UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LEANDRO DA COSTA CONFESSOR

O Lema de Riesz

CUITÉ - PB

2022

LEANDRO DA COSTA CONFESSOR

O Lema de Riesz

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Martins Barros

CUITÉ - PB

2022

C748l Confessor, Leandro da Costa.

O Lema de Riesz. / Leandro da Costa Confessor. - Cuité, 2022.
34 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2022.
"Orientação: Prof. Dr. Luciano Martins Barros".
Referências.

1. Análise funcional. 2. Espaços métricos. 3. Lema de Riesz. 4. Dimensão infinita. I. Barros, Luciano Martins. II. Título.

CDU 513.88(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

LEANDRO DA COSTA CONFESSOR

O Lema de Riesz

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luciano Martins Barros - UFCG
(Orientador)

Prof. Ma. Maria De Jesus Rodrigues Da Silva - UFCG
(Membro da Banca)

Prof. Drª. Célia Maria Rufino Franco - UFCG
(Membro da Banca)

CUITÉ - PB

2022

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo introdutório da Análise Funcional, apresentando vários conceitos importantes, tais como os espaços métricos, espaços de Banach, conjuntos compactos e o por fim enunciamos e demonstramos o Lema de Riesz.

Palavras-chave: Lema de Riesz, Espaços Métricos, Dimensão Infinita.

ABSTRACT

In this work we carry out an introductory study of Functional Analysis, presenting several important concepts, such as metric spaces, Banach spaces, compact sets and finally we enunciate and demonstrate the Riesz Lemma.

Keywords: Riesz Lemma, Metric Spaces, Infinite Dimension.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pois sem ele nada disso seria possível, agradeço a minha família, em especial meus pais Ivonete e Valmir e minha irmã Patrícia pelo apoio e nessa reta final de curso agradeço a minha namorada Janecleide por sempre me apoiar e por sempre me incentivar a crescer.

No decorrer do curso conheci algumas pessoas que fizeram parte da minha jornada, em especial os amigos, Anderson, Loandson, Marcos Vagner, Marcos Sérgio, Filipe, William, Samara, Joyce, Geovanne, André, Joebson entre outros.

Aos Professores da unidade acadêmica de Física e Matemática da UFCG-CES que contribuíram para que eu conseguisse chegar até aqui, em especial ao professor Luciano por me orientar no TCC, a professora Maria de Jesus por ter me dado oportunidade de trabalhar três períodos como seu monitor e por ter aceitado o convite em participar da minha banca examinadora do meu TCC. Aos professores Luando e Clebson Huan por sempre me ajudarem, as professoras Márcia e Giselia por sempre me incentivarem a crescer academicamente. A professora Célia por aceitar o convite de participar da banca.

A UFCG e ao CAPES pela concessão de bolsas com as quais consegui me manter e continuar com os meus estudos. Portanto agradeço, a todos que contribuíram e me apoiaram de maneira direta ou indireta, o meu muito obrigado.

Sumário

0.1 Introdução

Segundo [9], a Análise Funcional é uma rica fusão de conceitos de Álgebra Linear, Análise e Topologia, com destaque para espaços vetoriais de dimensão infinita. Em [1], destaca-se que a Álgebra Linear é uma Análise Funcional em dimensão finita, ao mesmo tempo que a Análise Funcional é uma Álgebra Linear em dimensão infinita. Isso nos mostra que a passagem de dimensão finita para infinita traz inúmeros resultados interessantes. Entre esses resultados importantes está o Lema de Riesz, o qual permite caracterizar espaços normados de dimensão infinita.

Espaços normados de dimensão infinita representam uma parte de extrema relevância na teoria da Análise Funcional. Na prática, raramente verificamos que um espaço vetorial tem dimensão infinita exibindo uma de suas bases. Na verdade, muito raramente podemos exibir uma base de um espaço de dimensão infinita, [2]. Neste sentido, a relevância do Lema de Riesz é notória, mas este resultado e suas aplicações são usados de forma generalizada na Análise Funcional, muitas vezes usados sem serem mencionados explicitamente.

Neste trabalho apresentamos uma introdução aos conceitos, propriedades e alguns resultados da Análise Funcional com o foco no Lema de Riesz.

No capítulo 1 apresentamos alguns conceitos de Espaços Métricos, tais como, métrica, conjunto aberto, conjunto fechado, vizinhança, convergência, sequências de Cauchy. Espaços métricos completos e incompletos.

No capítulo 2 apresentamos Espaços Normados, Banach e resultados envolvendo estes espaços. Estes resultados são importantes para demonstrarmos o nosso principal resultado deste trabalho.

No capítulo 3 apresentamos a biografia de F. Riesz, conceitos e resultados sobre compacidade e finalmente enunciamos e mostramos o lema de Riesz, principal resultado deste trabalho.

Finalmente, no capítulo 4 apresentamos as considerações finais.

Capítulo 1

Espaços Métricos

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos e resultados preliminares para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho. Iniciamos estudando os espaços métricos. Estes são fundamentais na análise funcional, porque desempenham um papel semelhante ao que os números reais têm no cálculo. Para ver um estudo mais detalhado, consultar as referências [5], [8], [4].

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1.1 *Um espaço métrico é um par* (X, d)*, onde* X *é um conjunto e* d *é uma métrica em* X *(ou função de distância em* X*), isto é, uma função definida em* $X \times X$ *tal que, para todo* x*,* y*,* $z \in X$*:*

(M1) d *é uma função com valores reais, finitos e não negativos;*

(M2) $d(x, y) = 0$ *se, e somente se* $x = y$*;*

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$*;* **(Simetria)**

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. **(Desigualdade triangular)**

Os elementos de X são designados como pontos. Para x e y fixos, chamamos ao número não negativo $d(x, y)$ a distância de x a y. As propriedades $(M1)$ a $(M4)$ são os axiomas da métrica referida. A designação "Desigualdade triangular"é motivada por um conceito geométrico: no plano Euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outro dois.

Vejamos alguns exemplos de espaços métricos

Exemplo 1.1.2 (Reta real $\mathbb{R}$) *Considere a métrica usual*

$$d(x,y) = |x-y|.$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$. Pelas propriedades de valor absoluto as condições $(M1)-(M4)$ são verificadas. Logo, $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.1.3 (Espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$) *Dados x, $y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ definimos a métrica euclidiana com sendo*

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Pela definição da métrica, as propriedades $(M1)-(M3)$ são verificadas. Para mostrar $(M4)$ precisamos da desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^n$ cujo enunciado é o seguinte: se $x_1, \cdots, x_n$ e $y_1, \cdots, y_n$ são números reais arbitrários, então

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i \cdot y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

note que dados $r, s \in \mathbb{R}$ é válido a seguinte desigualdade

$$2rs \le r^2 + s^2.$$

Daí se,

$$r = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$$

e

$$s = \sqrt{(y_1)^2 + \cdots + (y_n)^2}.$$

temos que,

$$2 \cdot \frac{|x_i|}{r} \cdot \frac{|y_i|}{s} \le \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{y_i^2}{s^2}$$

para qualquer i, com $1 \le i \le n$. Se somarmos em relação ao índice i, obtemos

$$\frac{2}{r \cdot s} \cdot \sum_{i=1}^{n}|x_i \cdot y_i| \le 1 + 1$$

portanto

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i \cdot y_i| \le r \cdot s = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2} \cdot \sqrt{(y_1)^2 + \cdots + (y_n)^2},$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Desta forma podemos usar a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)\cdot(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right] + \left[\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right] \\
&= [d(x,z)]^2 + [d(z,y)]^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Exemplo 1.1.4 (A métrica zero-um) *Qualquer conjunto não vazio M é um espaço Métrico, basta considerar a métrica:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \ se\ x = y \\ 1, \ se\, x \neq y \end{cases}$$

(M1) $d(x,y) \geq 0$. *De fato, se $x = y$ temos*

$$d(x,y) = 0$$

e se $x \neq y$ obtemos

$$d(x,y) = 1.$$

(M2) Se $d(x,y) = 0$ então $x = y$.

Por outro lado, para $x = y$, tem-se

$$d(x,y) = 0.$$

(M3) Para $x = y$, temos

$$d(x,y) = 0 = d(y,x).$$

Seja $x \neq y$, segue que

$$d(x,y) = 1 = d(y,x).$$

(M4) Para verificar a desigualdade triangular, precisaremos considerar três casos.
(Caso 1):

$$x \neq y \neq z$$

implica em

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

pois

$$d(x, z) = 1$$

$$d(x, y) = 1$$

$$d(y, z) = 1,$$

dessa forma

$$1 \leq 1 + 1.$$

(Caso 2) Se $x = y = z$.
Temos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

pois

$$d(x, z) = 0$$

$$d(x, y) = 0$$

$$d(y, z) = 0$$

assim,

$$0 \leq 0 + 0.$$

(Caso 3) Para $x = y, x \neq z, y \neq z$.
Segue que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

de maneira que:

$$d(x, z) = 1$$

$$d(x, y) = 0$$

$$d(y, z) = 1.$$

portanto

$$1 \leq 0 + 1.$$

Exemplo 1.1.5 (Espaço das sequências l^∞) *Seja X o conjunto de todas as sequências limitadas de números reais, ou seja, cada elemento de X é uma sequência de números reais onde,*

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$$

ou

$$x = (\xi_j),$$

de modo que para todo $j = 1, 2, \cdots$ *temos*

$$|\xi_j| \leq c_x$$

onde c_x *é um número real que depende de* x *mas não depende de* j*. Vamos definir a métrica como sendo*

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|,$$

onde $y = (\eta_j) \in X$ *e* $\mathbb{N} = (1, 2, \cdots)$ *onde o supremo é denotado como* $\sup$.
As propriedades $(M1) - (M4)$ *são facilmente verificáveis.*

(M1) *Note que*

$$|\xi_j - \eta_j| \geq 0\,, \forall\, j \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j| \geq 0.$$

(M2) *Se* $\sup_{t \in A} |\xi_j - \eta_j| = 0$*, então* $|\xi_j - \eta_j| = 0$ *ou seja,* $\xi_j = \eta_j$.
Analogamente se $\xi_j = \eta_j$*, temos* $\sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j| = 0$.

(M3) *Veja que,*

$$|\xi_j - \eta_j| = |\eta_j - \xi_j|,$$

dessa forma, podemos garantir que:

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\eta_j - \xi_j|.$$

(M4) *Tem-se que*

$$|\xi_j - \eta_j| = |\xi_j - \eta_j + \alpha_j - \alpha_j|$$

Utilizando a desigualdade triangular, obtemos a seguinte inequação:

$$|\xi_j - \eta_j| \leq |\xi_j - \alpha_j| + |\alpha_j - \eta_j|.$$

Consequentemente,

$$|\xi_j - \alpha_j| + |\alpha_j - \eta_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \alpha_j| + \sup_{j \in \mathbb{N}} |\alpha_j - \eta_j|.$$

Portanto,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Exemplo 1.1.6 (Espaço das funções $C[a,b]$) *Seja $X = C[a,b]$ o conjuntos das funções $x, y, \cdots$ que dependem da variável independente $t \in \mathbb{R}$, contínuas no intervalo fechado $J = [a,b]$. Podemos definir a métrica como sendo:*

$$d(x,y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

As propriedades $(M1) - (M4)$ são facilmente verificáveis.

(M1) *Note que $|x(t) - y(t))| \geq 0, \forall\, t \in \mathbb{R}$ ou seja,*

$$\max_{t \in J} |x(t) - y(t)| \geq 0.$$

(M2) *Se $\max_{t \in J} |x(t) - y(t)| = 0$, então $|x(t) - y(t)| = 0$ ou seja, $x(t) = y(t)$.*
Por outro lado, se $x(t) = y(t)$, temos $x(t) - y(t) = 0$ o que resulta $|x(t) - y(t)| = 0$, consequentemente $\max_{t \in J} |x(t) - y(t)| = 0$.

(M3) *Temos que*

$$\max_{t \in J} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in J} |(-1)(y(t) - x(t))|.$$

Por propriedade modular, temos

$$\max_{t \in J} |(-1)(y(t) - x(t))| = \max_{t \in J} [|-1| \cdot |y(t) - x(t)|]$$

o que implica:

$$\max_{t \in J} [|-1| \cdot |y(t) - x(t)|] = \max_{t \in J} \cdot |y(t) - x(t)|.$$

(M4) *Notemos que*

$$|x(t) - y(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

além disso,

$$|x(t) - z(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t) - z(t)|$$

e,

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|,$$

isto é,

$$\max_{t \in J} |x(t) - y(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t) - z(t)| + \max_{t \in J} |z(t) - y(t)|.$$

1.2 Dois exemplos importantes

Exemplo 1.2.1 (Espaço $B(A)$ de funções limitadas) *Por definição, cada elemento $x \in B(A)$ é uma função definida e limitada em um determinado conjunto, cuja métrica é definida por:*

$$d(x,y) = \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)|$$

O espaço $B(A)$ é um espaço métrico, de fato os três primeiros axiomas são verificados, pois:

(M1) Note que

$$|x(t) - y(t)| \geq 0 \, \forall \, t \in A,$$

ou seja,

$$\sup_{t \in A} |x(t) - y(t)| \geq 0.$$

(M2) Se $\sup_{t \in A} |x(t) - y(t)| = 0$*, então* $|x(t) - y(t)| = 0$ *ou seja,* $x(t) = y(t)$*.*
Analogamente se $x(t) = y(t)$*, temos* $\sup_{t \in A} |x(t) - y(t)| = 0$*.*

(M3) Veja que, pelo ***Exemplo 1.1.6****, temos a seguinte identidade:*

$$|x(t) - y(t)| = |y(t) - x(t)|,$$

dessa forma, podemos garantir que

$$\sup_{t \in A} |x(t) - y(t)| = \sup_{t \in A} |y(t) - x(t)|.$$

(M4) Tem-se que

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - y(t) + z(t) - z(t)|$$

Utilizando a desigualdade triangular, obtemos a seguinte inequação

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|.$$

Consequentemente,

$$|x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \sup_{t \in A} |x(t) - z(t)| + \sup_{t \in A} |z(t) - y(t)|.$$

Portanto,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Exemplo 1.2.2 (Espaço l^p) *Por definição, cada elemento no espaço l^p é uma sequência $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ de números tais que $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots$ converge. Portanto, dado $p \geq 1$ um número real fixo temos a seguinte afirmação:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty. \tag{1.2}$$

Agora vamos definir a métrica do espaço l^p que é dada por:

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Onde $y = (\eta_j)$ e $\sum |\eta_j|^p < \infty$. Para mostrar que o espaço l^p é um espaço métrico será

*preciso definirmos as **desigualdade de Hölder para somas** e de **Minkowski**.*
*A **desigualdade de Hölder para somas** é definida como sendo:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \cdot \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.3}$$

onde, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
*A desigualdade de**Minkowski**, que é dada por:*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.4}$$

onde $x = (\xi_j) \in l^p$ *e* $y = (\eta_j) \in l^p$ *e* $p \geq 1$. *As demonstrações das desigualdades* (1.3) *e* (1.4) *estão disponíveis em [5].*
As propriedades $(M1) - (M3)$ *decorrem da definição da métrica.*
Definidas as desigualdades acima, verificaremos a quarta propriedade de um espaço métrico.

(M4)

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left(\sum |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum |\xi_j - \zeta_j| + |\zeta_j - \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum |\xi_j - \zeta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |\zeta_j - \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

1.3 Conjunto aberto, conjunto fechado e vizinhança

Definição 1.3.1 (Bola e esfera) *Dado um ponto* $x_0 \in X$ *e um número real* $r > 0$, *definimos três tipos de conjuntos, onde* X *é um conjunto não vazio, e* r *é denominado como o raio:*

- *Bola aberta:* $B(x_0; r) = \{x \in X \,/\, d(x, x_0) < r\}$.
- *Bola fechada:* $\overline{B}(x_0; r) = \{x \in X \,/\, d(x, x_0) \leq r\}$.
- *Esfera:* $S(x_0; r) = \{x \in X \,/\, d(x, x_0) = r\}$.

Definição 1.3.2 (Conjunto aberto, conjunto fechado) *Um subconjunto* M *de um espaço métrico* X *é considerado aberto se contiver uma bola em torno de cada um de*

seus pontos.
Um conjunto K de X é dito fechado se seu complementar em X for aberto isto é,

$$K^c = X - K$$

é aberto.

Exemplo 1.3.3 *Toda bola $B = B(a, r)$ é um conjunto aberto.*

Exemplo 1.3.4 *$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são fechados em $\mathbb{R}$.*

Definição 1.3.5 (Vizinhança) *Uma bola aberta $B(x_0 : \epsilon)$ de raio ϵ é frequentemente chamada de vizinhança de x_0. Por uma vizinhança de x_0 nos diz que qualquer subconjunto de X contém uma ϵ-vizinhança de x_0.*
Chamamos x_0 de um ponto de interior de um conjunto $M \in X$ se M for uma vizinhança de x_0. O interior de M é o conjunto de todos os pontos interiores de M e pode ser denotado por $int(M)$.

Definição 1.3.6 (Ponto de acumulação) *é um ponto em um conjunto que pode ser aproximado tão bem quanto se queira por infinitos outros pontos do conjunto.*

Definição 1.3.7 (Conjunto Denso) *Um subconjunto M de um espaço métrico X é dito denso em X, se*

$$\overline{M} = X.$$

$\overline{M}$ é o conjunto que consiste nos pontos de M e dos pontos de acumulação de M, são chamados de fecho de M.

Exemplo 1.3.8 (Conjunto dos números Racionais $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$) *O conjunto dos números Racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, pois entre dois números reais quaisquer existirá pelo menos um número racional.*

Exemplo 1.3.9 (Plano Complexo $\mathbb{C}$) *Um subconjunto denso em $\mathbb{C}$ é o conjunto de todos os números complexos cujas partes reais e imaginárias são racionais.*

1.4 Convergência e Sequência de Cauchy

Definição 1.4.1 (Convergência de uma sequência) *Uma sequência (x_n) em um espaço Métrico $X = (X, d)$ é convergente se existir um $x \in X$ tal que,*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

x é chamado de limite de x_n e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

ou simplesmente

$$x_n \to x$$

dizemos que x_n converge para x ou tem limite x. Se (x_n) não for convergente, dizemos que x_n é divergente.

Vemos que a métrica d produz a sequência de números reais $a_n = d(x_n, x)$ cuja convergência está definida pela sequência (x_n). Portanto, se $x_n \to x$, dado um $\epsilon > 0$ existe um $N = N(\epsilon)$ de modo que todo x_n com $n > N$ se encontra na vizinhança $B(x : \epsilon)$ de x.

Exemplo 1.4.2 *Seja X o intervalo aberto $(0, 1)$ em $\mathbb{R}$ com a métrica usual, definida por:*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Então a sequência $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots)$ não é convergente desde o 0, o ponto para o qual a sequência quer convergir não está em X.

Definição 1.4.3 (Sequência de Cauchy) *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita de Cauchy se para cada $\epsilon > 0$ há um $N = N(\epsilon)$ tal que*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \tag{1.5}$$

para cada m, $n > N$.

Definição 1.4.4 (Espaço métrico completo) *O espaço X é considerado Completo se cada sequência de Cauchy em X converge, ou seja, tem um limite que é um elemento de X.*

Teorema 1.4.5 (Sequência convergente) *Cada sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $x_n \to x$, então, para cada $\epsilon > 0$, há um $N = N(\epsilon)$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2},$$

onde $n > N$.

Portanto pela desigualdade triangular, obtemos para $m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isso mostra que (x_n) é de Cauchy.

■

Teorema 1.4.6 (Fecho, conjunto fechado) *Seja M um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X, d) e $\overline{M}$ seu fecho, então:*

(a) $x \in \overline{M}$ se, e somente se houver uma sequência (x_n) em M tal que $x_n \to x$.

(b) M é fechado se, e somente se $x_n \in M$, $x_n \to x$ implica $x \in M$.

Demonstração. (a) Seja $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$, uma sequência desse tipo é

$$(x, x, \cdots).$$

Se $x \notin M$, é um ponto de acumulação de M. Para cada

$$n = 1, 2, \cdots$$

a bola $B(x, \frac{1}{n})$ contém um $x_n \in M$ e $x_n \to x$ pois $\frac{1}{n} \to 0$ com $n \to \infty$.
Por outro lado se (x_n) está em M e $x_n \to x$, então $x \in M$ ou cada vizinhança de x contém pontos $x_n \neq x$ de modo que x é um ponto de acumulação de M. Portanto $x \in \overline{M}$, pela definição de fecho.
(b) M é fechado $\iff M = \overline{M}$ de modo que (b) segue prontamente de (a).

■

Teorema 1.4.7 (Subespaço completo) *Um subespaço M de um espaço métrico Completo X é ele próprio completo, se, e somente se o conjunto M for fechado em X.*

Demonstração. Seja M completo, por **1.4.6** (a), para cada $x \in \overline{M}$ há uma sequência x_n em M que converge para x. Já que (x_n) é de Cauchy, por (1.4.5) M está completo, (x_n) converge em M. Sendo o limite único. Portanto $x \in M$. Isso prova que M é fechado porque $x \in \overline{M}$ foi arbitrário.
Por outro lado, seja M fechado e (x_n) de Cauchy em M. Então $x_n \to x \in M$, o que implica que $x \in \overline{M}$ por **1.4.6** (a), e $x \in M$, uma vez que $M = \overline{M}$ por suposição. Portanto a sequência arbitrária de Cauchy (x_n) converge em M, o que prova a Completude de M.

■

1.5 Exemplos de espaços métricos completo

Exemplo 1.5.1 (Espaço l^p) *O espaço l^p é completo, com p fixo e $1 \leq p \leq \infty$.*
Demonstração. *Seja x_n uma sequência de Cauchy no espaço l^p, onde $x_m = (\xi_1^m, \xi_2^m, \cdots)$. Então para cada $\epsilon > 0$ há um N tal que $m, n > N$,*

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^m - \eta_j^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \tag{1.6}$$

para cada $j = 1, 2, \cdots$ termos

$$|\xi_j^m - \eta_j^n| < \epsilon. \tag{1.7}$$

$(m, n > N)$.
Escolhemos um j fixo de (1.7), vemos que $(\xi_j^1, \xi_j^2, \cdots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Converge já que $\mathbb{R}$ está Completo. Digamos que, $\xi_j^m \to \xi_j$. Usando esses limites, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ assim mostrará que $x \in l^p$ e $x_n \to x$.
De (1.6) temos para todo $m, n > N$

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^m - \xi_j^n|^p \leq \epsilon^p.$$

$(k = 1, 2, \cdots)$.
Fazendo $n \to \infty$, obtemos para $m > N$

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^m - \xi_j|^p \leq \epsilon^p.$$

$(k = 1, 2, \cdots)$.
Pode-se agora tender $k \to \infty$, então para $m > N$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^m - \xi_j|^p \leq \epsilon^p. \tag{1.8}$$

Isso mostra que $x_m - x = (\xi_j^m - \xi_j) \in l^p$, onde $x_m \in l^p$, segue pela desigualdade de Minkowski, que

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^p$$

Além disso, a série em (1.8) representa $[d(x_m, x)]^p$ de modo que (1.8) implica $x_m \to x$. Uma vez que (x_m) era uma sequência de Cauchy arbitrária em l^p, isso prova a completude de l^p, onde $1 \leq p \leq +\infty$.

∎

Exemplo 1.5.2 (Reta real $\mathbb{R}$ e o plano complexo $\mathbb{C}$) *A reta real $\mathbb{R}$ e os planos complexos $\mathbb{C}$ são espaços métricos completos.*

Exemplo 1.5.3 (Espaço $C[a,b]$) *O espaço funcional $C[a,b]$ é completo, onde $[a,b]$ é qualquer intervalo dado em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. *Seja x_m uma sequência de Cauchy arbitrária em $C[a,b]$. Então dado $\epsilon > 0$, existe um N tal que para todo $m, n > N$ temos:*

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in j} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon. \tag{1.9}$$

Onde $j = [a,b]$. Portanto, para qualquer $t = t_0 \in j$ fixo.

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \epsilon.$$

Isso mostra que $(x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais, uma vez que $\mathbb{R}$ está completo, a sequência converge, digamos, $x_m(t_0) \to x(t_0)$ como $m \to \infty$ desta forma, podemos associar a cada $t \in j$ um número real único $x(t)$. Isso define pontualmente uma função x em j, e mostremos que $x \in C[a,b]$ e $x_{\to} x$.

Por (1.9), como $n \to \infty$, temos:

$$\max_{t \in j} |x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon$$

para cada $t \in j$,

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon.$$

Isso mostra que $(x_m(t))$ converge para $x(t)$ uniformemente em j. São contínuas em j e a convergência é uniforme, a função limite x é contínua em j, portanto, $x \in C[a,b]. x_m \to x$. Isso mostra a completude de $C[a,b]$.

■

1.6 Exemplos de espaços métricos incompletos

Exemplo 1.6.1 (Funções contínuas) *Seja X o conjunto de todas as funções contínuas de valor real em $J = [0,1]$ e*

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| \, dt$$

este espaço não é completo.

Demonstração. *As funções x_m na figura 1 formam uma sequência de Cauchy porque $d(x_m, x_n)$ é a área do triângulo da figura 2, e para cada $\epsilon > 0$ dado,*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon,$$

quando $m, n > \frac{1}{\epsilon}$.

Vamos mostrar que essa sequência de Cauchy não converge.

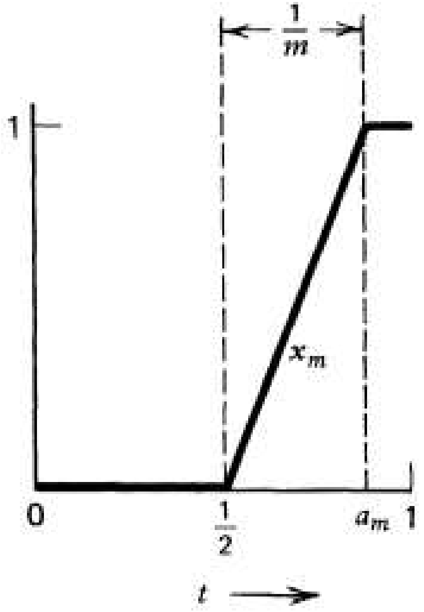

Figura 1.1: Figura 1 [5]

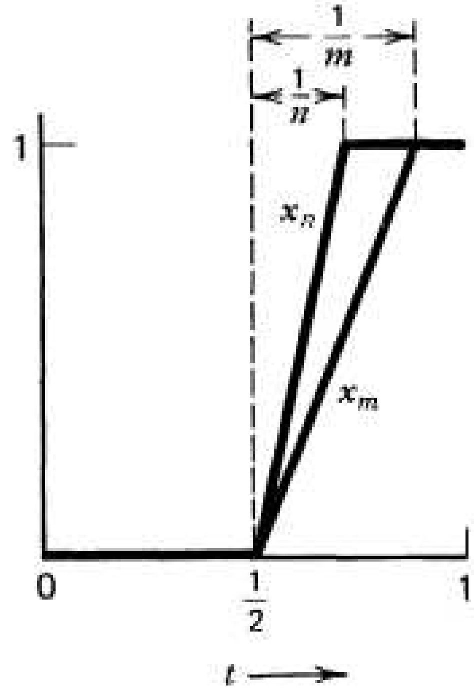

Figura 1.2: Figura 2 [5]

Temos que
$x_m(t) = 0$ *e se* $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

onde $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$. *Portanto para cada* $x \in X$

$$d(x_m, x) = \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\, dt.$$

Separando a integral em três integrais, temos

$$d(x_m, x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_{a_m}^1 |1 - x(t)|\, dt.$$

Uma vez que os integrantes são não negativos, cada integral á direita também é. Portanto

$$d(x_m, x) \to 0$$

implicaria que cada integral se aproxima de zero e, uma vez que x *é contínua, devemos ter:*
$x(t) = 0$ *se* $t \in [0, \frac{1}{2})$, $x(t) = 1$ *se* $t \in (\frac{1}{2}, 1]$. *Mas isso não é possível para uma função contínua, portanto* (x_m) *não converge, ou seja, não tem limite em* X. *Isso prova que* X *não é completo.*

■

Exemplo 1.6.2 (O conjunto dos números Racionais $\mathbb{Q}$) *Este é o conjunto de todos os números racionais com a métrica usual definida por* $d(x, y) = |x - y|$, *onde* x,$y \in \mathbb{Q}$, *é um espaço incompleto.*

Demonstração. *Note que nem toda sequência de Cauchy em* X *é convergente em* X. *De fato, consideramos o espaço métrico* $(\mathbb{Q}, d)$, *com a métrica usual definida acima. Consideremos a sequência* (x_n) *de modo que* $x_0 = 1$ *e* $x_{n+1} = N(x_n)$, $n > 0$, *onde* $N(x) = \frac{x^2+1}{2x}$. *Note que os primeiros números dessa sequência são:*

$$(1, 1.5, 1.416666666, 1.414215686, 1.414213562, \cdots).$$

Sem dificuldades maiores percebe-se que essa sequência converge para $\sqrt{2}$ *e, portanto é de Cauchy. Como a sequência* (x_n) *converge para um número irracional, seque que o par* $(\mathbb{Q}, d)$ *não é um espaço métrico completo.*

$\blacksquare$

Capítulo 2

Espaços Vetoriais Normados

Espaços métricos são particularmente úteis e importantes, obtidos se tomarmos um espaço vetorial e definir nele uma métrica por meio de uma norma. O espaço resultante é chamado de espaço normado. Se for uma métrica completa o espaço, é chamado de espaço de Banach. O presente capítulo é dedicado às ideias básicas dessas teorias.

2.1 Espaço vetorial

Os espaços vetoriais desempenham um papel em muitos ramos da matemática. Na verdade, em vários problemas práticos (e teóricos), nós temos um conjunto X cujos elementos podem ser vetores em três dimensões no espaço, ou sequências de números ou funções e esses elementos podem ser adicionados e multiplicados por constantes (números) de forma natural, o resultado sendo novamente um elemento de X. Tais situações concretas sugerem o conceito de um espaço vetorial conforme definido abaixo. A definição vai envolver um corpo geral K, mas na análise funcional, K será $\mathbb{R}$. Os elementos de K são chamados escalares; portanto, em nosso caso, eles serão números reais ou complexos. Para mais detalhes, ver em [6].

Definição 2.1.1 (Espaços vetoriais) *Um espaço vetorial (ou espaço linear) sobre um corpo K é um conjunto não vazio X de elementos $x, y, \cdots$ (chamados de vetores) junto com duas operações algébricas. Essas operações são chamadas adição de vetor e multiplicação de vetores por escalares, ou seja, por elementos de K. Para que o con-*

junto seja um espaço vetorial basta satisfazer as seguinte propriedades:
Sejam u, v e $w \in V$ e, α, $\beta \in K$.

(A1) Associatividade da adição:

$$u + (v + w) = (u + v) + w.$$

(A2) Comutatividade da adição:

$$u + v = v + u.$$

(A3) Elemento neutro da adição:

$$\exists \quad 0 \in V \quad / \quad v + 0 = v.$$

(A4) Inverso Aditivo:

$$\exists - v \in V \quad / \quad v + (-v) = 0.$$

(P1) Associatividade da Multiplicação:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v.$$

(P2) Elemento neutro da multiplicação:

$$1 \cdot v = v.$$

(P3) Distributividade da multiplicação por escalar em relação a soma de dois vetores:

$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v.$$

(P4) Distributividade da multiplicação por escalar em relação a adição do corpo:

$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u.$$

Exemplo 2.1.2 (Espaço $\mathbb{R}^n$) *Seja $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ e $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots \ \eta_n)$. É fácil ver que o $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial com as operações usuais de soma e produto.*

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1 + \cdots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\alpha \cdot x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots, \alpha\xi_n),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.3 (O conjunto das funções contínuas em um intervalo fechado, $C[a, b]$***)*** *Formam um espaço vetorial com as operações usuais definidas como sendo :*

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t),$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1.4 (Subespaço vetorial) *Um Subespaço de um espaço vetorial* X *é um subconjunto não vazio* Y *de* X *tal que todos os* y_1 *e* $y_2 \in Y$ *e todos os escalares* α *e* β *temos* $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$*.*
Um subespaço especial de qualquer espaço vetorial X *é* $Y = 0$*.*

Definição 2.1.5 (Combinação linear) *Uma combinação linear de e vetores* $x_1, \cdots, x_m$ *de um espaço vetorial* X *é uma expressão da forma:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 +, \cdots, \alpha_m x_m,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 \ \cdots, \alpha_m$ *são escalares quaisquer.*

Para qualquer subconjunto não vazio $M \subset X$ o conjunto de todas as combinações lineares de vetores de M é chamado de extensão de M.
Obviamente, este é um subespaço Y de X, e dizemos que Y é estendido ou gerado por M. Vamos agora apresentar dois importantes conceitos relacionados que irão ser utilizados.

Definição 2.1.6 (Dependência e independência linear) *Dependência e independência linear de um conjunto de vetores* M *é definido por meio da equação:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0, \tag{2.1}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 \ \cdots, \alpha_r$ *são escalares quaisquer. Claramente, a equação* (2.1) *vale para* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$*. Se esta for a única r-upla de escalares para os quais* (2.1) *se mantém, o conjunto* M *é considerado linearmente independente.* M *é dito linear se* M *não for linearmente independente, ou seja, se* (2.1) *também for válido para alguma r-upla de escalares, nem todos zero.*

Definição 2.1.7 (Espaços vetoriais de dimensão finita e infinita) *Um espaço vetorial* X *é considerado de dimensão finita se houver um inteiro* n *tal que* X *contém um conjunto linearmente independente de* n *vetores ao passo que qualquer conjunto de*

$n+1$ ou mais vetores de X é linearmente dependente. n é chamado de dimensão de X, escrita $n = dimX$. Por definição, $X = \{0\}$ é finito dimensional e $dimX = 0$. Se X não for finito dimensional, ele é dito ser infinito dimensional.

Observação: *Em análise, os espaços vetoriais de dimensão infinita são de maior interesse do que os de dimensão finita. Por exemplo, $C[a, b]$ e l^2 são dimensão infinita, enquanto $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são n-dimensionais.*

Definição 2.1.8 (Base) *Se $dimX = n$, uma n-upla linearmente independente de vetores de X é chamada de base para X. Se $\{e_1, e_2 \cdots, e_n\}$ é uma base para X, cada $x \in X$ tem uma representação única como uma combinação linear dos vetores da base:*

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Exemplo 2.1.9 (Base) *Uma base para o $\mathbb{R}^n$ é:*

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1),$$

esta base é chamada como base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.10 (Dimensão de um subespaço) *Seja X um espaço vetorial de dimensão n. Então qualquer subespaço apropriado Y de X tem dimensão menor que n.*

Demonstração. Se $n = 0$, então $X = \{0\}$ e não tem subespaço adequado. Por outro lado, se $dimY = \{0\}$, então $Y = \{0\}$, e se $X \neq Y$ implica $dimX \geq 1$.
Claramente,

$$dimY \leq dimX = n.$$

Se $dimY$ fosse n, então Y teria uma base de n elementos, que também seriam uma base para X, pois $dimX = n$, de modo que $X = Y$. Isso mostra que qualquer conjunto linearmente independente de vetores em Y deve ter menos de n elementos e $dimY < n$.

■

2.2 Espaços normados, Espaço de Banach

Definição 2.2.1 (Norma) *Uma norma* $||\cdot||$ *em um espaço vetorial* X *é uma função real em* X *com as seguintes propriedades,*

(i) $||x|| \geq 0, \forall x \in X.$

(ii) $||x|| = 0 \iff x = 0.$

(iii) $||\alpha x|| = |\alpha|\,||x||, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$

Definição 2.2.2 (Espaço Normado, espaço de Banach) *Um espaço normado* X *é um espaço vetorial com uma norma definida nele. Um espaço de Banach é um espaço normado completo (completo na métrica definida pela norma).*
A norma em X *define uma métrica que é da forma:*

$$d(x, y) = ||x - y||,$$

onde x *e* $y \in X$ *e é chamada de métrica induzida pela norma. O espaço normado é denotado por* $(X, ||.||)$ *ou simplesmente por* X*.*

Segue alguns exemplos de espaços Normados de Banach:

Exemplo 2.2.3 (O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$) *Esses espaços são espaços de Banach com norma definida por*

$$||x|| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}.$$

O $\mathbb{R}^n$ *é um espaço completo e produz a métrica*

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}.$$

Demonstração. *Lembramos que a métrica do* $\mathbb{R}^n$ *foi definida no exemplo* (1.1.3)*. Assim consideremos uma sequência de Cauchy* $(x_m) \in \mathbb{R}^n$*, onde* $x_m = (\xi_1^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})$*. Como* (x_m) *é de Cauchy, para cada* $\epsilon > 0$ *existe um* N *tal que:*

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(r)})^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon \tag{2.2}$$

com $(m, r > N)$*. Temos que para* $m, r > N$ *e* $j = 1, \cdots, n$

$$(\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(r)})^2 < \epsilon^2$$

e
$$|\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(r)}| < \epsilon.$$
Isso mostra que para cada j fixo, $(1 \leq j \leq n)$, a sequência $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)} \cdots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. É uma sequência convergente, digamos que $\xi_j^{(m)} \longrightarrow \xi_j$ como $m \longrightarrow \infty$. Usando esses n limites, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$. Claramente $x \in \mathbb{R}^n$. De (2.2) com $r \longrightarrow \infty$,
$$d(x_m, x) \leq \epsilon \tag{2.3}$$
com $m > N$.
Isso mostra que x é o limite de (x_m) e prova a completude de $\mathbb{R}^n$ porque (x_m) era uma sequência de Cauchy arbitrária.

■

Exemplo 2.2.4 (Espaço l^p) *Este espaço foi definido em (1.2.2) É um espaço Banach com norma dada por:*
$$||x|| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}$$
Na verdade, esta norma induz a métrica em (1.2.2):
$$d(x,y) = ||x-y|| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$
A completude já foi mostrada.

2.3 Espaços normados de dimensão finita

Os espaços normados de dimensão finita são mais simples do que dimensão os de infinita. Eles são importantes, uma vez que os espaços e subespaços de dimensão finita desempenham um papel em várias aplicações. Portanto, vale a pena estudar algumas propriedades e resultados desses espaços. Uma fonte de resultados do tipo desejado é o seguinte lema.

Lema 2.3.1 (Combinações lineares) *Seja $(x, \cdots, x_n)$ um conjunto linearmente independente de vetores em um espaço normado X (de qualquer dimensão). Então, há um número $c > 0$ tal que para cada escolha de escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, nós temos:*
$$||\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n|| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) \tag{2.5}$$
onde $c > 0$.
A demonstração deste Lema está disponível em [5].

Teorema 2.3.2 (Completude) *Todo subespaço de dimensão finita Y de um espaço normado X é completo. Em particular, todo espaço normado de dimensão finita é completo.*

Demonstração. Consideramos uma sequência de Cauchy arbitrária (y_m) em Y e mostrando que é convergente em Y; o limite será denotado por y. Seja $dimY = n$ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base qualquer para Y. Então cada y_m tem uma única representação da forma

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

Como (y_m) é uma sequência de Cauchy, para cada $\epsilon > 0$ existe um N tal que $||y_m - y_r|| < \epsilon$ quando $m, r > N$. Pelo **Lema 2.3.1** temos para algum $c > 0$

$$\epsilon > ||y_m - y_r|| = \left|\left|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_r^{(m)}) e_j\right|\right| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_r^{(m)}|,$$

onde $m, r > N$. Dividindo por $c > 0$ temos

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_r^{(m)}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_r^{(m)}| < \frac{\epsilon}{c}$$

com $(m, r > N)$.

Isso mostra que cada uma das n sequências

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$$

com $j = 1 \cdots n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Portanto, converge, seja α_j o limite denotado. Usando esses n limites $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ definindo

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Claramente, $y \in Y$. Além disso,

$$||y_m - y|| = \left|\left|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j\right|\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \, ||e_j||.$$

À direita, $\alpha_j^{(m)} \longrightarrow \alpha_j$. Daí $||y_m - y|| \longrightarrow 0$, isto é, $y_m \longrightarrow y$. Isso mostra que (y_m) é convergente em Y. Como (y_m) é uma sequência de Cauchy em Y, isso prova que Y é completo.

■

Teorema 2.3.3 (Fechamento) *Todo subespaço de dimensão finita Y de um espaço normado X é fechado em X.*

Observe que subespaços de dimensão infinita não precisam ser fechados. Exemplo. Seja $X = C[0,1]$ e $Y = (x_0, x_1, \cdots)$, onde $x_j(t) = t^j$, de modo que Y é o conjunto de todos os polinômios. Y não é fechado em X. Para mais detalhes, ver em [5].

Observação: Outra propriedade interessante de um espaço vetorial de dimensão finita X é que todas as normas em X levam à mesma topologia para X, isto é, os subconjuntos abertos de X são os mesmos, independentemente do escolha de uma norma em X.

Definição 2.3.4 (Normas equivalente) *Uma norma $||\cdot||$ em um espaço vetorial X é equivalente a uma norma $||\cdot||_0$ em X se houver números positivos a e b tais que para todo $x \in X$ temos*

$$a||x||_0 \leq ||x|| \leq b||x||_0. \tag{2.6}$$

Normas equivalentes em X definem a mesma topologia para X.

De fato, isso decorre de (2.6) e do fato de que todo conjunto aberto não vazio é uma união de bolas abertas.

Teorema 2.3.5 (Normas equivalentes) *Em um espaço vetorial X de dimensão finita, qualquer norma $||\cdot||$ é equivalente a qualquer outra norma $|||\cdot||_0$.*

Demonstração. Seja $dimX = n$ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base para X. Então cada $x \in X$ tem uma única representação

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Pelo **Lema 2.3.1** existe uma constante positiva c tal que

$$||x|| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

Por outro lado, a desigualdade triangular fornece

$$||x||_0 \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \, ||e_j||_0 \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|,$$

$k = \max_j ||e_j||_0$.

Assim, $a||x||_0 \leq ||x||$ onde $a\frac{a}{k} > 0$. A outra desigualdade em (2.6) é agora obtida por uma troca de $||\cdot||$ e $||\cdot||_0$ no argumento anterior.

■

Capítulo 3

Lema de Riesz

Neste capítulo mostraremos algumas outras propriedades básicas de espaços normados de dimensão finita e os subespaços que estão relacionados ao conceito de compacidade e demonstraremos o lema de Riesz como principal resultado deste trabalho. Esse lema serve para caracterizar espaços de dimensão finita e infinita, onde a caracterização de espaços de dimensão finita é mais fácil de se trabalhar pois resultados válidos em espaços de dimensão finita nem sempre são válidos em dimensão infinita.

3.1 Biografia de F. Riesz

Figura 3.1: Riesz [3]

Frigyes Riesz foi um Matemático austro-húngaro nascido em Györ, localizada no noroeste da Hungria, pioneiro da análise funcional, obteve diversas aplicações na física-matemática. Filho do médico Ignácz Riesz, também teve um irmão mais jovem que se destacou como matemático: Marcel Riesz (1886-1969). Foi educado em Budapeste e seguiu para Göttingen e Zurique para complementar seus estudos. De volta a Budapeste obteve seu doutorado (1902) com uma dissertação em geometria e dois anos depois foi contratado pela universidade local. Foi indicado para um cátedra em Kolozsvár, Hungria (1911), mas com a assinatura do Tratado de Trianon (1920) a cidade passou para o domínio da Romênia.

Como professor da Universidade da Hungria mudou-se para Szeged (1922), onde junto com o compatriota Alfred Haar (1885-1933), fundou (1922) o Instituto de Matemática János Bolyai, em homenagem ao famoso matemático húngaro nascido em Kolozsvár. Tornou-se editor da recém criada revista do Instituto, a Acta Scientiarum Mathematicarum, que rapidamente tornou-se numa respeitável fonte de publicação de papers em matemática, incluindo os seus próprios como o teorema de Egorov em funções lineares (1922).

Anos depois foi indicado para a cátedra de matemática da Universidade de Budapeste (1945) e foi eleito para a Academia de Ciências da Hungria (1949) quando foi premiado com o Kossuth. Também foi membro da Academia de Ciências de Paris e da Sociedade Real de Fisiografia de Lund, Suécia. Recebeu doutorados honorários das universidades de Szeged, Budapeste e Paris e morreu em Budapeste. Para maiores informações, ver [3].

3.2 Compacidade

Definição 3.2.1 (Espaço Compacto) *Um espaço métrico X é dito ser compacto se toda sequência em X tiver uma subsequência convergente. Um subconjunto M de X é considerado compacto se M for compacto, considerado como um subespaço de X, ou seja, se cada sequência em M tem uma subsequência convergente cujo limite é um elemento de M.*

Lema 3.2.2 (Compacidade) *Um subconjunto compacto M de um espaço métrico é fechado e limitado.*

Demonstração. Pelo *teorema* (1.4.6(a)) temos que para cada $x \in \overline{M}$ há uma sequência (x_n) em M tal que $x_n \to x$. Uma vez que M é compacto, $x \in M$ Portanto, M é fechado porque $x \in \overline{M}$ foi arbitrário. Provamos que M é limitado. Se M for ilimitado, ele contém uma sequência ilimitada (y_n) de modo que $d(y_n, b) > n$, onde b é qualquer elemento fixo. Esta sequência não poderia ter uma subsequência convergente, uma vez que uma subsequência convergente deve ser limitada.

■

Observação O inverso desse lema é, em geral, falso.

Para provar este fato importante, consideramos a sequência (e_n) em l^2, onde $e_n = (\delta_{nj})$ tem o enésimo termo 1 e todos os outros termos 0. Esta sequência é limitada porque $||e_n|| = 1$. Seus termos constituem um conjunto de pontos que é fechado porque não tem ponto de acumulação. Pela mesma razão, esse conjunto de pontos não é compacto.

Teorema 3.2.3 (Compacidade) *Em um espaço normado de dimensão finita X, qualquer subconjunto $M \subset X$ é compacto se e somente se M for fechado e limitado.*

Demonstração. Compacidade implica fechamento e limitação por *Lema* (3.2.1), e provamos o contrário. Seja M fechado e limitado. Tomando $dimX = n$ e $e_1, \cdots, e_n$ uma base para X. Nós consideramos qualquer sequência (x_m) em M. Cada X_m tem uma representação:

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + \cdots + \xi_n^{(m)} e_n.$$

Uma vez que M é limitado, (x_m) também é, digamos, $||x_m|| \leq k$ para todo m. Por *Lema* (2.3.1):

$$k \geq ||x_m|| = ||\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j|| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}|,$$

onde $c > 0$. Portanto, a sequência de números (ξ_j^m) (j fixo) é limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass disponível em [7], tem um ponto de acumulação ξ_j; com $1 \leq j \leq n$ Como na prova do Lema 2.4-1 em [5] nós podemos concluir que (x_m) tem uma subsequência (z_m) que converge para $z = \sum \xi_j e_j$. Uma vez que M é fechado, $z \in M$. Isso mostra que a sequência arbitrária (x_m) em M tem uma subsequência que converge em M. Logo, M é compacto.

■

Nossa discussão mostra o seguinte. Em $\mathbb{R}^n$ (ou em qualquer outro espaço normado de dimensão finita) os subconjuntos compactos são precisamente os subconjuntos fechados e limitados, de modo que esta propriedade (fechamento e fronteira) pode ser usado para definir compactação. No entanto, isso não pode mais ser feito no caso de um espaço normando de dimensão infinita.

3.3 Lema de Riesz

O lema de Riesz nos diz que toda bola unitária fechada em espaços de dimensão infinita nunca será compacta.

Lema 3.3.1 (Riesz) *Seja Y um subconjunto próprio de Z, sendo Z um subespaço de um espaço normado X (de qualquer dimensão), e suponha que Y seja fechado e também um subconjunto de Z. Então para cada número real θ pertencente ao intervalo $(0,1)$, há um $z \in Z$ tal que:*

$$||z|| = 1,$$

$$||z - y|| \geq \theta,$$

para todo $y \in Y$.

Demonstração. Consideramos qualquer $v \in (Z - Y)$ e denotamos sua distância de Y por a, isto é (Figura 3),

$$a = \inf_{y \in Y} ||v - y||.$$

Claramente $a > 0$, pois Y é fechado. Tomando qualquer $\theta \in (0,1)$. Pela definição de ínfimo, há um $y_0 \in Y$ tal que:

(1)

$$a \leq ||v - y_0|| \leq \frac{a}{\theta}.$$

Observe que $\dfrac{a}{\theta} > a$ desde que $0 < \theta < 1$. Seja:

$$z = c(v - y_0),$$

onde,

$$c = \frac{1}{||v - y_0||}.$$

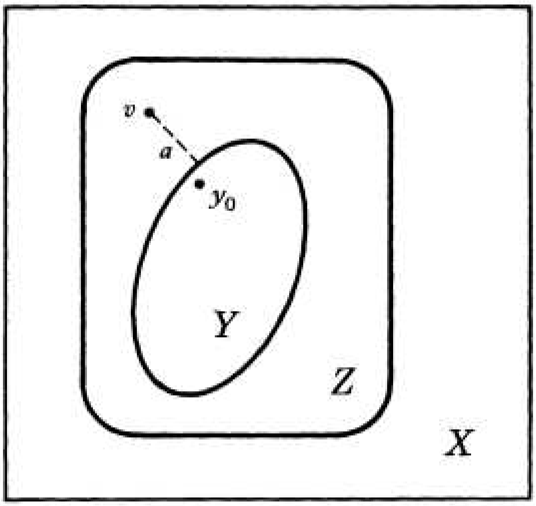

Figura 3.2: Figura 3

Então $||z|| = 1$, e mostramos que $||z - y|| \geq \theta$ para cada $y \in Y$. Temos:

$$\begin{aligned} ||z - y|| &= ||c(v - y_0) - y|| \\ &= c||v - y_0 - c^{-1}y|| \\ &= ||v - y_1||, \end{aligned}$$

assim,

$$y_1 = y_0 + c^{-1}y.$$

A forma de y_1, mostra que $y_1 \in Y$. Portanto, $||v - y_1|| \geq a$, pela definição de a. Escrevendo c e usando (1), obtemos

$$||z - y|| = c||c - y_1|| \geq ca = \frac{a}{||v - y_0||} \geq \frac{a}{\frac{a}{\theta}} = \theta.$$

Visto que $y \in Y$ era arbitrário, isso completa a prova.

■

Em um espaço normado de dimensão finita, a bola unitária fechada é compacta. Esse resultado será mostrado com o auxilio do **Lema de Riesz**.

Teorema 3.3.2 (Dimensão finita) *Se um espaço normado X tem a propriedade de que a bola unitária fechada $M = \{x/||x|| \leq 1\}$ é compacta, então X tem dimensão finita.*

Demonstração. Assumimos que M é compacto, mas $dimX = \infty$, e mostra-se que isso leva a uma contradição. Escolhemos qualquer x_1 com norma 1. Este x_1 gera um subespaço unidimensional X_1 de X, que é fechado e é um subespaço próprio de X já que $dimX = \infty$. Pelo **Lema de Riesz** existe um $x_2 \in X$ com norma 1 tal que

$$||x_2 - x_1|| \geq \theta = \frac{1}{2}.$$

Os elementos x_1, x_2 geram um subespaço fechado bidimensional X_2 de X. Pelo lema de $Riesz$ existe um X_3 de norma 1 tal que para todos os $X \in X_2$ temos

$$||x_3 - x|| \geq \frac{1}{2}.$$

Em particular,

$$||x_3 - x_1|| \geq \frac{1}{2},$$
$$||x_3 - x_2|| \geq \frac{1}{2}.$$

Procedendo por indução, obtemos uma sequência (x_n) de elementos $x_n \in M$ tal que

$$||x_m - x_n|| \geq \frac{1}{2}$$

$(m \neq n)$. Obviamente, (x_n) não pode ter uma subsequência convergente. Isso contradiz a compacidade de M. Portanto, nossa suposição $dimX = \infty$ é falso e $dimX < \infty$.

■

Capítulo 4

Considerações Finais

A Análise Funcional faz uso de muitos conceitos de álgebra linear e pode ser considerada até certo ponto como o estudo de espaços normados de dimensão infinita.

Nosso trabalho visou um importante lema desta área, o lema de Riesz, que caracteriza espaços normados em dimensão infinita, porém, não é trivial trabalhar com espaços de dimensão infinita, uma vez nem sempre um resultado que satisfaz um espaço de dimensão finita prevalece quando esse espaço é de dimensão infinita, como por exemplo o Lema de Riesz , visto que toda bola fechada unitária é compacta, se, e somente se a dimensão for finita, ou seja, em dimensão infinita esse resultado não é válido.

Para futuras pesquisas pretende-se estudar o fato de que as propriedades espectrais dos operadores compactos que atuam em um espaço de Banach são semelhantes ao das matrizes.

Por fim acreditamos que os objetivos foram alcançados e esperamos que este trabalho sirva como fonte de pesquisa acadêmica para trabalhos futuros que envolvam Análise Funcional, em específico o estudo de operadores compactos, espaços de Banach, espaço das sequências, espaço de funções e o Lema de Riesz.

Referências Bibliográficas

[1] Botelho, G., Pellegrino, D., Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. 1a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] Bueno, H. P. *Notas de aula em Equações Diferenciais Ordinárias I*. Minas Gerais, 2001.

[3] Disponível em: < https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riesz/> Acesso em 01 de Fevereiro de 2022.

[4] Domingues H. H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, Ed. Atual, 1982.

[5] Kreyszig, Erwin. *Introductory functional analysis with applications*, John e Wiley Sons, 1978.

[6] Lima, Elon Lages. *Álgebra Linear*. -9 ed.- Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[7] Lima, Elon Lages. *Análise Real Volume 1*. Funções de uma variável/Elon Lages Lima. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[8] Lima, E. L. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. IMPA, CNPq. (1977). Livros Técnicos e Científicos, Editora.

[9] Oliveira, C. R. *Introdução à Análise Funcional*, 3a ed. Rio de Janeiro: Impa, 2010.