Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para Problemas Elípticos Semilineares

por

Franciery Chaves Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586e Silva, Franciery Chaves.

Existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos semilineares / Franciery Chaves Silva. – Campina Grande, 2017.

110 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro".

Referências.

1. Equação Elíptica Semilinear. 2. Sistema Elíptico Semilinear. 3. Métodos Variacionais. 4. Não Linearidade do Tipo Côncava e Convexa. I. Barreiro, José Lindomberg Possiano. II. Título.

CDU 517.956.2(043)

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para Problemas Elípticos Semilineares

por

Franciery Chaves Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UEPB

Marcelo Carvalho Ferreira

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira - UFCG

José Lindomberg P Barreiro

Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2017

Dedicatória

Aos meus pais, Francisco Amaro e Raimunda Chaves.

Agradecimentos

Quero expressar meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, em especial, à Deus, pelo dom da vida e por estar comigo em todos os momentos.

Aos meus pais, Francisco Amaro e Raimunda Chaves, por todo amor, carinho, confiança, atenção, dedicação e ensinamentos; esses foram essenciais para a concretização desse sonho.

Aos meus irmãos, Franciany Chaves e Francismael Chaves, e a minha tia, Terezinha Chaves, por todo amor, apoio, carinho e incentivo.

Aos meus sobrinhos, Mariany Stefane, Gabriel, Diogo e Wilian Davi, por todo amor e carinho.

Ao meu cunhado, Lindomar Silva, por todo apoio, carinho, atenção e incentivo.

Aos demais familiares por estarem presentes em todos os momentos da minha vida.

À minha melhor amiga, Gisane Fagundes, a qual foi uma das grandes responsáveis para a concretização dessa conquista.

À Eulalia Lucena, por toda atenção e carinho prestados nesse período que estive em Campina Grande.

Aos meus professores da Universidade Regional do Cariri, em particular a Ricardo Rodrigues de Carvalho e a Flávio França Cruz, por todo apoio, incentivo e pela oportunidade de ter sido bolsista.

Aos meus amigos da Universidade Regional do Cariri, em particular a Alancoc, Danilo e Keyson, por todo apoio, incentivo e todos os momentos de estudo.

Ao professor José Lindomberg, pela orientação, atenção, incentivo e confiança.

Aos meus professores da Universidade Federal de Campina Grande, em particular ao professor Marcelo Carvalho, por todo apoio, dedicação e paciência.

Aos meus amigos da Universidade Federal de Campina Grande, em particular a André Felipe, Arthur, Bruna, Camila, Daniela, Felipe, Geovany, Ismael, Laise, Lucas, Lucas Siebra, Marinho, Matheus, Otacilia, Thiago Felipe e Wellier, pelo apoio, incentivo, companhia, momentos de estudo e inúmeras risadas compartilhadas.

Aos membros da banca, por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora.

Aos funcionários da UAMat da Universidade Federal de Campina Grande, pela companhia e amizade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista.”

Bill Gates

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para os seguintes problemas:

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_λ}$$

onde $1 \leq q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, para $N \geq 3$, e as funções f e h satisfazem algumas condições, e

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(z)|u|^{p-2}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, \text{ em } \Omega \\ -\Delta v = \mu h(z)|v|^{p-2}v + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \text{ em } \Omega \\ u = v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$E_{\lambda,\mu}$}$$

onde $\alpha > 1$, $\beta > 1$ e $2 < p < \alpha+\beta = 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N > 4$, $\lambda, \mu > 0$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f, g, h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfazem algumas condições. Entre as principais ferramentas utilizadas estão o Princípio Variacional de Ekeland, Lema de Pierre-Louis Lions, Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e propriedades envolvendo Variedade de Nehari.

Palavras-chave: Equação Elíptica Semilinear, Sistema Elíptico Semilinear, Métodos Variacionais, Não Linearidade do Tipo Côncava e Convexa.

Abstract

In this dissertation, we present results of existence and multiplicity of positive solutions for the following problems:

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}, \text{ in } \mathbb{R}^N \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_λ}$$

where $1 \leq q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ for $N \geq 3$ and the functions f and g satisfy some conditions, and

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(z)|u|^{p-2}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, \text{ in } \Omega \\ -\Delta v = \mu h(z)|v|^{p-2}v + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \text{ in } \Omega \\ u = v = 0, \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$E_{\lambda,\mu}$}$$

where $\alpha > 1$, $\beta > 1$ and $2 < p < \alpha + \beta = 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N > 4$, $\lambda, \mu > 0$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ and $f, g, h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfy some conditions. Among the main tools used are the Ekeland's Variational Principle, Pierre-Louis Lions Lemma, Lagrange Multipliers Theorem and properties involving Nehari Manifold.

Keywords: Semilinear Elliptic Equations, Semilinear Elliptic Systems, Nehari Manifold, Concave and Convex Type Nonlinearity.

Sumário

Lista de Notações

u_+	$max\{u,0\} \geq 0$, chamada de parte positiva de u.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto de dualidade.
$supp(u)$	Suporte da função u.
$B_r^N(x)$	Bola aberta de centro $x \in \mathbb{R}^N$ e raio $r > 0$.
A^c	Complementar do conjunto A.
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_\Omega |u|^p dz < \infty$, $1 \leq p < \infty$.
$L^p_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_K |u|^p dz < \infty$, para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, $1 \leq p < \infty$.
$H^1(\mathbb{R}^N)$	Espaço de Sobolev das funções em $L^2(\mathbb{R}^N)$ cujas derivadas fracas de primeira ordem estão em $L^2(\mathbb{R}^N)$.
$D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$	Espaço das funções $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tais que $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
$H^{-1}(\mathbb{R}^N)$	Espaço dual de $H^1(\mathbb{R}^N)$.
H	$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
H^{-1}	Espaço dual de H.
C^k	Conjunto das funções k vezes continuamente diferenciáveis.
$C_0^\infty(\Omega)$	Espaço das funções $u \in C^\infty(\Omega)$ tais que $supp(u) \subset\subset \Omega$.
$o_n(1)$	Sequência de números reais convergindo para 0 quando $n \to \infty$.
$o_\varepsilon(1)$	Sequência de números reais convergindo para 0 quando $\varepsilon \to \infty$.
$f(x) = O(\varepsilon^{N-2})$	Se $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \left| \frac{f(x)}{\varepsilon^{N-2}} \right| \leq C$, para algum $C \geq 0$.
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	Denota o gradiente da função u.
$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Denota o laplaciano de u.
$\|.\|$	Norma no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$.
$\|.\|_H$	Norma no espaço H.
$\|.\|_\#$	Norma no espaço $L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N)$.
$\|.\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$	Norma no espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$.
$\|.\|_\infty$	Norma no espaço $L^\infty(\Omega)$.
$\to, \rightharpoonup$	Convergência forte e fraca, respectivamente.

$\nrightarrow$	Não converge forte.
$\hookrightarrow$	Indica a imersão.
$2^* = \frac{2N}{N-2}$	Expoente crítico de Sobolev, $N \geq 3$.
(PS)	Palais-Smale.
$(PS)_c$	Sequência de Palais-Smale no nível c.
$q.s.$	Quase sempre, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula.
$\|\Omega\|$	Medida de Lebesgue do conjunto Ω.
$\blacksquare$	Fim de uma demonstração.

Introdução

Nesta dissertação, apresentamos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte equação elíptica semilinear envolvendo não-linearidade côncava e convexa

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_λ}$$

onde $1 \leq q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, para $N \geq 3$, e as funções f e h satisfazem as seguintes hipóteses:

(f_1) f é uma função contínua positiva em $\mathbb{R}^N$ e $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = f_\infty > 0$.

(f_2) existem k pontos $a^1, a^2, \ldots, a^k$ em $\mathbb{R}^N$ tais que

$$f(a^i) = f_{max} = \max_{z \in \mathbb{R}^N} f(z), \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

e $f_\infty < f_{max}$.

(h_1) $h \in L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $h > 0$.

Estudamos também a existência e multiplicidade de soluções positivas para o seguinte sistema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(z)|u|^{p-2}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta, \text{ em } \Omega \\ -\Delta v = \mu h(z)|v|^{p-2}v + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(z)|u|^\alpha|v|^{\beta-2}v, \text{ em } \Omega \\ u = v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$E_{\lambda,\mu}$}$$

onde $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $2 < p < \alpha + \beta = 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N > 4$, $\lambda, \mu > 0$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f, g, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) f, g e h são funções contínuas e positivas em $\overline{\Omega}$.

(A2) existem k pontos $a^1, a^2, \ldots, a^k$ em Ω tais que

$$f(a^i) = \max_{z\in\Omega} f(z) = 1, \ \ 1 \le i \le k,$$

e para alguma $\sigma > N$,

$$f(z) - f(a^i) = o(|z-a^i|^\sigma)$$

quando $z \to a^i$ uniformemente em i.

Para abordar tais problemas utilizamos o Método Variacional. Grosso modo, tal método consiste em encontrar pontos críticos do funcional associado ao problema em estudo. A multiplicidade de soluções para tais problemas está relacionada ao número de máximos isolados que a função f possui. De uma maneira geral, introduzimos uma função baricentro e, a partir dela, construímos vizinhanças na Variedade de Nehari associada ao funcional. Em seguida, em cada vizinhança, construímos sequências Palais-Smale para as quais vale a condição de Palais-Smale para o funcional associado, mostrando, assim, a existência de múltiplas soluções positivas.

Esta dissertação está dividida em dois capítulos e três apêndices organizados da seguinte maneira: no Capítulo 1, baseado no artigo de Lin [25], buscamos $k+1$ soluções positivas para o problema (E_λ). À princípio, faremos uma mudança de variável na equação (E_λ), a qual é transformada em

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\varepsilon z)u^{p-1} + \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)u^{q-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_ε}$$

onde $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ e $u(z) = \varepsilon^{\frac{2}{p-2}} v(\varepsilon z)$. Depois, dedicamos ao estudo do funcional associado ao problema (E_ε) e a variedade de Nehari M_ε, a qual dividimos em duas partes M_ε^+ e M_ε^-. Em seguida, provamos a existência de uma solução positiva $u_0 \in M_\varepsilon^+$ para (E_ε). Finalmente, mostramos que a condição (f_2) garante a existência de k soluções positivas para (E_ε), isto é, existem, pelo menos, k pontos críticos $u_1, u_2, \ldots, u_k \in M_\varepsilon^-$ de J_ε tais que $J_\varepsilon(u_i) = \beta_\varepsilon^i$, para $1 \le i \le k$.

No Capítulo 2, baseado também no artigo de Lin [24], buscamos k soluções positivas para o sistema $(E_{\lambda,\mu})$. Primeiramente, estudamos a variedade de Nehari $M_{\lambda,\mu}$. Em seguida, provamos a existência de uma solução positiva $(u_0, v_0) \in M_{\lambda,\mu}$ de $(E_{\lambda,\mu})$. Por fim, mostramos que a condição (A2) garante a existência de k soluções positivas para $(E_{\lambda,\mu})$, isto é, existem, no mínimo, k pontos críticos $(u_i, v_i) \in M_{\lambda,\mu}$ de $J_{\lambda,\mu}$ tais que $J_{\lambda,\mu}(u_i, v_i) = \beta^i_{\lambda,\mu}$ para $1 \leq i \leq k$.

No Apêndice A, definimos à derivada de Fréchet, à derivada de Gateaux e mostramos que os funcionais associados aos problemas (E_ε) e $(E_{\lambda,\mu})$ são de classe C^1.

No Apêndice B, mostraremos que dois valores Palais-Smale em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para um funcional são iguais.

Por fim, no Apêndice C, traremos os principais resultados utilizados no decorrer da nossa dissertação.

Capítulo 1

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para uma Equação Elíptica Semilinear Envolvendo não Linearidade Côncava e Convexa

O objetivo deste capítulo é estudar a existência e multiplicidade de solução não negativa para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_λ}$$

onde $1 \leq q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, para $N \geq 3$, e as funções f e h satisfazem algumas condições. Este tipo de não linearidade caracteriza o Problema (E_λ) como do tipo côncava e convexa.

Problemas elípticos semilineares envolvendo não linearidade côncava e convexa em um domínio limitado vem sendo estudado intensamente na literatura. Em 1994, Ambrosetti-Brezis-Cerami [3] mostraram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = c|u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u, \text{ em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq q < 2 < p < 2^*$, tem, no mínimo, duas soluções positivas para $c > 0$ suficientemente pequeno. Resultados mais gerais do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = ch(z)|u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u, \text{ em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq q < 2 < p < 2^*$, foram feitas por Ambrosetti-Garcia-Peral em 1996 [4], Brown-Zhang [12] e de Figueiredo-Gosses-Ubilla [14], ambos em 2003.

Mais tarde, em 2006, Wu [31], utilizando a variedade de Nehari, provou que existem, pelo menos, duas soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda f(x) u^q, \text{ em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $0 \leq q < 1 < p < 2^*$, $\lambda > 0$ e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que muda de sinal em $\overline{\Omega}$.

Neste capítulo, trataremos da existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema (E_λ) em $\mathbb{R}^N$. Para o caso $q = \lambda = 1$ e $f \equiv 1$, Zhu [32] mostrou que o problema (E_λ) admite, pelo menos, duas soluções positivas em $\mathbb{R}^N$, onde a função h é não negativa, suficientemente pequena e tem decaimento exponencial. Sem a condição do decaimento exponencial, Cao-Zhou [13] e Hirano [19] provaram que o problema (E_λ) admite, pelo menos, duas soluções positivas em $\mathbb{R}^N$. Mudando a condição sobre a $f(z)$, Adachi-Tanaka [1], usando a ideia de categoria e o argumento minimax de Bahri-li's, afirmaram que o problema (E_λ) admite, no mínimo, quatro soluções positivas em $\mathbb{R}^N$, onde $f(z) \geq 1 - cexp(-(2+\delta)|z|)$, para algum c, $\delta > 0$ e $\|h\|_{H^{-1}} > 0$ suficientemente pequeno. Hsu-Lin em [20] estudaram que há, ao menos, quatro soluções positivas do caso geral

$$-\Delta u + u = f(z) u^{p-1} + \lambda h(z) u^{q-1} \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

1.1 O Funcional Energia Associado ao Problema e a Variedade de Nehari

Inicial, faremos uma mudança de variável na equação do problema (E_λ).

Lema 1.1 *Sejam $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ e $u(z) = \varepsilon^{\frac{2}{p-2}} v(\varepsilon z)$. Então o problema (E_λ) é transformado em*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\varepsilon z) u^{p-1} + \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z) u^{q-1}, \ \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{E_ε}$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ e $u(z) = \varepsilon^{\frac{2}{p-2}} v(\varepsilon z)$, então

$$\varepsilon^{-2} = \lambda \quad e \quad u(z)\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}} = v(\varepsilon z).$$

Assim, via mudança de variável, temos que a equação

$$-\Delta v + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1},$$

isto é,

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial z_i^2} + \lambda v = f(z)v^{p-1} + h(z)v^{q-1}$$

é equivalente a

$$-\varepsilon^{-2}\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} + \varepsilon^{-2}\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}} u = f(\varepsilon z)\varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}} u^{p-1} + h(\varepsilon z)\varepsilon^{-\frac{2(q-1)}{p-2}} u^{q-1}.$$

Logo,

$$-\varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}} \Delta u + \varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}} u = f(\varepsilon z)\varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}} u^{p-1} + h(\varepsilon z)\varepsilon^{-\frac{2(q-1)}{p-2}} u^{q-1}. \tag{1.1}$$

Dividindo (1.1) por $\varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p-2}}$, temos

$$-\Delta u + u = f(\varepsilon z)u^{p-1} + \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)u^{q-1}.$$

Portanto, o problema (E_λ) é transformado em

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\varepsilon z)u^{p-1} + \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)u^{q-1}, \ \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

$\blacksquare$

Considere o problema elíptico semilinear (E_ε), com $1 \leq q < 2 < p < 2^*$, para $N \geq 3$, onde f e h satisfazem as seguintes condições:

(f_1) f é uma função contínua positiva em $\mathbb{R}^N$ e $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = f_\infty > 0$.

(f_2) existem k pontos $a^1, a^2, \ldots, a^k$ em $\mathbb{R}^N$ tais que

$$f(a^i) = f_{max} = \max_{z\in\mathbb{R}^N} f(z), \ \text{para} \ 1 \leq i \leq k$$

e $f_\infty < f_{max}$.

(h_1) $h \in L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ e $h > 0$.

Associado ao problema (E_ε), temos o funcional energia $J_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz,$$

onde

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dz$$

é a norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

O funcional $J_\varepsilon \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ (Veja Apêndice A) com

$$\left\langle J'_\varepsilon(u), v \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dz + \int_{\mathbb{R}^N} uv dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2} uv dz - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^{q-2} uv dz,$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.2 *Uma solução fraca para (E_ε) é uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dz + \int_{\mathbb{R}^N} uv dz = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2} uv dz + \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^{q-2} uv dz,$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Observação 1.3 *Uma solução fraca para (E_ε) é precisamente ponto crítico do funcional J_ε e reciprocamente.*

Seja

$$S = \sup_{u \in H^1(\mathbb{R}^N):\ \|u\|=1} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

a melhor constante de Sobolev para a imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, isto é, a menor constante positiva tal que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq S\|u\|, \tag{1.2}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}$.

Para a equação elíptica semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\varepsilon z) u^{p-1}, \ \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{E_0}$$

definimos o funcional energia $I_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathrm{R}$ pondo

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz.$$

Como feito anteriormente, $I_\varepsilon \in C^1$ com

$$\langle I'_\varepsilon(u), u\rangle = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz.$$

Defina

$$\gamma_\varepsilon = \inf_{u\in N_\varepsilon} I_\varepsilon(u),$$

onde

$$N_\varepsilon = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'_\varepsilon(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Note que:

i) Se $f \equiv f_\infty$, definimos

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u|^p dz,$$

com

$$\langle I'_\infty(u), u\rangle = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u|^p dz.$$

Temos, também,

$$\gamma_\infty = \inf_{u\in N_\infty} I_\infty(u),$$

onde

$$N_\infty = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'_\infty(u), u\rangle = 0\right\}.$$

ii) Se $f \equiv f_{max} > 0$, definimos

$$I_{max}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max} |u|^p dz,$$

com

$$\langle I'_{max}(u), u\rangle = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f_{max} |u|^p dz.$$

Temos, também,

$$\gamma_{max} = \inf_{u\in N_{max}} I_{max}(u),$$

onde

$$N_{max} = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'_{max}(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Agora, definiremos as sequências de Palais-Smale (denotada por (PS)), valor Palais-Smale e a condição Palais-Smale em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para um funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, que serão úteis nas demonstrações seguintes.

Definição 1.4 *Para $\beta \in \mathbb{R}$, dizemos que:*

i) a sequência $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_\beta$ para J se

$$\begin{cases} J(u_n) = \beta + o_n(1), \\ J'(u_n) = o_n(1), \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

ii) β é um valor (PS) para J se existe uma sequência $(PS)_\beta$ para J.

iii) J satisfaz a condição $(PS)_\beta$ se toda sequência $(PS)_\beta$ para J possui uma subsequência convergente.

Pelo Corolário $B.8$, Apêndice B, temos

$$\gamma_{max} = \frac{p-2}{2p}\left(f_{max}S^p\right)^{-\frac{2}{p-2}} > 0. \tag{1.3}$$

Observe que J_ε não é limitado inferiormente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois para cada $u > 0$, temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(tu) &= \frac{t^2}{2}||u||^2 - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &\leq \frac{t^2}{2}||u||^2 - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz, \end{aligned}$$

donde

$$J_\varepsilon(tu) \to -\infty,$$

quando $t \to \infty$, uma vez que $p > 2$. Dessa forma, nenhuma minimização é possível em todo o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. O primeiro passo consiste em livrar-se dessa ilimitação, para isso restringiremos J_ε a um conjunto adequado onde ele torna-se limitado inferiormente.

Definição 1.5 *Suponha que $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ com $\varphi'(0) = 0$. Uma condição necessária para que $u \in X$ seja um ponto crítico de φ é que $\langle \varphi'(u), u\rangle = 0$. Esta condição define a Variedade de Nehari*

$$N := \left\{u \in X : \langle \varphi'(u), u\rangle = 0, u \neq 0\right\}.$$

Consideremos a Variedade de Nehari para o funcional J_ε

$$M_\varepsilon = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \left\langle J'_\varepsilon(u), u\right\rangle = 0\right\}, \tag{1.4}$$

onde

$$\langle J'_\varepsilon(u), u\rangle = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Lema 1.6 *O funcional energia J_ε é coercivo e limitado inferiormente em M_ε.*

Demonstração. Se $u \in M_\varepsilon$, então $\langle J'_\varepsilon(u), u\rangle = 0$. Dessa forma,

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz + \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz. \tag{1.5}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p}\left[||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz\right] - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u||^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2), com expoentes conjugados $\frac{p}{p-q}$ e $\frac{p}{q}$, temos que

$$J_\varepsilon(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u||^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \|h\|_\# \|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

onde $\|h\|_\#$ é a norma em $L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N)$. Daí, pela Imersão de Sobolev (Teorema C.7),

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u||^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \|h\|_\# S^q \|u\|^q \\ &= \frac{p-2}{2p}||u||^2 - \frac{p-q}{pq}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \|h\|_\# S^q \|u\|^q \\ &= \frac{\|u\|^q}{p}\left[\frac{p-2}{2}\|u\|^{2-q} - \frac{p-q}{q}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \|h\|_\# S^q\right]. \end{aligned}$$

Logo, como $q < 2$, temos que J_ε é coercivo e limitado inferiormente em M_ε. ∎

Para cada $u \in M_\varepsilon$, defina

$$\psi_\varepsilon(u) = \left\langle J'_\varepsilon(u), u\right\rangle.$$

Cálculos diretos, resulta que

$$\left\langle \psi'_\varepsilon(u), u\right\rangle = 2\|u\|^2 - p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - q\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Para $u \in M_\varepsilon$, temos por (1.5)

$$\begin{aligned}\left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle &= 2\|u\|^2 - p\left[\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz\right] - q\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz - (p-2)\|u\|^2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Por outro lado, e também por (1.5), podemos escrever

$$\begin{aligned}\left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle &= 2\|u\|^2 - p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - q\left[\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz\right] \\ &= (2-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Agora, dividiremos M_ε em três partes, a saber,

$$M_\varepsilon^+ = \left\{u \in M_\varepsilon \colon \left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle > 0\right\};$$

$$M_\varepsilon^0 = \left\{u \in M_\varepsilon \colon \left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle = 0\right\};$$

$$M_\varepsilon^- = \left\{u \in M_\varepsilon \colon \left\langle \psi_\varepsilon'(u), u \right\rangle < 0\right\};$$

este método é devido a Tarantello (veja [28]).

Primeiramente, necessitaremos de alguns Lemas que são essenciais para a demonstração do Teorema 1.18.

Lema 1.7 *Seja* $\alpha = \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}$. *Suponha* (f_1), (f_2) *e* (h_1). *Se*

$$0 < \alpha < \alpha_0 = (p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} [(p-q)S^2]^{\frac{q-p}{p-2}} \|h\|_\#^{-1}, \tag{1.9}$$

então $M_\varepsilon^0 = \emptyset$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $M_\varepsilon^0 \neq 0$. Seja $u \in M_\varepsilon^0$. Como $u \in M_\varepsilon^0$, temos por (1.7) e (1.8),

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \frac{p-q}{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz.\end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{p-q}{p}+\frac{q}{p}=1$, segue da Desigualdade de Hölder (Teorema C.2), que

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &\leq \frac{p-q}{p-2}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|h(\varepsilon z)|^{\frac{p}{p-q}}dz\right)^{\frac{p-q}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^q)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}}\\ &= \left(\frac{p-q}{p-2}\right)\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\|h\|_{\#}\|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

De (1.9), obtemos

$$\|u\|^2 \leq \frac{p-q}{p-2}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\|h\|_{\#}S^q\|u\|^q$$

implicando

$$\|u\|^{2-q} \leq \left(\frac{p-q}{p-2}\right)\alpha\|h\|_{\#}S^q,$$

e, daí,

$$\alpha \geq \frac{p-2}{(p-q)\|h\|_{\#}S^q}\|u\|^{2-q}. \tag{1.10}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^N}f(\varepsilon z)|u|^p dz\\ &\leq \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^N}f_{max}|u|^p dz\\ &= \frac{p-q}{2-q}f_{max}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

Novamente, por (1.9), temos

$$\|u\|^2 \leq \frac{p-q}{2-q}f_{max}S^p\|u\|^p$$

implicando

$$\|u\|^{2-p} \leq \frac{p-q}{2-q}f_{max}S^p$$

e, assim,

$$\|u\|^{p-2} \geq \frac{2-q}{p-q}(f_{max})^{-1}S^{-p},$$

ou seja,

$$\|u\| \geq \left(\frac{2-q}{p-q}(f_{max})^{-1}S^{-p}\right)^{\frac{1}{p-2}}. \tag{1.11}$$

Logo, combinando (1.10) e (1.11), temos

$$\begin{aligned}\alpha &\geq \frac{p-2}{(p-q)\,\|h\|_{\#}S^{q}}\left(\frac{2-q}{(p-q)f_{max}}S^{-p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\\ &= (p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\left[(p-q)S^{2}\right]^{\frac{q-p}{p-2}}\|h\|_{\#}^{-1}=\alpha_0,\end{aligned}$$

que é uma contradição, pois $0<\alpha<\alpha_0$. ∎

O Lema seguinte mostra que minimizantes em M_ε são pontos críticos para J_ε.

Lema 1.8 *Suponha que u_0 é um minimizante local de J_ε em M_ε e $u_0\notin M_\varepsilon^0$. Então, $J_\varepsilon'(u_0)=0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Se u_0 é um minimizante local para J_ε sobre M_ε, então u_0 é solução do seguinte problema de otimização: minimizar $J_\varepsilon(u)$ sujeito à restrição $\psi_\varepsilon(u)\neq 0$. Assim, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema C.10), existe $\mu\in\mathbb{R}$ tal que $J_\varepsilon'(u_0)=\mu\psi_\varepsilon'(u_0)$. Logo,

$$0=\langle J_\varepsilon'(u_0),u_0\rangle=\mu\langle\psi_\varepsilon'(u_0),u_0\rangle,$$

pois $u_0\in M_\varepsilon$. Porém, como $u\notin M_\varepsilon^0$, temos $\langle\psi_\varepsilon'(u_0),u_0\rangle\neq 0$, o que implica $\mu=0$. Portanto, $J_\varepsilon'(u_0)=0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. ∎

Lema 1.9 *Valem as seguintes desigualdades:*

i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz>0$, *para cada* $u\in M_\varepsilon^+$;

ii) $\|u\|<\left(\frac{p-q}{p-2}\alpha\|h\|_{\#}S^q\right)^{\frac{1}{2-q}}$, *para cada* $u\in M_\varepsilon^+$;

iii) $\|u\|>\left(\frac{2-q}{(p-q)(f_{max})S^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}$, *para cada* $u\in M_\varepsilon^-$;

iv) Se $0<\alpha=\left(\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right)<\frac{q}{2}\alpha_0$, *então existe uma constante positiva* $d_0=d_0(\alpha,p,q,S,\|h\|_{\#},f_{max})$ *tal que* $J_\varepsilon(u)>d_0>0$, *para cada* $u\in M_\varepsilon^-$.

Demonstração. *i)* Por (1.7), temos

$$(p-q)\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}h(\varepsilon z)|u|^q dz-(p-2)\|u\|^2=\langle\psi_\varepsilon'(u),u\rangle,\ u\in M_\varepsilon.$$

Para $u\in M_\varepsilon^+$, temos

$$(p-q)\int_{\mathbb{R}^N}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}h(\varepsilon z)|u|^q dz-(p-2)\|u\|^2>0,$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz > \frac{p-2}{p-q}\varepsilon^{\frac{2(q-p)}{p-2}} \|u\|^2 > 0. \tag{1.12}$$

ii) De (1.12),

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &< \frac{p-q}{p-2}\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \frac{p-q}{p-2}\alpha \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz. \end{aligned}$$

Daí, como fora feito no Lema 1.7, temos

$$\|u\|^{2-q} < \frac{p-q}{p-2}\alpha \|h\|_{\#} S^q,$$

ou seja,

$$\|u\| < \left(\frac{p-q}{p-2}\alpha \|h\|_{\#} S^q\right)^{\frac{1}{2-q}}.$$

iii) Para cada $u \in M_\varepsilon^-$, segue de (1.8), que

$$0 > (2-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(\varepsilon z)|u|^p dz.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &< \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\ &\leq \frac{p-q}{2-q} f_{max} \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \left(\frac{p-q}{2-q}\right) f_{max} S^p \|u\|^p. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u\|^{2-p} < \frac{p-q}{2-q} f_{max} S^p$$

o que implica

$$\|u\|^{p-2} > \frac{2-q}{(p-q) f_{max} S^p}$$

e, portanto,

$$\|u\| > \left(\frac{2-q}{(p-q) f_{max} S^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \text{ para } u \in M_\varepsilon^-.$$

iv) Para cada $u \in M_\varepsilon^- \subset M_\varepsilon$, de (1.6), da Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e juntamente com as Imersões de Sobolev (Teorema C.7),

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &\geq \frac{\|u\|^q}{p}\left[\frac{p-2}{2}\|u\|^{2-q}-\frac{p-q}{q}\alpha\|h\|_{\#}S^q\right]. \end{aligned}$$

Por (iii), segue que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &> \frac{1}{p}\left[\frac{2-q}{(p-q)f_{max}S^p}\right]^{\frac{q}{p-2}}\left[\frac{p-2}{2}\left(\frac{2-q}{(p-q)f_{max}S^p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}-\frac{p-q}{q}\alpha\|h\|_{\#}S^q\right] \\ &= \frac{(p-q)}{p}\left[\frac{2-q}{(p-q)f_{max}S^p}\right]^{\frac{q}{p-2}}\|h\|_{\#}S^q\left[\frac{p-2}{2}\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\frac{1}{\left((p-q)S^2\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\|h\|_{\#}}-\frac{\alpha}{q}\right] \\ &= \frac{1}{p}\left[\frac{2-q}{(p-q)f_{max}S^p}\right]^{\frac{q}{p-2}}(p-q)\|h\|_{\#}S^q\left[\frac{\alpha_0}{2}-\frac{\alpha}{q}\right]=d_0>0, \end{aligned}$$

pois $\alpha<\frac{q}{2}\alpha_0$. Portanto, para $0<\alpha<\frac{q}{2}\alpha_0$ e $u\in M_\varepsilon^-$, temos que $J_\varepsilon(u)>0$. ∎

Definiremos agora uma função e mostraremos que tal função atinge um máximo. Essa informação será útil para a demonstração do Lema (1.11).

Lema 1.10 *Para cada $u\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ fixada, defina $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por*

$$k(t)=k_u(t)=t^{2-q}\|u\|^2-t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^N}f(\varepsilon z)|u|^p dz, \tag{1.13}$$

para $t\geq 0$. Então, $k(t)$ tem um único ponto crítico

$$\bar{t}=\bar{t}(u)=\left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{1}{p-2}}$$

que é um ponto de máximo global. Além disso,

$$k(\bar{t})\geq(p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}(p-q)^{\frac{q-p}{p-2}}S^{\frac{p(q-2)}{p-2}}\|u\|^q. \tag{1.14}$$

Demonstração. Note que $k(0)=0$. Como $p-q>2-q$, pois $1\leq q<2<p<2^*$, temos que $k(t)>0$ para $t\approx 0^+$ e $k(t)\to-\infty$ quando $t\to\infty$. Então, sendo $k(t)$ uma função contínua, temos que $k(t)$ atinge seu valor máximo em $t > 0$. Derivando (1.13), obtemos

$$\begin{aligned} k'(t) &= (2-q)t^{2-q-1}\|u\|^2 - (p-q)t^{p-q-1}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\ &= (2-q)t^{-(q+1)}t^2\|u\|^2 - (p-q)t^{-(q+1)}t^p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\ &= (2-q)t^{-(q+1)}\|tu\|^2 - (p-q)t^{-(q+1)}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|tu|^p dz \\ &= t^{-(q+1)}\left[(2-q)\|tu\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|tu|^p dz\right], \end{aligned} \tag{1.15}$$

para $t > 0$. Se $t_0 > 0$ é ponto crítico de $k(t)$, temos

$$0 = k'(t_0) = (2-q)t_0^{1-q}\|u\|^2 - (p-q)t_0^{p-q-1}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz,$$

como $t_0^{1-q} \neq 0$, obtemos

$$(2-q)\|u\|^2 - (p-q)t_0^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz = 0.$$

Daí,

$$t_0 = \left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{1}{p-2}} = \bar{t}, \tag{1.16}$$

sendo $\bar{t}$ o único ponto crítico de $k(t)$. Ou seja, $k'(\bar{t}) = 0$. Cálculos análogos, mostram que $k'(t) > 0$ em $0 < t < \bar{t}$ e $k'(t) < 0$ em $t > \bar{t}$. Portanto, $k(t)$ atinge o seu máximo em $\bar{t}$. Além disso,

$$\begin{aligned} k(\bar{t}) &= \left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{2-q}{p-2}}\|u\|^2 - \left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{p-q}{p-2}}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\ &= \left[\frac{(2-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right]^{\frac{2-q}{p-2}}\|u\|^2 - \left[\frac{2-q}{p-q}\|u\|^2\right]^{\frac{p-q}{p-2}}\left(\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \\ &= \left[\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}\|u\|^{\frac{2(p-q)}{p-2}} - \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\|u\|^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right]\left(\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e pela Imersão de Sobolev (Teorema C.7), vem

$$
\begin{aligned}
k(\bar{t}) &\geq \left[\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} - \left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-2}}\right] \|u\|^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \left(\frac{1}{f_{max} S^p \|u\|^p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} \\
&= \frac{(2-q)^{\frac{2-q}{p-2}}}{(p-q)^{\frac{p-q}{p-2}}} \left[\frac{1}{(p-q)^{-1}} - (2-q)\right] \|u\|^q \left(\frac{1}{f_{max} S^p}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}.
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
k(\bar{t}) \geq (p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}} (p-q)^{\frac{q-p}{p-2}} S^{\frac{p(q-2)}{p-2}} \|u\|^q.
$$

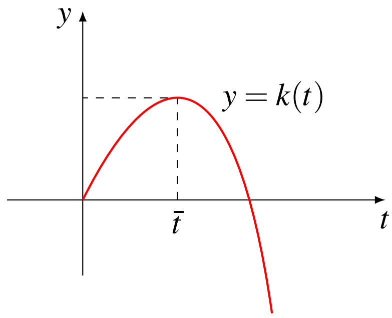

Figura 1.1: Gráfico de $y = k(t)$

■

Lema 1.11 *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ fixada, temos que:*

i) Se $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz = 0$, então existe um único número positivo $t^- = t^-(u) > \bar{t}$ tal que $t^- u \in M_\varepsilon^-$ e $J_\varepsilon(t^- u) = \sup_{t \geq 0} J_\varepsilon(tu)$;

ii) Se $0 < \alpha \left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right) < \alpha_0$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz > 0$, então existem números positivos unicamente determinados

$$
t^+ = t^+(u) < \bar{t} < t^- = t^-(u)
$$

tais que $t^+ u \in M_\varepsilon^+$, $t^- u \in M_\varepsilon^-$,

$$
J_\varepsilon(t^+ u) = \inf_{0 \leq t \leq \bar{t}} J_\varepsilon(tu) \quad e \quad J_\varepsilon(t^- u) = \sup_{t \geq \bar{t}} J_\varepsilon(tu).
$$

Demonstração. $i)$ Sabemos que $k(t)$ é crescente para $t < \bar{t}$, $k(t)$ é decrescente para $t > \bar{t}$, $k(\bar{t}) > 0$ e $\lim_{t \to \infty} k(t) = -\infty$. Então, como $k(t)$ é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um único $t^- > \bar{t}$ tal que

$$k(t^-) = 0 = \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz \;\; \text{e} \;\; k'(t^-) < 0.$$

Observe que para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\langle J'_\varepsilon(tu), tu\rangle &= \|tu\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|tu|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|tu|^q dz \\
&= t^2\|u\|^2 - t^p \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - t^q \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\
&= t^q \left[t^{2-q}\|u\|^2 - t^{p-q} \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \right] \\
&= t^q k(t).
\end{aligned}$$

Assim, para $t = t^-$, obtemos

$$\langle J'_\varepsilon(t^- u), t^- u\rangle = (t^-)^q [k(t^-)] = 0,$$

donde, $t^- u \in M_\varepsilon$. Segue de (1.7) e (1.15) que,

$$\begin{aligned}
\langle \psi'_\varepsilon(t^- u), t^- u\rangle &= (2-q)\|t^- u\|^2 - (p-q) \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|t^- u|^p dz \\
&= (t^-)^{q+1} [k'(t^-)] < 0.
\end{aligned}$$

ou seja, $t^- u \in M_\varepsilon^-$.

Mostraremos agora que $J_\varepsilon(t^- u) = \sup_{t \geq 0} J_\varepsilon(tu)$. Observe que

$$J_\varepsilon(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{t^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J_\varepsilon(tu) &= t\|u\|^2 - t^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - t^{q-1} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\
&= t^{q-1} \left[t^{2-q}\|u\|^2 - t^{p-q} \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \right].
\end{aligned}$$

Por hipótese $\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz = 0$, logo

$$\frac{d}{dt} J_\varepsilon(tu) = t^{q-1} k(t).$$

Como $k(t) > 0$, $0 < t < \bar{t} < t^-$, $k(t)$ é decrescente em $(\bar{t}, \infty)$ e $k(t^-) \leq 0$ segue que

$$\frac{d}{dt} J_\varepsilon(tu) \begin{cases} > 0 & , \text{ em } (0, t^-) \\ = 0 & , \text{ em } t^- \\ < 0 & , \text{ em } (t^-, \infty) \end{cases}.$$

Assim, $J_\varepsilon(tu)$ é crescente em $(0, t^-)$, $\frac{d}{dt}J(t^-u) = 0$ e $J_\varepsilon(tu)$ é decrescente em (t^-, ∞), logo t^- é o único ponto crítico de $J_\varepsilon(tu)$, o qual é ponto de máximo. Portanto, $J_\varepsilon(t^-u) = \sup_{t \geq 0} J_\varepsilon(tu)$.

$ii)$ Como $k(0) = 0$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz > 0$, pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e a Imersão de Sobolev (Teorema C.7),

$$k(0) = 0 < \alpha \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz < \alpha \|h\|_\# S^q \|u\|^q.$$

Assim, para $0 < \alpha < \alpha_0$ aplicando (1.9) e (1.14), concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &< \left[(p-2) \left(\frac{2-q}{f_{max}} \right)^{\frac{2-q}{p-2}} [(p-q)S^2]^{\frac{q-p}{p-2}} \|h\|_\#^{-1} \right] \|h\|_\# S^q \|u\|^q \\ &= (p-2) \left(\frac{2-q}{f_{max}} \right)^{\frac{2-q}{p-2}} (p-q)^{\frac{q-p}{p-2}} S^{\frac{p(q-2)}{p-2}} \|u\|^q \\ &\leq k(\bar{t}). \end{aligned}$$

Sendo $k(t)$ contínua, crescente em $(0, \bar{t})$ e decrescente em $(\bar{t}, -\infty)$ segue do Teorema do Valor Intermediário que existem únicos t^+ e t^- onde $0 < t^+ < \bar{t} < t^-$, tais que

$$k(t^+) = \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz = k(t^-)$$

e

$$k'(t^-) < 0 < k'(t^+).$$

Analogamente ao que foi feito no item (i), temos que $t^+u \in M_\varepsilon^+$, $t^-u \in M_\varepsilon^-$,

$$J_\varepsilon(t^+u) \leq J_\varepsilon(tu) \leq J_\varepsilon(t^-u),$$

para cada $t \in [t^+, t^-]$ e

$$J_\varepsilon(t^+u) \leq J_\varepsilon(tu),$$

para cada $t \in [0, \bar{t}]$. Portanto,

$$J_\varepsilon(t^+u) = \inf_{0 \leq t \leq \bar{t}} J_\varepsilon(tu) \quad \text{e} \quad J_\varepsilon(t^+u) = \sup_{t \geq \bar{t}} J_\varepsilon(tu).$$

■

Aplicando o Lema 1.7 ($M_\varepsilon^0 = \emptyset$ para $0 < \alpha < \alpha_0$), podemos escrever $M_\varepsilon = M_\varepsilon^+ \cup M_\varepsilon^-$, onde

$$M_\varepsilon^+ = \left\{ u \in M_\varepsilon \colon (2-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz > 0 \right\}$$

e

$$M_\varepsilon^- = \left\{ u \in M_\varepsilon \colon (2-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz < 0 \right\}.$$

Como J_ε é limitado inferiormente em M_ε, podemos definir

$$\alpha_\varepsilon = \inf_{u \in M_\varepsilon} J_\varepsilon(u), \quad \alpha_\varepsilon^+ = \inf_{u \in M_\varepsilon^+} J_\varepsilon(u) \quad \text{e} \quad \alpha_\varepsilon^- = \inf_{u \in M_\varepsilon^-} J_\varepsilon(u).$$

Lema 1.12 *Temos:*

i) Se $0 < \alpha \left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \right) < \alpha_0$*, então* $\alpha_\varepsilon \leq \alpha_\varepsilon^+ < 0$*;*

ii) Se $0 < \alpha < \frac{q}{2}\alpha_0$*, então* $\alpha_\varepsilon^- \geq d_0 > 0$ *para alguma constante* $d_0 = d_0(\varepsilon, p, q, S, \|h\|_\#, f_{max})$.

Demonstração. i) Seja $u \in M_\varepsilon^+$. Por (1.7), temos

$$(p-2)\|u\|^2 < (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Como $u \in M_\varepsilon^+$, por (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &< \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\frac{p-2}{p-q}\right]\|u\|^2 \\ &= -\frac{(2-q)(p-2)}{2pq}\|u\|^2, \end{aligned}$$

daí,

$$J_\varepsilon(u) < 0.$$

Portanto, $\alpha_\varepsilon^+ < 0$. Como $M_\varepsilon^+ \subset M_\varepsilon$, segue da definição de ínfimo que

$$\alpha_\varepsilon \leq \alpha_\varepsilon^+ < 0.$$

ii) Seja $u \in M_\varepsilon^-$. Como $0 < \alpha < \frac{q}{2}\alpha_0$, pela demonstração do Lema 1.9 (iv), temos que $J_\varepsilon(u) > d_0 > 0$ para alguma constante $d_0 = d_0(\varepsilon, p, q, S, \|h\|_\#, f_{max})$. Aplicando a definição de α_ε^-, resulta

$$\alpha_\varepsilon^- \geq d_0 > 0.$$

$\blacksquare$

O Lema seguinte mostra a existência de sequências minimizantes (PS) para J_ε em M_ε, M_ε^+ e M_ε^-. Omitiremos a demonstração, pois as ideias são semelhantes ao Lema 1.25.

Lema 1.13 *i) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha_\varepsilon}$ em M_ε para J_ε;*

ii) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha_\varepsilon^+}$ em M_ε^+ para J_ε;

iii) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha_\varepsilon^-}$ em M_ε^- para J_ε.

1.2 Existência de uma Solução Positiva

A fim de provar a existência de soluções positivas, mostraremos primeiro que J_ε satisfaz a condição $(PS)_\beta$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para $\beta \in \left(-\infty, \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}\right)$, onde $\alpha = \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}$ e C_0 é definida no Lema seguinte.

Lema 1.14 *Suponha que h satisfaz (h_1) e $0 < \alpha \left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q}{p-2}}\right) < \alpha_0$. Se $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_\beta$ para J_ε em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $J_\varepsilon'(u) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$J_\varepsilon(u) \geq -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} \geq -C_0',$$

onde

$$C_0 = \frac{(2-q)[(p-q) \parallel h \parallel_\# S^q]^{\frac{2}{p-q}}}{2pq(p-2)^{\frac{q}{2-q}}}$$

e

$$C_0' = \frac{(p-2)(2-q)^{\frac{p}{p-2}}}{2pq[f_{max}(p-q)]^{\frac{2}{p-2}} S^{\frac{2p}{p-2}}}.$$

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_\beta$ para J_ε em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Afirmamos que $J_\varepsilon'(u) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. De fato, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $\langle u_n, v\rangle \to \langle u_0, v\rangle$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v dz \to \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dz$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n v dz \to \int_{\mathbb{R}^N} uv dz.$$

Pela Imersão de Sobolev (Teorema C.7), temos que $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim, decorre do Teorema de Vainberg (Teorema C.4) que $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$ e existe $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Daí

$$|u_n(x)|^{p-2}u_n(x)v(x) \to |u(x)|^{p-2}u(x)v(x) \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left||u_n(x)|^{p-2}u_n(x)v(x)\right| = |u_n(x)|^{p-1}|v(x)| \leq g(x)^{p-1}|v(x)|,$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, temos que $g^{p-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^{p-1}|v|dz \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} g^p dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

onde usamos Desigualdade de Hölder (Teorema C.2). Logo, como f é uma função contínua segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.3) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^{p-2}u_n v dz \to \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uv dz.$$

Sendo h uma função limitada, mostra-se de maneira análoga ao que foi feito acima que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_n|^{q-2}u_n v dz \to \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^{q-2}uv dz.$$

Portanto, $\langle J'_\varepsilon(u_n), v\rangle \to \langle J'_\varepsilon(u), v\rangle$, ou seja, $J'_\varepsilon(u_n) \to J'_\varepsilon(u)$. Sendo $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_\beta$ para J_ε em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $J'_\varepsilon(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Assim, pela unicidade do limite, temos que $J'_\varepsilon(u) = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, completando a afirmação.

Assim, obtemos $\langle J'_\varepsilon(u), u\rangle = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e as Imersões de Sobolev (Teorema C.7), temos que

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz\\
&\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{p-q}{pq}\right)\alpha\|h\|_\#\|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\
&\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{p-q}{pq}\right)\alpha\|h\|_\# S^q\|u\|^q\\
&= \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{p-2}{pq}\right)\left[\left(\frac{p-q}{p-2}\right)\alpha\|h\|_\# S^q\|u\|^q\right].
\end{aligned}$$

Daí, pela Desigualdade de Young (Teorema $C.1$), com expoentes conjugados $\frac{2}{q}$ e $\frac{2}{2-q}$, temos

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u) &\geq \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|^2-\left(\frac{p-2}{pq}\right)\left[\frac{q\|u\|^2}{2}+\left(\frac{p-q}{p-2}\alpha\|h\|_\# S^q\right)^{\frac{2}{2-q}}\frac{2-q}{2}\right]\\
&= \left(\frac{p-2}{2p}-\frac{q(p-2)}{2pq}\right)\|u\|^2-\left(\frac{(p-2)(p-q)^{\frac{2}{2-q}}}{pq(p-2)^{\frac{2}{2-q}}}\right)\left(\alpha\|h\|_\# S^q\right)^{\frac{2}{2-q}}\left(\frac{2-q}{2}\right) \qquad (1.17)\\
&= -\frac{(2-q)[(p-q)\|h\|_\# S^q]^{\frac{2}{2-q}}}{2pq(p-2)^{\frac{q}{2-q}}}\alpha^{\frac{2}{2-q}}\\
&= -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}.
\end{aligned}$$

Além disso, como por hipótese $0<\alpha<\alpha_0=(p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}[(p-q)S^2]^{\frac{q-p}{p-2}}\|h\|_\#^{-1}$, segue de (1.17) que

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(u) &> -\frac{(p-2)(p-q)^{\frac{2}{2-q}}}{2pq(p-2)^{\frac{2}{2-q}}}\left[(p-2)\left(\frac{2-q}{f_{max}}\right)^{\frac{2-q}{p-2}}[(p-q)S^2]^{\frac{q-p}{p-2}}\|h\|_\#^{-1}\|h\|_\# S^q\right]^{\frac{2}{2-q}}(2-q)\\
&= -\frac{(p-2)(2-q)^{\frac{p}{p-2}}(p-q)^{\frac{-2}{p-2}}S^{\frac{-2p}{p-2}}}{2pq(f_{max})^{\frac{2}{p-2}}}\\
&= -\frac{(p-2)(2-q)^{\frac{p}{p-2}}}{2pq[f_{max}(p-q)]^{\frac{2}{p-2}}S^{\frac{2p}{p-2}}}\\
&= -C_0'.
\end{aligned}$$

∎

Lema 1.15 *Se $\{u_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência $(PS)_\beta$ para o funcional J_ε, então $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ $(PS)_\beta$ para J_ε. Então, $J_\varepsilon(u_n)=\beta+$

$o_n(1)$ e $J'_\varepsilon(u_n) = o_n(1)$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\beta| + c_n + \frac{d_n\|u_n\|}{p} &\geq J_\varepsilon(u_n) + \frac{1}{p}\langle J'_\varepsilon(u_n), u_n\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u_n|^q dz \\
&\geq \frac{p-2}{2p}\|u_n\|^2 - \frac{p-q}{pq}\alpha\|h\|_\# S^q \|u_n\|^q,
\end{aligned}$$

onde $c_n = o_n(1)$ e $d_n = o_n(1)$ quando $n \to \infty$. Como $1 \leq q < 2$, segue-se da desigualdade acima que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

Lema 1.16 *Suponha que f e h satisfazem (f_1) e (h_1). Se $0 < \alpha \left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right) < \alpha_0$, então J_ε satisfaz a condição $(PS)_\beta$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para $\beta \in \left(-\infty, \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}\right)$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ $(PS)_\beta$ para J_ε. Pelo Lema anterior $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência limitada. Uma vez que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, o qual é um espaço reflexivo, pelo Teorema C.8, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e uma $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Lema 1.14, temos que

$$J'_\varepsilon(u) = 0 \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Usando as Imersões de Sobolev, temos

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ para algum } 1 \leq s < 2^*$$

e

$$u_n \to u \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Usando o Lema de Brézis-Lieb (Teorema C.5), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n - u|^p dz = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz + o_n(1) \tag{1.18}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz = \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n|^q dz - \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u|^q dz + o_n(1). \tag{1.19}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.20}$$

De fato, como $h \in L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\sigma > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\int_{[B_r^N(0)]^c} h(\varepsilon z)^{\frac{p}{p-q}} dz < \sigma.$$

Temos,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \right| \leq \int_{B_r^N(0)} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz + \int_{[B_r^N(0)]^c} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz.$$

Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e o Teorema de Imersão de Sobolev (Teorema C.7), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \right| &\leq \|h\|_{\#} \left(\int_{B_r^N(0)} (|u_n - u|^q)^{\frac{p}{q}} dz \right)^{\frac{q}{p}} \\ &+ \left(\int_{[B_r^N(0)]^c} h(\varepsilon z)^{\frac{p}{p-q}} dz \right)^{\frac{p-q}{p}} \|u_n - u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|h\|_{\#} \left(\int_{B_r^N(0)} |u_n - u|^p dz \right)^{\frac{q}{p}} \\ &+ S^q \left(\int_{[B_r^N(0)]^c} h(\varepsilon z)^{\frac{p}{p-q}} dz \right)^{\frac{p-q}{p}} \|u_n - u\|^q. \end{aligned}$$

Como $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \right| \leq C' \sigma + o_n(1), \text{ para todo } \sigma > 0.$$

Sendo assim,

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz \right| \leq C' \sigma.$$

Fazendo $\sigma \to 0$, concluímos que para n suficientemente grande

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)|u_n - u|^q dz = o_n(1),$$

completando a afirmação.

Afirmamos, também, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n - u|^p dz = \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u_n - u|^p dz + o_n(1). \tag{1.21}$$

Com efeito, por (f_1), dado $\varsigma > 0$, existe $R > 0$ tal que $|f(\varepsilon z) - f_\infty| < \varsigma$, para todo $|z| > R$. Então,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n - u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u_n - u|^p dz \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \big(f(\varepsilon z) - f_\infty\big)|u_n - u|^p dz \right| \\
&\leq \int_{[B_R^N(0)]^c} \big|f(\varepsilon z) - f_\infty\big| |u_n - u|^p dz \\
&\quad + \int_{B_R^N(0)} \big|f(\varepsilon z) - f_\infty\big| |u_n - u|^p dz \\
&\leq C\varsigma + \|f(\varepsilon) - f_\infty\|_\infty \int_{B_R^N(0)} |u_n - u|^p dz.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima e usando o fato de $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n - u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u_n - u|^p dz \right| \leq C\varsigma, \text{ para todo } \varsigma > 0.$$

Como $\varsigma > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n - u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |u_n - u|^p dz = o_n(1),$$

demonstrando o que queríamos.

Seja $p_n = u_n - u$. Suponha que $p_n \nrightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Temos

$$\|p_n\|^2 = \langle p_n, p_n \rangle = \langle u_n - u, u_n - u \rangle = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u_n, u \rangle.$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos $\langle u_n, u \rangle = \|u\|^2 - \frac{1}{2}o_n(1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|p_n\|^2 &= \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\|u\|^2 + o_n(1) \\
&= \|u_n\|^2 - \|u\|^2 + o_n(1).
\end{aligned}$$

Por (1.18) - (1.21), deduzimos que:

$$
\begin{aligned}
\|p_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u_n|^q dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz + o_n(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n - u|^p dz + o_n(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |p_n|^p dz + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
I_\infty(p_n) &= \frac{1}{2}\|p_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_\infty |p_n|^p dz \\
&= \frac{1}{2}\|p_n\|^2 - \frac{1}{p}\|p_n\|^2 + o_n(1) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|p_n\|^2 + o_n(1) > 0.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema B.5, existe uma sequência $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$
s_n = 1 + o_n(1), \qquad s_n p_n \subset N_\infty \quad \text{e} \quad I_\infty(s_n p_n) = I_\infty(p_n) + o_n(1).
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\gamma_\infty &\leq I_\infty(s_n p_n) \\
&= I_\infty(p_n) + o_n(1) \\
&= J_\varepsilon(u_n) - J_\varepsilon(u) + o_n(1) \\
&= \beta - J_\varepsilon(u) + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Daí, como $\beta < \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}$ e $J_\varepsilon(u) \geq -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}$ (veja Lema 1.14), segue-se que

$$
\begin{aligned}
\gamma_\infty &< \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} + C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} + o_n(1) \\
&= \gamma_\infty + o_n(1),
\end{aligned}
$$

que é um absurdo. Portanto, $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, demonstrando que J_ε satisfaz a condição $(PS)_\beta$. ■

Observação 1.17 *Da expressão de $C_0^{'}$ no Lema* 1.14 *e de* (1.3), *temos*

$$
\begin{aligned}
C_0^{'} &= \frac{(p-2)(2-q)^{\frac{p}{p-2}}}{2pq[f_{max}(p-q)]^{\frac{2}{p-2}}S^{\frac{2p}{p-2}}} \\
&= \frac{2-q}{q}\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2}{p-2}}\left[\frac{p-2}{2p(f_{max})^{\frac{2}{p-2}}S^{\frac{2p}{p-2}}}\right] \\
&= \frac{2-q}{q}\left(\frac{2-q}{p-q}\right)^{\frac{2}{p-2}}\gamma_{max} \\
&< \gamma_{max} < \gamma_{\infty}.
\end{aligned}
$$

Daí, como $-C_0^{'} \leq -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}$, *desde que* $0<\alpha<\alpha_0$, *temos* $0<\gamma_\infty - C_0^{'} \leq \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}$. *Donde,*

$$\gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} > 0,$$

para $0<\alpha<\alpha_0$.

Pelo Lema 1.13 (i), existe uma $\{u_n\}\subset M_\varepsilon$ sequência $(PS)_{\alpha_\varepsilon}$ para J_ε. Então, provaremos que (E_ε) admite uma solução positiva u_0 em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.18 *Suponha que* (f_1) *e* (h_1) *valem. Se* $0<\alpha\left(=\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}\right)<\alpha_0$, *então existe, pelo menos, uma solução positiva* u_0 *de* (E_ε) *em* $\mathbb{R}^N$. *Além disso, temos que* $u_0\in M_\varepsilon^+$ *e*

$$J_\varepsilon(u_0) = \alpha_\varepsilon = \alpha_\varepsilon^+ \geq -C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}. \tag{1.22}$$

Demonstração. Pelo Lema 1.13 (i), existe uma sequência minimizante $\{u_n\}\subset M_\varepsilon$ para J_ε tal que

$$J_\varepsilon(u_n) = \alpha_\varepsilon + o_n(1) \quad \text{e} \quad J_\varepsilon'(u_n) = o_n(1) \ \text{ em } \ H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Lema 1.12 (i) e a observação 1.17, temos

$$\alpha_\varepsilon < 0 < \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}.$$

Assim, pelo Lema 1.16, existem uma subsequência $\{u_n\}$ e $u_0\in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_n\to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela continuidade de J_ε temos que $J_\varepsilon(u_n)\to J_\varepsilon(u_0)$. Mas $J_\varepsilon(u_n)\to\alpha_\varepsilon$ quando $n\to\infty$, pois $\{u_n\}$ é uma sequência minimizante para J_ε em M_ε. Pela unicidade do limite temos $J_\varepsilon(u_0)=\alpha_\varepsilon$. Logo, pelo Lema 1.8, temos que u_0 é ponto crítico para o funcional J_ε e, portanto, uma solução de (E_ε) em $\mathbb{R}^N$.

Afirmação: $u_0\in M_\varepsilon^+$. De fato, caso contrário, u_0 deveria estar em M_ε^-, visto que, pelo Lema

1.7, $M_\varepsilon^0 = \emptyset$. Observe que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_0|^q dz > 0,$$

pois, caso contrário,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_0|^q dz = 0,$$

então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.3), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_n|^q dz = \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_0|^q dz = 0,$$

o que implica, juntamente com (1.5),

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz + o_n(1).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_n) &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u_n|^q dz \\ &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p}\|u_n\|^2 + o_n(1) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 + o_n(1), \end{aligned}$$

implicando que $\lim\limits_{n\to\infty} J_\varepsilon(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 > 0$, pois $p > 2$, que é uma contradição, pois $J_\varepsilon(u_n) \to \alpha_\varepsilon < 0$. Pelo Lema 1.11 (ii) existem números positivos $t^+ < \bar{t} < t^- = 1$ tais que $t^+u_0 \in M_\varepsilon^+$, $t^-u_0 \in M_\varepsilon^-$ e

$$J_\varepsilon(t^+u_0) < J_\varepsilon(t^-u_0) = J_\varepsilon(u_0) = \alpha_\varepsilon,$$

contradição, pois $J_\varepsilon(t^+u_0) \geq \alpha_\varepsilon^+ \geq \alpha_\varepsilon$. Daí, $u_0 \in M_\varepsilon^+$ e $-C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}} \leq J_\varepsilon(u_0) = \alpha_\varepsilon = \alpha_\varepsilon^+$, completando a afirmação.

Como $J_\varepsilon(|u_0|) = J_\varepsilon(u_0)$ podemos assumir sem perda de generalidade que u_0 é não negativa e, pelo Princípio do Máximo (Teorema C.13), concluímos que u_0 é solução positiva de (E_ε) em $\mathbb{R}^N$. ∎

1.3 Existência de Múltiplas Soluções Positivas

No que segue, assumiremos que f e h satisfazem (f_1), (f_2) e (h_1). Seja $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a única solução positiva, radialmente simétrica, da equação (E_0) em $\mathbb{R}^N$ para $f = f_{max}$. Temos as seguintes propriedades (veja [6], [7], [17] ou [23])

i) $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $0 < \theta < 1$ e $\lim\limits_{|z|\to\infty} w(z) = 0$;

ii) Para qualquer $\varepsilon > 0$, existem números positivos c_1, c_2^ε e c_3^ε tais que, para todo $z \in \mathbb{R}^N$,

$$c_2^\varepsilon exp(-(1-\varepsilon)|z|) \le w(z) \le c_1 exp(-|z|)$$

e

$$|\nabla w(z)| \le c_3^\varepsilon exp(-(1-\varepsilon)|z|).$$

Para $1 \le i \le k$, definimos

$$w_\varepsilon^i(z) = w\left(z - \frac{a^i}{\varepsilon}\right), \text{ onde } f(a^i) = f_{max}.$$

Claramente, $w_\varepsilon^i(z) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 1.11 (ii), existe um único número $(t_\varepsilon^i)^- > 0$ tal que

$$(t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i \in M_\varepsilon^- \subset M_\varepsilon, \text{ para } 1 \le i \le k.$$

Agora, provaremos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{t\ge 0}(J_\varepsilon(t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i) \le \gamma_{max} \text{ uniformemente em } i.$$

Lema 1.19 *Temos:*

i) Existe um número t_0 tal que para todo $0 \le t \le t_0$ e qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) < \gamma_{max} \text{ uniformemente em } i;$$

ii) Existem números positivos t_1 e ε_1 tal que para qualquer $t > t_1$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, vale

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) < 0 \text{ uniformemente em } i.$$

Demonstração. $i)$ Como J_ε é contínua em $H^1(\mathbb{R}^N)$, w_ε^i é uniformemente limitada em

$H^1(\mathbb{R}^N)$ e para qualquer $\varepsilon > 0$ e $\gamma_{max} > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que para $0 \leq t \leq t_0$,

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) < \gamma_{max}, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

ii) Como f é contínua, existe $r_0 > 0$ tal que $f(z) \geq \frac{f_{max}}{2}$, para $z \in B_{r_0}^N(a^i)$ uniformemente em i. Então, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) &= \frac{t^2}{2}\|w_\varepsilon^i\|^2 - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)(w_\varepsilon^i)^p dz - \frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)(w_\varepsilon^i)^q dz \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|w_\varepsilon^i\|^2 - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)(w_\varepsilon^i)^p dz \\
&= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_\varepsilon^i|^2 + (w_\varepsilon^i)^2) - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)(w_\varepsilon^i)^p dz \\
&\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^2 + w^2) dz - \frac{t^p}{p}\int_{B_1^N(0)} f(\varepsilon z + a^i) w^p dz \\
&\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^2 + w^2) dz - \frac{t^p}{2p}\int_{B_1^N(0)} f_{max} w^p dz,
\end{aligned}$$

o que implica que $J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$, pois $p > 2$. Assim, existe $t_1 > 0$ tal que para qualquer $t > t_1$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) < 0 \text{ uniformemente em } i.$$

$\blacksquare$

Lema 1.20 *Suponha* (f_1), (f_2) *e* (h_1). *Se*

$$0 < \alpha \left(= \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} \right) < \frac{q}{2}\alpha_0,$$

então

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{t \geq 0} J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \leq \gamma_{max} \textit{ uniformemente em } i.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.19, basta mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \leq \gamma_{max} \text{ uniformemente em } i.$$

Sabemos que $\sup_{t \geq 0} I_{max}(tw) = \gamma_{max}$. Para $t_0 < t < t_1$, temos

$$J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) = \frac{1}{2}\|tw_\varepsilon^i\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)(tw_\varepsilon^i)^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)(tw_\varepsilon^i)^q dz.$$

Como $w_\varepsilon^i(z) = w\left(z - \frac{a^i}{\varepsilon}\right)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\nabla w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right|^2 + w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)^2\right]dz - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz \\
&\quad -\frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz.
\end{aligned}
$$

Usando o fato do $\mathbb{R}^N$ ser invariante por translação, temos

$$
\begin{aligned}
J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2 + w^2] - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max} w^p dz + \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max} w^p dz \\
&\quad -\frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz - \frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz \\
&= I_{max}(tw) + \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left(f_{max} - f(\varepsilon z)\right)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz \\
&\quad -\frac{t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz \\
&\le \gamma_{max} + \frac{t_1^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left(f_{max} - f(\varepsilon z)\right)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz - \frac{t_0^q}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\left(f_{max} - f(\varepsilon z)\right)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p dz = \int_{\mathbb{R}^N}\left(f_{max} - f(\varepsilon z + a^i)\right)w^p dz = o_\varepsilon(1),
$$

quando $\varepsilon \to 0^+$ uniformemente em i e

$$
\alpha\int_{\mathbb{R}^N} h(\varepsilon z)\left[w\left(z-\frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right]^q dz \le \varepsilon^{\frac{2(p-2)}{p-q}}\|h\|_\# S^q \|w\|^q = o_\varepsilon(1),
$$

quando $\varepsilon \to 0^+$, então

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sup_{t_0\le t\le t_1} J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \le \gamma_{max},
$$

donde,

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sup_{t\ge 0} J_\varepsilon(tw_\varepsilon^i) \le \gamma_{max} \text{ uniformemente em } i.
$$

■

Aplicando os resultados dos Lemas 1.11, 1.12 (ii) e 1.20, podemos deduzir que

$$
0 < d_0 \le \alpha_\varepsilon^- \le \gamma_{max} + o_\varepsilon(1), \text{ quando } \varepsilon \to 0^+.
$$

Como $\gamma_{max} < \gamma_\infty$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\gamma_{max} < \gamma_\infty - C_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}, \text{ para qualquer } \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{1.23}$$

Como os pontos de máximos a^1, a^2, ..., a^k da função f são distintos, iremos fixar $0 < \rho_0 < 1$ de modo que

$$\overline{B^N_{\rho_0}(a^i)} \cap \overline{B^N_{\rho_0}(a^j)} = \emptyset, \text{ para } i \neq j \text{ e } 1 \leq i, j \leq k,$$

onde $\overline{B^N_{\rho_0}(a^i)} = \{z \in \mathbb{R}^N : |z - a^i| \leq \rho_0\}$ e $f(a^i) = f_{max}$. Defina

$$K = \{a^i \ : \ 1 \leq i \leq k\}$$

e

$$K_{\frac{\rho_0}{2}} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B^N_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)}.$$

Suponha que

$$\bigcup_{i=1}^{k} \overline{B^N_{\rho_0}(a^i)} \subset B^N_{r_0}(0), \text{ para algum } r_0 > 0.$$

Seja

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon : \ H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} &\to \mathbb{R}^N \\ u &\mapsto Q_\varepsilon(u) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon z)|u|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz}, \end{aligned}$$

onde $\chi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\chi(z) = z$ para $|z| \leq r_0$ e $\chi(z) = \dfrac{r_0 z}{|z|}$ para $|z| > r_0$.

Lema 1.21 *Existe $0 < \varepsilon^0 \leq \varepsilon_0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$, então $Q_\varepsilon\left((t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon\right) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$ para cada $1 \leq i \leq k$.*

Demonstração. Como

$$Q_\varepsilon((t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon z)|(t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |(t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon|^p dz} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon z)\left|w\left(z - \frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left|w\left(z - \frac{a^i}{\varepsilon}\right)\right|^p dz} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon z + a^i)|w(z)|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |w(z)|^p dz},$$

segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $Q_\varepsilon((t^i_\varepsilon)^- w^i_\varepsilon) \to a^i$ quando

$\varepsilon \to 0^+$. Portanto, existe $\varepsilon^0 > 0$ tal que

$$Q_\varepsilon((t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i) \in K_{\frac{\rho_0}{2}},$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon^0$ e para cada $1 \leq i \leq k$. ∎

Lema 1.22 *Existe um número $\bar{\delta} > 0$ tal que se $u \in N_\varepsilon$ e $I_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \bar{\delta}$, então $Q_\varepsilon(u) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{u_n\} \subset N_{\varepsilon_n}$ tais que

$$\varepsilon_n \to 0, \quad I_{\varepsilon_n}(u_n) = \gamma_{max} + o_n(1), \text{ quando } n \to \infty \tag{1.24}$$

e

$$Q_{\varepsilon_n}(u_n) \notin K_{\rho_0/2} \text{ para todo } n \in \mathbb{R}^N. \tag{1.25}$$

Temos que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, se para alguma subsequência tivéssemos $\|u_n\| \to +\infty$, então acarretaria $I_{\varepsilon_n}(u_n) \to +\infty$, o que contraria (1.24). Suponha que $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Como

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z)|u_n|^p dz, \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

pois $u_n \in N_{\varepsilon_n}$, e

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon_n}(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z)|u_n|^p dz \\ &= \gamma_{max} + o_n(1), \end{aligned}$$

concluímos que

$$\gamma_{max} + o_n(1) = I_{\varepsilon_n}(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z)|u_n|^p dz = o_n(1),$$

que é um absurdo, pois $\gamma_{max} > 0$. Assim,

$$u_n \nrightarrow 0 \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N). \tag{1.26}$$

Aplicando o Lema de Lions (Teorema C.9), existe uma constante $d_0 > 0$ e uma sequência

$\{\overline{z_n}\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1^N(\overline{z_n})} |u_n(z)|^2 dz \geq d_0 > 0. \tag{1.27}$$

Com efeito, se (1.27) não ocorresse, teríamos

$$\int_{B_1^N(\bar{z}_n)} |u_n(z)|^2 dz \to 0.$$

Consequentemente, como $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema de Lions, teríamos $\{u_n\} \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, o que contradiz (1.26).

Seja $v_n(z) = u_n(z + \widetilde{z_n})$. Então, existe uma subsequência $\{v_n\}$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando um cálculo similar ao Lema 1.11, existe uma sequência $\{s_{max}^n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$\widetilde{v_n} = s_{max}^n v_n \in N_{max}$$

e

$$0 < \gamma_{max} = \inf_{u \in N_{max}} I_{max}(u) \leq I_{max}(\widetilde{v_n}) \leq I_{\varepsilon_n}(s_{max}^n u_n) \leq \sup_{t \geq 0} I_{\varepsilon_n}(t u_n) = I_{\varepsilon_n}(u_n) = \gamma_{max} + o_n(1),$$

onde a última iguadade segue de (1.24). Assim,

$$\{s_{max}^n u_n\} \subset N_{max} \quad \text{e} \quad I_{\varepsilon_n}(s_{max}^n u_n) \to \gamma_{max}.$$

Logo, podemos supor que $\{s_{max}^n\}$ satisfaz $s_{max}^n \to s_0$, para algum $s_0 > 0$. Então, existem subsequências $\{\widetilde{v_n}\}$ e $\widetilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $\widetilde{v_n} \rightharpoonup \tilde{v}(= s_0 v)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por (1.27), temos $\tilde{v} \neq 0$. Além disso, podemos obter que

$$\widetilde{v_n} \to \tilde{v} \ \text{ em } \ H^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$I_{max}(\tilde{v}) = \gamma_{max}.$$

Agora, queremos mostrar que existe uma subsequência $\{z_n\} = \{\varepsilon_n \tilde{z}_n\}$ tal que $z_n \to z_0 \in K$.

Afirmação 1: $\{z_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}^N$. Suponha por contradição que $|z_n| \to \infty$, então

$$\begin{aligned}
\gamma_{max} &= I_{max}(\tilde{v}) \\
&< I_{\infty}(\tilde{v}) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\|\tilde{v}_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z + z_n)|\widetilde{v}_n|^p dz\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{(s^n_{max})^2}{2}\|u_n\|^2 - \frac{(s^n_{max})^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z)|u_n|^p dz\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty} I_{\varepsilon_n}(s^n_{max}u_n) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} I_{\varepsilon_n}(u_n) = \gamma_{max}.
\end{aligned}$$

Donde, $\gamma_{max} < \gamma_{max}$, o que é um absurdo.

Afirmação 2: $z_0 \in K$. De fato, suponha que $z_0 \notin K$, isto é, $f(z_0) < f_{max}$. Então, usando os mesmos argumentos acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma_{max} &= I_{max}(\tilde{v}) \\
&= \frac{1}{2}\|\tilde{v}\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max}|\tilde{v}|^p dz \\
&< \frac{1}{2}\|\tilde{v}\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(z_0)|\tilde{v}|^p dz \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\|\tilde{v}_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon_n z + z_n)|\widetilde{v}_n|^p dz\right] \\
&= \gamma_{max},
\end{aligned}$$

acarretando $\gamma_{max} < \gamma_{max}$, o que é um absurdo. Como $v_n \to v \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned}
Q_{\varepsilon_n}(u_n) &= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon_n z)|v_n(z-\tilde{z}_n)|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(z-\tilde{z}_n)|^p dz} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon_n z + \varepsilon_n\tilde{z}_n)|v_n|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dz}.
\end{aligned}$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$,

$$Q_{\varepsilon_n}(u_n) \to z_0 \in K_{\frac{\rho_0}{2}},$$

que é uma contradição com (1.25). Portanto, existe um número $\bar{\delta} > 0$ tal que se $u \in N_\varepsilon$ e

$I_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \bar{\delta}$, tem-se

$$Q_\varepsilon(u) \in K_{\frac{\rho_0}{2}} \quad \text{para qualquer } \ 0 < \varepsilon < \varepsilon^0.$$

■

De (1.23), escolha $0 < \delta_0 < \bar{\delta}$ tal que

$$\gamma_{max} + \delta_0 < \gamma_\infty - C_0 \alpha^{\frac{2}{2-q}} \quad \text{para qualquer } \ 0 < \varepsilon < \varepsilon^0. \tag{1.28}$$

Para cada $1 \leq i \leq k$, defina as vizinhanças em M_ε^-,

$$O_\varepsilon^i = \left\{ u \in M_\varepsilon^- \ : \ |Q_\varepsilon(u) - a^i| < \rho_0 \right\}$$

e suas fronteiras

$$\partial O_\varepsilon^i = \left\{ u \in M_\varepsilon^- \ : \ |Q_\varepsilon(u) - a^i| = \rho_0 \right\}.$$

Considere também os números

$$\beta_\varepsilon^i = \inf_{u \in O_\varepsilon^i} J_\varepsilon(u) \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}_\varepsilon^i = \inf_{u \in \partial O_\varepsilon^i} J_\varepsilon(u).$$

Lema 1.23 *Se $u \in M_\varepsilon^-$ e $J_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{2}$, então existe um número $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon^0$ tal que $Q_\varepsilon(u) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$ para qualquer $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$.*

Demonstração. Usando um cálculo similar ao que foi feito para obter (1.16), obtemos um único número positivo

$$s_\varepsilon^u = \left(\frac{\|u\|^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz} \right)^{\frac{1}{p-2}}$$

tal que $s_\varepsilon^u u \in N_\varepsilon$.

Afirmação: $s_\varepsilon^u < c$, para alguma constante $c > 0$ (independente de u). Como $u \in M_\varepsilon^- \subset M_\varepsilon$, então $\langle J_\varepsilon'(u), u \rangle = 0$. Além disso, temos também

$$0 < d_0 \leq \alpha_\varepsilon^- \leq J_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 < d_0 &\leq J_\varepsilon(u) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &\leq \frac{p-2}{2p}\|u\|^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|u\|^2 \geq \frac{p-2}{2p} d_0 = c_1 > 0. \tag{1.29}$$

Como J_ε é coercivo em M_ε e $J_\varepsilon(u) \leq \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{2}$, então temos que existe uma constante $c_2 > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|^2 < c_2. \tag{1.30}$$

Logo, por (1.29) e (1.30), temos

$$0 < c_1 \leq \|u\|^2 < c_2. \tag{1.31}$$

Provaremos agora que

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} > c_3 > 0. \tag{1.32}$$

De fato, suponha que (1.32) não ocorre, logo existe uma sequência $\{u_n\} \subset M_\varepsilon^-$ tal que

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = o_n(1) \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Por (1.8) e (1.29),

$$\frac{2-q}{p-q} < \frac{\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^p dz}{\|u_n\|^2} \leq \frac{f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{c_1} = o_n(1),$$

que é uma contradição, pois $\frac{2-q}{p-q} > 0$. Segue então que (1.32) vale.

Assim, por (1.31), (1.32) e da expressão de s_ε^u, existe $c > 0$ (independente de u) tal que $s_\varepsilon^u < c$, completando a demonstração da afirmação.

Agora, obtemos que

$$\begin{aligned}
\gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2} &\geq J_\varepsilon(u)=\sup_{t\geq 0} J_\varepsilon(tu)\geq J_\varepsilon(s_\varepsilon^u u)\\
&= \frac{1}{2}\|s_\varepsilon^u u\|^2-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u|^p dz-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u|^q dz\\
&\geq I_\varepsilon(s_\varepsilon^u u)-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u|^q dz.
\end{aligned}$$

Da desigualdade acima, deduzimos que

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(s_\varepsilon^u u) &\leq \gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}+\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\alpha h(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u|^q dz\\
&\leq \gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}+\alpha\|h\|_\# S^q\|s_\varepsilon^u u\|^q\\
&< \gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}+\alpha c^q(c_2)^{\frac{q}{2}}\|h\|_\# S^q,
\end{aligned}$$

onde $\alpha=\varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}}$. Daí, existe $0<\bar{\varepsilon}<\varepsilon^0$ tal que, para $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$,

$$I_\varepsilon(s_\varepsilon^u u)\leq\gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2},\ \text{ onde }\ s_\varepsilon^u u\in N_\varepsilon.$$

Pelo Lema 1.22, obtemos

$$Q_\varepsilon(s_\varepsilon^u u)=\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\chi(\varepsilon z)|s_\varepsilon^u u(z)|^p dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|s_\varepsilon^u u(z)|^p dz}\in K_{\frac{\rho_0}{2}},$$

para qualquer $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$ ou $Q_\varepsilon(u)\in K_{\frac{\rho_0}{2}}$, para qualquer $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$. ∎

Aplicando o Lema acima, obtemos que

$$\tilde{\beta}_\varepsilon^i\geq\gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}\ \text{ para qualquer }\ 0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}. \tag{1.33}$$

Com efeito, se (1.33) não vale, segue da definição de $\tilde{\beta}_\varepsilon^i$ que existe $u\in\partial O_\varepsilon^i$ tal que $J_\varepsilon(u)<\gamma_{max}+\frac{\delta_0}{2}$. Assim, pelo Lema 1.23, temos que $Q_\varepsilon(u)\in K_{\rho_0/2}$, para todo $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$, então

$$Q_\varepsilon(u)\in\overline{B^N_{\frac{\rho_0}{2}}(a^j)},$$

para algum $j\in\{1,...,k\}$, que é uma contradição, pois $|Q_\varepsilon(u)-a^j|=\rho_0$. Portanto, (1.33) vale.

Pelo Lema 1.21, existe $\varepsilon^0 > 0$ tal que

$$Q_\varepsilon((t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i) \in K_{\rho_0/2},$$

para cada $1 \leq i \leq k$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$. Segue da definição de $K_{\rho_0/2}$ que $(t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i \in O_\varepsilon^i$. Usando a definição de β_ε^i, o Lema 1.20 e a equação (1.28), obtemos

$$\beta_\varepsilon^i = \inf_{u \in O_\varepsilon^i} J_\varepsilon(u) \leq J_\varepsilon((t_\varepsilon^i)^- w_\varepsilon^i) \leq \sup_{t \geq 0} J_\varepsilon(t w_\varepsilon^i) \leq \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{3} < \gamma_\infty - C_0 \alpha^{\frac{2}{2-q}}, \tag{1.34}$$

para qualquer $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$.

Lema 1.24 *Dado $u \in O_\varepsilon^i$, então existem $\eta > 0$ e um funcional diferenciável*

$$l : B(0,\eta) \subset H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^+$$

tais que

$$l(0) = 1, \quad l(v)(u - v) \in O_\varepsilon^i, \ \ \textit{para qualquer} \ \ v \in B_\eta(0)$$

e

$$\langle l'(v), \phi \rangle \mid_{(l,v)=(1,0)} = \frac{\langle \psi_\varepsilon'(u), \phi \rangle}{\langle \psi_\varepsilon'(u), u \rangle}, \tag{1.35}$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $\psi_{\varepsilon(u)} = \langle J_\varepsilon'(u), u \rangle$.

Demonstração. Para $u \in O_\varepsilon^i$, defina uma função $F : \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por

$$F(\tau, w) = \langle J_\varepsilon'(\tau(u - w)), \tau(u - w) \rangle.$$

Logo, pela definição de J_ε',

$$F(\tau, w) \ = \ \|\tau(u-w)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|\tau(u-w)|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|\tau(u-w)|^q dz$$

e, assim,

$$F(\tau, w) \ = \ \tau^2 \|u-w\|^2 - \tau^p \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u-w|^p dz - \tau^q \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u-w|^q dz.$$

Daí,

$$\begin{aligned} F(1,0) &= \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \langle J_\varepsilon'(u), u \rangle = 0 \end{aligned}$$

(pois $u \in M_\varepsilon^-$ $(u \in M_\varepsilon)$). Derivando F em relação a τ, obtemos

$$\frac{d}{d\tau}F(\tau,w) = 2\tau\|u-w\|^2 - p\tau^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u-w|^p dz - q\tau^{q-1}\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u-w|^q dz.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}F(1,0) &= 2\|u-w\|^2 - p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - q\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^q dz \\ &= \langle \psi_\varepsilon'(u), u\rangle \neq 0 \ \ (u \in M_\varepsilon^-).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w}F(\tau,w)(\phi) &= -2\tau^2(u-w/\phi) + p\tau^p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u-w|^{p-2}(u-w)\phi dz \\ &\quad + q\tau^q\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u-w|^{q-2}(u-w)\phi dz.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial w}F(1,0)(\phi) = -2(u/\phi) + p\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}u\phi dz + q\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u|^{q-2}u\phi dz.$$

Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existem $\eta > 0$ e uma função diferenciável l : $B_\eta(0) \subset H_0^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ tais que $l(0) = 1$, $F(l(v), v) = 0$, para todo $v \in B_\eta(0)$ e

$$\langle l'(0), \phi\rangle = \frac{-\frac{\partial F}{\partial w}(1,0)}{\frac{dF}{d\tau}(1,0)} = \frac{\langle \psi_\varepsilon'(u), \phi\rangle}{\langle \psi_\varepsilon'(u), u\rangle}.$$

■

Lema 1.25 *Para cada $1 \le i \le k$, existe uma sequência $(PS)_{\beta_\varepsilon^i}$, $\{u_n\} \subset O_\varepsilon^i$, em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para J_ε.*

Demonstração. Para cada $1 \le i \le k$, por (1.33) e (1.34),

$$\beta_\varepsilon^i \le \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{3} < \delta_{max} + \frac{\delta_0}{2} = \tilde{\beta}_\varepsilon^i,$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, ou seja,

$$\beta_\varepsilon^i < \tilde{\beta}_\varepsilon^i, \ \text{ para qualquer } \ 0 < \varepsilon < \varepsilon^*. \tag{1.36}$$

Então,

$$\beta_\varepsilon^i = \inf_{u \in O_\varepsilon^i \cup \partial O_\varepsilon^i} J_\varepsilon(u),$$

para qualquer $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$.

Considere $\{u_n^i\} \subset O_\varepsilon^i \cup \partial O_\varepsilon^i$ uma sequência minimizante para β_ε^i. Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland (Teorema C.11), existe uma subsequência $\{u_n^i\}$ tal que

$$J_\varepsilon(u_n^i) = \beta_\varepsilon^i + \frac{1}{n}$$

e

$$J_\varepsilon(u_n^i) \leq J_\varepsilon(u) + \frac{\|w - u_n^i\|^2}{n}, \text{ para qualquer } w \in O_\varepsilon^i \cup \partial O_\varepsilon^i. \tag{1.37}$$

Usando (1.36), podemos assumir que $u_n^i \in O_\varepsilon^i$, para n suficientemente grande. Pelo Lema 1.24, existem $\eta_n^i > 0$ e um funcional diferenciável

$$l_n^i : B(o, \eta_n^i) \subset H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^+$$

tais que

$$l_n^i(0) = 1, \quad l_n^i(v)(u_n^i - v) \in O_\varepsilon^i, \; v \in B_{\eta_n^i}(0)$$

e

$$\langle l'(v), \phi \rangle \mid_{(l,v)=(1,0)} = \frac{\langle \psi_\varepsilon'(u), \phi \rangle}{\langle \psi_\varepsilon'(u), u \rangle}. \tag{1.38}$$

Seja $v_\sigma = \sigma v$ com $\|v\| = 1$ e $0 < \sigma < \eta_n^i$. Então,

$$v_\sigma \in B_{\eta_n^i}(0) \quad \text{e} \quad w_\sigma := l_n^i(v_\sigma)(u_n^i - v_\sigma) \in O_\varepsilon^i.$$

Desde que J_ε é de classe C^1, segue de (1.37) que

$$\begin{aligned}
\frac{\|w_\sigma - u_n^i\|_H}{n} &\geq J_\varepsilon(u_n^i) - J_\varepsilon(w_\sigma) \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} J_\varepsilon(t u_n^i + (1-t) w_\sigma) dt \\
&= \int_0^1 J_\varepsilon'(t u_n^i + (1-t) w_\sigma)(u_n^i - w_\sigma) dt \\
&= \langle J_\varepsilon'(t_0 u_n^i + (1-t_0) w_\sigma), u_n^i - w_\sigma \rangle, \;\; \textit{onde} \;\; t_0 \in (0,1) \\
&\geq \langle J_\varepsilon'(t u_n^i), u_n^i - w_\sigma \rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|).
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de w_σ, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|w_\sigma - u_n^i\|_H}{n} &\geq \langle J_\varepsilon'(tu_n^i), u_n^i - l_n^i(v_\sigma)(u_n^i - v_\sigma)\rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|) \\
&= \langle J_\varepsilon'(tu_n^i), u_n^i - l_n^i(v_\sigma)u_n^i - l_n^i(v_\sigma)v_\sigma\rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|) \\
&= \langle J_\varepsilon'(tu_n^i), l_n^i(v_\sigma)\sigma v\rangle + \langle J_\varepsilon'(tu_n^i), u_n^i(1 - l_n^i)\rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|).
\end{aligned}$$

Fazendo $\sigma \to 0$, temos $l_n^i(v_\sigma) \to l_n^i(0) = 1$ e, daí

$$|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| \leq \sigma l_n^i(\sigma v)\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle + o(\|u_n^i - w_\sigma\|),$$

onde $\frac{o(\|u_n^i - w_\sigma\|)}{\|u_n^i - w_\sigma\|} \to 0$, quando $\sigma \to 0$. Assim,

$$|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| \leq \frac{\|w_\sigma - u_n^i|(\frac{1}{n} + |o(1)|)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|}.$$

Como $w_\sigma = l_n^i(u_n^i - v_\sigma)$, segue que

$$|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| \leq \frac{\|l_n^i(v_\sigma)(u_n^i - v_\sigma) - u_n^i\|(\frac{1}{n} + |o(1)|)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|}.$$

Sabendo-se que $v_\sigma = \sigma v$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| &\leq \frac{\|l_n^i(v_\sigma)(u_n^i - \sigma v) - u_n^i\|\left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|} \\
&= \frac{\|u_n^i(l_n^i(\sigma v) - 1) - \sigma v l_n^i(\sigma v)\|\left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|}.
\end{aligned}$$

Como $l_n^i(0) = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| &\leq \frac{\|u_n^i(l_n^i(\sigma v) - l_n^i(0)) - \sigma v l_n^i(\sigma v)\|\left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right)}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|} \\
&\leq \frac{\|u_n^i\||l_n^i(\sigma v) - l_n^i(0)| - \sigma\|v\||l_n^i(\sigma v)|}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|}\left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right) \\
&= \left(\frac{\|u_n^i\||l_n^i(\sigma v) - l_n^i(0)|}{\sigma|l_n^i(\sigma v)|} + 1\right)\left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right).
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\sigma \to 0$ e observando que $(\|u_n^i\|)$ é limitada, obtemos

$$|\langle J_\varepsilon'(u_n^i), v\rangle| \leq (C\|(l_n^i)'(0)\| + 1)\left(\frac{1}{n} + |o(1)|\right).$$

onde $o(1) \to 0$ quando $\sigma \to 0$.

Mostraremos agora que $\|(l_n^i)'(0)\| \leq c$. Dada $\phi \in C_0^\infty$, temos

$$\left|\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), \phi\rangle\right| \leq 2|(u_n^i|\phi)| + p\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^{p-2}u_n^i\phi dz\right| + q\left|\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_n^i|^{q-2}u_n^i\phi dz\right|.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a limitação de $(\|u_n^i\|)$, temos $|(u_n^i|\phi)| \leq \|u_n^i\|\|\phi\| \leq C_1\|\phi\|$. Usando a Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) e as Imersões de Sobolev (Teorema C.7),

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^{p-2}u_n^i\phi dz\right| \leq f_{max}\|u_n^i\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p-1}\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_2\|\phi\|.$$

e

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \alpha h(\varepsilon z)|u_n^i|^{q-2}u_n^i\phi dz\right| \leq \alpha\|h\|_\infty\|u_n^i\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p-1}\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_3\|\phi\|.$$

Logo,

$$\left|\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), \phi\rangle\right| \leq C_4\|\phi\|. \tag{1.39}$$

Afirmamos que

$$\left|\left\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), u_n\right\rangle\right| > C_5. \tag{1.40}$$

Como $u_n^i \in M_\varepsilon^- \subset M_\varepsilon$, temos

$$\left\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), u_n^i\right\rangle = (2-q)\|u_n^i\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^p dz.$$

De (1.31)

$$0 < c_1 \leq \|u\| < c_2, \text{ para todo } u \in M_\varepsilon^-,$$

donde

$$\|u_n^i\|^2 > C_6$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^p dz \leq f_{max}\|u_n^i\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq f_{max}S^p\|u_n^i\|^p < f_{max}S^p c_2^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), u_n^i\right\rangle\right| &= \left|(2-q)\|u_n^i\|^2 - (p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^p dz\right| \\
&\geq \left|(2-q)\|u_n^i\|^2\right| - \left|(p-q)\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n^i|^p dz\right| \\
&> (2-q)C_6 - (p-q)f_{max}S^p c_2^p = C_5,
\end{aligned}$$

mostrando (1.40). Então, de (1.39) e (1.40), temos

$$\left|\langle (l_n^i(0))', \phi\rangle\right| = \left|\frac{\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), \phi\rangle}{\langle \psi_\varepsilon'(u_n^i), u_n^i\rangle}\right| \leq \frac{C_4}{C_5}\|\phi\|.$$

e, portanto, de (1.35) $\|(l_n^i)'(0)\|$ é limitada para todo n e i e, consequentemente, $J_\varepsilon'(u_n^i) = o_n(1)$ fortemente em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. ■

Usando os resultados mostrados anteriormente, mostraremos que a equação (E_λ) tem $k+1$ soluções positivas em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.26 *Suponha que (f_1), (f_2), (h_1) e que existe um número positivo $\lambda^*(\lambda^* = (\varepsilon^*)^2)$ tal que para $\lambda > \lambda^*$, então a equação (E_λ) tem $k+1$ soluções positivas em $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração. Para cada $1 \leq i \leq k$, existe uma sequência $\{u_n\} \subset M_\varepsilon^-$ $(PS)_{\beta_\varepsilon^i}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para J_ε. De (1.34), temos

$$\beta_\varepsilon^i < \gamma_\infty - c_0\alpha^{\frac{2}{2-q}}.$$

Como J_ε satisfaz a condição $(PS)_\beta$ para todo $\beta \in (-\infty, \gamma_\infty - c_0\alpha^{\frac{2}{2-q}})$, então J_ε tem, pelo menos, k pontos críticos em M_ε^- para $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$. Seja $u_+ = max\{u, 0\}$. Substituindo os termos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz$$

do funcional por

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)u_+^p dz \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)u_+^q dz,$$

respectivamente, segue que a equação (E_λ) tem k soluções não negativa em $\mathbb{R}^N$. Aplicando o Princípio do Máximo (Teorema C.13) e o Teorema 1.18, a equação (E_λ) tem $k+1$ soluções positivas em $\mathbb{R}^N$. ■

Capítulo 2

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para um Sistema Elíptico Semilinear

Neste Capítulo vamos estabelecer resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para o sistema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(z)|u|^{p-2}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, \text{ em } \Omega \\ -\Delta v = \mu h(z)|v|^{p-2}v + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(z)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \text{ em } \Omega \\ u = v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{$E_{\lambda,\mu}$}$$

onde $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $2 < p < \alpha+\beta = 2^*$, $N > 4$, $\lambda, \mu > 0$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f, g, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(A1) f, g e g são funções contínuas e positivas em $\overline{\Omega}$.

(A2) existem k pontos $a^1, a^2, \ldots, a^k$ em Ω tais que

$$f(a^i) = \max_{z\in\Omega} f(z) = 1, \ 1 \leq i \leq k,$$

e para alguma $\sigma > N$,

$$f(z) - f(a^i) = o(|z-a^i|^{\sigma}),$$

quando $z \to a^i$ uniformemente em i.

Estudos recentes têm investigado os sistemas elípticos com expoentes subcríticos ou críticos e provado a existência de pelo menos uma solução positiva ou a existência de pelo menos duas soluções positivas para esses problemas.

Neste capítulo, construiremos k sequências de Palais-Smale compactas que são adequadamente localizadas em correspondência com os k pontos máximos de f. Sob as hipóteses $(A1)-(A3)$, mostraremos que existem ao menos k soluções positivas do sistema elíptico $(E_{\lambda,\mu})$ para $\lambda,\mu>0$ suficientemente pequenos.

2.1 O Funcional Energia Associado ao Problema e a Variedade de Nehari

Considere o espaço $H=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ com a norma

$$\|(u,v)\|_H=\left[\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dz\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Associado ao problema $(E_{\lambda,\mu})$, consideramos o funcional $J_{\lambda,\mu}$ de classe C^1 (Veja Apêndice A), para $(u,v)\in H$,

$$J_{\lambda,\mu}(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz-\frac{1}{p}\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz.$$

Primeiramente definiremos solução fraca para o problema $(E_{\lambda,\mu})$.

Definição 2.1 *Uma solução fraca para $(E_{\lambda,\mu})$ é um vetor $(u,v)\in H$ que satisfaz*

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\nabla u\nabla\varphi_1+\nabla v\nabla\varphi_2)dz &- \lambda\int_\Omega g(z)|u|^{p-2}u\varphi_1 dz-\mu\int_\Omega h(z)|v|^{p-2}v\varphi_2 dz-\\ &- \frac{\alpha}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta\varphi_1 dz-\frac{\beta}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^{\beta-2}v\varphi_2 dz=0,\end{aligned}$$

para todo $(\varphi_1,\varphi_2)\in H$, ou seja, é um ponto crítico do funcional $J_{\lambda,\mu}$.

Considere a Variedade de Nehari para o funcional $J_{\lambda,\mu}$

$$M_{\lambda,\mu}=\left\{(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}:\ \left\langle J'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle=0\right\},\tag{2.1}$$

onde

$$\left\langle J'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle=\|(u,v)\|_H^2-\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz-\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz.\tag{2.2}$$

Observe que a Variedade de Nehari $M_{\lambda,\mu}$ contém todas as soluções não negativas de $(E_{\lambda,\mu})$.

Sejam S a melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dz}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}}} \left(= \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dz}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} |u|^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}}} \right) > 0,$$

onde $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \colon \nabla u \in (L^2(\mathbb{R}^N))^N\right\}$ e

$$S_{\alpha,\beta} = \inf_{u,v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|(u,v)\|_H^2}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} |u|^{\alpha}|v|^{\beta} dz\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}. \tag{2.3}$$

Lema 2.2 *Se $\alpha+\beta \leq 2^*$, então existe uma constante positiva tal que*

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha}|v|^{\beta} dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \leq C\|(u,v)\|_H.$$

Consequentemente, $S_{\alpha,\beta}$ está bem definida e $S_{\alpha,\beta} > 0$.

Demonstração. Pela definição de S, para todo $(u,v) \in H$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha}|v|^{\beta} dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} &\leq \left[\int_{\Omega} (\max\{|u|,|v|\})^{\alpha+\beta} dz\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&\leq \left[\int_{\Omega} \left(|u|^{\alpha+\beta} + |v|^{\alpha+\beta}\right) dz\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&\leq \left[2\max\left\{\int_{\Omega} |u|^{\alpha+\beta} dz, \int_{\Omega} |v|^{\alpha+\beta} dz\right\}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha+\beta} dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(\int_{\Omega} |v|^{\alpha+\beta} dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right] \\
&\leq \frac{2^{\frac{1}{\alpha+\beta}}}{S} \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dz + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dz\right] \\
&= \frac{2^{\frac{1}{2(\alpha+\beta)}}}{S^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dz\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{2(\alpha+\beta)}}}{S^{\frac{1}{2}}} \|(u,v)\|_H.
\end{aligned}$$

■

De acordo com Alves, de Morais Filho e Souto (Veja Teorema 5, [2]), temos que

$$S_{\alpha,\beta}=\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]S, \tag{2.4}$$

onde $\alpha+\beta=2^*$. Observe que S é independente do domínio e nunca é atingido exceto quando $\Omega=\mathbb{R}^N$ (Ver Proposição 1.43, [30]). Além disso, S é atingido pela função (Ver Teorema 1.42, [30])

$$U(z)=\frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{(1+|z|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

e

$$\|\nabla U\|_{L^2}^2=\|U\|_{L^{2^*}}^{2^*}=S^{\frac{N}{2}}.$$

Note que $\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}U\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ é uma solução da seguinte equação

$$\begin{cases}-\Delta u=u^{2^*-1}, \ \mathbb{R}^N\\ u>0, \ \mathbb{R}^N\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).\end{cases}$$

O funcional energia associado ao problema é dado por

$$I_{max}(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dz-\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}dz$$

e

$$\gamma_{max}=\inf_{u\in N_{max}}I_{max}(u)$$

onde

$$N_{max}=\left\{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\ \{0\}:\ \left\langle I'_{max}(u),u\right\rangle=0\right\}.$$

Além disso, temos que

$$\gamma_{max}=\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}>0.$$

Para $\lambda=\mu=0$, o sistema elíptico semilinear $(E_{\lambda,\mu})$ toma a forma:

$$\begin{cases}-\Delta u=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}f(z)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, \text{ em } \Omega;\\ -\Delta v=\frac{\beta}{\alpha+\beta}f(z)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \text{ em } \Omega;\\ (u,v)\in H,\end{cases} \tag{$E_{0,0}$}$$

e o funcional energia associado é dado por

$$J_{0,0}(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2-\frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz$$

e

$$\theta_{0,0}=\inf_{(u,v)\in N_{0,0}} J_{0,0}(u,v),$$

onde

$$M_{0,0}=\left\{(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}:\ \left\langle J_{0,0}'(u,v),(u,v)\right\rangle=0\right\}.$$

Note que se $f(a^i)=\max_{z\in\Omega}f(z)=1$, definimos

$$J_{max}(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2-\frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dz$$

e

$$\theta_{max}=\inf_{(u,v)\in M_{max}} J_{max}(u,v),$$

onde

$$M_{max}=\left\{(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}:\ \left\langle J_{max}'(u,v),(u,v)\right\rangle=0\right\}.$$

Agora, mostraremos um resultado que é essencial para os resultados posteriores.

Lema 2.3 *Seja $D\subset\mathbb{R}^N$ um domínio suave (possivelmente limitado). Se $u_n\rightharpoonup u$, $v_n\rightharpoonup v$ em $H_0^1(D)$ e $u_n\to u$, $v_n\to v$ q.s. em D, então*

$$\lim_{n\to\infty}\int_D|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz=\lim_{n\to\infty}\int_D|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dz-\int_D|u|^\alpha|v|^\beta dz.$$

Demonstração. Vamos analisar a diferença

$$\int_D|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dx-\int_D|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dx.$$

Obeserve primeiro que

$$\begin{aligned}\int_D|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dx-\int_D|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dx &= \int_D(|u_n|^\alpha|v_n|^\beta-|u_n-u|^\alpha|v_n|^\beta)dx\\ &\quad+\int_D(|u_n-u|^\alpha|v_n|^\beta-|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta)dx.\end{aligned}$$

Defina $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ por

$$F(t)=|u_n-tu|^\alpha|v_n|^\beta.$$

Então,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \alpha|u_n - tu|^{\alpha-2}(u_n - tu)|v_n|^{\beta}(-u), \;\; t \in [0,1].$$

Temos

$$\int_D (|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta} - |u_n - u|^{\alpha}|v_n|^{\beta})dx \;\; = \;\; -\int_D [F(1) - F(0)]dx.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int_D (|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta} - |u_n - u|^{\alpha}|v_n|^{\beta})dx &= -\int_D \left[\int_0^1 \frac{dF}{dt}dt\right] \\ &= \int_D \int_0^1 \alpha|u_n - tu|^{\alpha-2}(u_n - tu)|v_n|^{\beta} u dt dx. \end{aligned}$$

Analogamente, defina $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$G(t) = |u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta}.$$

Então,

$$\frac{dG(t)}{dt} = \beta|u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta-2}(v_n - tv)(-v), \;\; t \in [0,1].$$

Também, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_D (|u_n - u|^{\alpha}|v_n|^{\beta} - |u_n - u|^{\alpha}|v_n - v|^{\beta})dx &= -\int_D [G(1) - G(0)]dx \\ &= -\int_D \left[\int_0^1 \frac{dG}{dt}dt\right] \\ &= \int_D \int_0^1 \beta|u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta-2}(v_n - tv) v dt dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_D |u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}dx - \int_D |u_n - u|^{\alpha}|v_n - v|^{\beta}dx &= \alpha\int_D \int_0^1 |u_n - tu|^{\alpha-2}(u_n - tu)|v_n|^{\beta} u dx dt \\ &\quad + \beta\int_D \int_0^1 |u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta-2}(v_n - tv) v dx dt \end{aligned} \tag{2.5}$$

e daí,

$$\int_D |u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}dx - \int_D |u_n - u|^{\alpha}|v_n - v|^{\beta}dx = \alpha\int_D \int_0^1 f_n u dx dt + \beta\int_D \int_0^1 g_n v dx dt,$$

onde

$$f_n = |u_n - tu|^{\alpha-2}(u_n - tu)|v_n|^{\beta} \text{ e } g_n = |u_n - u|^{\alpha}|v_n - tv|^{\beta-2}(v_n - tv),$$

$t \in [0,1]$. Como,

$$f_n \to (1-t)^{\alpha-1}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}$$

e

$$g_n \to 0 \text{ q.s. em } D \times (0,1),$$

e, além disso,

$$\int_D \int_0^1 |f_n|^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} dxdt \leq \left(\int_D \int_0^1 |u_n - tu|^{\alpha+\beta} dxdt\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}} \left(\int_D \int_0^1 |v_n|^{\alpha+\beta} dxdt\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \leq C$$

e

$$\int_D \int_0^1 |g_n|^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} dxdt \leq \left(\int_D \int_0^1 |u_n - u|^{\alpha+\beta} dxdt\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \left(\int_D \int_0^1 |v_n - tu|^{\alpha+\beta} dxdt\right)^{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}} \leq C,$$

concluímos que

$$f_n \rightharpoonup (1-t)^{\alpha-1}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta} \text{ e } g_n \rightharpoonup 0 \text{ em } L^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(D \times (0,1)).$$

Logo,

$$\alpha \int_D \int_0^1 f_n u dxdt \to \alpha \int_D \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}|u|^{\alpha}|v|^{\beta} dxdt = \int_D |u|^{\alpha}|v|^{\beta} dx \tag{2.6}$$

e

$$\beta \int_D \int_0^1 g_n v dxdt \to 0. \tag{2.7}$$

Portanto, inserindo (2.6) e (2.7) em (2.5), obtemos o desejado. ■

Note que $J_{\lambda,\mu}$ é ilimitado inferiormente em H, pois $J_{\lambda,\mu}(tu) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$. O Lema seguinte, mostra que $J_{\lambda,\mu}$ é limitado inferiormente na Variedade de Nehari $M_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.4 *O funcional energia $J_{\lambda,\mu}$ é limitado inferiormente em $M_{\lambda,\mu}$.*

Demonstração. Para $(u,v) \in M_{\lambda,\mu}$, temos

$$\left\langle J'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle = 0.$$

Dessa forma,

$$\|(u,v)\|_H^2 = \int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz + \int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz.$$

Assim,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\mu}(u,v) &= \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz - \frac{1}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz \\ &= \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz - \frac{1}{p}\left[\|(u,v)\|_H^2 - \int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz\right] \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|(u,v)\|_H^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz \\ &> 0. \end{aligned}$$

■

Sendo $J_{\lambda,\mu}$ limitada inferiormente em $M_{\lambda,\mu}$, podemos definir

$$\theta_{\lambda,\mu} = \inf_{(u,v)\in M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u,v).$$

Lema 2.5 *Temos*

i) Existem números positivos σ e d_0 tais que $J_{\lambda,\mu}(u,v) \geq d_0$ para $\|(u,v)\|_H = \sigma$;

ii) Existe $(\bar{u},\bar{v}) \in H\backslash\{(0,0)\}$ tal que

$$\|(\bar{u},\bar{v})\|_H > \sigma \ \ e \ \ J_{\lambda,\mu}(\bar{u},\bar{v}) < 0.$$

Demonstração. *i*) Por (A2), temos que $f(z) \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\mu}(u,v) &= \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz - \frac{1}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz \\ &\geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dz - \frac{1}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz. \end{aligned}$$

Afirmação 1: $\displaystyle\int_\Omega (|u|^\alpha|v|^\beta)dz \leq \left(\frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dz}{S_{\alpha,\beta}}\right)^{\frac{2^*}{2}}$. De fato, se $\displaystyle\int_\Omega (|u|^\alpha|v|^\beta)dz = 0$, a afirmação vale. Caso contrário, consideramos

$$a = \left(\int_\Omega (|u|^\alpha|v|^\beta)dz\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \neq 0.$$

Então, $\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{a}\right)$ é tal que

$$\int_\Omega \left(\left|\frac{u}{a}\right|^\alpha \left|\frac{v}{a}\right|^\beta \right) dz = 1.$$

Daí, pela definição de $S_{\alpha,\beta}$ (Equação (2.3)), obtemos

$$S_{\alpha,\beta} \leq \int_\Omega \left(\nabla\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \nabla\left(\frac{v}{a}\right)^2 \right) dz = \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dz}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}.$$

o que prova a afirmação.

Afirmação 2: $\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p) dz \leq Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}} (\lambda+\mu) \|(u,v)\|_H^p$, onde $Max = max\{\|g\|_\infty, \|h\|_\infty\}$. De fato, temos

$$\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p) dz \leq \lambda \|g\|_\infty \int_\Omega |u|^p dz + \mu \|h\|_\infty \int_\Omega |v|^p dz,$$

pois $|g(z)| \leq \|g\|_\infty$ e $|h(z)| \leq \|h\|_\infty$, uma vez que g e h são funções continuas em $\overline{\Omega}$. Pela Desigualdade de Hölder (Teorema C.2), com expoentes conjugados $\frac{2^*}{2^*-p}$ e $\frac{2^*}{p}$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p) dz &\leq \lambda \|g\|_\infty \left[\int_\Omega 1 dz\right]^{\frac{2^*}{2^*-p}} \left[\int_\Omega (|u|^p)^{\frac{2^*}{p}} dz\right]^{\frac{p}{2^*}} \\
&\quad + \mu \|h\|_\infty \left[\int_\Omega 1 dz\right]^{\frac{2^*}{2^*-p}} \left[\int_\Omega (|v|^p)^{\frac{2^*}{p}} dz\right]^{\frac{p}{2^*}} \\
&= \lambda \|g\|_\infty |\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} \left[\int_\Omega |u|^{2^*} dz\right]^{\frac{p}{2^*}} + \mu \|h\|_\infty |\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} \left[\int_\Omega |v|^{2^*} dz\right]^{\frac{p}{2^*}}.
\end{aligned}$$

Da definição de S, segue que

$$\int_\Omega |u|^{2^*} dz \leq S^{\frac{-2^*}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dz\right)^{\frac{2^*}{2}} \quad \text{e} \quad \int_\Omega |v|^{2^*} dz \leq S^{\frac{-2^*}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dz\right)^{\frac{2^*}{2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p) dz &\leq \lambda \|g\|_\infty |\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} S^{\frac{-p}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dz\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\quad + \mu \|h\|_\infty |\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} S^{\frac{-p}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dz\right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Considerando $Max = \max\{\|g\|_\infty, \|h\|_\infty\}$, obtemos

$$\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz \leq Max|\Omega|^{\frac{2^*}{2^*-p}} S^{\frac{-p}{2}} (\lambda+\mu)\|(u,v)\|_H^p,$$

completando a demonstração da afirmação.

Das afirmações 1 e 2, vem

$$J_{\lambda,\mu}(u,v) \geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{2^*} S_{\alpha,\beta}^{\frac{-2^*}{2}} \|(u,v)\|_H^{2^*} - \frac{1}{p} Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{p}} S^{\frac{-p}{2}} (\lambda+\mu)\|(u,v)\|_H^p.$$

Escolhendo $\sigma > 0$ de modo que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} S_{\alpha,\beta}^{\frac{-2^*}{2}} \sigma^{2^*-2} - \frac{1}{p} Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{p}} S^{\frac{-p}{2}} (\lambda+\mu)\sigma^{p-2} = \frac{1}{4},$$

obtemos da desigualdade acima

$$J_{\lambda,\mu}(u,v) \geq \frac{1}{4}\sigma^2 := d_0,$$

para $\|(u,v)\|_H = \sigma$, concluindo a demonstração do item i).

ii) Considere $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$. Como

$$J_{\lambda,\mu}(tu,tv) = \frac{t^2}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz - \frac{t^p}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz$$

e $2 < p < 2^*$, concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} J_{\lambda,\mu}(tu,tv) = -\infty.$$

Para $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$ fixado, existe $\bar{t} > 0$ tal que

$$\|(\bar{t}u,\bar{t}v)\|_H > \sigma \ \text{ e } \ J_{\lambda,\mu}(\bar{t}u,\bar{t}v) < 0.$$

Para concluir a demonstração do resultado basta tomar $(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{t}u,\bar{t}v)$. ■

Como no Capítulo 1, defina a função

$$\Psi_{\lambda,\mu}(u,v) = \left\langle J'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle.$$

Assim, para $(u,v) \in M_{\lambda,\mu}$, de (2.2), resulta

$$\begin{aligned}\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle &= 2\|(u,v)\|_H^2 - 2^*\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz - p\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz \\ &= (2^*-p)\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p+\mu h(z)|v|^p)dz-(2^*-2)\|(u,v)\|_H^2. \quad (2.8)\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle = (2-p)\|(u,v)\|_H^2+(p-2^*)\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz<0. \quad (2.9)$$

Vamos mostrar agora que mínimos em $M_{\lambda,\mu}$ são pontos críticos para $J_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.6 *Seja $(u_0,v_0) \in M_{\lambda,\mu}$ satisfazendo*

$$J_{\lambda,\mu}(u_0,v_0) = \min_{(u,v)\in M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u,v) = \theta_{\lambda,\mu}.$$

Então, (u_0,v_0) é solução de $(E_{\lambda,\mu})$.

Demonstração. Por (2.9) ,

$$\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle < 0,$$

para $(u,v) \in M_{\lambda,\mu}$. Como

$$J_{\lambda,\mu}(u_0,v_0) = \min_{(u,v)\in M_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu},$$

pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema C.10), existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0) = \tau\psi'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0) \in H^{-1}.$$

Daí,

$$0 = \left\langle J'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0),(u_0,v_0)\right\rangle = \tau\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0),(u_0,v_0)\right\rangle.$$

Sendo $\left\langle \psi'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle < 0$, segue que $\tau = 0$ e, assim, $J'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0) = 0$ em H^{-1}. Portanto, (u_0,v_0) é uma solução não trivial de $(E_{\lambda,\mu})$ e $J_{\lambda,\mu}(u_0,v_0) = \theta_{\lambda,\mu}$. ■

Lema 2.7 *Para cada $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$, existe um número positivo $t_{u,v}$ tal que $(t_{u,v}u, t_{u,v}v) \in M_{\lambda,\mu}$ e $J_{\lambda,\mu}(t_{u,v}u,t_{u,v}v) = \sup_{t\geq 0} J_{\lambda,\mu}(tu,tv)$.*

Demonstração. Para cada $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$ fixado, considere a função $\xi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

definida por

$$\begin{aligned}\xi(t) &= J_{\lambda,\mu}(tu,tv)\\ &= \frac{t^2}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz - \frac{t^p}{p}\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz.\end{aligned}$$

Como $\xi(0)=0$, $\xi(t)>0$ para $t>0$ suficientemente pequeno e $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)=-\infty$, pelo Lema 2.3 (i), temos que $\sup\limits_{t\geq 0}\xi(t)$ é atingido para algum $t_{\lambda,\mu}>0$. Isso significa que $\xi'(t_{u,v})=0$. Logo,

$$\begin{aligned}0=\xi'(t_{u,v}) &= J'_{\lambda,\mu}(t_{u,v}u,t_{u,v}v)(u,v)\\ &= \frac{1}{t_{u,v}}\left\langle J'_{\lambda,\mu}(t_{u,v}u,t_{u,v}v),(t_{u,v}u,t_{u,v}v)\right\rangle\end{aligned}$$

e, portante, $(t_{u,v}u,t_{u,v}v)\in M_{\lambda,\mu}$. ■

Observação 2.8 *O Lema 2.5 (i) e o Lema 2.7 indicam que* $\theta_{\lambda,\mu}\geq d_0>0$ *para alguma constante* d_0.

2.2 Sobre Sequências de Palais-Smale

A aplicação do Princípio Variacional de Ekeland nos dá o seguinte resultado, cuja demostração será omitida pois as ideias são semelhantes ao Lema 1.25.

Lema 2.9 *Existe uma sequência* $\{(u_n,v_n)\}\subset M_{\lambda,\mu}$ *que é* $(PS)_{\theta_{\lambda,\mu}}$ *para o funcional* $J_{\lambda,\mu}$.

Provaremos agora que $J_{\lambda,\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_\gamma$ em H para $\gamma\in\left(0,\frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}\right)$.

Lema 2.10 $J_{\lambda,\mu}$ *satisfaz a condição* $(PS)_\gamma$ *em* H *para* $\gamma\in\left(0,\frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}\right)$.

Demonstração. Seja $\{(u_n,v_n)\}$ uma sequência $(PS)_\gamma$ em H para $J_{\lambda,\mu}$. Então,

$$\begin{cases} J_{\lambda,\mu}(u_n,v_n)=\gamma+o_n(1)\\ J'_{\lambda,\mu}(u_n,v_n)=o_n(1), \text{ em } H^{-1}.\end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\gamma + c_n + \frac{d_n\|(u_n,v_n)\|_H}{p} &\geq J_{\lambda,\mu}(u_n,v_n) - \frac{1}{p}\left\langle J'_{\lambda,\mu}(u_n,v_n),(u_n,v_n)\right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|(u,v)\|_H^2 + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega f(z)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dz \\
&\geq \frac{p-2}{2p}\|(u,v)\|_H^2,
\end{aligned}$$

onde $c_n = o_n(1)$ e $d_n = o_n(1)$ quando $n \to \infty$. Como $2 < p < 2^*$, segue-se que $\{(u_n,v_n)\}$ é limitada em H. Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{(u_n,v_n)\}$, e $(u,v) \in H$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Da Imersão de Sobolev (Teorema C.7), temos

$$u_n \to u, v_n \to u \ \text{ em } \ L^s(\Omega) \ \text{ para algum } \ 1 \leq s < 2^*.$$

Pelo Teorema de Veinberg (Teorema C.4),

$$u_n \to u, v_n \to v \ \text{ q.s. em } \ \Omega.$$

Logo, $J'_{\lambda,\mu}(u,v) = 0$ em H^{-1}.

Seja $p_n = (u_n - u, v_n - v)$. Como no Capítulo 1, temos

$$\|p_n\|_H^2 = \|(u_n,v_n)\|_H^2 - \|(u,v)\|_H^2 + o_n(1).$$

Pelo Lema 2.3, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|p_n\|_H^2 &= \int_\Omega f(z)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dz - \int_\Omega(\lambda g(z)|u_n|^p + \mu h(z)|v_n|^p)dz - \int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz \\
&\quad + \int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz + o_n(1) \\
&= \int_\Omega f(z)|u_n - u|^\alpha|v_n - v|^\beta dz + o_n(1). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Além disso, também pelo Lema 2.3, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|p_n\|_H^2 &- \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz = \\
&= \frac{1}{2}\|(u_n,v_n)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 + o_n(1) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz \\
&= \frac{1}{2}\|(u_n,v_n)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dz \\
&\quad + \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz + o_n(1) \\
&= J_{\lambda,\mu}(u_n,v_n) - J_{\lambda,\mu}(u,v) + o_n(1) \\
&= \gamma - J_{\lambda,\mu}(u,v). \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Por (2.10), podemos supor que

$$\|p_n\|_H^2 \to l \ \text{ e } \ \int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz \to l, \qquad (2.12)$$

quando $n \to \infty$. Observe que

$$S_{\alpha,\beta} = \inf_{u,v\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|(u,v)\|_H^2}{\left(\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}, \qquad (2.13)$$

quando $\alpha+\beta = 2^*$. Seja $l > 0$. Por (2.13), obtemos

$$S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega |u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|(u_n-u,v_n-v)\|_H^2.$$

Como $f(z) \leq 1$ (veja hipótese (A2)), temos

$$S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega |u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Assim,

$$S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|(u_n-u,v_n-v)\|_H^2,$$

o que implica

$$S_{\alpha,\beta}\left(\int_\Omega f(z)|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dz\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|p_n\|_H^2.$$

Passando ao limite, quando $n \to \infty$, vem

$$S_{\alpha,\beta}\, l^{\frac{2}{2^*}} \leq l.$$

Isto implica $l \geq (S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$. Assim, por (2.11) e (2.12), obtemos que

$$\gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) l + J_{\lambda,\mu}(u,v).$$

Como $J_{\lambda,\mu}(u,v) \geq d_0$ (veja Lema 2.5), $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} = \frac{1}{N}$ e $l \geq (S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$, vem

$$\gamma \geq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}},$$

o que é uma contradição, pois $\gamma < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$. Logo, $l = 0$ e, portanto, $(u_n, v_n) \to (u,v)$ em H. ∎

2.3 Existência de uma Solução Positiva

Como mencionado anteriormente

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|u\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}}.$$

é a melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, temos que

$$U(z) = \frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{[1+|z|^2]^{\frac{N-2}{2}}}$$

é um minimizante de S (Ver Teorema 1.4.2, [30]) e $\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|U\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = S^{\frac{N}{2}}$. Seja $\eta_i \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \eta_i \leq 1, \ |\nabla \eta_i| \leq c; \\ \eta_i(z) = 1, \ |z - a^i| < \frac{\rho_0}{2}; \\ \eta_i(z) = 0, \ |z - a^i| > \rho_0, \end{cases}$$

onde $1 \leq i \leq k$. Para $1 \leq i \leq k$ defina

$$u^i_\varepsilon(z) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \eta_i(z) U\left(\frac{z - a^i}{\varepsilon}\right) = \frac{c_1 \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \eta_i(z)}{[\varepsilon^2 + |z - a^i|^2]^{\frac{N-2}{2}}}, \tag{2.14}$$

onde $c_1 = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}$ e $\varepsilon > 0$.

O próximo Lema garante que, fixado $\varepsilon_0 > 0$, $\theta_{\lambda,\mu}$ pertence ao intervalo onde vale a condição (PS) para $J_{\lambda,\mu}$.

Lema 2.11 *Se existe* $0 < \varepsilon_0 < \min\{1, \rho_0/2\}$ *tal que se* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, então*

$$\sup_{t \geq 0} J_{\lambda,\mu}(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i) < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$$

uniformemente em i. Além disso, temos que

$$0 < \theta_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}.$$

Demonstração. Usaremos os seguintes fatos sobre as funções u_ε^i (para demonstração ver Brezis-Nirenberg [11], Struwe [27] ou Willem [30])

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon^i\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} = \|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2}) \\ \|\nabla u_\varepsilon^i\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2}). \end{cases} \tag{2.15}$$

Para $N > 4$ e $0 < \varepsilon < \frac{\rho_0}{2}$,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^i\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_{B_{\rho_0/2}(a^i)} \left[\varepsilon^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{z-a^i}{\varepsilon}\right)\right]^p + O(\varepsilon^{N-2}) \\ &\geq c\varepsilon^\theta + O(\varepsilon^{N-2}), \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde $\theta = N - \frac{(N-2)p}{2}$.

Inicialmente, consideramos o funcional $J_{0,0} : H \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_{0,0}(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2_H - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz.$$

Passo I: Mostrar que $\sup_{t\geq 0} J_{0,0}(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i) \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2})$.

De acordo com a condição (A2), como $\sigma > N$, obtemos que

$$\left(\int_\Omega f(z)(u_\varepsilon^i)^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}} = \|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2}). \tag{2.17}$$

Com efeito, por (2.14), temos que

$$\|f(x)^{\frac{1}{2^*}} u_\varepsilon^i\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} = \int_\Omega f(z)(u_\varepsilon^i)^{2^*} dz = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N \eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2 + |z-a^i|^2)^N} dz.$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz = \varepsilon^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^N[N(N-2)]^{\frac{N}{2}}}{(1+|y|^2)^N}dz = \|U\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Combinando as igualdades acima, temos

$$\begin{aligned}
\|U\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} - \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N\eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N - f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N\eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N - f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N\eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz \\
&\quad + \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N - f(z)c_1^{2^*}\varepsilon^N\eta_i^{2^*}(z)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
0 &\le \|U\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} - \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz + \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{o(|z-a^i|^\sigma)}{(\varepsilon^2+|z-a^i|^2)^N}dz \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{c_1^{2^*}\varepsilon^N}{|z-a^i|^{2N}}dz + \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(a^i)} \frac{o(|z-a^i|^\sigma)}{|z-a^i|^{2N}}dz \\
&= c_1^{2^*}\varepsilon^N N\omega_N \int_{\rho/2}^\infty \frac{r^{N-1}}{r^{2N}}dr + \int_0^{\rho/2} \frac{o(r^\sigma)r^{N-1}}{r^{2N}}dr \\
&= c_1^{2^*}\varepsilon^N\omega_N(\rho/2)^{-N} + \frac{o(1)(\rho/2)^{\sigma-N}}{\sigma-N} \le C_2 = Const.,
\end{aligned}$$

onde ω_N é o volume da bola unitária do $\mathbb{R}^N$. Logo,

$$0 \le 1 - \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \le C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}$$

isto é,

$$1 - C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \le \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \le 1. \tag{2.18}$$

Agora, seja ε suficientemente pequeno tal que $C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} < 1$, então por (2.18) podemos deduzir que:

$$1 - C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \le \left(1 - C_2\|U\|^{-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{2}{2^*}} \le \|f(x)^{\frac{1}{2^*}}u^i_\varepsilon\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}\|U\|^{-2}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \le 1,$$

implicando que

$$\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} - C_2\|U\|^{2-2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|f(x)^{\frac{1}{2^*}} u^i_\varepsilon\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leq \|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)},$$

ou seja,

$$\left(\int_\Omega f(z)(u^i_\varepsilon)^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}} = \|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2}),$$

provando o que queríamos.

Usando (2.15) e (2.17), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|\nabla u^i_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\left(\int_\Omega f(z)(u^i_\varepsilon)^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}}} &= \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})} \\
&= \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} - \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} + \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})}. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&\frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})} - \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} = \\
= &\frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + \|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}O(\varepsilon^{N-2}) - \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}O(\varepsilon^{N-2})}{\left(\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O\left(\varepsilon^{N-2}\right)\right)\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} \\
= &\frac{\left(\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)O(\varepsilon^{N-2})}{\left(\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{N-2})\right)\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} \\
= &O(\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned}$$

Assim, por (2.19),

$$\begin{aligned}
\frac{\|\nabla u^i_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\left(\int_\Omega f(z)(u^i_\varepsilon)^{2^*} dz\right)^{\frac{2}{2^*}}} &= \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}} + O(\varepsilon^{N-2}) \\
&= S + O(\varepsilon^{N-2}), \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

pois U é um minimizante de S.

Vamos mostrar agora que

$$\max_{t\geq 0}\left(\frac{a}{2}t^2 - \frac{b}{2^*}t^{2^*}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{a}{b^{2/2^*}}\right)^{\frac{N}{2}},$$

para alguns $a > 0$ e $b > 0$. Seja $\varphi(t) = \frac{a}{2}t^2 - \frac{b}{2^*}t^{2^*}$. Derivando $\varphi(t)$, obtemos $\varphi'(t) = at - bt^{2^*-1}$. Como $2^* > 2$, temos que $2^* - 1 > 1$, então $at - bt^{2^*-1} = 0$ implica $t(a - bt^{2^*-2}) = 0$. Assim, os possíveis pontos críticos para φ são:

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Mas como $\varphi(t) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$, temos $\varphi(0) \leq \varphi\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}\right)$. Portanto, segue que $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é o ponto de máximo de φ. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0}\left(\frac{a}{2}t^2 - \frac{b}{2^*}t^{2^*}\right) &= \frac{a}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{2^*-2}} - \frac{b}{2^*}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{2^*-2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{a^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{b^{\frac{2}{2^*-2}}} - \frac{1}{2^*}\frac{a^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{b^{\frac{2}{2^*-2}}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\frac{a^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{b^{\frac{2}{2^*-2}}} \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{a}{b^{2/2^*}}\right)^{\frac{N}{2}},
\end{aligned}$$

mostrando o que queríamos. Por (2.20), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} J_{0,0}(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i) &= \sup_{t\geq 0}\left[\frac{1}{2}\|(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i|^\alpha|t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i|^\beta dz\right] \\
&= \sup_{t\geq 0}\left[\frac{t^2}{2}(\alpha+\beta)\|\nabla u_\varepsilon^i\|_{L^2}^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}\int_\Omega f(z)(u_\varepsilon^i)^{2^*}dz\right] \\
&= \frac{1}{N}\left[\frac{(\alpha+\beta)\|\nabla u_\varepsilon^i\|_{L^2}^2}{\left(\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}\int_\Omega f(z)(u_\varepsilon^i)^{2^*}dz\right)^{2/2^*}}\right]^{\frac{N}{2}} \\
&= \frac{1}{N}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]^{\frac{N}{2}}\left(S + O(\varepsilon^N - 2)\right)^{\frac{N}{2}} \\
&= \frac{1}{N}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]^{\frac{N}{2}}\left(S^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^N - 2)\right) \\
&= \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2}). \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

A última igualdade segue da Equação (2.4).

Passo II: Como $J_{\lambda,\mu}$ é contínua em H, $J_{\lambda,\mu}(0,0) = 0$ e $\{(\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, \sqrt{\beta}u_\varepsilon^i)\}$ é uniformemente limitada em H para todo $0<\varepsilon<\min\{1,\rho_0/2\}$, então existe $t_0>0$ tal que, para todo $0<\varepsilon<\min\{1,\rho_0/2\}$,

$$\sup_{0\le t\le t_0} J_{\lambda,\mu}(t\sqrt{\alpha}w_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}w_\varepsilon^i) < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} \text{ uniformemente em } i.$$

De acordo com a condição (A1), $g_{inf}=\inf_{z\in\bar{\Omega}} g(z)>0$ e $h_{inf}=\inf_{z\in\bar{\Omega}} h(z)>0$. Aplicando o resultado do Passo I e (2.16), temos para $N>4$ que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\ge t_0} J_{\lambda,\mu}(t\sqrt{\alpha}w_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}w_\varepsilon^i) &\le \sup_{t\ge t_0} J_{0,0}(t\sqrt{\alpha}w_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}w_\varepsilon^i) \\
&\quad -\frac{t_0^p}{p}\int_\Omega \big(\lambda g(z)|\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i|^p+\mu h(z)|\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i|^p\big)dz \\
&\le \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}+O(\varepsilon^{N-2})-\frac{t_0^p}{p}(\lambda+\mu)m\int_{B_{\rho_0/2}(a^i)}(u_\varepsilon^i)^p dz \\
&\le \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}+O(\varepsilon^{N-2})-\frac{t_0^p}{p}cm(\lambda+\mu)\varepsilon^\theta,
\end{aligned}$$

onde $m=\min\{\alpha^{p/2}g_{inf},\beta^{p/2}h_{inf}\}$ e $\theta=N-\frac{(N-2)p}{p}$. Como $2<p<2^*$, então $0<\theta<2<N-2$ para $N>4$. Escolha $\varepsilon_0>0$ tal que $\varepsilon_0<min\{1,\rho_0/2\}$ e

$$O(\varepsilon^{N-2})-\frac{t_0^p}{p}cm(\lambda+\mu)\varepsilon^\theta<0 \text{ para todo } 0<\varepsilon<\varepsilon_0.$$

Segue que para todo $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

$$\sup_{t\ge t_0} J_{\lambda,\mu}\big(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i\big) < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} \text{ uniformemente em } i.$$

Passo III: O Lema 2.7 mostra que existe $t_\varepsilon^i>0$ tal que $\big(t_\varepsilon^i\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t_\varepsilon^i\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i\big)\in M_{\lambda,\mu}$, com $1\le i\le k$. Para $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, pela observação (2.8), temos que

$$0<\theta_{\lambda,\mu}\le J_{\lambda,\mu}\big(t_\varepsilon^i\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t_\varepsilon^i\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i\big)=\sup_{t\ge 0} J_{\lambda,\mu}\big(t\sqrt{\alpha}u_\varepsilon^i, t\sqrt{\beta}u_\varepsilon^i\big)<\frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}.$$

■

Teorema 2.12 *O sistema $(E_{\lambda,\mu})$ admite, pelo menos, uma solução positiva $(u_0,v_0)\in M_{\lambda,\mu}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.9 existe uma sequência minimizante $\{(u_n,v_n)\}\subset M_{\lambda,\mu}$ para $J_{\lambda,\mu}$ tal que

$$J_{\lambda,\mu}(u_n,v_n)=\theta_{\lambda,\mu}+o_n(1) \quad \text{e} \quad J'_{\lambda,\mu}(u_n,v_n)=o_n(1) \text{ em } H^{-1}.$$

Como

$$0 < \theta_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}},$$

pelo Lema 2.10, existe uma subsequência $\{(u_n, v_n)\}$ e $(u_0, v_0) \in H$ tais que $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$ em H. De maneira análoga ao Teorema 1.18, mostra-se que (u_0, v_0) é uma solução não trivial de $(E_{\lambda,\mu})$ e $J_{\lambda,\mu}(u_0, v_0) = \theta_{\lambda,\mu}$. Como $J_{\lambda,\mu}(u_0, v_0) = J_{\lambda,\mu}(|u_0|, |v_0|)$ e $(|u_0|, |v_0|) \in M_{\lambda,\mu}$, pelo Lema 2.6, podemos supor que $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$. Aplicando o Princípio do Máximo segue que $u_0 > 0$ e $v_0 > 0$ em Ω e, portanto, uma solução positiva para o sistema $(E_{\lambda,\mu})$. ■

2.4 Existência de Múltiplas Soluções Positivas

Nesta seção demonstraremos que o problema $(E_{\lambda,\mu})$ possui pelo menos k soluções positivas. A ideia central é construir vizinhanças em $M_{\lambda,\mu}$ e, em cada vizinhança, uma sequência (PS) fortemente convergente.

Como no Capítulo 1, podemos escolher $0 < \rho_0 < 1$ de modo que

$$\overline{B_{\rho_0}(a^i)} \cap \overline{B_{\rho_0}(a^j)} = \emptyset$$

para $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq k$,

$$\bigcup_{i=1}^{k} \overline{B_{\rho_0}(a^i)} \subset \Omega \quad \text{e} \quad f(a^i) = \max_{z \in \Omega} f(z) = 1.$$

Defina

$$K = \{a^i; 1 \leq i \leq k\}$$

e

$$K_{\frac{\rho_0}{2}} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)}.$$

Suponha que $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{B_{\rho_0}(a^i)} \subset B_{r_0}(0)$ para algum $r_0 > 0$. Seja Q definido por

$$Q(u,v) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz}{\displaystyle\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta},$$

onde $\chi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\chi(z) = z$ para $|z| \leq r_0$ e $\chi(z) = \frac{r_0 z}{|z|}$ para $|z| > r_0$.

Para cada $1 \leq i \leq k$, defina as vizinhanças em $M_{\lambda,\mu}$

$$O^i_{\lambda,\mu} = \left\{u \in M_{\lambda,\mu} \colon |Q(u,v) - a^i| < \rho_0\right\}$$

e suas fronteiras

$$\partial O^i_{\lambda,\mu} = \left\{u \in M_{\lambda,\mu} \colon |Q(u,v) - a^i| = \rho_0\right\}.$$

Considere também os números

$$\beta^i_{\lambda,\mu} = \inf_{(u,v)\in O^i_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u,v) \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}^i_{\lambda,\mu} = \inf_{(u,v)\in \partial O^i_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u,v).$$

Usando o Lema 2.7, para cada $1 \leq i \leq k$ existe $t^i_\varepsilon > 0$ tal que $(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) \in M_{\lambda,\mu}$. Temos então, o seguinte resultado:

Lema 2.13 *Existe $\varepsilon^0 \in (0, \varepsilon_0)$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$, então $Q(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$ para cada $1 \leq i \leq k$.*

Demonstração. Seja $\Omega_\varepsilon = \{x \colon \varepsilon x + a^i \in \Omega\}$. Como

$$\begin{aligned}
Q(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z) |t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon|^\alpha |t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon|^\beta dz}{\displaystyle\int_\Omega |t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon|^\alpha |t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon|^\beta dz} \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z) |t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha}|^\alpha |u^i_\varepsilon|^\alpha |t^i_\varepsilon \sqrt{\beta}|^\beta |u^i_\varepsilon|^\beta dz}{\displaystyle\int_\Omega |t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha}|^\alpha |u^i_\varepsilon|^\alpha |t^i_\varepsilon \sqrt{\beta}|^\beta |u^i_\varepsilon|^\beta dz} \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z) |\varepsilon^{\frac{2-N}{N}} \eta_i(z) U(\frac{2-a^i}{\varepsilon})|^{2^*} dz}{\displaystyle\int_\Omega |\varepsilon^{\frac{2-N}{N}} \eta_i(z) U(\frac{2-a^i}{\varepsilon})|^{2^*} dz} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \chi(\varepsilon x + a^i) \eta_i(\varepsilon x + a^i) |U(x)|^{2^*} dx}{\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \eta_i(\varepsilon x + a^i) |U(x)|^{2^*} dx}
\end{aligned}$$

segue, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que $Q(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) \to a^i$ quando $\varepsilon \to 0^+$. Portanto, existe $\varepsilon^0 \in (0, \varepsilon_0)$ tal que

$$Q(t^i_\varepsilon \sqrt{\alpha} u^i_\varepsilon, t^i_\varepsilon \sqrt{\beta} u^i_\varepsilon) \in K_{\frac{\rho_0}{2}},$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$ e cada $1 \leq i \leq k$. ∎

Os Lemas seguintes nos ajudaram provar que $\beta^i_{\lambda,\mu} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,\mu}$ para λ,μ suficientemente pequeno.

Lema 2.14 $\theta_{max} = \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$.

Demonstração. Usando a mesma argumentação do Passo I do Lema 2.11, obtemos que

$$\sup_{t\geq 0} J_{max}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2})$$

uniformemente em i. Similarmente ao Lema 2.7, existe uma sequência $\{s^i_{max}\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\left(s^i_{max}\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, s^i_{max}\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \in M_{max}$ e, segue da definição de θ_{max} que

$$\theta_{max} \leq J_{max}\left(s^i_{max}\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, s^i_{max}\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) = \sup_{t\geq 0} J_{max}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2}).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ na desigualdade acima, temos que $\theta_{max} \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}$. Para provar a outra desigualdade considere $\{(u_n, v_n)\} \subset M_{max}$ uma sequência minimizante de θ_{max} para J_{max}. Assim,

$$\|(u_n, v_n)\|^2_H = \int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dz$$

e

$$\theta_{max} = \frac{1}{2}\|(u_n, v_n)\|^2_H - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dz + o_n(1) = \frac{1}{N}\|(u_n, v_n)\|^2_H + o_n(1).$$

Podemos supor que $\|(u_n, v_n)\|^2_H \to l$ e $\displaystyle\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dz \to l$ quando $n \to \infty$, onde $l = N\theta_{max} > 0$. Pela definição de $S_{\alpha,\beta}$,

$$S_{\alpha,\beta} l^{\frac{2}{2^*}} \leq l.$$

Isto implica que $S_{\alpha,\beta} \leq l^{\frac{2}{N}} = (N\theta_{max})^{\frac{2}{N}}$, isto é,

$$\frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{N/2} \leq \theta_{max}.$$

■

Lema 2.15 $\theta_{0,0} = \theta_{max}$

Demonstração. Como $f(z) \leq \max_{z\in\Omega} f(z) = 1$, então $\theta_{max} \leq \theta_{0,0}$. Pelo Passo I do Lema 2.11, $\sup_{t\geq 0} J_{0,0}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2})$ uniformemente em i. Similarmente ao Lema 2.7, temos que existe uma sequência $\{s^i_\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left(s^i_{max}\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, s^i_{max}\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \in M_{0,0}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_{0,0} &\leq J_{0,0}\left(s^i_{max}\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, s^i_{max}\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \\
&= \sup_{t\geq 0} J_{0,0}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) \\
&\leq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^{N-2}) \\
&= \theta_{max} + O(\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, temos que $\theta_{0,0} \leq \theta_{max}$. ■

Lema 2.16 *Existe um número δ_0 tal que se $(u,v) \in M_{0,0}$ e $J_{0,0}(u,v) \leq \theta_{0,0} + \delta_0$, então $Q(u,v) \in K_{\rho_0/2}$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{(u_n, v_n)\} \subset M_{0,0}$ tal que

$$J_{0,0}(u_n, v_n) = \theta_{0,0} + o_n(1) \text{ quando } n \to \infty \quad \text{e} \quad Q(u_n, v_n) \notin K_{\rho_0/2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando cálculo similar ao Lema 2.7, existe uma sequência $\{s^n_{max}\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $(s^n_{max}u_n, s^n_{max}v_n) \in M_{max}$ e

$$\begin{aligned}
0 &< \theta_{max} \leq J_{max}(s^n_{max}u_n, s^n_{max}v_n) \leq J_{0,0}(s^n_{max}u_n, s^n_{max}v_n) \leq \sup_{t\geq 0} J_{0,0}(tu_n, tv_n) \\
&= J_{0,0}(u_n, v_n) = \theta_{0,0} + o_n(1)
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland (Teorema C.11), existe uma sequência $(PS)_{\theta_{max}}$, $\{(U_n, V_n)\}$, para o funcional J_{max} com

$$\|(U_n - s^n_{max}u_n, V_n - s^n_{max}v_n)\|_H = o_n(1).$$

Afirmamos que $\int_\Omega |U_n|^\alpha |V_n|^\beta dz \nrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Caso contrário, como

$$\|(U_n, V_n)\|^2_H = \int_\Omega |U_n|^\alpha |V_n|^\beta dz + o_n(1),$$

teríamos

$$\theta_{max} + o_n(1) = J_{max}(U_n, V_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_\Omega |U_n|^\alpha |V_n|^\beta dz + o_n(1) = o_n(1),$$

que é uma contradição, pois $\theta_{max} > 0$.

Considere a função de concentração de Lévy dada por

$$Q_n(\lambda) := \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,\lambda)} |u_n|^{2^*}.$$

Como $\displaystyle\int_{\Omega} |U_n|^{\alpha}|V_n|^{\beta} dz \nrightarrow 0$ quando $n \to \infty$, existem sequências $\{\sigma_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{y_n\} \subset \Omega$ tais que

$$\int_{B_{\sigma_n}(y_n)} |U_n|^{\alpha}|V_n|^{\beta} dz \geq c_0, \tag{2.22}$$

para alguma constante $c_n > 0$. Seja

$$\big(\tilde{U}_n(z), \tilde{V}_n(z)\big) = \big(\sigma_n^{\frac{N-2}{2}} U_n(\sigma_n z + y_n), \sigma_n^{\frac{N-2}{2}} V_n(\sigma_n z + y_n)\big).$$

Então, podemos obter

$$\frac{1}{\sigma_n} dist(y_n, \partial\Omega) \to \infty, \ \ n \to \infty.$$

Ademais, existe uma subsequência $\big\{\big(\tilde{U}_n(z), \tilde{V}_n(z)\big)\big\}$ e $\big(\tilde{U}, \tilde{V}\big) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\tilde{U}_n \to \tilde{U}$ e $\tilde{V}_n \to \tilde{V}$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Por (2.22), $\tilde{U} \neq 0$ e $\tilde{V} \neq 0$. Uma vez que Ω é um domínio limitado e $\{y_n\} \subset \Omega$, existe uma sequência $\{\sigma_n\}$ tal que $\sigma_n \to 0$. Suponha que a subsequência $y_n \to y_0 \in \overline{\Omega}$ quando $n \to \infty$.

Afirmação: $y_0 \in K$. De fato, uma vez que $J_{0,0}(s^n_{max} u_n, s^n_{max} v_n) = \theta_{max} + o_n(1)$ e $\|(U_n - s^n_{max} u_n, V_n - s^n_{max} v_n)\|_H = o_n(1)$ quando $n \to \infty$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e de $\dfrac{1}{\sigma_n} dist(y_n, \partial\Omega) \to \infty$ quando $n \to \infty$, que

$$\begin{aligned}
(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} &= \int_{\Omega} f(z)|U_n|^{\alpha}|V_n|^{\beta} dz + o_n(1) \\
&= \int_{\Omega} f(z) \left| \frac{1}{\sigma_n^{\frac{N-2}{2}}} \tilde{U}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^{\alpha} \left| \frac{1}{\sigma_n^{\frac{N-2}{2}}} \tilde{V}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^{\beta} dz + o_n(1) \\
&= \frac{1}{\sigma_n^{\frac{N-2}{2}(\alpha+\beta)}} \int_{\Omega} f(z) \left|\tilde{U}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^{\alpha} \left|\tilde{V}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^{\beta} dz + o_n(1) \\
&= \frac{1}{\sigma_n^{\frac{N-2}{2}\frac{2N}{N-2}}} \int_{\Omega} f(z) \left|\tilde{U}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^{\alpha} \left|\tilde{V}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^{\beta} dz + o_n(1) \\
&= \left(\frac{1}{\sigma_n}\right)^{N} \int_{\Omega} f(z) \left|\tilde{U}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^{\alpha} \left|\tilde{V}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^{\beta} dz + o_n(1) \\
&= \int_{\Omega} f(\sigma_n z + y_n)|\tilde{U}_n(z)|^{\alpha}|\tilde{V}_n(z)|^{\beta} dz + o_n(1) \\
&= f(y_0)(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}},
\end{aligned}$$

ou seja, $f(y_0) = 1$ e, portanto, $y_0 \in K$.

Uma vez que $\|(U_n - s^n_{max}u_n, V_n - s^n_{max}v_n)\|_H = o_n(1)$ e $\tilde{U}_n \to \tilde{U}$ e $\tilde{V}_n \to \tilde{V}$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\begin{aligned}
Q(u_n, v_n) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \chi(z)|s^n_{max}u_n|^\alpha |s^n_{max}v_n|^\beta dz}{\displaystyle\int_\Omega |s^n_{max}u_n|^\alpha |s^n_{max}v_n|^\beta dz} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)^N \int_\Omega \chi(z) \left|\tilde{U}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^\alpha \left|\tilde{V}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^\beta dz}{\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)^N \int_\Omega \left|\tilde{U}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^\alpha \left|\tilde{V}_n\left(\frac{z-y_n}{\sigma_n}\right)\right|^\beta dz} + o_n(1) \\
&= y_0 + o_n(1)
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, donde $Q(u_n, v_n) \in K_{\rho_0/2}$, o que é uma contradição, pois supomos que $Q(u_n, v_n) \notin K_{\rho_0/2}$. Portanto, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $(u, v) \in M_{0,0}$ e $J_{0,0}(u, v) \leq \theta_{max} + \delta_0$, então $Q(u, v) \in K_{\frac{\rho_0}{2}}$. ■

Lema 2.17 *Se* $(u, v) \in M_{\lambda,\mu}$ *e* $J_{\lambda,\mu}(u, v) \leq \theta_{0,0} + \frac{\delta_0}{2}$, *então existe um número* Λ^* *tal que*

$$Q(u, v) \in K_{\frac{\rho_0}{2}} \quad para \quad 0 < \lambda + \mu < \Lambda^*.$$

Demonstração. De modo análogo ao Lema 2.7, existe um único número positivo

$$s = s(u, v) = \left(\frac{\|(u, v)\|^2_H}{\displaystyle\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz} \right)^{\frac{N-2}{4}}$$

tal que $(su, sv) \in M_{0,0}$.

Afirmação: Existe $\Lambda > 0$ tal que se $0 < \lambda + \mu < \Lambda$, então $s < C$ para alguma constante $C > 0$ (independente de u e v). Do Lema (2.15), $\theta_{0,0} = \theta_{max}$, daí por hipótese

$$\theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} = \theta_{0,0} + \frac{\delta_0}{2} \geq J_{\lambda,\mu}(u, v).$$

Para $(u, v) \in M_{\lambda,\mu}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} &\geq J_{\lambda,\mu}(u, v) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|(u, v)\|^2_H + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) \int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz \\
&\geq \frac{p-2}{2p} \|(u, v)\|^2_H
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|(u,v)\|_H^2 \le \frac{2p}{p-2}(\theta_{max}+\delta_0/2) = C_1, \tag{2.23}$$

e, lembrando que existe $d_0 > 0$ tal que $d_0 \le \theta_{\lambda,\mu}$ (veja observação 2.8), temos

$$\begin{aligned} 0 < d_0 &\le \theta_{\lambda,\mu} \le J_{\lambda,\mu}(u,v) \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\|(u,v)\|_H^2 - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz \\ &\le \frac{1}{N}\|(u,v)\|_H^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|(u,v)\|_H^2 \ge N d_0 = C_2. \tag{2.24}$$

Além disso, como $(u,v) \in M_{\lambda,\mu}$, segue de (2.2) que

$$\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz = \|(u,v)\|_H^2 - \int_\Omega (\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz$$

Da Afirmação 2, na demonstração do Lema 2.5 (i), vem

$$\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz \ge \|(u,v)\|_H^2 - Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu)\|(u,v)\|_H^p,$$

onde $Max = \{\|g\|_\infty, \|h\|_\infty\}$. Assim, por (2.23), (2.24), temos que

$$\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz \;\;\ge\;\; C_2 - Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu) C_1^{\frac{p}{2}}.$$

Podemos então escolher $\Lambda > 0$ tal que para $0 < \lambda+\mu < \Lambda$

$$\int_\Omega f(z)|u|^\alpha |v|^\beta dz \ge C_2 - Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}} \Lambda C_1^{\frac{p}{2}}. \tag{2.25}$$

Logo, por (2.23), (2.24), (2.25) e da expressão de s, existe $C > 0$ (independente de u e v) tal que $s < C$ para todo $0 < \lambda+\mu < \Lambda$, demonstrando a afirmação.

Note que

$$\begin{aligned} \theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} &\ge J_{\lambda,\mu}(u,v) = \sup_{t\ge 0} J_{\lambda,\mu}(tu,tv) \ge J_{\lambda,\mu}(su,sv) \\ &= \frac{1}{2}\|(su,sv)\|_H^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(z)|su|^\alpha |sv|^\beta dz - \frac{1}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|su|^p + \mu h(z)|sv|^p)dz \\ &\ge J_{0,0}(su,sv) - \frac{1}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|su|^p + \mu h(z)|sv|^p)dz. \end{aligned}$$

implicando

$$\begin{aligned} J_{0,0}(su,sv) &\leq \theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} + \frac{1}{p}\int_\Omega (\lambda g(z)|su|^p + \mu h(z)|sv|^p)dz \\ &\leq \theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} + Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu)\|(su,sv)\|_H^p \\ &< \theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} + Max|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*}} S^{\frac{-p}{2}}(\lambda+\mu)C^p C_1^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Então, existe $\Lambda^* \in (0,\Lambda)$ tal que $0 < \lambda+\mu < \Lambda^*$

$$J_{0,0}(su,sv) \leq \theta_{max} + \frac{\delta_0}{2} \ \text{, onde } \ (su,sv) \in M_{0,0}.$$

Portanto, pelo Lema (2.16), obtemos

$$Q(u,v) = Q(su,sv) \in K_{\frac{\rho_0}{2}} \ \text{ para } \ 0 < \lambda+\mu < \Lambda^*.$$

■

De acordo com os Lemas 2.11 e 2.13, existe $0 < \varepsilon^0 \leq \varepsilon_0$ tal que

$$\beta^i_{\lambda,\mu} \leq J_{\lambda,\mu}\left(t\sqrt{\alpha}u^i_\varepsilon, t\sqrt{\beta}u^i_\varepsilon\right) < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} \ \text{ para todo } \ 0 < \varepsilon < \varepsilon^0. \tag{2.26}$$

Aplicando o Lema 2.17, concluímos que

$$\tilde{\beta}^i_{\lambda,\mu} \geq \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + \frac{\delta_0}{2}, \ \text{ para todo } \ 0 < \lambda+\mu < \Lambda^*. \tag{2.27}$$

Para cada $1 \leq i \leq k$, por (2.26) e (2.27), obtemos

$$\beta^i_{\lambda,\mu} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,\mu} \ \text{ para todo } \ 0 < \lambda+\mu < \Lambda^*.$$

Daí,

$$\beta^i_{\lambda,\mu} = \inf_{(u,v)\in O^i_{\lambda,\mu}\cup\partial O^i_{\lambda,\mu}} J_{\lambda,\mu}(u,v), \ \text{ para todo } \ 0 < \lambda+\mu < \Lambda^*.$$

O Lema seguinte é de suma importância para a demonstração do Teorema 2.19, porém não será demonstrado aqui, pois é análogo ao Lema 1.25.

Lema 2.18 *Para cada* $1 \leq i \leq k$*, existe uma sequência* $(PS)_{\beta^i_{\lambda,\mu}}$, $\{(u_n,v_n)\} \subset O^i_{\lambda,\mu}$*, em* H *para* $J_{\lambda,\mu}$.

Teorema 2.19 *Existe um número positivo Λ^* tal que $(E_{\lambda,\mu})$ admite, pelo menos, k soluções positivas para quaisque $\lambda,\mu > 0$ satisfazendo $0 < \lambda+\mu < \Lambda^*$.*

Demonstração. Para cada $1 \leq i \leq k$, existe uma sequência $(PS)_{\beta^i_{\lambda,\mu}} \subset O^i_{\lambda,\mu}$ em H para $J_{\lambda,\mu}$. Por (2.26), temos

$$\beta^i_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}.$$

Note que $J_{\lambda,\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_\gamma$, para $\gamma \in \left(-\infty, \frac{1}{N}(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}}\right)$. Portanto, temos que $J_{\lambda,\mu}$ tem, ao menos, k pontos críticos em $M_{\lambda,\mu}$ para todo $\lambda,\mu > 0$ satisfazendo $0 < \lambda+\mu < \Lambda^*$. Sejam $u_+ = max\{u,0\}$ e $v_+ = max\{v,0\}$. Substituindo os termos $\int_\Omega f(z)|u|^\alpha|v|^\beta dz$ e $\int_\Omega(\lambda g(z)|u|^p + \mu h(z)|v|^p)dz$ do funcional por $\int_\Omega f(z)u_+^\alpha v_+^\beta dz$ e $\int_\Omega(\lambda g(z)u_+^p + \mu h(z)v_+^p)dz$, respectivamente, segue-se então que $(E_{\lambda,\mu})$ tem k soluções não negativas. Aplicando o Princípio do Máximo, $(E_{\lambda,\mu})$ admite pelo menos k soluções positivas. ∎

Apêndice A

Funcionais Diferenciáveis

Definição A.1 *Seja $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional, onde X é um espaço normado. Diremos que J é diferenciável à Fréchet em $u \in X$ se existe $A \in X'$ tal que, para $v \in X$, temos*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{\|v\|} [J(u+v) - J(u) - Av] = 0.$$

Definição A.2 *Seja $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional, onde X é um espaço normado. Diremos que J é diferenciável à Gateaux em $u \in X$ se existe $A \in X'$ tal que, para $v \in X$, temos*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [J(u+tv) - J(u)] = Av.$$

A derivada de Gateaux de J em u é denotada por $J'(u)$.

Observação A.3 *Se J tem derivada à Gateaux contínua em X, então $J \in C^1(X, \mathbb{R}^N)$.*

Considere o funcional $J_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Lema A.4 *O funcional $J_\varepsilon \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.*

Demonstração. Considere os funcionais I_1, I_2 e I_3 definidos por

$$I_1(u) = \frac{1}{2}||u||^2, \quad I_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^p dz \quad \text{e} \quad I_3(u) = \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{\frac{2(p-q)}{p-2}} h(\varepsilon z)|u|^q dz.$$

Afirmação 1: O funcional I_1 é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. De fato, seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} I_1'(u)v &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\|u+tv\|^2-\|u\|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\|u\|^2+2t\langle u,v\rangle+t^2\|v\|^2-\|u\|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} 2\langle u,v\rangle+t\|v\|^2 \\ &= \langle u,v\rangle, \end{aligned}$$

onde $\langle u,v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla v+uv)\,dz$. Assim, I_1 é diferenciável à Gateaux e $I_1'(u)v = \langle u,v\rangle$. Provaremos agora a continuidade da derivada de Gateaux de I_1'. Para isso, devemos mostrar que $I_1'(u_n)\to I_1'(u)$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, quando $u_n\to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, ou equivalentemente,

$$\|I_1'(u_n)-I_1'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)}\to 0, \text{ quando } n\to+\infty.$$

Considere uma sequência $\{u_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n\to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Dados arbitrariamente $\varepsilon>0$ e $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|v\|\le 1$, para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} \left|\left(I_1'(u_n)-I_1'(u)\right)v\right| &= |I_1'(u_n-u)v| \\ &= |\langle u_n-u,v\rangle| \\ &= \|u_n-u\|\|v\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

o que implica

$$\|I_1'(u_n)-I_1'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{v\in H^1(\mathbb{R}^N):\ \|v\|\le 1}\left|\left(I_1'(u_n)-I_1'(u)\right)v\right| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\|I_1'(u_n)-I_1'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)}\to 0, \text{ quando } n\to+\infty,$$

donde concluímos que I_1' é contínua. Consequentemente, $I_1\in C^1(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$.

Afirmação 2: O funcional I_2 é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$. De fato, consideremos a seguinte função $\zeta:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $\zeta(s)=\frac{1}{p}f(\varepsilon z)|u+stv|^p$, onde $t\in\mathbb{R}$ é tal que $0<|t|<1$ e $u,v\in H^1(\mathbb{R})$. Assim,

i) $\zeta(1)=\frac{1}{p}f(\varepsilon z)|u+tv|^p$;

ii) $\zeta(0) = \frac{1}{p} f(\varepsilon z)|u|^p$;

iii) $\zeta'(s) = f(\varepsilon z)|u+stv|^{p-2}(u+stv)tv$.

Como ζ é diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$\zeta(1) - \zeta(0) = \zeta'(\delta)$$

e segue

$$\frac{1}{p} f(\varepsilon z)|u+stv|^p - \frac{1}{p} f(\varepsilon z)|u|^p = f(\varepsilon z)|u+\delta tv|^{p-2}(u+\delta tv)tv.$$

Daí,

$$\frac{1}{p} f(\varepsilon z)\left(\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}\right) = f(\varepsilon z)|u+\delta tv|^{p-2}(u+\delta tv)v.$$

Agora, passando ao limite, quando $t \to 0$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{p} f(\varepsilon z)\left(\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}\right) = f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uv.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p} f(\varepsilon z)\left(\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}\right)\right| &= |f(\varepsilon z)||u+\delta tv|^{p-1}|v| \\
&\leq |f(\varepsilon z)|\left(|u|| + |\delta||t||v|\right)^{p-1}|v| \\
&\leq M\left(|u|| + |\delta||t||v|\right)^{p-1}|v| \\
&\leq M\left(|u| + |v|\right)^{p-1}|v|
\end{aligned}$$

Como $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Decorre disso que $|u| + |v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim, $(|u|+|v|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Usando a Desigualdade de Hölder com expoentes conjugados $\frac{p}{p-1}$ e p, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|u|+|v|)^{p-1}|v|dz \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|(|u|+|v|)^{p-1}\right|^{\frac{p}{p-1}} dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Assim, $M(|u|+|v|)^{p-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.3), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t} dz &= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0} \frac{1}{p} f(\varepsilon z)\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uvdz.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uvdz.$$

Consequentemente, existe a derivada de Gateaux em u, com

$$I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uvdz.$$

Provaremos agora a continuidade da derivada de Gateaux de I_2'. Para isso, devemos mostrar que $I_2'(u_n) \to I_2'(u)$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, quando $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, com $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Das Imersões de Sobolev (Teorema C.7), segue que $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo Teorema de Vainberg (Teorema C.4), existem uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$ e $|u(x)| \leq g(x)$ q.s em $\mathbb{R}^N$. Para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|v\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\left(I_2'(u_n) - I_2'(u)\right)v\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u_n|^{p-2}u_n v dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)|u|^{p-2}uvdz\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon z)\left(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right)|v|dz\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\varepsilon z)|\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right||v|dz.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder (Teorema C.2) com expoentes conjugados $\frac{p}{p-1}$ e p, obtemos

$$\left|\left(I_2'(u_n) - I_2'(u)\right)v\right| \leq M\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando as Imersões de Sobolev (Teorema C.7), temos

$$\begin{aligned}
\left|\left(I_2'(u_n) - I_2'(u)\right)v\right| &\leq M\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} dz\right)^{\frac{p-1}{p}} S\|v\| \\
&\leq MS\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} dz\right)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

Além disso, como $u_n(x) \to u(x)$ q.s em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right| \to 0 \text{ q.s em } \mathbb{R}^N.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.3), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \right|^{\frac{p}{p-1}} \to 0.$$

Logo,

$$\left| \left(I_2'(u_n) - I_2'(u) \right) v \right| \to 0.$$

Como

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{v \in H^1(\mathbb{R}^N):\ \|v\| \leq 1} \left| \left(I_2'(u_n) - I_2'(u) \right) v \right|,$$

temos

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \to 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

donde concluímos que I_2' é contínua. Consequentemente, $I_2 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Afirmação 3: O funcional I_3 é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. A demonstração desta afirmação segue exatamente os mesmos passos da afirmação 2.

Portanto, das afirmações 1, 2 e 3, concluímos que $J_\varepsilon \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. ■

Lema A.5 *O funcional* $J_{\lambda,\mu} \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Demonstração. A demonstração deste Lema segue os mesmos passos do Lema A.4. ■

Apêndice B

Sobre Valores Palais-Smale

Neste Apêndice provaremos que dois valores (PS) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para o funcional I_{max} são iguais. Tais resultados são importantes no estudo de existência de soluções de problema do tipo (E_{max}).

Seja $I_{max} : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional energia de classe C^1 definido por

$$I_{max}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f_{max}|u|^p dz$$

e

$$\gamma_{max} = \inf_{u \in N_{max}} I_{max}(u),$$

onde

$$N_{max} = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \langle I'_{max}(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Considere o problema de maximização sujeito à um vínculo

$$\alpha_{max} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}}. \tag{B.1}$$

Das Imersões de Sobolev, concluímos que $\alpha_{max} > 0$.

Lema B.1 *α_{max} é um valor (PS) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max}.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência maximizante de S. Então,

$$\|u_n\| = 1, \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

e

$$\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = S + o_n(1).$$

Temos

$$\begin{aligned} I_{max}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p} f_{max} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p} f_{max} \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$v_n = \left(f_{max} S^p\right)^{\frac{1}{2-p}} u_n.$$

Observe que

$$\|v_n\|^2 = \left|\left(f_{max} S^p\right)^{\frac{1}{2-p}}\right|^2 \|u_n\| = \left(f_{max} S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} \tag{B.3}$$

e

$$\begin{aligned} \|v_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \left|\left(f_{max} S^p\right)^{\frac{1}{2-p}}\right|^p \|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &= \left(f_{max} S^p\right)^{\frac{p}{2-p}} S^p + o_n(1) \\ &= \left(f_{max}\right)^{\frac{p}{2-p}} S^{\frac{2p}{2-p}} + o_n(1) \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} f_{max} \|v_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= (f_{max})^{\frac{2}{2-p}} S^{\frac{2p}{2-p}} + o_n(1) \\ &= \left(f_{max} S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} + o_n(1). \end{aligned}$$

De $(B.2)$, $(B.3)$ e $(B.4)$, resulta

$$I_{max}(v_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max} S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} + o_n(1) = \alpha_{max} + o_n(1).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, defina

$$T_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p-2} v_n \varphi dz.$$

Considere $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\psi\| = 1$. Assim,

$$\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq S$$

e

$$\begin{aligned}
|T_n(\psi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p-2} v_n \psi dz \right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|v_n\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^N)} S \\
&= \left[(f_{max})^{\frac{1}{2-p}} S^{\frac{2}{2-p}} \right]^{p-1} S + o_n(1) \\
&= (f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}} S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Donde,

$$\|T_n\|_{H^{-1}} \leq (f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}} S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1). \tag{B.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
T_n\left(\frac{v_n}{\|v_n\|} \right) &= \frac{1}{\|v_n\|} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dz \\
&= \frac{\left(f_{max}\right)^{\frac{p}{2-p}} S^{\frac{2p}{2-p}} + o_n(1)}{\left(f_{max} S^p\right)^{\frac{1}{2-p}}} \\
&= (f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}} S^{\frac{p}{p-1}} + o_n(1).
\end{aligned} \tag{B.5}$$

De $(B.4)$ e $(B.5)$, concluímos que

$$\|T_n\|_{H^{-1}} = (f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}} S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1).$$

Como T_n é um funcional linear contínuo, pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema C.12), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$T_n(\varphi) = \langle w_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_n \nabla \varphi + w_n \varphi), \ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\|w_n\| = \|T_n\|_{H^{-1}}.$$

Como

$$\begin{aligned}\left\langle I'_{max}(v_n),\varphi\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v_n\nabla\varphi+v_n\varphi)-f_{max}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{p-2}v_n\varphi\\ &= \langle v_n,\varphi\rangle - f_{max}T_n(\varphi)\\ &= \langle v_n,\varphi\rangle - f_{max}\langle w_n,\varphi\rangle\\ &= \langle v_n - f_{max}w_n,\varphi\rangle .\end{aligned}$$

Daí,

$$\left|\left\langle I'_{max}(v_n),\varphi\right\rangle\right| = \|v_n - f_{max}w_n\|. \tag{B.6}$$

Observe que

$$\|v_n - f_{max}w_n\|^2 = \|v_n\|^2 - 2f_{max}\langle w_n,v_n\rangle + (f_{max})^2\|w_n\|^2.$$

Temos

- $f_{max}\langle w_n,v_n\rangle = f_{max}T_n(v_n) = f_{max}\|v_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = f_{max}(f_{max})^{\frac{p}{2-p}}S^{\frac{2p}{2-p}} = (f_{max}S^p)^{\frac{2}{2-p}}.$
- $f_{max}\|w_n\| = f_{max}(f_{max})^{\frac{p-1}{2-p}}S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1) = (f_{max})^{\frac{1}{2-p}}S^{\frac{p}{2-p}} + o_n(1).$
- $\|v_n\|^2 = \left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}}.$

Das igualdades acima,

$$\|v_n - f_{max}w_n\|^2 = o_n(1).$$

De $(B.6)$, vem

$$\left|\left\langle I'_{max}(v_n),\varphi\right\rangle\right| \le \|v_n - f_{max}w_n\|^2 = o_n(1),$$

para todo $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\| = 1$. Portanto,

$$I'_{max}(v_n) = o_n(1) \ \text{ em } \ H^{-1},$$

demonstrando o resultado. ■

Agora considere o problema de minimização

$$\gamma_{max} = \inf_{u\in N_{max}} I_{max}(u)$$

onde $N_{max} = \{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \ \langle I'_{max}(u),u\rangle\}$.

Lema B.2 *Para $u \in N_{max}$, tem-se*

$$\|u\| \geq d,$$

para alguma constante $d > 0$.

Demonstração. Seja $u \in N_{max}$. Então, $\langle I'_{max}(u), u\rangle = 0$. Assim,

$$\|u\|^2 - f_{max}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz,$$

o que implica

$$\|u\|^2 = f_{max}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz = f_{max}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|^2 \leq f_{max} C\|u\|^p.$$

Daí,

$$\|u\|^{p-2} \geq \frac{1}{f_{max}C},$$

implicando

$$\|u\| \geq \left(\frac{1}{f_{max}C}\right)^{\frac{1}{p-2}} = d.$$

∎

Observação B.3 $\gamma_{max} > 0$.

Demonstração. Com efeito, para $u \in N_{max}$,

$$\begin{aligned} I_{max}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2} f_{max}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz \\ &= \frac{p-1}{2p}\|u\|^2 \\ &\geq \frac{p-1}{2p} d^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\gamma_{max} > 0$. ∎

Suponha, agora, as seguintes condições:

$f1)$ $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo $|f(x,t)| \leq C\big(|t|^{q-1} + |t|^{p-1}\big)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$, onde C é uma constante positiva.

$f2)$ $f(x,t) = o(|t|^{q-1})$ com $t \to 0$ uniformemente em x.

$f3)$ Existe uma constante positiva $\beta > q$ tal que

$$0 < \beta F(x,t) \leq t f(x,t), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } t \neq 0,$$

onde $F(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,s)ds$.

$f4)$ Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ a função $\dfrac{f(x,t)}{|t|^{q-1}}$ é crescente em t em $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$.

Seja $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional de classe C^1 definido por

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx,$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Considere a Variedade de Nehari dada por

$$N = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} : \left\langle I'(u), u \right\rangle = 0\}.$$

Lema B.4 *Sob as condições $(f1)-(f4)$ para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ existe um único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in N$. Além disso, o máximo de $I(tu)$ para $t > 0$ é atingido em $t = t_u$.*

Demonstração. Fixado $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ arbitrário, consideremos a função $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = I(tu)$. Note que $\varphi(0) = 0$ e que φ verifica a geometria do passo da montanha, ou seja, $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi(t) < 0$ para $t > 0$ grande. Logo, o máximo de $\varphi(t)$ em $[0, +\infty)$ é atingido em algum ponto $t_u = t(u) > 0$ e, portanto,

$$\varphi(t_u) = I'(t_u u) = 0.$$

Seja $v = t_u u$. Então, $I'(v)v = 0$, donde $v \in N$. O próximo passo consiste em provar a unicidade de t_u. Considere a função $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(t) = I(tv)$. Assim,

$$\psi(1) = I(v) = \varphi(t_u) = \max_{t \geq 0} \varphi(t) = \max_{t \geq 0} I(tu) = \max_{s \geq 0} I(s t_u u) = \max_{s \geq 0} I(su) = \max_{t \geq 0} \psi(t).$$

Logo,

$$0 = \psi(1) = I'(v)v,$$

consequentemente,

$$\|v\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,v)v.$$

Agora, supondo $t \geq 1$, resulta

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= I'(tv)v \\ &= t\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,tv)v \\ &= t\left[\|v\|^2 - \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,tv)v\right].\end{aligned}$$

Afirmação: $f(x,v)v < \dfrac{1}{t}f(x,tv)v$. Com efeito, para $v > 0$, sendo $t > 1$, tem-se que $tv > v$ e por $(f4)$,

$$\frac{f(x,tv)}{|tv|} > \frac{f(x,v)}{|v|}$$

ou

$$\frac{f(x,tv)v}{t} > f(x,v)v. \tag{B.7}$$

Se $v < 0$, então $tv < v$ e novamente por $(f4)$

$$\frac{f(x,tv)}{|tv|} < \frac{f(x,v)}{|v|}$$

implicando

$$\frac{f(x,tv)}{-tv} < \frac{f(x,v)}{-v}.$$

Daí,

$$\frac{f(x,tv)v}{t} > f(x,v)v. \tag{B.8}$$

O resultado segue de $(B.7)$ e $(B.8)$. Da afirmação, $\psi' < 0$ para $t > 1$. De maneira análoga concluímos que $\psi' > 0$ se $t \in (0,1)$. Provando que o número positivo t_u satisfazendo $\varphi'(tu) = I'(t_u u) = 0$ é único, finalizando a demonstração do Lema. ∎

Teorema B.5 *Sejam $\beta > 0$ e $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência para I_{max} tal que $I_{max}(u_n) = \beta + o_n(1)$ e $\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1)$. Então, existe uma sequência $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $s_n = 1 + o_n(1)$, $\{s_n u_n\} \subset N_{max}$ e $I_{max}(s_n u_n) = \beta + o_n(1)$.*

Demonstração. Pelo Lema B.2, existe $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\{s_n u_n\} \subset N_{max}$. Assim,

$$\langle I_{max}(s_n u_n), s_n u_n\rangle = 0,$$

ou seja,

$$s_n^2\|u_n\|^2 = f_{max}s_n^p\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Mas, por hipótese, $\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}$, o que implica

$$s_n^2\|u_n\|^2 = s_n^p\|u_n\|^2 + o_n(1)$$

ou

$$s_n^2(1 - s_n^{p-2})\|u_n\|^2 = o_n(1).$$

Como $I_{max} = \beta + o_n(1)$ e $\beta > 0$, então $s_n \neq 0$.

Afirmação: Existe $C > 0$ tal que $\|u_n\| \geq C$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, suponha por contradição que existe um subsequência tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0.$$

Então, $I_{max}(u_n) = o_n(1)$, mas isto contradiz $\beta > 0$.

Logo, devemos ter $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Da definição de I_{max} e do fato $s_n = 1 + o_n(1)$, concluímos que $I_{max}(s_n u_n) = \beta + o_n(1)$. ∎

Teorema B.6 *Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$. Então, $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_{\gamma_{max}}$ para I_{max} se, e somente se, $I_{max}(u_n) = \gamma_{max} + o_n(1)$ e $\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1)$. Em particular, toda sequência minimizante $\{u_n\} \subset N_{max}$ de γ_{max} é uma $(PS)_{\gamma_{max}}$ sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max}. Consequentemente, γ_{max} é um valor $(PS)_{\gamma_{max}}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max}.*

Demonstração. Suponha que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_{\gamma_{max}}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max}. Então, claramente

$$\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1).$$

Reciprocamente, se $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é tal que

$$I_{max} = \gamma_{max} + o_n(1)$$

e

$$\|u_n\|^2 = f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1), \tag{B.9}$$

então

$$I_{max}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p} f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \gamma_{max} + o_n(1).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p}\|u_n\|^2 = \gamma_{max} + o_n(1),$$

o que implica

$$\|u_n\|^2 = \frac{2p}{p-1}\gamma_{max} + o_n(1). \tag{B.10}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$T_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n \varphi, \text{ para todo } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Seja $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\psi\| = 1$. Então, existe t_ψ tal que $t_\psi \psi \in N_{max}$ e, assim,

$$\|t_\psi \psi\|^2 = f_{max} \|t_\psi \psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Daí,

$$t_\psi^2 = f_{max} t_\psi^p \|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

ou seja,

$$t_\psi = \left(f_{max} \|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^{-\frac{1}{p-2}}. \tag{B.11}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\gamma_{max} &\leq I_{max}(t_\psi \psi) \\
&= \left(\frac{p-2}{2p} \right) t_\psi^2 \|\psi\|^2 \\
&= \frac{p-2}{2p} t_\psi^2.
\end{aligned}$$

Por $(B.11)$,

$$\gamma_{max} \leq \frac{p-2}{2p} \left(f_{max} \|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^{-\frac{2}{p-2}}.$$

Assim,

$$\left(f_{max} \|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{2}{p-2}} \leq \frac{p-2}{2p} \frac{1}{\gamma_{max}},$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\|\psi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \frac{1}{f_{max}} \left(\frac{p-2}{2p} \frac{1}{\gamma_{max}} \right)^{\frac{p-2}{2}} \\
&= \frac{1}{f_{max}} \left(\frac{2p}{p-2} \gamma_{max} \right)^{\frac{2-p}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = (f_{max})^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{2p}{p-2}\gamma_{max} \right)^{\frac{2-p}{2}}.$$

De $(B.9)$, temos

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p} f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \gamma_{max} + o_n(1).$$

Assim,

$$\frac{1}{2} f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_n(1) - \frac{1}{p} f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \gamma_{max} + o_n(1),$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) f_{max}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \gamma_{max} + o_n(1),$$

implicando

$$\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{2p}{p-1}\frac{1}{f_{max}}\gamma_{max} + o_n(1).$$

Note que

$$\begin{aligned}
|T_n(\psi)| &\leq \|u_n\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \left(\frac{1}{f_{max}}\frac{2p}{p-1}\gamma_{max}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left((f_{max})^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{2p}{p-2}\gamma_{max}\right)^{\frac{2-p}{2p}} \right) + o_n(1) \\
&= \frac{1}{f_{max}}\left(\frac{2p}{p-1}\gamma_{max}\right)^{\frac{1}{2}} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|T_n\|_{H^{-1}} \leq \frac{1}{f_{max}}\left(\frac{2p}{p-1}\gamma_{max}\right)^{\frac{1}{2}} + o_n(1).$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema C.12), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$T_n(\varphi) = \langle w_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_n \nabla \varphi + w_n \varphi)$$

e

$$\|w_n\| = \|T_n\|_{H^{-1}} = \frac{1}{f_{max}}\left(\frac{2p}{p-1}\gamma_{max}\right)^{\frac{1}{2}} + o_n(1). \tag{B.12}$$

Temos

$$\langle w_n, u_n \rangle = T_n(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dz = \frac{1}{f_{max}}\frac{2p}{p-1}\gamma_{max} + o_n(1). \tag{B.13}$$

Por $(B.10)$, $(B.12)$ e $(B.13)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_n - f_{max} w_n\|^2 &= \|u_n\|^2 - 2 f_{max} \langle w_n, u_n \rangle + f_{max}^2 \|w_n\|^2 \\
&= \frac{2p}{p-1}\gamma_{max} - 2\frac{2p}{p-1}\gamma_{max} + \frac{2p}{p-1}\gamma_{max} + o_n(1) \\
&= o_n(1).
\end{aligned}$$

Para $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\psi\| = 1$, vem

$$\begin{aligned}
\left\langle I'_{max}(u_n), \psi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla \psi + u_n \psi) - f_{max} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n \psi \\
&= \langle u_n, \psi \rangle - f_{max} T_n(\psi) \\
&= \langle u_n, \psi \rangle - \langle f_{max} w_n, \psi \rangle \\
&= \langle u_n - f_{max} w_n, \psi \rangle .
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|I'_{max}(u_n)\| \leq \|u_n - f_{max} w_n\| = o_n(1)$$

e, portanto,

$$I'_{max} = o_n(1).$$

■

Teorema B.7 *Seja* $\beta > 0$ *um valor* (PS) *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *para* I_{max}. *Então,*

i) $\beta \geq \alpha_{max}$;

ii) $\beta \geq \gamma_{max}$.

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}$ uma sequência $(PS)_\beta$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_{max} com $\beta > 0$. Então,

$$I_{max} = \beta + o_n(1)$$

e

$$\|u_n\|^2 - f_{max} \|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = o_n(1).$$

$i)$ Temos que

$$\|u_n\| \geq \frac{1}{S} \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{f_{max}} \|u_n\|^2 \right)^{\frac{1}{p}} + o_n(1).$$

Logo,

$$\|u_n\|^{\frac{p-2}{p}} \geq \frac{1}{S} \frac{1}{(f_{max})^{1/p}} + o_n(1),$$

ou seja,

$$\|u_n\| \geq \left(\frac{1}{S^p}\frac{1}{f_{max}}\right)^{\frac{1}{p-2}} + o_n(1) = \left(f_{max}S^p\right)^{\frac{1}{2-p}} + o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\beta + o_n(1) &= I_{max}(u_n) \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p} f_{max}\|u_n\|^p \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} + o_n(1)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\beta \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}} = \alpha_{max}.$$

ii) Existe $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\{s_n u_n\} \subset N_{max}$ e $I_{max}(s_n u_n) = \beta + o_n(1)$. Mas, por definição,

$$\gamma_{max} \leq I_{max}(s_n u_n) = \beta + o_n(1).$$

Passando ao limite,

$$\gamma_{max} \leq \beta.$$

■

Corolário B.8 $\gamma_{max} = \alpha_{max} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(f_{max}S^p\right)^{\frac{2}{2-p}}$.

Demonstração. Segue diretamente do Lema $B.1$, Teorema $B.6$ e Teorema $B.7$. ■

Apêndice C

Resultados Importantes

Neste Apêndice traremos alguns resultados que foram úteis para o entendimento do trabalho. Primeiramente, definiremos os Espaços L^p e em seguida listaremos alguns resultados básicos usados referentes aos mesmos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Dado $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$, os espaços $L^p(\Omega)$ são definidos como

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \colon\ u \ \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \ \text{ é mensurável e } \ \exists C > 0 \ \text{ tal que } \ |u(x)| \leq C \ \text{ q.s. em } \ \Omega \},$$

com a norma

$$\|u\|_\infty = \inf\{C \colon\ |u(x)| \leq C \ \text{ q.s. em } \ \Omega\},$$

onde consideramos a classe das funções iguais q.s. Então, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach separável, para $1 \leq p < \infty$, e reflexivo para $1 < p < \infty$ (veja [10], pág. 103).

Teorema C.1 (Desigualdade de Young) *Sejam A e B números não negativos e $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ tais que p e q são conjungados, isto é,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [8]. ∎

Teorema C.2 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $u \in L^p$ e $v \in L^q$ com $1 < p < \infty$ tais que p e q são conjugados. Então, $uv \in L^1$ e*

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Demonstração. Ver [8]. ∎

Teorema C.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (u_n) uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre para uma função real mensurável u. Se existe uma função integrável v tal que $|u_n| \leq v$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então u é integrável e é válido*

$$\int u \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu.$$

Demonstração. Ver [8], Teorema 5.6, p. 44. ∎

Teorema C.4 (Teorema de Vainberg) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$, (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$, tais que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Então, existe uma subsequência $(u_{n_i}) \subseteq (u_n)$ e $g \in L^p(\Omega)$, satisfazendo:*

i) $u_{n_i}(x) \to u(x)$ *q.s. em* Ω*;*

ii) $|u_{n_i}(x)| \leq g(x)$*, para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver [10], Teorema 4.9. ∎

Teorema C.5 (Lema de Brezis-Lieb) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto aberto e $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ em que $1 \leq p < \infty$. Se*

i) (u_n) *é limitada em* $L^p(\Omega)$*;*

ii) $u_n \to u$ *q.s. em* Ω.

Então,

$$\lim_{n\to\infty} [\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p] = \|u\|_p^p.$$

Demonstração. Ver [30], Lema 1.32, pág. 21. ∎

Agora, definiremos os Espaços de Sobolev e enunciaremos alguns resultados usados referente a esses espaços.

Dados $k \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo formado por todas as funções de $L^p(\Omega)$ que admitem derivadas parciais fracas até ordem k em $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq k\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Define-se também

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Os espaços $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ são de Banach separáveis, para $1 \leq p < \infty$, e reflexivos, para $1 < p < \infty$ (veja [18]). Para $p = 2$, o espaço $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com norma proveniente do seguinte produto interno

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Quando $p = 2$ e $k = 1$, temos o espaço de Hilbert

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}}.$$

Observação C.6 *O espaço $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ coincide com $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema C.7 (Teorema de Imersão de Sobolev) *Temos*

i) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Então

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in \left[1, 2^* = \frac{2N}{N-2}\right].$$

A imersão é compacta se, e somente se, $q \in [1, 2^*)$.

ii) Seja $N \geq 3$. Então

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para todo } q \in [2, 2^*].$$

A imersão nunca é compacta.

Ressaltamos que a continuidade da imersão acima é expressa explicitamente pela de-

sigualdade da forma

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq S||u||, \text{ para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde S é uma constante que não depende de u.

[Ver [5]].

Teorema C.8 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $\{u_n\}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ em } E.$$

Demonstração. Ver [9], Teorema III.27, pág. 50. ■

Teorema C.9 (Lema de Pierre-Louis Lions) *Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q \to 0, \quad n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Ver [30], Lema 1.21. ■

Por fim, apresentaremos alguns teoremas importantes que nos ajudaram a compreender os resultados.

Teorema C.10 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam E um espaço de Banach e $J, F \in C^1(E, \mathbb{R})$. Se J é limitado inferiormente no conjunto $M = \{u \in E : F(u) = 0\}$ e valem as propriedades:*

i) $F'(u) \neq 0$, *para todo* $u \in M$,

ii) Existe $u_0 \in M$ *tal que* $J(u_0) = \min_{u\in M} J(u)$.

Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

O número $\lambda \in \mathbb{R}$ é denominado multiplicador de Lagrange.

Demonstração. Ver [21], Proposição 14.3, pág. 55. ■

Teorema C.11 (Principio Variacional de Ekeland) *Seja $J : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $J \not\equiv +\infty$, semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que*

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon$$

e

$$J(u_\varepsilon) - \varepsilon d(x, u_\varepsilon) < J(x),$$

para todo $x \in X$, $x \neq u_\varepsilon$.

Demonstração. Ver [16], pág. 35. ■

Teorema C.12 (Teorema de Representação de Riesz) *Todo funcional linear limitado* f *sobre um espaço de Hilbert pode ser representado em termos do produto interno, isto é,*

$$f(x) = \langle z, x \rangle$$

onde z *é unicamente determinado e verifica* $\|f\| = \|z\|$.

Demonstração. Ver [9]. ■

Teorema C.13 (Princípio do Máximo) *Se* u *é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $f \geq 0$, *então* $u \geq 0$; *e se* u *atinge mínimo, então* $u \equiv 0$.

Demonstração. Ver [21]. ■

Referências Bibliográficas

[1] ADACHI, S.; TANAKA, K. Four positive solutions for the semilinear elliptic equation: $-\Delta u + u = a(x)u^p + f(x)$ em $\mathbb{R}^N$. *Calc Var Partial Diff Edu*. 11, 63-95 (2000).

[2] ALVES, C. O.; de MORAIS FILHO, D. C.; SOUTO, M. A. S. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents. *Nonlinear Anal*. 42, 771-787 (2000).

[3] AMBROSETTI, A.; BREZIS, H.; CERAMI, G. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *Journal of Functional Analysis*. 122, 519-543 (1994).

[4] AMBROSETTI, A.; GARCIA AZORERO, J.; PERAL ALONSO, I. Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations. *Journal of Functional Analysis*. 137, 219-242 (1996).

[5] BADIALE, M.; SERRA, E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Springer: New York, 2011.

[6] BAHRI, A.; LI, Y. Y. On a Min-max Procedure for the Existence of a Positive Solution for Certain Scalar Field Equations in $\mathbb{R}^N$. *Rev. Mat. Iberoamericana*. 6, 1-15 (1990).

[7] BAHRI, A.; LIONS, P. L. On the Existence of a Positive Solution of Semilinear Elliptic Equations in Unbounded Domains. *Ann. Inst. Henri Poincaré Anal Nonlinéaire* 14, 365-413 (1997).

[8] BARTLE, R. G. *Elements of Integration*. John Wiley & Sons: New York, 1966.

[9] BREZIS, H. *Análisis Funcional, Teoria y Aplicaciones*. Versiõn Española de Juan Ramón Esteban. Alianza: Madrid, 1984.

[10] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer: New York, 2010.

[11] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Communs Pure Appl. Math*. 36, 437-477 (1983).

[12] BROWN, K. J.; ZHANG, Y. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function. *Journal Differential Equations*. 193, 481-499 (2003).

[13] CAO, D. M.; ZHOU, H. S. Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$. *Proc Roy Soc Edinburgh, Sect A*. 126, 443-463 (1996).

[14] de FIGUEIREDO, D. G.; GOSSES, J. P.; UBILLA, P. Local Superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems. *Journal of Functional Analysis*. 199, 452-467 (2003).

[15] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics*, 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[16] FERREIRA, M. C. *Existência de Soluções Via Métodos Variacionais para uma classe de Problemas Quasilineares com Expoentes Variáveis.* Tese (Doutorado em Matemática). Universidade Federal da Paraíba/Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande. 2014.

[17] GIDAS, B; NI, W. M.; NIRENBERG, L. Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle. *Commun Math Phys*. 68, 209-243 (1979).

[18] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. Elliptic partial differential equations of second order. *Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[19] HIRANO, N. Existence of entire positive solutions for nonhomogeneous elliptic equations. *Nonlinear Anal*. 29, 889-901 (1997).

[20] HSU, T. S.; LIN, H. L. Four positive solutions of semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities in $\mathbb{R}^N$. *J Math Anal Appl*. 365, 758-775 (2010).

[21] KAVIAN, O. *Introduction à la théorie des points critiques: et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, 1993.

[22] KESAVAN, S. *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*. Hindustan Book Agency: India, 2004.

[23] KWONG, M. K. Uniqueness of Positive Solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ em $\mathbb{R}^N$. *Arch Ration Mech Anal*. 105, 234-266 (1989).

[24] LIN, H. Multiple positive solutions for semilinear elliptic systems. *J Math Anal Appl*. 391, 107-118 (2012).

[25] LIN, H. Multiple positive solutions of semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities in $\mathbb{R}^N$. *Boundary Value Problems*. 2012(24), 1-17 (2012).

[26] REIS, F. P. P. *Soluções Positivas de um Sistema Elíptico Semilinear nos Casos Críticos e Supercrítico*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, (2011).

[27] STRUWE, M. *Variational Methods*, second edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1996.

[28] TARANTELLO, G. On Nonhomogeneous Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent. *Ann. Inst. Henri Poincaré Anal Non Linéaire*. 9, 281-304 (1992).

[29] WANG, H. C. Palais-Smale approaches to semilinear elliptic equations in unbounded domains. *Electron J Diff Equ Monogragh*. 142 (2006).

[30] WILLEM, M. *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[31] WU, T. On Semilinear Elliptic Equations Involving Concave-Convex Nonlinearities and Sign-Changing Weight Function. *J . Math. Anal. Appl*. 318, 253–27 (2006).

[32] ZHU, X. P. A perturbation result on positive entire solutions of a semilinear elliptic equation. *J Diff Equ*. 92, 163-178 (1991).