinha será:

$$p(t) = 2,3934 \left(1 - e^{-0,069046 * t}\right)^{2,083} \tag{3.19}$$

Podemos ver que, quando $t \rightarrow \infty$, $p(t) \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2,083}$; isto é, quando o tempo tende a infinito o peso da galinha estabiliza, não ultrapassando $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2,083} \approx 2,3934$ kg.

Figura 8 – Gráfico da função $p(t)$



Fonte: Autoria própria

Para ter certeza que o modelo encontrado descreve bem o problema, calculamos no programa Statistica² o valor do coeficiente de correlação R no qual deu $R = 0,994733$. Então, o modelo encontrado se adequa bem os dados experimentais, já que o coeficiente de correlação é muito próximo ao valor de 1.

O valor do parâmetro alométrico Gamma pode variar de acordo com o tipo de animal, raça, alimentação, ambiente que ele foi criado ou até mesmo localização geográfica. Por estes e outros motivos, o ideal seria calcular o valor de γ para cada caso.

A partir dos dados experimentais e do modelo de Von Bertalanffy generalizado, foi calculado o parâmetro alométrico gamma como sendo $\gamma = 0,52$, valor um pouco abaixo de $\gamma = 2/3 = 0,666$ do caso de peixe. Oliveira (2019) utilizou em seu trabalho fixou o valor de γ em $2/3$, já Scapim (2008) fez simulações computacionais e estimou o melhor γ em $0,9304$.

Um ponto bastante importante que temos que ver para este modelo matemático é a possibilidade de podermos determinar, de uma forma mais precisa, qual deveria ser o melhor momento para se fazer o abate da ave, e assim ajudar no planejamento econômico para quem faz criação de galinha, bem como questionar se é rentável continuar a engorda da ave.

Mesmo que a função $p(t)$ na qual é dada por (3.19) é sempre crescente, mas ela tende a

estabilizar com o decorrer do tempo. Para avaliar de que forma se dá esse crescimento do peso iremos fazer o estudo da derivada primeira e da derivada segunda de $p(t)$ dada na Eq. (3.22). Os gráficos e os cálculos das derivadas das funções foram obtidas, utilizando o programa Geogebra (versão 5.0, 2017).

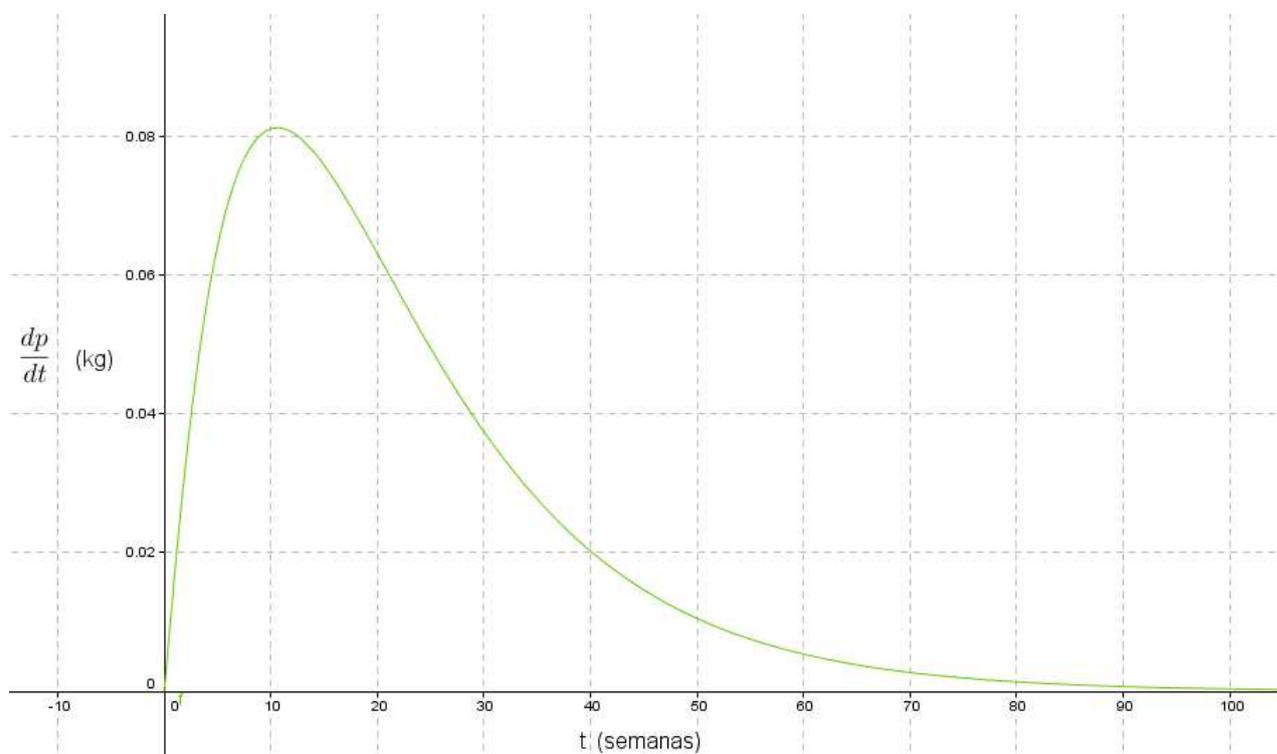
Vale ressaltar que a primeira derivada $\frac{dp}{dt}$ é a taxa de variação instantânea da função $p(t)$, $t \geq 0$. Importante lembrar também que a função $p(t)$ do modelo matemático encontrado, a derivada primeira irá ser sempre positiva para $t \geq 0$.

Agora analisando a expressão de $\frac{d^2p}{dt^2}$, podemos perceber que existe um único valor de t , no domínio que foi considerado, onde ela se anula, em $T \approx 10,61$, desta forma sendo positiva para os valores de $0 \leq t < T$ e conseqüentemente negativa para $t > T$. Então temos que a primeira derivada, $\frac{dp}{dt}$, é estritamente crescente para o intervalo $0 \leq t < T$ e estritamente decrescente para o intervalo $t > T$ e o ponto T onde a segunda derivada é zero é um ponto de máximo local, e também será um máximo absoluto, da função derivada primeira. Ou seja isto significa que após $t = T$, mesmo servindo o mesmo tipo e também a mesma quantidade de alimentação, mesmo o peso da galinha ainda aumentando, mas a taxa de variação do peso estará decrescendo, em outras palavras, mesmo tendo o mesmo gasto com alimentação, mas o ganho de peso está diminuindo. Então podemos perceber que manter a galinha viva, por muito tempo, com o mesmo tipo de alimentação não é interessante economicamente, sendo isto um dos fatores que pode determinar a melhor idade para o abate da ave. Fazendo o arredondamento do valor de T , devemos abater o frango após a 10ª semana. Mas para chegar a escolher com exatidão o melhor momento para fazer o abate da ave, temos que verificar outros fatores, como o peso médio que a ave deve ter para ser comercializada no mercado que o produtor almeja vender, se for este o caso, sem que haja o comprometimento como fatores de sabor e maciez da carne. Já do ponto de vista matemático, mesmo que a taxa de variação instantânea do peso da ave esteja decrescendo após o tempo T , pode-se perceber ainda um certo ganho significativo do peso da ave; desta maneira ainda torna-se viável adiar o tempo de abate. Temos que $\frac{dp}{dt}(T) \approx 0,08 \text{ kg}$ e $\frac{dp}{dt}(20,83) \approx 0,06 \text{ kg}$. Desta forma, na 21ª semana a taxa de variação do peso é aproximadamente 60g. É importante observar que a função da derivada primeira tem um ponto de inflexão em $t = P$, em que $P \approx 20,83$ e que $\frac{dp}{dt} \rightarrow 0$, na medida que o tempo passa. Após o ponto de inflexão P não é mais rentável economicamente manter a ave viva.

Podemos ver que a função $p(t)$ tem um ponto de inflexão em $t = T$. Nas figuras 9 e 10 mostra os gráficos da derivada 1ª e da derivada 2ª, da função $p(t)$, no qual foram obtidos através do programa GEOGEBRA(versão 5.0, 2017).¹

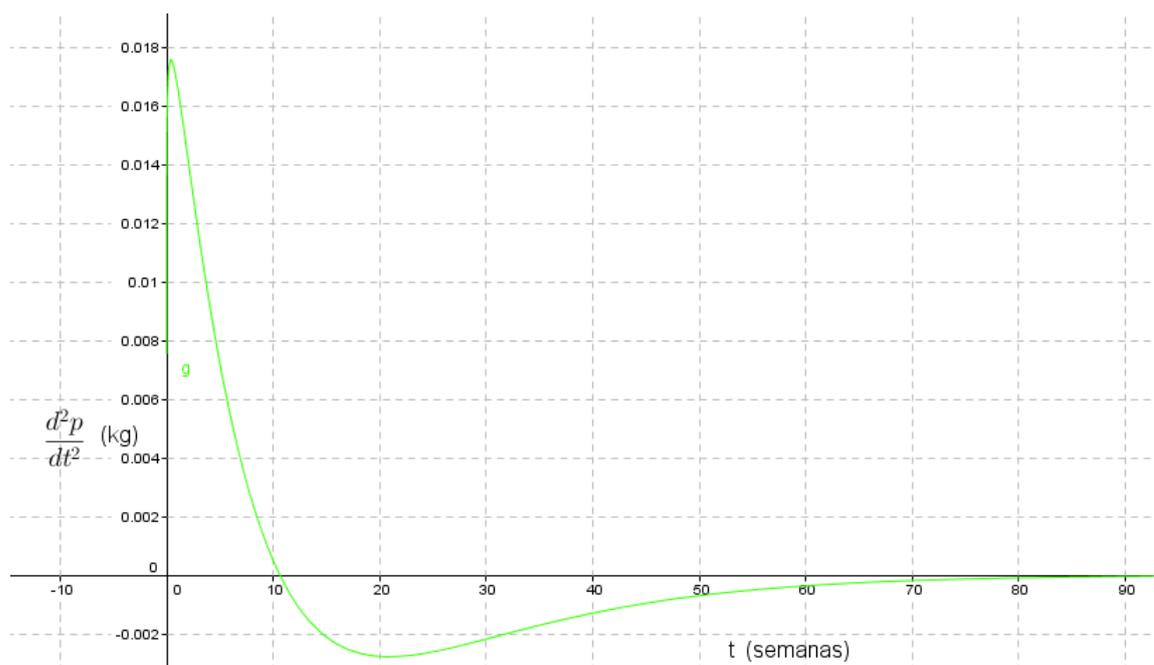
¹ GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA

Figura 9 – Gráfico da primeira derivada de $p(t)$



Fonte: Autoria própria

Figura 10 – Gráfico da segunda derivada de $p(t)$



Fonte: Autoria própria

4 CONCLUSÃO

Diante do término deste trabalho foi possível aprimorar os conhecimentos adquiridos durante a vida acadêmica, já que este tipo de aplicação matemática não pode ser visto durante as demais disciplinas, assim como aplicar conhecimentos adquiridos nas disciplinas durante o curso, para algo que está fora dos "muros" da Universidade.

Outro ponto observado ao fim deste trabalho é que, devemos aprender matemática, mas não apenas se deter a isso, devemos também buscar maneiras de aplicar a matemática mesmo que de forma simples, a fim de otimizar/auxiliar atividades presentes em nossa sociedade.

Diante da modelagem matemática feita neste trabalho foi possível compreendermos melhor o processo de engorda de galinhas, entender as mudanças do aumento de peso durante sua vida e determinar, de maneira clara e precisa, qual é o melhor momento para fazer o abate da ave.

Através da utilização da equação de Von Bertalanffy se mostrou um modelo matemático adequado para descrever o crescimento de galinha caipira.

Num modelo mais realista, devemos considerar a taxa de catabolismo (β) variável com o tempo, uma vez que quando o animal envelhece, hipoteticamente, a sua perda de energia depende de seus hábitos, como por exemplo se ele foi criado solto ou em regime de confinamento.

4.1 sugestões para pesquisas futuras

A seguir iremos destacar algumas sugestões de trabalhos futuro dentro do tema abordado neste trabalho.

- ▶ Fazer um experimento com animais fêmeas e machos. assim comparar os parâmetros alométricos de ambos, verificar se o tempo de abate de ambos são parecidos ou muito diferente.
- ▶ Experimento com animais na qual tenha raças distintas e fazer um comparativo dos parâmetros alométricos e o período de abate.
- ▶ Estudar a relação entre o parâmetro alométrico γ e o tempo de abate.
- ▶ Realizar esse mesmo estudo ou semelhante, para raças de caprinos e bovinos que são criados na região.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira, **Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. p. 69-85, Ed São Paulo: jun. de 2009.

BASSANEZI, R. C., **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**, 3ª Ed São Paulo: Contexto (2006).

BOYCE, William. E. DIPRIMA, Richard C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, (2006). (título original: **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 8th ed**)

FIGUEIREDO, E. A. P. et al., **Criação dos Frangos de Corte Coloniais Embrapa 041.**, IN: Instrução Técnica para o Avicultor. Embrapa, Suínos e Aves, 21 jun. 2001.

KNECHTEL, M. R., **Metodologia da pesquisa em educação: uma abordagem teórico-prática dialogada**, Curitiba: Intersaberes, 2014.

PEREIRA, Pedro Carlos; RITA, Mariane Rodrigues, **Algumas considerações Sobre Modelo Matemático e Modelagem Matemática**: Caderno Dá Licença, vol.08, Niterói: (2013), p.34-51.

OLIVEIRA, M.F.C. MELO, M.H.P., **Caderno do IME- Série Matemática**, Rio de Janeiro: (2019), p.107-119

SCAPIM, Juliana., **Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado à curvas de crescimento animal** Dissertação, UNICAMP: 2008.

GeoGebra-Applicativos Matemáticos Site:<www.geogebra.org> acesso em 25 de setembro de 2021.