UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO

ANDERSON FELIPE DE SOUZA BARBOSA

SOBRE A LINEABILIDADE DO CONJUNTO DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS QUE ATINGEM O MÁXIMO EM UM ÚNICO PONTO

CAMPINA GRANDE - PB
2022

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a lineabilidade do conjunto das funções contínuas que atingem o máximo em um único ponto

por

Anderson Felipe de Souza Barbosa †

sob orientação do

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Sobre a lineabilidade do conjunto das funções contínuas que atingem o máximo em um único ponto

por

Anderson Felipe de Souza Barbosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira
IME - USP

Diogo Diniz P. S. Silva

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva
UAMat - UFCG

Gustavo da Silva Araujo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araujo
DM - UEPB
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

18/Fevereiro/2022

B238s Barbosa, Anderson Felipe de Souza.
Sobre a lineabilidade do conjunto das funções contínuas que atingem o máximo em um único ponto / Anderson Felipe de Souza Barbosa. – Campina Grande, 2022.
88 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.
"Orientação: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo".
Referências.

1. Funções. 2. Lineabilidade. 3. Funções Contínuas. 4. Teorema de Moore. I. Araújo, Gustavo da Silva. II. Título.

CDU 517.5(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MARIA ANTONIA DE SOUSA CRB 15/398

Agradecimentos

Agradeço a Deus, o qual, por sua graça, preparou o caminho, conduziu e cuidou para que eu chegasse até aqui.

À toda minha família, que me incentivou a estudar e seguir na carreira da educação, me apoiando em todo momento.

À Banca Examinadora, pela disponibilidade de avaliarem o meu trabalho e colaborar com a minha formação.

Aos meus professores de graduação da UFRN pela formação que me foi dada e pelo incentivo para o ingresso no mestrado.

Aos amigos do ensino médio, por sempre acreditarem no meu potencial e contribuírem na formação da pessoa que sou hoje.

Aos meus amigos da graduação, por toda ajuda e incentivo nos estudos.

Ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó, à Universidade Federal do Rio Grande do Norte, e às pessoas com quem convivi nesse espaço.

Aos professores, alunos e demais integrantes do Departamento de Matemática da UFCG, pela recepção e colaboração nos estudos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo, pela paciência, dedicação no seu trabalho, disponibilidade em ajudar e pela grande carga de conhecimento que me passou.

Agradeço ainda a todos que de uma forma ou de outra acabaram contribuindo para minha formação profissional e como ser humano.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Dedicatória

Dedico esse trabalho à minha família, que ofereceu força, apoio e motivação em toda trajetória acadêmica.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma prova do problema colocado por Vladimir I. Gurariy, em 2003, que se refere a existência ou não de um espaço vetorial, a menos do vetor nulo, no conjunto $\hat{C}(\mathbb{R})$, das funções reais contínuas definidas sobre $\mathbb{R}$ que atingem o máximo em um único ponto do seu domínio. Nos capítulos iniciais apresentamos todos os conceitos e resultados preliminares para a total compreensão da referida demonstração e, no último capítulo, verificamos, inicialmente, a 2-lineabilidade de $\hat{C}(\mathbb{R})$ e o concluímos provando a não 3-lineabilidade desse conjunto, fazendo uso do Teorema de Moore.

Palavras-chave: Lineabilidade, funções contínuas que atingem o máximo em um único ponto, Teorema de Moore.

Abstract

In this work we present a proof of the problem posed by Vladimir I. Gurariy, in 2003, which refers to the existence or not of a vector space, except for the null vector, in the set $\hat{C}(\mathbb{R})$, of all continuous real functions defined on $\mathbb{R}$ that attain its maximum at a single point of its domain. In the initial chapters, we present all the concepts and preliminary results for the full understanding of that proof. In the last chapter, we initially verify the 2-lineability of $\hat{C}(\mathbb{R})$ and then we conclude it by proving the non 3-lineability of this set, using Moore's Theorem.

Keywords: Lineability, continuous functions that attain their maximum at a single point, Theorem of Moore.

Sumário

Introdução

Espaços vetoriais são estruturas matemáticas elegantes que, à primeira vista, parecem ser "proibidas" para família de objetos "estranhos". Em outras palavras, pode-se acreditar que encontrar grandes espaços vetoriais dentro de tais famílias é bastante improvável. Nos últimos anos, tem aumentado o interesse na busca de estruturas algébricas dentro de determinados subconjuntos de espaços vetoriais. Tais conjuntos são considerados algebricamente grandes se contiverem, exceto eventualmente o vetor nulo, um subespaço vetorial de dimensão infinita. Ao estudo de conjuntos com essa propriedade dá-se o nome de *lineabilidade*.

Um subconjunto M de um espaço vetorial V é dito ser α-lineável (respectivamente, α-lineável ou somente lineável) em V se $M \cup \{0\}$ contém um subespaço Y de X de dimensão finita $\dim(Y) = \alpha$ (respectivamente, de dimensão infinita $\alpha = \dim(Y) \geq \text{card}(\mathbb{N})$).

Dentre os diversos ambientes lineares onde podem ser feitos estudos sobre a lineabilidade de determinados conjuntos, o espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ das funções reais de uma variável real tem sido o foco de diversos pesquisadores, pela riqueza de propriedades que seus elementos podem ter. Um exemplo de um elemento em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ com uma propriedade bastante peculiar foi dado por Lebesgue, que exibiu uma função que é sobrejetiva em todo lugar, no sentido de que, a imagem de um intervalo não trivial por essa função sempre é o conjunto dos números reais. Em [2], os autores provaram que o conjunto $ES(\mathbb{R})$ das funções que são sobrejetivas em todo lugar é $2^{\mathfrak{c}}$-lineável, o que é o melhor resultado possível em termos de dimensão.

Em 1966, V. I. Gurariy [11], provou que a família $\mathcal{ND}[0,1]$ das funções contínuas no intervalo $[0,1]$ que não são deriváveis em nenhum ponto, contém com exceção da função nula, um espaço vetorial de dimensão infinita. É um resultado interessante, já que é difícil obter exemplos concretos de funções desse tipo, como aquela construída por Karl Weierstrass em 1872. A lineabilidade dessa classe de funções foi amplamente estudada, sendo obtidos resultados ainda mais surpreendentes, como foi mostrado por L. Rodríguez-Piazza [22], que o espaço vetorial em $\mathcal{ND}[0,1] \cup \{0\}$ pode ser tomado para ser isometricamente isomorfo a qualquer espaço de Banach separável.

A existência de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ que não são monótonas em nenhum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é um fato bastante conhecido desde o surgimento do exemplo dado por Katznelson e Stromberg em 1974 [13], sendo provado por R. M. Aron, V. I. Gurariy, e J. B. Seoane-Sepúlveda em [2] que o conjunto $\mathcal{DNM}(\mathbb{R})$ dessas funções é $\aleph_0$-lineável. Apesar da $\aleph_0$-lineabilidade de $\mathcal{DNM}(\mathbb{R})$ ser um excelente resultado, outras generalizações foram provadas, como em [10], onde foi verificado que $\mathcal{DNM}(\mathbb{R})$ é na verdade $\mathfrak{c}$-lineável, o que não pode ser melhorado em termos de dimensão, tendo em vista que $\dim(C(\mathbb{R})) = \mathfrak{c}$.

O estudo da existência de estruturas lineares em ambientes *a priori* não lineares teve inicio nos anos 80, sendo usado o termo lineabilidade recentemente, aparecendo pela primeira vez no artigo *On lineability of sets of continuous functions* de Gurariy e Quarta [12]. Neste artigo, no espaço das funções contínuas definidas sobre um intervalo da reta I, os autores focam no conjunto formado pelas funções que atingem o máximo em um único ponto, o qual é denotado por $\hat{C}(I)$. Alguns dos resultados obtidos foram:

- $\hat{C}([0,1])$ é 1-lineável, mas não 2-lineável;
- $\hat{C}([0,2\pi))$ é 2-lineável;
- $\hat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável.

Tomando o subconjunto de $\hat{C}(\mathbb{R})$ formado pelas funções que tendem a zero no infinito e denotado por $\hat{C}_0(\mathbb{R})$, Gurariy e Quarta conseguem verificar a 2-lineabilidade e a não 3-lineabilidade de $\hat{C}_0(\mathbb{R})$. Intuitivamente os conjuntos $\hat{C}([0,1])$ e $\hat{C}_0(\mathbb{R})$ aparentam ser muito maiores que $\mathcal{ND}[0,1]$ e $\mathcal{DNM}(\mathbb{R})$, porém a diferença entre o comportamento linear das operações de soma e produto por escalar de seus elementos são notáveis.

Os autores de [12] fazem uma observação sobre a lineabilidade de $\hat{C}(\mathbb{R})$, afirmando não terem conhecimento sobre a existência de espaços tridimensionais em $\hat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$. Essa observação havia sido feita por Gurariy durante um seminário de Análise não Linear na Kent State University em 2003.

Em [4], L. Bernal-González, H. J. Cabana-Méndez, G. A. Muñoz-Fernández, e J. B. Seoane-Sepúlveda provaram a não 3-lineabilidade do conjunto $\hat{C}(\mathbb{R})$, resolvendo o problema levantado por Gurariy. Neste trabalho, apresentamos de forma detalhada a demonstração dada em [4] para a não 3-lineabilidade de $\hat{C}(\mathbb{R})$, além de fazermos um estudo preliminar sobre todos os conceitos necessários para uma total compreensão da referida prova, na qual os autores fizeram uso de técnicas inovadoras para a área, como, por exemplo, o Teorema de Moore.

No Capítulo 1, fazemos um estudo sobre os números cardinais com a finalidade de estender a noção de dimensão de um espaço vetorial. Usamos fortemente o Lema de Zorn e o Axioma da Escolha em alguns resultados do capítulo, sendo eles importantes para a verificação de que o conjunto dos números cardinais é um conjunto totalmente ordenado que estende naturalmente conjunto dos números naturais.

Na primeira seção do Capítulo 2, estudamos Topologia Geral, verificando sob quais hipóteses um determinado espaço topológico deve estar para que funções sequencialmente contínuas sejam contínuas, além de verificarmos quando que bijeções contínuas serão homeomorfismos. Na segunda seção, fazemos um estudo de Análise Funcional, construindo a topologia fraca em um espaço normado e a topologia fraca-estrela no dual de um espaço normado. Verificamos também alguns critérios e caracterizações para que funções entre espaços topológicos com as topologias fracas sejam contínuas.

Finalmente, no Capítulo 3, definimos o conceito de lineabilidade e demonstramos de duas maneiras distintas a 2-lineabilidade de $\hat{C}(\mathbb{R})$. Na primeira demonstração usamos ferramentas da Análise Real clássica, exibindo explicitamente uma base de um espaço bidimensional contido em $\hat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$. Já na segunda demonstração, usamos ferramentas da Topologia Geral e da Álgebra, sendo um resultado mais abstrato e consequência de uma teoria mais geral. Finalizamos o terceiro capítulo apresentando a demonstração do problema proposto por Gurariy em 2003, que consiste na verificação da lineabilidade maximal de $\hat{C}(\mathbb{R})$.

1 Conceitos Preliminares

A noção de cardinalidade, como é compreendida hoje em dia, foi formulada por Georg Cantor, o criador da teoria dos conjuntos, em 1874-1884. Cantor foi o primeiro a estabelecer a cardinalidade como um instrumento para comparar conjuntos finitos; por exemplo, os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 3, 4\}$ não são iguais, mas têm a mesma cardinalidade: três. Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados iniciais sobre números cardinais ou que deles necessitem, que servirão como base para o desenvolvimento deste trabalho. Este capítulo foi baseado na referência [1].

1.1 Números cardinais

A noção de números cardinais e alguns fatos básicos sobre a aritmética cardinal será de importância crucial para compreender totalmente a maioria das noções nesta dissertação. Os números cardinais são, em certo sentido, uma extensão dos números naturais e a aritmética cardinal é a extensão da base aritmética de números naturais para números cardinais. Vamos começar fornecendo a primeira definição, em que $\mathrm{card}(A)$ representa a cardinalidade do conjunto A.

Definição 1.1. *Sejam A e B conjuntos não vazios, definimos:*

(1) $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$*, se existe uma função injetiva de A em B.*

(2) $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(B)$*, se existe uma sobrejeção de A em B.*

(3) $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$*, se houver alguma bijeção entre A e B.*

(4) $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$*, se* $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ *e não houver bijeção entre A e B.*

(5) $\mathrm{card}(A) > \mathrm{card}(B)$*, se* $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(B)$ *e não houver bijeção entre A e B.*

Segue imediatamente da definição acima que se $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ e $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(C)$, então $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(C)$. Os resultados a seguir mostram que as definições acima estão de acordo com o que é de se esperar, ou seja, terão as mesmas propriedades que a relação de ordem dos números naturais.

Observação 1.1. *Observe que a definição de numero cardinal é apenas uma simbologia que representa a quantidade de elementos de um conjunto. No entanto, logo veremos que o* $\operatorname{card}(A)$ *se comporta como um extensão da noção de número natural e os símbolos* $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ *e* $=$ *vão se comportar naturalmente.*

Para o próximo resultado utilizaremos de uma forma bem sutil o Axioma da Escolha, que afirma: Se $\mathcal{A}$ é uma família de conjuntos não vazios, então existe uma função

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y$$

tal que $f(Y) \in Y$. Algumas equivalências com o Axioma da Escolha são verificadas em [20].

Proposição 1.2. $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$ *se, e somente se,* $\operatorname{card}(B) \geq \operatorname{card}(A)$.

Demonstração. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função injetiva. Fixado $a_0 \in A$ defina $g : B \longrightarrow A$ por $g(x) = f^{-1}(x)$ se $x \in f(A)$ e $g(x) = a_0$ caso contrário. Dessa maneira g é sobrejetiva, pois dado $a \in A$, basta tomar $x = f(a) \in B$ que temos $g(x) = a$.

Reciprocamente, se $g : B \longrightarrow A$ é sobrejetiva, então para cada $a \in A$ podemos tomar um único $b \in g^{-1}(a)$ e definir a função $f : A \longrightarrow B$ por $f(a) = b$, que é injetiva, pois para $a_1 \neq a_2$ temos $g^{-1}(a_1) \cap g^{-1}(a_2) = \varnothing$ e portanto $b_1 \neq b_2$. $\square$

Vimos anteriormente que se $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$ e $\operatorname{card}(B) \leq \operatorname{card}(C)$, então $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(C)$, mas será que esse resultado também é válido com as "desigualdades estritas"? O primeiro resultado principal desta seção conhecido por Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder irá nos ajudar a responder essa pergunta.

Teorema 1.3 (Cantor-Bernstein-Schroeder)**.** *Se* $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$ *e* $\operatorname{card}(A) \geq \operatorname{card}(B)$, *então* $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$.

Demonstração. Considere $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções injetivas. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $h_n : A \longrightarrow A$ por $h_n = (g \circ f)^n$ (composição de n fatores iguais a $g \circ f$). Note que da injetividade de g e f temos que h_n é injetiva para todo $n \in \mathbb{N}$, e para $n = 0$ temos $h_0 = Id_A$.

Consideremos agora o seguinte subconjunto $X \subset A$ definido por

$$X = \{a \in A : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ com } a \in h_n(A) \text{ e } h_n^{-1}(a) \notin g(B)\}.$$

Se $a \notin g(B)$, então tomando $n = 0$ temos que $h_0^{-1}(a) = a \notin g(B)$, ou seja, $a \in X$. Equivalentemente, se $a \notin X$ então $a \in g(B)$.

Por outro lado, para $b \in B$, se tivermos $g(b) \in X$, então $b \in f(A)$ e $f^{-1}(b) \in X$. De fato, se $g(b) \in X$, então existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $h_n^{-1}(g(b)) \notin g(B)$. É claro que neste caso $n \neq 0$ e assim podemos escrever

$$\begin{aligned} h_n^{-1}(g(b)) &= ((g \circ f) \circ h_{n-1})^{-1}(g(b)) = h_{n-1}^{-1}((g \circ f)^{-1}(g(b))) \\ &= h_{n-1}^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(g(b)))) = h_{n-1}^{-1}(f^{-1}(b)). \end{aligned}$$

Logo $h_{n-1}^{-1}(f^{-1}(b)) \notin g(B)$, donde segue que $f^{-1}(b) \in X$.

Definamos agora, $p : A \longrightarrow B$ pondo $p(a) = f(a)$ se $a \in X$ e $p(a) = g^{-1}(a)$ se $a \notin X$. Note que p está bem definida, pois g é injetiva e se $a \notin X$ então $a \in g(B)$, como já observado. Verifiquemos agora que p é uma bijeção. Sejam $a, a' \in A$, temos as seguintes possibilidades: $a, a' \in X$; $a, a' \notin X$; ou $a \in X$, $a' \notin X$. Nos dois primeiros casos a igualdade $p(a) = p(a')$ implica em $a = a'$, devido a injetividade de f e de g. No último caso, se fosse $p(a) = p(a')$, então teríamos $f(a) = g^{-1}(a')$, de onde resultaria que $a = f^{-1}(g^{-1}(a')) = h_1^{-1}(a')$. Porém, como $a \in X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h_n^{-1}(a) \notin g(B)$, ou seja, $h_n^{-1}(h_1^{-1}(a')) = h_{n+1}^{-1}(a') \notin g(B)$, daí concluímos que $a' \in X$, mas isso é um absurdo, portanto deve ser $p(a) \neq p(a')$ e assim temos a injetividade de p.

Por fim, dado $b \in B$ temos duas possibilidades: $g(b) \notin X$ ou $g(b) \in X$. No primeiro caso, temos que $p(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$ e no segundo caso, como foi observado, temos que $f^{-1}(b) \in X$ e daí, $p(f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(b)) = b$. Portanto p também é sobrejetiva e concluímos o resultado. $\square$

Corolário 1.4. *Se* $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$ *e* $\mathrm{card}(B) < \mathrm{card}(C)$*, então* $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(C)$*.*

Demonstração. Não é difícil verificar que $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(C)$, pois de $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$ e $\mathrm{card}(B) < \mathrm{card}(C)$ temos que existem injeções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$. Verifiquemos que não existe bijeção entre A e C. Suponhamos que exista uma bijeção $h : A \longrightarrow C$. Assim $f \circ h^{-1}$ é uma injeção de C em B, ou seja, $\mathrm{card}(C) \leq \mathrm{card}(B)$. Como já temos $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(C)$, pelo Teorema anterior concluímos que $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C)$, o que é uma contradição, pois não existe bijeção entre B e C. $\square$

No decorrer do trabalho, se A for um conjunto, o simbolo $\mathrm{card}(A)$ será denominado número cardinal (ou simplesmente cardinal). Um número cardinal pode ser considerado como uma classe de equivalência de conjuntos, onde dois conjuntos A e B estão relacionados se existe uma bijeção entre eles.

Dizemos que o cardinal $\mathrm{card}(A)$ é:

- finito, se A for finito; caso contrário, é chamado de número cardinal infinito;
- enumerável, se for finito ou $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

Para conjuntos contáveis, podemos ver $\mathrm{card}(A)$ como o número de elementos de A. Em particular, se existir uma bijeção de A para $I_n = \{1, \ldots, n\}$ escrevemos

$$\mathrm{card}(A) = n.$$

Posteriormente iremos utilizar a notação já bem conhecida $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ e $\text{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$, onde dizemos que $\mathbb{N}$ tem cardinalidade aleph zero e $\mathbb{R}$ tem a cardinalidade do contínuo. É conveniente considerarmos a cardinalidade do conjunto vazio como sendo zero.

Comumente denota-se um número cardinal por letras para simplificar a notação. Veremos a seguir que para quaisquer números cardinais α e β, temos $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$, e para isso vamos utilizar o Lema de Zorn, mas antes recordemos alguns conceitos.

Definição 1.5. *Uma ordem parcial $\leq$ em um conjunto P é uma relação que satisfaz as seguintes condições, para todos $a, b, c \in P$:*

(1) $a \leq a$.

(2) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.

(3) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

Definição 1.6. *Uma ondem total em um conjunto P é uma ordem parcial onde $a \leq b$ ou $b \leq a$ para todos $a, b \in P$ (nesse caso dizemos que P é totalmente ordenado).*

Definição 1.7. *Uma cota superior de um subconjunto S do conjunto parcialmente ordenado P, é um elemento $p \in P$ tal que $s \leq p$ para todo $s \in S$.*

Definição 1.8. *Um elemento maximal/máximo de um conjunto parcialmente ordenado P é um elemento $m \in P$ tal que se $m \leq p$ para $p \in P$, então $m = p$.*

Kazimierz Kuratowski provou em 1922 [14] uma versão menos genérica do Lema de Zorn (usando conjuntos parcialmente ordenados pela inclusão e fechados relativamente à união arbitrária de subconjuntos totalmente ordenados). O Lema na sua forma atual (usando qualquer relação de ordem, e usando qualquer subconjunto totalmente ordenado) foi proposto independentemente por Max Zorn em 1935 [23]. Zorn propôs esta formulação como um novo axioma da teoria dos conjuntos, como um substituto do teorema da boa ordenação. Neste artigo, Zorn exibiu algumas aplicações do seu lema na álgebra. Zorn também prometeu publicar um texto que comprovasse a equivalência de seu lema com o Axioma da Escolha. Esse resultado nunca foi publicado por ele, mas em 1939, Bourbaki formulou o enunciado clássico deste lema e mostrou sua equivalência ao Axioma da Escolha.

Lema 1.1 (Lema de Zorn)**.** *Se P é um conjunto parcialmente ordenado e cada subconjunto $S \subset P$ totalmente ordenado possui uma cota superior em P, então o conjunto P possui pelo menos um elemento maximal.*

Teorema 1.9. *Dados números cardinais α e β, então $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$.*

Demonstração. Sejam A e B conjuntos tais que $\text{card}(A) = \alpha$ e $\text{card}(B) = \beta$. Para termos o resultado é suficiente mostrarmos a existência de uma função injetiva f_0 de A para B, ou uma f_1 de B para A. Consideremos o conjunto

$$\Psi = \{(C, D, g) : C \subset A,\ D \subset B \text{ e } g : C \longrightarrow D \text{ uma bijeção}\}.$$

Claramente Ψ é não vazio, pois podemos tomar um conjunto unitário de A, outro de B e exibir uma bijeção trivial. Munindo Ψ da relação

$$(C_1, D_1, g_1) \leq (C_2, D_2, g_2)$$

se $C_1 \subset C_2$, $D_1 \subset D_2$ e $g_2|_{C_1} = g_1$, temos que "$\leq$" é uma relação de ordem parcial em Ψ, pois:

(1) $C \subset C$, $D \subset D$ e $g|_C = g$ para todo $(C, D, g) \in \Psi$, ou seja, $(C, D, g) \leq (C, D, g)$;

(2) Se $(C_1, D_1, g_1) \leq (C_2, D_2, g_2)$ e $(C_2, D_2, g_2) \leq (C_1, D_1, g_1)$, então $C_1 \subset C_2$, $D_1 \subset D_2$ e $C_2 \subset C_1$, $D_2 \subset D_1$, ou seja, $C_1 = C_2$ e $D_1 = D_2$. Como $g_2|_{C_1} = g_1$ e $g_2|_{C_1} = g_2$, pois $C_1 = C_2$, temos que $g_1 = g_2$ e portanto $(C_1, D_1, g_1) = (C_2, D_2, g_2)$;

(3) Se $(C_1, D_1, g_1) \leq (C_2, D_2, g_2)$ e $(C_2, D_2, g_2) \leq (C_3, D_3, g_3)$, então $C_1 \subset C_2 \subset C_3$, $D_1 \subset D_2 \subset D_3$ e $g_3|_{C_2} = g_2$ implica em $g_3|_{C_1} = (g_3|_{C_2})|_{C_1} = g_2|_{C_1} = g_1$, ou seja, $(C_1, D_1, g_1) \leq (C_3, D_3, g_3)$.

Seja $\Phi \subset \Psi$ um subconjunto totalmente ordenado, tome $C = \bigcup_{(C_\lambda, D_\lambda, g_\lambda) \in \Phi} C_\lambda$, $D = \bigcup_{(C_\lambda, D_\lambda, g_\lambda) \in \Phi} D_\lambda$ e $g : C \longrightarrow D$ dada por $g(x) = g_\lambda(x)$ se $x \in C_\lambda$. Note que g está bem definida, pois se $x \in C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2}$, temos que $C_{\lambda_1} \subset C_{\lambda_2}$ ou $C_{\lambda_2} \subset C_{\lambda_1}$, pelo fato de Φ ser totalmente ordenado (pois $(C_{\lambda_1}, D_{\lambda_1}, g_{\lambda_1}) \leq (C_{\lambda_2}, D_{\lambda_2}, g_{\lambda_2})$ ou $(C_{\lambda_2}, D_{\lambda_2}, g_{\lambda_2}) \leq (C_{\lambda_1}, D_{\lambda_1}, g_{\lambda_1})$), digamos que seja $C_{\lambda_1} \subset C_{\lambda_2}$, logo $g_{\lambda_2}|_{C_{\lambda_1}} = g_{\lambda_1}$ e assim $g(x) = g_{\lambda_1}(x) = g_{\lambda_2}(x)$.

Dados $x, y \in C$ tais que $g(x) = g(y)$, temos que $x \in C_{\lambda_1}$ e $y \in C_{\lambda_2}$ para $(C_{\lambda_1}, D_{\lambda_1}, g_{\lambda_1}), (C_{\lambda_2}, D_{\lambda_2}, g_{\lambda_2}) \in \Phi$. Pelo que foi visto anteriormente concluímos da ordem total de Ψ que $x, y \in C_{\lambda_1}$ ou $x, y \in C_{\lambda_2}$. Supondo sem perda de generalidade que $x, y \in C_{\lambda_1}$, temos $g_{\lambda_1}(x) = g(x) = g(y) = g_{\lambda_1}(y)$. Da injetividade de g_{λ_1} temos que $x = y$ e portanto g é injetiva.

Dado $d \in D$, temos que $d \in D_\lambda$ para algum $(C_\lambda, D_\lambda, g_\lambda) \in \Phi$, logo da sobrejetividade de g_λ existe $x \in C_\lambda \subset C$ tal que $g(x) = g_\lambda(x) = d$, o que nos mostra a sobrejetividade de g.

Com isso verificamos que $(C, D, g) \in \Psi$ e que (C, D, g) é uma cota superior para Φ (pelo fato de que $C_\lambda \subset C$, $D_\lambda \subset D$ e $g|_{C_\lambda} = g_\lambda$ para todo $(C_\lambda, D_\lambda, g_\lambda) \in \Phi$). Logo pelo Lema de Zorn existe (A_m, B_m, f) um elemento maximal de Ψ.

Afirmação: Devemos ter $A_m = A$ ou $B_m = B$.

De fato, se fosse $A_m \neq A$ e $B_m \neq B$, poderíamos tomar $a \in A \setminus A_m$, $b \in B \setminus B_m$ e definir a bijeção

$$h : A_m \cup \{a\} \longrightarrow B_m \cup \{b\}$$

dada por $h(x) = f(x)$ se $x \in A_m$ e $h(a) = b$. Assim teríamos $(A_m \cup \{a\}, B_m \cup \{b\}, h) \in \Psi$, $(A_m, B_m, f) \leq (A_m \cup \{a\}, B_m \cup \{b\}, h)$ e $(A_m, B_m, f) \neq (A_m \cup \{a\}, B_m \cup \{b\}, h)$, o que contraria a maximalidade de (A_m, B_m, f).

Se for $A_m = A$, tomamos $f_0(x) = f(x)$, $\forall x \in A$, e temos que f_0 é injetiva. Se for $B_m = B$, consideramos $f_1(x) = f^{-1}(x)$, $\forall x \in B$ que também é injetiva. $\square$

Os dois últimos Teoremas nos mostram que o conjunto dos números cardinais é um conjunto totalmente ordenado com a relação de ordem "$\leq$".

O próximo resultado nos mostra como encontrar um número cardinal maior do que outro já fixado, em particular temos que existem infinitos números cardinais infinitos. A seguir, se A for um conjunto, então $\mathcal{P}(A)$ representará o conjunto de todos subconjuntos de A.

Proposição 1.10. *Dado um conjunto não vazio A, vale* $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$.

Demonstração. Como $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ dada por $f(a) = \{a\}$ é injetiva, temos que $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$. Agora dada uma função qualquer $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, mostraremos que g não pode ser sobrejetiva (consequentemente bijetiva). Para isso considere o conjunto $B = \{a \in A : \ a \notin g(a)\} \in \mathcal{P}(A)$ e suponha que exista $a \in A$ tal que $g(a) = B$. Se $a \in B$, então $a \notin g(a) = B$, o que é um absurdo. Se $a \notin B$, então $a \in g(a) = B$, o que também é um absurdo. Portanto não pode existir $a \in A$ com $g(a) = B$, e assim g não é sobrejetiva, o que é suficiente para mostrar que $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$. $\square$

Um fato interessante mas bem simples de ser mostrado é que todo numero cardinal infinito é "maior ou igual" a $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$, ou seja, a cardinalidade $\aleph_0$ é a menor entre as cardinalidades infinitas.

Proposição 1.11. *Dado um numero cardinal infinito α, então $\alpha \geq \aleph_0$.*

Demonstração. Considere um conjunto infinito A com $\mathrm{card}(A) = \alpha$. Tomando $x_1 \in A$, como o conjunto $A \setminus \{x_1\}$ ainda é infinito, podemos tomar $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$. Supondo já definidos $x_1, \ldots, x_n$, tome $x_{n+1} \in A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Assim, por indução, construímos uma sequência (x_n) em A com termos dois a dois distintos. Logo definindo $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ por $f(n) = x_n$, temos que f é injetiva e portanto $\alpha \geq \aleph_0$. $\square$

1.2 Aritmética cardinal

Como já mencionado na primeira seção, a noção de cardinalidade é, em um sentido muito natural, uma extensão da noção de números naturais. Por isso, um passo natural a ser dado é o de definir operações entre números cardinais.

Definição 1.12. *Sejam α e β números cardinais. Definimos:*

(1) $\alpha + \beta := \mathrm{card}(S)$, *onde* $S = A \cup B$ *com* $\mathrm{card}(A) = \alpha$, $\mathrm{card}(B) = \beta$ *e* $A \cap B = \varnothing$.

(2) $\alpha \cdot \beta := \mathrm{card}(P)$, *onde* $P = A \times B$, *com* $\mathrm{card}(A) = \alpha$ *e* $\mathrm{card}(B) = \beta$.

(3) $\alpha^\beta := \mathrm{card}(C)$, *onde* C *é o conjunto*

$$C = \prod_{i \in I} A_i$$

formado pelas famílias $(x_i)_{i \in I}$*, com* $x_i \in A_i$, $\mathrm{card}(I) = \beta$ *e* $\mathrm{card}(A_i) = \alpha$ *para todo* $i \in I$*. Equivalentemente se* $\mathrm{card}(A) = \alpha$*, então* $\alpha^\beta = \mathrm{card}(A^I)$*, onde*

$$A^I = \{f : \ f \text{ é uma função de } I \text{ em } A\}.$$

Observe que se $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A_1) = \alpha$, $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(B_1) = \beta$ e $A \cap B = A_1 \cap B_1 = \varnothing$, podemos tomar $f : A \longrightarrow A_1$ e $g : B \longrightarrow B_1$ bijeções, e definir $h : A \cup B \longrightarrow A_1 \cup B_1$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Dessa maneira, claramente as condições $A \cap B = A_1 \cap B_1 = \varnothing$ e a bijetividade de f e g, implicam na bijetividade de h. Podemos também definir $h_1 : A \times B \longrightarrow A_1 \times B_1$ por $h_1(x, y) = (f(x), g(y))$ e concluir que h_1 também é bijetiva. Não é tão complexo exibir uma bijeção entre os conjuntos C e A^I da definição acima. Isso nos mostra que a definição das operações dadas são consistentes e não dependem dos conjuntos escolhidos.

A partir da definição das operações dadas acima, para $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$, segue imediatamente que:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Proposição 1.13. *Se* $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$ *são números cardinais, então valem:*

(1) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

(2) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

(3) $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = (\alpha^\gamma) \cdot (\beta^\gamma)$.

(4) $\alpha^{\beta + \gamma} = (\alpha^\beta) \cdot (\alpha^\gamma)$.

(5) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\gamma)^\beta$.

Demonstração. (1) A função $f : (A \times B) \times C \longrightarrow A \times (B \times C)$ dada por $f((a, b), c) = (a, (b, c))$ é uma bijeção.

(2) Note que: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(3) Para $f \in (A \times B)^C$, segue que $f(c) = (f_1(c), f_2(c))$ para todo $c \in C$, ou seja, $f_1 \in A^C$ e $f_2 \in B^C$. Definimos então a bijeção $\varphi : (A \times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$ por $\varphi(f) = (f_1, f_2)$.

(4) Considere $\varphi : A^{(B \cup C)} \longrightarrow (A^B \times A^C)$ onde $\varphi(f) = (f|_B, f|_C)$, e noque que φ é bijetiva.

(5) Dado $\varphi \in (A^B)^C$, definimos $\varphi^* \in A^{B \times C}$ por $\varphi^*(b,c) = \varphi(c)b$. Considere então $* : (A^B)^C \longrightarrow A^{B \times C}$ dada por $*(\varphi) = \varphi^*$. Dada $f \in A^{B \times C}$, tomamos $\varphi \in (A^B)^C$ definida por $\varphi(c)b = f(b,c)$, ou seja, $*(\varphi) = f$ ($*$ é sobrejetiva). Agora se φ_1 e φ_2 em $(A^B)^C$ são tais que $*(\varphi_1) = *(\varphi_2)$, então $\varphi_1(c)b = \varphi_2(c)b$ para todos $b \in B$ e $c \in C$, logo para cada $c \in C$ fixado, temos $\varphi_1(c) = \varphi_2(c)$, consequentemente segue que $\varphi_1 = \varphi_2$ ($*$ é injetiva).

Defina $- : A^{B \times C} \longrightarrow A^{C \times B}$ por $-(\varphi) = \bar{\varphi}$, onde $\bar{\varphi}(c,b) = \varphi(b,c)$. Da função "$*$" concluímos que $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$, assim como $(\alpha^\gamma)^\beta = \alpha^{\gamma \cdot \beta}$. Já a função "$-$" nos mostra que $\alpha^{\beta \cdot \gamma} = \alpha^{\gamma \cdot \beta}$.

$\square$

Além dessas propriedades, as operações definidas acima e a relação $\leq$ se comportam bem, no sentido de que dados números cardinais $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\beta_1 \leq \beta_2$, então:

- $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2$;
- $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$;
- ${\alpha_1}^{\beta_1} \leq {\alpha_2}^{\beta_2}$.

Dados conjuntos A_1, A_2, B_1, B_2 com $A_i \cap B_i = \varnothing$, $\mathrm{card}(A_i) = \alpha_i$, $\mathrm{card}(B_i) = \beta_i$, $i = 1,2$ e $f : A_1 \longrightarrow A_2$, $g : B_1 \longrightarrow B_2$ injeções, para verificar o primeiro item basta definir a injeção $+ : A_1 \cup B_1 \longrightarrow A_2 \cup B_2$ por

$$+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A_1 \\ g(x), & \text{se } x \in B_1. \end{cases}$$

O segundo item se verifica ao definir $\odot : A_1 \times B_1 \longrightarrow A_2 \times B_2$ por $\odot(x,y) = (f(x), g(y))$. Já no terceiro item, definimos $\xi : {A_1}^{B_1} \longrightarrow {A_2}^{B_2}$ que leva a função $\varphi \in {A_1}^{B_1}$ em $\xi(\varphi) \in {A_2}^{B_2}$ dada por $\xi(\varphi)g(b_1) = (f \circ \varphi)(b_1)$, $\forall b_1 \in B_1$ e $\xi(\varphi)b = a$, $\forall\ b \in B_2 \setminus g(B_1)$ (onde $a \in A_2$ é fixo). Dados $\varphi_1, \varphi_2 \in {A_1}^{B_1}$ com $\xi(\varphi_1) = \xi(\varphi_2)$, temos que

$$f(\varphi_1(b)) = \xi(\varphi_1)g(b) = \xi(\varphi_2)g(b) = f(\varphi_2(b)), \forall b \in B_1.$$

Sendo f injetiva, concluímos que $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ para todo $b \in B_1$, ou seja, $\varphi_1 = \varphi_2$ e portanto ξ é injetiva.

Algo interessante sobre a soma de números cardinais, é que a soma de dois deles com pelo menos um sendo infinito, é igual ao "maior" dos dois, no sentido de que se $\beta \leq \alpha$, então $\alpha + \beta = \alpha$. Dados $m \in \mathbb{N}$ e α infinito, sendo A um conjunto com $\mathrm{card}(A) = \alpha$ e $A \cap I_m = \varnothing$ ($I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$), considere uma sequência com elementos distintos

(a_n) em A e defina $f : A \cup I_m \longrightarrow A$ por $f(a) = a$ se $a \in A \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $f(i) = a_i$ para $i \in I_m$ e $f(a_i) = a_{i+m}, \forall i \in \mathbb{N}$, dessa maneira f é bijetiva e podemos concluir que $\alpha + m = \alpha$ nos mostrando o resultado para β finito. Vejamos agora o caso geral.

Teorema 1.14. *Sejam α, β números cardinais, com $\beta \leq \alpha$ e α infinito. Então*

$$\alpha + \beta = \alpha.$$

Demonstração. Temos que $\alpha \leq \alpha + \beta \leq \alpha + \alpha$, assim basta mostrarmos que $\alpha = \alpha + \alpha$ e o resultado segue do Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder.

Suponhamos $\text{card}(A) = \alpha$. Seja Γ o conjunto de todas as bijeções f de $X_f \times \{0,1\}$ para X_f, onde X_f é um subconjunto de A. Consideremos a ordem parcial em Γ definida por

$$f \leq g \Longleftrightarrow \begin{cases} X_f \subset X_g \\ f(x,y) = g(x,y), \forall (x,y) \in X_f \times \{0,1\}. \end{cases}$$

Note que Γ é não vazio, pois sendo A infinito, é possível encontrar $V \subset A$ com $\text{card}(V) = \aleph_0$ e exibir uma bijeção entre $V \times \{0,1\}$ e V.

Seja $F = \{f_\lambda\}_{\lambda \in I}$ um subconjunto totalmente ordenado de Γ. Tome a função $f : \bigcup_{\lambda \in I} X_{f_\lambda} \times \{0,1\} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_{f_\lambda}$ dada por $f(x,i) = f_\lambda(x,i)$ se $x \in X_{f_\lambda}$. Note que f está bem definida, pois se $(x,i) \in X_{f_{\lambda_1}} \times \{0,1\} \cap X_{f_{\lambda_2}} \times \{0,1\}$, temos que $X_{f_{\lambda_1}} \subset X_{f_{\lambda_2}}$ ou $X_{f_{\lambda_2}} \subset X_{f_{\lambda_1}}$, pelo fato de F ser totalmente ordenado (pois $f_{\lambda_1} \leq f_{\lambda_2}$ ou $f_{\lambda_2} \leq f_{\lambda_1}$). Digamos que seja $f_{\lambda_1} \leq f_{\lambda_2}$, logo $f_{\lambda_2}|_{X_{f_{\lambda_1}} \times \{0,1\}} = f_{\lambda_1}$ e assim $f(x,i) = f_{\lambda_1}(x,i) = f_{\lambda_2}(x,i)$.

Dados $(x,i), (y,j) \in X_f \times \{0,1\} = \bigcup_{\lambda \in I} X_{f_\lambda} \times \{0,1\}$ tais que $f(x,i) = f(y,j)$, temos que $x \in X_{f_{\lambda_1}}$ e $y \in X_{f_{\lambda_2}}$ para $\lambda_1, \lambda_2 \in I$. Pelo que foi visto anteriormente concluímos da ordem total de F que $x, y \in X_{f_{\lambda_1}}$ ou $x, y \in X_{f_{\lambda_2}}$. Supondo sem perda de generalidade que $x, y \in X_{f_{\lambda_1}}$, temos $f_{\lambda_1}(x,i) = f(x,i) = f(y,j) = f_{\lambda_1}(y,j)$. Da injetividade de f_{λ_1} concluímos que $(x,i) = (y,j)$ e portanto f é injetiva.

Dado $d \in X_f$, temos que $d \in X_{f_\lambda}$ para algum $\lambda \in I$, logo da sobrejetividade de f_λ existe $(x,i) \in X_{f_\lambda} \times \{0,1\} \subset X_f \times \{0,1\}$ tal que $f(x,i) = f_\lambda(x,i) = d$, o que nos mostra a sobrejetividade de f.

Com isso verificamos que $f \in \Gamma$ e que f é uma cota superior para F (pelo fato de que $X_{f_\lambda} \subset X_f$ e $f|_{X_{f_\lambda} \times \{0,1\}} = f_\lambda$ para todo $\lambda \in I$), logo pelo Lema de Zorn existe um elemento $h : X \times \{0,1\} \longrightarrow X$ que é maximal em Γ. Sendo h bijetiva, temos

$$\begin{aligned} \text{card}(X) &= \text{card}(X \times \{0,1\}) \\ &= \text{card}(X) \cdot 2 \\ &= \text{card}(X) \cdot (1+1) \\ &= \text{card}(X) \cdot 1 + \text{card}(X) \cdot 1 = \text{card}(X) + \text{card}(X). \end{aligned}$$

Afirmação: $\text{card}(A \setminus X) < \infty$.

De fato, pois do contrário conseguiríamos um subconjunto $B \subset A \setminus X$ tal que exista uma bijeção $g : B \times \{0,1\} \longrightarrow B$. Logo a função $h_g : (X \cup B) \times \{0,1\} \longrightarrow X \cup B$ definida por

$$h_g(x,i) = h(x,i) \ se \ x \in X$$
$$h_g(x,i) = g(x,i) \ se \ x \in B$$

seria uma bijeção e, uma vez que $h \leq h_g$ e $h \neq h_g$, teríamos uma contradição. Portanto devemos ter $\text{card}(A \setminus X) < \infty$.

Dessa maneira X é infinito e, pelo que já foi observado antes, temos

$$\text{card}(A) = \text{card}(A \setminus X) + \text{card}(X) = \text{card}(X).$$

Por fim, segue que

$$\alpha = \text{card}(A) = \text{card}(X) = \text{card}(X) + \text{card}(X) = \text{card}(A) + \text{card}(A) = \alpha + \alpha.$$

□

Corolário 1.15. *Se α, β, γ são números cardinais infinitos, com $\alpha + \beta = \gamma$ e $\alpha < \gamma$, então $\beta = \gamma$.*

Demonstração. Temos que $\alpha + \beta = \alpha$ ou $\alpha + \beta = \beta$, mas como $\alpha \neq \gamma$, devemos ter $\gamma = \alpha + \beta = \beta$. □

Em sequência veremos uma versão multiplicativa do último teorema, mas antes façamos um caso particular.

Lema 1.2. $\text{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{card}\,(\mathbb{N})$.

Demonstração. De fato, considerando $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(m,n) = 2^m \cdot 3^n$, temos que f é injetiva pela unicidade da decomposição dos números naturais em produto de fatores primos (Teorema Fundamental da Aritmética), ou seja, $\text{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \leq \text{card}\,(\mathbb{N})$. Por outro lado, $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $g(n) = (n,n)$ é trivialmente injetiva, nos mostrando que $\text{card}\,(\mathbb{N}) \leq \text{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Logo, pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder concluímos o lema. □

Teorema 1.16. *Sejam α, β números cardinais, com $1 \leq \beta \leq \alpha$ e α infinito. Então*

$$\alpha \cdot \beta = \alpha.$$

Demonstração. Desde que $\alpha \leq \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \alpha$, basta verificarmos que $\alpha = \alpha \cdot \alpha$.

Suponhamos $\text{card}(A) = \alpha$ e considere Γ o conjunto de todas as bijeções f de $X_f \times X_f$ para X_f, onde X_f é um subconjunto de A. Observe que Γ é não vazio, pois sendo

α infinito, pela Proposição 1.11 conseguimos um subconjunto $A_1 \subset A$ com $\operatorname{card}(A_1) = \aleph_0$, e como pelo lema anterior temos que $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, então existe uma bijeção entre $A_1 \times A_1$ e A_1.

Consideremos a ordem parcial em Γ definida por

$$f \leq g \Longleftrightarrow \begin{cases} X_f \subset X_g \\ f(x,y) = g(x,y), \forall (x,y) \in X_f \times X_f. \end{cases}$$

Seja $F \subset \Gamma$ um subconjunto totalmente ordenado e considere

$$T : \bigcup_{f \in F} X_f \times \bigcup_{f \in F} X_f \longrightarrow \bigcup_{f \in F} X_f,$$

onde $T(x,y) = f(x,y)$ se $(x,y) \in X_f \times X_f$. Observe que dado (x,y) com $x \in X_f$ e $y \in X_g$, então vale $(x,y) \in X_f \times X_f$ ou $(x,y) \in X_g \times X_g$. A boa definição de T segue da definição da ordem parcial em Γ, além disso T é bijetiva com $f \leq T$, $\forall f \in F$. Assim, podemos usar o Lema de Zorn e encontrar um elemento maximal $h : X \times X \longrightarrow X$ em Γ.

Note que

$$\operatorname{card}(X) \cdot \operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(X), \tag{1.1}$$

e desse modo é suficiente verificarmos que $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(X)$.

Como $X \subset A$, temos $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(A)$. Vejamos que não é possível $\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(A)$. Suponhamos que seja $\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(A)$, então do último Corolário temos que $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A \setminus X)$, pois vale

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(X) + \operatorname{card}(A \setminus X).$$

Tomemos agora $Y \subset A \setminus X$ um subconjunto com $\operatorname{card}(Y) = \operatorname{card}(X)$. Tal Y existe pelo fato de $X \subset A$ e $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A \setminus X)$.

De (1.1) temos que $\operatorname{card}(X)$ é não finita e

$$\operatorname{card}(X \times Y) = \operatorname{card}(X) \cdot \operatorname{card}(Y) = \operatorname{card}(X) \cdot \operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(X).$$

Além disso,

$$\operatorname{card}(Y \times Y) = \operatorname{card}(Y) \cdot \operatorname{card}(Y) = \operatorname{card}(X) \cdot \operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y).$$

Como $X \times Y$, $Y \times X$ e $Y \times Y$ são dois a dois disjuntos com a mesma cardinalidade, considerando

$$D = (X \times Y) \cup (Y \times X) \cup (Y \times Y),$$

pelo Teorema 1.14 temos que $\operatorname{card}(D) = \operatorname{card}(Y)$.

Seja $M : D \longrightarrow Y$ uma bijeção e defina $R : (X \times X) \cup D \longrightarrow (X \cup Y)$ por

$$R(x) = \begin{cases} M(x), & se\ x \in D \\ h(x), & se\ x \in X \times X. \end{cases}$$

Desde que

$$(X \times X) \cup D = (X \cup Y) \times (X \cup Y),$$

segue que $R \in \Gamma$ e $h < R$, o que é uma contradição. Concluímos então que $\text{card}(A) = \text{card}(X)$ e de (1.1) temos o que queríamos. $\square$

Corolário 1.17. *Se α é um número cardinal infinito, então $\alpha \cdot \aleph_0 = \alpha$.*

Proposição 1.18. *A seguinte igualdade é verdadeira:* $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = \text{card}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Considere $g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(f) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \cdot 10^{-i}$. Dados $f_1, f_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $f_1 \neq f_2$, tome $m = \min\{n \in \mathbb{N} : \ f_1(n) \neq f_2(n)\}$. Como sempre é válida a desigualdade $\left|\sum_{i=m+1}^{\infty}(f_2(i) - f_1(i)) \cdot 10^{-i}\right| \leq \frac{10^{-m}}{9}$, segue que

$$\begin{aligned} 0 < 10^{-m} - \frac{10^{-m}}{9} &= |f_1(m) - f_2(m)| \cdot 10^{-m} - \frac{10^{-m}}{9} \\ &\leq |f_1(m) - f_2(m)| \cdot 10^{-m} - \left|\sum_{i=m+1}^{\infty} (f_2(i) - f_1(i)) \cdot 10^{-i}\right| \\ &\leq \left|(f_1(m) - f_2(m)) \cdot 10^{-m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} (f_1(i) - f_2(i)) \cdot 10^{-i}\right| \\ &= \left|\sum_{i=m}^{\infty}(f_1(i) - f_2(i)) \cdot 10^{-i}\right| = |g(f_1) - g(f_2)|, \end{aligned}$$

ou seja, $g(f_1) \neq g(f_2)$ nos mostrando a injetividade de g ($2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$).

Tome agora $h : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Q}}$, onde $h(x) = h_x$ e

$$h_x(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < x \\ 1, & \text{se } x \leq y \end{cases}.$$

Segue que para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, temos para todo $y \in (x_1, x_2) \cap \mathbb{Q}$ que

$$h_{x_1}(y) = 1 \neq 0 = h_{x_2}(y),$$

ou seja, $h(x_1) \neq h(x_2)$ e h também é injetiva ($\mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0}$).

Portanto concluímos do Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder que $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. $\square$

Lema 1.3. *Se α é um cardinal infinito e β é um número cardinal tal que $2 \leq \beta \leq 2^{\alpha}$, então $\beta^{\alpha} = 2^{\alpha}$.*

Demonstração. De fato, temos

$$2^\alpha \leq \beta^\alpha \leq (2^\alpha)^\alpha = 2^{\alpha\cdot\alpha} = 2^\alpha.$$

$\square$

Proposição 1.19. $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Demonstração. Como vale $2 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, pelo Lema anterior temos

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

$\square$

A seguir veremos uma generalização do princípio das gavetas para os números cardinais infinitos que posteriormente será de grande utilidade.

Teorema 1.20. *Se S, T são conjuntos tais que S é infinito,* $\mathrm{card}(T) < \mathrm{card}(S)$ *e $f : S \longrightarrow T$ é uma função qualquer, então existe $t \in T$ de modo que $f^{-1}(t)$ é infinito.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que seja $f^{-1}(t)$ finito para todo $t \in T$. É claro que nesse caso devemos ter que T é infinito, pois do contrário teríamos

$$\mathrm{card}(S) = \mathrm{card}\left(\bigcup_{t\in T} f^{-1}(t)\right) = \sum_{t\in T} \mathrm{card}(f^{-1}(t)) < \infty,$$

o que é uma contradição.

Para cada t em $f(S)$, seja $f^{-1}(t) = \{s_{t,1}, \ldots, s_{t,n_t}\}$ e

$$C_{t,n} = \{s_{t,n}\},\ \textit{se } n \leq n_t$$
$$C_{t,n} = \varnothing,\ \textit{se } n > n_t.$$

Temos então

$$S = \bigcup_{t\in T} f^{-1}(t) = \bigcup_{(t,n)\in T\times\mathbb{N}} C_{t,n}.$$

Uma vez os $C_{t,n}$ são dois a dois disjuntos e cada $C_{t,n}$ não tem mais que um elemento, a função

$$\Psi : \bigcup_{(t,n)\in T\times\mathbb{N}} C_{t,n} \longrightarrow T \times \mathbb{N}$$

definida por $\Psi(s_{t,n}) = (t, n)$ é injetiva. Das Definições 1.1 e 1.12, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(S) &= \operatorname{card}\left(\bigcup_{(t,n)\in T\times\mathbb{N}} C_{t,n}\right) \\
&\leq \operatorname{card}(T \times \mathbb{N}) \\
&= \operatorname{card}(T) \cdot \aleph_0 = \operatorname{card}(T),
\end{aligned}$$

mas isso não pode ocorrer, pois já temos por hipótese que $\operatorname{card}(T) < \operatorname{card}(S)$. A contradição ocorreu ao supormos que $f^{-1}(t)$ era finito para todo $t \in T$, portanto deve existir $t \in T$ tal que $f^{-1}(t)$ é infinito. $\square$

1.3 Resultados de Álgebra Linear

Nesta seção veremos alguns resultados da Álgebra Linear que fazem uso da noção de cardinalidade, mais especificamente iremos verificar que uma base de um espaço vetorial tem uma cardinalidade fixa, sendo ela finita ou não. O intuito é apresentar algumas ferramentas para que o conceito de lineabilidade que será apresentado no terceiro capítulo seja consistente. Aqui abordamos assuntos da Álgebra Linear, Álgebra Abstrata e Espaços Métricos, utilizando as ferramenta já obtidas sobre números cardinais a fim de generalizar a noção de dimensão de um espaço vetorial. Certas definições serão omitidas, porém no decorrer da seção recordamos alguns conceitos importantes dessas disciplinas. As referências [15] e [9] podem ser uteis para um melhor esclarecimento das noções utilizadas nesta seção.

Definição 1.21. *Um conjunto não vazio G é um grupo se houver uma operação*

$$\star : G \times G \longrightarrow G,$$

de modo que:

(1) Dados $a, b, c \in G$, então $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.

(2) Existe um elemento $e \in G$ tal que $a \star e = e \star a = a$, $\forall\ a \in G$.

(3) Para todo $a \in G$ existe um elemento $b \in G$ tal que $a \star b = b \star a = e$.

Quando a operação $\star$ for comutativa, chamamos G de grupo comutativo.

O conjunto dos números inteiros com a adição é um exemplo simples de grupo (comutativo). Para a noção de anel duas operações são necessárias.

Definição 1.22. *Um conjunto não vazio A é um anel se houver duas operações definidas em A, digamos $+ : A \times A \longrightarrow A$ e $\cdot : A \times A \longrightarrow A$, com:*

(1) $(A, +)$ *é um grupo comutativo.*

(2) Se $a, b, c \in A$, *então* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(3) Se $a, b, c \in A$, *então* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

(4) $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$, *para quaisquer* $a, b, c \in A$.

Se, além disso, existir um elemento $1 \in A$ *com* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *para todos* $a \in A$ *dizemos que* A *é um anel com unidade (ou um anel unitário, ou anel com identidade). Se a operação* $\cdot$ *for comutativa,* A *é chamado de anel comutativo.*

Um anel comutativo $\mathbb{K}$ com unidade e tal que, para cada elemento $a \in \mathbb{K}$ diferente de zero (o elemento do item *(2)* da Definição 1.21, normalmente denotado por 0), existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{K}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$, é chamado de corpo. Os elementos em um corpo são geralmente chamados de escalares.

O conjunto de todos os polinômios com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$ munido com as operações usuais é um exemplo clássico de anel e $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos clássicos de corpos.

Definição 1.23. *Um conjunto* V *é chamado de espaço vetorial sobre um corpo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, *ou, simplesmente espaço vetorial (quando o corpo estiver subentendido), se existem operações*

$$\oplus : V \times V \longrightarrow V \quad e \quad \bullet : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V,$$

chamadas respectivamente de soma de vetores e produto por escalar, tais que para $u, v \in V$ *e* $a, b \in \mathbb{K}$, *valem:*

(1) $(V, \oplus)$ *é um grupo comutativo.*

(2) $a \bullet (b \bullet v) = (a \cdot b) \bullet v$.

(3) $1 \bullet v = v$, *onde* 1 *é a unidade de* $\mathbb{K}$.

(4) $a \bullet (u \oplus v) = (a \bullet u) \oplus (a \bullet v)$.

(5) $(a + b) \bullet v = (a \bullet v) \oplus (b \bullet v)$.

Um subconjunto W de um espaço vetorial $(V, \oplus, \bullet, \mathbb{K})$ é dito um *subespaço vetorial* se $u \oplus v \in W$ e $a \bullet v \in W$, para quaisquer $u, v \in W$ e $a \in \mathbb{K}$. Verifica-se sem muita dificuldade que o subespaço W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações herdadas de V.

Chamamos os elementos de um espaço vetorial de vetores, e denotamos as operações de soma e produto por escalar do espaço com a mesma notação da soma e do produto do corpo, cabendo o leitor identificá-las e distingui-las.

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e S um subconjunto de V. Um vetor $v \in V$ é uma combinação linear dos elementos de S se existirem $v_1, \ldots, v_r \in S$ e escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ de modo que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r.$$

O subconjunto S é chamado *linearmente independente*, se para todo inteiro positivo n e todos elementos $v_1, \ldots, v_n \in S$ dois a dois distintos implicarem em $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são escalares com $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. As vezes, dizemos apenas que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes em vez de dizer que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.

O subespaço de V consistindo de todas as combinações lineares possíveis de elementos de um dado subconjunto S de V é denotado por $\mathrm{span}(S)$ e chamado de *espaço gerado por S*. Dizemos que S gera V se

$$\mathrm{span}(S) = V.$$

Uma *base de Hamel* de um espaço vetorial V é um conjunto $\mathcal{B}$ tal que $\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$ e $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Usando o Lema de Zorn é possível provar que todo espaço vetorial possui uma base de Hamel, e também que todo conjunto L.I. (linearmente independente) está contido em alguma base de Hamel. Dizemos que V é dimensionalmente finito (ou de dimensão finita) quando existe uma base de Hamel $\mathcal{B}$ em V, com $\mathrm{card}(\mathcal{B}) < \infty$. Neste caso é bem conhecido que quaisquer duas bases tem a mesma cardinalidade. Então no caso de V ser dimensionalmente finito fica bem definida a noção de dimensão dada por

$$\dim(V) = \mathrm{card}(\mathcal{B}), \tag{1.2}$$

onde $\mathcal{B}$ é qualquer base de V. Se V não é dimensionalmente finito, dizemos que V é dimensionalmente infinito (ou de dimensão infinita).

Iremos verificar que a definição dada em (1.2) ainda faz sentido no caso de V ser um espaço dimensionalmente infinito, ou seja, dadas duas base de Hamel de V, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, então $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_2)$. Vejamos inicialmente o seguinte lema que será de grande ajuda. Para qualquer conjunto S, considere o seguinte subconjunto de $\mathcal{P}(S)$:

$$F(S) = \{A \subset S : \ \mathrm{card}(A) < \infty\}.$$

Lema 1.4. *Dado um conjunto infinito S, então*

$$\mathrm{card}(F(S)) = \mathrm{card}(S).$$

Demonstração. É claro que existe uma função injetiva de S para $F(S)$, logo é suficiente verificarmos apenas que $\text{card}(F(S)) \leq \text{card}(S)$.

Para $n \geq 1$, considere $S^n = S \times \cdots \times S$ (n vezes). Dado $n \in \mathbb{N}$ defina

$$f_n : S^n \longrightarrow F(S)$$

por $f_n(s_1, \ldots, s_n) = \{s_1, \ldots, s_n\}$, e a sobrejeção

$$f : \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n \longrightarrow F(S)$$

dada por $f(s_1, \ldots, s_n) = f_n(s_1, \ldots, s_n)$, ou seja, temos $\text{card}(F(S)) \leq \text{card}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n\right)$. Note que pela Definição 1.12 e pelo Teorema 1.16 temos

$$\text{card}(S^n) = \text{card}(S)^n = \text{card}(S), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomemos então uma bijeção $g_n : S^n \longrightarrow S$ para cada n natural. A função $\varphi : \mathbb{N} \times S \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$ dada por $\varphi(n, s) = (s, \ldots, s)$ (n vezes) e a função $\phi : \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n \longrightarrow \mathbb{N} \times S$ definida por $\phi(s_1, \ldots, s_n) = (n, g_n(s_1, \ldots, s_n))$ são claramente injetivas, nos mostrando que vale

$$\text{card}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n\right) = \text{card}(\mathbb{N} \times S).$$

Dessa maneira chegamos em

$$\begin{aligned} \text{card}(F(S)) &\leq \text{card}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n\right) \\ &= \aleph_0 \cdot \text{card}(S) \\ &= \text{card}(S), \end{aligned}$$

e assim temos o resultado pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder. □

Teorema 1.24. *Quaisquer duas bases de Hamel de um espaço vetorial V tem a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Vejamos apenas o caso em que V é dimensionalmente infinito. Usando o Teorema Cantor-Bernstein-Schroeder é suficiente mostrarmos que se A é L.I. e $\mathcal{B}$ é uma base, então $\text{card}(A) \leq \text{card}(\mathcal{B})$.

Sendo $\text{span}(\mathcal{B}) = V$ e V dimensionalmente infinito, então é nítido que $\mathcal{B}$ é infinito (pois do contrário teríamos que V seria dimensionalmente finito). Para cada $x \in A$ existe um único subconjunto finito $Z_x \subset \mathcal{B}$ tal que

$$x = \sum_{z \in Z_x} \lambda_z z,$$

onde $\lambda_z \neq 0$ para todo $z \in Z_x$.

Definimos então

$$f : A \longrightarrow F(\mathcal{B})$$

por $f(x) = Z_x$. Como $\mathcal{B}$ é infinito, se tivéssemos $\text{card}(A) > \text{card}(\mathcal{B})$, pelo Lema anterior teríamos $\text{card}(A) > \text{card}(F(\mathcal{B}))$ e assim, pelo Teorema 1.20 existiria $Z \in F(\mathcal{B})$ com $f^{-1}(Z)$ infinito. Mas

$$\text{span}(f^{-1}(Z)) \subset \text{span}(Z),$$

e $\text{span}(Z)$ é dimensionalmente finito, o que é uma contradição. Portanto devemos ter $\text{card}(A) \leq \text{card}(\mathcal{B})$. □

Suponha que X seja um conjunto não vazio. Uma aplicação $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ é dita ser uma *métrica* ou *distância* em X, se satisfaz as seguintes propriedade para todos $x, y, z \in X$:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Se X for dotado de uma métrica d, então X (ou mais corretamente, o par (X, d)) é chamado de *espaço métrico*. Dados $x \in X$ e $r > 0$, definimos os conjuntos $B(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) < r\}$ e $B[x, r] = \{y \in X : \ d(x, y) \leq r\}$, que são denominados bola aberta centrada em x de raio r e bola fechada centrada em x de raio r respectivamente.

Não é tão complicado verificar que em um espaço normado $(E, \| \cdot \|)$, se tomarmos a métrica dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, temos a seguinte relação

$$\overline{B}(x, r) := \overline{B(x, r)} = B[x, r],$$

para quaisquer $x \in E$ e $r > 0$.

Um subconjunto A de um espaço métrico X é dito ser aberto, se para cada $a \in A$ existir $\epsilon > 0$, de modo que $B(a, \epsilon) \subset A$. Um subconjunto $K \subset X$ é dito ser denso em X, se para todos $x \in X$ e $r > 0$ tivermos $K \cap B(x, r) \neq \varnothing$.

Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço métrico (X, d) é chamada de *sequência de Cauchy*, se para $\epsilon > 0$ dado, for possível encontrar $N > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todos $n, m \geq N$. O espaço métrico (X, d) é dito ser *completo*, se toda sequência de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X for convergente em X, no sentido de que, existe $x \in X$ tal que para cada $\epsilon > 0$, conseguimos $N > 0$ de modo que $d(x_n, x) < \epsilon$ para $n \geq N$.

Agora, afirmamos e provamos o *Teorema da Categoria de Baire*, que afirma que intersecções contáveis de conjuntos abertos densos dentro de um espaço métrico completo são ainda densos. Este teorema terá uma papel importante para a prova do resultado principal deste trabalho.

Teorema 1.25. *Em um espaço métrico completo X, a interseção enumerável de conjuntos abertos densos ainda é denso em X.*

Demonstração. Seja $\{A_1, A_2, \ldots\}$ uma família de conjuntos abertos densos em X. Dado B um aberto não vazio de X, devemos mostrar que

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B \neq \varnothing.$$

Uma vez que $A_1 \cap B \neq \varnothing$ é aberto, podemos encontrar $x_1 \in B \cap A_1$ e $r_1 > 0$ tal que $B[x_1, r_1] \subset B \cap A_1$. Escolhamos agora $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap A_2$ e $r_2 > 0$ verificando $B[x_2, r_2] \subset B(x_1, r_1) \cap A_2$ com $r_2 < \frac{r_1}{2}$. Repetindo esse processo, encontramos duas sequencias (x_n) e (r_n) onde

$$B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset B(x_n, r_n) \cap A_{n+1},\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}.$$

Note que $0 < r_{n+1} < \frac{r_1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo temos que $r_n \longrightarrow 0$. Além disso para $m > n$ temos que $x_m \in B(x_n, r_n)$, ou seja,

$$d(x_m, x_n) < r_n,$$

nos mostrando que (x_n) é de Cauchy. Desde que (X, d) é completo, existe $y \in X$ onde $x_n \longrightarrow y$. Como $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ para todos $n, p \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{p\to\infty} x_{n+p} = \lim_{p\to\infty} x_p = y$$

para cada n fixado, concluímos que

$$y \in B[x_n, r_n] \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

e também que $y \in B[x_1, r_1] \subset B$. Portanto

$$y \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B$$

e temos o resultado. □

Observação 1.2. *Uma afirmação equivalente ao resultado visto acima é: Em um espaço métrico completo, o interior de uma união enumerável de conjuntos fechados, cada um dos quais tem interior vazio, também é vazio.*

Um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ é denominado *espaço de Banach*, quando o espaço métrico (E, d) com a métrica proveniente da norma $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in E$, for completo.

O próximo resultado nos mostra que os espaços de Banach de dimensão infinita tem dimensão maior ou igual a $\mathfrak{c}$. A prova desse resultado não depende da Hipótese do Continuum, mas por simplicidade, na prova a seguir será considerada a hipótese como verdadeira (A Hipótese do Continuum afirma que não existe conjunto H tal que $\aleph_0 < \text{card}(H) < \mathfrak{c}$). O leitor interessado em saber mais sobre a Hipótese do Continuum pode consultar [3].

Proposição 1.26. *Se V é um espaço de Banach dimensionalmente infinito, então $\dim(V) \geq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Suponha que exista V um espaço de Banach com $B = \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \subset V$ uma base de Hamel. Temos que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde F_n é o subespaço gerado pelos vetores $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Note que cada F_n é fechado, pois os mesmos tem dimensão finita. Assim, pelo Teorema da Categoria de Baire, existe um inteiro positivo n_0 tal que F_{n_0} tem interior não vazio, o que é uma contradição, pois todo subespaço próprio de um espaço vetorial tem interior vazio. Portanto, se assumirmos a Hipótese do Continuum, concluímos que $\dim(V) \geq \mathfrak{c}$. □

Corolário 1.27. *O espaço vetorial*

$$c_{00} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ \text{card}(\{x_n : \ x_n \neq 0\}) < \infty\},$$

munido de qualquer norma não é Banach.

Demonstração. Basta notar que $\mathcal{B} = \{(\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}} \in c_{00} : \ i \in \mathbb{N}\}$, onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e zero caso contrário, é uma base de Hamel com $\text{card}(\mathcal{B}) = \aleph_0 < \mathfrak{c}$. □

2 Topologia Geral e Análise Funcional

O nascimento da Topologia Geral ocorreu durante a tentativa de reformular o Cálculo Diferencial e Integral, baseando-se em conceitos mais formais. O que antes era entendido através de noções intuitivas baseadas na Geometria Euclidiana e na Mecânica (Newton e Leibniz), começou a ser formulado dentro da linguagem matemática: definição de limite de sequências (D'Alembert e Cauchy), formulação dos testes de convergência (D'Alembert, Cauchy, Gauss, Weierstrass), a definição precisa de continuidade de funções (Bolzano e Weierstrass), e a construção de uma teoria formal sobre os números reais (Richard Dedekind, Méray, Cantor e Cauchy). Aqui veremos apenas os conceitos suficientes que serão usados no último capítulo deste trabalho. As principais referências utilizadas neste capítulo são [16], [6] e [1].

2.1 Espaços topológicos

Definição 2.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção τ de subconjuntos de X é chamada topologia sobre X se satisfaz as seguintes condições:*

(1) $\varnothing, X \in \tau$.

(2) Se $A, B \in \tau$, *então* $A \cap B \in \tau$.

(3) Se $(A_i)_{i \in L}$ *é uma família qualquer de elementos de* τ, *então* $\bigcup_{i \in L} A_i \in \tau$.

Nas condições da definição acima, dizemos que o par (X, τ) é um *espaço topológico* e os elementos de τ são chamados de abertos. Quando a topologia já está subtendida, escrevemos apenas X como espaço topológico.

Observação 2.1. *É equivalente, em vez de (2), afirmar que a interseção finita de elementos de τ ainda pertence a τ.*

Exemplo 2.2. *Para $X \neq \varnothing$, a coleção $\{\varnothing, X\}$ é uma topologia sobre X que é conhecida por topologia caótica.*

Exemplo 2.3. *Dado $X \neq \varnothing$, o conjunto das partes de $\mathcal{P}(X)$ define uma topologia sobre X, a qual chamamos de topologia discreta.*

Exemplo 2.4. *Seja* (M, d) *um espaço métrico. A coleção dos conjuntos abertos de* M *define uma topologia sobre* M*.*

Exemplo 2.5. *Seja* X *um conjunto infinito. A coleção*

$$\tau = \{\varnothing\} \cup \{A \subset X : \ A^{\complement} = X \setminus A \text{ é finito}\}$$

define uma topologia sobre X*, a qual chamamos de Topologia Cofinita sobre* X*. Também, no caso em que* X *é não enumerável, verifica-se sem muita dificuldade que*

$$\tau = \{\varnothing\} \cup \{A \subset X : \ A^{\complement} = X \setminus A \text{ é enumerável}\}$$

é uma topologia sobre X*, denominada de Topologia Coenumerável.*

Exemplo 2.6. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma classe que subconjuntos de* X *tal que*

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$.

(2) Se $A, B \in \mathcal{A}$*, então* $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Nessas condições, a coleção τ *de todas as reuniões possíveis de elementos de* $\mathcal{A}$ *é uma topologia sobre* X*.*

Exemplo 2.7. *Sejam* (X_1, τ_1) *e* (X_2, τ_2) *espaços topológicos. A coleção* $\mathcal{A} = \{G \times H : G \in \tau_1 \text{ e } H \in \tau_2\}$ *satisfaz as condições do exemplo anterior para* $X = X_1 \times X_2$*. Logo, a coleção das uniões de elementos de* $\mathcal{A}$ *é uma topologia sobre* $X = X_1 \times X_2$ *à qual denominamos de topologia produto.*

Proposição 2.8. *Seja* $\{\tau_i\}_{i \in I}$ *uma família de topologias em* X*. Então a interseção* $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ *também é uma topologia em* X*.*

Demonstração. Imediato da definição de topologia. □

Definição 2.9. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Dado* $S \subset X$ *um subconjunto não vazio, a coleção* $\tau_S = \{A \cap S : \ A \in \tau\}$ *é uma topologia sobre* S *à qual é chamada de topologia relativa a* S *por* τ*. O par* (S, τ_S) *é dito subespaço topológico de* (X, τ)*.*

Definição 2.10. *Dado um espaço topológico* (X, τ)*, o interior de um subconjunto* $A \subset X$ *que se indica por* $\operatorname{int}(A)$ *ou* A^0*, é a união de todos abertos contidos em* A*, isto é,* $\operatorname{int}(A)$ *é o maior aberto (no sentido da inclusão) contido em* A*.*

Segue da definição acima as seguintes observações.

Observação 2.2. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico e* A, B *subconjuntos de* X*, então:*

(1) $p \in \operatorname{int}(A)$ *se, e somente se, existe* $G \in \tau$ *tal que* $p \in G \subset A$.

(2) $\operatorname{int}(A) = A$ *se, e somente se,* A *é um aberto.*

(3) $\mathrm{int}(A) \subset A$.

(4) Se $A \subset B$*, então* $\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(B)$.

(5) $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$.

(6) $\mathrm{int}(X) = X$.

Proposição 2.11. *Se* (X, τ) *é um espaço topológico e* A, B *subconjuntos de* X*, então vale*

$$\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B).$$

Demonstração. Pelo item *(4)* da observação anterior temos $\mathrm{int}(A \cap B) \subset \mathrm{int}(A)$ e $\mathrm{int}(A \cap B) \subset \mathrm{int}(B)$, donde concluímos a inclusão $\mathrm{int}(A \cap B) \subset \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Por outro lado temos que $\mathrm{int}(A) \subset A$ e $\mathrm{int}(B) \subset B$, ou seja, $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \subset A \cap B$, agora como $int(A) \cap int(B)$ é um aberto, chegamos em $int(A) \cap int(B) \subset int(A \cap B)$. □

Definição 2.12. *Dizemos que* $F \subset X$ *é um conjunto fechado se* $F^{\complement} = X \setminus F$ *é aberto.*

Sendo $\mathcal{F}$ a coleção de todos os fechados de um espaço topológico, valem as seguintes propriedades:

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$;

(2) Se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, então $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$;

(3) Se $(F_i)_{i \in L}$ for uma coleção de fechados, então $\bigcap_{i \in L} F_i \in \mathcal{F}$.

Definição 2.13. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico. O fecho de um subconjunto* $A \subset X$ *denotado por* $\overline{A}$*, é a interseção de todos os fechados que contém* A*.*

Observação 2.3. *A partir da definição acima se verifica facilmente que:*

(1) $\overline{A}$ *é o menor fechado que contém* A*;*

(2) $A \subset \overline{A}$*;*

(3) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ e $\overline{X} = X$.

Proposição 2.14. *Valem os seguintes itens:*

(1) Se $A \subset B$*, então* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Demonstração. *(1)* Do item segundo item da observação anterior temos $A \subset B \subset \overline{B}$. Agora, do primeiro item segue que $\overline{A} \subset \overline{B}$, uma vez que $\overline{B}$ é fechado.

(2) Como $A \subset \overline{A}$ e $B \subset \overline{B}$, então $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Logo, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, pois $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado. Por outro lado, temos $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, nos mostrando que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

(3) Como $\overline{A}$ é fechado e contém $\overline{A}$, então vale $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ pelo item *(1)* da observação anterior. Já a inclusão contrária segue de *(2)*.

□

Proposição 2.15. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Dado $p \in X$, então:*

$$p \in \overline{A} \iff G \cap A \neq \varnothing, \forall G \in \tau \text{ com } p \in G.$$

Demonstração. Suponhamos que exista G um aberto contendo p com $G \cap A = \varnothing$. Dessa maneira $G^{\complement}$ é fechado com

$$\overline{A} \subset G^{\complement} \text{ e } p \notin G^{\complement}.$$

Se $p \in \overline{A}$, então teríamos $p \in G^{\complement}$ e $p \notin G^{\complement}$ pelo que foi visto acima, o que é um absurdo.

Reciprocamente, suponhamos que para todo G contendo p tenhamos $G \cap A \neq \varnothing$. Se $p \notin \overline{A}$, então existiria um F fechado com $A \subset F$ e $p \notin F$, logo $F^{\complement}$ seria um aberto contendo p de modo que $A \cap F^{\complement} = \varnothing$ o que é uma contradição. Portanto p deve pertencer a $\overline{A}$ e temos o resultado. □

Assim como visto em espaços métricos, podemos definir o conjunto dos pontos de acumulação e a fronteira de um conjunto utilizando os abertos da topologia. Todos os resultados e caracterizações sobre esses conjuntos que são verificados em espaços métricos também são válidos aqui.

Definição 2.16. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que uma sequência (x_n) de pontos em X converge para $p \in X$, quando para cada aberto A que contém p existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in A.$$

O ponto p chama-se limite da sequência (x_n) e denotamos como de costume por $x_n \longrightarrow p$ ou $\lim x_n = p$.

Observação 2.4. *Se considerarmos $\tau = \{\varnothing, \mathbb{N}, \mathbb{P}, \mathbb{I}\}$, onde $\mathbb{P}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{I}$ o conjunto dos números ímpares, verifica-se sem muita dificuldade que τ é uma topologia sobre $\mathbb{N}$. Tomando a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $x_n = 2n$, vemos que para qualquer número par p, os únicos abertos que contém p são $\mathbb{P}$ e $\mathbb{N}$, e além disso $x_n \in \mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $\lim x_n = p$. Isto nos mostra que em certos espaços topológicos, podem existir sequências que possuam mais de um limite.*

Definição 2.17. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em (X, τ) é dita ser estacionária, se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$.*

Proposição 2.18. *Seja X um conjunto infinito e τ a Topologia Coenumerável sobre X. Então, uma sequência é convergente em (X, τ) se, e somente se, a sequência é estacionária.*

Demonstração. Se a sequência for estacionária, trivialmente ela é convergente (independentemente do espaço topológico). Seja agora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergindo para $x \in X$. Claramente $A = \{x_n : x_n \neq x\}$ é enumerável e $x \notin A$, isto é, $A^{\complement}$ é um aberto com $x \in A^{\complement}$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A^{\complement}$ para todo $n \geq n_0$, o que é equivalente a $x_n = x$ para todo $n \geq n_0$, ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária. □

Sempre que tivermos uma topologia que provém de uma métrica os limites serão únicos, isso porque essa propriedade é sempre verdadeira quando estivermos em espaços de Hausdorff, cuja definição é dada a seguir.

Definição 2.19. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é um espaço de Hausdorff quando para quaisquer dois pontos distintos p e q em X for possível encontrar dois abertos A e B com $p \in A$, $q \in B$ e $A \cap B = \varnothing$.*

Teorema 2.20. *Se X é um espaço de Hausdorff, então toda sequência convergente em X tem limite único.*

Demonstração. Tomemos (x_n) uma sequência em X que é convergente e suponhamos que essa sequência convirja para pontos distintos p e q. Como X é Hausdorff, podemos tomar A_p e A_q abertos disjuntos com $p \in A_p$ e $q \in A_q$. Consequentemente, por definição de convergência, existem $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n \in A_p$$

e

$$n \geq n_1 \Rightarrow x_n \in A_q.$$

Daí, tomando $m = \max\{n_0, n_1\}$ temos para $n \geq m$ que $x_n \in A_p \cap A_q$, o que é um absurdo. Portanto devemos ter que o limite é único. □

Definição 2.21. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $p \in X$. Uma coleção $\mathcal{B}_p = \{B_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de conjuntos abertos de X se diz base local em p quando:*

(1) $p \in B_\lambda$, $\forall \lambda \in L$.

(2) Para todo aberto G que contém p existe $\lambda \in L$ tal que $p \in B_\lambda \subset G$.

Exemplo 2.22. *A coleção de todos os abertos de X que contém um ponto $p \in X$ é uma base local em p.*

Exemplo 2.23. *Num espaço métrico (M,d) a coleção $\mathcal{B}_p = \{B(p,r) : \ r \in (0,\infty)\}$ é uma base local em p.*

Proposição 2.24. *Seja $\mathcal{B}_p = \{B_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma base local de um ponto p pertencente ao espaço topológico X. Uma sequência $(x_n) \subset X$ converge para p se, e somente se, para cada $\lambda \in L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\lambda$ sempre que $n \geq n_0$.*

Demonstração. Se $x_n \longrightarrow p$ em X, então dado um aberto G que contém p existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $x_n \in G$ sempre que $n \geq n_0$. Em particular, dado $B_\lambda \in \mathcal{B}_p$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\lambda$ quando $n \geq n_0$.

Reciprocamente, desde que um aberto G que contém p, G também contém B_λ para algum $\lambda \in L$, então $x_n \in B_\lambda \in G$ para n suficientemente grande. Portanto, (x_n) converge para p em X. $\square$

Definição 2.25. *Dizemos que um espaço topológico X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade se, para cada $p \in X$, existe uma base local em p enumerável $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \ldots\}$.*

Exemplo 2.26. *Seja X um espaço métrico e $p \in X$. A classe enumerável de bolas abertas $\{B(p,1), B(p,1/2), \ldots, B(p,1/n), \ldots\}$ com centro em p é uma base local em p. Portanto, todo espaço métrico satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

Exemplo 2.27. *Seja X um espaço discreto (isto é, X está dotado da topologia discreta $\mathcal{P}(X)$). Dado $p \in X$, temos que $\mathfrak{B}_p = \{\{p\}\}$ é uma base local em p. Portanto, X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

Exemplo 2.28. *Seja τ a Topologia Cofinita sobre $\mathbb{R}$. Então o espaço $(\mathbb{R}, \tau)$ não satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. De fato, suponhamos por absurdo que $(\mathbb{R}, \tau)$ satisfaça tal axioma. Logo, $1 \in \mathbb{R}$ possui uma base local $\mathfrak{B}_1 = \{B_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Assim, cada $B^{\complement}$ é fechado e finito. Por conseguinte, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^{\complement}$ é enumerável. Sendo $\mathbb{R}$ não enumerável, existe $p \notin A$ e $p \neq 1$. Consequentemente,*

$$p \in A^{\complement} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^{\complement} \right)^{\complement} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(B_n^{\complement} \right)^{\complement} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Logo, $p \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $\{p\}^{\complement}$ é um aberto que contém 1. Desde que $\mathfrak{B}_1$ é base local, existe um $B_m \in \mathfrak{B}_1$ tal que $B_m \subset \{p\}^{\complement}$, donde chegamos em $p \notin B_m$, o que é um absurdo. Portanto, $(\mathbb{R}, \tau)$ não satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.

Observação 2.5. *Se $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$ é uma base local enumerável em p, então a sequência B_1, $B_1 \cap B_2$, $B_1 \cap B_2 \cap B_3$, $\ldots$ é também uma base local enumerável em p e decrescente no sentido de que*

$$B_1 \supset B_1 \cap B_2 \supset B_1 \cap B_2 \cap B_3 \supset \ldots.$$

Assim, se um espaço satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, para cada um de seus pontos existe uma base local enumerável e decrescente.

Proposição 2.29. *Seja $\mathcal{B}_p = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma base local, enumerável e decrescente em p num espaço topológico X. Se $p \in \overline{A}$, então existe uma sequência $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \longrightarrow p$.*

Demonstração. De fato, como $p \in \overline{A}$, então da Proposição 2.15 temos que $B_i \cap A \neq \varnothing$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo existem $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ em X tais que

$$x_i \in B_i \cap A, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, dado um aberto G com $p \in G$ sabemos que existe $B_r \in \mathcal{B}_p$ tal que

$$p \in B_r \subset G.$$

Mas sendo $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ decrescente, concluímos que

$$x_n \in B_r \subset G, \ \forall n \geq r.$$

Portanto, $x_n \longrightarrow p$ em X. □

Teorema 2.30. *Seja X um espaço topológico que satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. Se toda sequência convergente em X tem limite único, então X é Hausdorff.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que X não é Hausdorff. Então, existem $a, b \in X$, $a \neq b$, tais que para todos abertos G e H com $a \in G$ e $b \in H$ tem-se $G \cap H \neq \varnothing$. Consideremos agora $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bases locais enumeráveis e decrescentes de a e b respectivamente. Dessa maneira temos $G_n \cap H_n \neq \varnothing$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in G_n \cap H_n$. Desde que $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são decrescentes, segue da Proposição 2.24 que $x_n \longrightarrow a$ e $x_n \longrightarrow b$ em X, o que contraria a hipótese. Portanto, X é um espaço de Hausdorff. □

2.1.1 Funções contínuas

Definição 2.31. *Sejam (X, τ) e (Y, τ^*) espaços topológicos. Uma função $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^*)$ se diz contínua num ponto $p \in X$ se dado qualquer aberto $B \in \tau^*$ que contém $f(p)$, existe um aberto $A \in \tau$ de modo que*

$$p \in A \text{ e } f(A) \subset B.$$

Dizemos que f é contínua em X, se f for contínua em todos os pontos de X.

Exemplo 2.32. *Se a topologia de X é a discreta, então toda função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua para qualquer topologia em Y. De fato, se $p \in X$ e B é um aberto de Y contendo $f(p)$, então tomando $A = \{p\}$ que é um aberto de X, temos que $f(A) \subset B$.*

Exemplo 2.33. *Se a topologia de Y é a caótica, então qualquer função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua, não importa qual a topologia de X.*

Proposição 2.34. *Se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ são funções contínuas em $p \in X$ e $f(p) \in Y$ respectivamente, então $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é contínua em p.*

Demonstração. Seja C um aberto de Z contendo $g(f(p))$. Da continuidade de g em $f(p)$, existe B um aberto de Y contendo $f(p)$ com

$$g(B) \subset C. \tag{2.1}$$

Agora, como $f(p) \in B$ e f é contínua em p, existe um aberto A de X contendo p de modo que

$$f(A) \subset B. \tag{2.2}$$

Finalmente temos que $p \in A$, e de (2.1) e (2.2) concluímos que $(g \circ f)(A) = g(f(A)) \subset C$, nos mostrando a continuidade de $g \circ f$. $\square$

Teorema 2.35. *Se X e Y são espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ é uma função, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é contínua.

(2) $f^{-1}(B)$ é aberto em X para qualquer aberto B de Y.

(3) $f^{-1}(F)$ é fechado em X para qualquer fechado F de Y.

Demonstração. *(1)⇒(2)* Seja B um aberto de Y. Desde que f é contínua, para cada $p \in f^{-1}(B)$ existe A_p um aberto de X que contém p tal que $f(A_p) \subset B$, ou seja, $A_p \subset f^{-1}(B)$. Dessa maneira temos que

$$\bigcup_{p \in f^{-1}(B)} \{p\} \subset \bigcup_{p \in f^{-1}(B)} A_p \subset f^{-1}(B),$$

isto é, $\bigcup\limits_{p \in f^{-1}(B)} A_p = f^{-1}(B)$, nos mostrando que $f^{-1}(B)$ é um aberto em X.

(2)⇒(1) Seja $p \in X$ e B um aberto de Y contendo $f(p)$. Desde que $f^{-1}(B)$ é um aberto de X, temos que $p \in f^{-1}(B)$ e $f(f^{-1}(B)) \subset B$, nos dando a implicação.

(2)⇔(3) Como vale $f^{-1}(B^{\complement}) = (f^{-1}(B))^{\complement}$ para qualquer conjunto $B \subset Y$, claramente temos a equivalência entre *(2)* e *(3)*. $\square$

Proposição 2.36. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas de um espaço topológico X em um espaço de Hausdorff Y. Então $S = \{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$ é fechado em X.*

Demonstração. Seja $p \in S^{\complement}$, então temos que $f(p) \neq g(p)$. Desde que Y é Hausdorff, podemos tomar G e H abertos disjuntos de Y com $f(p) \in G$ e $g(p) \in H$. Agora, como f e g são contínuas, conseguimos abertos A e B em X ambos contendo p de tal modo que $f(A) \subset G$ e $g(B) \subset H$. Como $A \cap B$ ainda é aberto e $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, pois $f(A \cap B) \cap g(A \cap B) \subset G \cap H = \varnothing$, temos que $p \in A \cap B \subset S^{\complement}$, nos mostrando que $S^{\complement}$ é aberto, e consequentemente que S é fechado. □

Definição 2.37. *Sejam (X, τ) e (Y, τ^*) espaços topológicos quaisquer. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ se diz sequencialmente contínua em um ponto $p \in X$, se para qualquer sequência $(x_n) \subset X$ que converge para p acarreta que a sequência $(f(x_n)) \subset Y$ converge para $f(p) \in Y$, isto é, $x_n \longrightarrow p$ em X implica $f(x_n) \longrightarrow f(p)$ em Y. Dizemos que f é sequencialmente contínua quando for sequencialmente contínua em cada ponto de X.*

Proposição 2.38. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é contínua em $p \in X$, então f é sequencialmente contínua em p.*

Demonstração. Tomemos uma sequência arbitrária (x_n) convergindo para p. Seja B um aberto em Y que contém $f(p)$. Desde que f é contínua em p, segue que existe um aberto A em X com $p \in A$ tal que

$$f(A) \subset B.$$

Por outro lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ quando $n \geq n_0$. Consequentemente, se $n \geq n_0$ então $f(x_n) \in f(A) \subset B$, o que nos mostra que $f(x_n) \longrightarrow f(p)$ em Y. □

Observação 2.6. *A recíproca da proposição acima não é verdadeira em geral, precisando então de mais hipótese. Vejamos o seguinte exemplo.*

Exemplo 2.39. *Consideremos $\mathbb{R}$ munido da Topologia Coenumerável τ. Lembramos que nesse espaço toda sequência convergente é estacionária (Proposição 2.18). Assim, qualquer função $f : (\mathbb{R}, \tau) \longrightarrow (X, \tau^*)$ é sequencialmente contínua, pois se $x_n \longrightarrow p$, temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária, logo a sequência $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária em (X, τ^*) e convergente para $f(p) \in X$. Visto isso, consideremos $X = \mathbb{R}$ e τ^* a topologia usual de $\mathbb{R}$. Sendo $f : (\mathbb{R}, \tau) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função identidade $f(x) = x$, segue que f é sequencialmente contínua mas não contínua, pois $f^{-1}((0,1)) = (0,1)$ não é aberto em $(\mathbb{R}, \tau)$.*

Proposição 2.40. *Seja X um espaço topológico que satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. Então, toda função $f : X \longrightarrow Y$ sequencialmente contínua em $p \in X$ é contínua em p.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \ldots\}$ uma base local e enumerável em p. Suponhamos sem perda de generalidade que $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$. Se f não fosse contínua em p, existiria um aberto G do espaço Y tal que

$$f(p) \in G \text{ e } f(B_n) \nsubseteq G, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí, podemos concluir que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $x_n \in B_n$ tal que $f(x_n) \notin G$. Assim, $x_n \longrightarrow p$ em X e $f(x_n) \nrightarrow f(p)$ em Y, o que é um absurdo, pois f é sequencialmente contínua em p. Portanto, f deve ser contínua. $\square$

Corolário 2.41. *Se X é um espaço topológico que satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, então $f : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, f é sequencialmente contínua.*

Uma função contínua tem a propriedade de que a imagem inversa de um aberto é aberto e a imagem inversa de fechado é fechado. É natural então, cogitar os seguintes tipos de funções:

- Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é chamada função aberta (ou aplicação aberta) se a imagem de todo aberto é um aberto;
- Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é chamada função fechada (ou aplicação fechada) se a imagem de todo fechado também é fechado.

Em geral, funções abertas não são necessariamente fechadas e vice-versa.

Exemplo 2.42. *Considerando a topologia usual de $\mathbb{R}$ e a aplicação $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que f é fechada mas não é aberta. Além disso, f é contínua.*

Exemplo 2.43. *A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$ é aberta mas não é fechada, pois o conjunto $A = \{(x, y) : \ xy = 1, x > 0\}$ é fechado, porém $f(A) = (0, +\infty)$.*

Definição 2.44. *Se X e Y são espaços topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ é contínua, bijetiva e f^{-1} também é contínua, dizemos que f é um homeomorfismo e que X e Y são homeomorfos. Se $f : X \longrightarrow Y$ é apenas injetiva, mas $f : X \longrightarrow f(X)$ é um homeomorfismo, dizemos que f é um mergulho de X em Y, e que X está mergulhado em Y por f.*

Definição 2.45. *Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos a esfera unitária do espaço normado $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ por*

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| = 1\}.$$

Exemplo 2.46. *Um exemplo clássico de homeomorfismo é dado através da projeção estereográfica, onde é verificado que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ com a topologia usual é homeomorfo a $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^3$. A partir desse homeomorfismo, podemos estendê-lo da seguinte forma: consideramos um ponto a mais no plano complexo, que é comum ser denotado pelo infinito ∞. Tomamos $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e a extensão natural da projeção estereográfica para S^2 (associando ∞ a $(0, 0, 1)$), considerando em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a topologia que faz dessa extensão um homeomorfismo. Esse novo espaço topológico $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é denotado por plano complexo estendido e será importante no próximo capítulo.*

Por questão de simplificação de notação, quando dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos, em vez de exibir o homeomorfismo é comum escrevermos apenas $X \simeq Y$.

O próximo resultado nos dá outras definições equivalentes de homeomorfismo, que são bastante úteis dependendo de qual problema esteja sendo abordado.

Teorema 2.47. *Se X e Y são espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ é bijetiva, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é um homeomorfismo.

(2) Se $A \subset X$, então $f(A)$ é aberto em Y se, e somente se, A é aberto em X.

(3) Se $F \subset X$, então $f(F)$ é fechado em Y se, e somente se, F é fechado em X.

Demonstração. (1)⇒(2) Suponhamos que f é um homeomorfismo. Se $A \subset X$ é um aberto, então como f é bijetiva temos que

$$f(A) = (f^{-1})^{-1}(A).$$

Sendo f^{-1} contínua, segue que $f(A)$ é aberto. Analogamente, se $f(A)$ é aberto em Y, então como f é contínua, temos que $A = f^{-1}(f(A))$ é aberto em X.

(2)⇒(3) Se F é fechado em X, então $F^{\complement}$ é aberto. Daí, $f(F^{\complement})$ é aberto em Y. Sendo $f(F^{\complement}) = (f(F))^{\complement}$, segue que $f(F)$ é fechado em Y. Reciprocamente, se $f(F)$ é fechado em Y, então $(f(F))^{\complement} = f(F^{\complement})$ é aberto em Y. Por hipótese, $F^{\complement}$ é aberto em X, ou seja, F é fechado.

(3)⇒(1) Sendo F fechado em X, então

$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$$

por hipótese é fechado. Logo, f^{-1} é contínua. Analogamente, se H é fechado em Y, então $H = f(G)$ para algum fechado G em X. Consequentemente, $f^{-1}(H) = G$ é fechado. Portanto, f é contínua e, assim, f é um homeomorfismo. □

Corolário 2.48. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, então f é uma função aberta e fechada.*

Se denotarmos a propriedade "X é homeomorfo a Y" por $X \simeq Y$, a relação $\simeq$ será uma relação de equivalência em qualquer conjunto formado por espaços topológicos, pois facilmente se verifica que valem as propriedades:

(1) $X \simeq X$ (reflexiva);

(2) $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$ (simétrica);

(3) $X \simeq Y$ e $Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$ (transitiva).

Lembremos que uma função $f : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ entre os espaços métricos (M, d_M) e (N, d_N) é dita ser uma isometria, quando f preserva distâncias, isto é, quando

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

Definição 2.49. *Uma propriedade que, quando é válida para um certo espaço topológico, também é válida para todos os espaços que lhe são homeomorfos, chama-se propriedade topológica. Uma propriedade é chamada de propriedade métrica se for invariante por isometrias bijetivas.*

Exemplo 2.50. *A Propriedade "ser Hausdorff" é uma propriedade topológica. De fato, se X é um espaço de Hausdorff e $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, então dados $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, existem $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 \neq x_2$ tais que*

$$f(x_1) = y_1 \text{ e } f(x_2) = y_2.$$

Por hipótese, existem G_{x_1} e G_{x_2} abertos disjuntos com

$$x_1 \in G_{x_1} \text{ e } x_2 \in G_{x_2}.$$

Logo, $f(G_{x_1})$ e $f(G_{x_2})$ são abertos disjuntos com $y_1 \in f(G_{x_1})$ e $y_2 \in f(G_{x_2})$, o que prova que Y é um espaço de Hausdorff.

Exemplo 2.51. *A propriedade de "ser uma sequência de Cauchy" não é topológica. Com efeito, seja $X = (0, +\infty)$. A função $f : X \longrightarrow X$ definida por $f(x) = 1/x$ é um homeomorfismo de X em X. Notemos agora que a sequência $(1, 1/2, 1/3, \ldots)$ é de Cauchy, mas a sequência correspondente pelo homeomorfismo $(1, 2, 3, \ldots)$ não é Cauchy.*

2.1.2 Compacidade

Seja X um espaço topológico. Dizemos que $K \subset X$ é compacto quando toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita. Se X for compacto, dizemos que X é um espaço topológico compacto.

Observação 2.7. *Note que $K \subset X$ é um conjunto compacto se, e somente se, K é um espaço topológico compacto com a topologia induzida.*

Da definição de conjunto compacto podemos encontrar alguns conjuntos trivialmente compactos, que são os conjuntos com cardinalidade finita, pois se uma quantidade finita de pontos está em uma união, com certeza estará em uma quantidade finita de conjuntos dessa união. Note que, intuitivamente, quanto menos abertos a topologia possuir, mais fácil é para se encontrar compactos. Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 2.52. *Se τ é uma topologia em X com uma quantidade finita de abertos, então todo subconjunto de X é compacto. Em particular, (X, τ) é um espaço topológico compacto.*

Exemplo 2.53. *Se τ é a topologia discreta em X, então $K \subset X$ é compacto se, e somente se, K é finito. De fato, basta observar que*

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}.$$

Proposição 2.54. *Seja X um espaço topológico. Se $K \subset X$ é compacto e $F \subset K$ é fechado, então F é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in L}$ uma cobertura aberta para F. Então, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \cup F^{\complement}$ é uma cobertura aberta para K, pois F é fechado. Sendo K compacto, existem $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{A}$ tais que

$$K \subset A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n} \cup F^{\complement}.$$

Desde que $F \subset K$ e $F \cap F^{\complement} = \varnothing$, concluímos que

$$F \subset A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n},$$

nos mostrando que f é compacto. □

Proposição 2.55. *Sejam X e Y espaços topológicos, $K \subset X$ um conjunto compacto e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então, $f(K)$ é compacto em Y.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in L}$ uma cobertura aberta de $f(K)$ em Y. Então, $\mathcal{A}^* = \{f^{-1}(A_i)\}_{i \in L}$ é uma cobertura aberta de K em X, pois f é contínua. Daí, existem $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{A}$ tais que

$$K \subset f^{-1}(A_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(A_{i_n})$$

e portanto,

$$f(K) \subset A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n}$$

o que nos mostra que $f(K)$ é compacto em Y. □

Em espaços métricos todo conjunto compacto é fechado, mas isso não é verdade em geral para espaços topológicos, vejamos então uma condição suficiente para que isso ocorra.

Teorema 2.56. *Todo subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

Demonstração. Seja K um compacto num espaço de Hausdorff X. Para mostrar que K é fechado vamos provar que $K^{\complement}$ é aberto. Seja $p \in K^{\complement}$. Para cada $x \in K$ existem abertos disjuntos G_x e H_x tais que

$$x \in G_x \text{ e } p \in H_x.$$

Como $\{G_x\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta para K, existem $G_{x_1}, \ldots, G_{x_n}$ tais que

$$K \subset G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n}.$$

Consequentemente, temos que $H = H_{x_1} \cap \ldots \cap H_{x_n}$ é um aberto tal que $p \in H$ e $H \subset K^{\complement}$. Portanto $K^{\complement}$ é aberto, o que nos mostra que K é fechado. □

Proposição 2.57. *Sejam X um espaço topológico compacto e Y um espaço de Hausdorff. Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma bijeção contínua, então f é um homeomorfismo.*

Demonstração. É suficiente verificarmos que f é uma aplicação fechada. Seja $F \subset X$ um fechado. Pela Proposição 2.54 segue que F é compacto. Sendo f contínua, temos da Proposição 2.55 que $f(F)$ é compacto em Y. Agora, sendo Y um espaço de Hausdorff, temos pelo Teorema 2.56 que $f(F)$ é fechado. Do Teorema 2.47 concluímos que f é um homeomorfismo. □

2.1.3 Subconjuntos residuais

Um subconjunto de um espaço topológico é chamado de conjunto G_δ (conjunto F_σ, resp.) se for uma interseção enumerável de conjuntos abertos (uma união enumerável de conjuntos fechados, resp.).

Definição 2.58. *Vejamos os seguintes tipos especiais de espaços topológicos:*

(1) Um espaço topológico (M, τ) é dito metrizável se existe uma métrica d em M que gera a topologia τ.

(2) Um espaço topológico (M, τ) é dito ser completamente metrizável, desde que haja uma distância d gerando τ de modo que o espaço métrico (M, d) seja completo.

(3) Um espaço topológico X é considerado um espaço Baire se qualquer intersecção enumerável de subconjuntos abertos densos é densa em X.

Os Exemplos dados a seguir servem apenas de ilustração e usam conceitos ainda não vistos até o momento. O leitor interessado nas demonstrações deve consultar [15, 6].

Exemplo 2.59. *Se E é um espaço normado separável, então $(B_{E'}, \tau_{B_{E'}})$ é metrizável, onde $\tau = \sigma(E', E)$ (ver [6], pag. 161). O conjunto $B_{E'}$ denota a bola unitária fechada do espaço E' que será apresentado na seção 2.2.*

Exemplo 2.60. $(\mathbb{R}^n, \sigma(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)'))$ *é completamente metrizável. Isso ocorre em qualquer espaço de dimensão finita e será verificado mais adiante como uma consequência da Proposição 2.73.*

Exemplo 2.61. *Se $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $x \in E$ e $r > 0$. Então*

$$S(x, r) = \{y \in X : \ \|x - y\| = r\}$$

é um espaço de Baire com a topologia induzida da norma. Isso decorre do Corolário 2.63, do fato de que duas esferas quaisquer em $(E, \|\cdot\|)$ são sempre homeomorfas e que ser espaço de Baire é um invariante topológico.

Observação 2.8. *Quando E é um espaço vetorial de dimensão finita n, denotamos a esfera de raio 1 centrada na origem por*

$$S^{n-1} := S(0,1) = \{y \in X : \|x\| = 1\}.$$

Uma vez que o Teorema da categoria de Baire (1.25) nos mostra que em espaços métricos completos a interseção enumerável de abertos densos ainda é densa no espaço, para verificarmos que um espaço topológico é Baire, é suficiente mostrarmos a existência de uma métrica no espaço que o torne completo e gere a topologia em questão, isto é, que o espaço topológico é completamente metrizável. O próximo resultado nos mostra que a esfera unitária de um espaço de Banach é um espaço métrico completo, e portanto também é um espaço de Baire.

Proposição 2.62. *Seja X um espaço vetorial normado. Então X é Banach se, e somente se, $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em S. Claramente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy em X, e portanto usando a hipótese, existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Para que S seja completo, temos que verificar que $x \in S$. Uma vez que a norma é uma função contínua e $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ simultaneamente, nos mostrando que $\|x\| = 1$ e consequentemente que $x \in S$ como queríamos.

$\Leftarrow$) Seja agora $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Temos duas possibilidades:

(1) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge para zero;

(2) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência que converge para zero.

No primeiro caso não há nada o que fazer, pois sequências de Cauchy que possuem subsequência convergente são também convergentes. Consideremos então o segundo caso. Sem perda de generalidade podemos supor que $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim existem $C_1, C_2 > 0$ tais que $C_1 \leq \|y_n\| \leq C_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa maneira a sequência $\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ está em S e para $m, n \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned}\left\|\frac{y_n}{\|y_n\|}-\frac{y_m}{\|y_m\|}\right\| &= \left\|\frac{y_n}{\|y_n\|}-\frac{y_n}{\|y_m\|}+\frac{y_n}{\|y_m\|}-\frac{y_m}{\|y_m\|}\right\| \\ &\le \frac{1}{\|y_n\|\cdot\|y_m\|}\,\|(\|y_m\|y_n-\|y_n\|y_n)\|+\frac{1}{\|y_m\|}\,\|y_n-y_m\| \\ &\le \frac{1}{C_1^2}\,\|(\|y_m\|-\|y_n\|)y_n\|+\frac{1}{C_1}\|y_n-y_m\| \\ &= \frac{1}{C_1^2}|\|y_m\|-\|y_n\||\cdot\|y_n\|+\frac{1}{C_1}\|y_n-y_m\| \\ &\le \frac{C_2}{C_1^2}\,|\|y_m\|-\|y_n\||+\frac{1}{C_1}\|y_n-y_m\| \\ &\le \frac{C_2}{C_1^2}\,\|y_m-y_n\|+\frac{1}{C_1}\|y_n-y_m\|=\left(\frac{C_2+C_1}{C_1^2}\right)\|y_n-y_m\|,\end{aligned}$$

ou seja, $\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em S. Sendo S um espaço métrico completo por hipótese, existe $y\in S$ tal que $\frac{y_n}{\|y_n\|}\longrightarrow y$. Agora note que temos $\|y_n\|\longrightarrow C\in\mathbb{R}$, pois $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser Cauchy em X implica $(\|y_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ser Cauchy em $\mathbb{R}$, logo

$$\begin{aligned}\|y_n-Cy\| &= \left\|\|y_n\|\frac{y_n}{\|y_n\|}-Cy\right\| \\ &= \left\|\|y_n\|\frac{y_n}{\|y_n\|}-\|y_n\|y+\|y_n\|y-Cy\right\| \\ &\le \|y_n\|\cdot\left\|\frac{y_n}{\|y_n\|}-y\right\|+|\|y_n\|-C|\cdot\|y\|,\end{aligned}$$

o que é suficiente para nos mostrar que $y_n\longrightarrow Cy$ em X.

□

Corolário 2.63. *Se X é um espaço vetorial normado de Banach, então a esfera unitária S é um espaço de Baire com a topologia induzida.*

Demonstração. Basta combinar a Proposição anterior com o Teorema 1.25. □

No Capítulo 1 o conceito de cardinalidade de alguma forma nos passa a noção de tamanho de um determinado conjunto, mais especificamente a quantidade de elementos que compõe aquele conjunto. Agora veremos outra noção de tamanho de um conjunto, no qual será utilizado uma topologia para isso.

Definição 2.64. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $A\subset X$ é chamado*

(1) raro ou denso em lugar nenhum, se $\operatorname{int}(\overline{A})=(\overline{A})^0=\varnothing$.

(2) escasso ou de primeira categoria, sempre que A for uma união enumerável de conjuntos densos em lugar nenhum.

(3) de segunda categoria, se não for de primeira categoria.

(4) residual se $X \setminus A$ for de primeira categoria.

Por exemplo, se $X = \mathbb{R}$, então $\mathbb{N}$ e $Z_n = \{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}\}$ são raros, $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ é de primeira categoria, o intervalo $(0,1)$ é de segunda categoria mas não residual, enquanto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é residual e de segunda categoria.

Se X for um espaço topológico arbitrário, então cada subconjunto de um conjunto escasso também é escasso, pois se $B \subset A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ com $\mathrm{int}(\overline{A}_n) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B \cap A_n)$ e $\mathrm{int}(\overline{B \cap A_n}) \subset \mathrm{int}(\overline{A}_n) = \varnothing$. Além disso, se $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ com $X_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$ e $A_{n,m}$ raro para todos $n, m \in \mathbb{N}$, então claramente temos $X = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} A_{n,m}$, ou seja, X é escasso.

A categoria de um conjunto nos dá uma ideia do seu tamanho. Os conjuntos de primeira categoria podem ser considerados como "pequenos", enquanto seus complementares, isto é, os conjuntos residuais podem ser considerados "grandes". Para que isso faça sentido, é necessário que um conjunto não seja grande e pequeno simultaneamente, mas será verificado na Proposição 2.66*(5)* uma condição para que isso não ocorra.

Proposição 2.65. *Se X é um espaço de Baire, então X é de segunda categoria. Em particular, qualquer espaço topológico completamente metrizável é de segunda categoria.*

Demonstração. Suponhamos que X seja escasso. Então existem subconjuntos raros R_n tais que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$. Definindo $F_n = \overline{R_n}$ $(n \geq 1)$, segue que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é um conjunto fechado que satisfaz $\mathrm{int}(F_n) = \varnothing$. Seja $A_n = F_n^{\complement}$. Então cada A_n é aberto e denso, consequentemente, $\varnothing = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso, o que é um absurdo. $\square$

Os lemas a seguir serão necessários para o próximo resultado, onde veremos caracterizações de espaços de Baire, que são os espaços onde ficam bem definidos os conceitos de categoria vistos acima, ou seja, em espaços de Baire não é possível um conjunto ser "pequeno" e "grande" simultaneamente.

Para um subconjunto K de um espaço vetorial V, $a \in V$ e $r > 0$, definimos $K - \{a\} := \{k - a : k \in K\}$ e $r \cdot K := \{r \cdot k : k \in K\}$.

Lema 2.1. *Seja V um espaço vetorial. Se $\{C_\lambda\}_{\lambda\in L}$ é uma família de subconjuntos de V e $a \in V$, então vale*

$$\left(\bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda\right) - \{a\} = \bigcup_{\lambda\in L} \left(C_\lambda - \{a\}\right).$$

Demonstração. Dado $y \in \left(\bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda\right) - \{a\}$, existe $x \in C_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in L$ tal que $y = x - a$. Daí temos que $y = x - a \in C_{\lambda_0} - \{a\} \subset \bigcup_{\lambda\in L}(C_\lambda - \{a\})$.

Agora, dado $y \in \bigcup_{\lambda\in L}(C_\lambda - \{a\})$ temos que $y \in C_{\lambda_1} - \{a\}$ para algum $\lambda_1 \in L$, e uma vez que $C_{\lambda_1} \subset \bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda$, concluímos que $C_{\lambda_1} - \{a\} \subset \left(\bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda\right) - \{a\}$, ou seja, $y \in \left(\bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda\right) - \{a\}$. $\square$

Lema 2.2. *Seja K um subconjunto de um espaço vetorial normado V, $c, a \in V$ e $r > 0$, então valem:*

(1) $\overline{K} - \{a\} = \overline{K - \{a\}}$.

(2) $B_r(c) - \{a\} = B_r(c - a)$.

(3) $\text{int}(K) - \{a\} = \text{int}(K - \{a\})$.

Demonstração. (1) Dado $k - a \in \overline{K} - \{a\}$, existe uma sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em K tal que $k_n \longrightarrow k$. Dessa maneira, a sequência $(k_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a $K - \{a\}$ e

$$\lim_{n\to\infty}(k_n - a) = k - a,$$

nos mostrando que $k - a \in \overline{K - \{a\}}$ e, consequentemente $\overline{K} - \{a\} \subset \overline{K - \{a\}}$.

Reciprocamente, dado $x \in \overline{K - \{a\}}$ existe $(k_n - a)_{n\in\mathbb{N}} \subset K - \{a\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}(k_n - a) = x.$$

Daí, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = x + a$, ou seja, $x + a \in \overline{K}$. Como $x = (x + a) - a$, concluímos que $x \in \overline{K} - \{a\}$ e, consequentemente $\overline{K - \{a\}} \subset \overline{K} - \{a\}$.

(2) Dado $y \in B_r(c) - \{a\}$, então $y = x - a$ com $\|x - c\| < r$. Dessa maneira,

$$\|y - (c - a)\| = \|(x - a) - (c - a)\| = \|x - c\| < r,$$

nos mostrando que $y \in B_r(c - a)$, e daí segue $B_r(c) - \{a\} \subset B_r(c - a)$.

Reciprocamente, dado $y \in B_r(c - a)$ temos que $y + a \in B_r(c)$, pois $\|(y + a) - c\| = \|y - (c - a)\| < r$. Agora, como $y = (y + a) - a$, podemos concluir que $y \in B_r(c) - \{a\}$ e consequentemente $B_r(c - a) \subset B_r(c) - \{a\}$.

(3) Dado $y \in \text{int}(K) - \{a\}$, existem $x \in K$ e $s > 0$ tais que $y = x - a$ e $B_s(x) \subset K$. Uma vez que $B_s(x) - \{a\} \subset K - \{a\}$ e $B_s(x) - \{a\} = B_s(x - a)$, pelo item *2* segue que $B_s(x - a) \subset K - \{a\}$, ou seja, $y = x - a \in \text{int}(K - \{a\})$ $(\text{int}(K) - \{a\} \subset \text{int}(K - \{a\}))$.

Reciprocamente, se $y \in \text{int}(K - \{a\})$ então existem $x \in K$ e $s > 0$, tais que $y = x - a$ e $B_s(y) \subset K - \{a\}$. Para mostrarmos que $y \in \text{int}(K) - \{a\}$, basta verificarmos que $x \in \text{int}(K)$. Observe que dado $v \in B_s(x) = B_s(y - (-a)) = B_s(y) - \{-a\}$, então $v = (k - a) - (-a)$ para algum $k \in K$ (pois $B_s(y) \subset K - \{a\}$). Logo $v = k \in K$, nos mostrando que $B_s(x) \subset K$ e, consequentemente que $x \in \text{int}(K)$ como queríamos. □

Lema 2.3. *Seja K um subconjunto de um espaço vetorial normado V, $c \in V$ e $r, s > 0$, então valem:*

(1) $\overline{r \cdot K} = r \cdot \overline{K}$.

(2) $r \cdot B_s(c) = B_{rs}(r \cdot c)$.

(3) $\text{int}(r \cdot K) = r \cdot \text{int}(K)$.

Demonstração. (1) Dado $y \in \overline{r \cdot K}$, existe uma sequência $(r \cdot k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $r \cdot K$ tal que $\lim_{n\to\infty} r \cdot k_n = y$. Dessa maneira a sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K converge para $\frac{1}{r} \cdot y$, ou seja, $\frac{1}{r} \cdot y \in \overline{K}$. Uma vez que $y = r \cdot (\frac{1}{r} \cdot y)$, concluímos que $y \in r \cdot \overline{K}$.

Agora, dado $r \cdot k \in r \cdot \overline{K}$, existe uma sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que $k_n \longrightarrow k$. Assim, a sequência $(r \cdot k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset r \cdot K$ é tal que $r \cdot k_n \longrightarrow r \cdot k$, onde chegamos em $r \cdot k \in \overline{r \cdot K}$.

(2) Seja $r \cdot x \in r \cdot B_s(c)$, então temos $\|x - c\| < s$. Como $r > 0$, chegamos em

$$\|r \cdot x - r \cdot c\| < rs,$$

nos mostrando que $r \cdot x \in B_{rs}(r \cdot c)$. Como $r \cdot B_s(c) \subset B_{rs}(r \cdot c)$, também temos que

$$B_s(c) = r^{-1} \cdot (r \cdot B_s(c)) \subset r^{-1} \cdot B_{rs}(r \cdot c) \subset B_{r^{-1}rs}\left(r^{-1} \cdot (r \cdot c)\right) = B_s(c).$$

Logo obtemos $B_s(c) = r^{-1} \cdot B_{rs}(r \cdot c)$, ou equivalentemente $r \cdot B_s(c) = B_{rs}(r \cdot c)$.

(3) Dado $y \in \operatorname{int}(r \cdot K)$, existe $t > 0$ tal que $B_t(y) \subset r \cdot K$. Usando o item anterior chegamos em

$$r^{-1} \cdot y \in B_{r^{-1}t}\left(r^{-1} \cdot y\right) \subset r^{-1} \cdot (r \cdot K) = K,$$

o que nos mostra que $r^{-1} \cdot y \in \operatorname{int}(K)$. Logo, como $y = r \cdot (r^{-1} \cdot y)$ temos que $y \in r \cdot \operatorname{int}(K)$.

Seja agora $r \cdot x \in r \cdot \operatorname{int}(K)$, então existe $t > 0$ de modo que $B_t(x) \subset K$. Logo, pelo item anterior temos que $B_{rt}(r \cdot x) = r \cdot B_t(x) \subset r \cdot K$, e isso é suficiente para mostrar que $r \cdot x \in \operatorname{int}(r \cdot K)$. □

Lema 2.4. *Seja X um espaço topológico e $A \subset X$ um subconjunto. Então vale o seguinte*

$$\overline{A^{\complement}} = \operatorname{int}(A)^{\complement}.$$

Demonstração. De fato, note primeiramente que $\operatorname{int}(A)^{\complement}$ é fechado. Da inclusão $\operatorname{int}(A) \subset A$ concluímos que $A^{\complement} \subset \operatorname{int}(A)^{\complement}$, ou seja, $\overline{A^{\complement}} \subset \operatorname{int}(A)^{\complement}$ ($\overline{A^{\complement}}$ é o menor fechado que contém $A^{\complement}$). Por outro lado, como vale $A^{\complement} \subset \overline{A^{\complement}}$, segue que $\overline{A^{\complement}}^{\complement} \subset A$. Daí, sendo $\overline{A^{\complement}}^{\complement}$ aberto, temos $\overline{A^{\complement}}^{\complement} \subset \operatorname{int}(A)$, e consequentemente $\operatorname{int}(A)^{\complement} \subset \overline{A^{\complement}}$. Concluímos assim a igualdade desejada. □

Observe que se trocarmos A por $A^{\complement}$ no último lema, obtemos a relação $\overline{A} = \operatorname{int}(A^{\complement})^{\complement}$, que é equivalente a $\overline{A}^{\complement} = \operatorname{int}(A^{\complement})$. Essas relações em particular nos dizem que um conjunto tem interior vazio se, e somente se, seu complementar é denso.

Proposição 2.66. *As afirmativas a seguir são verdadeiras:*

(1) Um espaço topológico é Baire se, e somente se, cada subconjunto aberto não vazio é de segunda categoria.

(2) Um espaço topológico é Baire se, e somente se, cada união enumerável de conjuntos fechados com interior vazio têm interior vazio.

(3) Se X é um espaço normado, então X é Baire se, e somente se, X é de segunda categoria em si.

(4) Em um espaço de Baire, um subconjunto é residual se, e somente se, contiver algum conjunto G_δ denso; e um subconjunto é escasso, se e somente se, estiver contido em algum F_σ definido com interior vazio.

(5) Em um espaço de Baire, todo subconjunto residual é de segunda categoria.

(6) Em um espaço de Baire, uma interseção enumerável de subconjuntos residuais ainda é residual.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$) Suponhamos que exista A um aberto não vazio de primeira categoria. Então existe uma coleção enumerável $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos tais que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ com $\operatorname{int}(\overline{A_n}) = \varnothing$, ou seja, $\overline{A_n}^{\complement}$ é denso para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, temos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}^{\complement} \subset A^{\complement}$, ou seja, $A^{\complement} = X$ já que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}^{\complement}$ é denso (pois X é Baire) e $A^{\complement}$ é fechado. Sendo assim, chegamos em $A = \varnothing$, o que é uma contradição com o que foi suposto inicialmente. Logo, todo subconjunto aberto não vazio deve ser de segunda categoria.

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que X seja um espaço topológico que não é Baire, então existe uma família $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos fechados com $\operatorname{int}(F_n) = \varnothing$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tais que $\operatorname{int}(F) \neq \varnothing$, onde $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Assim temos que $\operatorname{int}(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\operatorname{int}(F) \cap F_n)$ com $\operatorname{int}(\overline{\operatorname{int}(F) \cap F_n}) \subset \operatorname{int}(F_n) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\operatorname{int}(F)$ é um aberto não vazio de primeira categoria, o que contraria nossa hipótese. Concluímos então que X deve ser Baire.

(2) $\Rightarrow$) Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de conjuntos fechados com interior vazio, então temos que $A_n = F_n^{\complement}$ é denso, de modo que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ainda é denso, ou seja, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^{\complement}$ tem interior vazio.

$\Leftarrow$) Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção de conjuntos abertos densos. Desde que $\operatorname{int}(A^{\complement}) = \overline{A}^{\complement}$, temos $F_n = A_n^{\complement}$ tem interior vazio, logo $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^{\complement}$ é denso.

(3) $\Rightarrow$) Segue imediatamente do item a) ou da Proposição 2.65.

$\Leftarrow$) Verifiquemos a contra positiva. Se X não é Baire, de modo análogo ao que foi feito em a) encontramos um aberto não vazio A de primeira categoria. Podemos então tomar uma bola B_r aberta de raio $r > 0$ contida em A, que claramente também é de primeira categoria. Fazendo uso dos Lemas 2.1 e 2.2, podemos concluir que $B_r(0)$ (bola de raio r centrada na origem) é de primeira categoria. Sendo $B_r(0)$ de primeira categoria, então existe uma família enumerável $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $B_r(0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ e $\operatorname{int}(\overline{C_n}) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora dado $m \in \mathbb{N}$, temos que $m \cdot B_r(0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} m \cdot C_n$ com $\operatorname{int}(\overline{m \cdot C_n}) = \operatorname{int}(m \cdot \overline{C_n}) = m \cdot \operatorname{int}(\overline{C_n}) = \varnothing$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $m \cdot B_r(0)$ é de primeira categoria. Por fim, como $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} m \cdot B_r(0) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_{m\cdot r}(0)$, temos que X é de primeira categoria.

(4) $\Rightarrow$) Se A é residual, então $X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ com cada C_n raro, ou seja, $\overline{C_n}^{\complement}$ é denso. Como $\overline{C_n}^{\complement} \subset C_n^{\complement}$, temos que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n^{\complement} \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}^{\complement}$, donde segue que $G_\delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}^{\complement}$ é denso.

$\Leftarrow$) Se $A \supset G_\delta$ com $G_\delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ denso, então cada A_n é denso, de modo que $A_n^{\complement}$ tem interior vazio, logo $X \setminus A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\complement}$ com $\mathrm{int}\left(\overline{A_n^{\complement}}\right) = \mathrm{int}(A_n^{\complement}) = \varnothing$, ou seja, $X \setminus A$ é de primeira categoria.

Para ver a outra equivalência basta observar que

$$A \text{ é escasso} \iff A^{\complement} \text{ é residual}$$

e que

$$G_\delta \text{ é denso} \iff F_\sigma = G_\delta^{\complement} \text{ tem interior vazio.}$$

(5) Como X é aberto e não vazio, pelo item a) devemos ter que X é de segunda categoria. Suponhamos então que exista A residual que seja de primeira categoria (que não é de segunda categoria). Então $A^{\complement}$ e A são de primeira categoria e, portanto $X = A \cup A^{\complement}$ também é de primeira categoria, o que é um absurdo.

(6) Seja $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$ uma interseção enumerável de conjuntos residuais, temos então que $R^{\complement} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n^{\complement}$ é escasso, pois a união enumerável de conjuntos escassos ainda é escasso. $\square$

2.2 Operadores lineares contínuos e topologias fracas

Em Análise Funcional, chamamos de operador toda aplicação entre espaços vetoriais. Já um operador linear, é uma aplicação T entre espaços E e F sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tal que para todo $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ se tenha

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \text{ e } T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u).$$

Se E e F são espaços vetoriais normados e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear, dizemos que T é limitado se existe um número real C tal que

$$\|T(u)\| \leq C\|u\|, \forall u \in E.$$

Nessas condições, para cada operador linear limitado T entre E e F, fica bem definido o número $\|T\|$ dado por

$$\|T\| := \sup_{u\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|}. \tag{2.3}$$

Claramente vale também $\|T(u)\| \leq \|T\| \cdot \|u\|$ para todo $u \in E$.

Além disso, podemos considerar $\mathcal{L}(E,F)$ como sendo o conjunto de todos operadores lineares limitados, e munir esse conjunto das operações naturais de soma e produto por escalar. Dessa maneira $\mathcal{L}(E,F)$ se torna um espaço vetorial. A aplicação $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada em (2.3) acaba sendo uma norma para tal espaço.

Observação 2.9. *Uma fórmula para calcular a dimensão do espaço $\mathcal{L}(E,F)$ quando E e F são espaços de dimensão finita é dada por* $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E)\cdot\dim(F)$.

Já que na definição de operador limitado se faz necessário espaços normados, podemos cogitar sobre a continuidade desses operadores. Notoriamente temos que todo operador linear limitado é contínuo, pois para $u, v \in E$ vale

$$\|T(u) - T(v)\| = \|T(u-v)\| \leq C\|u-v\|,$$

o que nos mostra que T é Lipschitziana e consequentemente contínua. O próximo resultado verifica que a recíproca também é verdadeira, ou seja, todo operador linear contínuo é limitado.

Teorema 2.67. *Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear e E, F espaços vetoriais normados. Então*

(1) T é contínuo se, e somente se, T é limitado.

(2) Se T é contínuo em um ponto, então T é contínuo em todo domínio.

Demonstração. (1) Iremos verificar apenas a implicação, pois a volta já foi observada. Seja $u_0 \in E$ um ponto onde T é contínuo. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(u) - T(u_0)\| < \epsilon, \ \forall u \in E \ com \ \|u - u_0\| < \delta.$$

Escrevendo

$$u_v = u_0 + \frac{\delta v}{2\|v\|}, \ v \in E \setminus \{0\},$$

encontramos $\|T(u_v) - T(u_0)\| = \left\|\frac{\delta}{2\|v\|}T(v)\right\| < \epsilon$, pois temos $\|u_v - u_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Portanto

$$\|T(v)\| \leq \frac{2\epsilon}{\delta}\|v\| = C\|v\|, \ \forall v \in E$$

onde $C = \frac{2\epsilon}{\delta}$.

(2) Imediato pelo item anterior, pois na prova foi utilizado apenas a continuidade em u_0. □

Seja E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Chamamos de funcional linear todo operador linear que tem o corpo $\mathbb{K}$ como contra-domínio. O conjunto de todos os funcionais lineares $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ é denominado dual algébrico de E e é denotado por E^*.

Se o espaço E está munido de uma norma, denotamos por E' o conjunto de todos funcionais lineares $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que são contínuos/limitados, ou seja, $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Claramente temos a inclusão

$$E' \subset E^*,$$

no qual pode ser mostrado sem muita dificuldade que a igualdade ocorre somente se $\dim(E) < \infty$. O espaço E' é chamado de dual topológico de E.

2.2.1 A topologia gerada por uma família de funções

Dizemos que uma topologia tem menos abertos que uma outra se estiver contida propriamente nesta outra. E expressão menos abertos será usada sempre nesse contexto, sem conexão com a ideia de cardinalidade.

Intuitivamente, quanto menos abertos uma topologia tiver mais chances temos de encontrar conjuntos compactos, pois menos serão suas coberturas abertas, e de fato isso ocorre[1]. A ideia de considerar um espaço topológico com menos abertos é exatamente aumentar as possibilidades de encontrar compactos, pois esses conjuntos dizem muito sobre os espaços nos mostrando várias propriedades sobre eles[2]. Veremos a seguir uma maneira de definir uma topologia que adiante será usada para encontrar uma topologia com menos abertos que a topologia da norma de um espaço vetorial.

Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $(f_i)_{i\in I}$ uma família de funções $f : X \longrightarrow Y_i$ para cada $i \in I$. Queremos definir a menor topologia que torna todas as funções f_i contínuas.

Para cada $i \in I$ e cada aberto A_i de Y_i considere o conjunto

$$f_i^{-1}(A_i) = \{x \in X : \; f_i(x) \in A_i\}.$$

Consideremos Φ a coleção dos subconjuntos de X que podem ser escritos como interseções finitas de conjuntos da forma $f_i^{-1}(A_i)$.

Proposição 2.68. *Existe uma topologia τ em X que tem Φ como base, isto é, os elementos de τ são uniões de elementos Φ.*

Demonstração. Basta verificarmos que a coleção de subconjuntos de X

$$\tau = \left\{ A \subset X : \; A = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda, \; U_\lambda \in \Phi \right\}$$

é uma topologia, onde L é uma coleção de índices qualquer.

[1]Isso pode ser visto na passagem da topologia da norma para a topologia fraca-estrela em E' quando $\dim(E') = \infty$ (consultar [6]), onde a bola unitária que antes não era compacta passa a ser.

[2]A compacidade ou não da bola unitária de um espaço normado, caracteriza a dimensão do espaço, assim como também caracteriza a reflexividade do espaço, quando munido da topologia fraca.

Note que, $A = U_\lambda$ com $U_\lambda = f_i^{-1}(Y_i)$ e $B = V_\lambda$ com $V_\lambda = f_i^{-1}(\varnothing)$ estão em τ para qualquer $i \in I$, ou seja, $A = X$ e $B = \varnothing$ são elementos de τ.

Agora dados $A = \bigcup\limits_{\lambda \in L} U_\lambda$ e $B = \bigcup\limits_{\lambda \in Q} V_\lambda$ em τ, temos que

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \left(\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\delta \in Q} V_\delta\right) \\
&= \bigcup_{\lambda \in L}\left(U_\lambda \cap \left(\bigcup_{\delta \in Q} V_\delta\right)\right) \\
&= \bigcup_{\lambda \in L}\left(\bigcup_{\delta \in Q}(U_\lambda \cap V_\delta)\right) = \bigcup_{(\lambda,\delta) \in L \times Q}(U_\lambda \cap V_\delta).
\end{aligned}$$

Uma vez que U_λ é uma interseção finita de conjuntos da forma $f_i^{-1}(A_i)$ assim como V_δ também é, podemos concluir que $U_\lambda \cap V_\delta$ está em Φ para cada $(\lambda, \delta) \in L \times Q$ e consequentemente que $A \cap B$ pertence a τ.

Por fim, dada uma coleção $(B_j)_{j \in J}$ de elementos de τ onde $B_j = \bigcup_{\lambda_j \in L_j} U_{\lambda_j}$ para cada $j \in J$, segue que

$$B = \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J}\left(\bigcup_{\lambda_j \in L_j} U_{\lambda_j}\right) = \bigcup_{\lambda \in \cup_{j \in J} L_j} U_\lambda,$$

o que nos mostra que $B \in \tau$. Com isso temos de fato que τ é uma topologia em X. $\square$

A topologia τ da proposição anterior é chamada de *topologia gerada pela família de funções* $(f_i)_{i \in I}$. A próxima proposição é bastante útil para fazermos alguns cálculos com a topologia vista anteriormente.

Proposição 2.69. *Seja τ a topologia em X gerada pela família de funções $(f_i)_{i \in I}$. Então:*

(1) Para cada $i \in I$ a função $f_i : X \longrightarrow Y_i$ é contínua.

(2) τ é a menor topologia em X tal que vale (1).

(3) τ é a interseção de todas as topologias em X em relação às quais todas as f_i são contínuas.

(4) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X. Então $x_n \longrightarrow x$ em (X, τ) se, e somente se, $f_i(x_n) \longrightarrow f_i(x)$ em Y_i para todo $i \in I$.

(5) Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \longrightarrow (X, \tau)$. Então f é contínua se, e somente se, $f_i \circ f : Z \longrightarrow Y_i$ é contínua para todo $i \in I$.

Demonstração. (1) Note que temos $\Phi \subset \tau$, assim para cada $i \in I$ fixado, dado A_i um aberto de Y_i, segue que $f_i^{-1}(A_i) \in \Phi \subset \tau$, o que é suficiente para nos mostrar a continuidade de f_i.

(2) Seja Δ uma topologia satisfazendo *(1)*. Uma vez que cada f_i é contínua, temos que os conjuntos da forma $f_i^{-1}(A_i)$ com A_i aberto de Y_i pertencem a Δ. Dessa maneira vale $\Phi \subset \Delta$, pois pela segunda propriedade da definição de topologia, Δ absorve todas as interseções finitas de seus elementos. Já a terceira propriedade da definição de topologia nos diz que Δ absorve as uniões arbitrárias de seus próprios elementos, em particular as uniões de elementos de Φ, mas o conjunto dessas uniões é exatamente a topologia τ, ou seja, temos $\tau \subset \Delta$.

(3) Se Δ é a interseção de todas as topologias que tornam as funções f_i contínuas, pelo item *(1)* podemos concluir que $\Delta \subset \tau$, pois a própria topologia τ torna todas as funções f_i contínuas. Por outro lado, Δ também faz com que as funções f_i sejam contínuas, logo pelo item *(2)* também temos a inclusão contrária $\tau \subset \Delta$.

(4) Sendo f_i contínua para cada $i \in I$, pela Proposição 2.38 temos a implicação

$$x_n \longrightarrow x \Rightarrow f_i(x_n) \longrightarrow f_i(x).$$

Reciprocamente, seja U uma aberto de τ contendo $x \in X$. Então existe $U_\lambda \in \Phi$ tal que

$$x \in U_\lambda \subset U.$$

Segue da definição de U_λ que $U_\lambda = \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(A_i)$, com $J \subset I$ finito. Portanto, temos que $f_i(x) \in A_i$, $\forall i \in J$. Assim, usando a hipótese, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_i(x_n) \in A_i, \ \forall n \geq n_i,$$

para cada $i \in J$. Fixando $m = \max\{n_i : \ i \in J\}$, obtemos $f_i(x_n) \in A_i$ para todo $n \geq m$ e todo $i \in J$, mostrando que

$$x_n \in f_i^{-1}(A_i), \ \forall i \in J \ e \ n \geq m,$$

implicando em $x_n \in U_\lambda \subset U$ para todo $n \geq m$, ou seja, $x_n \longrightarrow x$ em (X, τ).

(5) Se f é contínua, então pela Proposição 2.34 temos que $f_i \circ f$ é contínua para cada $i \in I$.

Reciprocamente, seja U um aberto de (X, τ). vamos verificar que $f^{-1}(U)$ é um aberto de Z, de onde podemos concluir que f é contínua pela Teorema 2.35. Temos que

$$U = \bigcup_{\text{qualquer}} U_\lambda, \text{ onde } U_\lambda = \bigcap_{\text{finita}} O_i \text{ e } O_i = f_i^{-1}(A_i).$$

Segue da teoria de conjuntos que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\text{qualquer}} f^{-1}(U_\lambda) = \bigcup_{\text{qualquer}} \left(\bigcap_{\text{finita}} f^{-1}(O_i) \right).$$

Desde que $O_i = f_i^{-1}(A_i)$ com A_i aberto de Y_i, temos

$$f^{-1}(O_i) = f^{-1}(f_i^{-1}(A_i)) = (f_i \circ f)^{-1}(A_i),$$

mostrando que $f^{-1}(O_i)$ é aberto em Z. Portanto, $f^{-1}(U)$ é um aberto em Z. $\square$

2.2.2 A topologia fraca em um espaço normado

Se E é um espaço vetorial normado, consideremos a seguinte família de topologias em E,

$$T = \{\tau :\ \varphi : (E, \tau) \longrightarrow \mathbb{K} \text{ é contínuo para todo } \varphi \in E'\}.$$

Claramente esta família é não vazia. Podemos então tomar em E a menor topologia que mantém todos funcionais de E' ainda contínuos, isto é, essa topologia é dada pela intersecção de todos elementos de T.

Definição 2.70. *A topologia fraca no espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E')$, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E'$. Quando uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E converge para x na topologia fraca escrevemos $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Observação 2.10. *A notação $\sigma(E, E')$ nos sugere que E é o conjunto onde queremos considerar uma topologia, e E' é a família de funções ou índices no qual será usada para gerar a topologia de E.*

As primeiras propriedades básicas da topologia fraca seguem, basicamente, da construção geral que foi feita anteriormente.

Proposição 2.71. *Seja E um espaço normado. Então:*

(1) Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, ou seja, para todo $\varphi \in E'$, $\varphi : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínuo.

(2) Para cada $x_0 \in E$, os conjuntos da forma

$$V_{J,\epsilon} = \{x \in E :\ |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \epsilon\ \forall j \in J\},$$

onde J é um conjunto finito, $\varphi_j \in E'$ para todo $j \in J$ e $\epsilon > 0$, formam uma base local em x_0 para a topologia fraca.

(3) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$.

(4) Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \longrightarrow (E, \sigma(E, E'))$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, $\varphi \circ f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua para todo $\varphi \in E'$.

Demonstração. Os itens *(1)*, *(3)* e *(4)* seguem imediatamente da Proposição 2.69.

(2) Seja U um aberto contendo x_0 na topologia fraca. Pela Proposição 2.68 existem um conjunto finito J, funcionais $\varphi_j \in E'$ e abertos V_j em $\mathbb{K}$ contendo $\varphi_j(x_0)$ para todo $j \in J$, tais que $\bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(V_j)$ é um aberto da topologia fraca contendo x_0 e contido em U. Como J é finito e $\varphi_j(x_0) \in V_j$ para todo $j \in J$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\varphi_j(x_0), \epsilon) \subset V_j$ para todo $j \in J$. Disso resulta que

$$\begin{aligned} V_{J,\epsilon} &= \{x \in E : \ |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \epsilon \ \forall j \in J\} \\ &= \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(B(\varphi_j(x_0), \epsilon)) \subset \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(V_j) \subset U \end{aligned}$$

e portanto os conjuntos da forma $V_{J,\epsilon}$ formam um base local em x_0 para a topologia fraca. □

Corolário 2.72. *Em um espaço normado E, se $x_n \longrightarrow x$ então $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Demonstração. Se $x_n \longrightarrow x$, da continuidade dos funcionais de E' resulta que $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$. Pelo item *(3)* da proposição anterior, segue que $x_n \xrightarrow{w} x$. □

Pelos resultados já vistos podemos verificar que a topologia gerada a partir da norma de um espaço vetorial E contém a topologia fraca $\sigma(E, E')$, isto é, a topologia fraca tem menos abertos que a topologia da norma. Uma questão que pode ser levantada é se essas duas topologias coincidem ou não em certos casos, o interessante é que a resposta pode ser tanto verdadeira como falsa, dependendo apenas da dimensão do espaço E, e é isto que veremos na próxima proposição.

Proposição 2.73. *Seja E um espaço normado.*

(1) A topologia fraca está contida na topologia da norma.

(2) As topologias da norma e fraca coincidem se, e somente se, E tem dimensão finita.

Demonstração. *(1)* Basta observar que os funcionais $\varphi \in E'$ são contínuos na topologia da norma e que a topologia fraca é a menor topologia em E que mantém esse funcionais contínuos.

(2) Suponha que E tem dimensão finita. Do item *(1)* já sabemos que todo aberto da topologia fraca é também aberto da topologia da norma. Basta então provar que abertos da topologia da norma são abertos fracos. Sejam então U um aberto não vazio da topologia da norma e $x_0 \in U$. Para provar que U é aberto na topologia fraca basta verificar que x_0 é ponto interior de U, ou seja, mostrar a existência de um aberto fraco que contem x_0 e que esteja contido em U. Consideremos então $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset U$ e fixemos uma base $\{e_i, \ldots, e_n\}$ de E com $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, considere o funcional

$$\varphi_j : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

que leva $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ em $\varphi_j(x) = x_j$. Note que cada φ_j é linear e contínuo pelo fato de E ter dimensão finita. Pelo item *(2)* da Proposição 2.71 sabemos que

$$V = \left\{x \in E: \ |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \frac{r}{2n}, \ j = 1, \ldots, n\right\}$$

é um aberto da topologia fraca contendo x_0. Além disso, dado $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$, escrevendo $x_0 = \sum_{i=1}^n x_{0,i} e_i$ temos

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \left\| \sum_{j=1}^n (x_j - x_{0,j}) e_i \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j - x_{0,j}| \\ &= \sum_{j=1}^n |\varphi_j(x - x_0)| < \sum_{j=1}^n \frac{r}{2n} = \frac{r}{2} < r. \end{aligned}$$

Logo $V \subset B(x_0, r) \subset U$, como queríamos.

Suponhamos agora que E tenha dimensão infinita. Seja $S = \{x \in E: \ \|x\| = 1\}$ a esfera unitária de E. É conhecido que S é fechado na topologia da norma. Basta então mostrar que S não é fechado na topologia fraca, pois assim teremos $S^{\complement}$ um aberto na topologia da norma que não está na topologia fraca. Para isso mostraremos que o conjunto $\{x \in E: \ \|x\| < 1\}$ está contido no fecho de S na topologia fraca. Seja $x_0 \in E$ com $\|x_0\| < 1$ e seja V um aberto na topologia fraca contendo x_0. Para verificarmos que x_0 pertence ao fecho de S na topologia fraca, usaremos a caracterização da Proposição 2.15. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$V = \{x \in E: \ |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \epsilon, \ j = 1, \ldots, n\},$$

como visto no item *(2)* da Proposição 2.71. Vejamos que existe $y_0 \in E \setminus \{0\}$ tal que $\varphi_j(y_0) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. De fato, caso contrário o operador linear

$$T: E \longrightarrow \mathbb{K}^n, \ T(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

seria injetor, mas isso não ocorre pois E tem dimensão infinita e $\mathbb{K}^n$ dimensão n. Podemos agora considerar a função $r(t) = \|x_0 + t y_0\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como r é contínua, $r(0) = \|x_0\| < 1$ e $\lim_{t \to \infty} r(t) = \infty$, o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de um numero real t_0 tal que $\|x_0 + t_0 y_0\| = r(t_0) = 1$. Portanto $x_0 + t_0 y_0 \in S \cap V$ já que

$$|\varphi_j(x_0 + t_0 y_0) - \varphi_j(x_0)| = |\varphi_j(t_0 y_0)| = |t_0| \cdot |\varphi_j(y_0)| = |t_0| \cdot 0 = 0 < \epsilon$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. □

Denotemos por $(E, \sigma(E, E'))'$ o conjunto de todos os funcionais lineares em E que são contínuos quando E está munido da topologia fraca.

Corolário 2.74. *$E' = (E, \sigma(E, E'))'$ para todo espaço normado E.*

Demonstração. A Proposição 2.71*(1)* nos mostra que todo funcional linear contínuo é fracamente contínuo, isto é, $E' \subset (E, \sigma(E, E'))'$.

Para verificar a outra inclusão, tomemos $\varphi \in (E, \sigma(E, E'))'$ e $A \subset \mathbb{K}$ um aberto qualquer. Temos que $\varphi^{-1}(A) \in \sigma(E, E')$ pela caracterização do Teorema 2.35. Pela Proposição 2.73*(1)* segue que $\varphi^{-1}(A) \in \sigma(E, E') \subset \tau$, onde τ é a topologia proveniente da norma do espaço E. Novamente pelo Teorema 2.35, segue que φ é contínuo com a topologia da norma, ou seja, $\varphi \in E'$. □

2.2.3 A topologia fraca-estrela

Para todo espaço normado E, podemos considerar seu dual E'. Visto que E' é um espaço normado munido com a norma do supremo, podemos então considerar o seu dual, chamado de bidual de E e denotado por E'', ou seja, $E'' = (E')'$. Pode ser verificado que o espaço E se encontra dentro de seu bidual (ver [6]), no sentido de que existe uma isometria linear (operador linear que preserva a norma) entre E e E''.

Observação 2.11. *No que se segue, se $f : V \longrightarrow W$ é um operador entre espaço vetoriais, $\langle f, v\rangle$ representará a imagem de $v \in V$ por f.*

Proposição 2.75. *Para todo espaço normado E, o operador*

$$P : E \longrightarrow E'',\ \langle P(x), \varphi\rangle = \langle \varphi, x\rangle$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in E'$ é linear.

Demonstração. Dados $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos,

$$\begin{aligned}
\langle P(x + \alpha y), \varphi\rangle &= \langle \varphi, x + \alpha y\rangle = \varphi(x + \alpha y) \\
&= \varphi(x) + \alpha\varphi(y) \\
&= \langle \varphi, x\rangle + \alpha \langle \varphi, y\rangle \\
&= \langle P(x), \varphi\rangle + \alpha \langle P(y), \varphi\rangle \\
&= \langle P(x) + \alpha P(y), \varphi\rangle
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in E'$, ou seja, $P(x + \alpha y) = P(x) + \alpha P(y)$ e o resultado segue. □

Observação 2.12. *O operador linear P visto acima é chamado de mergulho canônico. Para cada $x \in E$ podemos escrever $P(x) \in E''$ por P_x para simplificar a notação.*

Observação 2.13. *O operador P da ultima proposição também será injetivo, e para a prova deste fato se faz necessário o uso do famoso Teorema de Hahn-Banach que pode ser encontrado em [6].*

Observação 2.14. *Quando o mergulho canônico P for sobrejetor dizemos que o espaço E é reflexivo.*

No dual E' de um espaço normado E, até o momento é possível considerarmos a topologia da norma e a topologia fraca $\sigma(E', E'')$, que é a topologia gerada pelos elementos de E''. Agora considerando o mergulho canônico $P : E \longrightarrow E''$, a imagem $P(E)$ se torna um conjunto notável de funções definidas em E', e é a partir desse conjunto que definimos a topologia fraca-estrela em E'.

Definição 2.76. *A topologia fraca-estrela no dual E' do espaço normado E, denotada por $\sigma(E', E)$, é a topologia em E' gerada pelas funções pertencentes ao conjunto $P(E) = \{P_x : \ x \in E\}$.*

Quando uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E' converge para $\varphi \in E'$ na topologia fraca-estrela escrevemos $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Como no caso da topologia fraca, as primeiras propriedades da topologia fraca-estrela seguem da Proposição 2.69.

Proposição 2.77. *Seja E um espaço normado. Então:*

(1) Para todo $x \in E$, $P_x : (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.

(2) Para cada $\varphi_0 \in E'$, os conjuntos da forma

$$W_{I,\epsilon} = \{\varphi \in E' : \ |P_{x_i}(\varphi) - P_{x_i}(\varphi_0)| = |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \epsilon \ \forall i \in I\},$$

onde I é um conjunto finito, $x_i \in E$ para todo $i \in I$ e $\epsilon > 0$, formam uma base local em φ_0 para a topologia fraca-estrela.

(3) Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E'. Então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$.

(4) Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \longrightarrow (E', \sigma(E', E))$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, $P(x) \circ f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua para todo $x \in E$.

Demonstração. Os itens *(1)*, *(3)* e *(4)* seguem imediatamente da Proposição 2.69, lembrando que a topologia $\sigma(E', E)$ é gerada pela família de funções $\{P_x\}_{x\in E} = P(E)$.

(2) Seja U um aberto contendo φ_0 na topologia fraca-estrela. Pela Proposição 2.68 existem um conjunto finito I, funcionais $P_{x_i} \in P(E) \subset E''$ e abertos W_i em $\mathbb{K}$ contendo $P_{x_i}(\varphi_0)$ para todo $i \in I$, tais que $\bigcap_{i\in I} P_{x_i}^{-1}(W_i)$ é um aberto da topologia fraca-estrela contendo φ_0 e contido em U. Como I é finito e $P_{x_i}(\varphi_0) \in W_i$ para todo $i \in I$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(P_{x_i}(\varphi_0), \epsilon) \subset W_i$ para todo $i \in I$. Disso resulta que

$$\begin{aligned} W_{I,\epsilon} &= \{\varphi \in E' : \ |P_{x_i}(\varphi) - P_{x_i}(\varphi_0)| = |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \epsilon \ \forall i \in I\} \\ &= \bigcap_{i\in I} P_{x_i}^{-1}(B(P_{x_i}(\varphi_0), \epsilon)) \subset \bigcap_{i\in I} P_{x_i}^{-1}(W_i) \subset U. \end{aligned}$$

Portanto os conjuntos da forma $W_{I,\epsilon}$ formam um base local em φ_0 para a topologia fraca-estrela. $\square$

Denotemos por $(E', \sigma(E', E))'$ o espaço formado pelos funcionais lineares de E' em $\mathbb{K}$ que são contínuos na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$. Pelo item *(1)* da proposição anterior sabemos que $P(E) \subset (E', \sigma(E', E))'$. Para verificarmos a inclusão inversa precisamos do seguinte resultado de Álgebra Linear.

Lema 2.5. *Sejam V um espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionais lineares em V tais que $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$. Então existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$.*

Demonstração. Considere as transformações lineares

$$T : V \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ T(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \text{ e}$$

$$U : T(V) \longrightarrow \mathbb{K},\ U(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = \varphi(x).$$

Vejamos que U de fato está bem definida. Se $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = (\varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))$, então $(\varphi_1(x-y), \ldots, \varphi_n(x-y)) = (0, \ldots, 0)$, e neste caso $(x-y) \in \bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$. Daí, por hipótese concluímos que $(x-y) \in \ker(\varphi)$ e portanto $\varphi(x) = \varphi(y)$. A linearidade de U é imediata da linearidade dos funcionais $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Seja $\overline{U} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ uma extensão linear de U. Da representação matricial das transformações lineares entre espaços de dimensão finita existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$\overline{U}(z_1, \ldots, z_n) = \textstyle\sum_{i=1}^n a_i z_i \text{ para todos } z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{K}.$$

Em particular, temos

$$\varphi(x) = U(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = \overline{U}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x),\ \forall x \in V.$$

□

Proposição 2.78. *Sejam E um espaço normado e $f : (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear e contínuo. Então existe $x \in E$ tal que $f = P(x)$. Em outras palavras, $(E', \sigma(E', E))' = P(E)$.*

Demonstração. Como f é contínuo na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ e $f(0) = 0$, existe uma vizinhança V da origem em E' na topologia fraca-estrela tal que $|f(\varphi)| = |f(\varphi) - f(0)| < 1$ para todo funcional $\varphi \in V$. Da Proposição 2.77*(2)* podemos tomar V da forma

$$\begin{aligned} V &= \{\varphi \in E' :\ |P_{x_i}(\varphi) - P_{x_i}(0)| = |\varphi(x_i) - 0(x_i)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\} \\ &= \{\varphi \in E' :\ |\varphi(x_i)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

onde $\epsilon > 0$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$. Se $\varphi \in \bigcap_{i=1}^n \ker(P_{x_i})$, então $P_{x_i}(\varphi) = \varphi(x_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, daí temos claramente que $\varphi \in V$. Neste caso, para todo $k \in \mathbb{N}$ vale $(k\varphi)(x_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, e portanto $k\varphi \in V$. Daí temos que $|f(k\varphi)| < 1$, ou seja, $|f(\varphi)| < \frac{1}{k}$ para todo k natural, de modo que $f(\varphi) = 0$. Isso nos mostra que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(P_{x_i}) \subseteq \ker(f)$. Pelo Lema 2.5 existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i P(x_i) = P\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right).$$

□

Como esse resultado podemos estabelecer a relação que existe entre a topologia fraca e fraca-estrela.

Proposição 2.79. *Seja E um espaço normado.*

(1) Em E', a topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ está contida na topologia fraca $\sigma(E', E'')$.

(2) As topologias fraca $\sigma(E', E'')$ e fraca-estrela $\sigma(E', E)$ coincidem em E' se, e somente se, E é reflexivo, isto é, se o mergulho canônico P for sobrejetivo.

Demonstração. (1) A topologia fraca $\sigma(E', E'')$ mantém contínuos todos os funcionais de E'', em particular mantém contínuos os funcionais da forma $P(x)$ com $x \in E$. Como a topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ é a menor topologia que mantém os funcionais em $P(E)$ contínuos, resulta que $\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'')$.

(2) Se E é reflexivo, $\sigma(E', E)$ e $\sigma(E', E'')$ coincidem com a menor topologia em E' que mantém contínuos os funcionais em $P(E) = E''$, logo são iguais. Reciprocamente, suponhamos que E não seja reflexivo. Neste caso existe $f \in E''$ que não pertence a $P(E)$. Então f é contínuo na norma de E', e portanto contínuo na topologia fraca $\sigma(E', E'')$ pelo Corolário 2.74. Mas pela Proposição 2.78 sabemos que f não é contínuo na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$, o que prova que as duas topologias não coincidem. □

Note que se estivermos trabalhando com um espaço normado E de dimensão finita, temos que $\dim(E') = \dim(E) \cdot \dim(\mathbb{K})$, ou seja, $\dim(E') = \dim(E)$. Dessa maneira,

$$\dim(E'') = \dim(E') = \dim(E).$$

Logo pela Proposição 2.75, Observação 2.13 e pelo Teorema do Núcleo e da Imagem podemos concluir que

$$\dim(E) = \dim(P(E)) = \dim(E'').$$

Daí, chegamos em $P(E) = E''$ e consequentemente que E é reflexivo. Nesse caso, pela Proposição 2.79 temos que a topologia fraca e fraca-estrela coincidem. Já pela Proposição 2.73, a topologia fraca coincide com a topologia da norma. Com isso concluímos que em espaços normados de dimensão finita a topologia da norma, fraca e fraca-estrela do seu dual coincidem.

2.2.4 Hiperplanos

Já é de nosso conhecimento que os planos em $\mathbb{R}^3$ são os conjuntos da forma

$$W = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle w, v\rangle = C\}, \tag{2.4}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual, $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e $C \in \mathbb{R}$. Isso nada mais é do que um caso particular dos hiperplanos em espaços vetoriais que veremos a seguir.

Definição 2.80. *Seja V um espaço vetorial real não nulo. Um hiperplano de V é um subespaço $W \neq V$ tal que se W_1 é um subespaço de V e $W \subseteq W_1$, então $W_1 = V$ ou $W_1 = W$.*

Note que no caso $C = 0$ em (2.4), W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Além disso, não é tão complexo verificar que W é um hiperplano de V, já que $\dim(W) = 2$. Veja também que podemos considerar f_v o funcional linear dado por $f_v(w) = \langle w, v\rangle$ e definir W como sendo o núcleo de f_v, ou seja, $W = f_v^{-1}(0) = \ker(f_v)$.

No geral isso também ocorre, isto é, os hiperplanos são exatamente os núcleos dos funcionais lineares não nulos.

Proposição 2.81. *Sejam V um espaço vetorial, $V \neq \{0\}$, e W um subespaço de V. Então W é um hiperplano de V se, e somente se, existe um funcional linear não nulo $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\ker(f) = W$.*

Demonstração. Suponha que W seja um hiperplano de V. Como $W \neq V$, podemos tomar $v_0 \in V \setminus W$. Considerando agora o espaço $W_1 = W + \operatorname{span}(\{v_0\})$, temos $W \subset W_1$ e $W \neq W_1$, donde concluímos que $W_1 = V$. Vejamos agora que cada $v \in V = W + \operatorname{span}(\{v_0\})$ é escrito de modo único como $v = u + av_0$. Sejam $u_1, u_2 \in W$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$u_1 + a_1 v_0 = u_2 + a_2 v_0,$$

então $u_1 - u_2 = (a_2 - a_1)v_0 \in W \cap [\{v_0\}] = \{0\}$, o que nos mostra que $u_1 = u_2$ e $a_1 = a_2$. Da unicidade da representação de cada elemento de V, é imediato que o funcional

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R},\ f(u + av_0) = a,$$

é não nulo, linear e $\ker(f) = W$.

Reciprocamente, seja $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear não nulo tal que $\ker(f) = W$. Sendo f não nulo, temos que $\ker(f) \neq V$. Seja W_1 subespaço de V tal que $\ker(f) \subseteq W_1$. Vejamos que se $\ker(f) \neq W_1$, então $W_1 = V$. Suponhamos então $\ker(f) \neq W_1$, e tomemos $v_0 \in W_1 \setminus \ker(f)$. Dado $v \in V$, tomando $u = v - \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0$ temos que $u \in \ker(f) \subset W_1$, pois

$$f(u) = f\left(v - \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(v_0)} f(v_0) = 0.$$

Logo, $v = u + \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0 \in W_1$, e temos o resultado. $\square$

Se H é um hiperplano de V e $v_0 \in V$, dizemos que o conjunto

$$v_0 + H = \{v_0 + v : \ v \in H\}$$

é um hiperplano afim de V. Da proposição anterior segue que os hiperplanos afins de V são precisamente os conjuntos da forma

$$\{v \in V : \ f(v) = C\},$$

onde f é um funcional linear não nulo em V e C é um número real.

Definição 2.82. *Seja V um espaço vetorial normado. Dizemos que um subconjunto $E \subset V$ é um espaço Euclidiano afim n-dimensional, se E está munido da topologia proveniente da norma e exite $x_0 \in E$ tal que $(-x_0)+E = \{-x_0+x : \ x \in E\}$ é um espaço vetorial de dimensão n.*

Nas condições da definição acima, se V tem dimensão $n+1$, podemos considerar E como sendo $\mathbb{R}^n$ para verificar propriedades topológicas (como conexidade e compacidade) e algébricas (como convexidade), pois E será a imagem de um hiperplano afim de $\mathbb{R}^{n+1}$ por um isomorfismo, e um hiperplano afim em $\mathbb{R}^{n+1}$ "se comporta como $\mathbb{R}^n$". Essas ideias serão importantes para os resultados do próximo capítulo.

3 O Problema de Gurariy

As noções de lineabilidade e espaçabilidade foram originalmente cunhadas por Vladimir Gurariy e elas aparecem pela primeira vez em [12]. Durante a última década, muitos autores têm investido muito tempo e esforço estudando casos especiais de lineabilidade em conjuntos patológicos de funções com valores reais.

A maioria dos resultados obtidos dessa teoria foram positivos, no sentido de que os conjuntos considerados eram (geralmente) lineáveis. Desse modo, atualmente, alguns autores buscam encontrar subconjuntos não lineáveis (não triviais). Esta teoria experimentou um rápido desenvolvimento na última década. No entanto, existem muitos problemas ainda não resolvidos. Neste capítulo, apresentaremos uma prova do problema colocado por Gurariy durante um seminário de Análise não Linear na Kent State University (Kent, Ohio, USA) no ano letivo de 2003/2004, o qual foi demonstrado recentemente por L. Bernal-González, H. J. Cabana-Méndez, G. A. Muñoz-Fernández, e J. B. Seoane-Sepúlveda em [4].

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $C(A)$ o conjunto das funções contínuas $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Designamos por $\hat{C}(A)$ o subconjunto de $C(A)$ das funções que atingem o seu máximo em um único ponto. O problema de Gurariy consiste na seguinte questão:

Questão. Existe um espaço vetorial α-dimensional, com $\alpha > 2$, onde todo elemento diferente de zero pertença a $\hat{C}(\mathbb{R})$?

A existência de espaços bidimensionais em $\hat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$ foi provada pelo próprio Gurariy juntamente com Quarta em [12], onde no mesmo artigo afirma não ter conhecimento de espaços com dimensões maiores. Na busca de uma resposta ao problema levantado por Gurariy, em [5], os autores provam o seguinte resultado, que generaliza um dos resultados principais de [12]:

Teorema 3.1. *Se K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e V é um subespaço de $C(K)$ contido em $\hat{C}(K) \cup \{0\}$, então* $\dim(V) \leq n$.

Um dos pontos interessantes da prova do Teorema 3.1 é que, enquanto Gurariy e Quarta usaram ferramentas clássicas de Análise Real em [12], o Teorema 3.1 requer uma técnica topológica (a saber, o Teorema de Borsuk-Ulam).

Infelizmente, não foram obtidos mais avanços em relação a questão original. Aqui, apresentaremos a solução de [4] (que também pode ser verificada em [7]) com a maior riqueza de detalhes possível, fechando o problema no negativo.

Novamente, a técnica empregada em [4] está longe de ser uma ferramenta da Análise Real clássica. Devemos usar uma combinação de ferramentas de Topologia Geral, Geometria e Análise Complexa. Em particular, devemos usar decomposições (ou partições) de variedades, um tópico que remonta ao trabalho de R. L. Moore na década de 20 (ver [19]), e isso foi renovado pelos resultados do R. H. Bing na década de 50. Esta área de pesquisa provou ser de extrema importância para a recente caracterização de variedades dimensionalmente superiores em termos de propriedades topológicas elementares. Em particular faremos uso do Teorema de Moore (Teorema 3.57).

3.1 Lineabilidade

Lembramos que um espaço vetorial topológico é um espaço vetorial com uma topologia onde as operações de soma e produto por escalar são contínuas. O "tamanho linear" de um subconjunto em tal espaço pode ser descrito com as noções de lineabilidade e espaçabilidade, dados na próxima definição.

Definição 3.2. *Seja X um espaço vetorial topológico, M um subconjunto de X e μ um número cardinal.*

(1) M é dito ser μ-lineável se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão μ.

(2) M é dito ser μ-espaçável se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial fechado de dimensão μ.

(3) M é dito μ-denso-lineável se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial denso de dimensão μ.

É comum simplesmente referir-se ao conjunto M como lineável, espaçável ou denso-lineável, se o respectivo subespaço existente for infinito dimensional, ou seja, se $\mu \geq \aleph_0$. Observe que se estivermos somente no ambiente de espaços vetoriais (sem topologia envolvida), então a noção de lineabilidade ainda é válida. O máximo dos números cardinais μ de modo que M seja μ-lineável pode não existir. O seguinte exemplo pode ser esclarecedor.

Exemplo 3.3. *Considere $\mathbb{K}[X]$ o espaço de polinômios em X com escalares no corpo $\mathbb{K}$. Sejam $j_1 \leq k_1 < j_2 \leq \cdots \leq k_m < j_{m+1} \leq \cdots$ números inteiros positivos tais que $k_n - j_n \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, e considere*

$$M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=j_n}^{k_n} a_i X^i : \ a_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Os conjuntos $\left\{ \sum_{i=j_n}^{k_n} a_i X^i : \ a_i \in \mathbb{K} \right\}$, $\left\{ \sum_{i=j_m}^{k_m} b_i X^i : \ b_i \in \mathbb{K} \right\}$ possuem apenas o polinômio nulo em comum para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ distintos, pois se $m > n$, então

$k_n < j_m$, e $\sum_{i=j_n}^{k_n} a_i X^i = \sum_{i=j_m}^{k_m} b_i X^i$ implica em

$$\sum_{i=j_n}^{k_n} a_i X^i + \sum_{i=j_m}^{k_m} 0X^i = \sum_{i=j_n}^{k_n} 0X^i + \sum_{i=j_m}^{k_m} b_i X^i,$$

ou seja, $a_i = 0 = b_i$ para todo i.

Como $\{X^i \in \mathbb{K}[X] : i \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{K}[X]$, temos que o conjunto $\left\{\sum_{i=j_n}^{k_n} a_i X^i : a_i \in \mathbb{K}\right\}$ é um espaço vetorial de dimensão $k_n - j_n + 1$. Logo sempre é possível encontrar um espaço m-dimensional em $M \cup \{0\}$, uma vez $\lim_{n \leftrightarrow \infty} (k_n - j_n + 1) = \infty$.

Por outro lado, não existe espaço $\aleph_0$-dimensional em $M \cup \{0\}$, pois se V fosse um tal espaço, existiriam $p(X)$ e $q(X)$ polinômios linearmente independentes em V tais que $p(X) \in \left\{\sum_{i=j_n}^{k_n} a_i X^i : a_i \in \mathbb{K}\right\}$ e $q(X) \in \left\{\sum_{i=j_m}^{k_m} a_i X^i : b_i \in \mathbb{K}\right\}$ para $n, m \in \mathbb{N}$ com $m > n$. Porém,

$$p(X) + q(X) = \sum_{i=j_n}^{k_m} c_i X^i$$

não pertence a M, o que é um contradição.

Um conjunto é maximal lineável ou maximal espaçável se a dimensão do espaço linear existente é igual a $\dim(X)$.

Exemplo 3.4. *Se V é um espaço vetorial, então um subespaço W de V é α-lineável para todo $\alpha \leq \dim(W)$.*

Exemplo 3.5. *O conjunto $C^\infty((0,1))$ das funções infinitamente diferenciáveis no intervalo $(0,1)$ é espacável em $C((0,1))$ (ver [24]).*

Exemplo 3.6. *Como uma consequência do Teorema de Aproximação de Weierstraas, segue que o conjunto de todos polinômios é $\aleph_0$-denso-lineável em $C([0,1])$. Com isso também inferimos que $C^\infty([0,1])$ é $\mathfrak{c}$-denso-lineável em $C([0,1])$.*

3.2 A 2-lineabilidade de $\hat{C}(\mathbb{R})$

Nesta seção iremos verificar a 2-lineabilidade de $\hat{C}(\mathbb{R})$. Primeiramente faremos uma prova construtiva, exibindo a base de um espaço 2-dimensional contido em $\hat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$. Em seguida provaremos a n-lineabilidade do conjunto $\hat{C}(D)$, onde D é um espaço topológico satisfazendo certas condições. A 2-lineabilidade de $\hat{C}(\mathbb{R})$ decorre naturalmente como um caso particular $\hat{C}(D)$. As referências [7], [4], [21] e [12] podem ser uteis para o melhor entendimento de alguns resultados apresentados nesta seção.

Teorema 3.7. *$\hat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável.*

Demonstração. Consideremos as funções f, g definidas por

$$f(t) = \mu(t)\cos(4\arctan(|t|))$$

e

$$g(t) = \mu(t)\mathrm{sen}(4\arctan(|t|)),$$

onde μ é dada por

$$\mu(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } t \leq 0, \\ 1, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Da continuidade das funções cosseno, seno, valor absoluto, arco-tangente e μ, concluímos que f e g são contínuas.

Vejamos que f e g são linearmente independentes. De fato, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \mu(t)(\alpha\cos(4\arctan(|t|)) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(|t|))) = 0,$$

então

$$\alpha\cos(4\arctan(|t|)) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(|t|)) = 0,$$

uma vez que $\mu(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\cos(4\arctan(0)) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(0)) \\ &= \alpha\cos(0) + \beta\mathrm{sen}(0) = \alpha. \end{aligned}$$

Para $t = \sqrt{3}$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\cos(4\arctan(\sqrt{3})) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(\sqrt{3})) \\ &= 0\cos(4\arctan(\sqrt{3})) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(\sqrt{3})) \\ &= \beta\mathrm{sen}\left(4\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Como $\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \neq 0$, temos $\beta = 0$, o que nos mostra que f e g são linearmente independentes.

Vejamos agora que toda combinação linear não trivial de f e g pertence a $\hat{C}(\mathbb{R})$. De fato, dado $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, sabemos que existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cos(\theta), \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\mathrm{sen}(\theta)).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha f(t) + \beta g(t) =& \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(\theta)\cdot f(t) + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{sen}(\theta)\cdot g(t) \\
=& \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(\theta)\cdot \mu(t)\cos(4\arctan(|t|)) \\
&+ \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{sen}(\theta)\cdot \mu(t)\mathrm{sen}(4\arctan(|t|)) \\
=& \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot \mu(t)\cdot(\cos(\theta)\cdot\cos(4\arctan(|t|)) + \mathrm{sen}(\theta)\cdot\mathrm{sen}(4\arctan(|t|))) \\
=& \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot \mu(t)\cdot\cos(\theta - 4\arctan(|t|)) \\
=& \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot \mu(t)\cdot\cos(4\arctan(|t|) - \theta).
\end{aligned}$$

Note que para $t \geq 0$, temos $\mu(t) = 1$ e $4\arctan(|t|) \in [0, 2\pi)$. Uma vez que a função $\cos(t)$ atinge o máximo uma única vez em $[-\theta, 2\pi-\theta)$, segue que

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\cos(4\arctan(|t|) - \theta)$$

atinge um único ponto de máximo quando $t \geq 0$ e o valor máximo atingido é $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > 0$. Para $t < 0$, segue que $0 < \mu(t) < 1$. Se for $\alpha\cos(4\arctan(|t|)) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(|t|)) \leq 0$, então

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \mu(t)(\alpha\cos(4\arctan(|t|)) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(|t|))) \leq 0 < \sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Se tivermos $\alpha\cos(4\arctan(|t|)) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(|t|)) > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\alpha f(t) + \beta g(t) &= \mu(t)(\alpha\cos(4\arctan(|t|)) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(|t|))) \\
&< \alpha\cos(4\arctan(|t|)) + \beta\mathrm{sen}(4\arctan(|t|)) \\
&= \alpha f(-t) + \beta g(-t) \\
&\leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2},
\end{aligned}$$

ou seja, $\alpha f + \beta g$ atinge um ponto de máximo uma única vez quando $t \geq 0$.

Portanto, qualquer combinação linear não trivial $\alpha f + \beta g$ pertence a $\hat{C}(\mathbb{R})$. Isso prova que $\mathrm{span}\{f, g\} \subset \hat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$, nos mostrando a 2-lineabilidade de $\hat{C}(\mathbb{R})$. □

Aqui relembramos a famosa desigualdade de Cauchy-Schwarz, omitindo sua demonstração, que pode ser encontrada em qualquer livro de Álgebra Linear.

Teorema 3.8 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja V um espaço com produto interno. Se u e v são elementos de V, então*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$$

e a igualdade é válida se, e somente se, os elementos u e v são linearmente dependentes.

No que se segue, usaremos em $\mathbb{R}^n$ a norma $\|\cdot\|$ proveniente do produto interno usual.

Teorema 3.9. *Sejam $n \geq 2$ e D um espaço topológico tal que exista uma bijeção contínua de D para S^{n-1}. Então $\hat{C}(D)$ é n-lineável.*

Demonstração. Seja $\pi_i : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção sobre a i-ésima coordenada, $i = 1, \ldots, n$, e tome $G : D \longrightarrow S^{n-1}$ uma bijeção contínua. Vejamos inicialmente que as funções π_i, $i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes. De fato, considere uma combinação linear qualquer

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i.$$

Se essa combinação não for trivial, ou seja, $a_i \neq 0$ para algum i, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0.$$

Logo, tomando

$$u = \frac{(a_1, \ldots, a_n)}{\|(a_1, \ldots, a_n)\|} \in S^{n-1},$$

temos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{a_i}{\|(a_1, \ldots, a_n)\|} = \frac{1}{\|(a_1, \ldots, a_n)\|} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0.$$

Agora, verifiquemos que toda combinação linear não trivial das funções π_i, $i = 1, \ldots, n$, possui apenas um único ponto de máximo. Considere $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i$, com $a_i \neq 0$ para algum i, e $x \in S^{n-1}$. Dessa maneira,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i(x) = \langle a, x \rangle,$$

onde $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Note que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$f(x) \leq \|a\| \cdot \|x\| = \|a\|.$$

Além disso temos que $\frac{a}{\|a\|} \in S^{n-1}$ e $f\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \left\langle a, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle = \frac{\langle a,a \rangle}{\|a\|} = \|a\|$, nos mostrando que $\frac{a}{\|a\|}$ é um ponto de máximo de f. Se $y \in S^{n-1}$ é um ponto de máximo de f, então

$$\langle a, y \rangle = \|a\| = \|a\| \cdot \|y\|,$$

ou seja, a e y são linearmente dependentes, daí chegamos $y = \frac{a}{\|a\|}$ ou $y = -\frac{a}{\|a\|}$. Como vale

$$f\left(-\frac{a}{\|a\|}\right) = -\|a\| < 0 < \|a\| = f\left(\frac{a}{\|a\|}\right),$$

concluímos que $y = \frac{a}{\|a\|}$ e temos a unicidade do ponto de máximo.

Consideremos agora o seguinte conjunto

$$\{\pi_i \circ G : \; i = 1, \ldots, n\}.$$

Uma vez que G e cada projeção π_i são contínuas, concluímos que $\pi_i \circ G$ é contínua para cada i. Se

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i(\pi_i \circ G) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i\right) \circ G = f \circ G$$

for uma combinação linear não trivial, temos $g \neq 0$ pela independência linear dos π_i, $i = 1, \ldots, n$, e pelo fato de G ser bijetiva. Além disso, como f atinge seu máximo em apenas um ponto de S^{n-1}, segue também da bijetividade de G, que g atinge seu máximo em apenas um ponto. Isso é suficiente para mostrar que $\mathrm{span}\{\pi_i \circ G : \; i = 1, \ldots, n\}$ é um espaço vetorial contido em $\hat{C}(D) \cup \{0\}$. $\square$

Corolário 3.10. *$\hat{C}[0, 2\pi)$ é 2-lineável.*

Demonstração. Basta considerarmos a bijeção contínua

$$G : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1$$

definida por $G(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$. $\square$

Teorema 3.11. *Sejam $n \geq 2$ e D um espaço topológico contendo um fechado Y tal que exista uma bijeção contínua $F : Y \longrightarrow S^{n-1}$ e uma extensão contínua de F, $G : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $\|G(x)\| < 1$ para todo $x \notin Y$. Então $\hat{C}(D)$ é n-lineável.*

Demonstração. Considere π_i a projeção sobre a i-ésima coordenada de $\mathbb{R}^n$. Note que $S^{n-1} \subset G(D)$, pois

$$S^{n-1} = F(Y) = G(Y) \subset G(D).$$

Além disso, temos $G(D) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \; \|x\| \leq 1\}$. Vejamos que qualquer combinação linear não trivial

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i : G(D) \longrightarrow \mathbb{R}$$

atinge o máximo em um único ponto $x_0 \in G(D)$ e que esse ponto necessariamente pertence a S^{n-1}. Restringindo f a S^{n-1}, o mesmo argumento usado na prova do teorema anterior nos mostra que existe único $x_0 \in S^{n-1}$ tal que $f|_{S^{n-1}}$ atinge seu máximo, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i(x_0)$$

para todo $x \in S^{n-1}$. Uma vez que para cada $x \in S^{n-1}$, seu oposto aditivo $-x$ também pertence a S^{n-1} e levando em conta que cada π_i é linear, temos que

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(-x) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(x_0).$$

Logo podemos concluir que para todo $x \in S^{n-1}$ vale

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(x)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(x_0). \tag{3.1}$$

Precisamos agora mostrar que se $y \in G(D) \setminus S^{n-1}$, então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(y) < \sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(x_0).$$

Se $y = 0$, a desigualdade é trivial. Consideremos então $y \neq 0$. Como $\|y\| < 1$ por hipótese, usando (3.1) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(y) &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(y)\right| \\
&= \|y\| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right| \\
&< \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} a_i\pi_i(x_0).
\end{aligned}$$

Pelos cálculos anteriores temos que a função $h = \sum_{i=1}^{n} a_i(\pi_i \circ G)$ atinge seu máximo em $z = F^{-1}(x_0)$, e esse também é único, pois $z_1 \neq z$ implica em $G(z_1) \neq G(z)$ e consequentemente $h(z_1) < h(z)$. Agora, como $S^{n-1} \subset G(D)$ e as funções π_i, $i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes em S^{n-1}, segue que $\pi_i \circ G$, $i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes em D. Tomando o espaço vetorial $\text{span}\{\pi_i \circ G : \ i = 1, \ldots, n\}$ temos o resultado. $\square$

Corolário 3.12. *O conjunto $\hat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável.*

Demonstração. Para $a, b \in \mathbb{R}^2$, considere $(a, b) = \{(1-\lambda)a + \lambda b : \ \lambda \in (0,1)\}$ o segmento de reta aberto. Tome o fechado $Y = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$, $F : [0, \infty) \longrightarrow S^1$ uma bijeção contínua dada por $F(t) = (\cos(2\pi \cdot (1 - e^{-t})), \text{sen}(2\pi \cdot (1 - e^{-t})))$ e $g : (-\infty, 0) \longrightarrow (F(0), (0,0))$ um homeomorfismo com

$$\lim_{t \to 0} g(t) = F(0).$$

Nessas condições podemos definir $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma extensão contínua de F, dada por

$$G(t) = \begin{cases} F(t) \text{ se } t \geq 0, \\ g(t) \text{ se } t < 0. \end{cases}$$

Observe que se $t \notin Y$, então $t \in (-\infty, 0)$. Uma vez que $(F(0), (0,0))$ é um segmento inteiramente contido na bola unitária aberta de $\mathbb{R}^2$, temos $\|G(t)\| = \|g(t)\| < 1$. Portanto, pelo teorema anterior $\hat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável. $\square$

3.3 Resultados de Geometria e Análise Complexa

Para chegarmos ao resultado principal deste trabalho necessitamos fazer uso de algumas ferramentas da Geometria e da Analise Complexa. Nesta seção vamos definir e relembrar tais ferramentas, omitindo as provas para aquelas que necessitam de uma atenção especial e um estudo mais detalhado.

Definição 3.13. *Seja V um espaço vetorial. Dados $x, y \in V$, definimos por:*

- *intervalo aberto de extremos x e y, o conjunto $(x, y) = \{ty + (1-t)x : \ t \in (0,1)\}$;*
- *intervalo fechado de extremos x e y, o conjunto $[x, y] = \{ty + (1-t)x : \ t \in [0,1]\}$;*
- *seguimento de reta aberto partindo de x com direção y, o conjunto $\{x + ty : \ t > 0\}$;*
- *seguimento de reta fechado partindo de x com direção y, o conjunto $\{x + ty : \ t \geq 0\}$.*

Definição 3.14. *Seja V um espaço vetorial. Definimos a envoltória convexa de um subconjunto $X \subset V$ como sendo o menor conjunto convexo que contém X, e denotamos tal conjunto por $\text{co}\{X\}$.*

Exemplo 3.15. *Se $X \subset V$ é convexo, então X é sua própria envoltória convexa.*

Exemplo 3.16. *Seja V um espaço vetorial normado, $x \in V$ e $r > 0$. A envoltória convexa de $X = \{y \in V : \ N(y - x) = r\}$ é dada por $\text{co}\{X\} = \{y \in V : \ N(y - x) \leq r\}$.*

Exemplo 3.17. *Dados $x, y \in V$, temos $\text{co}\{x, y\} = [x, y] = \{ty + (1-t)x : \ t \in [0,1]\}$.*

Proposição 3.18. *Seja A um espaço Euclidiano afim 2-dimensional e considere $\varnothing \neq C \subset A$ um conjunto convexo. Então, exatamente uma das seguintes propriedades é válida:*

(1) C é um segmento.

(2) $\text{int}(C) \neq \varnothing$.

Demonstração. Suponhamos que C não seja um segmento. Uma vez que $\operatorname{card}(C) \geq 2$, tome $x, y \in C$ com $x \neq y$. Agora, considere a reta r definida por x e y. Uma vez que C não é um segmento, existe $z \in C$ que não pertence a r. Considere agora a envoltória convexa de x, y, z (o triângulo de vértices x, y e z), denotado $\operatorname{co}\{x, y, z\}$. Temos que $C \supset \operatorname{int}(\operatorname{co}\{x, y, z\}) \neq \varnothing$, a partir do qual temos que $\operatorname{int}(C) \neq \varnothing$. □

Vejamos o análogo tridimensional da última proposição.

Proposição 3.19. *Seja A um espaço Euclidiano afim 3-dimensional e considere $\varnothing \neq C \subset A$ um conjunto convexo. Então, exatamente uma das seguintes propriedades é válida:*

(1) C está em um plano.

(2) $\operatorname{int}(C) \neq \varnothing$.

Demonstração. Suponha que C não esteja em um plano. Seja $x, y \in C$, com $x \neq y$, e seja r a reta definida por x e y. Uma vez que C não está em um plano, existe $z \in C$ que não pertencente a r, de modo que o espaço euclidiano afim gerado por x, y, z (isto é, o menor espaço euclidiano afim que contém $\{x, y, z\}$) é um plano $E \subset A$. Tomemos $w \in C \setminus E$. Agora temos que a tetraédrica de vértices x, y, z, w está contida em C e, daí, $\operatorname{co}\{x, y, z, w\} \subset C$. Portanto, como na prova da Proposição anterior, $\operatorname{int}(C) \neq \varnothing$. □

Lema 3.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado com interior não vazio. Se $z \in \operatorname{int}(A)$ e r é uma semirreta que parte de z, então r não pode intersectar*

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : \ B(x, r) \cap A \neq \varnothing \ e \ B(x, r) \cap A^{\complement} \neq \varnothing, \ \forall r > 0\}$$

em mais de um ponto.

Demonstração. Suponha que r intercepte ∂A em dois pontos diferentes x e y. Então um desses dois pontos, digamos x, está no interior do segmento $[z, y]$. Uma vez que $z \in \operatorname{int}(A)$, existe $\rho > 0$ tal que $B(z, \rho) \subset A$. Pela convexidade de A, para todo $w \in B(z, \rho)$ o segmento $[w, y]$ está contido em A, ou seja, $\bigcup_{w \in B(z,\rho)} [w, y] \subset A$.

Vejamos que $\bigcup_{w \in B(z,\rho)} [w, y]$ é uma vizinhança de x. Como $x \neq z$, $x \neq y$ e $x \in [z, y]$, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $x = (1 - \lambda)y + \lambda z$. Agora dado $x + \delta u \in B(x, \lambda\rho)$ (onde $\|u\| = 1$ e $0 < \delta < \lambda\rho$), temos que

$$\begin{aligned} x + \delta u &= (1 - \lambda)y + \lambda z + \delta u \\ &= (1 - \lambda)y + \lambda \left(z + \frac{\delta}{\lambda} u \right) \in \left[z + \frac{\delta}{\lambda} u, y \right], \end{aligned}$$

e uma vez que $z + \frac{\delta}{\lambda} u \in B(z, \rho)$, segue que $x + \delta u \in \bigcup_{w \in B(z,\rho)} [w, y]$, ou seja, $B(x, \lambda\rho) \subset \bigcup_{w \in B(z,\rho)} [w, y]$. Portanto $\bigcup_{w \in B(z,\rho)} [w, y]$ é de fato uma vizinhança de x que está contida em A. Isso contradiz que $x \in \partial A$. □

Teorema 3.20. *Seja A um espaço euclidiano afim n-dimensional e seja $C \subset A$ um subconjunto convexo e compacto tal que* $\text{int}(C) \neq \varnothing$. *Temos que ∂C é homeomorfo a S^{n-1} ($\partial C \simeq S^{n-1}$) .*

Demonstração. Pela compacidade de C existe $N > 0$ de modo que $C \subset B(0, N)$, logo para um ponto $z \in \text{int}(C)$ fixado e $u \in S^{n-1}$, o conjunto convexo $\{z + tu : \ t > 0\}$ (consequentemente conexo) contém pontos de C e de $C^{\complement}$, ou seja, a função contínua $f : \{z + tu : \ t > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, C) - d(x, C^{\complement})$ admite valores positivos e negativos. Sendo a imagem de f um conexo (intervalo contendo zero), existe $x_u \in \{z+tu : t > 0\}$ tal que $d(x_u, C) = d(x_u, C^{\complement}) = 0$, ou seja, $x_u \in \partial C$. Pelo lema anterior e pelo que foi visto agora, para todo $u \in S^{n-1}$ temos

$$\partial C \cap \{z + tu : \ t > 0\} = \{x_u\}.$$

Consideremos agora $h : S^{n-1} \longrightarrow \partial C$ definida por $h(u) = x_u$. Dado $y \in \partial C$, tome $\frac{y-z}{\|y-z\|} \in S^{n-1}$, dai para $t = \|y - z\| > 0$ segue que

$$z + \|y - z\| \frac{y - z}{\|y - z\|} = y,$$

nos mostrando que $h\left(\frac{y-z}{\|y-z\|}\right) = y$ e consequentemente a sobrejetividade de h. Dados $u, v \in S^{n-1}$ com $h(u) = h(v)$, existem $t_u, t_v > 0$ tais que $z + t_u u = z + t_v v$, ou seja, $t_u u = t_v v$ e consequentemente $\|t_u u\| = \|t_v v\|$. Como $\|u\| = \|v\| = 1$, $|t_u| = t_u$ e $|t_v| = t_v$, concluímos que $t_u = t_v$ e portanto $u = v$, de onde segue que h é injetiva.

Vejamos agora que h é contínua e consequentemente um homeomorfismo (Proposição 2.57). Suponhamos que exista $\epsilon > 0$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S^{n-1}$ convergindo para $u \in S^{n-1}$, com $\|x_{u_n} - x_u\| > \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Uma vez que para cada $v \in S^{n-1}$ vale

$$t_v = \|t_v v\| \leq \|x_v\| + \|z\| < 2N,$$

a sequência limitada de números reais t_{u_n} admite uma subsequência convergindo para $t \in \mathbb{R}$, que por questão de simplicidade consideremos essa subsequência sendo a própria sequência. Dessa maneira temos

$$\begin{aligned}
\|x_{u_n} - (z + tu)\| &= \|t_{u_n} u_n - tu\| \\
&= \|t_{u_n} u_n + tu_n - tu_n - t_u u\| \\
&\leq |t_{u_n} - t| \cdot \|u_n\| + |t| \cdot \|u_n - u\| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $x_{u_n} \longrightarrow z + tu \in \partial C$, mas o único ponto da forma $z + tu$ em ∂C é x_u, o que é uma contradição. Portanto temos que h é contínua e consequentemente um homeomorfismo. $\square$

A seguir, vamos relembrar alguns resultados bem conhecidos da Análise Complexa (que podem ser encontrados, por exemplo, em [18][17]). Eles também serão úteis no que se segue.

Definição 3.21. *Um subconjunto* $J \subset \mathbb{C}$ *é denominado curva de Jordan fechada, se existe um homeomorfismo* $\lambda : S^1 \longrightarrow J$.

Teorema 3.22 (Teorema da Curva de Jordan)**.** *Seja* $J \subset \mathbb{C}$ *uma curva de Jordan fechada. Então* $\mathbb{C} \setminus J$ *possui exatamente duas componentes conexas, umas das quais é limitada.*

Lembramos que um domínio - isto é, um conjunto não vazio, aberto e conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ - é considerado simplesmente conexo se contiver a componente conexa limitada de qualquer curva de Jordan fechada contida nele.

Exemplo 3.23. *Bolas abertas e* $\mathbb{C}$ *são exemplos de domínios simplesmente conexos.*

Proposição 3.24. *Um domínio* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é simplesmente conexo se, e somente se,* $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$ *é conexo.*

Corolário 3.25. *Seja* $\varnothing \neq F \subset S^2$ *um conjunto conexo fechado. Se* $S^2 \setminus F$ *é conexo, então existe um domínio simplesmente conexo* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *com* $S^2 \setminus F \simeq \Omega$.

Teorema 3.26. *Se* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é um domínio simplesmente conexo, então* $\Omega \simeq \mathbb{C}$.

3.4 A não 3-lineabilidade de $\hat{C}(\mathbb{R})$

A partir de agora será exibida uma série de resultados a fim de mostramos que $\hat{C}(\mathbb{R})$ não é 3-lineável. A ideia básica é seguir por contradição assumindo a existência de um espaço tridimensional $E \subset \hat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$. Consideramos em E a norma dada por

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Denotaremos também por S_E a esfera unitária do espaço E e por E' o espaço dual de E munido da norma

$$\|x'\| := \sup\{\langle x', f\rangle : \ f \in S_E\}.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos considerar o funcional avaliação $\delta_t : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\delta_t(f) = f(t)$. Claramente $\delta_t \in E'$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois

$$\delta_t(f) = f(t) \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty.$$

Como $\dim(E) = 3$, temos que a topologia de norma, a topologia fraca e a topologia fraca estrela coincidem, além de E ser um espaço de Banach.

Proposição 3.27. *A função* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow E'$ *dada por* $\varphi(t) = \delta_t$ *é contínua.*

Demonstração. Pela Proposição 2.77*(4)*, para verificarmos a continuidade de φ é suficiente mostrarmos que para cada $f \in E$, a função $P(f) \circ \varphi$ é contínua, onde $P(f) : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $P(f)(x') = x'(f)$. Para $f \in E$, observe que

$$(P(f) \circ \varphi)(t) = P(f)(\varphi(t)) = P(f)(\delta_t) = \delta_t(f) = f(t),$$

ou seja, $P(f) \circ \varphi = f$, e como f é contínua temos o resultado. □

Lema 3.2. *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é uma sequência convergindo para $f \in E$, então vale*

$$\lim_{n\to\infty} \max\{f_n(s) : \ s \in \mathbb{R}\} = \max\{f(s) : \ s \in \mathbb{R}\}.$$

Demonstração. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ o único ponto $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $\max\{f_n(s) : s \in \mathbb{R}\} = f_n(t_n)$ e também o único ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ de modo que $\max\{f(s) : \ s \in \mathbb{R}\} = f(t_0)$. Temos $f_n(t_0) \leq f_n(t_n)$ e $f(t_n) \leq f(t_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo

$$-\|f_n - f\|_\infty \leq f_n(t_0) - f(t_0) \leq f_n(t_n) - f(t_0) \leq f_n(t_n) - f(t_n) \leq \|f_n - f\|_\infty,$$

ou seja, $|f_n(t_n) - f(t_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty$. Portanto $f_n(t_n) \longrightarrow f(t_0)$ e segue o resultado. □

Corolário 3.28. *O conjunto*

$$J = \{t \in \mathbb{R} : \ \exists f \in S_E \textit{ tal que } \max\{f(s) : \ s \in \mathbb{R}\} = f(t)\}$$

é fechado.

Demonstração. Seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ uma sequência convergindo para $t \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $f_n \in S_E$ tal que

$$\max\{f_n(s) : \ s \in \mathbb{R}\} = f_n(t_n).$$

Desde que S_E é compacto, podemos assumir (tomando uma subsequência, se necessário) que $f_n \longrightarrow f$ para algum $f \in S_E$, logo

$$\begin{aligned} |\langle \delta_{t_n}, f_n\rangle - \langle \delta_t, f\rangle| &= |\langle \delta_{t_n}, f_n\rangle - \langle \delta_t, f_n\rangle + \langle \delta_t, f_n\rangle - \langle \delta_t, f\rangle| \\ &= |\langle \delta_{t_n} - \delta_t, f_n\rangle + \langle \delta_t, f_n - f\rangle| \\ &\leq \|\delta_{t_n} - \delta_t\| \cdot \|f_n\|_\infty + \|\delta_t\| \cdot \|f_n - f\|_\infty, \end{aligned}$$

donde pela Proposição 3.27 temos que $\langle \delta_{t_n}, f_n\rangle \longrightarrow \langle \delta_t, f\rangle$, implicando em

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle \delta_t, f\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \delta_{t_n}, f_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \max\{f_n(s) : \ s \in \mathbb{R}\} \\ &= \max\{f(s) : \ s \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

e assim $t \in J$, como desejado. $\square$

O conjunto J definido no Corolário 3.28 será bastante utilizado posteriormente e terá um papel crucial na prova do resultado principal deste trabalho. Note que $\mathrm{card}(J) \geq 2$, pois dado qualquer $f \in S_E$ existem únicos $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(t_1) = \max\{f(s) : \ s \in \mathbb{R}\}$ e $\max\{-f(s) : \ s \in \mathbb{R}\} = \min\{f(s) : \ s \in \mathbb{R}\} = f(t_2)$, e se fosse $t_1 = t_2$ teríamos f constante, o que é uma contradição. Por uma questão de simplificação de notação, iremos denotar o máximo de uma função $f \in E$ por

$$M(f) := \max\{f(s) : \ s \in \mathbb{R}\}.$$

Vejamos agora alguns resultados referentes ao seguinte conjunto:

$$C := \bigcap_{f \in S_E} \{x' \in E' : \ \langle x', f \rangle \leq M(f)\}.$$

Proposição 3.29. *O conjunto* C *é compacto, convexo e* $\mathrm{int}(C) \neq \varnothing$*.*

Demonstração. Façamos a prova em três etapas.

(1) C é convexo e fechado.

Para verificarmos isso é suficiente mostrar que para cada $f \in S_E$, o conjunto $K_f = \{x' \in E' : \ \langle x', f \rangle \leq M(f)\}$ é convexo e fechado. Dados $x', y' \in K_f$ e $\lambda \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} \langle \lambda x' + (1-\lambda) y', f \rangle &= \lambda \langle x', f \rangle + (1-\lambda) \langle y', f \rangle \\ &\leq \lambda M(f) + (1-\lambda) M(f) \\ &= M(f) \end{aligned}$$

ou seja, $\lambda x' + (1-\lambda) y' \in K_f$. Note também que

$$\begin{aligned} P(f)^{-1}(-\infty, M(f)] &= \{x' \in E' : \ \langle P(f), x' \rangle \leq M(f)\} \\ &= \{x' \in E' : \ \langle x', f \rangle \leq M(f)\} = K_f, \end{aligned}$$

onde $P(f)$ é o funcional linear contínuo usado na Proposição 3.27, daí segue que K_f é fechado.

(2) C é limitado.

Para ver isso tome $x' \in C$. Então

$$\langle x', f \rangle \leq M(f) \leq \|f\|_\infty$$

para todo $f \in S_E$, donde concluímos que $\|x'\| \leq 1$.

(3) $\mathrm{int}(C) \neq \varnothing$.

Suponhamos que seja $\mathrm{int}(C) = \varnothing$. Pela Proposição 3.19, C está contido em um plano. Portanto, existem $f \in E \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\langle x', f\rangle = c$ para cada $x' \in C$. Observemos que $\{\delta_t : \ t \in \mathbb{R}\} \subset C$. Então $f(t) = \langle \delta_t, f\rangle = c$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mas isso contradiz o fato de que f atinge seu máximo em um único ponto. $\square$

Corolário 3.30. $\partial C \simeq S^2$.

Demonstração. Segue da Proposição 3.29 e do Teorema 3.20. $\square$

Lema 3.3. $\partial C = \displaystyle\bigcup_{f \in S_E} \{x' \in C : \ \langle x', f\rangle = M(f)\}$.

Demonstração. Seja $x' \in \{x' \in C : \ \langle x', f\rangle = M(f)\}$ para $f \in S_E$. Como $\{x' \in C : \langle x', f\rangle = M(f)\}$ é convexo, compacto e está contido em um plano afim, pela Proposição 3.19 seu interior é vazio. Assim, para $\epsilon > 0$, existe $x' + \delta u' \in B(x', \epsilon)$ (onde $u' \in S_{E'}$ e $0 < \delta < \epsilon$) com $\langle x' + \delta u', f\rangle \neq M(f)$. Se for $\langle x' + \delta u', f\rangle > M(f)$ ou, equivalentemente, $\langle \delta u', f\rangle > M(f) - \langle x', f\rangle = 0$, então $x' + \delta u' \in C^{\complement}$, caso contrário tomamos $x' - \delta u' \in B(x', \epsilon)$, de modo que $\langle -\delta u', f\rangle > 0$, ou seja, $\langle x' - \delta u', f\rangle > M(f)$. Isso nos mostra que em qualquer bola aberta centrada em x', é possível encontrar y' nessa bola satisfazendo $\langle y', f\rangle > M(f)$, mas nesse caso temos que $y' \in C^{\complement}$, ou seja, $x' \in \partial C$. Com isso temos a inclusão

$$\bigcup_{f \in S_E} \{x' \in C : \ \langle x', f\rangle = M(f)\} \subset \partial C.$$

Agora tome $x' \in \partial C$. Então existe uma sequência $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $E' \setminus C$ de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x'$. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in S_E$ tal que $\langle x'_n, f_n\rangle > M(f_n)$. Uma vez que S_E é compacto, podemos assumir (tomando uma subsequência, se necessário) que $f_n \longrightarrow f \in S_E$. Fazendo uso do Lema 3.2, concluímos que $\langle x', f\rangle \geq M(f)$. Uma vez que $x' \in C$, temos $\langle x', f\rangle \leq M(f)$, logo $\langle x', f\rangle = M(f)$ e consequentemente $x' \in \bigcup_{f\in S_E}\{x' \in C : \ \langle x', f\rangle = M(f)\}$. $\square$

Definição 3.31. *Considere* $J = \{t \in \mathbb{R} : \ \exists f \in S_E$ *tal que* $\max\{f(s) : \ s \in \mathbb{R}\} = f(t)\}$. *Para cada* $t \in J$ *defina*

$$F_t = \{x' \in C : \ \exists f \in S_E \ \textit{com} \ \langle x', f\rangle = M(f) = f(t)\}.$$

Lema 3.4. *Suponha que* $H \subset E'$ *seja um plano afim tal que* $\mathrm{int}_H(D) \neq \varnothing$, *onde* $D = C \cap H$ *e* $\mathrm{int}_H(D)$ *representa o interior de* D *em* H. *Então uma, e apenas uma, das seguintes afirmações é verdadeira:*

(1) $\mathrm{int}_H(D) \subset \mathrm{int}(C)$ *e* $\partial_H D \subset \partial C$, *onde* $\partial_H D$ *representa a fronteira de* D *no subespaço topológico* H.

(2) Existe $f \in S_E$ *tal que*

$$H = \{x' \in E' : \ \langle x', f\rangle = M(f)\}.$$

Em particular, pelo Lema 3.3, $D \subset \partial C$.

Demonstração. Note que D é compacto (D é a intersecção do fechado H com o compacto C), de modo que $D = \text{int}_H(D) \cup \partial_H D$. Observe que *(1)* e *(2)* não podem acontecer simultaneamente, pois do contrário teríamos $\text{int}_H(D) \subset \text{int}(C)$ e $\text{int}_H(D) \subset D \subset \partial C$, implicando $\text{int}_H(D) \subset \text{int}(C) \cap \partial C = \varnothing$, o que contradiz a hipótese inicial de que $\text{int}_H(D) \neq \varnothing$. Vejamos agora que $\partial_H D \subset \partial C$ sempre acontece. Para isso, suponhamos por contradição que exista $x' \in \partial_H D$ que não pertença a ∂C, ou seja, $x' \in \text{int}(C)$. Sendo $x' \in \partial_H D$ e $(H \cap \text{int}(C))$ um aberto de H contendo x', segue que existe $y' \in H$ tal que

$$y' \in (H \setminus D) \cap (H \cap \text{int}(C)),$$

mas isso é um absurdo, pois temos simultaneamente $y' \in H \cap \text{int}(C) \subset D$ e $y' \notin D$.

Suponha que *(1)* não seja válido. Desde que $\partial_H D \subset \partial C$ sempre é verdade, existe $y' \in \text{int}_H(D)$ tal que $y' \in \partial C$. Pelo Lema 3.3 podemos encontrar $f \in S_E$ tal que

$$\langle y', f \rangle = M(f).$$

Se $\pi = \{x' \in E' : \langle x', f \rangle = M(f)\}$, devemos mostrar que $H = \pi$. Se $H = \pi$ não fosse verdade, o conjunto $H \cap \pi$ seria uma reta passando por y'. Esta reta divide H em duas partes. Fazendo uso da Proposição 3.18 com o espaço Euclidiano afim 2-dimensional H e o conjunto convexo $D \subset H$, conseguimos $z' \in D$ satisfazendo

$$\langle z', f \rangle > M(f),$$

o que implica em $z' \notin C$. Isso contraria o fato de $D \subset C$. Portanto *(2)* vale sempre que assumirmos que *(1)* não é verdadeiro, o que conclui a prova. □

A seguir iremos ver algumas propriedades importantes dos conjuntos F_t da Definição 3.31, mas antes vejamos o seguinte lema que será bastante útil.

Lema 3.5. *Se $F \subset S^1$ é conexo, então $S^1 \setminus F$ é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam $x, y \in S^1 \setminus F$ e considere $a \in \mathbb{R}$ tal que $x = (\cos(a), \text{sen}(a))$. A aplicação $\varphi : (a, a+2\pi) \longrightarrow S^1 \setminus \{x\}$ dada por $\varphi(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ é um homeomorfismo. De fato, φ é bijetiva, contínua e, se uma sequência de pontos $t_n \in (a, a+2\pi)$ não possui valores de aderência nesse intervalo, então seus valores de aderência em $\mathbb{R}$ so podem ser a ou $a + 2\pi$. Nessas condições temos $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t_n) = x$. Segue daí que, dada uma sequência de pontos $s_n \in (a, a+2\pi)$ com $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(s_n) = p \in S^1 \setminus \{x\}$, qualquer valor de aderência de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um número $b \in (a, a+2\pi)$ que cumpre (pela continuidade de φ) $\varphi(b) = p$. Como φ é injetiva, b é o único valor de aderência de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = b$ e segue a continuidade de φ^{-1}.

Considere $b = \varphi^{-1}(y) \in (a, a+2\pi)$. Desde que $F \subset S^1 \setminus \{x, y\} = \varphi((a, b)) \cup \varphi((b, a+2\pi))$ e $\varphi((a, b))$, $\varphi((b, a+2\pi))$ são abertos disjuntos em S^1, da conexidade de F

temos que $F \subset \varphi((a,b))$ ou $F \subset \varphi((b,a+2\pi))$. Digamos sem perda de generalidade que seja $F \subset \varphi((a,b))$, assim podemos definir a aplicação contínua $\gamma : [b, a+2\pi] \longrightarrow S^1 \setminus F$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \varphi(t) \text{ se } t \in [b, a+2\pi), \\ x \text{ se } t = a + 2\pi. \end{cases}$$

□

Teorema 3.32. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(1) $\partial C = \bigcup_{t \in J} F_t$.

(2) $\{F_t\}_{t\in J}$ *é uma família de conjuntos fechados dois a dois disjuntos.*

(3) $\delta_t \in F_t$ *para cada* $t \in J$ *e* $[\delta_t, x'] \subset F_t$ *para todo* $x' \in F_t$. *Em particular,* F_t *é um conjunto conexo.*

(4) $\partial C \setminus F_t$ *é conexo por caminhos para todo* $t \in J$*, e consequentemente conexo.*

Demonstração. (1) Dado $x' \in F_t$, existe $f \in S_E$ de modo que $\langle x', f\rangle = M(f) = f(t)$, ou seja, $x' \in \{x' \in C : \langle x', f\rangle = M(f)\} \subset \partial C$ pelo Lema 3.3. Logo $F_t \subset \partial C$ para cada $t \in J$ e temos a inclusão $\bigcup_{t\in J} F_t \subset \partial C$.

Agora dado $x' \in \partial C$, existe $f \in S_E$ tal que $x' \in \{x' \in C : \langle x', f\rangle = M(f)\}$. Tomando o único $t_f \in \mathbb{R}$ ponto de máximo de f, temos que $x' \in F_{t_f} \subset \bigcup_{t\in J} F_t$.

(2) Seja $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em F_t tal que $\lim_{n\to\infty} x'_n = x'$ e considere $f_n \in S_E$ com $\langle x'_n, f_n\rangle = M(f_n) = f_n(t)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que S_E é compacto, podemos supor (tomando uma subsequência, se necessário) que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Usando o Lema 3.2 temos

$$\begin{aligned} \langle x', f\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x'_n, f_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} M(f_n) \\ &= M(f). \end{aligned}$$

Como também temos a convergência pontual $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ e vale $\lim_{n\to\infty} M(f_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$, segue que $\langle x', f\rangle = M(f) = f(t)$ e portanto $x' \in F_t$. Isso nos mostra que F_t é fechado para todo $t \in J$.

Suponhamos agora que existam $t_1, t_2 \in J$ com $t_1 \neq t_2$, tais que $F_{t_1} \cap F_{t_2} \neq \varnothing$. Seja $x' \in F_{t_1} \cap F_{t_2}$ e $f_1, f_2 \in S_E$ tais que

$$\langle x', f_i\rangle = M(f_i) = f_i(t_i),\ i = 1, 2.$$

Considere $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha f_1 + \beta f_2 \in S_E$ (por exemplo, $\alpha = \frac{1}{\|f_1 + 2f_2\|_\infty}$ e $\beta = \frac{2}{\|f_1+2f_2\|_\infty}$). Uma vez que f_i atinge seu máximo apenas em t_i, $i = 1, 2$, temos:

(a) $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) < \alpha M(f_1) + \beta M(f_2)$, para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$.

(b) $\alpha f_1(t_1) + \beta f_2(t_1) = \alpha M(f_1) + \beta f_2(t_1) < \alpha M(f_1) + \beta M(f_2)$.

(c) $\alpha f_1(t_2) + \beta f_2(t_2) = \alpha f_1(t_2) + \beta M(f_2) < \alpha M(f_1) + \beta M(f_2)$.

De *(a)*, *(b)* e *(c)* acima, segue que

$$\begin{aligned} M(\alpha f_1 + \beta f_2) &< \alpha M(f_1) + \beta M(f_2) \\ &= \alpha \langle x', f_1 \rangle + \beta \langle x', f_2 \rangle \\ &= \langle x', \alpha f_1 + \beta f_2 \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, $x' \notin C$. Chegamos em uma contradição.

(3) Dado $t \in J$, existe $g \in S_E$ tal que $g(t) = M(g)$, daí segue que $\delta_t(g) = g(t) = M(g)$ e portanto $\delta_t \in F_t$. Agora se $x' \in F_t$, então existe $f \in S_E$ de modo que

$$\langle x', f \rangle = M(f) = f(t).$$

Uma vez que C é convexo, segue que $\lambda\delta_t + (1-\lambda)x' \in C$ para todo $\lambda \in [0, 1]$, logo

$$\begin{aligned} \langle \lambda\delta_t + (1-\lambda)x', f \rangle &= \lambda f(t) + (1-\lambda) f(t) \\ &= f(t) = M(f). \end{aligned}$$

Consequentemente, temos $[\delta_t, x'] \subset F_t$.

(4) Vamos verificar que para $t \in J$ fixado e $x', y' \in \partial C \setminus F_t$, existe uma função contínua $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \partial C \setminus F_t$ com $\gamma(0) = x'$ e $\gamma(1) = y'$.

Dois casos serão considerados:

Caso 1. Os pontos x', y', δ_t estão alinhados: Como $\mathrm{int}(C) \neq \varnothing$, podemos tomar $p', q', r' \in \mathrm{int}(C)$ pontos não colineares, dessa maneira pelo menos um desses pontos não pode pertencer ao segmento que contém x', y' e δ_t, digamos então que seja p'. Seja H o plano que contém $\{x', y', \delta_t, p'\}$. Note que $D = C \cap H$, é um subconjunto compacto e convexo de H que não pode ser um segmento pelo fato de que $x', y', \delta_t, p' \in D$. Pela Proposição 3.18 segue que $\mathrm{int}_H(D) \neq \varnothing$. Agora, como $p' \in \mathrm{int}(C)$, não podemos ter $D \subset \partial C$. Logo, pelo Lema 3.4 temos que $\mathrm{int}_H(D) \subset \mathrm{int}(C)$ e $\partial_H D \subset \partial C$.

Vejamos agora que $(\partial_H D) \cap F_t$ é conexo. De fato, para $z' \in (\partial_H D) \cap F_t$, pelo item *(3)* e da convexidade de D, temos que

$$[z', \delta_t] \subset D \cap F_t \subset F_t \subset \partial C.$$

Portanto segue que $[z', \delta_t] \subset (\partial_H D) \cap F_t$, pois uma vez que $\mathrm{int}_H(D) \subset \mathrm{int}(C)$, $\partial_H D \subset \partial C$ e $[z', \delta_t] \cap \mathrm{int}(C) = \varnothing$, temos $[z', \delta_t] \cap \mathrm{int}_H(D) = \varnothing$. Então $[z', \delta_t] \subset (\partial_H D) \cap F_t$ para todo $z' \in (\partial_H D) \cap F_t$, nos mostrando que $(\partial_H D) \cap F_t$ é conexo.

Por outro lado, do Teorema 3.20 temos $\partial_H D \simeq S^1$. Juntando isso com o fato de que $(\partial_H D) \cap F_t$ é conexo, segue do Lema 3.5 que $(\partial_H D) \setminus F_t$ é conexo por caminhos. Portanto existe um caminho, $\gamma : [0,1] \longrightarrow (\partial_H D) \setminus F_t \subset (\partial C) \setminus F_t$ com $\gamma(0) = x'$ e $\gamma(1) = y'$.

Caso 2. Os pontos x', y' e δ_t não são colineares: Nesse caso consideramos H como sendo o plano que contém x', y' e δ_t. Pela Proposição 3.18 temos que se $D = C \cap H$, então $\mathrm{int}_H(D) \neq \varnothing$. Assim, pelo Lema 3.4 segue que

(a) Ou $\partial_H D \subset \partial C$ e $\mathrm{int}_H(D) \subset \mathrm{int}(C)$;

(b) Ou existe $f \in S_E$ tal que $H = \{z' \in E' : \langle x', f\rangle = M(f)\}$.

Suponhamos que *(b)* seja válido. Então, desde que

$$x', y', \delta_t \in H = \{z' \in E' : \langle x', f\rangle = M(f)\},$$

temos que

$$x', y' \in H = \{z' \in E' : \langle x', f\rangle = M(f) = f(t)\},$$

mas isso nos mostra que $x', y' \in F_t$, o que é uma contradição. Portanto *(a)* deve ser válido.

Agora, prosseguindo como no primeiro caso, conseguimos uma função contínua $\gamma : [0,1] \longrightarrow (\partial_H D) \setminus F_t \subset (\partial C) \setminus F_t$ com $\gamma(0) = x'$ e $\gamma(1) = y'$. □

Definição 3.33. *Se $\{F_i\}_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos não vazios de X dois a dois disjuntos com $X = \bigcup_{i\in I} F_i$, então $\{F_i\}_{i\in I}$ é chamada partição de X.*

Exemplo 3.34. $\{\mathbb{P}, \mathbb{I}\}$*, onde $\mathbb{P}$ é o conjunto dos naturais pares e $\mathbb{I}$ o conjunto dos naturais ímpares, é uma partição de $\mathbb{N}$.*

Exemplo 3.35. *Se $\sim$ é uma relação de equivalência em um conjunto não vazio X, então $\{[x] : x \in X\}$ é uma partição de X, onde $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$.*

Exemplo 3.36. $G = \{\{x\} : x \leq 0\} \cup \{(0,\infty)\}$ *é uma partição de $\mathbb{R}$.*

Definição 3.37. *Dizemos que um subconjunto F de um espaço topológico X é um contínuo quando F é compacto e conexo.*

Exemplo 3.38. *Os conjuntos da forma $[a, b]$ com $a < b$, são exemplos de contínuos em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 3.39. S^{n-1} *é um contínuo de $\mathbb{R}^n$ para todo $n \geq 2$.*

A partir de agora iremos denotar ∂C por X. Uma vez que ja foi visto que C é compacto e o fechado ∂C está contido em C, temos então que $X = \partial C$ é compacto, ou seja, X é um espaço métrico compacto. Pelo Teorema 3.32, $\{F_t\}_{t\in J}$ é uma partição de X em contínuos não vazios. A próxima proposição irá nos fornecer mais propriedades relevantes sobre a família $\{F_t\}_{t\in J}$.

Proposição 3.40. *Temos* $X \setminus F_t \simeq \mathbb{C}$ *para todo* $t \in J$.

Demonstração. Sabemos do Corolário 3.30 que $X \simeq S^2$. Tomemos um homeomorfismo $h : X \longrightarrow S^2$. Pelo Teorema 3.32, temos que $h(F_t)$ é um conjunto fechado conexo e $S^2 \setminus h(F_t)$ é conexo. Agora pelos Corolário 3.25 e Teorema 3.26, existe $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo de modo que $X \setminus F_t \simeq S^2 \setminus h(F_t) \simeq \Omega \simeq \mathbb{C}$. □

Lema 3.6. *Seja* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ *um sequência tal que* $\delta_{t_n} \longrightarrow y' \in F_t$. *Se* $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência com* $x'_n \in F_{t_n}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x'_n \longrightarrow x'$, *então* $x' \in F_t$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $f_n \in S_E$ tal que

$$\langle x'_n, f_n \rangle = M(f_n) = f_n(t_n) = \langle \delta_{t_n}, f_n \rangle .$$

Tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que $f_n \longrightarrow f \in S_E$, de onde temos

$$\lim_{n\to\infty} \langle x'_n, f_n \rangle = \lim_{n\to\infty} M(f_n) = \lim_{n\to\infty} \langle \delta_{t_n}, f_n \rangle$$

e, assim,

$$\langle x', f \rangle = M(f) = \langle y', f \rangle .$$

Tomemos $t_0 \in J$ o ponto de máximo de f, então

$$\langle y', f \rangle = M(f) = f(t_0),$$

ou seja, $y' \in F_{t_0}$. Agora, uma vez que $y' \in F_t$, pelo Teorema 3.32 devemos ter $t_0 = t$. Portanto, $\langle x', f \rangle = M(f) = f(t)$ e consequentemente $x' \in F_t$. □

O último lema terá um papel fundamental no próximo resultado, que diz a respeito de um tipo especial de partição de um espaço topológico.

Definição 3.41. *Sejam* S *um espaço topológico e* G *uma partição de* S *em conjuntos fechados. Dizemos que* G *é semicontínua superior se, para cada conjunto aberto* $U \subset S$, *o conjunto*

$$U^* = \bigcup_{g\in G, g\subset U} g$$

é um subconjunto aberto de S.

Exemplo 3.42. *Se* X *é um espaço topológico de Hausdorff, então* $\{\{x\} : x \in X\}$ *é uma partição semicontínua superior.*

Exemplo 3.43. *Seja* $(\mathbb{N}, \tau)$ *com* $\tau = \{\varnothing, \mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}\}$. *A partição* $G = \{\mathbb{P}, \mathbb{I}\}$ *é semicontínua superior, pois* $\mathbb{P} = \mathbb{I}^{\complement}$ *e* $\mathbb{I} = \mathbb{P}^{\complement}$ *são fechados e, para* $U \in \tau$ *temos os seguintes casos:*

- $U^* = \bigcup_{g\in G, g\subset\varnothing} g = \varnothing \in \tau$;

- $U^* = \bigcup_{g\in G, g\subset \mathbb{P}} g = \mathbb{P} \in \tau$;
- $U^* = \bigcup_{g\in G, g\subset \mathbb{I}} g = \mathbb{I} \in \tau$;
- $U^* = \bigcup_{g\in G, g\subset \mathbb{N}} g = \mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{N} \in \tau$.

Exemplo 3.44. *Considere o espaço topológico $\mathbb{R}^2$ (com a topologia usual) e $S(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| = r\}$ para $r > 0$. Temos que $G = \{(0,0)\} \cup \{S(0,r) : \ r > 0\}$ é um partição de $\mathbb{R}^2$.*

Vejamos que G é semicontínua superior. De fato, todo elemento de G é um fechado não vazio de $\mathbb{R}^2$. Tome U um aberto não vazio de $\mathbb{R}^2$. Se $U = \mathbb{R}^2$, então claramente temos que

$$U^* = \bigcup_{g\in G, g\subset \mathbb{R}^2} g = \mathbb{R}^2.$$

Se $U \neq \mathbb{R}^2$, tome $y \in \mathbb{R}^2 \setminus U$ e note que para cada $x \in U$ o número

$$t_x = \sup\{s > 0 : B(x,s) \subset U\}$$

é bem definido, pois $t_x \leq \|x - y\| < \infty$.

Afirmação: *$I = \{r > 0 : \ S(0,r) \subset U\}$ é aberto em $\mathbb{R}$.*

De fato, se I for vazio nada há o que fazer. Supondo $I \neq \varnothing$, tomemos $r_0 \in I$. Considere a família

$$F = \{B(x,t_x) : \ x \in S(0,r_0) \text{ e } t_x = \sup\{s > 0 : B(x,s) \subset U\}\}.$$

Para provarmos que $r_0 \in (r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon) \subset I$, é suficiente verificarmos que existe $\epsilon \in (0, r_0)$ tal que

$$B(x,\epsilon) \subset B(x,t_x) \subset U \text{ para todo } B(x,t_x) \in F, \tag{3.2}$$

pois se assim o for, dado $x \in S(0,p)$ com $p \in (r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon)$, temos $y = \frac{r_0}{p} x \in S(0,r_0)$. Logo

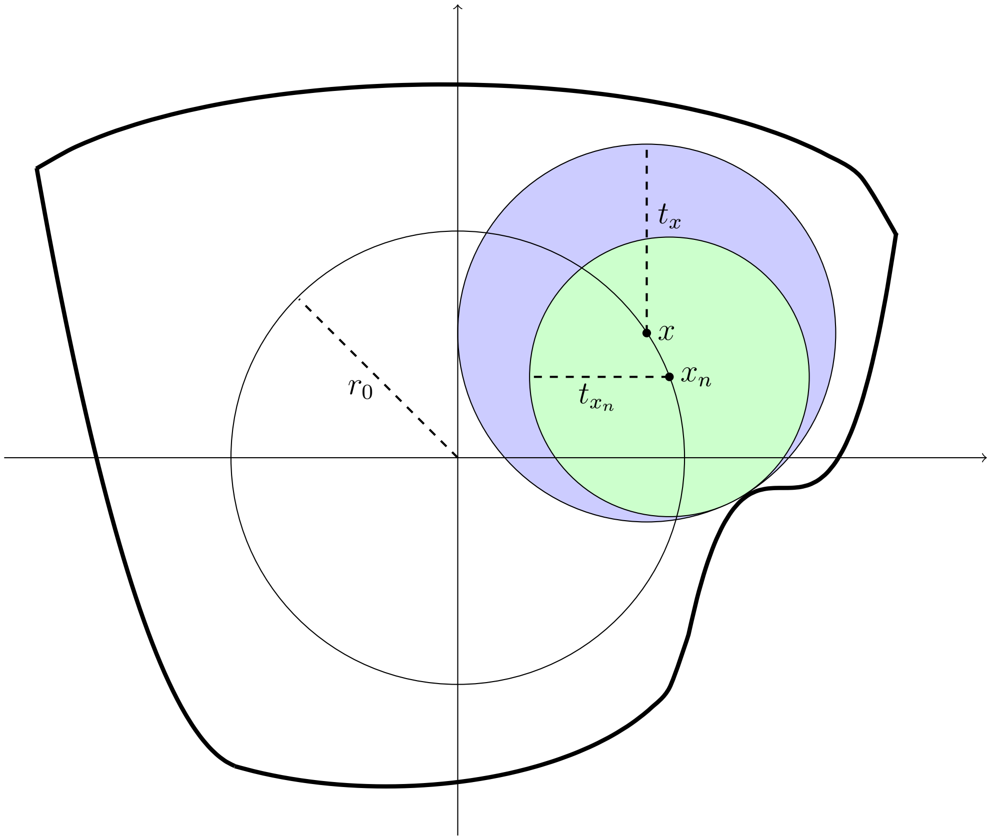
$$\|y - x\| = \left\| \left(\frac{r_0}{p} - 1 \right) x \right\| = |r_0 - p| < \epsilon,$$

isto é, $x \in B(y,\epsilon) \subset B(y,t_y) \subset U$.

Suponhamos por contradição que 3.2 não seja verdadeira. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S(0,r_0)$ tal que $B(x_n, t_{x_n}) \subset B(x_n, 1/n)$. Tomando uma subsequencia se necessário, podemos supor que $x_n \longrightarrow x \in S(0,r_0)$.

Desse modo, para n suficientemente grande temos $B(x_n, t_{x_n}) \subset B(x, t_x)$ (pois $t_{x_n} \longrightarrow 0$) e $t_{x_n} = t_x - \|x - x_n\|$, o que nos mostra que $t_x = 0$. Mas isso é uma contradição com o fato de que t_x é maior que zero. Portanto, I é aberto.

Figura 3.1: Bolas $B(x_n, t_{x_n})$ e $B(x, t_x)$ centradas em pontos de $S(0, r_0)$.



Concluindo, para $I = \varnothing$ temos $U^* = \varnothing$; para $I = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$,

$$U^* = \bigcup_{g \in G, g \subset U} g \quad = \bigcup_{r \in I} S(0,r) = \bigcup_{\lambda \in L} \left(\bigcup_{r \in (a_\lambda, b_\lambda)} S(0,r) \right) \quad = \bigcup_{\lambda \in L} \left(B(0, b_\lambda) \setminus B[0, a_\lambda] \right),$$

se U não contém $(0,0)$, e $U^* = \{(0,0)\} \cup \left(\bigcup_{\lambda \in L} (B(0,b_\lambda) \setminus B[0,a_\lambda]) \right)$ se U contém $(0,0)$. Uma vez que $B(0,b_\lambda) \setminus B[0,a_\lambda]$ é aberto para cada $\lambda \in L$, segue que U^* é aberto em qualquer caso.

Exemplo 3.45. *A partição $G = \{\{x\} : \ x \leq 0\} \cup \{(0,\infty)\}$ de $\mathbb{R}$ não é semicontínua superior. De fato, tomando o aberto $(-1,1) \subset \mathbb{R}$, segue que*

$$(-1,1)^* = \bigcup_{g \in G, g \subset (-1,1)} g = \bigcup_{x \in (-1,1), x \leq 0} \{x\} = (-1,0]$$

não é aberto. Além disso, o elemento $(0,\infty)$ de G não é fechado.

Proposição 3.46. *Para cada $t_0 \in J$ temos que*

$$\{F_t\}_{t \in J \setminus \{t_0\}}$$

é uma partição semicontínua superior em contínuos de $X \setminus F_{t_0}$.

Demonstração. Do Teorema 3.32*(2)*, temos que F_t é um fechado de X para cada $t \in J$, consequentemente F_t é um compacto de X, pois X é um espaço compacto (Ver Proposição 2.54). Vejamos que F_t é um contínuo em $X \setminus F_{t_0}$ para cada $t \in J \setminus \{t_0\}$. Uma vez que F_t é fechado em X e $F_t = F_t \cap (X \setminus F_{t_0})$, segue que F_t é fechado em $X \setminus F_{t_0}$. Sejam agora $A_0 = A \cap (X \setminus F_{t_0})$ e $B_0 = B \cap (X \setminus F_{t_0})$ abertos de $X \setminus F_{t_0}$ tais que $A_0 \cap B_0 = \varnothing$ e

$$F_t \subset A_0 \cup B_0.$$

Como A_0 e B_0 também são abertos em X (pois $X \setminus F_{t_0}$ é aberto), segue da conexidade de F_t em X (Teorema 3.32*(3)*) que $F_t \subset A_0$ ou $F_t \subset B_0$, logo F_t também é conexo em $X \setminus F_{t_0}$. A compacidade de F_t em $X \setminus F_{t_0}$ segue do fato de que todo aberto de $X \setminus F_{t_0}$ é também um aberto de X.

Para ver que essa partição é semicontínua superior, precisamos mostrar que para cada $U \subset X \setminus F_{t_0}$ aberto em $X \setminus F_{t_0}$, o conjunto

$$V = \bigcup_{t \in J \setminus \{t_0\}, F_t \subset U} F_t$$

é um aberto de $X \setminus F_{t_0}$. Suponhamos, por contradição, que exista um aberto U em $X \setminus F_{t_0}$ de modo que o V correspondente definido acima não seja aberto em $X \setminus F_{t_0}$. Então, existe $x' \in F_t \subset U$ (para algum $t \in J \setminus \{t_0\}$) e $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (X \setminus F_{t_0}) \setminus V$ com $x'_n \longrightarrow x'$. Isso implica que para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto F_{t_n} que contém o n-ésimo termo da sequência $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é tal que $F_{t_n} \setminus U \neq \varnothing$, pois do contrário teríamos $F_{t_n} \subset U$ e portanto $F_{t_n} \subset V$, o que é uma contradição. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $y'_n \in F_{t_n} \setminus U$. Tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$\delta_{t_n} \longrightarrow z' \in X$$

e

$$y'_n \longrightarrow y' \in X.$$

Portanto, existe $t' \in J$ tal que $z' \in F_{t'}$. Agora, pelo Lema 3.6 temos $x', y' \in F_{t'}$, o que implica em $t' = t$, e consequentemente $y' \in F_t$. Isso é uma contradição, pois o fato de $(y'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (X \setminus F_{t_0}) \setminus U$ implica em $y' \in (X \setminus F_{t_0}) \setminus U$, o que resulta $y' \notin U \supset F_t$. □

Definição 3.47. *Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico S não separa S, quando $S \setminus A$ é conexo.*

Exemplo 3.48. *Se $n \geq 2$, então o conjunto $\{x\}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ não separa $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 3.49. *Se F é um subconjunto conexo de S^1, segue como consequência do Lema 3.5 que F não separa S^1.*

Exemplo 3.50. *O conjunto* $\{p, q\} \subset S^2$ *não separa* S^2.

Proposição 3.51. *Para cada par de pontos* $t_1, t_2 \in J$, *o conjunto* $X \setminus (F_{t_1} \cup F_{t_2})$ *é conexo.*

Demonstração. Usando a Proposição 3.40 temos

$$X \setminus F_{t_1} \simeq \mathbb{C} \simeq S^2 \setminus \{(0,0,1)\}.$$

Logo, existe um homeomorfismo $g_1 : X \setminus F_{t_1} \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. Podemos então estender g_1 a X pondo $g_1(x') = (0,0,1)$ para $x' \in F_{t_1}$. Vejamos que $g_1 : X \longrightarrow S^2$ é contínua e sobrejetiva. A sobrejetividade é imediata. Para mostrar a continuidade, observe que dados $x \in X \setminus F_{t_1}$ e $B \subset S^2$ um aberto contendo $g_1(x)$, temos que $A = B \cap (S^2 \setminus \{(0,0,1)\})$ é um aberto de S^2 contendo $g_1(x)$. Desse modo $g_1^{-1}(A)$ é um aberto de $X \setminus F_t$, ou seja, $g_1^{-1}(A) = D \cap (X \setminus F_{t_1})$ com D um aberto de X. Como $X \setminus F_{t_1}$ é um aberto de X, segue que $g_1^{-1}(A)$ é um aberto de X contendo x. Daí,

$$g_1(g_1^{-1}(A)) \subset A \subset B,$$

e temos a continuidade de g_1 em todo $x \in X \setminus F_{t_1}$. Suponhamos agora que g_1 não seja contínua em um ponto $x' \in F_{t_1}$. Então existe $\epsilon > 0$ e uma sequência $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X com $x'_n \longrightarrow x'$ e $|g_1(x'_n) - (0,0,1)| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando uma subsequência se necessário, podemos assumir que $g_1(x'_n)$ converge para $u \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. Desde que $g_1(x'_n) \neq (0,0,1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus F_{t_1}$, além disso, pelo fato de que $g_1|_{X \setminus F_{t_1}} : X \setminus F_{t_1} \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ é um homeomorfismo, segue que existe $y' \in X \setminus F_{t_1}$ tal que $x'_n \longrightarrow y'$, mas isso contraria o fato de que $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para $x' \in F_{t_1}$.

Pelo Teorema 3.32 temos que $X \setminus F_{t_2}$ é conexo, e por conseguinte também temos $g_1(X \setminus F_{t_2})$ conexo em S^2. Note também que $S^2 = g_1(F_{t_2}) \cup g_1(X \setminus F_{t_2})$ e $g_1(X \setminus F_{t_2}) \cap g_1(F_{t_2}) = \varnothing$, pois se $v \in g_1(X \setminus F_{t_2}) \cap g_1(F_{t_2})$, então $v = g_1(x'_t) = g_1(x'_2) \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ para $x'_2 \in F_{t_2}$ e $x'_t \in F_t \subset X \setminus F_{t_2}$, ou seja, $x'_2 = x'_t \in F_{t_2}$ (isso pelo fato de que x'_t e x'_2 pertencem a $X \setminus F_{t_1}$ e g_1 restrito a $X \setminus F_{t_1}$ é injetiva) o que seria uma contradição. Dessa maneira $\{g_1(F_{t_2}), g_1(X \setminus F_{t_2})\}$ é uma partição de S^2, onde $g_1(F_{t_2})$ é compacto e conexo (pois g_1 é contínua e F_{t_2} é compacto e conexo em X), e $g_1(X \setminus F_{t_2})$ é aberto. Agora, pelo Corolário 3.25 e Teorema 3.26,

$$g_1(X \setminus F_{t_2}) \simeq \mathbb{C} \simeq S^2 \setminus \{(0,0,1)\}.$$

Assim existe um homeomorfismo

$$g_2 : g_1(X \setminus F_{t_2}) \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,1)\},$$

que pode ser estendido para S^2 definindo $g_2(u) = (0,0,1)$ para todo $u \in g_1(F_{t_2})$, de modo que $g_2 : S^2 \longrightarrow S^2$ é contínua e sobrejetiva. Podemos então considerar a função contínua e sobrejetiva $g = g_2 \circ g_1$ de X em S^2. Note que g_1 restrito a $X \smallsetminus (F_{t_1} \cup F_{t_2})$ é homeomorfo a $g_1(X \smallsetminus F_{t_1}) \smallsetminus g_1(F_{t_2}) = g_1(X \smallsetminus F_{t_2}) \smallsetminus g_1(F_{t_1})$, e g_2 restrito a $g_1(X \smallsetminus F_{t_2}) \smallsetminus g_1(F_{t_1})$ é homeomorfo a $(S^2 \smallsetminus \{(0,0,1)\}) \smallsetminus g_2(g_1(F_{t_1})) = S^2 \smallsetminus \{g(F_{t_2}), g(F_{t_1})\}$ (do modo que g_1 e g_2 foram definidas em F_{t_1} e F_{t_2} respectivamente, os conjuntos $g(F_{t_1})$ e $g(F_{t_2})$ são unitários e disjuntos, de modo a escrevermos $g(F_{t_1}) \cup g(F_{t_2})$ ao invés de $\{g(F_{t_1}), g(F_{t_2})\}$), logo $g|_{X \smallsetminus (F_{t_1} \cup F_{t_2})}$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem, ou seja,

$$X \smallsetminus (F_{t_1} \cup F_{t_2}) \simeq S^2 \smallsetminus \{g(F_{t_2}), g(F_{t_1})\},$$

e isso nos mostra a conexidade de $X \smallsetminus (F_{t_1} \cup F_{t_2})$. □

Lema 3.7. *Sejam (X, τ), (Y, Δ) espaços topológicos e $h : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \Delta)$um homeomorfismo. Se G é uma partição semicontínua superior de X, então $G_h = \{h(g) : \; g \in G\}$ é uma partição semicontínua superior de Y.*

Demonstração. Todo elemento de G_h é fechado, pois todo elemento de G é fechado e h é um homeomorfismo. Seja U um aberto de Y, temos que

$$U^* = \bigcup_{q \in G_h, q \subset U} q = \bigcup_{g \in G, g \subset h^{-1}(U)} h(g) = h\left(\bigcup_{g \in G, g \subset h^{-1}(U)} g \right).$$

Como $h^{-1}(U)$ é aberto em X e G é semicontínua superior, então $\bigcup_{g \in G, g \subset h^{-1}(U)} g$ é um aberto de X. Concluímos então que U^* é aberto em Y. □

Corolário 3.52. *Para cada $t_0 \in J$ temos $X \smallsetminus F_{t_0} \simeq \mathbb{C}$. Tal homeomorfismo transforma $\{F_t\}_{t \in J \smallsetminus \{t_0\}}$ em uma partição semicontínua superior de $\mathbb{C}$ composta por contínuos que não separam $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Segue diretamente das Proposições 3.40, 3.46 e 3.51. A Proposição 3.40 nos mostra a existência do homeomorfismo, e a Proposição 3.46 garante que $\{F_t\}_{t \in J \smallsetminus \{t_0\}}$ é transformado em uma partição semicontínua superior, pois $\{F_t\}_{t \in J \smallsetminus \{t_0\}}$ é semicontínua superior em $X \smallsetminus F_{t_0}$ e semicontinuidade superior é um invariante topológico (Lema 3.7), além disso, essa partição será formada por contínuos, uma vez que cada F_t também é um contínuo. Por fim, a Proposição 3.51 nos mostra que $\{F_t\}_{t \in J \smallsetminus \{t_0\}}$ não separa $X \smallsetminus F_{t_0}$, logo sua imagem pelo homeomorfismo também não separa $\mathbb{C}$. □

No restante da dissertação, usaremos o conceito de *topologia de identificação* que será apresentado a seguir. Dado um espaço topológico X e $\mathcal{Y}$ uma partição de X, podemos definir uma aplicação sobrejetiva $\pi : X \longrightarrow \mathcal{Y}$ pondo $\pi(x) = Y$, onde $x \in Y$. Esta aplicação é bem definida pelo fato de $\mathcal{Y}$ ser uma partição. A topologia de identificação em $\mathcal{Y}$ é definida por

$$T_\pi = \{U \subset \mathcal{Y} : \; \pi^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}.$$

De fato T_π é uma topologia, pois para $U, V \in T_\pi$ temos $\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$, e sendo $\pi^{-1}(U)$, $\pi^{-1}(V)$ abertos de X, então $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ também é aberto em X, nos mostrando que $U \cap V \in T_\pi$. Agora, se $\{U_i\}_{i\in I}$ é uma família de elementos de T_π, então $\pi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(U_i)$. Como temos que $\bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(U_i)$ é um aberto de X, segue que $\bigcup_{i\in I} U_i \in T_\pi$.

Proposição 3.53. *Se X é um espaço topológico e $\mathcal{Y}$ é uma partição munida da topologia de identificação T_π, então*

$$T_\pi = \left\{ U \subset \mathcal{Y} : \bigcup_{Y \in U} Y \text{ é aberto em } X \right\}.$$

Demonstração. Considere $P = \left\{ U \subset \mathcal{Y} : \bigcup_{Y\in U} Y \text{ é aberto em } X \right\}$. Dado $U \in \mathcal{Y}$, temos que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{Y\in U} \pi^{-1}(Y) = \bigcup_{Y\in U} Y$. Desse modo segue que $U \in T_\pi$ se, e somente se, $U \in P$, nos mostrando a igualdade. □

Do modo como a topologia de identificação é definida, a aplicação π se torna contínua, e essa topologia é a maior possível que torna π contínua, no sentido de que se outra topologia em $\mathcal{Y}$ torna π contínua, então essa topologia necessariamente está contida em T_π. De fato, se Δ é uma outra topologia que torna π contínua, então $U \in \Delta$ implica que $\pi^{-1}(U)$ é um aberto de X, mas como $U \subset \mathcal{Y}$, segue que $U \in T_\pi$.

Podemos considerar a topologia de identificação na família $\mathcal{F} = \{F_t : t \in J\}$ induzida pela função sobrejetiva $p : X \longrightarrow \mathcal{F}$ definida por $p(x') = F_t$ sempre que $x' \in F_t$.

Da mesma maneira, se $t_0 \in J$, então também podemos considerar a partição de $X \smallsetminus F_{t_0}$ dada por $\mathcal{F}_{t_0} = \{F_t : t \in J \smallsetminus \{t_0\}\}$ e a topologia em $\mathcal{F}_{t_0}$ induzida pela sobrejeção $p_{t_0} : X \smallsetminus F_{t_0} \longrightarrow \mathcal{F}_{t_0}$ definida como $p_{t_0} = p|_{X\smallsetminus F_{t_0}}$.

Definição 3.54. *Se X é um espaço topológico e τ_1, τ_2 são duas topologias em X, dizemos que um elemento de τ_1 é um τ_1-aberto, assim como todo elemento de τ_2 também é chamado de τ_2-aberto.*

Exemplo 3.55. *Sejam*

$$\tau_1 = \{\varnothing\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : A^{\complement} = \mathbb{R} \smallsetminus A \text{ é finito}\}$$

e

$$\tau_2 = \{\varnothing\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : A^{\complement} = \mathbb{R} \smallsetminus A \text{ é enumerável}\}$$

as topologias cofinita e coenumerável sobre $\mathbb{R}$ respectivamente. Temos que $\mathbb{Q}^{\complement} = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ é um elemento τ_2-aberto, mas não um elemento τ_1-aberto.

Proposição 3.56. *Seja $t_0 \in J$ e $U \subset \mathcal{F}_{t_0}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) U é um T_p-aberto em $\mathcal{F}_{t_0}$.

(2) U é um T_p-aberto.

(3) U é um $T_{p_{t_0}}$-aberto.

Demonstração. É evidente que *(1)* e *(2)* são equivalentes. Temos que U é $T_{p_{t_0}}$-aberto se, e somente se, $p_{t_0}^{-1}(U)$ é aberto em $X \setminus F_{t_0}$, mas por outro lado $p_{t_0}^{-1}(U) = p^{-1}(U)$ é aberto em $X \setminus F_{t_0}$ se, e somente se, $p^{-1}(U)$ é aberto em X (pois $X \setminus F_{t_0}$ é aberto em X). Portanto *(2)* é equivalente a *(3)*. □

O resultado anterior nos mostra que os abertos de $\mathcal{F}_{t_0}$ são exatamente os abertos de $\mathcal{F}$ que estão contidos em $\mathcal{F}_{t_0}$, ou seja,

$$T_{p_{t_0}} = \{U \in T_p : \ U \subset \mathcal{F}_{t_0}\}.$$

Portanto iremos escrever apenas $\mathcal{F}_{t_0}$ para se referir ao espaço topológico $(\mathcal{F}_{t_0}, T_{p_{t_0}})$.

Vejamos a seguir o Teorema de Moore, que será de crucial importância para chegarmos ao resultado principal. A sua demonstração requer um estudo aprofundado sobre decomposições de variedades topológicas, o qual foge dos objetivos deste trabalho (ver, por exemplo, [8, 19]).

Teorema 3.57 (Moore)**.** *Suponha que G seja uma partição semicontínua superior do plano $\mathbb{C}$ em contínuos, dos quais nenhum separa $\mathbb{C}$. Se G é dotado da topologia de identificação, então $G \simeq \mathbb{C}$.*

Teorema 3.58. *Para cada $t_0 \in J$, $\mathcal{F}_{t_0} \simeq \mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja $h : X \setminus F_{t_0} \longrightarrow \mathbb{C}$ o homeomorfismo do Corolário 3.52. Como foi visto no Corolário 3.52, a partição $\mathcal{F}_{h,t_0} = \{h(F_t) : \ t \in J \setminus \{t_0\}\}$ de $\mathbb{C}$ é semicontínua superior, onde para cada $t \in J \setminus \{t_0\}$ o conjunto $h(F_t)$ é um contínuo que não separa $\mathbb{C}$. Com isso, a partição $\mathcal{F}_{h,t_0}$ está nas condições do Teorema de Moore, logo temos $\mathcal{F}_{h,t_0} \simeq \mathbb{C}$. Vejamos agora que $\mathcal{F}_{t_0} \simeq \mathcal{F}_{h,t_0}$. Considere a bijeção $\bar{h} : \mathcal{F}_{t_0} \longrightarrow \mathcal{F}_{h,t_0}$ dada por $\bar{h}(F_t) = h(F_t)$. Temos pela Proposição 3.53 que $U \subset \mathcal{F}_{t_0}$ é um aberto se, e somente se, $\bigcup_{F_t \in U} F_t$ é aberto em $X \setminus F_{t_0}$. Por outro lado, segue que $\bar{h}(U)$ é aberto em $\mathcal{F}_{h,t_0}$ se, e somente se, $\bigcup_{h(F_t) \in \bar{h}(U)} h(F_t) = h\left(\bigcup_{F_t \in U} F_t\right)$ é um aberto de $\mathbb{C}$. Agora, como h é um homeomorfismo, temos que $\bigcup_{F_t \in U} F_t$ é aberto em $X \setminus F_{t_0}$ se, e somente se, $h\left(\bigcup_{F_t \in U} F_t\right)$ é aberto em $\mathbb{C}$, isso é suficiente para nos mostrar que $\bar{h}$ é um homeomorfismo. Portanto $\mathcal{F}_{t_0} \simeq \mathcal{F}_{h,t_0} \simeq \mathbb{C}$. □

Lema 3.8. *O espaço topológico $\mathcal{F}$ satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

Demonstração. Seja $F_t \in \mathcal{F}$ para algum $t \in J$. Fixe $t_0 \in J \setminus \{t\}$. Uma vez que $\mathcal{F}_{t_0} \simeq \mathbb{C}$, segue que F_t admite uma base local enumerável $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}_{t_0}$. Pela Proposição 3.56 temos que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção de abertos de $\mathcal{F}$. Além disso, também pela Proposição 3.56, dado U um aberto de $\mathcal{F}$ contendo F_t, então $U \cap \mathcal{F}_{t_0}$ é um aberto tanto de $\mathcal{F}_{t_0}$ como de $\mathcal{F}$, logo existe U_n tal que $F_t \in U_n \subset U \cap \mathcal{F}_{t_0} \subset U$, ou seja, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base local de F_t em $\mathcal{F}$. □

Lema 3.9. *$\mathcal{F}$ é um espaço topológico compacto.*

Demonstração. Seja $\{U_i\}_{i\in I}$ uma coleção de abertos de $\mathcal{F}$ tal que

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Como vale $X = \bigcup_{F_t\in\mathcal{F}} F_t$ pelo Teorema 3.32, segue que

$$X = \bigcup_{F_t\in\bigcup_{i\in I} U_i} F_t = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{F_t\in U_i} F_t\right).$$

Uma vez que $\bigcup_{F_t\in U_i} F_t$ é um aberto de X para cada $i \in I$ (Proposição 3.53) e X é um espaço métrico compacto, segue que existe um subconjunto finito I_n de I tal que

$$X = \bigcup_{i\in I_n}\left(\bigcup_{F_t\in U_i} F_t\right) = \bigcup_{F_t\in\bigcup_{i\in I_n} U_i} F_t.$$

Agora dado $F_t \in \mathcal{F}$, segue que $F_t \subset \bigcup_{F_t\in\bigcup_{i\in I_n} U_i} F_t$, ou seja, $F_t \in \bigcup_{i\in I_n} U_i$. Dessa maneira vale a igualdade $\mathcal{F} = \bigcup_{i\in I_n} U_i$. □

Podemos verificar o ultimo Lema de uma forma mais simples, notando que a aplicação $p : X \longrightarrow \mathcal{F}$ definida anteriormente é contínua e sobrejetiva, ou seja, $\mathcal{F} = p(X)$ é compacto pelo fato de X ser um espaço topológico compacto.

Teorema 3.59. *$\mathcal{F} \simeq S^2$.*

Demonstração. Fixemos $t_\infty \in J$. Pelo Teorema 3.58 sabemos que $\mathcal{F}_{t_\infty} \simeq \mathbb{C} \simeq S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. Considere um homeomorfismo $h : \mathcal{F}_{t_\infty} \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. Se estendermos h a $\mathcal{F}$ pondo $h(F_{t_\infty}) = (0,0,1)$, h é contínuo em F_t para todo $t \in J \setminus \{t_\infty\}$ uma vez que $\mathcal{F}_{t_\infty}$ é um aberto e $h|_{\mathcal{F}_{t_\infty}}$ é contínua por definição.

Vejamos que h é também contínua em F_{t_∞}. Suponhamos que h não seja contínua em F_{t_∞}. Uma vez que $\mathcal{F}$ satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, existe $\epsilon > 0$ e $(F_{t_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ uma sequência tal que $F_{t_n} \longrightarrow F_{t_\infty}$, mas $|h(F_{t_n}) - h(F_{t_\infty})| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela compacidade de S^2, podemos assumir que a sequência $(F_{t_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_{t_\infty}$ seja tal que $h(F_{t_n}) \longrightarrow u \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ (considerando uma subsequência, se necessário). Agora, como $h : \mathcal{F}_{t_\infty} \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ é um homeomorfismo, então existe $t \in J \setminus \{t_\infty\}$ tal que $h(F_t) = u$ e $F_{t_n} \longrightarrow F_t$. Tomando $t_0 \in J$ com $t_0 \neq t, t_\infty, t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (isso é possível pois temos $\mathrm{card}(J) = \mathfrak{c}$ como consequência dos Teoremas 3.32 e 3.58), segue que $(F_{t_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_{t_0}$ e $F_{t_n} \longrightarrow F_{t_\infty}$. Logo $\mathcal{F}_{t_0}$ não seria uma espaço de Hausdorff, pois F_{t_∞} e F_t são limites distintos da sequência $(F_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$, o que contradiz o fato de que $\mathcal{F}_{t_0} \simeq \mathbb{C}$.

Portanto $h : \mathcal{F} \longrightarrow S^2$ é contínua. Além disso, uma vez que h é uma bijeção, $\mathcal{F}$ é compacto e S^2 é um espaço de Hausdorff, concluímos que h é um homeomorfismo. □

Observação 3.1. *A partir de agora consideraremos a função* $\gamma : J \longrightarrow X$ *dada por* $\gamma(t) = \delta_t$. *Observe que pela Proposição 3.27* γ *é contínua.*

Agora temos as ferramentas necessárias para verificarmos que não existe espaço tridimensional em $\hat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$. A prova desta última afirmação é baseada na construção de uma bijeção contínua $q : J \longrightarrow S^2$ e na seguinte observação:

Observação 3.2. *Suponha que* $q : J \longrightarrow S^2$ *seja uma bijeção contínua. Observe que os conjuntos* $J_n = J \cap [-n, n]$ *são compactos para cada* $n \in \mathbb{N}$, *pois pelo Corolário 3.28* J *é fechado. Então* $q|_{J_n}$ *é contínua, injetiva e fechada. Logo* $q|_{J_n} : J_n \longrightarrow q(J_n)$ *é um homeomorfismo. Portanto* $\operatorname{int}(q(J_n)) = \varnothing$[1] *e* $q(J_n)$ *é fechado. Uma vez que* $S^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} q(J_n)$, S^2 *seria um conjunto de primeira categoria, o que é impossível, pois* S^2 *é um espaço de Baire.*

Teorema 3.60. *Se* V *é um subespaço vetorial de* $C(\mathbb{R})$ *tal que* $V \subset \hat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$, *então* $\dim(V) \leq 2$.

Demonstração. A existência de um espaço 3-dimensional em $\hat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$ implica, como foi visto no decorrer do capítulo, a existência das três funções a seguir:

(1) $\gamma : J \longrightarrow X$, que é contínua.

(2) $p : X \longrightarrow \mathcal{F}$, que é contínua e sobrejetiva.

(3) $h : \mathcal{F} \longrightarrow S^2$, que é um homeomorfismo.

Então a composição $q := h \circ p \circ \gamma$ acaba sendo uma bijeção contínua entre J e S^2. De fato:

- q é injetiva: Se t_1, t_2 são dois elementos distintos de J, então $p(\gamma(t_1)) = p(\delta_{t_1}) = F_{t_1} \neq F_{t_2} = p(\delta_{t_2}) = p(\gamma(t_2))$, ou seja, $p \circ \gamma$ é injetiva. Uma vez que h também é injetiva, temos a injetividade de q.

- q é sobrejetiva: Seja $u \in S^2$. Então existe $t \in J$ tal que $h(F_t) = u$, pelo fato de h ser sobrejetora. Logo $q(t) = h(p(\gamma(t))) = h(p(\delta_t)) = h(F_t) = u$.

- q é contínua por ser composição de funções contínuas.

Assim, chegamos em uma contradição pela Observação 3.2. □

[1] Se fosse $\operatorname{int}(q(J_n)) \neq \varnothing$, existiria uma bola aberta B de S^2 contida em $q(J_n)$ que seria homeomorfa a um intervalo aberto I contido em J_n. Porém B menos um ponto é conexo, o que não ocorre com I.

Referências Bibliográficas

[1] R. M. Aron, L. B. Bernal-Gonzalez, D. M. Pellegrino, J. B. S. Sepúlveda, **Lineability: The Search for Linearity in Mathematics, Monographs and Research Notes in Mathematics**, Chapman e Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2015.

[2] R. M. Aron, V. I. Gurariy, and J. B. Seoane-Sepúlveda, **Lineability and spaceability of sets of functions on** $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 3, 795–803.

[3] L. Aurichi, **Sobre a hipótese do contínuo: algumas aplicações e equivalências**, (2005), 134 f., Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

[4] L. Bernal-González, H. J. Cabana-Méndez, G. A. Muñoz-Fernández, J. B. Seoane-Sepúlveda, **On the dimension of subspaces of continuous functions attaining their maximum finitely many times**. Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), no. 5, 3063–3083.

[5] G. Botelho, V. V. Fávaro, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, D. Cariello, **On very non-linear subsets of continuous functions**, Q. J. Math. 65 (2014), no. 3, 841–850.

[6] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, **Fundamentos de Análise Funcional**, SBM, 2012.

[7] H. J. Cabana-Méndez, **Three classical problems in Mathematical Analysis**, (2020), Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 2020.

[8] R. J. Daverman, **Decompositions of manifolds, Pure and Applied Mathematics**, vol. 124, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986. MR872468

[9] H. Domingues, G. Iezzi, **Álgebra Moderna**, 2nd ed., Atual Editora, 1982.

[10] J. L. Gámez-Merino, G. A. Muñoz-Fernández, V. M. Sánchez, and J. B. Seoane-Sepúlveda, **Sierpiński-Zygmund functions and other problems on lineability**, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 11, 3863–3876.

[11] V. I. Gurariy, **Subspaces and bases in spaces of continuous functions**, Dokl. Akad. Nauk SSSR 167 (1966), 971–973 (Russian).

[12] V. I. Gurariy and L. Quarta, **On lineability of sets of continuous functions**, J. Math. Anal. Appl. 294 (2004), no. 1, 62–72.

[13] Y. Katznelson and K. Stromberg, **Everywhere differentiable, nowhere monotone, functions**, Amer. Math. Monthly 81 (1974), no. 4, 349–354.

[14] K. Kuratowski, **Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques**, Fundamenta Mathematicae 3 (1922), pp. 76–108.

[15] E. L. Lima, **Espaços Métricos**, 4nd ed., Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2005.

[16] E. L. Lima, **Elementos de topologia geral**, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[17] L. A. Lima, **O Teorema da Curva de Jordan**, (2010), 40 f., Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

[18] J. E. Marsden and M. J. Hoffman, **Basic complex analysis**, 2nd ed., W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

[19] R. L. Moore, **Concerning upper semi-continuous collections of continua**, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), no. 4, 416–428, DOI 10.2307/1989234. MR1501320

[20] M. A. Neto, **Equivalências e aplicações do Lema de Zorn**, (2021), 38 f., Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021.

[21] T. K. Nogueira, **Lineabilidade em conjuntos de funções reais que atingem o máximo em um único ponto**, (2014), 66 f., Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

[22] L. Rodriguez-Piazza, **Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions**, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 3649–3654.

[23] M. A. Zorn, **A remark on method in transfinite algebra**, Bulletin of the American Mathematical Society 41 (1935), no. 10, pp. 667–670.

[24] ———, **Lineability of sets of nowhere analytic functions**, J. Math. Anal. Appl. 340, (2008), no. 2, 1284-1295.