



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

EDUARDO DA SILVA LIMA

DINÂMICA POPULACIONAL E PANDEMIAS

CUITÉ - PB

2021

EDUARDO DA SILVA LIMA

DINÂMICA POPULACIONAL E PANDEMIAS

Monografia apresentada à Banca Examinadora,
como exigência parcial à conclusão do Curso de
Licenciatura em Matemática, da Universidade
Federal de Campina Grande campus Cuité.

Orientadora: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco

CUITÉ – PB

2021

L732d Lima, Eduardo da Silva.

Dinâmica populacional e pandemias. / Eduardo da Silva Lima. - Cuité, 2021.

53 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2021.

"Orientação: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco".
Referências.

1. Equações diferenciais. 2. Modelo de Verhulst. 3. Modelo de Malthus.
I. Franco, Célia Maria Rufino. II. Título.

CDU 514.745.8(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

EDUARDO DA SILVA LIMA

DINÂMICA POPULACIONAL E PANDEMIAS

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande Campus Cuité.

Aprovada em: 14/10/2021

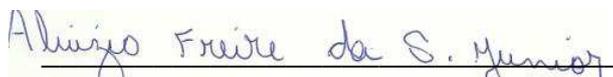
BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco - UFCG
Orientador



Prof. Dr. Luciano Martins Barros - UFCG
Examinador



Prof. Dr. Aluizio Freire da Silva Júnior - UFCG
Examinador

CUITÉ - PB

2021

A todos os professores efetivos e substitutos do Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Educação e Saúde – Cuité, que foram indubitavelmente importantes na minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente ao meu Deus por ter me guiado, sustentando e permitido que eu chegasse a concluir esse trabalho.

A minha ilustríssima professora e orientadora Célia Maria Rufino Franco, por ter aceitado me orientar, por sua humanidade, paciência, sabedoria e dedicação para com este trabalho.

A minha professora Vera Solange de Oliveira Farias por me permitir ser seu monitor bolsista e com isso, comprar o tão sonhado computador para que eu digitasse esse trabalho. Também, pelos seus ensinamentos com compaixão, alegria, humildade e sabedoria e não menos importante, por me acolher e dar conselhos valiosos.

A minha mãe Jacira Alves da Silva Lima (*In Memoriam*), por ter me ensinado valores que carrego comigo em todos os momentos, que em algum lugar deve está vibrando com a minha vitória. Obrigado por me olhar de algum lugar.

Ao meu irmão e Professor Fagner da Silva Lima por sua sabedoria, orientações e por sempre me incentivar e acreditar em mim na busca pelo diploma do ensino superior.

A minha irmã Edilene e seus filhos Éilton e Emmanuel por sempre fazerem o melhor para que eu tivesse um ambiente tranquilo para estudar e por me ajudarem com palavras de incentivo.

A meus outros dois irmãos, Robson e José Gilberto (Nêgo) por acreditarem em mim e sempre me ajudarem na caminhada, estamos juntos meus camaradas.

A todos os meus companheiros de turma que começaram comigo essa jornada e que por ventura do destino, não conseguiram terminar, mas, que ajudaram na construção do processo.

Aos meus amigos, em especial Thiago Dantas pelo incentivo e meu primo Isaac Ferreira por partilhar comigo suas dúvidas, suas realizações, suas conquistas não só as dele, como também as minhas.

A todos que torceram por mim, meu muito obrigado!

“Só se pode alcançar um grande êxito quando nos matemos fiéis a nós mesmos”

Friedrich Nietzsche

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre as equações autônomas com foco na dinâmica populacional. A escolha deste tema foi motivada devido à existente pandemia da Covid-19, onde buscamos compreender a disseminação de uma doença a partir dos modelos de Malthus e Verhulst. Inicialmente, é apresentada uma abordagem histórica do desenvolvimento das equações diferenciais. Em seguida, a teoria básica das equações diferenciais, com enfoque para as equações autônomas e análise geométrica das soluções. Com isto, foi possível analisar algumas aplicações da teoria da dinâmica populacional no contexto de pandemias e verificar como as equações autônomas são usadas para formular modelos importantes no estudo, controle e enfrentamento de pandemias. Mediante isso, podemos verificar quando haverá um possível achatamento da curva epidêmica e agir o mais rápido possível para combatê-la. Em particular, procuramos também entender a evolução da pandemia da Covid-19 sob a ótica da dinâmica populacional, o que pode servir de motivação para o estudo deste tema.

Palavras Chaves: Modelo de Verhulst. Comparação. Aplicação.

ABSTRACT

This paper aims to present a study on the autonomous equations focused on population dynamics. The choice of this topic was justified by the ongoing Covid-19 pandemic, in which we seek to understand how a disease spreads according to the Malthus and Verhulst's models. First, it is presented a background approach about the development of differential equations. Then, it is presented the basic theory of differential equations based on the autonomous equations and geometric analysis of the solutions. So, it was possible to analyze some applications related to the theory of population dynamics from the perspective of pandemics, in order to check how the autonomous equations are used to outline important models in the study, control, and fighting of pandemics. Through this, we can check when there will be a possible flattening of the epidemic curve and act as quickly as possible to combat it. In particular, we also seek to understand how the Covid-19 pandemic develops under the population dynamics, what may work as interest in the study of this topic.

Key words: Verhulst Model. Comparison. Application.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Crescimento exponencial: y em função de t para $dy/dt = ry$ ($r > 0$).....	27
Figura 2 - Modelo de Crescimento populacional	28
Figura 3 - Em função de y , a $f(y)$, para $dy/dt = r(1 - y/K)y$	29
Figura 4 - Curva epidêmica da Covid-19 na Paraíba no período de 08/04/2020 a 17/05/2020	32
Figura 5 - Curva epidêmica da Covid-19 no Brasil no período de 06/03/2020 a 11/04/2020..	33
Figura 6 - Gráfico da evolução da pandemia hipotética.....	34
Figura 7 - Curva Epidêmica da Covid-19 no Brasil (25/02/2020 à 23/03/2020)	36
Figura 8 - Curva Epidêmica da Covid-19 na Paraíba (21/03/2020 à 29/04/2020)	37
Figura 9 - Curva Epidêmica da Covid – 19 na Paraíba (08/04/2020 à 17/05/2020)	37
Figura 10 – Gráfico da solução 1 da função logística da Epidemia hipotética	38
Figura 11 - Gráfico da solução 2 da função logística da Epidemia hipotética	39
Figura 12 - Gráfico da função da solução da Equação (39)	42
Figura 13 – Gráfico da função $f(y) = \alpha y(1 - y)$	43
Figura 14 - Número total de casos de Covid-19 confirmados no Brasil e na China	51
Figura 15 - Número de infectados na Paraíba em 22/08/2020 à 16/11/2020	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Evolução da pandemia hipotética	33
Tabela 2 – Dados do Brasil e Paraíba ajustados no Statística	36
Tabela 3 – Número de infectados por dias	39

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
2. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	14
3. NOMENCLATURA E DEFINIÇÕES BÁSICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	18
3.1. Classificação quanto ao tipo:	18
3.2. Classificação quanto a ordem	18
3.3. Classificação de EDO quanto à linearidade	19
3.4. Soluções de EDO's	19
3.5. Equação linear de primeira ordem: Método dos Fatores Integrantes	20
3.6. Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem Separáveis	22
3.7. Equações Homogêneas	23
3.8. Diferenças entre Equações Lineares e Não Lineares	24
3.8.1. Existência e Unicidade de Solução	24
3.8.2. Intervalo de Definição	25
3.8.3. Solução Geral	25
3.8.4. Soluções Implícitas	25
3.9. Equações Autônomas e Dinâmica Populacional	26
3.10. Crescimento Logístico	27
4. APLICAÇÕES EM EPIDEMIAS	32
4.1. Crescimento Exponencial	32
4.2. Crescimento Logístico	37
4.3. Crescimento Logístico e a Pandemia da Covid-19	51
5. CONCLUSÃO	53
REFERÊNCIAS	54

1. INTRODUÇÃO

A evolução matemática caminhou juntamente com a processo de desenvolvimento dos povos, trazendo consigo um aparato matemático que melhorasse a qualidade de vida dos povos. Algumas equações ajudam a entender melhor as ações prolongadas de alguma atividade, como por exemplo, ajudam a entender e descrever a capitalização financeira, o resfriamento de um corpo, o crescimento e decréscimo populacional.

As equações diferenciais são o alicerce matemático para muitas áreas da ciência e das engenharias (ZILL; CULLEN, 2001). Em particular, as equações autônomas são de grande importância em campos que vão da medicina à ecologia e à economia global.

A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas acontece desde meados de 1760, pelo menos, quando Daniel Bernoulli fez trabalho relativo à Varíola (BOYCE e DIPRIMA, 2015). Em anos mais recentes, muitos modelos matemáticos foram propostos para descrever a evolução de uma doença e podem contribuir de maneira fundamental no estudo, controle e enfrentamento das epidemias (DIAS e ARAÚJO, 2021; GIANNELLA e VELHO, 2021).

Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica e tem como objetivo avaliar as equações autônomas no contexto da dinâmica populacional e relacioná-las com problemas de disseminação de uma doença. Partindo do pensamento de Malthus e de Verhulst, podemos descrever a disseminação de uma doença ou epidemia. Este que, por sua vez, será o tema central deste Trabalho de Conclusão de Curso, onde abordaremos uma visão analítica e geométrica do comportamento das soluções do modelo logístico de Verhulst.

No segundo capítulo, é apresentado a base teórica do surgimento e evolução das equações diferenciais destacando a importância do estudo dessas equações, na atualidade e ainda os precursores do estudo das equações em destaque neste trabalho.

O terceiro capítulo, trata a teoria básica das equações diferenciais, onde são apresentadas as principais definições, conceitos, métodos de soluções de algumas equações diferenciais e classificações. Foi dado um maior destaque para a teoria das equações autônomas, trazendo uma análise geométrica e analítica das mesmas no contexto do crescimento exponencial e crescimento logístico.

No quarto capítulo, foi abordado alguns problemas envolvendo disseminação de doenças, sob a orientação de modelos da dinâmica populacional, com destaque para a pandemia da Covid-19.

2. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Inúmeras são as descobertas matemáticas que ajudaram o processo evolutivo dos povos, melhorando a qualidade de vida. E o Cálculo Diferencial, também conhecido como Cálculo Infinitesimal ou Cálculo foi uma delas, contribuindo em diversas áreas com aplicações em diversos ramos da matemática e em outras ciências como Estatística, Biologia, Física, Química, Economia e outros. (SILVA, 2016).

O estudo das Equações Diferenciais inicia-se com o Estudo do Cálculo Diferencial e Integral, primeiramente, associado a problemas de mecânica e geometria, com destaque para as três leis de Newton e a lei da gravitação universal que possibilitaram obter equações diferenciais ordinárias. Para chegar as definições atuais do que é Cálculo Diferencial muito se foi modificado, aprimorado e desenvolvido ao longo do tempo.

Muitos matemáticos contribuíram para o conceito de Cálculo Diferencial e Integral e alguns deles foram: Eudoxo de Cirene (406-355 a.C) com o método da exaustão, Arquimedes de Siracusa (187-121 a.C) aprimorando o método da exaustão e com trabalhos na Quadratura da Parábola e Espirais, Zenón de Eléia (450 a.C) com o Paradoxos de Zenón (Ideia de infinito), Johannes Kepler (1571-1630) usando ideias de integração para movimentos planetários e para barris de vinho, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) com seu livro *Geometria indivisibilibus continuorum*, influenciado por Galileu e por Kepler, John Wallis (1616 -1703) com a primeira representação do símbolo do infinito. (SILVA, 2016).

A partir dessas ideias deixadas por esses cientistas, outros, puderam contribuir com o desenvolvimento do Cálculo tais como: Pierre Fermat (1607 – 1665), apoiado nas ideias de Kepler, Isaac Barrow (1630 – 1677), Isaac Newton e Gottfried Leibniz.

Isaac Newton, nascido no dia 25/12/1642, recebeu sua educação básica pela sua vó e uma escola aos redores onde morava. Desde sempre, ele demonstrava um talento sem igual para a matemática e orientado por um tio, a mãe de Isaac matriculou o mesmo na Escola de Cambrigde, famoso Trinity College, onde conheceu trabalhos de matemáticos excepcionais e recebeu aulas de Isaac Barrow (1630-1677), Lucasian professor de Geometria em Cambrigde que posteriormente ensinou Newton, e assim, começou a adquirir maturidade para fazer as suas próprias contribuições.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), nascido em Leipzig, Alemanha, estudou Teologia, Matemática, Direito, Filosofia e é considerado, às vezes, o último sábio a conseguir conhecimento universal. Como prestador de serviços diplomáticos para a família Hanover, conheceu diversos países da Europa e pessoas, um deles foi o e Christiaan Huygens (1629-

1695), Astrônomo, Físico, Matemático, que lhe indicara os Tratados de Pascal de 1658-1659 caso ele quisesse virar um matemático (este tratado tem o nome de Tratados sobre os senos num quadrante de um círculo, onde o próprio Newton destacou que depois de ler estes tratados sentiu-se inspirado para continuar seus estudos que virariam, posteriormente, o Cálculo).

Segundo Boyer (1996), por volta de 1676, as ideias de Leibniz começaram a coincidir com as já existentes feitas por Isaac Newton, entretanto, apenas em 1684 com uma publicação denominada *Nova Methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidade irracionais), foi que veio a primeira publicação de cálculo diferencial.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) criou o teorema do valor Médio que é usado até hoje e foi o primeiro a usar o nome Derivada nos seus trabalhos. A família Bernoulli com Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748) e outros, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) com definição de Limite, George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) com a Integral de Riemann e outros estudos em Integrais.

Assim como todo e qualquer ramo da matemática, as equações diferenciais tiveram influência de inúmeros matemáticos para chegar ao patamar que temos hoje em dia. É necessário enaltecer alguns nomes, pois, dentre os demais, foram eles que mais contribuíram para esse considerável estudo.

Isaac Newton (1642-1727) fez contribuições notáveis em diversas áreas de pesquisas, como Física e Matemática. Ele promulgou alguns significados básicos que apoiaram o desenrolar das Equações Diferenciais por outros estudiosos. Classificou as equações de primeira ordem como sendo $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(x, y)$ e através do conhecimento que teve em exprimir funções em termos de séries infinitas ao longo dos seus estudos, desenvolveu uma solução utilizando essas séries para uma equação do tipo $dy/dx = f(x, y)$, quando $f(x, y)$, for um polinômio em x e em y (MENDONÇA, 2021).

Outro matemático que contribuiu no desenvolvimento das Equações Diferenciais foi Leibniz (1646 -1716), influenciando o mundo matemático com novas notações, pois, ele reconhecia o valor de uma boa notação (BOYCE, 2010). Entre 1691 e 1694, Leibniz desenvolveu o método de separação de variáveis, redução das equações homogêneas a equações separáveis e o método de solução de equações lineares de primeira ordem. Também, foi responsável pela notação matemática de derivada e integral, utilizadas nos dias de hoje (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

Como Leibniz era prestador de serviço burocrático e viajava muito, ele conhecia e trocava correspondência com muitos cientistas, assim, os mais significativos avanços para as Equações Diferenciais, foram criados nessa época. Ele tinha um apreço enorme pelos irmãos Bernoulli, Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) e foi tão influenciado por seus discípulos que após uma sugestão de Jakob, trocou o termo de *calculus summatorius* para *calculus integralis* para o inverso de *calculus differentiali* (BOYER,1996).

Os irmãos Bernoulli, essa que era uma renomada família na história da matemática por produzir tantos matemáticos, foram influenciados por estudos de Wallis, Barrow, entre outros. Estes, conseguiram solucionar problemas em Mecânica pensando-os como se fossem problemas de equações diferenciais. Jakob escreveu equações para o movimento de planeta utilizando dos princípios de Newton, além de utilizar da expressão “integral” pela primeira vez em seu sentido atual. Johann em 1696 propôs o problema da braquistócrona. Este desafio foi solucionado pelos irmãos Bernoulli, Newton e Leibniz também. Outro Bernoulli que estudou as equações diferenciais, principalmente, parciais e suas aplicações foi Daniel, filho de Johann. Seu nome ficou associado à famosa “equação de Bernoulli” da mecânica dos Fluidos.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

onde, tanto ele, quanto Leibniz e seu irmão Jean, resolveram cada um à sua maneira. É importante destacar que Jean usou uma substituição, fazendo uma redução a uma equação linear, chamando:

$$z = y^{1-n}$$

Outros matemáticos e cientistas contribuíram significativamente para a teoria já existente a respeito das Equações Diferenciais, sendo eles Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Alexis Claude Clairaut (1713-1765), Jacopo Riccati (1676-1754) entre outros.

Contudo, é notável destacar ainda a imensa contribuição deixada por Euler em seus tratados, tais como: *institutiones calculi differentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768-1770, 3 volumes), onde apresentou diversos métodos de soluções de equações diferenciais. (BOYER, 1996). O jovem possuía instrução ampla, além da matemática estudou teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Deixou uma grande contribuição à matemática cujas obras somam mais de 70 volumes (BOYCE; DIPRIMA, 2015). Suas áreas de interesse cobriam todas as séries de matemáticas e muitas de aplicações. Destacamos aqui sua contribuição na formulação em linguagem matemática e o desenvolvimento de métodos para resolvê-los como, por exemplo, a teoria dos fatores integrantes e a solução geral para equações

lineares com coeficientes constantes e identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas.

No contexto da dinâmica populacional, Thomas Robert Malthus (1766 -1834), economista, observou em seu Ensaio publicado em 1798, Princípio da População, que uma população biológica aumenta a uma taxa proporcional à população. Mas, fora verificado por diversos matemáticos principalmente pelo matemático Belga Pierre François Verhulst (1804-1849) que a população não poderia crescer indefinidamente, ocasionando assim uma nova equação.

Segundo Boyce e DiPrima (2015), no final do século XVIII, muitos métodos elementares para resolver equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos. No século XIX, o interesse migrou para a investigação de questões teóricas de existência e unicidade, assim como o desenvolvimento de métodos menos elementares, como os baseados em expansão em séries de potências.

No século XX, as inúmeras equações diferenciais que resistiram a métodos analíticos levaram à investigação de métodos de aproximação numérica. Outra característica das equações diferenciais no século XX foi a criação de métodos geométricos ou topológicos, especialmente para equações não lineares. O objetivo é compreender, pelo menos qualitativamente, o comportamento de soluções de um ponto de vista geométrico, assim como analítico. Se há necessidade de mais detalhes, isso pode ser obtido, em geral, usando-se aproximações numéricas. As equações diferenciais no século XXI permanecem sendo uma fonte fértil de problemas fascinantes e importantes ainda não resolvidos (BOYCE e DIPRIMA, 2015).

3. NOMENCLATURA E DEFINIÇÕES BÁSICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma Equação Diferencial pode ser definida como sendo uma equação que contém derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a variável independente. (ZILL, 2001). E o motivo de estudarmos Equações Diferenciais é que elas nos dão suporte matemático em diversas áreas como Física, Biologia, Economia, Engenharias e outras. Alguns exemplos de aplicações de equações diferenciais são: Movimento de projéteis, plantas e satélites, Crescimento de população, Estudo do oscilador harmônico, estudo de reações químicas e outros.

As equações diferenciais podem ser classificadas segundo o seu tipo, linearidade e ordem.

3.1. Classificação quanto ao tipo:

Definição 1. Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma variável independente, ela é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO), por exemplo:

Exemplo 1. $\frac{dy}{dx} = ry$ (Equação do Crescimento Populacional);

Exemplo 2. $\frac{\delta^2\theta}{\delta x} + \frac{g}{L} \text{Sen}(\theta) = 0$ (Equação do Pêndulo Simples);

Definição 2. Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes, ela é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP), exemplo:

Exemplo 3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (Equação da Onda);

Exemplo 4. $\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (Equação do Calor);

Exemplo 5. $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{du}{dx} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Equação de Burguer).

3.2. Classificação quanto a ordem

A ordem da equação é definida pela derivada de maior ordem. Segue, exemplos de EDO's de 1ª Ordem:

Exemplo 6. $\frac{dy}{dx} = ry;$

Exemplo 7. $\frac{dy}{dt} - 5y = 1.$

Uma equação ordinária de n-ésima ordem é definida por:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}}, \frac{dy^n}{dx^n}\right) = 0.$$

3.3. Classificação de EDO quanto à linearidade

Definição 3. Uma EDO é chamada de linear quando pode ser escrita na forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(y)$$

Ainda veja que as EDO's lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- i. A variável dependente y e todas as suas derivadas são do 1º grau; e
- ii. Cada coeficiente depende apenas da variável independente x ;

Uma EDO que não é linear é dita **NÃO LINEAR**.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 8. $xdy + ydx = 0$ EDO, 1ª ordem, linear.

Exemplo 9. $y'' - 2y' + y = 0$ EDO, 2ª ordem, linear

Exemplo 10. $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 7y = e^x$ EDO, 3ª ordem, linear.

Exemplo 11. $yy'' - 3y = x$ EDO, 2ª ordem, não-linear.

Exemplo 12. $\frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = 0$ EDO, 3ª ordem, não-linear.

3.4. Soluções de EDO's

Uma EDO de 1ª ordem pode ser escrita na forma:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

Por simplicidade, vamos assumir que (1), pode ser resolvida por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2}$$

onde, f é uma função contínua.

Uma solução para a Equação (2) é uma função $y = \varphi(x)$ diferenciável, que verifica a Equação (2) para algum intervalo.

Dada uma função $f(x, y)$ devemos determinar funções $y = y(x)$ que verificam (2).
Se a função

$$f(x, y) = g(x)$$

onde g é uma função contínua, temos:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (3)$$

Para obtermos uma solução para a Equação (3), realizamos um método chamado de integração direta, isto é, integramos de ambos os lados a Equação (3), assim:

$$y(x) = \int g(x)dx + k$$

Por exemplo:

Exemplo 13. $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$, que a solução será, $\sin(x) + K$

Exemplo 14. $\frac{dy}{dx} = x^2 - 10$, que a solução será, $\frac{x^3}{3} - 10x + k$

Segundo Boyce e DiPrima (2015), a maioria das equações diferenciais lineares de primeira ordem, não podem ser resolvidas apenas pelo método anterior, assim, Leibniz descobriu um novo método, que outrora, vai ser chamado de **Fator Integrante**, para a solução. Vejamos, esse método a seguir.

3.5. Equação linear de primeira ordem: Método dos Fatores Integrantes

Uma Equação Diferencial Ordinária, linear de 1ª ordem, pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \quad (4)$$

onde, p e g são funções contínuas.

O método dos fatores integrantes consiste em multiplicar a Equação (4), por uma função $\mu(x)$, ainda indeterminada, assim, temos:

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \quad (5)$$

Observe que o primeiro membro da Equação (5) é a derivada do produto $\mu(x)y(x)$, desde que:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x),$$

Suponhamos que $\mu(x) > 0$, tem-se:

$$\frac{d \frac{d\mu(x)}{dx}}{\mu(x)} = p(x),$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, logo:

$$\ln(\mu(x)) = \int p(x)dx + k.$$

aplicando e^x , temos:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}, k = 0, \text{ sendo esse o fator Integrado.}$$

voltando para a Equação (5), obtemos:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y(x)) = \mu(x)g(x),$$

assim:

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)g(x)dx + k',$$

Portanto, a solução de (5) é dada por:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)g(x)dx + k'' \right]$$

Exemplo 15. Vamos resolver a equação:

$$xy' + 2y = 4x^2, x > 0 \quad (6)$$

Reescrevamos a Equação (6) na forma de uma EDO linear de 1ª ordem, façamos:

$p(x) = 2/x$ e $g(x) = 4x$, assim:

Vamos dividir ambos os membros da Equação (6) por x , logo teremos:

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x, x > 0$$

Determinando o fator integrante $\mu(x)$, isto é:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2 \int \frac{dx}{x}} = e^{2 \ln(x)} = e^{\ln(x)^2} = x^2$$

Daí, a solução de (6), é dada por:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)g(x)dx + k \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2} [x^2 4x dx + k] = \frac{1}{x^2} \cdot 4 \left[\int x^3 dx + k \right]$$

$$y(x) = \frac{x^4 + k}{x^2}, x > 0, \quad y(x) = x^2 + \frac{k}{x^2}, x > 0$$

Vimos ainda que, a Equação (6) tem uma infinidade de soluções. Em algumas aplicações, geralmente estamos interessados em uma solução específica $y(x)$ que tinha como valor inicial $y(x_0)$.

Assim, queremos encontrar uma função $y = y(x)$ que verifica:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (7)$$

A Equação (7) é chamada de problema de valor inicial (P.V.I).

3.6. Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem Separáveis

Vamos considerar agora a seguinte Equação Diferencial Ordinária de 1ª ordem, escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (8)$$

Vamos supor que:

$$f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

onde as funções g e h são contínuas. A equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad (9)$$

é chamada de **EDO de 1ª ordem Separável**.

A Equação (9), é resolvida por integração direta. Sendo $h(x)$ contínua, podemos denotar a primitiva de h por:

$$H(y) = \int h(y)dy$$

sabemos, que:

$$\frac{d}{dx}H(y) = \frac{d}{dx}H(y) \frac{dy}{dx} = h(y) \frac{dy}{dx}$$

mas,

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

assim:

$$\frac{d}{dx}H(y) = y(x)$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\int \frac{d}{dx}H(y)dx = \int g(x)dx + k \Rightarrow H(y) = \int g(x)dx + k$$

Portanto:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + k$$

3.7. Equações Homogêneas

Se a função à direita do sinal da igualdade na equação:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (10)$$

puder ser expressa como uma função de y/x , então a equação é dita homogênea. Tais equações sempre podem ser transformadas em equações separáveis por uma mudança da variável dependente.

Desta forma, nossa intenção é utilizar uma mudança de variável adequada de tal forma que a Equação (10) se torne uma EDO de 1ª ordem separável. Para isso, tomemos $t = 1/x$, assim:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Tomemos a seguinte mudança, $z = y/x$, daí:

$$\frac{dy}{dx} = f(1, z) \quad (11)$$

Sendo, $y = xz$, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx} \quad (12)$$

Podemos tirar de (11) e (12), que:

$$z + x \frac{dz}{dx} = f(1, z)$$

Veja:

$$x \frac{dz}{dx} = f(1, z)z$$

Ou seja, obtemos uma equação separável. Sendo:

$$\frac{1}{f(1, z)z} dz = \frac{1}{x} dx$$

Com,

$$h(z) = \frac{1}{f(1, z)z} \text{ e } g(x) = \frac{1}{x}$$

Por fim, para obtermos a solução de (10), integramos e logo após substituímos z por y/x .

3.8. Diferenças entre Equações Lineares e Não Lineares

Diante do texto já exposto até aqui, pudemos identificar algumas soluções para equações de primeira ordem, variando o método de solução se forem lineares ou separáveis. A partir de agora, vamos considerar questões gerais de equações diferenciais e importantes diferenças entre lineares e não lineares.

3.8.1. Existência e Unicidade de Solução

Ao se deparar com um Problema de Valor Inicial, trabalhando com equações de primeira ordem, em algum problema físico, é interessante saber se há alguma solução antes de tentar resolver o mesmo e além disso, se houver uma solução, você gostaria de saber se ela é única ou existem outras.

Para equações Lineares, existe o teorema a seguir, que dá respostas para essas questões:

Teorema 1. Se as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto $I: \alpha < t < \beta$, contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \varphi(t)$ que satisfaz a equação diferencial:

$$y' + p(t)y = g(t) \quad (16)$$

para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial:

$$y(t_0) = y_0 \quad (17)$$

em que y_0 é um valor inicial arbitrário dado.

Para equações diferenciais não lineares, apresentemos um teorema geral

Teorema 2. Suponha que as funções f e $\partial f/\partial x$ são contínuas em algum retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$, contendo o ponto (t_0, y_0) . Então, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$, existe uma única solução do problema de valor inicial:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (18)$$

Note, que se a equação diferencial for linear, as hipóteses do Teorema 2 se resumem ao Teorema 1. Assim, temos:

$$f(t, y) = -p(t)y + g(t) \quad e \quad \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = -p(t)$$

de modo que a continuidade de f e de $\partial f/\partial y$ é equivalente à continuidade de p e de g .

A partir das condições enunciadas no Teorema 2, notamos que elas são suficientes para garantir uma única solução para o PVI, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$, mas elas não são necessárias. A existência de uma solução (porém, não sua unicidade) pode ser estabelecida supondo apenas a continuidade de f .

3.8.2. Intervalo de Definição

Satisfazendo as hipóteses do Teorema 1, a solução da equação linear:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

sujeita a condição inicial $y(t_0) = y_0$, existe em qualquer intervalo em torno de $t = t_0$, no qual as funções p e g são contínuas. Dessa maneira, assíntotas verticais ou outras de descontinuidades da solução podem ocorrer em pontos de descontinuidade de p ou de g .

Por outro lado, uma equação não linear que satisfaz as condições do Teorema 2 e que contém um problema de valor inicial, o seu intervalo de solução pode ser difícil de determinar, tendo em vista que, mesmo mantendo as condições iniciais, a $\varphi(t)$ não é conhecida em geral e pode ser impossível determinar o ponto $(t, \varphi(t))$ em relação a região na qual o teorema permanece satisfeito. Dessa maneira, observa-se que o intervalo de existência da solução pode não ter uma relação simples com a função f na equação diferencial:

$$y' = f(t, y)$$

Partindo dessa observação, podemos identificar uma característica de problema de valor inicial para equações não lineares, que é: As singularidades da solução podem depender, de maneira essencial, tanto da condição inicial quanto da equação diferencial.

3.8.3. Solução Geral

Equações lineares e não lineares diferem no que diz respeito a solução geral das mesmas, pois, é possível obter todas as soluções de uma equação linear, logo após obtermos uma solução contendo uma constante arbitrária e atribuindo valores a esta, o que não é possível quando se trata de equações não lineares, tal qual, mesmo havendo uma solução com constante arbitrária pode-se haver outras soluções que não são obtidas apenas atribuindo valores a esta.

3.8.4. Soluções Implícitas

Um problema de valor inicial para equações lineares de primeira ordem, tal como:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int_{x_0}^x \mu(x)g(x)dx + k \right]$$

Fornece uma fórmula explícita para $y = \varphi(x)$. Desde que seja possível encontrar as primitivas equivalentes, o valor da solução em qualquer ponto pode ser determinado substituindo-se, simplesmente, o valor apropriado em x na equação. Para equações não lineares, é muito menos satisfatória. Em geral, o melhor que podemos esperar é encontrar uma equação da forma

$$F(x, y) = 0 \quad (19)$$

Envolvendo x e y que é satisfeita pela solução $y = \varphi(x)$. A Equação (19) é chamada **uma integral** ou **uma primeira integral da equação diferencial** e seu gráfico é uma curva integral ou talvez uma família de curvas integrais.

Supondo que podemos encontrar a Equação (19), então, define a solução implicitamente, ou seja, para cada valor de x , precisamos resolver para encontrar o valor correspondente a y . Na maioria dos casos, é impossível determinar a solução de forma explícita, tendo que recorrermos a cálculo numéricos para isto, e logo após encontrados os valores aproximados dos pares x e y pode-se esboçar um gráfico e sua curva integral que os admite.

Apresentemos a seguir a definição de equação autônoma e dois modelos matemáticos em dinâmica populacional desenvolvidos por Malthus e Verhulst.

3.9. Equações Autônomas e Dinâmica Populacional

Podemos definir **equações autônomas**, como sendo aquelas equações de primeira ordem, nas quais a variável independente não aparece explicitamente e tem a seguinte forma (Boyce, 2005):

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad (21)$$

Observe que a Equação (21) é separável e pode ser resolvida por métodos de soluções apresentados anteriormente. Entretanto, mostraremos uma perspectiva diferente, trazendo uma abordagem geométrica para obtermos informações qualitativas sobre as soluções, diretamente da equação diferencial, sem resolvê-la e outrora resolvendo-as.

Façamos uma análise de um Crescimento Exponencial. Seja $y = \psi(T)$ uma população de uma determinada espécie no instante t . É natural esperar que a taxa de crescimento de y seja proporcional ao valor atual de y . Desta forma, temos que:

$$\frac{dy}{dt} = ry \quad (22)$$

onde r é uma constante de proporcionalidade **chamada de taxa de crescimento ou declínio**, que dependerá do seu sinal positivo ou negativo.

Vamos supor que $r > 0$, de modo que a população está crescendo. A solução da Equação (22) com a condição inicial,

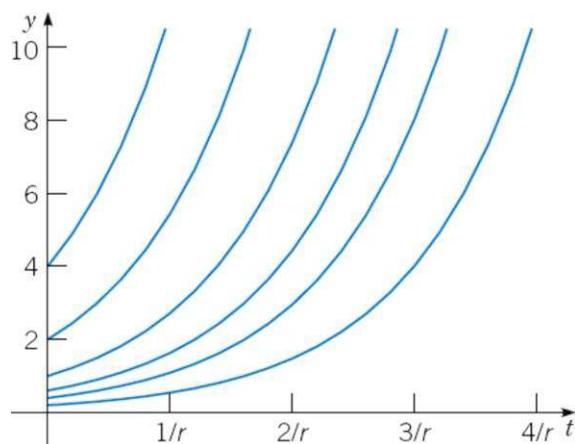
$$y(0) = y_0 \quad (23)$$

será dada por:

$$y = y_0 e^{rt} \quad (24)$$

Dessa maneira, observamos que o modelo matemático, dado pelo PVI (22) e (23) com $r > 0$, prevê que a população vai crescer exponencialmente todo o tempo, como pode ser observado na Figura 1. Sob condições ideais, observou-se que a Equação (24) é razoavelmente precisa para muitas populações, pelo menos por períodos determinados de tempo. Entretanto, é claro que tais condições ideais não podem continuar indefinidamente; alguma hora, limitações de espaço, suprimento de comida ou de outros recursos reduzirá a taxa de crescimento e terminará com o crescimento exponencial ilimitado (BOYCE; DIPRIMA, 2015)

Figura 1 - Crescimento exponencial: y em função de t para $dy/dt = ry$ ($r > 0$)



Fonte: Boyce (2015, p.120)

A Equação (22) é conhecida como **Equação de Malthus ou Modelo Malthusiano** quando se tenta modelar o crescimento populacional começando com a suposição de que a taxa de crescimento populacional depende do tamanho da população, (ZILL, 2001).

3.10. Crescimento Logístico

A partir de observações vistas pelo matemático Belga Pierre F. Verhulst em 1837 a partir do modelo Malthusiano, ele supõe que a taxa de crescimento da população depende da população e que uma população, em certo ambiente, deverá crescer até um limite máximo sustentável, ou seja, ela tende a se estabilizar. Partindo desse ponto, podemos modificar a Equação (22) de tal forma que podemos substituir a constante r e escolher uma certa $h(y)$, substituindo r , como desejarmos, sendo assim a nova equação será:

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y \quad (25)$$

Queremos escolher uma $h(y)$ tal que, quando $h(y) \cong r > 0$, y é pequeno, $h(y)$ diminui quando y aumenta e $h(y) < 0$ quando y é suficientemente grande. Uma função que atende esses critérios é $h(y) = r - \alpha y$, em que α é uma constante positiva. Assim, obtemos a equação:

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y \quad (26)$$

Essa equação é conhecida como a **Equação de Verhulst ou Equação Logística**. Podemos convenientemente escrever a Equação (26) da seguinte maneira:

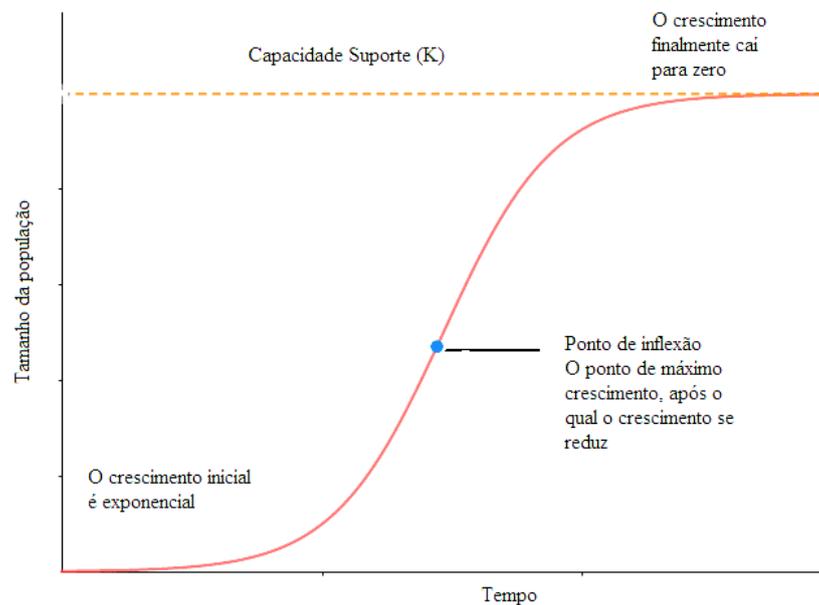
$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y \quad (27)$$

onde, $K = r / a$. A constante r é chamada de taxa de crescimento intrínseca, ou seja, a taxa de crescimento na ausência de um fator limitador.

Neste caso, as populações em crescimento, em algum momento, encontram limites ambientais que causam a redução na taxa de crescimento. A população em crescimento encontra a capacidade de suporte do meio (K).

A partir do modelo logístico podemos compreender que quando o número de indivíduos na população é muito inferior à capacidade de suporte y/K , se aproxima de zero, e o crescimento se aproxima do exponencial. Por outro lado, quando o tamanho da população se aproxima da capacidade de suporte do meio y/K , é próximo de 1, e a taxa de crescimento se aproxima de zero.

Figura 2 - Modelo de Crescimento populacional



Fonte: Autoria Própria

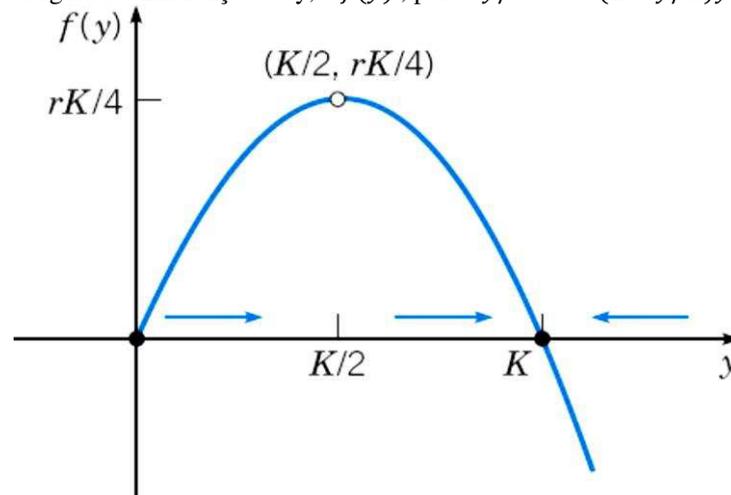
É importante para a gente compreender o que acontece quando o tamanho da população chega no ponto de inflexão, com isso, podemos verificar na Figura (2) que ao atingir o ponto de inflexão a taxa de crescimento populacional começa a se reduzir, ou seja, a população ainda está em crescimento, mas, em uma taxa relativamente menor.

Busquemos agora apresentar um esboço qualitativo correto das soluções da Equação (27). Procuremos soluções simples para a Equação (27), sendo elas funções constantes. Para tais soluções, as derivadas serão nulas, ou seja, $dy/dt = 0$ para todo t de modo que qualquer função constante, tem que satisfazer a equação algébrica

$$r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y = 0$$

Logo, as soluções constantes são $y_1 = 0$ e $y_2 = K$. Essas soluções são chamadas de Soluções de equilíbrio, já que não há variação no valor de y quando t aumenta. Seguindo, podemos encontrar também as soluções de equilíbrios da Equação (21) descobrindo as raízes de f , isto é, resolvendo a equação algébrica $f(y) = 0$. Os zeros de $f(y)$ são chamados de **pontos críticos**. Essas são algumas maneiras de identificar soluções da Equação (27) e para outras, basta desenhar o gráfico da $f(y)$ em função de y . No caso da Equação (27), $f(y) = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y$ e o gráfico é uma parábola ilustra na Figura 3.

Figura 3 - Em função de y , a $f(y)$, para $dy/dt = r(1 - y/K)y$



Fonte: Boyce (2015, p.121)

Observe que na Figura (3) as interseções com os eixos são $(0,0)$ e $(k, 0)$, correspondendo aos pontos críticos da Equação (27) e o vértice da parábola é $(K/2, rK/4)$. Note ainda que a derivada $dy/dt > 0$ para o intervalo $0 < y < K$. Então, y é uma função crescente de t quando está neste intervalo. Pode-se evidenciar isto na Figura 4 pelas setas apontando para à direita próximos ao eixo dos y . De maneira análoga, é fácil ver que se $y > K$, $dy/dt < 0$; logo y é decrescente e a seta que evidencia isto na Figura 4 aponta para à esquerda.

Da maneira vista anteriormente, temos uma análise qualitativa do comportamento das soluções. Entretanto, se quisermos obtermos dados mais específicos, como a quantidade de elementos na população em certo instante, devemos buscar resolver analiticamente a Equação (27), sujeita a condição inicial (23).

Se $y \neq 0$ e $k \neq 0$, podemos reescrever (27) na forma:

$$\frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} = r dt$$

Fazendo manipulações algébricas usando frações parciais do lado esquerdo da igualdade, obtemos:

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{K}}{\frac{1-y}{K}}\right) dy = r dt$$

Daí, integrando temos:

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{K}}{\frac{1-y}{K}}\right) dy = \int r dt$$

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + c \quad (28)$$

$$\ln\left(\frac{y}{1 - \frac{y}{K}}\right) = rt + c \quad (29)$$

onde c é uma constante arbitrária determinada pela condição inicial $y(0) = y_0$ após a integração. Já verificamos que no intervalo $0 < y_0 < K$, y permanece dentro do intervalo. Sendo assim, podemos eliminar os módulos presentes na Equação (28) e aplicar o exponencial em ambos os lados da igualdade em (29), ficando assim.

$$e^{\ln\left(\frac{y}{1 - \frac{y}{K}}\right)} = e^{rt+c} \quad (30)$$

$$\frac{y}{1 - \left(\frac{y}{K}\right)} = C e^{rt} \quad (31)$$

em que $C = e^c$. Para que seja satisfeita a condição inicial $y(0) = y_0$, devemos escolher $C = y_0 / [y_0 / K]$. Substituindo C na Equação (31) e resolvendo a mesma para y , obtemos:

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}} \quad (32)$$

Dessa forma, a solução (32) foi obtida sob a hipótese de que $0 < y_0 < K$. Outrora, se $y_0 > K$ a solução fica ligeiramente diferente, mas, também é válida. Por fim, note que (32) possui soluções de equilíbrio $y_1(t) = 0$ e $y_2(t) = K$ que correspondem às condições iniciais $y_0 = 0$ e $y_0 = K$, respectivamente.

Todas as informações geométricas obtidas anteriormente, podem ser facilmente verificadas agora, examinando a Equação (32). Em especial, se $y_0 = 0$, então ela confirma que $y(t) = 0$ para todo t . Se $y_0 > 0$ e se fizermos $t \rightarrow \infty$ em (32), obteremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(t) = \frac{y_0 K}{y_0} = K$$

Assim, para cada $y_0 > 0$, a solução tende à solução de Equilíbrio $y_2(t) = K$ assintoticamente quando $t \rightarrow \infty$. Por conseguinte, é dita solução assintoticamente estável da Equação (27) e o ponto $y = K$ é um ponto de equilíbrio ou ponto crítico ou assintoticamente estável. Assim, a população estará chegando no seu nível de saturação K , independente do tamanho inicial da população, desde que seja positivo.

Por outro lado, a situação de equilíbrio $y_1(t) = 0$ é diferente. Mesmo soluções que começam próximas a zero aumentam a medida que t cresce, e como verificamos, tendem a K quando $t \rightarrow \infty$, dessa forma, dizemos que $y_1(t) = 0$ é uma solução instável ou que $y = 0$ é um ponto de equilíbrio, ou ponto crítico, instável.

4. APLICAÇÕES EM EPIDEMIAS

Neste capítulo, vamos abordar problemas envolvendo disseminação de uma doença sob a ótica de modelos da dinâmica populacional. Em particular, vamos abordar a pandemia da Covid-19 causada pelo vírus SARV-CoV-2, um tipo de Coronavírus que infectava, originalmente, animais silvestres e passou a infectar humanos.

Diversas áreas matemáticas buscam, a partir de estudos de modelos de pandemias, fazer previsões reais sobre fenômenos através de simulações e dentre elas se destacam as áreas de Equação Diferencial, Probabilidade, Estatística, Ecologia, Ciência de Dados entre outros. (GIANNELLA e VELHO, 2020)

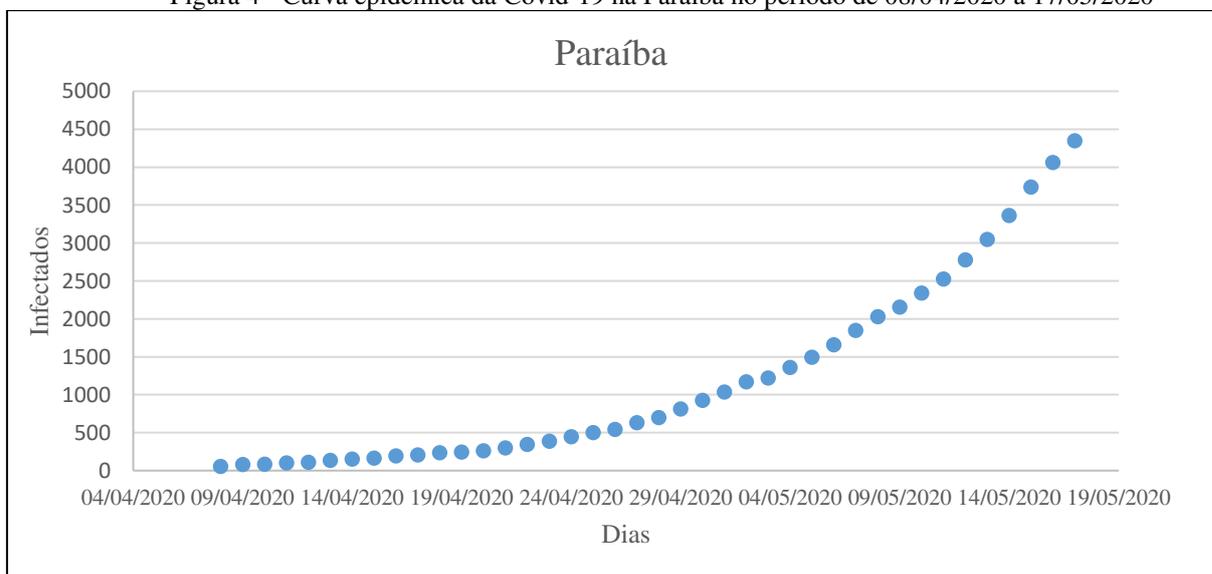
Segundo a Organização Mundial da Saúde, uma característica do covid-19, que levou a organização a declarar uma Pandemia Global em Março de 2020, foi a facilidade de transmissão do vírus e a rápida transmissão geográfica, dessa forma fora classificado como Pandemia a contaminação causada pelo Coronavírus (SARS-CoV-2).

Em dinâmica populacional, tratamos dois tipos de crescimento: o crescimento exponencial e o logístico. Vamos agora aplicar esses conceitos de dinâmica populacional para descrever a evolução de epidemias.

4.1. Crescimento Exponencial

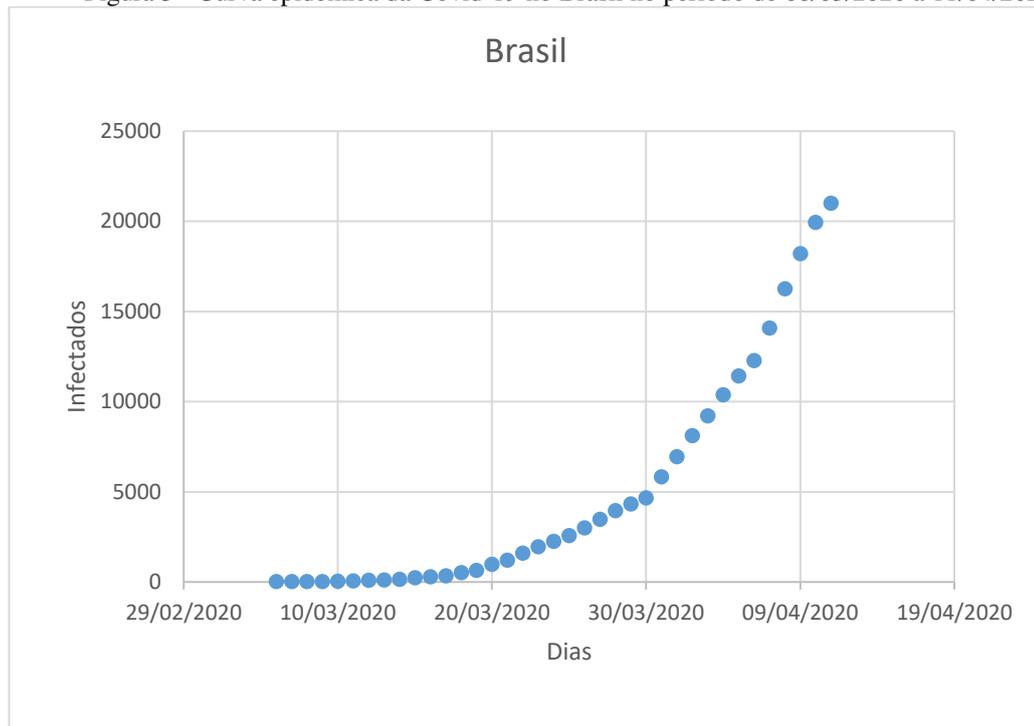
A modelagem de epidemias e a função exponencial, caminham de mãos dadas, pois, segundo estudos epidemiológicos, o primeiro período de um surto epidêmico obedece um crescimento exponencial, como pode ser visto nas Figuras 4 e 5.

Figura 4 - Curva epidêmica da Covid-19 na Paraíba no período de 08/04/2020 a 17/05/2020



Fonte: Autoria Própria

Figura 5 - Curva epidêmica da Covid-19 no Brasil no período de 06/03/2020 a 11/04/2020



Fonte: Autoria Própria

É possível definir uma relação entre o processo epidêmico e o crescimento exponencial.

Uma função é dita exponencial, quando ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(t) = c * q^t$$

Observe que em $f(t)$, o parâmetro c é o valor inicial em $t = 0$, e a constante q é o fator de crescimento.

Consideremos agora um caso hipotético para ilustrar esse fato, onde uma única pessoa infectada transmite a doença para outras três pessoas, ou seja, $c = 1$ e $q=3$. Isso resulta na função exponencial epidêmica:

$$f(t) = 1 * 3^t$$

A partir da função $f(t)$, podemos tomar valores para $t \rightarrow \infty$, porém, tomemos o intervalo $1 < t < 10$, e dessa maneira, com o fator de crescimento $q = 3$, teremos mais de 59 mil de casos após 10 dias, como pode ser verificado na Tabela 1, abaixo;

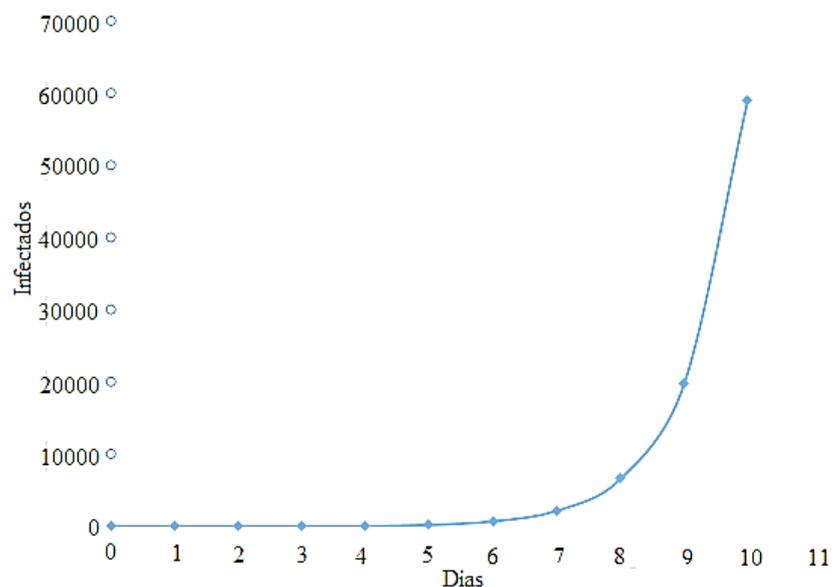
Tabela 1 - Evolução da pandemia hipotética

Tempo	Infectados
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81

5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	19683
10	59049

Fonte: Autoria Própria

Figura 6 - Gráfico da evolução da pandemia hipotética



Fonte: Autoria Própria

Note que, se γ é um número tal que $e^\gamma = q$, então:

$$cq^t = c(e^\gamma)^t = ce^{\gamma t}$$

Assim, durante a fase inicial do crescimento, a curva epidêmica pode ser modelada como a solução do modelo de Malthus:

$$I(t) = I_0 e^{\gamma t} \quad (33)$$

onde I representa os indivíduos infectados, γ é a **taxa de crescimento exponencial** e I_0 condição inicial.

Considerando que uma população total de indivíduos constante igual a N pode ser dividida em duas partes: os que tem determinada doença e podem infectar outros, e os que não têm, mas são suscetíveis. No instante t , seja $S(t)$ a proporção de indivíduos suscetíveis, e seja $I(t)$ a proporção de indivíduos infectados. Então:

$$I(t) + S(t) = N(t)$$

Suponha que a doença espalha-se através do contato entre os indivíduos doentes e os suscetíveis e seja α a taxa de infecção da doença. Os casos de mortalidade em decorrência da doença e os casos infectados que foram curados são considerados como removidos, onde β denota a taxa de remoção.

Dessa forma, a variação de infectados dI/dt ao longo do tempo é a diferença entre o número de novos infectados e a parcela de infectados que foram curados e adquiriram imunidade ou morreram, assim:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha \frac{S}{N} I - \beta I = I \left(\alpha \frac{S}{N} - \beta \right) = I \beta \left(\frac{\alpha S}{\beta N} - 1 \right)$$

Considerando que no início da pandemia:

$$\frac{S}{N} \approx 1$$

tem-se:

$$\frac{dI}{dt} \approx I \beta (R_0 - 1) \quad (34)$$

onde $R_0 = \alpha/\beta$ é o número básico da reprodução, que mede a velocidade com que a epidemia se propagava. Medidas como distanciamento social e quarentena tem o efeito de diminuir a taxa de infecção α e conseqüentemente, o R_0 .

A Equação (34) acima é uma Equação Diferencial Ordinária Separável, cuja sua solução é dada por:

$$I \approx I_0 e^{\beta(R_0-1)t}$$

ou ainda,

$$I \approx I_0 e^{(\alpha-\beta)t} \quad (35)$$

onde $I(0) = I_0$. Note que $\gamma = \beta(R_0 - 1)$ é a taxa de crescimento exponencial.

Se D é o número de dias que uma pessoa leva para se recuperar/morre então a taxa de remoção é dada por:

$$\beta = D^{-1}$$

Neste trabalho, considerou-se um período de contágio de 10 dias. Logo, $\beta = 0,1$. O valor de α pode ser obtido através do método dos mínimos quadrados.

A Equação (35) foi ajustada aos dados oficiais de infectados pelo novo Coronavírus no Brasil no período 25/02/2020 à 23/03/2020 e na Paraíba no período de 21/03/2020 à 29/04/2020 e 08/04/2020 à 17/05/2020. Para tanto, utilizou-se o programa *Statística*. A Tabela 2 apresenta

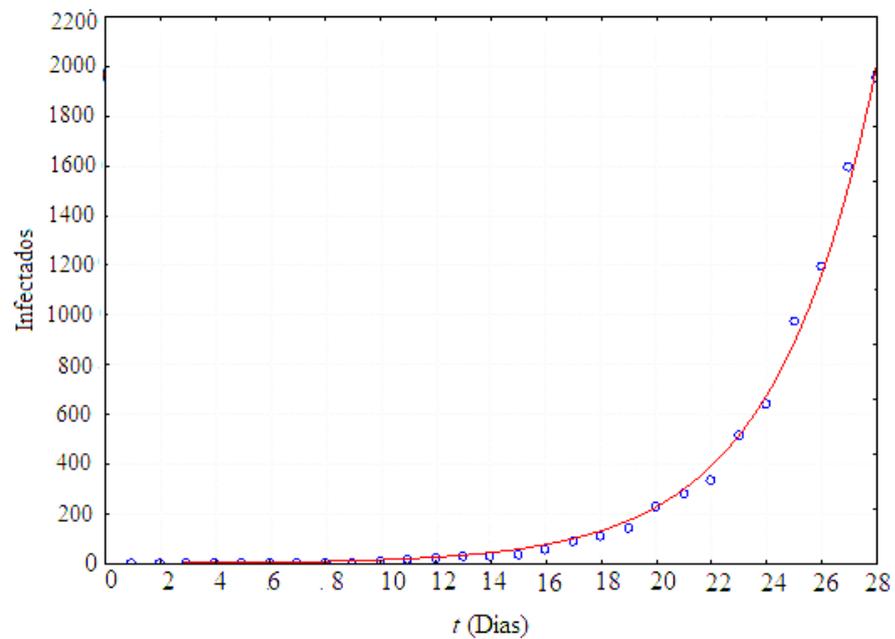
os dados iniciais utilizados, a taxa de crescimento ajustada, o número básico de reprodução e o coeficiente de determinação R^2 .

Tabela 2 – Dados do Brasil e Paraíba ajustados no *Statística*

	Período	$I(0)$	α	R_0	R^2
Brasil	25/02/2020 à 23/03/2020	1	0,371699	3,71	0,996634710
Paraíba	21/03/2020 à 29/04/2020	1	0,270256	2,70	0,942694501
Paraíba	08/04/2020 à 17/05/2020	55	0,211471	2,11	0,983609934

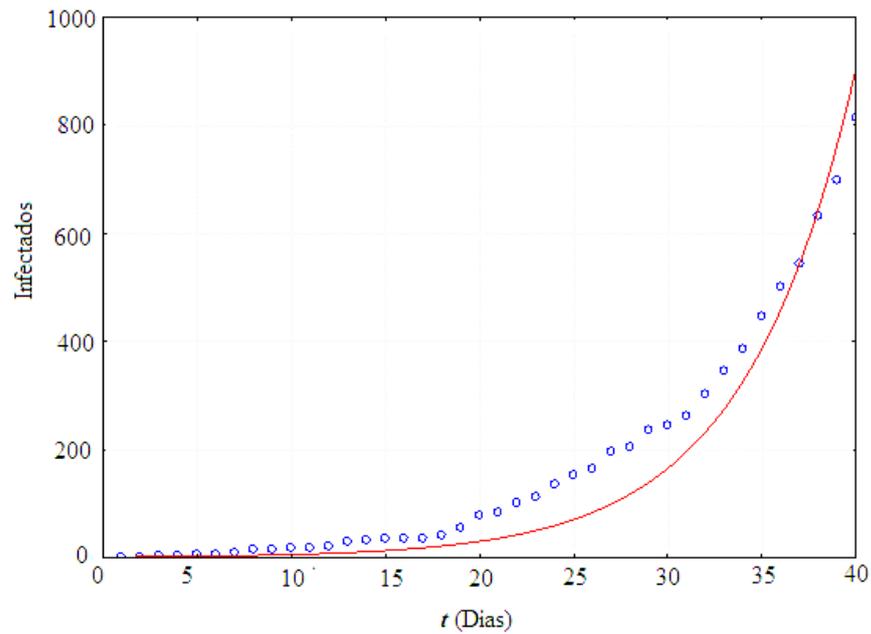
As Figuras (7), (8) e (9) mostram a comparação dos dados oficiais de infectados no Brasil e na Paraíba, respectivamente, com o modelo exponencial. Observa-se que o modelo exponencial descreve melhor o período inicial da evolução da Covid-19 no Brasil.

Figura 7 - Curva Epidêmica da Covid-19 no Brasil (25/02/2020 à 23/03/2020)



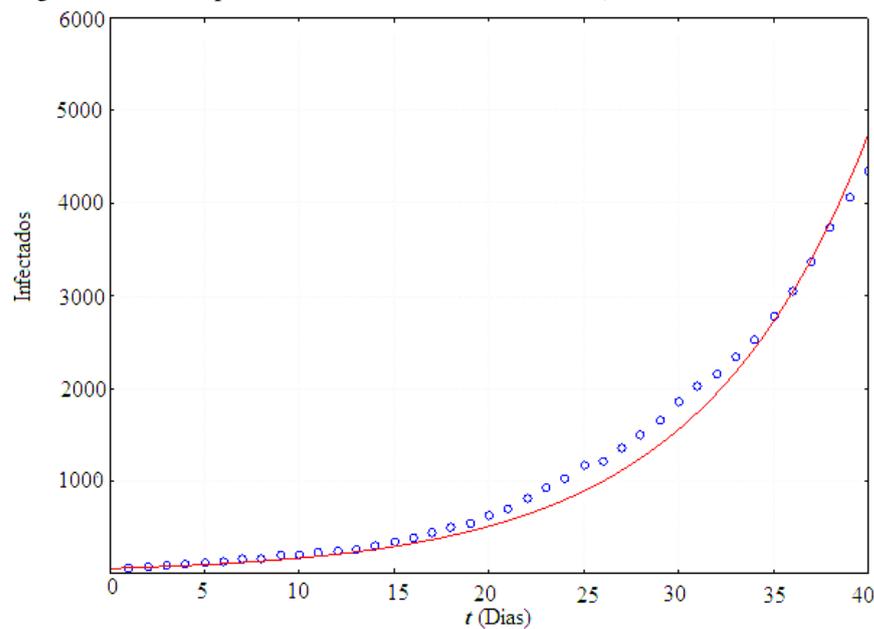
Fonte: Autoria Própria

Figura 8 - Curva Epidêmica da Covid-19 na Paraíba (21/03/2020 à 29/04/2020)



Fonte: Autoria Própria

Figura 9 - Curva Epidêmica da Covid – 19 na Paraíba (08/04/2020 à 17/05/2020)



Fonte: Autoria Própria

4.2. Crescimento Logístico

Como já fora observado anteriormente, a fase inicial de uma epidemia segue o crescimento dado pela função exponencial, mas ela acaba se tornando obsoleta no sentido de não trazer um cenário mais real para tal processo, pois com a evolução do tempo, o número de infectados chega no ponto de inflexão e a partir deste ponto deve ocorrer uma redução na taxa de crescimento até se aproximar do número máximo de infectados (capacidade de suporte).

Desta forma, a função logística tem essas características e o processo completo de pandemia pode ser modelado pelo crescimento logístico (GIANELLA, 2020)

Vamos apresentar a seguir, aplicações do modelo logístico na disseminação de uma doença.

Aplicação 1: A função logística apresentada no Capítulo 3 (Equação 32), pode ser escrita na forma (Giannella e Velho, 2020):

$$f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$$

onde, a $f(t)$ é o número de casos no tempo t , a constante $b > 0$ é uma constante máxima de f é dada pelo valor limite c . Além disso, o valor inicial de f , o número de casos no início da doença, é dado por:

$$f(0) = \frac{c}{(1 + a)}$$

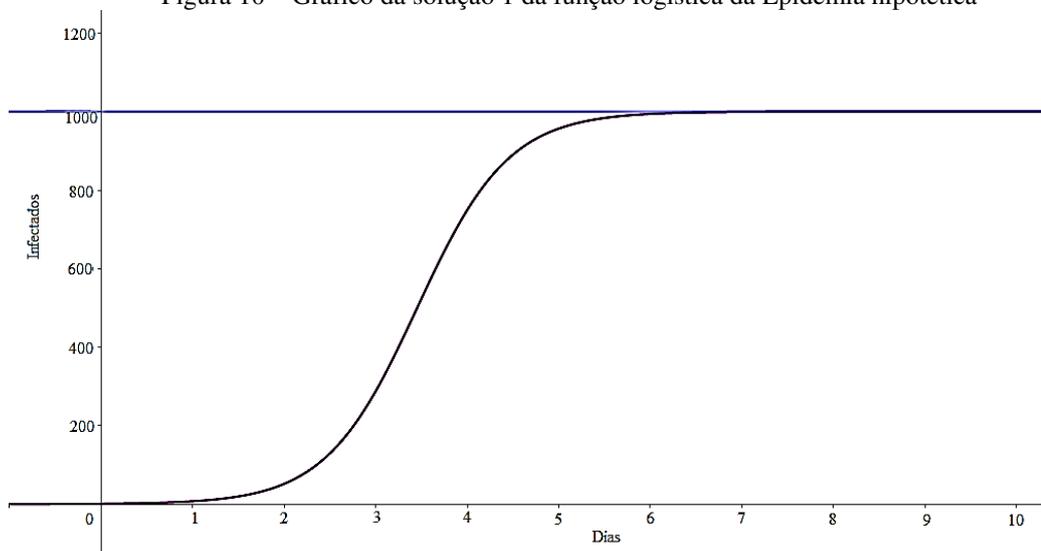
e a taxa máxima do crescimento ocorre quando $t = \ln(a)/b$ e $f(t) = c/2$.

De maneira similar, podemos usar uma situações hipotéticas de epidemias, para avaliar o efeito do parâmetro b na curva epidêmica.

Suponhamos dois casos hipotéticos onde o número máximo de pessoa doentes é 1000 (tamanho da população), ou seja, a população máxima desse ambiente será igual a 1000 e o processo endêmico começa com apenas uma pessoa infectada e que pode infectar duas pessoas e outro onde pode infectar três outras pessoas. Façamos os cálculos para um período de 10 dias.

Solução Caso 1: Considere na função logística $c = 1000$, $a = 999$, $b = 2$, e $0 < t < 10$. Dessa forma, verifica-se no gráfico abaixo que a curva cresce de forma acelerada até perto de $t = 3,45$, onde começa a desacelerar para atingir o patamar de 1000.

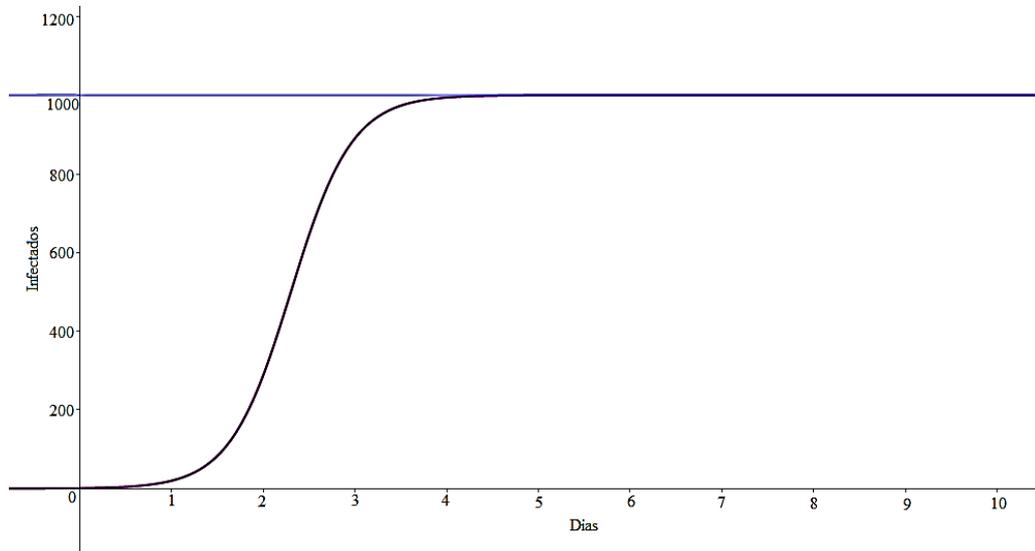
Figura 10 – Gráfico da solução 1 da função logística da Epidemia hipotética



Fonte: Autoria Própria

Solução Caso 2: Considere na função logística $c = 1000$, $a = 999$, $b = 3$, e $0 < t < 10$. Dessa forma, verifica-se no gráfico abaixo que a curva cresce de forma acelerada até perto de $t = 2,3$, onde começa a desacelerar para atingir o patamar de 1000.

Figura 11 - Gráfico da solução 2 da função logística da Epidemia hipotética



Fonte: Autoria Própria

Confira na Tabela 3 o número aproximado de infectados por dia, dos dois casos hipotéticos e confira também a taxa de crescimento máximo para ambos os casos.

Tabela 3 – Número de infectados por dias

Dias	Número de Infectados Caso 1	Número de Infectados Caso 2
1	7,342	19,70
2	51,82	287,66
3	287,66	890,244
4	748,99	993,89
5	956,61	999,59
6	993,89	999,98
7	999,16	999,99924
8	999,8875	999,9999623
9	999,9847	999,9999981
10	999,9979	999,9999999

Fonte: Autoria Própria

Observa-se que aumentando o valor do parâmetro b , de 2 para 3, o ponto de inflexão é atingido mais rapidamente, conseqüentemente a doença se propaga de forma mais rápida.

Aplicação 2 (Zill-Cullen,2007): Na disseminação de uma doença contagiosa, uma virose, por exemplo, é razoável supor que a taxa de disseminação dx/dt , seja proporcional não somente ao número de pessoas, $x(t)$, contaminadas, mas também ao número de pessoas, $y(t)$ que ainda não foram contaminadas, isto é,

$$\frac{dx}{dt} = rxy$$

onde r é a constante de proporcionalidade. Se uma pessoa infectada for introduzida em uma população de n pessoas, então x e y estão relacionados por:

$$x + y = n + 1$$

Assim,

$$\frac{dx}{dt} = rx(n + 1 - x) \quad (36)$$

E a condição inicial óbvia que acompanha a equação acima é $x(0) = 1$. A Equação (36) de primeira ordem não linear é um caso especial da Equação Logística.

Exemplo 16 (Zill-Cullen, 2007): Suponha que um estudante infectado com um vírus da gripe retorne a uma faculdade isolada no campus onde se encontram 1000 estudantes. Presumindo que a taxa na qual o vírus se espalha é proporcional não somente à quantidade x de alunos infectados, mas também à quantidade de alunos não infectados, determine o número de alunos infectados após 6 dias se ainda é observado que depois de 4 dias $x(4) = 50$.

Solução: Seja $x(t)$ o número de alunos infectados e t o tempo (em número de dias). Devemos resolver a seguinte equação diferencial;

$$\frac{dx}{dt} = rx(1000 - x) \quad (37)$$

com a condição inicial $x(0) = 1$.

Podemos resolver (37) por meio de separação de variáveis, frações parciais e por fim, chegarmos ao resultado que desejarmos, entretanto, para uma nova abordagem façamos a solução utilizando os conceitos descritos na seção (3.10) que fora de crescimento logístico e resolvamos a Equação (37) por meio de comparação com a Equação (27). Assim, temos que a Equação (37) pode ser reescrita como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(1000 - x) \\ \frac{dx}{dt} &= r(1000 - x)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= [r(1000 - x)x] * \left(\frac{1000}{1000}\right) \\
\frac{dx}{dt} &= \left[\frac{1000 * r(1000 - x)x}{1000} \right] \\
\frac{dx}{dt} &= 1000r \left[\frac{(1000 - x)x}{1000} \right] \\
\frac{dx}{dt} &= 1000r \left[\frac{(1000 - x)}{1000} \right] x \\
\frac{dx}{dt} &= 1000r \left[\frac{1000}{1000} - \frac{x}{1000} \right] x \\
\frac{dx}{dt} &= 1000r \left[1 - \frac{x}{1000} \right] x
\end{aligned} \tag{38}$$

Desta forma, podemos reparar que a Equação (38) ficará no formato da Equação (27), assim, podemos retirar que:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}} \\
x &= \frac{1 * 1000}{1 + (1000 - 1)e^{-1000rt}} \\
x &= \frac{1000}{1 + (999)e^{-1000rt}}
\end{aligned}$$

resolvendo para $x(4) = 50$, temos que:

$$\begin{aligned}
50 &= \frac{1000}{1 + (1000 - 1)e^{-1000r(4)}} \\
50 &= \frac{1000}{1 + (999)e^{-4000r}} \\
(1 + (999)e^{-4000r})50 &= 1000 \\
(1 + (999)e^{-4000r}) &= \frac{1000}{50} \\
(1 + (999)e^{-4000r}) &= 20 \\
\left(1 + (999)\frac{1}{e^{4000r}}\right) &= 20 \\
\left(e^{4000r}(1) + (999)\frac{1}{e^{4000r}}(e^{4000r})\right) &= 20(e^{4000r}) \\
e^{4000r} + 999 &= 20(e^{4000r}) \\
e^{4000r} - 20(e^{4000r}) &= -999 \\
-19(e^{4000r}) &= -999 \\
(e^{4000r}) &= \frac{-999}{-19} \\
\ln(e^{4000r}) &= \ln\left(\frac{999}{19}\right)
\end{aligned}$$

$$4000r = \ln\left(\frac{999}{19}\right)$$

$$r = \frac{\ln\left(\frac{999}{19}\right)}{4000}$$

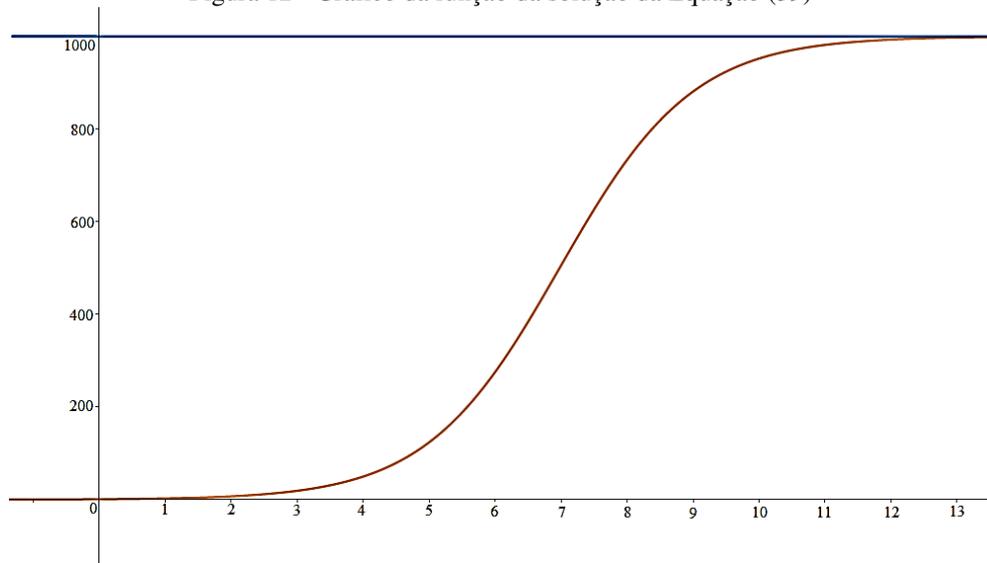
$$r = 9.90578 \times 10^{-4}$$

$$r = 0.00099$$

Verifiquemos agora o gráfico da função:

$$x(t) = \frac{1000}{1 + (999)e^{-0,99t}} \quad (39)$$

Figura 12 - Gráfico da função da solução da Equação (39)



Fonte: Autoria Própria

Para $x = 6$, temos:

$$x(6) = \frac{1000}{1 + (999)e^{-0,99(6)}}$$

$$x(6) = \frac{1000}{1 + (999)e^{-5,94}} = 276$$

Aplicação 3 (Boyce-DiPrima, 2015): Suponha que uma dada população pode ser dividida em duas partes: Os que têm determinada doença e podem infectar outros, e os que não têm, mas são suscetíveis. Seja x a proporção de indivíduos suscetíveis, e seja y a proporção de indivíduos infectados; então $x + y = 1$. Suponha que a doença espalha-se através do contato entre os elementos doentes da população e sãos, e que a taxa de disseminação dy/dt é proporcional ao número de tais contatos. Além disso, suponha que os elementos de ambos os grupos movem-se livremente, de modo que o número de contatos é proporcional ao produto de x e y . Como $x = 1 - y$, obtemos o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1 - y), \quad y(0) = y_0 \quad (40)$$

em que α é um fator de proporcionalidade positivo e y_0 é a proporção inicial de indivíduos infectados.

- Encontre os pontos de equilíbrio para a Equação Diferencial (40) e determine se cada um deles é assintoticamente estável, semiestável ou instável.
- Resolva o problema de valor inicial (40) e verifique se as conclusões a que você chegou no item (a) estão corretas. Mostre que $y(t) \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$, o que significa que, finalmente, a população inteira ficará doente.

Solução letra a.

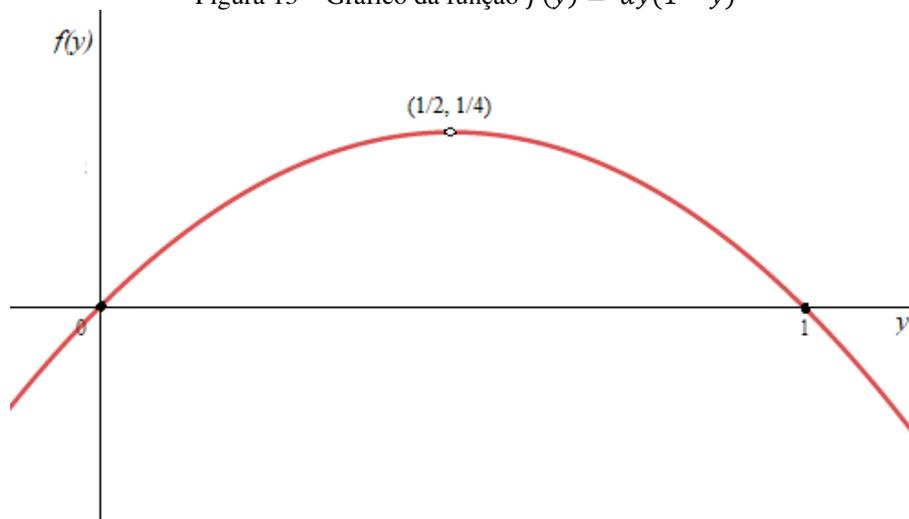
Para encontrarmos as soluções de equilíbrio ou pontos críticos, analisemos aonde a derivada se anula, sendo assim, vejamos:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1 - y)$$

Podemos notar que os pontos onde a derivada se anula é quando $y_1 = 0$ ou $y_2 = 1$, daí temos nossas soluções de equilíbrio ou pontos críticos.

Para sabermos se as soluções encontradas são soluções estáveis, semiestáveis ou instáveis, Façamos um esboço gráfico da Equação (40) desenhando o gráfico em função de $f(y)$, no caso $f(y) = \alpha y(1 - y)$. O gráfico corresponde a parábola indicada na Figura 13.

Figura 13 – Gráfico da função $f(y) = \alpha y(1 - y)$



Fonte: Autoria Própria

Podemos verificar que os pontos $y = 0$ e $y = 1$ são pontos críticos ou soluções de equilíbrio, ainda, observa-se que ao se aproximar da solução $y_2 = 1$, a população sugerida se aproxima do seu nível de saturação ou capacidade de sustentação ambiental, desta forma, esta solução é dita como Assintoticamente estável. Por outro lado, a solução $y_1 = 0$, tem um comportamento diferente, tendo em vista que para que a população não seja quase infectada, o

seu valor tem que permanecer próximo de zero. Sendo assim, a solução $y_1 = 0$ é dita como solução de equilíbrio instável.

Solução letra B

Note que a Equação (40) é uma Equação Diferencial Ordinária Separável, sendo assim, podemos resolvê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \alpha y(1 - y) \\ \frac{dy}{y(1 - y)} &= \alpha dt\end{aligned}\quad (41)$$

Podemos resolver a primeira parte da Equação (41) parte por frações parciais, e integrando ambos os lados, temos:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y} \right) dt &= \int \alpha dt \\ \ln|y| - \ln|1 - y| &= \alpha t + c\end{aligned}$$

Usando as propriedades da função logaritmo natural, temos:

$$\ln \left| \frac{y}{y - 1} \right| = \alpha t + c$$

Aplicando em ambos os lados da expressão a função exponencial, temos:

$$\begin{aligned}e^{\ln \left| \frac{y}{y - 1} \right|} &= e^{\alpha t + c} \\ \frac{y}{y - 1} &= Ce^{\alpha t}\end{aligned}$$

onde podemos reescrever em função $y(t)$, ficando:

$$\begin{aligned}\frac{y}{y - 1} &= Ce^{\alpha t} \\ y &= Ce^{\alpha t} (y - 1) \\ y &= yCe^{\alpha t} - Ce^{\alpha t} \\ Ce^{\alpha t} &= yCe^{\alpha t} - y \\ Ce^{\alpha t} &= y(Ce^{\alpha t} - 1) \\ y(t) &= \frac{Ce^{\alpha t}}{(Ce^{\alpha t} - 1)} =\end{aligned}\quad (42)$$

Por (42), temos que quando $t = 0 \rightarrow y(0) = y_0$, daí:

$$\frac{y_0}{y_0 - 1} = C \quad (43)$$

e por fim:

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1)e^{-\alpha t}}$$

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1 + y_0)e^{-\alpha t}}$$

Para obtermos a mesma solução, mas por um método diferente, façamos a resolução desta aplicação por comparação ao formato descrito na seção (3.10) que trata a respeito de uma Equação Logística, desta forma temos:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1 - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(1 - y)y$$

$$\frac{dy}{y(1 - y)} = \alpha dt$$

Por comparação, observamos que: $K = 1$, $r = \alpha$ e pela condição inicial $y(0) = y_0$. Assim, calculemos o valor da constante C .

$$C = \frac{y_0}{1 - \left(\frac{y_0}{K}\right)}$$

$$C = \frac{y_0}{1 - \left(\frac{y_0}{1}\right)}$$

$$C = \frac{y_0}{1 - y_0}$$

$$C = \frac{y_0}{y_0 - 1}$$

e por fim, a solução será dada por:

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

$$y = \frac{y_0(1)}{y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}}$$

$$y = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}}$$

E agora, calculemos o limite da equação para quando $t \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow 1$

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}} = 1$$

$$\frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha \infty}} = 1$$

$$\frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0) * 0} = 1$$

$$\frac{y_0}{y_0} = 1$$

$$1 = 1$$

como queríamos demonstrar.

Aplicação 4 (Boyce-DiPrima, 2015): Algumas doenças (como tifo) são disseminada por portadores, indivíduos que podem transmitir a doença, mas que não exibem sintomas aparentes. Sejam x e y , respectivamente, as proporções suscetíveis e portadores na população. Suponha que os portadores são identificados e removidos da população a uma taxa β , de modo que:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y \quad (44)$$

Suponha, também, que a doença se espalha a uma taxa proporcional ao produto de x e y ; logo,

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha xy \quad (45)$$

- Determine y em qualquer instante de tempo t resolvendo a Equação (44) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.
- Use o resultado do item (a) para encontrar x em qualquer instante t sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$.
- Encontre a proporção da população que escapa da epidemia calculando o valor limite de x quando $t \rightarrow \infty$.

Solução letra a.

Primeiro, vamos identificar os dados que já temos, que são:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y, \quad \frac{dx}{dt} = -\alpha xy, \text{ e } y(0) = y_0$$

vamos resolver primeiro a Equação (45)

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y$$

observe que esta equação é uma Equação Diferencial Ordinária Separável, daí temos:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\beta dt$$

integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\beta dt \Rightarrow \ln|y| = -\beta t + c$$

aplicando a função exponencial em ambos os lados, ficamos com:

$$\begin{aligned}\ln|y| &= -\beta t + c \\ e^{\ln|y|} &= e^{-\beta t + c}\end{aligned}$$

usando as propriedades da função exponencial e o fato de e^c ser constante e denotamos por k , temos:

$$\begin{aligned}e^{\ln|y|} &= e^{-\beta t + c} \\ y &= e^c e^{-\beta t} \\ y &= k e^{-\beta t}\end{aligned}\tag{46}$$

E por fim, apliquemos o Problema de Valor Inicial em (46)

$$\begin{aligned}y &= k e^{-\beta t} \\ y(t) &= y_0 e^{-\beta t}\end{aligned}$$

Solução Letra b

Recordemos que no item (a) encontramos uma solução dada por:

$$y(t) = y_0 e^{-\beta t}$$

a partir disso, podemos encontrar uma outra solução substituindo o valor de y na Equação (46) e resolvendo-a, da seguinte maneira:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha xy$$

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x y_0 e^{-\beta t}\tag{47}$$

note que a Equação (48) é uma equação diferencial ordinária separável, assim fazamos:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x y_0 e^{-\beta t}\tag{48}$$

$$\frac{dx}{x} = -\alpha y_0 e^{-\beta t} dt\tag{49}$$

integrando ambos os lados da Equação (49), temos:

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\alpha y_0 e^{-\beta t} dt$$

$$\ln|x| = \frac{\alpha}{\beta} y_0 e^{-\beta t} + c$$

agora apliquemos a função exponencial em ambos os lados:

$$e^{\ln|x|} = e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0 e^{-\beta t} + c}$$

$$e^{\ln|x|} = C e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0 e^{-\beta t}}$$

$$x = C e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0 e^{-\beta t}}$$

E por fim, vamos resolver o Problema de Valor inicial e deixar na forma de $x(t)$. Para $x(0) = x_0$, temos:

$$\begin{aligned}x &= C e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0 e^{-\beta t}} \\x_0 &= C e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0 e^{-\beta(0)}} \\x_0 &= C e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0}\end{aligned}$$

Vamos agora, isolar o valor da constante C , assim, obtemos:

$$\begin{aligned}x_0 &= C e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0} \\C &= \frac{x_0}{e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0}} \\C &= x_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} y_0}\end{aligned}$$

Daí, deixando na forma de $x(t)$, temos:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} y_0} e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0 e^{-\beta t}} \\x(t) &= x_0 e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0 (e^{-\beta t} - 1)}\end{aligned}$$

Solução letra c.

Quando $t \rightarrow \infty$, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x_0 e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0 (e^{-\beta t} - 1)} \\x_0 e^{\frac{\alpha}{\beta} y_0 (0 - 1)} \\x_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} y_0}\end{aligned}$$

Assim, a proporção da população que escapa da epidemia é de:

$$x_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} y_0}$$

Aplicação 5 (Boyce-DiPrima, 2015): O trabalho de Daniel Bernoulli em 1760 tinha como objetivo avaliar o quão efetivo estava sendo um programa controverso de inoculação contra a varíola, que era um grande problema de saúde pública da época. Seu modelo se aplica igualmente bem a qualquer outra doença que, uma vez adquirida, se o paciente sobreviver, ganha imunidade para o resto da vida.

Considere o conjunto de indivíduos nascidos em dado ano $t = 0$ e seja $n(t)$ o número desses indivíduos que sobrevivem t anos depois. Seja $x(t)$ o número de elementos desse conjunto que ainda não tiveram varíola até o ano t e que são, portanto, suscetíveis. Seja β a taxa

segundo a qual indivíduos suscetíveis contraem varíola e seja v a taxa segundo a qual pessoas que contraem varíola morrem da doença. Finalmente, seja $\mu(t)$ a taxa de morte por qualquer indivíduo suscetível varia, é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = -[\beta + \mu(t)]x \quad (50)$$

O primeiro termo na expressão à direita do sinal de igualdade na Equação (50) é a taxa segundo o qual os indivíduos suscetíveis contraem a doença, e o segundo termo é a taxa segundo a qual eles morrem de outras coisas. Temos também:

$$\frac{dn}{dt} = -v\beta x - \mu(t)n \quad (51)$$

Em que dn/dt é a taxa de mortalidade do conjunto inteiro, e os dois termos à direita do sinal de igualdade são devidos à varíola e às outras causas, respectivamente.

a) Seja $z = x/n$ e mostre que z satisfaz o problema de valor inicial:

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z(1 - vz), \quad z(0) = 1 \quad (52)$$

Observe que o problema de valor inicial (52) não depende de $\mu(t)$.

b) Encontre $z(t)$ resolvendo a equação (52).

c) Bernoulli estimou que $v = \beta = 1/8$. Usando esses valores, determine a proporção de indivíduos com 20 anos que ainda não tiveram varíola.

Solução da letra a

Primeiro, façamos uma análise da função substituição e da derivada. Seja $z = x/n$, temos:

$$\begin{aligned} z &= x/n \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{x'n - xn'}{n^2} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\frac{dx}{dt}n - x \frac{dn}{dt}}{n^2} \end{aligned}$$

façamos uma reorganização algébrica na expressão, ficando ela:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{n \frac{dx}{dt}}{n^2} - \frac{x \frac{dn}{dt}}{n^2} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{n} \frac{dx}{dt} - \frac{x}{n^2} \frac{dn}{dt} \end{aligned} \quad (53)$$

de (50), (51) e (53), podemos reescrever dz/dt como sendo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{n} \frac{dx}{dt} - \frac{x}{n^2} \frac{dn}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{n} \{-[\beta + \mu(t)]x\} - \frac{x}{n^2} [-v\beta x - \mu(t)n]$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{n} \{-\beta x - \mu(t)x\} + \frac{x^2}{n^2} v\beta + \frac{x}{n} \mu(t)$$

isolando o x , temos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{n} [-\beta - \mu(t) + v\beta \frac{x}{n} + \mu(t)]$$

retirando os termos com sinais opostos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{n} [-\beta + v\beta \frac{x}{n}]$$

e voltando a variável original, ficamos com:

$$\frac{dz}{dt} = z[-\beta + v\beta z]$$

$$\frac{dz}{dt} = -z\beta + v\beta z^2$$

$$\frac{dz}{dt} = -z\beta(1 - vz)$$

Dessa forma, podemos observar que o PVI (53), não depende de $\mu(t)$.

Solução da letra b:

Observe que a Equação (52), pode ser escrita na forma da Equação (27) e resolvida como está descrito na seção (3.10), desta forma, obtemos:

$$\frac{dz}{dt} = -z\beta(1 - vz)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta(1 - vz)z$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta \left(1 - \frac{z}{\frac{1}{v}}\right)z$$

seja $k = \frac{1}{v}$, $r = -\beta$ e $z(0) = 1$, temos:

$$z = \frac{z_0 K}{z_0 + (K - z_0)e^{-rt}}$$

$$z = \frac{1 * \frac{1}{v}}{1 + \left(\frac{1}{v} - 1\right) e^{-(-\beta)t}}$$

$$z = \frac{v}{v} * \frac{1 * \frac{1}{v}}{1 + \left(\frac{1}{v} - 1\right) e^{\beta t}}$$

$$z = \frac{v}{v + (1 - v)e^{\beta t}}$$

Solução letra c.

Vamos substituir os seguintes valores, $v = \beta = 1/8$, para $t = 20$, ficamos com.

$$z(20) = \frac{1}{1/8 + (1 - 1/8)e^{(1/8)*(20)}}$$

$$z(20) = 0.0927$$

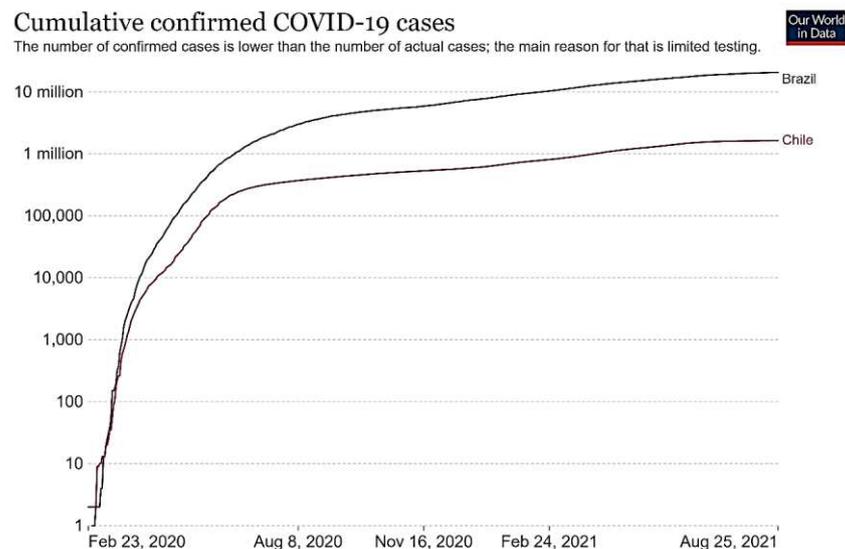
4.3. Crescimento Logístico e a Pandemia da Covid-19

Consideremos que a infecção pelo novo Coronavírus leva a três possibilidades:

(1) ser portador do vírus assintomático; (2) desenvolver a doença e ser curado e; (3) desenvolver a doença e falecer. As pessoas mencionadas na (1) e (2) se tornam imunes ao vírus. Então, assim, a disponibilidade de recursos para o vírus (suscetíveis) vai se reduzindo à medida que ele se espalha, ou seja, aproximando-se da capacidade suporte.

Assim, a taxa de infectados depende do número de portadores do vírus e, também, do número de pessoas suscetíveis ao vírus. Excluimos dessa conta, gradativamente, o número de pessoas que se tornam imunes, observa-se a redução da disponibilidade do recurso para o vírus. Desta maneira, podemos supor que à medida que o vírus se alastra, ele tende ao crescimento logístico. Para ilustrar essa tendência, observe o gráfico comparativo do número de novas pessoas infectadas no Brasil e na china (Figura 14) disponível em Our World In Data (acesso em 26 de agosto de 2021).

Figura 14 - Número total de casos de Covid-19 confirmados no Brasil e na China

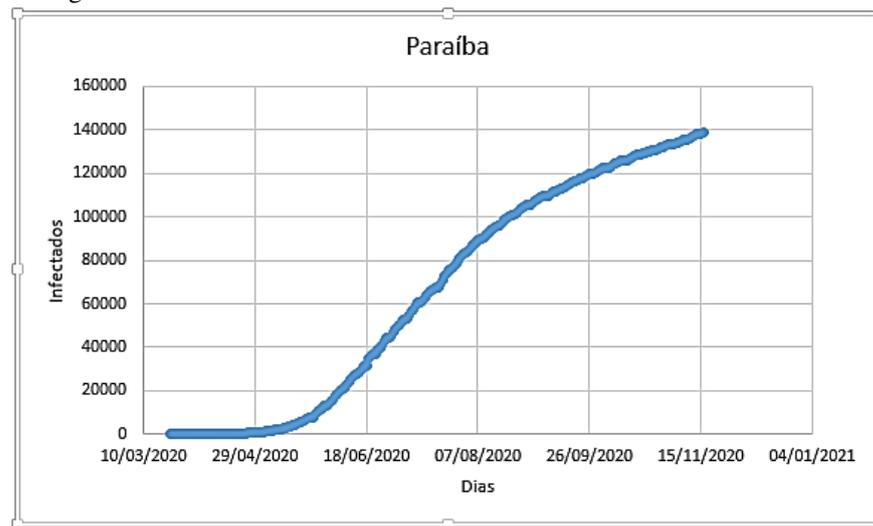


Fonte: Our World in Data (Acesso: 26 de agosto de 2021).

Vale salientar que, o famoso achatamento da curva que ouvimos tanto falar em telejornais e em outros meios de comunicação e informação, não acontecem de forma natural, ou seja, sem a interferência da sociedade não se pode esperar uma estabilização natural, contudo, através das medidas tomadas pelos governos, orientados pela Organização Mundial da Saúde, buscamos diminuir a expansão do vírus.

O mesmo segue para a Figura 15 que mostra os dados de infectados na Paraíba no período de 22/08/2020 a 16/11/2020. Em 27 de julho de 2020, observa-se um provável ponto de inflexão na evolução da doença;

Figura 15 - Número de infectados na Paraíba em 22/08/2020 à 16/11/2020



Fonte: Autoria Própria

Esse gráfico mostra um possível achatamento da curva de um modelo logístico, isso nos leva a concluir que as medidas adotadas pelo governo da Paraíba e da população começaram a surtir efeito e com isso, começaria a ter uma estabilização nos novos números de casos.

5. CONCLUSÃO

Através deste trabalho, foi possível entender um pouco da origem das equações diferenciais, seus principais cientistas que contribuíram para o desenvolvimento do tema e suas aplicações. As Equações Diferenciais é uma área muito atrativa para se estudar, desta maneira, sempre haverá matemáticos e pesquisadores que recorrerão a ela para ajudar a entender os fenômenos da natureza dentre outras coisas.

De forma prática, buscou-se introduzir a teoria básica a respeito das Equações Diferenciais e diante disso, fizemos um estudo das Funções Autônomas e Dinâmica Populacional com ênfase no crescimento exponencial e logístico com aplicações em pandemias.

Após esse estudo sobre as Funções Autônomas e Dinâmica populacional, compreendeu-se que as funções em destaque caminham em união com pandemia, quando estas estão aliadas e alinhadas aos números das doenças e/ou epidemias e diante disso e da análise dos dados gráficos, percebemos que podemos fazer previsões de quando haverá um possível achatamento da curva epidêmica e provisões das possíveis medidas que poderão ser adotadas para a diminuição da epidemia.

Foi possível facilitar o entendimento de alguns aspectos da pandemia através de uma visão da dinâmica populacional. Por outro lado, este estudo pode servir de motivação para estudar os modelos de dinâmica populacional.

REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3ª Ed. São Paulo: Contexto 2006.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução: Valéria de Magalhães Iório. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática** / Carl B. Boyer, revista por Uta C, Merzabach; tradução Elza F. Gomide – 2ª ed. - - São Paulo: Blüncher,1996.
- Dennis G. Zill; Michael R. Cullen; **Equações Diferenciais**, Terceira Edição, volume 1/.2001
- DIAS, Gabriela Moutinho de Souza; ARAÚJO, Luiz Henrique da Costa, 2020. **Modelagem matemática para epidemia de Covid-19 no Brasil**. Instituto Militar de Engenharia. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em:
<www.rmct.ime.br/arquivos/RMCT_2_tri_2020/Artigo2.pdf>, acesso em: setembro de 2021.
- DORNELLES, A.F. **Explorando ciclos limite em modelos de dinâmica populacional**. 2002. Dissertação do curso de pós-graduação em matemática aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, novembro de 2002.
- EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. Philadelphia, PA: SIAM, 2005.
- GIANNELLA, Júlia; VELHO, Luiz. **Visualização em tempos de Coronavírus, Maio, 2020**. Disponível em: https://www.visgrafimpa.br/Data/RefBid/OS_PDF/tr-07-2020/tr-072020.pdf. Acesso em: 25 de agosto de 2021
<https://ourworldindata.org/coronavirus>. Acesso em Agosto de 2021.
- MENDONÇA, L. M. **Equações Diferenciais e Oscilações Mecânicas. 2021**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, 2021.
- SILVA, I. L. N. **Equalizações Diferenciais: aspectos históricos, teoria e aplicações em física. 2016**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática), Universidade Estadual da Paraíba, Monteiro, 2016. Disponível em:
<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/13929>. Acesso em: 15 de julho de 2021.