Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de solução e estabilidade na fronteira da equação da onda semilinear

por

Fabrício Lopes de Araujo Paz †

sob orientação do

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Existência de solução e estabilidade na fronteira da equação da onda semilinear

por

Fabrício Lopes de Araujo Paz

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna-UFPB

Prof. Dr. Manuel Antollino Milla Miranda-UEPB

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda-UFCG

Co-Orientador

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo-UEPB

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Junho /2012

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu a vida e pela força que me foi concedida para enfrentar os obstáculos.
Ao Prof. Aldo Trajano e Angelo Roncalli por orientar-me, pela paciência e dedicação.
Sou grato aos que participaram da minha banca, professores Fágner Araruna, Manuel Milla Miranda que disponibilazaram seu tempo em ler minha dissertação e pela contribuição com suas sugestões.
A todos os professores da Graduação e da Pós-graduação que contribuiram de forma siginificativa na minha formação acadêmica.
Aos meu amigos da Graduação e Pós-graduação em especial a Marcos, José Brito, Arthur, Alex, Bruno Sérgio, Bruno Fontes, Luciano, Ailton, Aline, Eraldo, Michel, Israel entre outros.
Agradeço a minha família por me apoiar e me proporcionar um conforto para a minha educação, além de carinho e incentivo.
Aos funcionarios do Departamento de Matemática da UFCG, em especial a Andrezza A Mayara Carvalho Rocha pela paciência, compreensão e ajuda.
Por fim, agradeço aos meus amigos de forma geral, em especial a Isabelly Lourêdo Rocha.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência e comportamento assintótico da solução fraca para o problema

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \mu(t)\Delta u + h(u) = f \text{ em } Q \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \mu \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

onde $Q = \Omega \times T$ é um domínio cilíndrico, $T > 0$ um número real, sujeita a certas condições de fronteira $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$ com $med(\Gamma_0), med(\Gamma_1) > 0$ e h uma função contínua satisfazendo a condição de Strauss $sh(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

A existência de solução forte será feita utilizando o método de Faedo-Galerkin com uma base especial para $V \cap H^2(\Omega)$ como feito em [16] e resultado de compacidade cf em Lions [11]. A existência de solução fraca utiliza o Teorema de Strauss cf Strauss [24] e resultados bem gerais de traço devido a M.Milla Miranda e L.A.Medeiros [20]. O comportamente assintótico é feito usando o funcional de Liapunov, juntamente com técnicas multiplicativas como feito em Kormonik-Zuazua [9].

Palavras-chave: Estabilidade na fronteira, Base especial, Método de Faedo-Galerkin.

Abstract

We study the existence and asymptotic behavior of the weak solution to the problem

$$\left|\begin{array}{l} u'' - \mu(t)\Delta u + h(u) = f, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } \Gamma_1, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega \end{array}\right. \tag{2}$$

where Q is a cylindrical domain, $T > 0$ a real number, subject to certain boundary conditions $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$ with $med(\Gamma_0), med(\Gamma_1) > 0$ and h continues function satisfying the Strauss's conditions $sh(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

The existence of strong solution is made using the Faedo-Galerkin's method with a special basis to $V \cap H^2(\Omega)$ as done in [16] and the result of compactness as done in [12]. The existence of weak solution uses the theorem of Strauss as done in [24] and results and general trace as done in [20]. The asymptotic behavior is done using the Liapunov functional, with multiplicative techniques as done in Kormonik-Zuazua [9].

Key words: Boundary Stabilization, special basis, Faedo-Galerkin's method.

Conteúdo

Notações e Simbologias

- Ω é um aberto limitado de classe C^2 do $\mathbb{R}^n$
- Γ é uma variedade de dimensão $n-1$ que representa a fronteira de Ω
- $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ é uma partição de Γ com $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$
- $Q = \Omega \times (0,T)$ subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$
- $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$
- $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T)$
- $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ designa a derivada na direção normal exterior
- $\rightharpoonup$ designa convergência fraca
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ designa convergência fraca estrela
- X' designa o dual topológico de X
- $\hookrightarrow$ designa imersão
- $\overset{cont}{\hookrightarrow}$ designa imersão contínua
- $\overset{comp}{\hookrightarrow}$ designa imersão compacta

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência e comportamento assintótico da solução fraca para o problema

$$\left|\begin{array}{l} u'' - \mu(t)\Delta u + h(u) = f, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } \Gamma_1, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega \end{array}\right. \tag{3}$$

onde $Q = \Omega \times T$ é um domínio cilíndrico, $T > 0$ um número real, sujeita a certas condições de fronteira $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$ com $med(\Gamma_0), med(\Gamma_1) > 0$ e h uma função contínua satisfazendo a condição de Strauss, $sh(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Este trabalho está dividido como segue abaixo:

No Capítulo 1 daremos alguns conceitos básicos sobre distribuições para funções reais, funções vetoriais, espaços de Sobolev e resultados gerais de traço. Além disso, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados de fundamental importância no decorrer deste trabalho e faremos a construção da base especial para $V \cap H^2(\Omega)$ como feito em Milla Miranda e L.A.Medeiros [16].

No Capítulo 2, mostramos a existência e unicidade de solução forte, utilizando o método de Faedo-Galerkin com a base especial para $V \cap H^2(\Omega)$ obtida no Capítulo 1 juntamente com resultado de compacidade cf em Lions [11]. A importância dessa base especial deve-se ao fato de que necessitaremos limitar o termo $u''_{km}(0)$ em $L^2(\Omega)$.

No Capítulo 3, mostramos a existência de solução fraca, aproximando a função contínua h pela sequência de Strauss, isto é, uma sequência de funções lipschitizianas satisfazendo o Teorema de Strauss cf em Strauss [24]. A solução fraca é obtida como limite de uma sequência de soluções fortes obtidas no Capítulo 2.

No capítulo 4, mostraremos o decaimento da energia associada a solução fraca do problema (1) usando o funcional de Liapunov e técnicas multiplicativas como feito em Kormonik-Zuazua [9]. Obteremos o decaimento da enegia associada a solução fraca como limite inferior da energia associada a solução forte do Problema (1).

No apêndice A, daremos uma caracterização dos espaços $L^p(0, T.X)$, onde X é um espaço de Banach e $p > 1$. Demonstramos que se o dual X' de X goza da propriedade de que toda função de variação limitada possui derivada quase sempre, podemos identificar $(L^p(0, T, X))'$ com $L^q(0, T, X')$.

No apêndice B, faremos um resumo dos resultados utilizados nesta dissertação e enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Carathéodory, que será usado utilizado no Capítulo 1. Além disso, mostraremos a existência de solução para o problema aproximado obtido no Capítulo 1.

Capítulo 1

Resultados Preliminares e Base Especial

Nosso objetivo neste capítulo é obter ferramentas para a construção de uma base ortonormal no espaço vetorial $V \cap H^2(\Omega)$, ao qual chamaremos de base especial.
No que segue, apresentaremos algumas definições e conceitos básicos relacionados à teoria das distribuições e análise funcional, que serão de fundamental importância no decorrer deste trabalho. Além disso, seguindo o artigo de Milla Miranda e L.A.Medeiros [16], construíremos a base especial em $V \cap H^2(\Omega)$, no qual iremos usar amplamente no capítulo 2.

1.1 Espaços funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definimos por suporte de f, e denotamos por $supp(f)$ o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Se este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$ então dizemos que f possui suporte compacto.
Uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é denominada *multi-índice* e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.
Representamos por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Observação 1.1.1 *Se* $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ *definimos* $D^0 u = u$, *para toda função* u.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto.

Definição 1.1.1 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*
i) *Existe um compacto K de Ω tal que $supp(\varphi), supp(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}^n$.*
ii) *Para todo multi-índice α, tem-se $D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha\varphi$ uniformemente em K*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *Espaço das Funções Testes sobre* Ω.

Uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

i) $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

ii) T é contínua, isto é, se φ_n converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_n)$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Denotaremos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi\rangle$ e por $\mathcal{D}'(\Omega)$ conjunto de todas as distribuições sobre Ω.

Lema 1.1.1 (Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Para a prova ver Brezis [3]. ∎

A seguir, daremos um exemplo de uma distribuição.

Exemplo 1.1.1 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

é uma distribuição.

Observação 1.1.2 *Segue do Lema de Du Bois Raymond que se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente, se $u = v$. Desta forma, temos uma correspondência biunívoca entre as distribuições do tipo T_u com o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Definição 1.1.2 *Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ de ordem $|\alpha|$ de T é um funcional $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^n \langle T, D^\alpha\varphi\rangle.$$

Além disso, $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω.

Observação 1.1.3 *Decorre da definição acima que uma distribuição tem derivadas de todas as ordens.*

1.2 Espaços funcionais a valores vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T,X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0,T)$. Diremos que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T,X)$ se:

i) Existe um compacto K de $(0,T)$ tal que $supp(\varphi_n), supp(\varphi) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \to \varphi$ em X uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T,X)$, isto é, $T \in \mathcal{D}'(0,T,X)$ se $T : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é linear e se $\theta_n \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle T, \theta_n\rangle \to \langle T, \theta\rangle$ em X.
Diremos que $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(0,T,X)$ se $\langle T_n, \theta\rangle \to \langle T, \theta\rangle$ em X, $\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T,X)$ munido da convergência acima é denominado *espaço das distribuições vetorias de* $(0,T)$ *com valores em* X

Observação 1.2.1 *Temos que o conjunto* $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ *é total em* $\mathcal{D}(0,T,X)$.

Definição 1.2.1 *Dizemos que u é fortemente mensurável quando existir uma sequência de funções simples* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\varphi_n \to \varphi \;\; em \; X, \;\; quase \; sempre \; em \; (0,T).$$

Denotaremos por $L^p(0,T,X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ é integrável a Lebesgue, com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T,X)$ representamos o espaço de Banach das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$, com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup ess_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X. \tag{1.1}$$

Observação 1.2.2 *No caso $p = 2$ e X um espaço de Hilbert, segue que $L^2(0,T,X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u,v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Se X é reflexivo, então podemos identificar

$$[L^p(0,T;X)]' = L^q(0,T;X'),$$

onde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. No caso em que $p=1$, identificamos

$$[L^1(0,T;X)]' = L^\infty(0,T;X')$$

Essas identificações encontram-se demonstradas detalhadamente no Apêndice A.

Observação 1.2.3 *Quando Ω for um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, $T>0$ e $Q=\Omega\times(0,T)$ for o cilíndro em $\mathbb{R}^{n+1}$ então, para $1\leq p<\infty$ temos*

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q).$$

Definição 1.2.2 *Dada $T\in\mathcal{D}'(0,T,X)$, definimos a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por:*

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n},\varphi\right\rangle = (-1)^n\left\langle T,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right\rangle, \forall\varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Representamos por $C([0,T],X)$ o espaço de Banach das funções u, definidas em $[0,T]$ com valores em X, cuja norma é dada por

$$\|u\|_\infty = \sup\|u(t)\|_X.$$

Por fim, denotaremos por $H_0^1(0,T,X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0,T,X)=\{u\in L^2(0,T,X); u'\in L^2(0,T,X), u(0)=u(T)=0\},$$

munido do produto interno

$$((u,v))_{H_0^1(0,T,X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt + \int_0^T (u'(t),v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0,T,X)$ com o seu dual $(L^2(0,T,X))'$, via o Teorema de Riesz, obtemos a seguinte cadeia

$$\mathcal{D}(0,T,X)\hookrightarrow H_0^1(0,T,X)\hookrightarrow L^2(0,T,X)\hookrightarrow H^{-1}(0,T,X)\hookrightarrow\mathcal{D}'(0,T,X),$$

onde

$$H_0^1(0,T,X) = (H^{-1}(0,T,X))'.$$

Proposição 1.2.1 *Seja* $u \in L^2(0,T,X)$. *Então, existe um único* $f \in H^{-1}(0,T,X)$ *que verifica*

$$\langle f, \theta\xi\rangle = (\langle u', \theta\rangle, \xi), \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall \xi \in X$$

Demonstração: Ver M. Milla Miranda [18]. ■

Baseado na Proposição anterior, identificamos u' com f. Em razão disto, diremos que se $u \in L^2(0,T,X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T,X)$.

Proposição 1.2.2 *A aplicação*

$$u \in L^2(0,T,X) \mapsto u' \in H^{-1}(0,T,X)$$

onde X *é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.*

Demonstração: Ver M. Milla Miranda [18]. ■

Proposição 1.2.3 *Suponhamos que* $u, g \in L^1(0,T,X)$. *Então, as condições abaixo são equivalentes:*

i) *Existe* $\xi \in X$, *independente de* t, *tal que* $u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds$ *quase sempre em* $(0,T)$, *(*u *é quase sempre uma primitiva de* g*);*

ii) *Para cada* $\varphi \in D(0,T)$ *tem-se* $\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt$, *(*$g = \dfrac{du}{dt}$ *derivada no sentido das distribuições);*

iii) *Para cada* $y \in X'$, $\dfrac{d}{dt}\langle u(t), y\rangle = \langle g(t), y\rangle$ *no sentido das distribuições.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15] ou Temam [22]. ■

Teorema 1.2.1 *Sejam* X, Y *espaços de Hilbert tal que* $X \overset{cont}{\hookrightarrow} Y$ *e* $u \in L^p(0,T,X)$, $u' \in L^p(0,T,Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, *então* $u \in C^0([0,T];Y)$.

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15]. ■

Teorema 1.2.2 *Seja* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Sejam* $u \in [L^q(0,T,X)]'$ *e* $v \in L^p(0,T,X)$, *então*

$$\langle u, v\rangle_{[L^q(0,T,X)]' \times L^p(0,T,X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{X' \times X} dt.$$

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15]. ■

1.3 Espaços de Sobolev

No que segue, definiremos o espaços de Sobolev e daremos algumas de suas principais propriedades básicas. Consideremos Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $u \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, definimos o espaço de Sobolev. Dado um número inteiro $m > 0$, representamos $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo *multi-índice* $|\alpha| \leq m$, temos $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u pondo

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p_{L^p(\Omega)}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}(\Omega), \text{ quando } p = \infty.$$

Observação 1.3.1 *Para $p = 2$, representamos $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a estrutura Hilbertina de tais espaços.*

Proposição 1.3.1 *Os espaços $H^m(\Omega)$ munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

são espaços de Hilbert.

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Por fim, o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ denotamos por $H_0^m(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o seu dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

1.4 Espaços de Sobolev fracionários

Nesta seção daremos uma outra caracterização dos espaços $H^m(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$, que servirá de motivação para definir os espaços $H^s(\Omega)$, quando s for um número real positivo e Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular. No que segue, apresentaremos algumas definições e propriedades destes espaços que serão utilizados neste trabalho. Na seção anterior, definimos os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto regular e limitado. No caso $p = 2$, temos

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}. \tag{1.2}$$

Definição 1.4.1 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de fourier de f, denotada por $\hat{f}$, é uma função definida sobre o $\mathbb{R}^n$ pela fórmula*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} f(x)dx,$$

onde $\langle \xi, x\rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ e $i = \sqrt{-1}$.

Definição 1.4.2 (Espaço de Schwartz) *O espaço de Schwartz ou espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, que denotaremos por $\mathcal{F}$, é o subespaço vetorial formado pelas funções $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x\|^k D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

qualquer que sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Exemplo 1.4.1 *Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $\varphi \in \mathcal{F}$.*
De fato, desde que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que supp$\varphi \subset K$. Assim, consideremos $\sigma > 0$ tal que $K \subset \mathbb{R}^n$. Logo, dados $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > \sigma$

$$\|x\|^k |D^\alpha \varphi(x)| = 0 < \varepsilon,$$

mostrando que $\varphi \in \mathcal{F}$.

Definição 1.4.3 (Distribuição Temperada) *Um funcional linear T definido e contínuo sobre $\mathcal{F}$ é denominado distribuição temperada, ao qual denotaremos por $\mathcal{F}'$ o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{F}$.*

Vamos definir o espaço $H^s(\Omega)$ e, para tanto, consideremos o seguinte resultado:

Proposição 1.4.1 *Para todo $m \in \mathbb{N}$ temos:*

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{F}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Demonstração: Ver M.Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Dessa forma, motivados pela proposicão anterior, definimos para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{F}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x)\hat{v}(x)dx.$$

Em Milla Miranda e L. A. Medeiros [13] podemos ver que

$$H^s(\mathbb{R}^n) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n),$$

Proposição 1.4.2 *Para todo $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Ver M. Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Observação 1.4.1 *Para todo $s \in \mathbb{R}$, denotaremos o dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$ como sendo*

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$$

Quando Ω é um aberto limitado e regular do $\mathbb{R}^n$, define-se o espaço $H^s(\Omega)$ como

$$H^s(\Omega) = \{v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w|_\Omega = u\}$$

Proposição 1.4.3 *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} H^{s_1}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Lions Magenes [14]. ■

Observação 1.4.2 *Os resultados acima valem quando Ω for um aberto limitado e regular do $\mathbb{R}^n$.*

Finalizaremos esta seção caracterizando o espaço $H^s(\Gamma)$, onde Γ é a fronteira de um aberto limitado regular Ω do $\mathbb{R}^n$. Enunciaremos também alguns resultados que usamos de espaços de sobolev em variedades como feito em Lions-Magenes [14].

Sejam $Q = \{y; y = (y', y_n); \|y'\| \leq 1$ e $-1 < y_n < 1\}$, $Q^+ = \{y \in Q; y_n > 0\}$ e $Q^- = \{y \in Q; y_n < 0\}$. Além disso, seja $\sum = Q \cap \{y_n = 0\}$ e consideremos $\{(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_k, \varphi_k)\}$ um sistema de cartas locais para Γ. A cobertura aberta $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de $\overline{\Omega}$ determina uma partição C^∞ da unidade subordinada, isto é, existem $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que:

(i) $supp(\theta_0) \subset \Omega; supp(\theta_i) \subset U_i, i = 1, 2, \ldots, k;$

(ii) $0 \leq \theta_i \leq 1;$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \theta_i(x) = 1, \forall x \in \overline{\Omega}.$

Consideremos u uma função integrável definida sobre Γ. Desde que (i) vale, temos

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k} (\theta_i u)(x) \text{ para quase todo } x \in \Gamma. \tag{1.3}$$

Definamos para cada $1 \leq i \leq k$ as funções

$$u_i(y) = (\theta_i u)(\varphi^{-1}(y)).$$

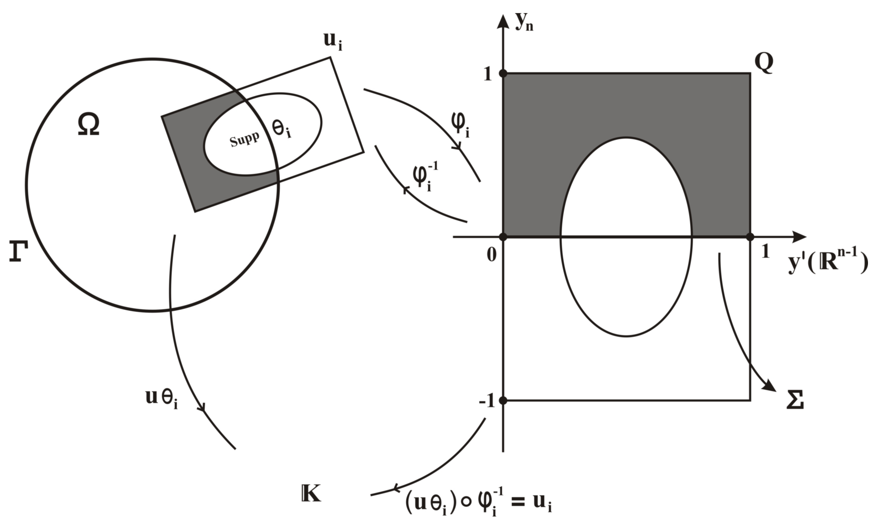

Figura 1.1:

Notemos que

$$S(u\theta_i) = \overline{\{x \in \Omega; (u\theta_i) \neq 0\}} \subset supp(\theta_i) \cap \Gamma \subset U_i \cap \Gamma.$$

Daí, temos que $S(u\theta_i)$ é um compacto do $\mathbb{R}^n$, pois a intersecção de fechados é ainda um fechado e $U_i \cap \Gamma$ é limitado. Segue daí que o conjunto

$$S(u_i) = \overline{\{x \in \Omega; (u\theta_i) \neq 0\}}$$

é um compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$ contido no aberto Γ, pois $\varphi_i(S(u\theta_i)) = S(u_i)$ e φ é contínua e $S(u\theta_i)$, como vimos, é um compacto. Note que $supp(u_i) \subset S(u_i) \subset \Gamma$. Assim, podemos estender u_i da seguinte forma:

$$\tilde{u_i}(y) = \begin{cases} (u\theta_i)(\varphi^{-1}(y)), \text{ se } y \in \Gamma \\ 0, \text{ se } y \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Gamma \end{cases} \tag{1.4}$$

Da construção acima, podemos ver que $\tilde{u_i}$ tem as mesmas propriedades de u_i. Neste caso, como u é integrável, então $\tilde{u_i}$ é também integrável e

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u_i}(y)dy = \int_{U_i \cap \Gamma} u(x)\theta_i(x)J_i(x)d\Gamma$$

onde $J_i(x)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\Gamma_i = U \cap \Gamma$. Por outro lado, se para cada $1 \leq i \leq k$, $\tilde{u_i}$ for integrável, temos por (1.3) que u também será e

$$\int_{\Gamma} u(x)d\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma} (u\theta_i)(x)d\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u_i}(y)\overline{J}(y)dy$$

onde $\overline{J}(y)$ é uma aplicação diferenciável sobre $\mathbb{R}^{n-1}$. Denotando por $d\Gamma$ a medida sobre Γ induzinda pela medida de Lebesgue, definiremos o espaço $L^p(\Gamma)$ como sendo o espaço das funções L^p das funções somáveis sobre Γ para a medida $d\Gamma$ com a norma

$$\|v\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |v(x)|^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \tag{1.5}$$

$$\|v\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Gamma} ess|v(x)|, p = \infty$$

Equivaletemente, usando a partição da unidade (θ_i), $1 \leq i \leq k$, definimos

$$L^p(\Gamma) = \{v : \Gamma \to \mathbb{R}; v\theta_i \circ \widetilde{\theta_i}^{-1} = \tilde{v_i} \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \ldots, k\},$$

munido da norma

$$\|v\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\sum_{=1}^{k} \|\tilde{v_i}\|_{\mathbb{R}^{n-1}}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma dada em (1.5). Definiremos o espaço $D(\Gamma)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{v : \Gamma \to \mathbb{R}; v\widetilde{\theta_i} \circ \varphi^{-1} \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), \forall m \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, k\}$$

onde

$$C^m(\Gamma) = \{v : \Gamma \to \mathbb{R}; v\theta_i \circ \widetilde{\theta_i}^{-1} = \tilde{u_i} \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), \forall m \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, k\}$$

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathcal{D}(\Gamma) &\to \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\mapsto \phi_i(u) = \tilde{u}_i = \widetilde{u\theta_i} \circ \varphi^{-1} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Sendo $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, temos que

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i v(y) dy = \int_{U_i \cap \Gamma} u(x)\theta_i(x) v(\varphi_i(x)) J_i(x) d\Gamma \tag{1.7}$$

onde $J_i(x)$ é uma função infinitamente diferenciável sobre $U_i \cap \Gamma$. Definindo

$$\psi_i(v) = \begin{cases} \theta_i(x) v(\varphi_i(x)) J_i(x), x \in U_i \cap \Gamma \\ 0, x \in \Gamma \backslash U_i \cap \Gamma \end{cases}$$

Então, de (1.7) podemos escrever

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\Gamma} u(x) \psi_i(v)(x) dx,$$

ou ainda pelo fato de que $\psi_i(v) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, temos

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \langle u, \psi_i(v) \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma) \times \mathcal{D}(\Gamma)}. \tag{1.8}$$

Da igualdade em (1.8) e do fato de que $\mathcal{D}(\Gamma)$ ser denso em $\mathcal{D}'(\Gamma)$, resulta que a aplicação definida em (1.6) se prolonga, por continuidade a uma aplicação, que continuaremos denotando por ϕ_i de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$.

Definimos para todo $s \in \mathbb{R}$ o espaço

$$H^s(\Gamma) = \{u; \phi_i(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \ldots, k\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^{k} \|\phi_i(u)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

Mostra-se em Milla Miranda e L.A.Medeiros [13] que a definição do espaço $H^s(\Gamma)$ não depende do sistema de cartas locais de Γ.

Seja $\{(U_1, \psi_1), \ldots, (U_k, \psi_k)\}$ outro sistema de Cartas locais de Γ satisfazendo as mesmas propriedades que o sistema de cartas locais U de Γ. Então, a norma gerada por essa cartas será equivalente a norma em (1.9). Portanto, a definição do espaço $H^s(\Gamma)$ não depende do sistema de cartas locais.

Para uma exposição completa dos espaços de sobolev em uma variedade, o leitor interessado poderá encontrar em Herby [7]. No entanto, enunciaremos os seguintes resultados.

Proposição 1.4.4 *O espaço $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.*

Demonstração: Ver Lions-Magenes [14]. $\blacksquare$

Proposição 1.4.5 *O espaço $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma)$.*

Demonstração: Ver Lions-Magenes [14]. $\blacksquare$

1.5 Teoria do Traço

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ. Por $\mathcal{D}(\Omega)$ representamos o espaço vetorial das funções reias definidas em Ω, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representa-se por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ. Por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ representa o conjunto de todas as funções $\rho : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que são restrições de funções pertencentes a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ restrita a $\overline{\Omega}$. Em símbolos

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\phi|_{\overline{\Omega}} = \rho, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

Proposição 1.5.1 *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Demonstração: Ver Milla Miranda e L.A. Medeiros [13]. $\blacksquare$

De acordo com a Proposição 1.5.1 e pelo fato que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$, podemos estender a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

a uma única aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0,

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0 u|_\Omega, \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

A aplicação dada em (1.10) é denominada a *aplicação traço de ordem zero.*

Teorema 1.5.1 *O núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Milla Miranda e L.A. Medeiros [13]. $\blacksquare$

Em face de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ser denso em $H^m(\Omega)$ podemos estender a aplicação

$$\gamma_j : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

a uma única aplicação linear e contínua e tal que

$$\left.\frac{\partial u^j}{\partial \nu^j}\right|_{\Gamma} = \gamma_j u, \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \forall j = 1, \ldots, m-1.$$

Assim, a partir das $\gamma_j's$, podemos enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 1.5.2 *Existe uma única aplicação linear e contínua* γ

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$
$$u \mapsto \gamma u = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1})$$

com a topologia natural do espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *dada por*

$$\|w\|_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \|w_0\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|w\|_{H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \ldots + \|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

onde $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}) \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Demonstração: Ver M. Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Observação 1.5.1 *A aplicação* γ *acima é denominada aplicação traço de ordem* m.

1.5.1 Traço em $L^2(0,T,H^m(\Omega))$

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de traço em $L^2(0,T,H^m(\Omega))$ devido a M.Milla Miranda [18]. Pelo visto anteriormente, temos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{1.11}$$

que é linear, contínua e sobrejetora.

Definamos a aplicação

$$\hat{\gamma} : L^2(0,T,H^m(\Omega)) \to L^2\left(0,T,\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \tag{1.12}$$
$$u \mapsto \hat{\gamma} u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t),$$

onde $\gamma u(t)$ é a aplicação (1.11) aplicado em $u(t) \in H^m(\Omega)$. A aplicação (1.12) é linear, contínua e sobrejetora.

Proposição 1.5.2 *Seja* $u \in L^2(0,T,H^m(\Omega))$ *com* $u' \in L^2(0,T,H^m(\Omega))$ *então* $\hat{\gamma}u' = (\hat{\gamma}u)'$

Demonstração: Ver M. Milla Miranda [18]. ■

1.5.2 Traço em $H^{-1}(0,T,H^m(\Omega))$

No que segue, enunciaremos para funções de $H^{-1}(0,T,H^m(\Omega))$ um resultado de traço devido a Milla Miranda cf [18], no qual vamos utilizar no Capítulo 3. Notemos que para $f \in H^{-1}(0,T,H^m(\Omega))$ implica que

$$f = \phi_f^0 + \psi_f^0, \text{ com } \phi_f^0, \psi_f^0 \in L^2(0,T,H^m(\Omega)).$$

Seja $\mathbb{L} = L^2(0,T,H^m(\Omega)) \times L^2(0,T,H^m(\Omega))$ e M o subespaço fechado de $\mathbb{L}$ dos vetores $\{\alpha, \beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0,T,H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0,T,H^m(\Omega))} = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(0,T,H^m(\Omega))$ e $M^\perp$ o complemento ortogonal de M. Então, definimos a aplicação

$$H^{-1}(0,T,H^m(\Omega)) \to M^\perp$$

$$f \mapsto \{\phi_f^0, \psi_f^0\},$$

onde $\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \xi_f$ é tal que $\|f\| = \|\{\phi_f^0, \psi_f^0\}\|$ e

$$\xi_f = \{\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \mathbb{L}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v') = \langle f, v\rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega)\},$$

isto é, o conjunto dos $\{\phi_f, \omega_f\} \in \mathbb{L}$ tais que $f = \phi_f + \psi_f$. A aplicação defininda acima é uma isometria linear e contínua.

Para $f \in H^{-1}(0,T,H^m(\Omega))$ define-se $\tilde{\gamma} f$ da seguinte forma:

$$\langle \tilde{\gamma} f, w\rangle = \int_0^T (\gamma \phi_f^0, w)_Y dt - \int_0^T (\gamma \psi_f^0, w')_Y dt$$

com $w \in H^{-1}\left(0, T, \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, que é linear e contínua. Assim, temos estabelicido uma aplicação

$$\tilde{\gamma} : H^{-1}(0,T,H^m(\Omega)) \to H^{-1}\left(0, T, \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$$

$$f \mapsto \tilde{\gamma} f,$$

onde $\tilde{\gamma}$ é definido acima, que é linear e contínua. Esta aplicação é denominada *aplicação traço para as funções de* $H^{-1}(0,T,H^m(\Omega))$.

1.5.3 Traço em $L^1(0,T,E)$

A seguir, consideraremos o espaço de Banach

$$E = \{v \in L^{p'}(\Omega); \Delta v \in L^1(\Omega)\}$$

com a norma

$$\|v\|_E = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|\Delta v\|_{L^1(\Omega)}.$$

Podemos ver em M. Miranda e L. A. Medeiros [20] que existe uma aplicação

$$\begin{aligned} \overline{\gamma} : E &\to W^{\frac{1}{p}-1,p'}(\Gamma) \times W^{\frac{1}{p}-2,p'}(\Gamma) \\ v &\mapsto \overline{\gamma} v = (\gamma_0 v, \gamma_1 v) \end{aligned}$$

linear e contínua.

1.6 Principais Resultados

Daremos a seguir resultados que serão utilizados neste trabalho.

Proposição 1.6.1 *Considere o números reais p e p' tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

(i) $p = 2$ *se* $n = 1, 2, 3$

(ii) $p > \frac{n}{2}$ *se* $n \geq 4$

Então, a imersão $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ *é contínua.*

Demonstração: Ver Milla Miranda e L. A. Medeiros [20]. ■

No que segue, vamos provar a existência e unicidade de solução para o problema homogêneo

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega (f \in L^1(\Omega)) \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \end{array} \right. \tag{1.13}$$

Para tanto, usaremos o método da transposição, como feito em Lions-Magenes [14]. Formalmente, pelo Teorema de Green, obtemos

$$\int_\Omega u(-\Delta v)dx = \int_\Omega fvdx + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_1. \tag{1.14}$$

Seja

$$\mathcal{P} = \left\{ \varphi \in W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega); \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \right\},$$

onde

$$W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega) = \{\phi \in W^{1,p}(\Omega); \phi = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}.$$

Então, de (1.14) temos

$$\int_\Omega u(-\Delta v)dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in \mathcal{P} \tag{1.15}$$

Adotaremos (1.15) com definição de solução do Problema (1.13). A existência e unicidade de problema (1.13), é dada no seguinte resultado:

Proposição 1.6.2 *Seja $f \in L^1(\Omega)$, então existe uma única função $u \in L^{p'}(\Omega)$ satisfazendo* (1.15). *A aplicação $T : L^1(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$, $Tf = u$ é linear, contínua e $-\Delta u = f$.*

Demonstração: Seja $g \in L^p(\Omega)$ e v uma solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta v = g \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \end{array}\right. \tag{1.16}$$

Então, pelo Teorema $B.2.6$, $v \in \mathcal{P}$. Considere a aplicação

$$J : L^p(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$$
$$Jg \mapsto v,$$

onde v é solução do Problema (1.16). Note que pela Proposição 1.6.1 a aplicação J está bem definida. Além disso, J é linear e contínua.

De fato, sejam $g, h, r + h \in L^p(\Omega)$ tal que $J(r) = v_1$, $J(h) = v_2$ e $J(r + h) = v_3$, isto é, v_1, v_2 e v_3 são soluções do Problema 1.16. Desejamos mostrar que $J(r + h) = J(r) + J(h)$. Como $r + h \in L^p(\Omega)$, temos que v_3 é solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta v_3 = r + h \text{ em } \Omega, \\ v_3 = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array}\right.$$

Temos também para $r \in L^p(\Omega)$ que v_1 é solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta v_1 = r \text{ em } \Omega, \\ v_1 = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array}\right.$$

De modo análogo, temos para $h \in L^p(\Omega)$ que v_2 é solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v_2 = h \text{ em } \Omega, \\ v_2 = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Assim, $(v_1 + v_2)$ é solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta(v_1 + v_2) = r + h \text{ em } \Omega, \\ v_1 + v_2 = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Por unicidade de solução do Problema 1.16 obtemos que $v_3 = v_1 + v_2$, ou seja, $J(r + h) = J(r) + J(h)$. Analogamente, mostraremos que $J(\lambda v) = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. A continuidade da aplicação J segue da Proposição 1.6.1.

Dessa forma, podemos definir a aplicação adjunta

$$J^* : [C^0(\overline{\Omega})]' \rightarrow L^{p'}(\Omega)$$

$$\langle J^*\theta, \phi\rangle_{L^{p'}(\Omega)\times L^p(\Omega)} = \langle \theta, J\phi\rangle_{[C^0\overline{(\Omega)}]'\times C^0\overline{(\Omega)}}, \forall \phi \in L^p(\Omega).$$

Provemos que a função $u = J^*f$ é solução do problema 1.16. De fato, temos

$$\langle J^*f, g\rangle_{L^{p'}(\Omega)\times L^p(\Omega)} = \langle f, Jg\rangle_{[C^0\overline{(\Omega)}]'\times C^0\overline{(\Omega)}}$$

isto é,

$$\int_\Omega J^*fgdx = \int_\Omega fJgdx.$$

Assim, obtemos

$$\int_\Omega u(-\Delta v)dx = \int_\Omega fvdx.$$

Para a unicidade, sejam $u_1, u_2 \in L^{p'}(\Omega)$ satisfazendo (1.15). Então

$$\int_\Omega (u_1 - u_2)(-\Delta v)dx = 0, \forall v \in \mathcal{P}.$$

Consideremos $g \in L^p(\Omega)$ e v solução do problema (P_2), obtemos

$$\int_\Omega (u_1 - u_2)gdx = 0, \forall g \in L^p(\Omega).$$

Portanto, $u_1 = u_2$ e a unicidade está provada. Como $u = Tf$ e $u = J^*f$, por unicidade de solução, tem-se $T = J^*$, e assim, T possui as mesmas propriedades. ■

Para o problema de fronteira não homogêneo,

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u = g \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \chi \text{ sobre } \Gamma_1 \end{array}\right. \tag{1.17}$$

temos o seguinte resultado:

Proposição 1.6.3 *Seja* $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\chi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$*, então existe uma única solução* $u \in L^{p'}(\Omega)$ *para o problema* (1.17).

Demonstração: Seja $\{0, \tilde{\chi}\} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definida por

$$\tilde{\chi} = \left|\begin{array}{l} \chi \text{ sobre } \Gamma_1 \\ 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

Pelo Teorema 1.5.2, existe $\xi \in H^2(\Omega)$ tal que $\gamma(\xi) = (\gamma_0 \xi, \gamma_1(\xi)) = (0, \tilde{\chi})$. Seja w uma solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta w = f + \Delta \xi \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \end{array}\right.$$

Note que $f + \Delta \xi \in L^1(\Omega)$, então pela Proposição 1.6.2 temos que $w \in L^{p'}(\Omega)$. Tomando $u = w + \xi$, temos $u \in L^{p'}(\Omega)$ é solução para o Problema (1.17). Para a unicidade, sejam u_1, u_2 duas soluções do problema 1.17, então $v = u_1 - u_2$ é solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta v = 0 \text{ em } \Omega; \\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0; \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array}\right.$$

Por unicidade do Problema 1.13, temos $v = 0$, isto é $u_1 = u_2$. ∎

1.7 Construção da base especial

A partir de agora, daremos alguns resultados que nos proporcionará a construção da base especial em $V \cap H^2(\Omega)$. A construção desta base especial foi obtida por M. Miranda e L. A. Medeiros [16]. Definamos o espaço de Hilbert V por

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\},$$

como sendo o subespaço de $H^1(\Omega)$ munido do produto interno e da norma

$$((u,v))_V = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

e

$$\|u\|_V = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx. \tag{1.18}$$

respectivamente.

Neste trabalho, denotaremos o produto interno de $L^2(\Omega)$ por $(\cdot,\cdot)$ e a norma induzida por este produto interno por $|\cdot|$. Também denotaremos o produto interno em V por $((\cdot,\cdot))$ e a norma em V por $\|\cdot\|$, afim de não sobrecarregar a notação.

Proposição 1.7.1 *Em V vale a desigualdade de Poincaré.*

Para a prova da Proposição 1.7.1 ver Dautray Robert e Lions [6].

Consideremos o operador $-\Delta$ definido pela terna $\{V, L^2(\Omega), ((u,v))_V\}$. Decorre da teoria Espectral, cf em Lions [12] que

$$D(-\Delta) = \left\{ u \in V \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \right\}.$$

A seguir, daremos um resultado que nos garantirá a existência de solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, (f \in L^2(\Omega)) \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ sobre } \Gamma_1, (g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \end{array} \right. \tag{1.19}$$

Lema 1.7.1 *Dado $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, existe uma única $u \in V \cap H^2(\Omega)$ solução do Problema* (1.19).

Demonstração: Seja $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(u,v) = ((u,v)), \ \forall u,v \in V$$

Temos que a é uma forma bilinear contínua e coerciva. Seja $L : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle L, v\rangle = (f,v) + \int_{\Gamma_1} gv d\Gamma, \quad \forall v \in V.$$

Note que L é uma forma linear e contínua sobre V. De fato

i) L é linear

Sejam $v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\langle L, \alpha v+w\rangle = (f, \alpha v+w)+\int_{\Gamma_1} g(\alpha v+w)d\Gamma = \alpha(f,v)+(f,w)+\alpha\int_{\Gamma_1} gvd\Gamma+\int_{\Gamma_1} gwd\Gamma =$$

$$= \alpha(f,v)+\alpha\int_{\Gamma_1} gvd\Gamma+(f,w)+\int_{\Gamma_1} gwd\Gamma = \alpha\langle L,v\rangle+\langle L,w\rangle.$$

ii) L é contínua

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e pela imersão contínua $V \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, com constante de imersão C_1, temos

$$|\langle L,v\rangle| \leq |f||v| + |g|_{L^2(\Gamma_1)}|v|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C_1|f|\|v\| + |g|_{L^2(\Gamma_1)}|v|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Temos que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma_1)$. Além disso, pelo teorema do traço

$$|\gamma_0 v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C_3\|v\|.$$

Daí,

$$|\langle L,v\rangle| \leq C_1|f|\|v\| + C_2|g|_{L^2(\Gamma_1)}|v|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C_1|f|\|v\| + C_2|g||v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq$$
$$\leq C_1|f|\|v\| + C_2C_3\|v\| = C\|v\|$$

onde $C = C_1|f| + C_2C_3|g|_{L^2(\Gamma_1)}$.

Pelo lema de Lax-Milgran, existe um único $v \in V$ tal que

$$a(u,v) = \langle L,v\rangle,$$

ou ainda

$$((u,v)) = \langle L,v\rangle.$$

Assim,

$$((u,v)) = (f,v) + \int_{\Gamma_1} gvd\Gamma, \qquad \forall v \in V. \tag{1.20}$$

Em particular, (1.20) é válida para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então,

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

Pelo Teorema de Green, temos

$$\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \tag{1.21}$$

Daí,

$$(-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.22}$$

Desde que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, segue de (1.22) que

$$(-\Delta u, v) = (f, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega). \tag{1.23}$$

Por (1.23), obtemos $-\Delta u = f$ em $L^2(\Omega)$. De (1.21) e do Lema de Du Bois Raymond obtemos que $-\Delta u = f$ quase sempre em Ω. Daí, segue por regularidade elíptica que $u \in V \cap H^2(\Omega)$.

Por outro lado, desde que $u \in H^2(\Omega)$ e $\Delta u \in L^2(\Omega)$, segue pela fórmula de Green que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = (\Delta u, v) + ((u, v)). \tag{1.24}$$

Por (1.20), temos substituindo em (1.24) que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = (\Delta u, v) + (f, v) + \int_{\Gamma_1} gv d\Gamma$$

o que implica

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} gv d\Gamma$$

Pelo teorema da Representação de Riesz, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \langle g, v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$$

donde segue que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g$ em $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Como $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ em } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

o que prova o resultado. ■

Proposição 1.7.2 *Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Então, a solução do problema*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \textit{ em } \Omega, \\ u = 0 \textit{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \textit{ sobre } \Gamma_1, \end{array} \right. \tag{1.25}$$

pertence a $V \cap H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq [|f|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}]$.

Demonstração: Seja $\{0, \tilde{g}\} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definido por

$$\hat{g} = \begin{cases} g, \text{ sobre } \Gamma_1 \\ 0, \text{ sobre } \Gamma_0 \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.5.2, existe $h \in H^2(\Omega)$ tal que $\gamma(h) = (\gamma_0(h), \gamma_1(h)) = (0, \hat{g})$ e

$$\|h\|_{H^2(\Omega)} \leq c\left[\|0\| + \|\hat{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\right] = c\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \tag{1.26}$$

Seja w solução fraca do seguinte problema(a qual existe pelo Lema anterior)

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = \Delta w \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array} \right. \tag{1.27}$$

Isto significa que

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v dx = \int_\Omega f v dx - \int_\Omega (\Delta h) v dx, \quad \forall v \in V.$$

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq c[|f - \Delta h|_{L^2(\Omega)}] \leq c[|f|_{L^2(\Omega)} + |\Delta h|_{L^2(\Omega)}] \tag{1.28}$$

pelo Teorema B.2.6. Então, $u = w + h \in V \cap H^2(\Omega)$ é solução do Problema (1.27) e por (1.26) e (1.28), obtemos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|w + h\|_{H^2(\Omega)} \leq \|w\|_{H^2(\Omega)} + \|h\|_{H^2(\Omega)} \leq c[|f|_{L^2(\Omega)} + |\Delta h|_{L^2(\Omega)}] + \|h\|_{H^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq c[|f|_{L^2(\Omega)} + c_1\|h\|_{H^2(\Omega)}] \leq c_2[|f|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}],$$

onde c_1 e c_2 são as constantes positivas. ■

Proposição 1.7.3 *Em $V \cap H^2(\Omega)$, as normas de $H^2(\Omega)$ e a norma*

$$u \mapsto \left\{ |\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

são equivalentes.

Demonstração: Seja $u \in V \cap H^2(\Omega)$. Pela Proposição anterior, tem-se

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_1 \left\{ |\Delta u|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right\} \tag{1.29}$$

Por outro lado,

$$|\Delta u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{H^2(\Omega)}. \tag{1.30}$$

Pelo Teorema de traço

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C_2\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \tag{1.31}$$

Por (1.30) e (1.31), temos

$$|\Delta u|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C_3\|u\|^2_{H^2(\Omega)}. \tag{1.32}$$

Portanto, de (1.29) e (1.32), segue que as normas em $V \cap H^2(\Omega)$ são equivalentes. ■

A seguir, vamos enunciar e demonstrar um resultado que permitirá construir uma base especial em $V \cap H^2(\Omega)$ e está base será utilizada para mostrar a existência de solução forte do Problema (1) no Capítulo 2. Antes, vamos assumir que vale

- (H_1) $\mu \in W^{1,\infty}(0,T)$ com $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$
- (H_2) $\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$ com $\beta(x) \geq \beta_0 > 0$.

Proposição 1.7.4 *Suponhamos $(H_1)-(H_2)$ e que $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in V$ e $\mu(0)\dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} + \beta u_1 = 0$ sobre Γ_1. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existem vetores $z, w \in V \cap H^2(\Omega)$ tais que*

$$\|w - u_0\|_{V \cap H^2(\Omega)} < \varepsilon, \ \ \|z - u_1\|_V < \varepsilon$$

e

$$\mu(0)\frac{\partial w}{\partial \nu} + \beta z = 0 \ sobre \ \Gamma_1.$$

Demonstração: Desde que $u_1 \in V$ e $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V, dado $\varepsilon > 0$, existe $z \in V \cap H^2(\Omega)$ tal que $\|z - u_1\| < \varepsilon$.

Consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f + \Delta u_0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\beta(x)}{\mu(0)} z \text{ sobre } \Gamma_1, . \end{array} \right. \tag{1.33}$$

Observemos que $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$. Por outro lado, como $z \in H^2(\Omega)$, segue pelo Teorema 1.5.2 que

$$\gamma_0(z) = z \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Por fim, consideremos as aplicações contínuas

$$\begin{aligned} \phi : L^2(\Gamma_1) &\to L^2(\Gamma_1) \\ u &\mapsto \beta u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi : H^1(\Gamma_1) &\to H^1(\Gamma_1) \\ u &\mapsto \beta u \end{aligned}$$

e observemos que tais aplicações estão bem definidas, pois $\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$. Da imersão contínua $H^1(\Gamma_1) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, temos por interpolação dos espaços que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ u &\mapsto \beta u \end{aligned}$$

é contínua. Agora, observe que o problema (1.33) está nas condições da Proposição 1.7.2, dessa forma existe $w \in V \cap H^2(\Omega)$ e assim pelo Teorema do traço

$$\|w - u_0\|^2_{V\cap H^2(\Omega)} \leq |\Delta w - \Delta u_0|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} =$$

$$= \left\|\frac{-\beta(x) z}{\partial \mu(0)} + \frac{\beta(x)}{\mu(0)} u_1\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C\|z - u_1\|^2_V < C\varepsilon^2$$

Além disso, por (1.33), obtemos

$$\mu(0)\frac{\partial w}{\partial \nu} + \beta z = \text{ sobre } \Gamma_1.$$

Portanto, a proposição está provada. ■

Capítulo 2

Solução forte

Neste capítulo, vamos provar a existência e unicidade de solução forte do problema (1), onde as condições iniciais são funções suaves. Para tanto, empregaremos o *método de Faedo-Galerkin*, que consiste em aproximar a solução que desejamos encontrar por uma sequência de soluções de problemas análogos, porém em dimensão finita.

No que segue, assumimos que Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^2 com fronteira Γ. Seja $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, com $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$, $med(\Gamma_0), med(\Gamma_1) > 0$ e consideremos $Q = \Omega \times (0, T)$ um domínio cilíndrico de $\mathbb{R}^{n+1}$, com $\mathrm{T} > 0$ um número real.

2.1 Existência de solução forte

Iniciaremos esta seção com o conceito de solução forte.

Definição 2.1.1 *Dizemos que uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ é uma solução forte do problema* (1) *se*

$$u \in L^\infty_{loc}(0, \infty; V \cap H^2(\Omega)) \ \text{e} \ u' \in L^\infty_{loc}(0, \infty; V)$$

$$u'' \in L^2_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega))$$

$$u'' - \mu \triangle u + h(u) = f \ \text{em} \ L^2_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega))$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \ \text{em} \ L^\infty_{loc}(0, \infty; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$$

$$u(0) = u_0 \ \text{e} \ u'(0) = u_1 \ \text{em} \ \Omega.$$

Sejam Ω, Q, Γ como na introdução e $f : Q \to \mathbb{R}$, $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, $\beta : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\mu : (0,T) \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} &h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ uma função lipschitziana com constante } C_h \textit{ e} \\ &sh(s) \geq 0, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}; \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$(u_0, u_1) \in [V \cap H^2(\Omega)] \times V; \tag{2.2}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1) \text{ tal que } \beta(x) \geq \beta_0 > 0; \tag{2.3}$$

$$\mu \in W^{1,\infty}(0,T) \text{ tal que } \mu(t) \geq \mu_0 > 0; \tag{2.4}$$

$$\mu(0)\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \beta u_1 = 0 \quad \text{em } \Gamma_1; \tag{2.5}$$

$$f \in H^1(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.6}$$

Teorema 2.1.1 *Considere as hipóteses* (2.1)-(2.6). *Então, existe uma única função* $u : Q \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{gathered} u \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \\ u' \in L^\infty(0,T;V), \\ u'' \in L^2(Q). \\ u'' - \mu \triangle u + h(u) = f \ \textit{em} \ L^2(Q); \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \ \textit{em} \ L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)); \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \ \textit{em} \ \Omega. \end{gathered}$$

Demonstração: Para a prova, empregaremos o método de Faedo-Galerkin com a base especial em $V \cap H^2(\Omega)$. Como $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in V$ segue pela Proposição 1.7 que existem duas sequências u_{0k}, u_{1k} de vetores em $V \cap H^2(\Omega)$ tais que

$$u_{0k} \to u_0 \text{ em } V \cap H^2(\Omega). \tag{2.7}$$

$$u_{1k} \to u_1 \text{ em } V. \tag{2.8}$$

$$\mu(0)\frac{\partial u_{0k}}{\partial \nu} + \beta(x)u_{1k} = 0 \text{ em } \Gamma_1, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Fixemos k $\in \mathbb{N}$ de forma que u_{0k}, u_{1k} sejam linearmente independente e tomamos

$$w_1^k = \frac{u_{0k}}{\|u_{0k}\|_{V \cap H^2(\Omega)}} \text{ e } w_2^k = \frac{u_{1k}}{\|u_{1k}\|_{V \cap H^2(\Omega)}}$$

os dois primeiros vetores ortonormais. Assim, pelo processo de ortonormalização de Gram-Schimidt, construíremos uma base ortonormal em $V \cap H^2(\Omega)$ que representaremos por

$$\mathcal{B} = \left\{ w_1^k, w_2^k, \ldots, w_j^k, \ldots \right\}, \tag{2.10}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se para cada $k \in \mathbb{N}$, os vetores são linearmente dependentes, escolhemos

$$w_1^k = \frac{u_{0k}}{\|u_{0k}\|_{V \cap H^2(\Omega)}}$$

e w_2^k qualquer vetor fora da reta λu_{0k}. Continuando com este processo, obteremos uma sequência $(w_j^k)_{j\in\mathbb{N}} \subset V \cap H^2(\Omega)$ de vetores linearmente independente.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $V_m^k = \left[w_1^k, w_2^k, \ldots, w_m^k\right]$ o subespaço de $V \cap H^2(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores da base (2.10).

Vamos encontrar uma solução $u_{km} \in V_m^k$ do tipo

$$u_{km}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jkm}(t) w_j^k(x), \tag{2.11}$$

onde g_{jkm} são as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left| \begin{array}{l} (u''_{km}(t), v) + \mu(t)((u_{km}(t), v)) + (h(u_{km}(t)), v) + (\beta u'_{km}(t), v)_{L^2(\Gamma_1)} = (f, v), \forall v \in V_m^k \\ u_{km}(x, 0) = u_{0k} \\ u'_{km}(x, 0) = u_{1k} \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Dessa forma, estamos diante de um problema de valor inicial de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Agora, note que a existência da solução do problema aproximado (2.12) é garantida por ser um sistema de equações diferenciais ordinárias nas condições do Teorema de Caratheódory, como feito em [5].(Ver Apêndice B).

Portanto, existe uma solução aproximada para $t \in [0, t_{km})$ com $t < t_{km}$.

2.2 Estimativas a Priori

No que segue, obteremos estimativas a priori para as soluções $u_{km}(t)$ do sistema (2.12), permitindo prolongar a solução ao intervalo $[0, T]$, como consequência do teorema do prolongamento de soluções, cf [5].

Primeira Estimativa:

Tomando $v = 2u'_{km}(t) \in V_m^k$ em (2.12), tem-se

$$(u''_{km}(t), 2u'_{km}(t)) + \mu(t)((u_{km}(t), 2u'_{km}(t))) + (h(u_{km}(t)), 2u'_{km}(t)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x) u''_{km}(t) 2u'_{km}(t)) d\Gamma =$$

$$= (f(t), 2u'_{km}(t))$$

A partir de agora, analizaremos cada termo da igualdade acima separadamente.

$$(u''_{km}(t), 2u'_{km}(t)) = \frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2. \tag{2.13}$$

$$\mu(t)((u_{km}(t), 2u'_{km}(t)) = \mu(t)\frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2. \tag{2.14}$$

Observe que

$$\frac{d}{dt}\Big[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2\Big] = \mu'(t)\|u_{km}(t)\|^2 + \mu(t)\frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2$$

implicando

$$\mu(t)\frac{d}{dt}\|u_{km}(t)\|^2 = -\mu'(t)\|u_{km}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\Big[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2\Big].$$

Portanto

$$\mu(t)((u_{km}(t), 2u'_{km}(t))) = -2\mu'(t)\|u_{km}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\big[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2\big]. \tag{2.15}$$

$$(h(u_{km}(t)), 2u'_{km}(t)) = 2\int_\Omega h(u_{km}(t)) 2u'_{km}(t) dx.$$

Temos $\Lambda(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)ds$. Então $\Lambda(u_{km}(x,t)) = \displaystyle\int_0^{u_{km}(x,t)} h(s)ds$. Daí,

$$2\frac{d}{dt}\left[\Lambda(u_{km}(x,t))\right] = 2h(u_{km}(x,t))u'_{km}(x,t)$$

o que implica

$$2\int_\Omega \frac{d}{dt}\left[\Lambda(u_{km}(x,t))\right]dx = 2\int_\Omega h(u_{km}(x,t))u'_{km}(x,t)dx.$$

Pela duas última igualdadades acima, temos

$$(h(u_{km}(t), 2u'_{km}(t)) = 2\int_\Omega \frac{d}{dt}\left[\Lambda(u_{km}(x,t))\right]dx. \tag{2.16}$$

Logo, de (2.13), (2.15) e (2.16), podemos escrever

$$(u''_{km}(t), 2u'_{km}(t)) + \mu(t)((u_{km}(t), 2u'_{km}(t)) + (h(u_{km}(t)), 2u'_{km}(t)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)\big[u'_{km}(t)\big]^2 d\Gamma =$$

$$= \frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 - 2\mu'(t)\|u_{km}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\big[\mu(t)\|u_{km}(t)\|^2\big] + 2\int_\Omega \frac{d}{dt}\big[\Lambda(u_{km}(x,t))dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \beta(x)\big[u'_{km}(t)\big]^2 d\Gamma = 2(f(t), u'_{km}(t)).$$

Integrando no intervalo $[0, t_{km}]$, com $t_{km} < T$, obtemos

$$|u'_{km}(t)|^2 - |u'_{1k}|^2 - \int_0^t \mu'(s)\|u_{km}(s)\|^2 ds + \mu(t)\|u_{km}(t)\|^2 - \mu(0)\|u_{0k}\|^2 =$$

$$= 2\int_\Omega \Lambda(u_{km}(x,t))dx - 2\int_\Omega \Lambda(u_{km}(x,0))dx + 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u_{km}(x,s)]^2 d\Gamma ds = l$$

$$= 2\int_0^t (f(t), u'_{km}(s))ds.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schartz e Young, obtemos

$$|u'_{km}(t)|^2 + \mu(t)\|u_{km}(t)\|^2 + 2\textstyle\int_\Omega \Lambda(u_{km}(x,t))dx + 2\displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u'_{km}(x,s)]^2 d\Gamma ds \leq$$

$$\leq |u'_{1k}|^2 + \mu(0)\|u_{0k}\|^2 + \int_0^t |f(s)|^2 ds + \int_0^t |u_{km}(s)|^2 ds \int_0^t \mu'(s)\|u_{km}(s)\|^2 ds +$$

$$+ \int_\Omega \Lambda(u_{0k}(x))dx.$$

Usando as hipóteses que $\mu \in W^{1,\infty}(0,T)$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e as convergências dos dados iniciais, obtemos

$$|u'_{km}(t)|^2 + \mu_0\|u_{km}(t)\|^2 + 2\int_\Omega \Lambda(u_{km}(x,t))dx + 2\beta_0 \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u'_{km}(x,s)]^2 d\Gamma ds \leq$$

$$\leq |u_{1k}|^2 + \mu(0)\|u_{0k}\|^2 + \int_0^t |f(s)|^2 ds + \int_0^t |u_{km}(s)|^2 ds + \|\mu\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^t \|u_{km}(s)\|^2 ds +$$

$$+ \int_\Omega \Lambda(u_{0k}(x))dx. \tag{2.17}$$

Desejamos utilizar o Lema de Gronwall, para tanto devemos mostrar que

$$\int_\Omega \Lambda(u_{0k}(x))dx \leq C,$$

onde C é uma constante que independe de $k, m \in \mathbb{N}$.

De fato, como $sh(s) \geq 0$ e $0 \leq s \leq t$, segue que $h(s) \geq 0$. Da continuidade de h, obtemos que

$$\Lambda(t) = \int_0^t h(s) \geq 0, \forall t \in (0,T).$$

Além disso, devemos notar que $h(0) = 0$. Daí, obtemos

$$2\int_\Omega \Lambda(u_{0k}(x))dx \leq 2\left|\int_\Omega \Lambda(u_{0k}(x))dx\right| \leq 2\left|\int_\Omega \int_0^{u_{0k}(x)} h(s)ds\right| \leq \int_\Omega \int_0^{u_{0k}(x)} |h(s){-}h(0)|ds.$$

Desde que h é lipschitziana, temos

$$\int_\Omega \Lambda(u_{0k}(x))dx \leq \int_\Omega \int_0^{u_{0k}(x)} C_h|s-0|dsdx = C_h\int_\Omega |u_{0k}(x)|^2dx = C_h|u_{0k}(x)|.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \Lambda(u_{0k}(x)dx \leq C_h|u_{0k}|^2 \tag{2.18}$$

Daí, usando o fato que a imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínua, decorre de (2.7) que

$$\int_\Omega \Lambda(u_{0k}(x)dx \leq c_0$$

Logo, de (2.17)

$$|u'_{km}(t)|^2 + \|u'_{km}(t)\|^2 + 2\int_\Omega \Lambda(u_{km}(x,t))dx + \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u'_{km}(x,s)]^2 dsd\Gamma \leq$$

$$\leq P + \int_0^t |u'_{km}(s)|ds + \|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^t \|u_{km}(s)\|^2 ds$$

onde P é uma constante positiva. Então, pelo Lema de Gronwall podemos concluir que

$$|u'_{km}(t)|^2 + \|u_{km}(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u'_{km}(x,s)]^2 dsd\Gamma \leq M, \tag{2.19}$$

onde M é uma constante que independe de $k, m \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,T]$.

Dessa forma, podemos prolongar a solução aproximada $u_{km}(t)$ para todo $t \in \big[0,T\big]$, devido ao teorema do prolongamento de soluções.

Segunda Estimativa

Nosso objetivo agora será obter uma estimativa para $u''_{km}(t)$ e, para tanto, consideremos a derivada com respeito a t da equação aproximada (2.12), isto é,

$$(u'''_{km}(t),v) + \frac{d}{dt}\big[\mu(t)((u_{km}(t),v))\big] + (h'(u_{km}(t)u'_{km}(t),v)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x,t)vd\Gamma =$$

$$= (f'(t),v).$$

Considerando $v = 2u''_{km}(t) \in V^k_m$, obtemos

$$(u'''_{km}(t), 2u''_{km}(t)) + \mu'(t)((u_{km}(t), 2u''_{km}(t))) + \mu(t)((u'_{km}(t), 2u''_{km}(t)))+$$
$$+((h'(u_{km}(t))u'_{km}(t), 2u'_{km}(t))) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x,t)2u''_{km}(x,t)d\Gamma =$$
$$= (f'(t), 2u'_{km}(t)).$$

Temos

$$\mu(t)((u'_{km}(t), 2u''_{km}(t))) = \mu(t)\frac{d}{dt}\|u''_{km}(t)\|^2. \tag{2.20}$$

Observe que

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)\|u'_{km}(t)\|) = \mu'(t)\|u''_{km}(t)\|^2 + \mu(t)\frac{d}{dt}\|u'_{km}(t)\|^2$$

o que implica

$$\mu(t)\frac{d}{dt}\|u'_{km}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(\mu(t)\|u'_{km}(t)\|) - \mu'(t)\|u''_{km}(t)\|^2.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}|u'_{km}(t)|^2 + 2\mu'(t)((u_{km}(t), u''_{km}(t))) + \frac{d}{dt}(\mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2) - \mu'(t)\|u''_{km}(t)\|^2 +$$
$$((h'(u_{km}(t)), 2u'_{km}(t)) + 2\int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x,t)u''_{km}(x,t)d\Gamma = 2(f'(t), u'_{km}(t))$$

Integrando de $0 \leq t \leq T$, temos

$$|u'_{km}(t)|^2 + 2\int_0^t \mu'(s)((u_{km}(s), u''_{km}(s)))ds + \mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2 + 2\int_0^t ((h'(u_{km}(s)), u'_{km}(s)))ds+$$
$$+2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x,s)u''_{km}(x,s)d\Gamma = |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u_{1k}\|^2 + 2\int_0^t (f'(s), u'_{km}(s))ds+$$
$$+\int_0^t \mu'(t)\|u''_{km}(s)\|^2 ds$$

Como

$$-\int_0^t (h'(u_{km}(s)), 2u'_{km}(s))ds \leq \int_0^t |((h'(u_{km}(s)), 2u'_{km}(s)))|ds$$

e pela hipótese (2.4) obtemos,

$$|u'_{km}(t)|^2 + 2\int_0^t \mu'(s)((u_{km}(s), u''_{km}(s)))ds + \mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2+$$
$$+2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)u''_{km}(x,s)u''_{km}(x,s)d\Gamma \leq |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u_{1k}\|^2 + \int_0^t |(h'(u_{km}(s)), 2u'_{km}(s))|ds$$
$$+2\int_0^t (f'(s), u'_{km}(s))ds + \|\mu'\|\int_0^t \|u'_{km}(s)\|ds. \tag{2.21}$$

Desejamos novamente fazer uso do Lema de Gronwall, dessa forma, necessitamos mostrar que

$$|u''_{km}(0)|^2 \text{ é limitada em } L^2(\Omega). \tag{2.22}$$

De fato, considerando $t = 0$ em (2.12) e tomando $v = u''_{km}(0) \in V_m^k$, temos

$$(u''_{km}(0), u''_{km}(0)) + \mu(0)((u_{km}(0), u''_{km}(0))) + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'_{km}(x,0)u''_{km}(0)d\Gamma$$

$$= (f(0), u''_{km}(0))$$

o que implica

$$|u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)((u_{km}(0), u''_{km}(0))) + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'_{km}(x,0)u''_{km}(0)d\Gamma =$$

$$= (f(0), u''_{km}(0))$$

Daí,

$$|u''_{km}(0)|^2 + (\nabla\mu(0)u_{km}(0), \nabla u''_{km}(0)) + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'_{km}(x,0)u''_{km}(x,0)d\Gamma$$

$$= (f(0), u''_{km}(0)).$$

Pela fórmula de Green, obtemos

$$|u''_{km}(0)|^2 - \int_{\Omega} \Delta\left[\mu(0)u_{km}(0)u''_{km}(0)\right]dx + \int_{\Gamma_1} \mu(0)\frac{\partial u_{km}(x,0)}{\partial\nu}u''_{km}(x,0)d\Gamma + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0))$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'_{km}(x,0)u''_{km}(x,0)d\Gamma = (f(0), u''_{km}(0)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} &|u''_{km}(0)|^2 - \mu(0)\int_{\Omega} \Delta u_{km}(0)u''_{km}(0)dx + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) + \\ &+ \int_{\Gamma_1} \left[\mu(0)\frac{\partial u_{0k}}{\partial\nu} + \beta(x)u_{1k}\right]u''_{km}(x,0)d\Gamma = (f'(0), u''_{km}(0)). \end{aligned}$$

Segue por (2.9) que

$$|u''_{km}(0)|^2 - \mu(0)\int_{\Omega} \Delta u_{km}(0)u''_{km}(0)dx + (h(u_{km}(0)), u''_{km}(0)) = (f(0), u''_{km}(0)).$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz, tem-se

$$|u''_{km}(0)|^2 \leq \mu(0)|\Delta u_{0k}||u''_{km}(0)| + |h(u_{0k})||u''_{km}(0)| + f(0)|u''_{km}(0)|.$$

Daí, obtemos

$$|u''_{km}(0)| \leq \mu(0)|\Delta u_{0k}| + |h(u_{0k})| + |f(0)|.$$

Usando a norma induzida de $H^2(\Omega)$ em $V \cap H^2(\Omega)$, por (2.7) segue que

$$\Delta u_{0k} \to \Delta u_0 \text{ em } L^2(\Omega)$$

e daí

$$|\Delta u_{0k}| \text{ é limitada em } L^2(\Omega).$$

Por outro lado, de (2.2) e (2.7), temos

$$|h(u_{0k})| \leq \int_\Omega C_h^2 |u_{0k}|^2 \leq C_h^2 |u_{0k}|^2.$$

Portanto

$$|u''_{km}(0)|^2 \leq L, \tag{2.23}$$

onde L é uma constante positiva independente de $t, k \in \mathbb{N}$.

Observação 2.2.1 *Note que faz sentido calcular $f(0)$, pois $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, isto é, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $f' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Logo, pelo teorema 1.2.1 faz sentido calcular $f(0)$.*

Observação 2.2.2 *A limitação de $(u''_{km}(0))$ em $L^2(\Omega)$ é um dos pontos chave da prova.*

No que segue, vamos analisar o termo $2\displaystyle\int_0^t \mu'(s)((u_{km}(t), u''_{km}(t)))$. Com efeito, multiplicando ambos os lados do problema aproximado (2.12) por $\dfrac{\mu'(t)}{\mu(t)}$ e tomando $v = 2u''_{km}(t)$, obtemos

$$\mu'(t)((u_{km}(t), u''_{km}(t))) = \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(f(t), u''_{km}(t)) - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}|u_{km}(t)|^2 -$$

$$-\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(h(u_{km}(t), u''_{km}(t)) - \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_{km}(t) u''_{km}(t) d\Gamma_1. \tag{2.24}$$

Logo, substituindo (2.24) em (2.21), obtemos

$$|u''_{km}(t)|^2 + \mu(t)\|u'_{km}(t)\| + 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u''_{km}(x,s)]^2 d\Gamma + 2\int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)}(f(s), u''_{km}(s))ds -$$

$$-2\int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)}|u''_{km}(s)|^2 ds - 2\int_0^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(h(u_{km}(s), u''_{km}(s)) - 2\int_0^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\int_{\Gamma_1} \beta(x) u'_{km}(s) u''_{km}(s) ds$$

$$\leq |u''_{km}(0)|^2 + \mu(0)\|u_{1k}\| + 2\int_0^t (h'(u_{km}(s).u'_{km}(s), u''_{km}(s))ds + 2\int_0^t (f'(s), u''_{km}(s))ds +$$

$$\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds,$$

o que implica

$$|u''_{km}(t)|^2+\mu(t)\|u'_{km}(t)\|^2+2\int_0^t\int_{\Gamma_1}\beta(x)[u''_{km}(x,s)]^2d\Gamma\leq|u''_{km}(0)|^2\ +\ \mu(0)\|u_{1k}\|^2+$$
$$+2\int_0^t(h'(u_{km}(s).u'_{km}(s),u''_{km}(s))ds+2\int_0^t(f'(s),u''_{km}(s))ds\ +\ \|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^t\|u'_{km}(s)\|^2ds$$
$$+2\int_0^t\left|\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}\right||(f(s),u''_{km}(s))|ds\ +\ 2\int_0^t\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}|u''_{km}(s)|^2ds\ +\ 2\int_0^t\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(h(u_{km}(s),u''_{km}(s))+$$
$$2\int_0^t\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\int_{\Gamma_1}\beta(x)u'_{km}(s)u''_{km}(s)dsd\Gamma. \tag{2.25}$$

Vamos analisar o termo $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\int_{\Gamma_1}\beta(x)u'_{km}(s)u''_{km}(s)ds$ da desigualdade acima. Note que pela desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\int_{\Gamma_1}\beta(x)u'_{km}(s)u''_{km}(s)ds\leq 2\left|\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\int_{\Gamma_1}\beta(x)u'_{km}(s)u''_{km}(s)ds\right|d\Gamma$$
$$\leq 2\left[\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\sqrt{\beta(x)}u'_{km}(s)d\Gamma\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\left[\int_{\Gamma_1}[\sqrt{\beta(x)}u''_{km}(t)]^2d\Gamma\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.26}$$
$$\int_{\Gamma_1}\beta(x)\left[\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}u'_{km}(t)\right]^2d\Gamma+\int_{\Gamma_1}\beta(x)[u''_{km}(t)]^2d\Gamma$$

Substituindo (2.26) em (2.25), resulta que

$$|u''_{km}(t)|^2+\mu(t)\|u_{km}(t)\|+2\int_0^t\int_{\Gamma_1}\beta(x)[u''_{km}(x,s)]^2d\Gamma\leq|\ u''_{km}(0)\ |^2\ +\mu(0)\|u_{1k}\|+$$
$$+2\int_0^t(h'(u_{km}(s).u'_{km}(s),u''_{km}(s))ds+2\int_0^t(f'(s),u''_{km}(s))ds+\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^t\|u'_{km}(s)\|^2ds$$
$$+2\int_0^t\left|\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}\right||(f(s),u''_{km}(s))|ds+2\int_0^t\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}|u''_{km}(s)|^2ds+2\int_0^t\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(h(u_{km}(s),u''_{km}(s))ds+$$
$$+\int_0^t\int_\Gamma\beta(x)\left[\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}u''_{km}(s)\right]^2d\Gamma ds+\int_0^t\int_\Gamma\beta(x)[u''_{km}(s)]^2d\Gamma ds.$$

Assim,

$$|u''_{km}(t)|^2+\mu(t)\|u_{km}(t)\|+2\int_0^t\int_{\Gamma_1}\beta(x)[u''_{km}(x,s)]^2d\Gamma ds-\int_0^t\int_{\Gamma_1}\beta(x)[u''_{km}(x,s)]^2d\Gamma ds\leq$$
$$\leq|u''_{km}(0)|^2+\mu(0)\|u_{1k}\|+2\int_0^t(h'(u_{km}(s).u'_{km}(s),u''_{km}(s))ds+2\int_0^t(f'(s),u''_{km}(s))ds$$
$$+\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^t\|u'_{km}(s)\|^2ds+2\int_0^t\left|\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}\right||(f(s),u''_{km}(s))|ds+2\int_0^t\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}|u''_{km}(s)|^2ds+$$
$$+2\int_0^t\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(h(u_{km}(s),u''_{km}(s))+\int_0^t\int_\Gamma\beta(x)\left[\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}u''_{km}(s)\right]^2d\Gamma ds.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&|u''_{km}(t)|^2+\mu(t)\|u_{km}(t)\|+\int_0^t\int_{\Gamma_1}\beta(x)[u''_{km}(x,s)]^2d\Gamma ds\le |u''_{km}(0)|^2+\mu(0)\|u_{1k}\|+\\
&+2\int_0^t(h'(u_{km}(s).u'_{km}(s),u''_{km}(s))ds+2\int_0^t(f'(s),u''_{km}(s))ds\\
&+\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^t\|u'_{km}(s)\|^2ds+2\int_0^t\left|\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}\right||(f(s),u''_{km}(s))|ds+2\int_0^t\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}|u''_{km}(s)|^2ds+\\
&2\int_0^t\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(h(u_{km}(s),u''_{km}(s))ds+\int_0^t\int_\Gamma\beta(x)\left[\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}u''_{km}(s)\right]^2d\Gamma ds
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

No que segue, faremos a análise dos termos da direita de (2.27).

- $2\displaystyle\int_0^t(h'(u_{km}(s).u'_{km}(s),u''_{km}(s))ds$

Sendo h Lipschitiziana, temos $|h'(s)|\le C_h$ quase sempre. Temos também pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young e pela imersão contínua $V\hookrightarrow L^2(\Omega)$ com constante de imersão c_0, obtemos

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^t(h'(u_{km}(s).u'_{km}(s),u''_{km}(s))ds\le 2\int_0^t|h'(u_{km}(s)u'_{km}(s))||u''_{km}(s)|ds\\
&\le 2\int_0^tC_h|u'_{km}(s)||u''_{km}(s)|ds\le C_h^2\int_0^t|u'_{km}(s)|^2ds+\int_0^t|u''_{km}(s)|^2ds\le\\
&\le C_hc_0\|u'_{km}(s)\|^2ds+\int_0^t|u''_{km}(s)|^2ds.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

- $2\displaystyle\int_0^t(f'(s),u''_{km}(s))ds.$

Observe que pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^t(f'(s),u''_{km}(s))ds\le 2\int_0^t|(f'(s),u''_{km}(s))|ds\le 2\int_0^t|f'(s)||u''_{km}(s)|ds\\
&\le\int_0^t|f'(s)|^2ds+\int_0^t|u''_{km}(s)|^2ds.
\end{aligned}
$$

- $2\displaystyle\int_0^t\left|\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}(f(s),u''_{km}(s))\right|ds.$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young e por (2.4), obtemos

$$
2\int_0^t\left|\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}|(f(s),u''_{km}(s))|\right|ds\le\frac{\|\mu\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}\int_0^t|f(s)|^2ds+\frac{\|\mu\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}\int_0^t|u''_{km}(s)|^2ds
$$

- $2\displaystyle\int_0^t\frac{\mu'(s)}{\mu(s)}|u''_{km}(s)|^2ds$

Novamente pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young, e pela imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$2\int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)}|u''_{km}(s)|^2 ds \leq 2\frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}c_0\int_0^t \|u''_{km}(s)\|^2 ds,$$

- $2\displaystyle\int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(t)}(h(u_{km}(s)), u''_{km}(s))ds.$

Observe que pela primeira estimativa, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young, por h ser Lipschitiziana, e pela imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$2\int_0^t \frac{\mu'(s)}{\mu(t)}(h(u_{km}(s)), u''_{km}(s))ds \leq 2\int_0^t \left|\frac{\mu'(s)}{\mu(t)}\right|(h(u_{km}(s)), u''_{km}(s))ds \leq$$
$$\leq 2\int_0^t \left|\frac{\mu'(s)}{\mu(t)}\right||h(u_{km}(s))||u''_{km}(s)|ds \leq 2\frac{\|\mu'\|}{\mu_0}\int_0^t C_h|u_{km}(s)||u''_{km}(s)|ds \leq \frac{\|\mu'\|}{\mu_0}C_h c_0 M+$$
$$+\frac{\|\mu'\|}{\mu_0}C_h c_0\int_0^t |u_{km}(s)|^2 ds$$

- $\displaystyle\int_0^t\int_{\Gamma_1}\beta(x)\left[\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}u'_{km}(t)\right]^2 d\Gamma ds$

Novamente pela primeira estimativa, segue que

$$\int_0^t\int_{\Gamma_1}\beta(x)\left[\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}u'_{km}(t)\right]^2 d\Gamma ds \leq \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\|\mu'\|^2}{\mu_0^2}\int_{\Gamma_1}[u'_{km}(t)]^2 d\Gamma \leq \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\|\mu'\|^2}{\mu_0^2}M.$$

Pela análise dos termos acima, da imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e por (2.9), podemos escrever (2.27) da seguinte forma:

$$|u''_{km}(t)|^2 + \mu_0\|u'_{km}(t)\|^2 + \int_0^t\int_{\Gamma_1}\beta(x)[u''_{km}(x,s)]^2 d\Gamma ds \leq |u''_{km}(t)|^2 + \mu(t)\|u_{km}(t)\|^2 +$$
$$\int_0^t\int_{\Gamma_1}\beta(x)[u''_{km}(x,s)]^2 d\Gamma ds \leq C_h c_0\int_0^t \|u'_{km}(s)\|^2 ds + \int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds + \int_0^t |f(s)|^2 ds +$$
$$+\int_0^t |f'(s)|^2 ds \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}\int_0^t |u''_{km}(s)|^2 ds + 2\frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}c_0\int_0^t \|u''_{km}(s)\|^2 ds +$$
$$+\frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}C_h c_0 M + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}C_h c_0\int_0^t \|u''_{km}(s)\|^2 ds + \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\|\mu'\|^2}{\mu_0^2}M.$$

Desde que $f \in H^1(0,T,L^2(\Omega))$, temos

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds \leq P_1 \quad \text{e} \quad \int_0^t |f'(s)|^2 ds \leq P_2.$$

Logo, denotando por S a constante que limita o termo $\mu(0)\|u_{1k}\|^2$, temos

$$|u''_{km}(t)|^2+\mu_0\|u'_{km}(t)\|^2+\beta_0\int_0^t\int_{\Gamma_1}[u''_{km}(x,s)]^2d\Gamma ds\leq[C_h^2c_0]+\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}]\int_0^t\|u'_{km}(s)\|^2ds$$
$$+\left[2+\frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}+2\frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}c_0+\frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}C_hc_0\right]\int_0^t|u''_{km}(s)|^2ds+$$
$$+\frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\|\mu'\|^2_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0^2}M+P_1+P_2+\frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}C_hc_0+L+S \tag{2.29}$$

Daí, denotando por $D_1=\dfrac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\|\mu'\|^2_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0^2}M+P_1+P_2+\dfrac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}C_hc_0+L+S$,
$D_2=[C_h^2c_0]+\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}$ e $D_3=[2+\dfrac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}+2\dfrac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}c_0+\dfrac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0}C_hc_0]$,
resulta de (2.29) que

$$|u''_{km}(t)|^2+\mu_0\|u'_{km}(t)\|^2+\beta_0\int_0^t\int_{\Gamma_1}[u''_{km}(x,s)]^2d\Gamma ds\leq D_1+D_2\int_0^t\|u'_{km}(s)\|^2ds+$$
$$+D_3\int_0^t|u''_{km}(s)|^2ds.$$

Portanto, pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$|u''_{km}(t)|^2+\|u'_{km}(t)\|^2+\int_0^t\int_{\Gamma_1}[u''_{km}(x,s)]^2d\Gamma ds\leq N,\forall t\in[0,T] \tag{2.30}$$

onde N é uma constante que independe de k,m. Logo, da última desigualdade acima e por (2.19), obtemos

$$\left|\begin{array}{l}(u_{km})\text{ é limitada em }L^\infty(0,T;V)\\(u'_{km})\text{ é limitada em }L^\infty(0,T;V)\\(u''_{km})\text{ é limitada em }L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))\\(u''_{km})\text{ é limitada em }L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).\end{array}\right. \tag{2.31}$$

Além disso, $h(u_{km})$ é limitada em $L^2(Q)$. De fato, por h ser Lipschitziana com constante C_h e pela primeira estimativa, obtemos

$$\|h(u_{km})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}=\int_0^t\int_\Omega|h(u_{km}(x,t)|^2dxdt\leq C_h^2\int_0^t\int_\Omega|u_{km}(x,t)|^2dsdx\leq\|u_{km}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

Da imersão $L^2(0,T;V)\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$, segue que $h(u_{km})$ é limitada em $L^2(Q)$.

2.3 Passagem ao limite quando $m\to\infty$

No que segue, com as limitações em (2.31), obtemos as seguintes convergências quando $m\to\infty$.

$$u_{km}\overset{*}{\rightharpoonup}u_k\text{ em }L^\infty(0,T;V); \tag{2.32}$$

$$u'_{km} \overset{*}{\rightharpoonup} r \text{ em } L^\infty(0,T;V); \tag{2.33}$$

$$u''_{km} \rightharpoonup s \text{ em } L^2(Q). \tag{2.34}$$

Pelo teorema do traço de ordem zero e da imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$\|\gamma_0 u'_{km}(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C\|u'_{km}(t)\|$$

Desta última desigualdade e (2.32), segue que (u'_{km}) é limitada em $L^\infty(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ e, portanto,

$$u'_{km} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_k \text{ em } L^\infty(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \tag{2.35}$$

Mostraremos que $s = u'_k$ e seguindo o mesmo raciocínio podemos mostrar que $r = u''_k$. Com efeito, a convergência em (2.32) é equivalente a

$$\langle u_{km}, \psi\rangle_{L^\infty(0,T;V)\times L^1(0,T,V')} \to \langle u_k, \psi\rangle_{L^\infty(0,T;V)\times L^1(0,T;V')}, \quad \forall \psi \in L^1(0,T;V').$$

Note que pelo Teorema 1.2.2, obtemos

$$\langle u_{km}, \psi\rangle_{L^\infty(0,T,V)\times L^1(0,T;V')} = \int_0^T \langle u_{km}(t), \psi(t)\rangle_{V\times V'} dt.$$

Daí

$$\int_0^T \langle u_{km}(t), \psi(t)\rangle_{V\times V'} dt \to \int_0^T \langle u_k(t), \psi(t)\rangle_{V\times V'} dt, \forall \psi \in L^1(0,T;V')$$

Em particular

$$\int_0^T \langle u_{km}(t), \psi(t)\rangle_{V\times V'} dt \to \int_0^T \langle u_k(t), \psi(t)\rangle_{V\times V'} dt, \quad \forall \psi \in L^2(0,T,L^2(\Omega)).$$

Temos como consequência do Teorema da Representação de Riesz

$$\langle u_{km}(t), \psi(t)\rangle_{V\times V'} = (u_{km}(t), \psi(t))_{L^2(\Omega)},$$

logo

$$u_{km} \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q) \tag{2.36}$$

Daí, por definição de convergência fraca, para todo $g \in \left[L^2(Q)\right]'$, tem -se

$$(g, u_{km})_{L^2(Q)} \to (g, u_k)_{L^2(Q)}.$$

Pelo teorema da Representação de Riesz

$$\int_\Omega \int_0^T u_{km}(x,t)\psi(x,t)dxdt \to \int_\Omega \int_0^T u_k(x,t)\psi(x,t)dxdt$$

isto é
$$\int_0^T (u_{km}(t), \psi(t))dt \to \int_0^T (u_k(t), \psi(t))dt,$$
Seja $\theta \in D(0,T)$ e $\rho \in L^2(\Omega)$ e considere $\kappa = \theta\rho \in L^2(\Omega)$. Daí
$$\int_0^T (u_{km}(t), \rho(t))\theta(t)dt \to \int_0^T (u_k, \rho(t))\theta(t)dt,$$

implicando que

$$(u_{km}(t), \rho) \to (u_k, \rho), \text{ em } D'(0,T), \quad \forall \rho \in L^2(\Omega) \tag{2.37}$$

Da convergência (2.33), segue de forma análogo ao que foi feito anteriormente que

$$u'_{km} \rightharpoonup r \text{ em } L^2(Q),$$

e portanto podemos concluir que

$$(u'_{km}(t), \rho) \to (r(t), \rho) \text{ em } D'(0,T), \quad \forall \rho \in L^2(\Omega) \tag{2.38}$$

Usando a derivada distribuicional em (2.37) resulta

$$\frac{d}{dt}(u_{km}(t), \rho) \to \frac{d}{dt}(u_k(t), \rho)$$

implicando
$$(u'_{km}(t), \rho) \to \frac{d}{dt}(u_k(t), \rho) \tag{2.39}$$
da unicidade do limite
$$\frac{d}{dt}(u_k(t), \psi) = (r(t), \psi)$$
Pela Proposição 1.2.3, obtemos
$$u'_k(t) = r(t)$$

Temos por (2.32) e da imersão contínua $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;V)$ que

$$u_{km} \rightharpoonup u_k \text{ em } L^2(0,T,V).$$

Como $L^2(0,T;V)$ é reflexivo, temos $u_{km} \rightharpoonup u_k$ em $L^2(0,T;V)$ e consequentemente, $(u_{km})_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T,H^1(\Omega))$, pois $V \overset{cont}{\hookrightarrow} H^1(\Omega)$.

De modo análogo, podemos concluir que

$$(u'_{km})_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Sendo a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compacta, segue do Teorema de Aubin-Lions cf em [11] ou [22] que existe uma subsequência de (u_{km}), que continuaremos denotando por (u_{km}), tal que

$$u_{km} \to u_k \text{ em } L^2(Q),$$

de onde segue cf em Brezis [3] que existe uma subsequência de (u_{km}), ainda denotada por (u_{km}), tal que

$$u_{km} \to u_k \text{ quase sempre em } \; Q.$$

Da continuidade de h, obtemos

$$h(u_{km}) \to h(u_k) \text{ quase sempre em } Q. \tag{2.40}$$

Agora usando $h(u_{km})$ ser limitada em $L^2(Q)$, por (2.40) e do Lema de Lions cf em [11], obtemos

$$h(u_{km}) \rightharpoonup h(u_k) \text{ em } L^2(Q). \tag{2.41}$$

Multiplicando ambos os lados de (2.12) por $\theta \in D(0,T)$, integrando de 0 a T e usando as convergências (2.32), (2.34), (2.35), (2.41), obtemos por pasagem ao limite quando $m \to \infty$

$$\int_0^T (u_k''(t), v)\theta dt + \int_0^T \mu(t)((u_k(t), v))\theta dt + \int_0^T (h(u_k(t), v)\theta dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x) u_k'(x,t) v\theta d\Gamma_1 dt$$
$$= \int_0^T (f(t), v)\theta dt, \quad \forall v \in V_m^k, \quad \forall \theta \in D(0,T). \tag{2.42}$$

Desde que V_m^k é denso em $V \cap H^2(\Omega)$, segue que (2.42) esta assegurado para todo v $\in V \cap H^2(\Omega)$.

2.4 Passagem ao limite quando $k \to \infty$

Afirmamos que a primeira e segunda estimativas também são garantidas para a subsequência (u_k). De fato, de (2.32), segue da Proposição $(B.2.3)$ que

$$\|u_k\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \liminf \|u_{km}\| \leq C, \quad \forall k, m \in \mathbb{N},$$

onde C é uma constante que independe de k e m. Assim, passando o limite quando $k \to \infty$ em (u_k) obtemos uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;V) \tag{2.43}$$

De modo análogo, obtemos

$$u'_k \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T;V) \tag{2.44}$$

$$u'_k \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \tag{2.45}$$

Temos também, como feito anteriormente que

$$u''_k \rightharpoonup u'' \text{ em } L^2(Q) \tag{2.46}$$

$$h(u_k) \rightharpoonup h(u) \text{ em } L^2(Q) \tag{2.47}$$

Passando ao limite em (2.42)quando $k \to \infty$e usando as convergências (2.43)-(2.47) e o fato de que $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u''(t),v)\theta dt + \int_0^T \mu(t)((u(t),v))\theta dt + \int_0^T (h(u(t),v)\theta dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'(x,t)v\theta d\Gamma_1 dt\\ &= \int_0^T (f(t),v)\theta dt, \quad \forall v \in V, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).\end{aligned} \tag{2.48}$$

Tomemos $\theta v \in \mathcal{A}$ (isto é, $\theta \in D(0,T)$ e $v \in \mathcal{D}(\Omega))$). Assim, para $\theta v \in \mathcal{A}$, obtemos

$$\int_0^T (u''(t),v)\theta dt = \langle u'', \theta v\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$$

$$\int_0^T \mu(t)((u(t),v))_V\theta dt = \big\langle \mu(t)((\mu(t)u(t),v))_V\big\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$$

$$\int_0^T (h(u(t),v)\theta dt = \int_0^T (h(u(t),\theta v)dt = \langle h, \theta v\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$$

Como v $\in \mathcal{D}(\Omega)$ segue $v=0$ sobre Γ_1, e portanto,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x)u'(x,t)v\theta d\Gamma_1 dt = 0.$$

Temos também

$$\int_0^T (f(t),v)\theta dt = \int_0^T (f(t),\theta v)dt = \langle f, \theta v\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$$

Destes fatos acima, podemos escrever

$$\langle u'', \theta v\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \langle \mu\triangle u, \theta v\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \langle h, \theta v\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = \langle f, \theta v\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$$

o que implica

$$\langle u'' - \mu\triangle u + h(u), \theta v\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0, \quad \forall \theta v \in \mathcal{A}. \tag{2.49}$$

Logo, pela densidade de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{D}(Q)$, resulta de (2.49) que:

$$u'' - \mu\triangle u + h(u) = f \text{ em } \mathcal{D}'(Q)$$

Portanto, obtemos $\mu\triangle u \in L^2(Q)$, pois $u'', h(u), f \in L^2(Q)$ e assim,

$$u'' - \mu\triangle u + h(u) = f \text{ em } L^2(Q) = L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.50}$$

Como $u \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ e $\Delta(\mu u) \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, resulta como feito em Milla Miranda [18] que

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Multiplicando ambos os lados de (2.50) por $v\theta$,com $v \in V$ e $\theta \in D(0,T)$, integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (u''(t),v)\theta dt + \int_0^T \mu(t)(-\triangle u,v)\theta dt + \int_0^T (h(u),v)\theta dt = \int_0^T (f(t),v)\theta dt.$$

Pela formula de Green, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u''(t),v)\theta dt + \int_0^T \mu((u(t).v(t)))\theta dt - \int_0^T \left\langle \mu\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right\rangle_{-H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \theta dt + \\ &\int_0^T (h(u),v)\theta dt = \int_0^T (f(t),v)\theta dt\end{aligned} \tag{2.51}$$

Comparando (2.48) com (2.51), obtemos

$$\int_0^T \left\langle \beta u' + \mu\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \theta dt = 0 \quad \forall v \in V \text{ e}, \quad \forall \theta \in D(0,T).$$

Portanto,

$$\mu(t)\frac{\partial u(t)}{\partial \nu} + \beta u'(t) = 0 \text{ em } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Como $\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$ e $u' \in L^\infty(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$, temos $\beta u' \in L^\infty(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$. Portanto,

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$$

Para completar a prova do teorema, devemos provar que $u \in L^2(0,T,H^2(\Omega))$. Consideremos o seguinte problema de fronteira

$$\left|\begin{array}{l} -\triangle(\mu u(t)) = f(t) - u''(t) - h(u(t)) \text{ em } Q, \\ \mu(t)u(t) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times [0,T], \\ \dfrac{\partial(\mu(t)u(t))}{\partial \nu} = -\beta u'(t) \text{ em } \Gamma_1 \times [0,T]. \end{array}\right. \tag{2.52}$$

Sendo $f(t) - u''(t) - h(u(t)) \in L^2(\Omega)$, segue pelo Teorema ($B.2.6$)) que $\mu(t)u(t) \in H^2(\Omega)$. Observe que $\mu u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ e por (2.4) segue que $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$. Portanto, $u \in L^\infty(0,T;V \cap H^2(\Omega))$.

2.5 Condições iniciais

Nesta seção, mostraremos que $u(0) = u_0$ e que $u'(0) = u_1$. Observe que

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,T;V \cap H^2(\Omega)) \\ u' \in L^\infty(0,T;V) \end{array} \right.$$

e $V \cap H^2(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} V$, e então pelo Teorema 1.2.1, resulta que $u \in C^0([0,T];V)$. Logo, faz sentido calcula $u(0)$. De modo análogo, temos

$$\left| \begin{array}{l} u' \in L^\infty(0,T,V) \hookrightarrow L^2(0,T;V) \\ u'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \right.$$

e $V \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$. Dessa forma, seguindo o mesmo raciocínio, podemos concluir que $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Portanto, faz sentido calcular $u'(0)$.

Da convergência $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;V)$, concluí-se que para toda $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$, obtemos que

$$\int_0^T \langle u_k(t), v\rangle_{V \times V'} \theta'(t)dt \to \int_0^T \langle u(t), v\rangle_{V' \times V} \theta'(t)dt, \forall v \in V. \tag{2.53}$$

Analogamente, da convergência $u'_k \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T,V)$, para toda $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$, obtemos

$$\int_0^T \langle u'_k(t), v\rangle_{V \times V'} \theta(t)dt \to \int_0^T \langle u(t), v\rangle_{V \times V'} \theta(t)dt, \forall v \in V \tag{2.54}$$

Assim, de (2.53) e (2.54), resulta que:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[\langle u_k(t), v\rangle \theta(t)]dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}[\langle u_k(t), v\rangle \theta(t)]dt$$

implicando que

$$\langle u_k(T), v\rangle \theta(T) - \langle u_k(0), v\rangle \theta(0) \to \langle u(T), v\rangle \theta(T) - \langle u(0), v\rangle \theta(0).$$

Daí,

$$\langle u_k(0), v\rangle \to \langle u(0), v\rangle, \ \forall v \in V.$$

Da imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue que

$$(u_k(0), v) \to (u(0), v), \quad \forall v \in L^2(\Omega). \tag{2.55}$$

Pela convergência do dado inicial, temos que (u_{0k}) converge forte para u_0 em $V \cap H^2(\Omega)$, e portanto converge forte em $L^2(\Omega)$ pois $V \cap H^2(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$, logo converge fraco em $L^2(\Omega)$. Assim,

$$(u_k(0), v) \to (u_0, v), \forall v \in L^2(\Omega). \tag{2.56}$$

Portanto, de (2.55) e (2.56) e pela unicidade de limite fraco, obtemos $u(0) = u_0$. Com o mesmo reciocínio obtém-se que $u'(0) = u_1$, mostrando as condições iniciais. ■

2.6 Unicidade

Nesta seção, mostraremos que a solução do problema (1) com h sendo uma função Lipschitiziana é única e, para tanto, usaremos o Lema de Gronwall. Suponha que existam duas soluções u, v nas condições do Teorema 1.2.1. Daí

$$u'' - \mu\Delta u + h(u) = f \text{ em } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \tag{2.57}$$

e

$$v'' - \mu\Delta v + h(v) = f \text{ em } L^2(0, T, L^2(\Omega)). \tag{2.58}$$

Definindo $w = u - v$ e fazendo a diferença entre (2.57) e (2.58), obtemos

$$w'' - \mu\Delta w + h(u) - h(v) = 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Como $w' \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, temos

$$(w'', w') - (\Delta(\mu w), w') = (h(u) - h(v), w').$$

Pelo teorema de Green, resulta que

$$(w''(t), w'(t)) + \mu(t)((w(t), w'(t))) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w(t)}{\partial \nu} w'(t) d\Gamma = (h(v) - h(u), w'(t)).$$

Desde que $\mu(t)\dfrac{\partial w(t)}{\partial \nu} = \beta w'(t)$, temos que

$$(w''(t), w'(t)) + \mu(t)((w(t), w'(t))) + \int_{\Gamma_1} \beta (w'(t))^2 d\Gamma = (h(v) - h(u), w'(t)). \tag{2.59}$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwartz e pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}&(w''(t),w'(t))+\mu(t)((w(t),w'(t)))+\int_{\Gamma_1}\beta(w'(t))d\Gamma=(h(v)-h(u),w'(t))\leq\\&|h(v)-h(u)||w'(t)|\leq\frac{1}{2}|h(v)-h(u)|^2+\frac{1}{2}|w'(t)|^2.\end{aligned}\tag{2.60}$$

Observemos que

$$|h(v)-h(u)|^2=\int_\Omega|h(v(x,t)-h(u(x,t))|^2dxdt=C_h\int_\Omega|v(x,t)-u(x,t)|^2dxdt=C_h^2|w(t)|^2.\tag{2.61}$$

Substituindo (2.60) e (2.61) em (2.59), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2+\frac{1}{2}\mu(t)\frac{d}{dt}\|w(t)\|+\int_{\Gamma_1}\beta(w'(t))^2d\Gamma\leq\frac{C_h}{2}|w(t)|^2+\frac{1}{2}|w'(t)|^2.\tag{2.62}$$

Desde que $V\overset{cont}{\hookrightarrow}L^2(\Omega)$, obtemos de (2.62) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2+\frac{1}{2}\mu(t)\frac{d}{dt}\|w(t)\|+\int_{\Gamma_1}\beta(w'(t))^2d\Gamma\leq\frac{C_hc_0}{2}\|w(t)\|^2+\frac{1}{2}|w'(t)|^2.$$

Notemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|w(t)\|^2\right]=\frac{1}{2}\mu'(t)\|w(t)\|^2+\frac{1}{2}\mu(t)\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\mu(t)\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|w(t)\|^2\right]-\frac{1}{2}\mu'(t)\|w(t)\|^2\tag{2.63}$$

Substituindo (2.63) em (2.62), resulta que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|w(t)\|^2\right]-\frac{1}{2}\mu'(t)\|w(t)\|^2+\int_{\Gamma_1}\beta(w'(t))^2\leq\\&\leq\frac{C_h^2c_0}{2}\|w(t)\|^2+|w'(t)|^2.\end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|w(t)\|^2\right]+\int_{\Gamma_1}\beta(w'(t))^2\leq\\&\leq\frac{C_h^2c_0}{2}\|w(t)\|^2+\frac{1}{2}|w'(t)|^2+\frac{1}{2}\mu'(t)\|w(t)\|^2.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_{\Gamma_1}\beta(w'(t))^2\geq 0$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\|w(t)\|^2\right]\leq\frac{C_h^2c_0}{2}\|w(t)\|^2+\frac{1}{2}|w'(t)|^2+\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}\frac{1}{2}\|w(t)\|^2.$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|^2 + \mu(t)\|w(t)\|^2\right] \leq \frac{C_h^2 c_0 + \|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}\mu(t)}{2\mu_0}\|w(t)\|^2 + \frac{1}{2}|w'(t)|^2. \qquad (2.64)$$

Integrando (2.64) de $0 \leq t \leq T$, e denotaremos a constante acima por $M_1 = \dfrac{C_h^2 c_0 + \|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{2}$. Assim, obtemos

$$|w'(t)|^2 + \mu(t)\|w(t)\|^2 \leq \{|w'(0)|^2 + \|w(0)\|^2\} + M_1 \int_0^t \mu(t)\|w(t)\|^2 dt + \int_0^t |w'(t)|^2 dt.$$

Como $w'(0) = 0$ e $w(0) = 0$, temos

$$|w'(t)|^2 + \mu(t)\|w(t)\|^2 \leq 0 + M_1 \int_0^t \mu(t)\|w(t)\|^2 dt$$

Pelo Lema de Gronwall, segue que

$$|w'(t)|^2 + \mu(t)\|w(t)\|^2 = 0$$

e assim $w = 0$, pois $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$. Portanto, $u = v$.

Capítulo 3

Solução fraca

Nosso objetivo neste Capítulo é obter solução para o problema (1) com dados inicias menos regulares, isto é, $u_0 \in V$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$. A correspondente solução será chamada de *solução fraca*. Para obtermos esta solução, aproximaremos u_0 e u_1 por sequências de vetores em $V \cap H^2(\Omega)$ e em V respectivamente e aplicaremos o resultado de Teorema 1 (solução forte).

3.1 Existência de Solução Fraca

A solução fraca do problema (1) é entendida no seguinte sentido.

Definição 3.1.1 *Uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca do problema (1) se:*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^{infty}_{loc}(0,\infty,V), \quad u' \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)), \\ u'' - \mu\Delta u + h(u) = f \ \ em \ L^1_{loc}(0,\infty;V' + L^1(\Omega)), \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \ \ em \ L^1_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)), \\ u(0) = u_1, \ u'(0) = u_1 \ \ em \ \Omega. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

O seguinte resultado estabelece a existência de solução fraca para o problema (1) no sentido acima.

Seja Ω um aberto limitado de classe C^2 com fronteira Γ. Assumamos as seguintes hipóteses:

$(H1)$ $\quad \beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1), \ \beta(x) \geq \beta_0 > 0;$

$(H2)$ $\quad \mu \in W^{1,\infty}(0,T), \ \mu(t) \geq \mu_0 > 0;$

$(H3)$ $\quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $sh(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$;

$(H4)$ $\quad (u_0, u_1, f) \in V \times L^2(\Omega) \times L^2(Q)$ e $\Lambda(u_0) \in L^1(\Omega)$.

Observação 3.1.1 *A função*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & f(s) = |s|^\rho s \end{array}$$

com $\rho > 0$ e $\rho \in \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Strauss.

Teorema 3.1.1 *Supondo $(H_1) - (H_4)$. Então, existe uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que*

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.2}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.3}$$

$$u'' - \mu \triangle u + h(u) = f \ \text{em} \ L^1(0, T; V' + L^1(\Omega)) \tag{3.4}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \ \text{em} \ L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \ \text{em} \ \Omega \tag{3.6}$$

Demonstração: Desde que h é uma função contínua com $sh(s) \geq 0$, para todo s $\in \mathbb{R}$, segue do Teorema de Strauss cf em [24](ver apêndice A) que existe uma sequência de funções Lipchitzianas $(h_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada ν fixado, $h_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana com constante C_ν. Além disso, $sh_\nu(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e

$$h_\nu \to h \text{ uniformemente em conjuntos limitados de } \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Sendo a condição inicial u_0 não necessariamente limitada , devemos aproxima-la por funções limitadas de V. Para tanto, como feito em Kinderlehrer [8] consideremos as funções

$$\xi_j(s) = \left| \begin{array}{l} -j, \text{ se } s < j \\ s, \text{ se } |s| \leq j \\ j, \text{ se } s > j \end{array} \right.$$

Considerando $\xi_j(u_0(x)) = u_{0j}(x)$, temos que a sequência $(u_{0j}) \subset V$ é limitada q.s. em Ω e além disso,

$$u_{0j} \to u_0 \text{ forte em } V \tag{3.8}$$

Notemos inicialmente que

$$\xi_j'(s) = \left| \begin{array}{l} 0, \text{ se } s < j \\ 1, \text{ se } |s| \leq j \\ 0, \text{ se } s > j \end{array} \right.$$

Como $\xi_j(s)$ é uma função Lipschitiziana e $\xi_j(0) = 0$, resulta do Teorema $(B.2.2)$ que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_j(u_0(x))) = \xi_j'(u_0(x))\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \xi(u_0) = u_{0j} \in V.$$

Temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_j(u_0(x))) \to \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \text{ quase sempre em } \Omega,$$

o que implica

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_j(u_0(x))\right|^2 \to \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\right|^2 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Afirmação: $\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\xi_j'(u_0)(x)\right|^2 \leq \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right|$, onde $\left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right| \in L^1(\Omega)$.

De fato, observemos que $\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_j(u_0)(x))\right|^2 = |\xi_j'(u_0(x))|\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\right| \leq \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\right|$. Como $u_0 \in V$, então $u_0 \in H^1(\Omega)$ e, portanto, $\frac{\partial u_0}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Desde que a imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ é contínua, provamos a afirmação. Pela afirmação acima e pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\xi_j(u_0(x))\right|^2 dx \to \int_\Omega \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right|^2 dx.$$

Além disso, da última convergência acima, obtemos

$$\|\nabla(\xi_j u_0)\| \to \|\nabla u_0\|$$

isto é

$$\xi_j(u_0) \to u_0 \text{ em } V$$

Novamente pela imersão contínua V em $L^2(\Omega)$, obtemos uma subsequência de $\xi_j(u_0) = u_{0j}$, que ainda denotaremos por u_{0j}, tal que

$$u_{0j} \to u_0 \text{ quase sempre em } \Omega$$

e portanto, (u_{0j}) é limitada quase sempre em Ω.
Como $D(-\Delta)$ é denso em V, cf em Lions [12], segue que existe uma sequência $(u_{0jp}) \subset D(-\Delta) \subset V \cap H^2(\Omega)$ tal que

$$u_{0jp} \to u_{0j} \text{ forte em } V. \tag{3.9}$$

Por outro lado, desde que V é denso em $L^2(\Omega)$, dado $u_1 \in L^2(\Omega)$, existe uma sequência $(u_{1p}) \subset V$ tal que

$$u_{1p} \to u_1 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{3.10}$$

Por fim, sabemos que $H^1(Q)$ é denso em $L^2(Q)$. Logo, dado $f \in L^2(Q)$, existe uma sequência $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset H^1(Q)$ tal que

$$f_p \to f \text{ em } L^2(Q). \tag{3.11}$$

Para cada termo $(u_{0jp}, u_{1p}, f_p) \in [V \cap H^2(\Omega)] \times V \times H^1(0,T,L^2(\Omega))$, existe uma única função $u_{jp\nu} : Q \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições do Teorema 2. Dessa forma, pelos mesmos argumentos utilizados no Capítulo 2, obtemos

$$\begin{aligned}
&|u'_{jp\nu}(t)|^2 + \mu_0\|u_{jp\nu}(t)\|^2 + 2\int_\Omega \Lambda_\nu(u_{jp\nu}(x,t))dx + 2\beta_0\int_0^t\int_{\Gamma_1}[u'_{jp\nu}(x,s)]^2 d\Gamma ds \leq \\
&\leq |u_{1p}|^2 + \mu(0)\|u_{0jp}\|^2 + 2\int_\Omega \Lambda_\nu(u_{0jp}(x))dx + \int_0^t |f_p(s)|^2 ds + \int_0^t |u'_{jp\nu}|^2 ds + \\
&+\|\mu\|_{L^\infty}(0,T)\int_0^t \|u_{jp\nu}(s)\|_V^2 ds,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $\Lambda_\nu = \displaystyle\int_0^t h_\nu(s)ds$.

Queremos utilizar o Lema de Gronwall, então precisamos obter uma estimativa para

$$\int_\Omega \Lambda_\nu(u_{0jp}(x))dx.$$

Sendo u_{0j} limitada q.s. em Ω, $\forall j \in \mathbb{N}$, segue do Teorema de Strauss que

$$\lim_{\nu\to\infty} h_\nu(u_{0j}(x)) = h(u_{0j}(x)) \text{ q.s. em } \Omega,$$

Assim

$$|h_\nu(s) - h(s)| \leq \frac{\epsilon}{C},\ \forall s \in [-C, C],$$

onde $C > 0$ é uma constante tal que $|u_{0j}(x)| \leq C$ q.s. em Ω. Mostraremos que

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega \Lambda_\nu(u_{0jp}(x))dx = \int_\Omega \Lambda_\nu(u_0(x))dx \tag{3.13}$$

e para tanto, usaremos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. De fato, temos

$$\Lambda_\nu(u_{0j}(x)) = \int_0^{u_{0j}(x)} h_\nu(s)ds.$$

Daí,

$$\left|\Lambda_\nu(u_{0j}(x)) - \Lambda(u_{0j}(x))\right| = \left|\int_0^{u_{0j}(x)} h_\nu(s)ds - \int_0^{u_{0j}(x)} h(s)ds\right| = \left|\int_0^{u_{0j}(x)} [h_\nu(s) - h(s)]ds\right|.$$

Portanto,

$$|\Lambda_\nu(u_{0j}(x)) - \Lambda(u_{0j}(x))| < \int_0^{u_{0j}(x)} \frac{\varepsilon}{C} ds \leq \frac{\epsilon}{C}|u_{0j}(x)| < \varepsilon,$$

e assim

$$\Lambda_\nu(u_{0j}(x)) \to \Lambda(u_{0j}(x)) \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Além disso

$$|\Lambda_\nu(u_{0j}(x))| = \left|\int_0^{u_{0j}(x)} h_\nu(s)ds\right| = \left|\int_0^{u_{0j}(x)} \{[h_\nu(s) - h(s)] + h(s)\}ds\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{u_{0j}(x)} \{|h_\nu(s) - h(s)|ds + \int_0^{u_{0j}(x)} |h(s)|ds \leq \frac{\epsilon}{C}|u_{0j}(x)| + K|u_{0j}(x)| \leq$$

$$\leq \epsilon + KC.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue o resultado. Agora, usando a imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e por (3.9), segue do Teorema (B.2.9) que podemos extrair uma subsequência de $(u_{0j})_{j\in\mathbb{N}}$ a qual ainda denotaremos por (u_{0j}) tal que

$$u_{0j} \to u_0 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Portanto, pela continuidade de Λ, temos

$$\Lambda(u_{0j}) \to \Lambda(u_0) \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Queremos fazer novamente uso do Teorema B.2.10, mas para isto, resta mostrar que $\Lambda(u_{0j}) \leq q(x)$, onde $q(x) \in L^1(\Omega)$.
Com efeito, basta observarmos que :

$$|u_{0j}(x)| = |u_{0j}(x) - u_0(x) + u_0(x)| \leq |u_{0j}(x) - |u_0(x)| + |u_0(x)| \leq \epsilon + |u_0(x)|$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos $|u_{0j}(x)| \leq |u_0(x)|$, para quase todo $x \in \Omega$. Dessa forma, teremos

$$|\Lambda(u_{0j}(x)| = \left|\int_0^{u_{0j}(x)} |h(s)|ds\right| \leq \int_0^{|u_0(x))|} |h(s)|ds.$$

Daí, tomando $q(x) = \Lambda(|u_0(x)|)$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \Lambda(u_{0j}(x))dx = \int_\Omega \Lambda(u_0(x))dx \tag{3.14}$$

Como $u_{0jp} \to u_{0j}$ forte em V, de forma análoga ao que foi feito anteriormente, temos

$$\lim_{p\to\infty} \int_\Omega \Lambda_\nu(u_{0jp}(x))dx = \int_\Omega \Lambda_\nu(u_{0j}(x))dx \tag{3.15}$$

De (3.13), (3.14) e (3.15), obtemos

$$\lim \int_\Omega \Lambda_\nu(u_{0jp}(x))dx = \int_\Omega \Lambda_\nu(u_0(x))dx, \text{ quando j,p,} \nu \to \infty.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \Lambda_\nu(u_{0jp}(x))dx \leq P,$$

onde P é uma constante positiva que independe de p e ν. Logo, pelo Lema de Gronwall

$$|u'_{jp\nu}(t)|^2 + \|u_{jp\nu}(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_1} [u'_{jp\nu}(x,s)]^2 d\Gamma ds \leq R, \tag{3.16}$$

onde R é uma constante que independe de j, p, ν e, portanto,

$$\left| \begin{array}{l} (u_{jp\nu}) \text{ é limitada em } L^{infty}(0,T;V); \\ (u'_{jp\nu}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \\ (u_{jp\nu}) \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \end{array} \right.$$

Da imersão contínua $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$, segue que

$$(u'_{jp\nu}) \text{ é limitada em } L^2(Q) = L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Também por (3.16), obtemos

$$(u_{jp\nu}) \text{ é limitada em } L^2(0,T,L^2(\Gamma_1)) \tag{3.17}$$

Além disso, temos

$$\left(\frac{\partial u_{jpv}}{\partial \nu}\right) \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{3.18}$$

Do Teorema 2, obtemos

$$\mu \frac{\partial u_{jpv}}{\partial \nu} + \beta u'_{jp\nu} = 0 \text{ em } L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \tag{3.19}$$

Recorde que $\mu \in W^{1,\infty}(0,T)$, $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$ e $\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, $\beta(x) \geq \beta_0 > 0$. Então, temos por (3.17) e (3.19) que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \left[\frac{\partial u_{jpv}(x,t)}{\partial \nu}\right]^2 d\Gamma dt \leq \frac{\|\beta\|^2_{L^\infty(\Gamma_1)}}{\mu_0} \int_0^T \int_{\Gamma_1} [u'_{jp\nu}(x,t)]^2 d\Gamma dt < +\infty,$$

Logo,

$$\left(\frac{\partial u_{jp\nu}}{\partial \nu}\right) \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{3.20}$$

Desde que as limitações acima valem para todos os termos $(j,p,\nu) \in \mathbb{N}^3$, em particular, vale para $(p,p,p) \in \mathbb{N}^3$.

Como $(u_{ppp})_{p\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T,V)$ e $L^1(0,T,V')$ é um espaço de Banach separável, então existe uma subsequência de $(u_{ppp})_{p\in\mathbb{N}}$, ao qual denotaremos apenas por (u_p), e uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$u_p \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;V). \tag{3.21}$$

Como (u'_p) é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e sendo $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ um espaço de Banach reflexivo, existe uma subsequência de (u'_p), ao qual denotaremos por (u_p) tal que

$$u_p \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De forma análoga, existe uma função $\zeta : \Gamma_1 \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u_p}{\partial \nu} \rightharpoonup \zeta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{3.22}$$

Como $u_p(t) \in V$, pelo Teorema do Traço em Milla Miranda e L.A.Medeiros [13] resulta que $u_p(t) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e

$$\|\gamma_0 u_p(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_1)} \leq C\|u_p(t)\|. \tag{3.23}$$

Desde que $u_p \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;V)$, temos da Proposição 1.2.2, cf em M.Milla Miranda [18] que

$$u'_p \rightharpoonup u' \text{ em } H^{-1}(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Além disso, de $u_p \overset{*}{\rightharpoonup} u$ podemos concluir que

$$\Delta u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \Delta u \text{ em } L^\infty(0,T;V'). \tag{3.24}$$

Do Capítulo 2, decorre que $u''_p - \mu\Delta u_p + h_p(u_p) = f_p$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e

$$\mu(t)\frac{\partial u_p(x,t)}{\partial \nu} + \beta(x)u'_p(x,t) = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0,T). \tag{3.25}$$

Como $u'_p \rightharpoonup u'$ em $H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ que está imerso continuamente em $H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_1))$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \rightharpoonup \varsigma$ em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$ que está imerso continuamente em $H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_1))$, então

$$\mu\varsigma + \beta u' = 0 \text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Da imersão $L^\infty(0,T;V) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e de $u_p \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;V)$, segue que $u_p \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Desde que $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ é reflexivo, obtemos

$$u_p \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

implicando que

$$(u_p) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.26}$$

Por outro lado, $u_p' \rightharpoonup u'$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, portanto, teremos que

$$(u_p') \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.27}$$

Além disso

$$H^1(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^2(\Omega). \tag{3.28}$$

Portanto, segue do Teorema de Aubin-Lions, de (3.26), (3.27) e (3.28) que existe uma subsequência de $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$, ao qual ainda denotaremos por $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_p \to u \text{ forte em } L^2(0,T,L^2(\Omega)) = L^2(Q),$$

e consequentemente, pelo Teorema $(B.2.9)$ existe uma subsequência de $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ a qual ainda continuaremos denotanto por (u_p) tal que

$$u_p \to u \text{ quase sempre em } Q.$$

Sabemos que h é contínua, então $h(u_p) \to h(u)$ q.s em Q, isto é, dado $\varepsilon \geq 0$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|h(u_p(x,t)) - h(u(x,t))| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para } p \geq p_1.$$

Por outro lado, desde que $u_p \to u$ quase sempre em Q, temos que para (x,t) fixado, o conjunto $\{u_p(x,t) : p \in \mathbb{N}\}$ é limitada em $\mathbb{R}$ e, portanto, pelos Teorema de Strauss, segue que

$$h_p(u_p(x,t)) \to h(u_p(x,t))$$

ou ainda, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|h_p(u_p(x,t)) - h(u_p(x,t))| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para } p \geq p_2.$$

Tomando $p = \max\{p_1, p_2\}$, temos

$$\begin{aligned}&|h_p(u_p(x,t)) - h(u_p(x,t))| = |h_p(u_p(x,t)) - h(u_p(x,t)) + h(u_p(x,t)) - h(u(x,t))| \leq \\ &\leq |h_p(u_p(x,t)) - h(u_p(x,t))| + |h(u_p(x,t)) - h(u(x,t))| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $p \geq p_0$. Assim,

$$h_p(u_p) \to h(u) \text{ q.s. em } Q. \tag{3.29}$$

Vimos que $u_p'' - \mu\Delta u_p + h_p(u_p) = f_p$ em $L^2(Q)$. Multiplicando a equação por $u_p \in L^2(Q)$ e integrando em Q, obtemos

$$\int_0^T (h_p(u_p(t)), u_p(t))dt = \int_0^T (f_p(t), u_p(t))dt + \int_0^T (\mu\Delta u_p(t), u_p(t))dt$$

$$-\int_0^T (u_p''(t), u_p(t))_{L^2(\Omega)}.$$

Vamos analisar cada termo da expressão acima separadamente.

$$\int_0^T (\mu(t)\Delta u_p(t), u_p(t))dt = \int_0^T \int_\Omega \mu(t)\Delta u_p(x,t)u_p(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega \Delta(\mu(t)u_p(x,t))dxdt.$$

Pelo Teorema de Green, temos

$$\int_0^T (\mu(t)\Delta u_p(t), u_p(t))dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial(\mu(t)u_p(x,t))}{\partial\nu} u_p(x,t)d\Gamma dt -$$

$$-\int_0^T \int_\Omega \nabla u_p(x,t)\nabla\mu(t)u_p(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} u_p(x,t)\mu(t)\frac{\partial u_p(x,t)}{\partial\nu}d\Gamma dt -$$

$$-\int_0^T \int_\Omega \mu(t)(\nabla u_p(x,t)\nabla u_p(x,t)) = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x)u_p'(x,t)u_p(x,t)d\Gamma dt -$$

$$-\int_0^T \mu(t)((u_p(t), u_p(t)))dt$$

Observemos que

$$-\int_0^T \mu(t)((u_p(t), u_p(t)))dt \leq \left|\int_0^T \mu(t)((u_p(t), u_p(t)))\right|dt$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$-\int_0^T \mu(t)((u_p(t), u_p(t)))dt \leq \|\mu\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^T \|u_p(t)\|^2 < \infty$$

pois a imersão $u_p \in L^\infty(0,T,V) \hookrightarrow L^2(0,T,V)$ é contínua e (u_p) é convergente em $L^2(0,T,V)$. Notemos que

$$\left|\int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(x)u_p'(x,t)u_p(x,t)d\Gamma dt\right| \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\beta(x)u_p'(x,t)u_p(x,t)|d\Gamma dt \leq$$

$$\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \int_0^T (u_p'(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)} \leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \int_0^T |u_p(t)|_{L^2(\Gamma_1)}|u_p'(t)|_{L^2(\Gamma_1)} \leq$$

$$\leq \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{2} \int_0^T |u_p(t)|^2_{L^2(\Gamma_1)}dt + \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{2} \int_0^T |u_p'(t)|^2_{L^2(\Gamma_1)}dt \leq C$$

pois (u_p') é convergente e $\|u_p\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))} \leq k\|u_p\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$, onde k é a constante de imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Temos que

$$\left|\int_0^T (f_p(t), u_p(t))_{L^2(\Omega)}dt\right| dt \leq \int_0^T |(f_p(t), u_p(t))|_{L^2(\Omega)}dt$$

Novamente pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young, obtemos

$$\left|\int_0^T (f_p(t), u_p(t))dt\right| dt \leq \int_0^T |f_p(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T |u_p(t)|^2_{L^2(\Omega)} < \infty,$$

pois $f_p \in H^1(0,T,L^2(\Omega))$, $u_p \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ e são convergentes. Por fim, como feito em Temam [22], obtemos

$$\frac{d}{dt}(u_p'(t), u_p(t)) = (u_p''(t), u_p(t)) + (u_p'(t), u_p'(t))$$

o que implica

$$-(u_p''(t), u_p(t)) = -\frac{d}{dt}(u_p'(t), u_p(t)) + (u_p'(t), u_p'(t))$$

Integrando de 0 até T, obtemos

$$-\int_0^T (u_p''(t), u_p(t))dt = -(u_p'(T), u_p(T)) + (u_p'(0), u_p(0)) + \int_0^T |u_p'(t)|^2 dt,$$

pois u_p' converge em $L^\infty(0,T;V)$. Notemos que pelo Teorema 1, que $u_p(0), u_p(T), u_p'(0), u_p(T)$ são limitadasem $L^2(\Omega)$. Portanto, das limitações acima, obtemos

$$\int_0^T (h_p(t), u_p(t))dt \leq C, \tag{3.30}$$

onde C é uma constante que independe de p. Notemos também que $\displaystyle\int_0^T |u_p'(t)|dt < \infty$. Então, por (3.29) e (3.30), segue do Teorema $B.1.5$ que

$$h_p(u_p) \to h(u) \text{ forte em } L^1(Q) \tag{3.31}$$

3.2 Passagem ao limite

De modo análogo ao feito no Capítulo 2, multiplicando a equação $u_p'' + \mu\Delta u_p + h_p(u_p) = f_p$ por $v\theta$ com $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, integrando de 0 a T e usando as convergências , (3.11), (3.21), (3.23) e (3.30) concluímos que

$$u'' - \mu\Delta u + h(u) = f \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Como $u \in L^\infty(0,T;V)$, obtemos que $-\Delta u \in L^\infty(0,T;V')$. De fato, o operador laplaciano dado por

$$-\Delta : V \to V'$$

$$u \mapsto \Delta u$$

é linear e contínuo. Logo, $\|\Delta u(t)\|_{V'} \leq C\|u(t)\|$, donde segue que $-\Delta u \in L^\infty(0,T,V')$. Vamos mostrar que u satisfaz o Problema (1), isto é,

$$u'' - \mu\Delta u + h(u) = f \text{ em } L^1(0,T;V' + L^1(\Omega)). \tag{3.32}$$

Com efeito, sabemos que $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e que a imersão $L^2(0,T,L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;V')$ é contínua. Além disso, $\mu\Delta u \in L^\infty(0,T;V')$ e $h(u) \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$, com $L^1(0,T;L^1(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;V' + L^1(\Omega))$ contínua. Portanto, segue a igualdade (3.32).
Para completar a prova do teorema, devemos mostrar que $\zeta = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ e para tanto, usaremos os resultados do Capítulo 1.
De fato, temos

$$-\Delta(\mu u) = f - u'' - h(u), \text{ com } f \in L^2(Q) \text{ e } h(u) \in L^1(Q)$$

Desde que $f(t) \in L^2(\Omega)$, pelo Teorema $(B.2.6)$ existe um único $y(t) \in V \cap H^2(\Omega)$ solução do problema $-\Delta y(t) = f(t)$.
De modo análogo, existe único $z(t) \in V \cap H^2(\Omega)$ solução do problema $-\Delta z(t) = u'(t)$.
Como $h(u(t)) \in L^1(\Omega)$, então existe uma única função $v(t) \in L^{p'}(\Omega)$ solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta v(t) = h(u(t)) \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_1 \end{array}\right. \tag{3.33}$$

Além disso a aplicação $T : L^1(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$, $T(h(u(t)) = v(t)$ é linear e contínua, conforme a Proposição 1.6.2. Daí, $v \in L^1(0,T;L^{p'}(\Omega))$. De fato

$$\int_0^T \|v(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} dt = \int_0^T \|T(h(u(t)))\|_{L^1(\Omega)} dt \leq C \int_0^T \|h(u(t))\|_{L^1(\Omega)} < \infty$$

mostrando que $v \in L^1(0,T,L^{p'}(\Omega))$. Analogamente, usando o Teorema $B.2.6$, obtemos

$$y, z \in L^p(0,T,V \cap H^2(\Omega)).$$

Consequentemente

$$-\Delta(\mu u) = -\Delta y + (\Delta z)' + \Delta v \text{ em } L^1(0,T,V' + L^1(\Omega)).$$

Daí, para $w \in D(\Omega)$, temos

$$\langle -\Delta(\mu(t)u(t)), w\rangle = \langle -\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t), w\rangle \in L^1(0,T).$$

Recordemos que $L^1(0,T) \overset{cont}{\hookrightarrow} \mathcal{D}'(0,T)$, assim para $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, temos

$$\langle\langle -\Delta(\mu(t)u(t)), w\rangle, \theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)} = \langle\langle -\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t), w\rangle, \theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)}.$$

o que implica

$$\int_0^T \langle -\Delta(\mu(t)u(t)), w\rangle\, \theta(t)dt = \int_0^T \langle -\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t), w\rangle\, \theta(t)dt.$$

Logo,

$$\left\langle \int_0^T (-\Delta(\mu(t)u(t))\, \theta(t)dt, w \right\rangle = \left\langle \int_0^T (-\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t))\, \theta(t), w \right\rangle.$$

implicando

$$\int_\Omega \left(\int_0^T (-\Delta(\mu(t)u(t))\, \theta(t)dt \right) w dx = \int_\Omega \left(\int_0^T (-\Delta y(t) + (\Delta z(t))' + \Delta v(t))\, \theta(t)dt \right) w dx.$$

Pelo Lema 1.1.1, obtemos

$$-\int_0^T \Delta\mu(t)u(t)\theta(t)dt = -\int_0^T \Delta y(t)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta z(t))'\theta(t)dt + \int_0^T \Delta v(t)\theta(t)dt.$$

Usando derivada distribucional, obtemos

$$-\int_0^T \Delta\mu(t)u(t)\theta(t)dt = -\int_0^T \Delta y(t)\theta(t)dt - \int_0^T \Delta z(t)\theta'(t)dt + \int_0^T \Delta v(t)\theta(t)dt$$

Assim, segue do Teorema B.2.12 que

$$-\Delta\left[\int_0^T \mu(t)u(t)\theta(t)dt - \int_0^T y(t)\theta(t)dt - \int_0^T z(t)\theta'(t)dt \right] = -\Delta\left[\int_0^T (-v(t))\theta(t)dt \right].$$

e, portanto, pela unicidade do problema de Dirichlet-Neumann, temos que

$$\int_0^T \mu(t)u(t)\theta(t)dt - \int_0^T y(t)\theta(t)dt - \int_0^T z(t)\theta'(t)dt = \int_0^T (-v(t))\theta(t)dt.$$

Daí,

$$\int_0^T \big(u(t) - y(t) + z'(t) + v(t)\big)\theta(t)dt = 0, \forall\theta \in D(0,T).$$

Logo, pelo Lema Du Boys Reymound, obtemos

$$\mu(t)u(t) - y(t) + z'(t) = -v(t). \tag{3.34}$$

Pela linearidade da aplicação traço e por $z \in L^2(0,T,H^2(\Omega))$, segue da Proposição (1.5.2) que

$$\gamma_1(\mu(t)u(t)) = \gamma_1 y(t) - \gamma_1 z'(t) - \gamma_1 v(t) = \gamma_1 y(t) - (\gamma_1 z(t))' - \gamma_1 v(t). \tag{3.35}$$

Pela aplicação traço (1.12), temos $\gamma_1 y \in L^2(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$. Segue da imersão contínua $L^2(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ que

$$\gamma_1 y \in H^{-1}(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \tag{3.36}$$

De modo análogo, temos que

$$\gamma_1 z \in H^{-1}(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \tag{3.37}$$

Como $v \in E$, onde $E = \left\{v \in L^{p'}(\Omega); \Delta v \in L^1(\Omega)\right\}$, segue da aplicação traço para E visto no Capítulo 1 que

$$\gamma_1 v \in L^1(0,T;W^{\frac{1}{p}-2}(\Gamma_1)) \tag{3.38}$$

Portanto de (3.35)-(3.38), concluímos que

$$\gamma_1(\mu u) \in H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) + L^1(0,T;W^{\frac{1}{p}-2}(\Gamma_1)).$$

Recorde que

$$-\Delta(\mu u)_p = f_p - u_p'' - h_p(u_p) \text{ em } L^2(Q).$$

Pelo Teorema de Agmon-Douglis-Niremberg, existem únicas funções

$$y_p, z_p, v_p \in L^2(0,T;V \cap H^2(\Omega))$$

tais que

$$-\Delta y_p = f_p,\ -\Delta z_p = u_p' \text{ e } -\Delta v_p = h_p(u_p).$$

Portanto, pelo mesmo raciocínio anterior, obtemos que

$$(\mu u)_p = y_p - z_p' - v_p. \tag{3.39}$$

Motraremos que $y_p \rightharpoonup y$ em $L^2(0,T,V\cap H^2(\Omega))$. De fato, observemos que

$$\begin{aligned}\|y_p\|^2_{L^2(0,T,V\cap H^2(\Omega))} &= \int_0^T \|y_p(t)\|^2_{V\cap H^2(\Omega)}dt \leq \\ &\leq C\int_0^T |\Delta y_p(t)|^2 dt = C\int_0^T |f_p(t)|^2 dt = \\ &= C\|f_p\|^2_{L^p(0,T;L^2(\Omega))} < \infty,\end{aligned}$$

por (3.11). Assim, (y_p) é limitada em $L^2(0,T;V\cap H^2(\Omega))$ e sendo reflexivo, existe uma subsequência de (y_p), que denotaremos por $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$, tal que

$$y_p \rightharpoonup \chi \text{ em } L^2(Q).$$

Desde que $L^2(Q) \overset{cont}{\hookrightarrow} \mathcal{D}'(Q)$, então

$$\Delta y_p \to \Delta\chi \text{ em } \mathcal{D}'(Q) \tag{3.40}$$

Por outro lado, $\Delta y_p = f_p$ e por (3.11) segue que

$$\Delta y_p \to \Delta y \text{ em } \mathcal{D}'(Q). \tag{3.41}$$

De (3.40) e (3.41), segue que $\Delta\chi = \Delta y$. Como $\Delta y \in L^2(\Omega)$, por unicidade do problema de Dirichlet, segue que $\chi = y$. Portanto, obtemos que

$$y_p \rightharpoonup y \text{ em } L^2(0,T;V\cap H^2(\Omega))$$

Pela continuidade da aplicação Traço, resulta que

$$\gamma_1 y_p \rightharpoonup \gamma_1 y \text{ em } L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \tag{3.42}$$

Analogamente

$$z_p \rightharpoonup z \text{ em } L^2(0,T;V\cap H^2(\Omega)). \tag{3.43}$$

Por (3.43) e pela Proposição 1.2.2, obtemos

$$z_p' \rightharpoonup z' \text{ em } H^{-1}(0,T;V\cap H^2(\Omega)),$$

implicando pela continuidade da aplicação traço

$$\gamma_1 z_p' \rightharpoonup \gamma_1 z' \text{ em } H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)),$$

ou seja

$$(\gamma_1 z_p)' \rightharpoonup (\gamma_1 z)' \text{ em } H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \tag{3.44}$$

Por fim, mostraremos que

$$v_p \to v \text{ em } L^1(0,T;E)$$

De fato, devemos mostrar que

$$\|v_p - v\|_{L^1(0,T;E)} \to 0$$

De acordo com a Proposição (1.6.2), obtemos

$$\|v_p - v\|_{L^1(0,T,E)} = \int_0^T \|v_p(t) - v(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} dt + \int_0^T \|\Delta v_p(t) - v(t)\|_{L^1(\Omega)} =$$

$$= \int_0^T \|T(h_p(u_p(t))) - T(h(u(t)))\|_{L^{p'}(\Omega)} dt + \int_0^T \|h_p(u_p(t)) - h(u(t))\| dt \leq$$

$$\leq (C+1) \int_0^T \|h_p(u_p(t)) - h(u(t))\|_{L^1(\Omega)} dt = (C+1)\|h_p(t) - h(u)\|_{L^1(0,T,L^1(\Omega))} \to 0$$

quando $p \to \infty$. Portanto, por (3.11) e (3.30) concluímos que

$$\|v_p - v\|_{L^1(0,T,E)} \to 0.$$

Assim, como feito em Milla Miranda e L.A.Medeiros, (traço para funções de E)

$$\gamma_1 v_p \rightharpoonup \gamma_1 v \text{ em } L^1(0,T;W^{\frac{1}{p}-2,p'}(\Gamma_1)) \tag{3.45}$$

Portanto, usando a linearidade da aplicação traço e pelas convergências (3.42), (3.44) e (3.45), obtemos

$$\gamma_1(\mu u)_p \rightharpoonup \gamma_1(\mu u) \text{ em } H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) + L^1(0,T;W^{\frac{1}{p}-2,p'}(\Gamma_1))$$

Observe que

$$H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) + L^1(0,T;W^{\frac{1}{2}-2,p'}(\Gamma_1)) \overset{cont}{\hookrightarrow} H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_1)) + L^1(0,T;W^{\frac{1}{2}-2,p'}(\Gamma_1)).$$

Portanto

$$\gamma_1(\mu u)_p \rightharpoonup \gamma_1(\mu u) \text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_1)) + L^1(0,T;W^{\frac{1}{2}-2,p'}(\Gamma_1)). \tag{3.46}$$

Logo, de (3.22) e (3.46), obtemos

$$\zeta = \frac{\partial u_p}{\partial \nu} \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$$

e que

$$\gamma_1(\mu u)_p \rightharpoonup \gamma_1(\mu u) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

■

Observação 3.2.1 *As condições iniciais mostra-se como feito para solução forte.(Ver Capítulo 1)*

Observação 3.2.2 *Para h nas condições do Teorema, a unicidade é um problema em aberto.*

Capítulo 4

Comportamento assintótico

Neste capítulo, apresentaremos o decaimento exponencial da energia associada a solução fraca do problema (1), onde essa energia será dada pelo funcional

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big[|u'(t)|^2 + \mu(t)\|u(t)\|^2 + 2\int_\Omega \Lambda(u(x,t))dx\Big]. \tag{4.1}$$

Para obter este decaimento, construíremos o operador de Liapunov e utilizaremos técnicas multiplicativas como feito em Kormonik-Zuazua [9]. Considerando a hipótese

$$\mu'(t) \leq 0 \text{ quase sempre em } [0,\infty) \tag{4.2}$$

temos que o problema (1) tem uma solução global forte e fraca na variável temporal t. Antes de enunciarmos o teorema, vamos considerar algumas hipóteses:

$$\text{Existe } \delta > 0 \text{ tal que } h(s)s \geq (2+\delta)\Lambda(s), \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

$$\text{Seja K uma constante positiva tal que } \int_{\Gamma_1} \beta(x)|v| \leq K\|v\|^2 \tag{4.4}$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $m(x) = x - x_0$, com $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Gamma_0 = \Big\{x \in \Gamma : m(x)\nu(x) \leq 0\Big\} \text{ e } \Gamma_1 = \Big\{x \in \Gamma : m(x)\nu(x) \geq \tau \geq 0\Big\}$$

No que segue, vamos considerar $\beta(x) = m(x).\nu(x)$, onde $\nu(x)$ é o vetor normal unitário exterior a Γ e o número $\|m\|_{L^\infty(\Omega)}$ será representado por R. Por fim, denotaremos λ_1 como sendo o primeiro autovalor do problema espectral

$$((w,v)) = \lambda(w,v), \forall v \in V.$$

4.1 Decaimento Exponencial da Energia

Teorema 4.1.1 *Suponhamos que* (H_1)-(H_3) *e que* (4.2) *e* (4.3) *estão asseguradas. Então, dado* $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ *existe uma constante* $\omega > 0$ *tal que a energia* (4.1) *satisfaz*

$$E(t) \leq 4E(0)\exp^{-\frac{\omega}{2}t}, \forall t \geq 0. \tag{4.5}$$

Demonstração: Provaremos a princípio (4.5) para a energia $E_p(t)$ que é similar a $E(t)$, onde $E_p(t)$ é a energia associada a solução forte obtida no Capítulo 2 e tomando o limite inferior na energia $E_p(t)$, obteremos (4.5). Pelo Teorema 3 tinhamos a igualdade

$$u_p'' - \mu\Delta u_p + h_p(u_p) = f_p \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Agora considerando $f_p = 0$. Daí, daí podemos escrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$u_p'' - \mu\Delta u_p + h_p(u_p) = 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Tomando o produto interno em $L^2(\Omega)$ com $u_p'(t) \in L^2(\Omega)$, obtemos

$$(u_p''(t), u_p'(t)) - (\mu(t)\Delta u_p(t), u_p'(t)) + (h_p(u_p)(t), u_p'(t)) = 0. \tag{4.6}$$

Observemos que

$$(u_p''(t), u_p'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_p'(t)|$$

e

$$(\mu(t)\Delta u_p(t), u_p'(t)) = (\Delta[\mu(t)u_p(t)], u_p'(t)).$$

Pelo Teorema $(B.2.4)$,

$$(\Delta[\mu(t)u_p(t)], u_p'(t)) = -(\nabla\mu(t)u_p(t), \nabla u_p'(t)) - \mu(t)((u_p(t), u_p'(t))) + \int_{\Gamma_1} u_p'(t)\mu\frac{\partial u_p(t)}{\partial\nu}d\Gamma =$$

$$= \int_{\Gamma_1} u_p'(t)\mu(t)\frac{\partial u_p(t)}{\partial\nu}d\Gamma. \tag{4.7}$$

De (**??**), segue como foi feito no Capítulo 3

$$\mu(t)\frac{\partial u_p(t)}{\partial\nu} = -\beta(x).u_p'(t).$$

Assim, de (4.7) tem-se

$$(\Delta[\mu(t)u_p(t)], u_p'(t)) = -\mu(t)((u_p(t), u_p'(t))) - \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma$$

$$= \mu(t)\frac{d}{dt}\|u_p(t)\|^2 - \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma. \tag{4.8}$$

Notemos que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\mu(t)\|u_p(t)\|^2\big) = \frac{1}{2}\mu'(t)\|u_p(t)\|^2 + \mu(t)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_p(t)\|^2,$$

implicando que

$$-\mu(t)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_p(t)\|^2 = \frac{1}{2}\mu'(t)\|u_p(t)\|^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\mu(t)\|u_p(t)\|^2\big).$$

Portanto de (4.7), obtemos

$$\begin{aligned}(\Delta[\mu(t)u_p(t)], u_p'(t)) = \frac{1}{2}\mu'(t)\|u_p(t)\|^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\mu(t)\|u_p(t)\|^2\big)-\\ - \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por fim, recordemos que

$$(h_p(u_p(t), u_p'(t)) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \Lambda_p(u_p(x,t))dx.$$

Assim, de (4.6) e das últimas igualdades acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_p'(t)|^2 - \frac{1}{2}\mu'(t)\|u_p(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\mu(t)\|u_p(t)\|^2\big) + \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma = 0$$

o que implica

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big[|u_p'(t)|^2 + \mu(t)\|u_p(t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + 2\int_\Omega \Lambda_p(u_p(x,t))dx\Big] = \frac{1}{2}\mu'(t)\|u_p(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}-\\ - \int_{\Gamma_1} \beta(x)[u_p'(t)]^2 d\Gamma \leq -\beta_0\|u_p'(t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$E_p'(t) \leq -\beta_0\|u_p'(t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}. \tag{4.10}$$

onde $E_p(t)$ é a energia associada a solução forte u_p. Portanto, de (4.10) podemos concluir que $E_p(t)$ é uma função decrescente. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, definimos a energia pertubada por

$$E_{p\epsilon}(t) = E_p(t) + \epsilon\psi(t)$$

com

$$\psi(t) = 2(u_p'(t), m\nabla u_p(t)) + \theta(u_p'(t), u_p(t)),$$

onde $\theta \in (0, n)$ tal que

$$\exists \gamma > 0 \text{ tal que } \theta h(s)s \geq (2n+\gamma)\Lambda(s), \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

Observemos que a escolha desse θ é possível por (4.3). De fato, tomando algum γ tal que $0 < \gamma < \delta n$, temos

$$\frac{2n+\gamma}{2+\delta} h(s)s \geq (2n+\gamma)\Lambda(s),$$

onde

$$0 < \frac{2n+\gamma}{2+\delta} < \frac{2n+\delta n}{2+\delta} = \frac{n(2+\delta)}{2+\delta} = n,$$

para $0 < \gamma < \delta n$. Agora, notemos que

$$|\psi(t)| \leq \frac{R}{\mu_0}|u_p'(t)|^2 + R\mu(t)\|u_p(t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{\theta}{2}\left[\frac{|u_p'(t)|^2}{\mu_0} + \frac{\mu(t)\|u_p(t)\|_{L^(\Gamma_1)}}{\lambda_1}\right].$$

Com efeito,

$$|\psi(t)| \leq 2|(u_p'(t), m\nabla u_p(t))| + \theta|(u_p'(t), u_p(t))|.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e Young e da imersão contínua $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ obtemos

$$|\psi(t)| \leq 2|(u_p'(t)|\|m\|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla u_p(t)| + \theta|u_p'(t)||u_p(t)| \leq$$

$$2\frac{\sqrt{\mu(t)}}{\sqrt{\mu(t)}}|(u_p'(t)|\|m\|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla u_p(t)| + \theta\frac{\sqrt{\mu(t)}}{\sqrt{\mu(t)}}|u_p'(t)||u_p(t)| \leq$$

$$\leq 2\frac{\sqrt{\mu(t)}}{\sqrt{\mu_0}}|u_p'(t)|\|m\|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla u_p(t)| + \theta\frac{\sqrt{\mu(t)}}{\sqrt{\mu_0}}|u_p'(t)||u_p(t)|$$

$$2R\left[\frac{|u_p'(t)|^2}{2\mu_0} + \frac{|\nabla u_p(t)|^2}{2}\right] + \frac{\theta}{2}\left[\frac{|(u_p'(t)|^2}{\mu_0} + c_0\mu(t)\|u_p(t)\|^2\right].$$

onde $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$ e c_0 a constante de imersão. Do problema spetral $((w,v)) = \lambda(w,v)$, $\forall v \in V$, tomando $w = v = u_p(t) \in V$, pois $u_p \in L^\infty(0,T,V)$, segue que

$$((u_p(t), u_p(t))) = \lambda(u_p(t), u_p(t))$$

implicando

$$|u_p(t)|^2 = \frac{1}{\lambda}\|u_p(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|u_p(t)\|^2,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema espectral acima. Assim, temos que

$$|\psi(t)| \leq \frac{R}{\mu_0}|u_p'(t)|^2 + R\mu(t)\|u_p(t)\|^2 + \frac{\theta}{2}\left[\frac{|u_p'(t)|^2}{\mu_0} + \frac{\mu(t)\|u_p(t)\|^2}{\lambda_1}\right],$$

ou

$$|\psi(t)| \leq \left[\frac{R}{\mu_0} + \frac{\theta}{2\mu_0}\right]|u_p'(t)|^2 + \left[R + \frac{1}{2\lambda_1}\right]\mu(t)\|u_p(t)\|^2 \leq$$

$$\leq 2\left[\frac{R}{\mu_0} + \frac{\theta}{2\mu_0} + R + \frac{1}{2\lambda_1}\right]\left(\frac{1}{2}\right)\left[|u_p'(t)|^2 + \mu(t)\|u_p(t)\|^2\right]\left[\frac{2R}{\mu_0} + \frac{\theta}{\mu_0} + 2R + \frac{\theta}{\lambda_1}\right]E_p(t),$$

isto é,

$$|\psi(t)| \leq C_1 E_p(t), \tag{4.12}$$

onde $C_1 = C_1(R, \mu_0, \theta, \lambda_1) = \dfrac{2R}{\mu_0} + \dfrac{\theta}{\mu_0} + 2R + \dfrac{\theta}{\lambda_1}$. Recordemos que

$$E_{p\epsilon}(t) = E_p(t) + \epsilon\psi(t).$$

Por (4.12), temos

$$|E_{p\epsilon}(t) - E_p(t)| = |E_p(t) + \epsilon\psi(t) - E_p(t)| = \epsilon|\psi(t)| \leq \epsilon C_1 E_p(t),$$

ou ainda

$$(1 - \epsilon C_1)E_p(t) \leq E_{p\epsilon}(t) \leq (1 + \epsilon C_1)E_p(t).$$

Tomando $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2C_1}$ e da desigualdade acima, obtemos:

$$\frac{E_p(t)}{2} \leq E_{p\epsilon}(t) \leq \frac{3}{2}E_p(t) \leq 2E_p(t). \tag{4.13}$$

Consideremos a derivada da função $\psi(t)$ e usando que $u_p'' - \mu\Delta u_p + h_p(u_p) = 0$, obtemos

$$\psi'(t) = 2(u_p''(t), m\nabla u_p(t)) + 2(u_p'(t), m\nabla u_p'(t)) + \theta(u_p''(t), u_p(t)) + \theta(u_p'(t), u_p'(t)) =$$

$$= 2(\mu(t)\Delta u_p(t) - h_p(u_p), m\nabla u_p(t)) + 2(u_p'(t), m\nabla u_p'(t)) + \theta(\mu(t)\Delta u_p(t) -$$

$$h_p(u_p(t)), u_p(t)) + \theta|u_p'(t)|^2 = 2\mu(t)(\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t)) - 2(h_p(u_p), m\nabla u_p(t)) +$$

$$+2(u_p'(t), m\nabla u_p'(t)) \ + \ +\theta(t)(\Delta u_p(t), u_p(t)) - \theta(h_p(u_p(t)), u_p(t)) + \theta|u_p'(t)|^2.$$

Pelo Teorema de Green, obtemos

$$\psi'(t) = 2\mu(t)(\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t)) - 2(h_p(u_p), m\nabla u_p(t)) + 2(u_p'(t), m\nabla u_p'(t)) +$$

$$+\theta|u_p'(t)|^2 - \theta\mu(t)(\nabla u_p(t), \nabla u_p(t)) + \theta\mu(t)\left(u_p(t), \frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} - \theta(h_p(u_p(t), u_p(t))$$

implicando que

$$\psi'(t) = 2\mu(t)(\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t)) - 2(h_p(u_p), m\nabla u_p(t)) + 2(u_p'(t), m\nabla u_p'(t)) + \theta|u_p'(t)|^2 -$$
$$-\theta\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - \theta(u_p(t), u_p'(t))_{L^2(\Gamma_1)} - \theta(h_p(u_p(t), u_p(t)). \tag{4.14}$$

Vamos agora analisar cada termo de (4.14), e para tanto consideraremos por convini-ência apenas os termos com índice j.

Análise de

- $(\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t))$.

Pelo teorema de Green, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u_p(t)}{\partial x_i^2}\left(m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\right)dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\right)dx +$$
$$+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j(x)\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}.v_i d\Gamma = -\int_\Omega \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\frac{m_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}dx - \int_\Omega \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}.m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i \partial x_j}dx +$$
$$+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j(x)\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}.v_i d\Gamma$$

Sendo

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial u_p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_j\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial u_p}{\partial x_i}m_j\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i x_j}.$$

Assim

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)dx = \int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_j\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right)dx + \int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}m_j\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i x_j}dx.$$

Então, pelo teorema de Gauss, temos que

$$\int_\Gamma \frac{\partial u_p}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\nu_j dx d\Gamma = \int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_j\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right)dx + \int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}m_j\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i x_j}dx.$$

Portanto

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u_p(t)}{\partial x_i x_j}\left(m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\right)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_j}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_j}dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p}{\partial x_j}v_j dx + \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}m_j(x)\frac{\partial u_p}{\partial x_j}v_i dx. \tag{4.15}$$

Tomando o somatório com $i, j = 1, \ldots, n$, obtemos

$$(\Delta u_p(t), m\nabla u_p(t)) = -\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_j}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_j}dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p}{\partial x_j}v_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}m_j(x)\frac{\partial u_p}{\partial x_j}v_i d\Gamma.$$

Análise de

- $(h_p(u_p(t)), m\nabla u_p(t))$.

Observemos que

$$\int_\Omega m_j \frac{\partial \Lambda(u_p(t))}{\partial x_j} dx = \int_\Omega m_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_0^{u_p(t)} h_p(s)ds\right) dx = \int_\Omega m_j h(u_p(t)) \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}.$$

Assim,

$$(h_p(u_p(t)), \left(m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\right) dx = \int_\Omega m_j h(u_p(t)) \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j} dx = \int_\Omega m_j \frac{\partial \Lambda_p(u_p(t))}{\partial x_j} dx.$$

Pelo Teorema de Green e pelo fato de $u_p(t) \in V$,

$$\left(h_p(u_p(t), m_j \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\right) = -\int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t))dx + \int_{\Gamma_1} m_j \Lambda_p(u_p(t)).\nu d\Gamma =$$
$$= -\int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t))dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^m m_j \nu_j \Lambda_p(u_p(t))dx = -\int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t))dx +$$
$$+ \int_{\Gamma_1} (mv) \Lambda_p(u_p(t))dx$$

Tomando o somatório quando $j = 1, \ldots, n$, obtemos

$$(h_p(u_p(t)), m\nabla u_p(t)) = -\int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t))dx + \int_{\Gamma_1} m_j \Lambda_p(u_p(t)).\nu d\Gamma =$$
$$= -\int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t))dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^m m_j \nu_j \Lambda_p(u_p(t))dx = -\int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j} \Lambda_p(u_p(t))dx +$$
$$+ \int_{\Gamma_1} (mv) \Lambda_p(u_p(t))dx \tag{4.16}$$

Análise de

$\bullet (u_p'(t), m\nabla u_p'(t))$

$$\int_\Omega u_p'(t) \left(m_j \frac{\partial u_p'(t)}{\partial x_j}\right) dx = \frac{1}{2} \int_\Omega m_j \frac{\partial}{\partial x_j} |u_p'(t)|^2 dx,$$

pois, $2\frac{\partial}{\partial x_j}|u_p'(t)||u_p'(t)| = \frac{\partial}{\partial x_j}|u_p'(t)|^2 dx$.
Assim,

$$\int_\Omega u_p'(t) \left(m_j \frac{\partial u_p'(t)}{\partial x_j}\right) dx = \frac{1}{2} \int_\Omega m_j \frac{\partial}{\partial x_j} |u_p'(x,t)|^2 dx.$$

De acordo com o Teorema de Green, segue que

$$\int_\Omega u_p'(t) \left(m_j \frac{\partial u_p'(t)}{\partial x_j}\right) dx = -\int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j} (u_p'(t))^2 dx + \int_{\Gamma_1} m_j v_j (u_p'(x,t))^2 dx. \tag{4.17}$$

Substituindo (4.15), (4.16), (4.17) em (4.14), obtemos

$$\psi'(t) = -2\mu(t)\int_\Omega \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_j}\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}dx + \mu(t)\int_\Omega \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\frac{\partial m_j}{\partial x_j}\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}dx-$$

$$-\mu(t)\int_\Gamma \frac{\partial u_p(t)}{\partial i}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\nu_j d\Gamma + 2\mu(t)\int_\Gamma \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\nu_i d\Gamma + 2\int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j}\Lambda_p(u_p(t))dx-$$

$$-2\int_{\Gamma_1}(m\nu)\Lambda_p(u_p(t))d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial m_j}{\partial x_j}|u_p'(t)|^2dx + \int_{\Gamma_1}(m_j\nu_j)|u_p'(t)|^2_{L^2(\Omega)}d\Gamma + \theta|u_p'(t)|^2-$$

$$-\theta\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - \theta(h_p(u_p(t)), u_p(t)) - -\theta(\beta(x)u_p'(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Daí, voltando ao somatório $\sum_{i=1}^{m}$ e $\sum_{j=1}^{m}$, temos

$$\psi'(t) = \mu(t)\int_\Omega \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial m_j}{\partial x_j}dx - \mu(t)\int_\Gamma \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2\sum_{j=1}^{m}(m_j\nu_j)d\Gamma+$$

$$+2\mu(t)\int_\Gamma \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\nu_i d\Gamma + 2\int_\Omega \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial m_j}{\partial x_j}\Lambda_p(u_p)\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2d\Gamma-$$

$$-2\int_{\Gamma_1}(m\nu)\Lambda_p(u_p)\frac{\partial m_j}{\partial x_j} + \theta|u_p'(t)|^2 - \theta\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - \theta(h_p(t), u_p(t))-$$

$$-\theta(\beta u_p'(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}$$

implicando que

$$\psi'(t) = -\mu(t)n\int_\Omega |\nabla u_p(t)|^2dx - \mu(t)\int_\Gamma (m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2dx+$$

$$+2\mu(t)\int_\Gamma \frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\nu_i d\Gamma + 2n\int_\Omega \Lambda_p(u_p(t))dx + \int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2d\Gamma-$$

$$-2\int_{\Gamma_1}(m\nu)\Lambda_(u_p)d\Gamma - n|u_p'(t)|^2 = \theta|u_p'(t)|^2 - \theta\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - \theta(h_p(t), u_p(t))-$$

$$-\theta(\beta u_p'(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Portanto

$$\psi'(t) = -\mu(t)(n+\theta)\|u_p(t)\|^2 - (n-\theta)|u_p'(t)|^2 - \mu(t)\int_\Gamma (m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2d\Gamma+$$

$$+2n\int_{\Gamma_1}(m\nu)\Lambda_p(u_p(t))d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(mv)|u_p'(t)|^2d\Gamma + 2\mu(t)\int_\Gamma \frac{u_p(t)}{\partial x_i}m_j\frac{u_p(t)}{\partial x_j}\nu_i d\Gamma-$$

$$-\theta(h_p(t), u_p(t)) - \theta(\beta u_p'(t), u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}. \tag{4.18}$$

No que segue, continuaremos analisando os termos de (4.18).

Análise de

- $\mu(t)\displaystyle\int_{\Gamma}(m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2 d\Gamma.$

Temos

$$\mu(t)\int_{\Gamma}(m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2 d\Gamma=\mu(t)\int_{\Gamma_0}(m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2 d\Gamma+$$
$$+\mu(t)\int_{\Gamma_1}(m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2 d\Gamma.$$

Desde que sobre Γ_0, como feito em Milla Miranda e L.A.Medeiros [20],

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2,$$

segue que

$$\begin{aligned}\mu(t)\int_{\Gamma}(m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2 d\Gamma=\mu(t)\int_{\Gamma_0}(m\nu)\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma+\\+\mu(t)\int_{\Gamma_1}(m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Análise de

- $2\mu(t)\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\partial u_p(x,t)}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p(x,t)}{\partial x_j}.$

Sobre Γ_1, tem-se $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=\nu_j(\dfrac{\partial u}{\partial \nu})$, como feito em Milla Miranda e L.A.Medeiros [20]. Assim,

$$2\mu(t)\int_{\Gamma}\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\nu_i d\Gamma=2\mu(t)\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}\right)m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}d\Gamma=$$
$$=2\mu(t)\int_{\Gamma_0}\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}d\Gamma+2\int_{\Gamma_1}\mu(t)\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}d\Gamma=$$
$$=2\mu(t)\int_{\Gamma_0}\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}m_j\nu_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}d\Gamma+2\int_{\Gamma_1}\mu(t)\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}d\Gamma=$$
$$=2\mu(t)\int_{\Gamma_0}\sum_{i=1}^{m}(m_j\nu_j)\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma-2\int_{\Gamma_1}\beta(x)u_p'(t)m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}d\Gamma,$$

o que implica

$$2\mu(t)\int_{\Gamma}\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p(x,t)}{\partial x_j}\nu_i d\Gamma=2\mu(t)\int_{\Gamma_0}(m\nu)\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma$$
$$-2\int_{\Gamma_1}\beta(x)u_p'(t)m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}d\Gamma.$$

Desde que $\beta(x)=m(x)\nu(x)$ e $|m_j(x)|\leq\|m(x)\|\leq\|m\|_{L^\infty(\Omega)}=R$, temos

$$-2\int_{\Gamma_1}\beta(x)u_p'(t)m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}d\Gamma\leq 2\int_{\Gamma_1}\sqrt{\mu(t)}\sqrt{(m\nu)}Ru_p'(t)\frac{\sqrt{(m\nu)}}{\sqrt{\mu(t)}}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial\nu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\Gamma.$$

Pela desigualdade de Young, obtemos

$$-2\int_{\Gamma_1}\beta(x)u_p'(t)m_j\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}d\Gamma\leq$$

$$\leq\frac{R^2}{\mu_0}(m\nu)|u_p'(t)|^2d\Gamma+\mu(t)\int_{\Gamma_1}(m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\right)^2d\Gamma.$$

Então,

$$\begin{aligned}&2\mu(t)\int_{\Gamma}\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}m_j\frac{\partial u_p(x,t)}{\partial x_j}\nu_i d\Gamma\leq 2\mu(t)\int_{\Gamma_0}(m\nu)\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma+\\&+\frac{R^2}{\mu_0}\left(\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2\right)d\Gamma+\mu(t)\int_{\Gamma_1}(m\nu)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\right)^2d\Gamma.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Análise de

- $-\theta(\beta(x)u_p'(t),u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}$.

  Temos

$$-\theta(\beta(x)u_p'(t),u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}=\int_{\Gamma_1}-\theta\beta(x)u_p'(t)u_p(t)d\Gamma=$$

$$=\int_{\Gamma_1}-\theta\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\xi}}\frac{\sqrt{\beta(x)}}{\sqrt{\mu(t)}}u_p'(t)\frac{\sqrt{\beta(x)}}{\sqrt{K}}\sqrt{\mu(t)}\sqrt{\xi}u_p(t).$$

Novamente pela desigualdade de Young, obtemos

$$-\theta(\beta(x)u_p'(t),u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}\leq\frac{\theta^2K}{\xi}\int_{\Gamma_1}\frac{\beta(x)}{\mu(t)}\frac{|u_p'(t)|^2}{2}d\Gamma+\frac{\xi}{K}\int_{\Gamma_1}\mu(t)\beta(x)\frac{|u_p(t)|^2}{2}d\Gamma,$$

onde $K>0$ é uma constante tal que $\displaystyle\int_{\Gamma_1}\beta(x)|u_p(t)|^2d\Gamma\leq K\|u_p(t)\|^2$ e $\xi>0$ uma constante positiva a ser escolhida. Então,

$$-\theta(\beta(x)u_p'(t),u_p(t))_{L^2(\Gamma_1)}\leq\frac{\theta^2K}{2\mu_0}\int_{\Gamma_1}\beta(x)|u_p'(t)|^2d\Gamma+\xi\frac{\mu(t)}{2}\|u_p(t)\|^2.\tag{4.21}$$

Substituindo (4.18), (4.19), (4.20) em (4.14), obtemos

$$\psi'(t) \leq -(n+\theta)\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - (n-\theta)|u_p'(t)|^2 - \mu(t)\int_{\Gamma_0}(m\nu)\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma -$$

$$-\mu(t)\int_{\Gamma_1}(m\nu)\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_i}\right)^2 d\Gamma + 2n\int_{\Omega}\Lambda_p(u_p(t))dx - 2\int_{\Gamma_1}(m\nu)\Lambda_p(u_p(x,t))d\Gamma +$$

$$+\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma + 2\mu(t)\int_{\Gamma_0}(m\nu)\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma + \frac{R^2}{\mu_0}\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma +$$

$$+\mu(t)\int_{\Gamma_1}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u_p(t)}{\partial x_j}\right)^2 d\Gamma - \theta(h_p(u_p(t)), u_p(t)) + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0}\int_{\Gamma_1}\beta(x)|u_p'(t)|^2 d\Gamma +$$

$$+\frac{\xi\mu(t)}{2}\|u_p(t)\|^2$$

implicando que

$$\psi'(t) \leq -(n+\theta)\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - (n-\theta)|u_p'(t)|^2 - \theta(h_p(u_p(t)), u_p(t)) + 2n\int_{\Omega}\Lambda_p(u_p(t))dx +$$

$$+\left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right)\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma + \xi\frac{\mu(t)}{2}\|u_p(t)\|^2.$$

Por (4.3), temos $-\theta(h(s), s) \leq -(2n+\delta)\Lambda(s)$. Assim,

$$-\int_{\Omega}\theta(h_p(u_p(t))u_p(t))dx \leq -\int_{\Omega}(2n+\delta)\Lambda(u_p(t))dx = -2n\int_{\Omega}\Lambda(u_p(t))dx -$$

$$-\gamma\int_{\Omega}\Lambda(u_p(t))dx.$$

Daí

$$\psi'(t) \leq -(n+\theta)\mu(t)\|u_p(t)\|^2 - (n-\theta)|u_p'(t)|^2 + \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right)\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma +$$

$$+\xi\frac{\mu(t)}{2}\|u_p(t)\|^2 - \gamma\int_{\Omega}\Lambda(u_p(t))dx.$$

Desde que $\xi\frac{1}{2}(\mu(t)\|u_p(t)\|^2) \leq \xi E_p(t)$, segue que

$$\psi'(t) \leq -(n+\theta)E_p(t) - (n-\theta)|u_p'(t)|^2 + \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right)\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma +$$

$$+\xi E_p(t) - \gamma E_p(t).$$

Portanto,

$$\psi'(t) \leq \max\big(-(n+\theta), -(n-\theta), -\gamma\big)E_p(t) + \left(\tfrac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right)\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma + \xi E_p(t) =$$
$$= -\min\big(n-\theta, \gamma\big)E_p(t) + \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right)\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma + \xi E_p(t). \tag{4.22}$$

Consideremos a derivada em relação a variável t da expressão

$$E_{p\epsilon}(t) = E_p(t) + \epsilon\psi(t)$$

e por (4.10) e (4.22) , temos

$$E'_{p\epsilon} = E'_p(t) + \epsilon\psi'(t) \leq -\beta_0\|u_p'(t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - \epsilon\min\Big[(n-\theta),\gamma\big) - \xi\Big] -$$
$$-\varepsilon\left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right)\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma \leq -\varepsilon\left[\min\{(n-\theta),\gamma\} - \xi\right]E_p(t) -$$
$$-\int_{\Gamma_1}\beta(x)|u_p'(t)|^2 d\Gamma - \varepsilon\left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right)\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma -$$
$$-\varepsilon\left[\min\{(n-\theta),\gamma\} - \xi\right]E_p(t) - \int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma\epsilon\left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right) +$$
$$+\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma = -\varepsilon[\min\{(n-\theta),\gamma\} - \xi]E_p(t) -$$
$$-\left[1 + \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2}{2\mu_0\xi} + 1\right)\right]\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2 d\Gamma.$$

Tomando $0 < \epsilon < \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$ e $0 < \xi < \min\big\{n-\theta, \gamma\big\}$, obtemos

$$\epsilon\left[1 - \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2}{2\mu_0\xi} + 1\right)\right]\int_{\Gamma_1}(m\nu)|u_p'(t)|^2_{L^2(\Omega)} d\Gamma \geq 0,$$

pois $1 - \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2}{2\mu_0\xi} + 1\right) \geq 0$ e sobre Γ_1 e $m\nu > 0$. Recorde que

$$\frac{E_p(t)}{2} \leq E_{p\epsilon}(t) \leq 2E_p(t). \tag{4.23}$$

Assim, por (4.13) obtemos

$$E'_{p\epsilon}(t) + \frac{\omega}{2}E_{p\epsilon}(t) \leq 0,$$

com $\omega = \min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2R}{\mu_0} + \frac{\theta}{\mu_0} + 2R + \frac{\theta}{\lambda_1}\right)^{-1}, \left(\frac{R^2}{\mu_0} + \frac{\theta^2 K}{2\mu_0\xi} + 1\right)^{-1}\right\} > 0$. Então, a solução da EDO acima satisfaz

$$E_p(t) \leq E_{p\epsilon}(0)\exp^{-\frac{\omega}{2}} t, \forall t \geq 0. \tag{4.24}$$

Segue de (4.23) e (4.24) que

$$\frac{E_p(t)}{2} \leq E_{p\epsilon}(t) \leq 2E_p(t),$$

implicando que

$$E_p(t) \leq 4E_{p\epsilon}(0) \exp^{-\frac{\omega}{2}} t, \forall t \geq 0.$$

Desde que (u_p) é limitada em $L^\infty(0,T,V)$ e (u_p) é limitada em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$, segue do Teorema de Aubin-Lions que existe uma subsequência de (u_p), ao qual ainda denotaremos por (u_p) tal que

$$u_p \to u \text{ em } L^2(Q).$$

Pela Proposição $(B.2.3)$, existe uma subsequência de (u_p), que ainda denotaremos por (u_p) tal que

$$u_p \to u \text{ quase sempre em } Q.$$

Portanto,

$$u_p(\cdot,t) \to u_p(\cdot,t) \text{ quase sempre em } \Omega, \forall t \geq 0$$

Sendo Λ_p contínua, segue que

$$\Lambda_p(u(\cdot,t)) \to \Lambda_p(u(\cdot,t)) \text{ q.s em } \Omega, \forall t \geq 0. \tag{4.25}$$

Temos que $h_p \to h$ em conjuntos limitados da $\mathbb{R}$, e portanto

$$\Lambda_p(u(\cdot,t)) \to \Lambda(u(\cdot,t)) \text{ q.s em } \Omega, \forall t \geq 0. \tag{4.26}$$

Então, por (4.25) e (4.26)

$$\Lambda_p(u_p(\cdot,t)) \to \Lambda(u(\cdot,t)) \text{ q.s em } \Omega, \forall t \geq 0 \tag{4.27}$$

Temos ainda por (4.24) que

$$\frac{1}{2}\left[|u_p'(t)|^2 + \mu(t)\|u_p'(t)\|^2 + 2\int_\Omega \Lambda_p(t)(u_p(x,t))dx\right] \leq 2E_p(0)\exp^{-\frac{\omega}{2}t}$$

donde

$$\int_\Omega \Lambda_p(t)(u_p(x,t))dx \leq 4E_p(0)$$

pois $\exp^{-\frac{\omega}{2}t} \leq 1$. Da convergência dos dados iniciais e pelo fato que

$$\int_\Omega \Lambda_p(u_{0p}(x))dx \to \int_\Omega \Lambda(u_0(x))dx \text{ em } \mathbb{R},\ q.s \text{ em } \Omega,\ \forall t \geq 0,$$

obtemos,

$$\liminf_{p\to\infty} \int_\Omega \Lambda_p(u_p(x))dx \leq 4E(0). \tag{4.28}$$

De fato,

$$\liminf_{p\to\infty} E_p(0) = \frac{1}{2}\left[|u_1|^2 + \mu(t)\|u_0\|^2 + 2\int_\Omega \Lambda(u_0(x))dx\right] = 4E(0).$$

Assim,

$$\liminf_{p\to\infty} \int_\Omega \Lambda_p(u_p(x,t))dx \leq 4E(0).$$

Por (4.28) e pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\int_\Omega \Lambda(u(x,t)) \leq \liminf_{p\to\infty} \int_\Omega \Lambda_p(u_p(x,t))dx.$$

Então, de (4.28), temos

$$\int_\Omega \Lambda(u(x,t))dx \leq 4E(0).$$

Passando $\liminf\limits_{p\to\infty}$ na expressão $E_p(t) \leq 4E_{p\epsilon}(0)\exp^{-\frac{\omega}{2}} t, \forall t \geq 0$, obtemos

$$\frac{1}{2}\left[\liminf_{p\to\infty} |u_p'(t)|^2 + \liminf_{p\to\infty} \mu(t)\|u_p(t)\|^2 + \liminf_{p\to\infty} 2\int_\Omega \Lambda_p(u_p(x,t))\right] \leq 4\exp^{-\frac{\omega}{2}t} \liminf_{p\to\infty} E_p(0),$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\left[|u'(t)|^2 + \mu(t)\|u(t)\|^2 + 2\int_\Omega \Lambda(u(x,t))\right] \leq 4\exp^{-\frac{\omega}{2}t} E(0).$$

isto é

$$E(t) \leq 4E(0)\exp^{-\frac{\omega}{2}t}, \forall t \geq 0.$$

■

Observação 4.1.1 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(s) = s^3$ satisfaz a condição* 4.3.

Apêndice A

Dual de espaços $L^p(0, T; X)$ $(p > 1)$ para funções vetoriais

No que segue, daremos uma caracterização do dual de $L^P(0, T; X)$, com $p > 1$ e X um espaço de Banach. Demostraremos que se o dual X' gozar da propriedade de que toda função de variação limitada $f : [0, T] \to X'$ possui uma derivada quase sempre, então o dual de $(L^p(0, T; X))' = L^q(0; T, X')$, sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Este resultado encontramos no artigo de F. M. R. Neyde [21].

A.1 Integral para funções de L^p(0,T,X)

Nesta seção vamos definir um certo tipo de integrais para funções de $L^p(0, T, X)$, baseado na noção de Riemann-Stieltjes. Usaremos esta integral para mostrarmos a sobrejetividade da aplicação

$$\begin{array}{rcl} S : (L^p(0, T, X))' & \to & V_0^q(0, T, X') \\ U & \mapsto & \phi \end{array}$$

.

Observação A.1.1 *Na página* 81*, definimos os espaços* $V^q(0, T, X)$ *e* $V_0^q(0, T, X)$*.*

Se $u \in C(0, T, X)$ e $\phi \in V^q(0, T, X')$, correspondendo a uma partição $D_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ e pontos τ_v tal que $t_{v-1} \leq \tau_v \leq t_v$. Daí, formamos a soma

$$\delta(D_n) = \sum_{v=1}^{n} [\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})] u(\tau_v)$$

que é um elemento de $C(0,T,X)$, pois $u \in C(0,T,X)$. Seja então

$$|D_n| = \max_{1\leq v\leq n} |t_v - t_{v-1}|.$$

A prova de que, para uma sequência de partições (D_i) com $|D_i| \to 0$, as somas $\delta(D_n)$ tem um limite em $C(0,T,X)$ que independe da sequência (D_i), é feita de maneira usual. De fato, temos que

$$|\delta(D_n)| = \left|\sum_{v=1}^{n}[\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})u(\tau_v)]\right| \leq \sum_{v=1}^{n}\|\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})\|\|u(\tau_v)\| = \sum_{v=1}^{n}\frac{\|\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})\|}{|t_v-t_{v-1}|^{\frac{1}{p}}}.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$|\delta(D_n)| \leq \left(\sum_{v=1}^{n}\frac{\|\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v-t_{v-1}|^{q-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{v=1}^{n}\|u(\tau_v\|^p|t_v-t_{v-1}|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas como $\phi \in V^q(0,T,X')$ e $t \mapsto \|u(t)\|$ é contínua, passando ao limite quando $n \to \infty$, tem-se $|D_n| \to 0$ e portanto,

$$\lim_{|D_n|\to 0}\sum_{v=1}^{n}\frac{\|\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v-t_{v-1}|^{q-1}} = V^q(\phi)$$

e

$$\lim_{|D_n|\to 0}\sum_{v=1}^{n}\|u(\tau_v)\|^p|t_v-t_{v-1}| = \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{v=1}^{n}\frac{\|\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v-t_{v-1}|^{q-1}}\right| \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{v=1}^{n}\frac{\|\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v-t_{v-1}|^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{v=1}^{n}\|u(\tau_v\|^p|t_v-t_{v-1}|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{q}}\int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

Logo, a série $\sum_{v=1}^{n}[\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})u(\tau_v)]$ é absolutamente convergente, pois é uma sequência monótona limitada. Daí, seu limite será denotado por $\int_0^T u(t)d\phi(t)$. Pela desigualdade estabelecida, temos

$$\left|\int_0^T u(t)d\phi(t)\right| \leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{q}} \text{ e } \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} = \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{q}}\|u\|_{L^p(0,T,X)}.$$

Note que

$$\begin{aligned} U : C(0,T,X) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_0^T u(t)d\phi(t) \end{aligned}$$

é um funcional linear sobre $C(0,T,X)$ de norma $\{V^q(\phi)\}$. Como $C(0,T,X)$ é denso em $L^p(0,T,X)$, podemos estender U a uma único funcional linear sobre $L^p(0,T,X)$ com a mesma norma, que ainda denotaremos por U. Definimos então para u $\in L^p(0,T,X)$, $\int_0^T u(t)d\phi(t)$ por esta extensão. Assim, está bem definido

$$\begin{aligned} U : L^p(0,T,X) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_0^T u(t)d\phi(t) \end{aligned}$$

e

$$|U(u)| = \left|\int_0^T u(t)d\phi(t)\right| \leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L^p(0,T,X)}.$$

A.2 Preliminares

No que segue, X é um espaço de Banach tal que X' satisfaz a condição de que toda função de variação limitada tem uma derivada quase sempre. Estudaremos o dual dos espaços L^p quando os elementos são funções definidas em um intervalo [0,T] e toma valores em X. Para $u : [0,T] \to X$ e $f : X' \to \mathbb{R}$ denotaremos $\langle f, u(t)\rangle$ em vez de $f(u(t))$.

Consideremos $V^p(0,T,X)$ o conjunto das funções u com valores em X, definidas quase sempre em $[0,T]$ e tais que as somas

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{\|u(t_v) - u(t_{v-1})\|}{|t_v - t_{v-1}|}$$

são limitadas para todas as partições $\{t_v\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Note que faz sentido definirmos o supremos destas somas, logo denotaremos este supremo por $V^P(u)$. Definimos

$$\|u\|_{V^p(0,T,X)} = \|u(0)\| + \{V^p(u)\}^{\frac{1}{p}}.$$

Se $u \in V^p(0,T,X)$, então dizemos que u é uma função de variação p limitada. No caso de p $=$1, dizemos simplesmente função de variação limitada.

Denotaremos por $V_0^p(0,T,X)$ um subconjunto de $V^p(0,T,X)$ para os quais $u(0) = 0$. Considerando os espaços $C(0,T,X)$ e $L^p(0,T,X)$, mostra-se que $C(0,T,X)$ é denso em $L^p(0,T,X)$ na norma de $L^p(0,T,X)$.

A.3 Uma primeira caracterização de $(L^p(0,T,X))'$

Nesta seção, vamos dar uma caracterizãção do espaço $(L^p(0,T,X))'$ no sentido de definir uma aplicação linear, sobrejetiva e que preserva norma.

Definamos para cada $x \in X$ e cada número real s, com $0 \leq s \leq T$, a seguinte função:

Se $s > 0$

$$u_{s,x} : [0,T] \to X$$

$$t \mapsto u_{s,x}(t)$$

onde

$$u_{s,x}(t) = \begin{cases} x, 0 \leq t \leq s \\ 0, s < t \leq T \end{cases}$$

e para s = 0, definiremos

$$u_{s,x}(t) = 0$$

Afirmação 1: Para cada $s \in [0,T]$ e para cada $x \in X, u_{s,x} \in L^p(0,T,X)$. De fato, temos que

$$\int_0^T \|u_{s,x}(t)\|_X^p dt = \int_0^s \|x\|_X^p dt < \infty,$$

pois $x \in X$.

Seja $U \in (L^p(0,T,X))'$. Consideremos para cada $s \in [0,T]$ a seguinte função:

$$\phi(s) : X \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto U(u_{s,x}) = \phi(s)[x].$$

Desejamos que a aplicação

$$S : (L^p(0,T,X))' \to V_0^q(0,T,X')$$

esteja bem definida, e para tanto, mostraremos que $\phi \in V_0^q(0,T,X')$.

i) $\phi(s) : X \to \mathbb{R}$ é linear.

Com efeito, se s=0, temos $\phi(s) = 0$, logo linear. Agora, se $s \neq 0$, $\forall t \in [0,T]$ temos

$$u_{s,\varphi x_1 + x_2} = \begin{cases} \varphi x_1 + x_2, 0 \leq t \leq s \\ 0, s < t \leq T \end{cases} = \begin{cases} \varphi x_1, 0 \leq t \leq s \\ 0, s < t \leq T \end{cases} + \begin{cases} x_2, 0 \leq t \leq s \\ 0, s < t \leq T \end{cases}$$

$= \varphi u_{s,x_1} + u_{s,x_2}$, isto é, $u_{s,\varphi x_1 + x_2}(t) = \varphi u_{s,x_1}(t) + u_{s,x_2}(t)$, para todo $x_1, x_2 \in X$ e $\varphi \in \mathbb{R}$, o que implica

$\phi(s)[\varphi x_1 + x_2] = U(u_{s,\varphi x_1 + x_2}(t)) = U(\varphi u_{s,x_1}(t) + u_{s,x_2}(t)) = \varphi U(u_{s,x_1}) + U(u_{s,x_2}) =$

$= \varphi\phi(s)[x_1] + \phi(s)[x_2].$

ii) $\phi(s) \in X', \forall s \in [0,T]$

De fato, $\phi(0) = 0$, logo $\phi(0) \in X'$. Suponha agora $s \neq 0$. Desde que

$$\|u_{s,x}\|^p_{L^p(0,T,X)} = \int_0^T \|u_{s,x}(t)\|^p dt = \|x\|^p s$$

isto é,

$$\|u_{s,x}\|_{L^p(0,T,X)} = s^{\frac{1}{p}}\|x\|.$$

Assim,

$$|\phi(s)[x]| = |U(u_{s,x})| \leq \|U\|\|u_{s,x}\|_{L^p(0,T,X)} = \|U\|s^{\frac{1}{p}}\|x\|,$$

mostrando que ϕ é contínua e, portanto, $\phi \in X'$.

iii) $\phi \in V_0^q(0,T,X')$ e $V^q(\phi) \leq \|U\|^q_{(L^p(0,T,X))'}$.

Devemos mostrar que

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})}{t_v - t_{v-1}} \leq \|U\|^q,$$

para toda partição $\{t_v\}$ de $[0,T]$. Seja $\varepsilon > 0$ e $b_1, \ldots, b_n$ números reais não negativos. Fixemos v. Consideraremos dois casos:

Caso i) $b_v > 0$.

Neste caso, note que $\dfrac{\varepsilon}{nb_v} > 0$ e $\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\phi(t_v)x_v - \phi(t_{v-1})x_v|$. Por definição de supremo, existe $\|\overline{x}_v\| = 1$ tal que

$$|\phi(t_v)\overline{x}_v - \phi(t_{v-1})\overline{x}_v| > \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| - \frac{\varepsilon}{nb_v} = \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|\|\overline{x}_v\| - \frac{\varepsilon}{nb_v} \quad \text{(A.1)}$$

Multiplicando $(A.1)$ por b_v, obtemos

$$|\phi(t_v)b_v\overline{x}_v - \phi(t_{v-1})b_v\overline{x}_v| > \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|\|b_v\overline{x}_v\| - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Tomando $x_v = b_v\overline{x}_v$, obtemos

$$|\phi(t_v)x_v - \phi(t_{v-1})b_v x_v| > \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|\|x_v\| - \frac{\varepsilon}{n}, \|x_v\| = b_v.$$

Caso ii)

Se $b_v = 0$, tomaremos $x_v = 0$ e para os números reais não negativos $b_1, \ldots, b_n$, existe $x_v \in X$ com $\|x_v\| = b_v$ tal que

$$|\phi(t_v)[x_v] - \phi(t_{v-1})[x_v]| > \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|b_v - \frac{\varepsilon}{n}. \quad \text{(A.2)}$$

Por outro lado,

$$\sum_{v=1}^{n} |\phi(t_v)[x_v] - \phi(t_{v-1})[x_v]| = \sum_{v=1}^{n} |U(U_{t_v - x_v}) - U(t_{tv-1,x_v})| \leq$$

$$\leq \|U\| \sum_{v=1}^{n} \|u_{t_v,x_v} - u_{t_{v-1},x_v}\| = \|U\| \sum_{v=1}^{n} \left(\int_0^T \|u_{t_v,x_v}(t) - u_{t_{v-1},x_v}(t)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|U\| \sum_{v=1}^{n} \left(\int_0^T \|x_v \chi_{(t_{v-1},t_v)}(t)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|U\| \left(\sum_{v=1}^{n} \|x_v\|^p (t_v - t_{v-1} \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \text{(A.3)}$$

Por $(A.2)$ e $(A.3)$, segue que

$$\sum_{v=1}^{n} \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| b_v < \varepsilon + \|U\| \left(\sum_{v=1}^{n} b_v^p (t_v - t_{v-1} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, se $b_v = \left(\dfrac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|}{|t_v - t_{v-1}|} \right)^{\frac{q}{p}}$, fazendo $a_v = \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|$ e $\Delta_v = |t_v - t_{v-1}|$, obtemos

$$b_v = \left(\frac{a_v}{\Delta_v} \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Daí, a desigualdade anterior é dada por

$$\sum_{v=1}^{n} a_v b_v = \sum_{v=1}^{n} \frac{a_v^{\frac{q+p}{p}}}{\Delta_v^{\frac{q}{p}}} \leq \|U\| \left(\sum_{v=1}^{n} \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

o que implica

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \leq \|U\| \left(\sum_{v=1}^{n} \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \text{(A.4)}$$

Elevando $(A.4)$ à potência q e observando que $q - \dfrac{q}{p} = 1$, obtemos

$$\frac{\left(\sum_{v=1}^{n} \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \right)^q}{\left(\sum_{v=1}^{n} \frac{a_v^q}{\Delta_v^{q-1}} \right)^{\frac{q}{p}}} \leq \|U\|^q$$

ou seja

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{\|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v - t_{v-1}|^{q-1}} \leq \|U\|^q$$

para toda partição $\{t_v\}$ de $[0,T]$, mostrando que $\phi \in V_0^q(0,T,X')$ com $V^q(\phi) \leq \|U\|^q$. Logo, a função

$$\begin{aligned} S : (L^p(0,T,X))' \to \quad & V_0^q(0,T,X') \\ U \quad \mapsto \quad & \phi \end{aligned}$$

está bem definida e é linear, pois ϕ é linear. Mostraremos agora que S é sobrejetiva. Devemos mostrar que dado $\phi \in V_0^q(0,T,X')$, existe $U \in (L^p(0,T,X))'$ tal que $S(U) = \phi$, ou seja, tal que, se $s \in [0,T]$ então para todo $x \in X$, $U(u_{s,x}) = \phi(x)$.

De fato, se $s = 0$, então $u_{0,x} \equiv 0$, logo $U(u_{0,x}) = 0 = \phi(0)x$, já que $\phi(0) = 0$, pois $\phi \in V_0^q$.

Suponha agora $s > 0$ e definiremos para $x \in X$,

$$u_n(t) = \begin{cases} x, \text{ se } \ 0 \leq t \leq s \\ -n(t-s-\frac{1}{n})x, \text{ se } \ s \leq t \leq s+\frac{1}{n} \\ 0, \text{ se } \ s-\frac{1}{n} \leq t \leq T \end{cases}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}, u_n(t) \in C(0,T,X)$ e

$$\int_0^T \|u_n(t) - u_{s,x}(t)\|^p dt = \int_s^{s+\frac{1}{n}} \left\| -n\left(t-s-\frac{1}{n}\right)x\right\|^p dt \to 0, \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Assim, (u_n) converge em $L^p(0,T,X)$ para $u_{s,x}$ e como $U \in (L^p(0,T,X))'$, temos que

$$U(u_n) \to U(u_{s,x}). \tag{A.5}$$

Notemos que

$$U(u_n) \to \phi(s)x.$$

Com efeito,

$$U(u_n) = \int_0^T u_n(t)d\phi(t) = \int_0^s xd\phi(t) + \int_s^{s+\frac{1}{n}} \left[-n\left(t-s-\frac{1}{n}\right)x\right]d\phi(t) + \int_{s+\frac{1}{n}}^T 0d\phi(t).$$

Observemos que

$$\int_0^s xd\phi(t) = \lim_{|D|\to 0}\sum_{v=1}^n [\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})]x = \lim_{|D|\to 0}[\phi(t_1)x-\phi(t_0)x+\phi(t_2)x,\ldots,\phi(t_{n-1})x-\phi(s)x]$$
$$= \phi(s)x$$

e daí,

$$|U(u_n) - \phi(s)x| = \left|\int_0^{s+\frac{1}{n}} \left[n\left(s+\frac{1}{n}-t\right)x\right]d\phi(t)\right| \leq$$

$$\leq \lim_{|D_k|\to 0}\sum_{v=1}^n \|\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})\|\left\|n\left(s+\frac{1}{n}-\rho_v\right)x\right\| =$$

$$= \|x\| \lim_{|D_k|\to 0}\sum_{v=1}^n \|\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})\|\left\|n\left(s+\frac{1}{n}-\rho_v\right)x\right\|$$

onde $s \leq \rho_v \leq s + \dfrac{1}{n}$, o que implica

$$0 \leq n\left(s + \frac{1}{n} - \rho_v\right) \leq 1.$$

e daí

$$\left|\int_0^{s+\frac{1}{n}} \left[n\left(s + \frac{1}{n} - t\right)x\right] d\phi(t)\right| \leq \lim_{|D_k|\to 0} \sum_{v=1}^{n} \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \leq$$

$$\leq \|x\| \left\{ \text{ variação de } \phi \text{ sobre } \left(s + \frac{1}{n}\right)\right\} \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} |U(u_n) - \phi(s)x| = 0. \tag{A.6}$$

Segue de $(A.5)$ e $(A.6)$ e pela unicidade do limite que $U(u_{s,x}) = \phi(s)x$, mostrando a sobrejetividade da aplicação S.

Por fim, provaremos que S preserva norma, ou seja, devemos mostrar que

$$\|S(U)\|_{V_0^q(0,T,X)} = \|U\|_{L^p(0,T,X)'}.$$

Notemos que

$$\|S(U)\|_{V_0^q(0,T,X)} = \|\phi\|_{V_0^q(0,T,X)} = \|\phi(0)\|_X' + \{V_0^q(\phi)\} \leq \|U\|_{L^p(0,T,X)'} \tag{A.7}$$

Então, resta-nos mostrar que

$$\|U\|_{L^p(0,T,X)'} \leq \|S(U)\|_{V_0^q(0,T,X)} \tag{A.8}$$

Com efeito, seja $u_n : [0,T] \to X$ uma função simples que toma valor x_v para o intervalo $t_{v-1} \leq t \leq t_v$. Mas

$$u_n(t) = \sum_{v=1}^{n} [u_{t_v,x_v} - u_{t_{v-1},x_v}] = \sum_{v=1}^{n} [\chi_{t_v-1.t_v}]x_v = x_j,$$

com $t \in (t_{j-1}, t_j]$. Assim,

$$u_n(t) = \sum_{v=1}^{n} [u_{t_v,x_v} - u_{t_{v-1},x_v}] \Rightarrow \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = \sum_{v=1}^{n} \int_{t_{v-1}}^{t_v} \|x_v\|^p dt = \sum_{v=1}^{n} \|x_v\|^p |t_v - t_{v-1}|$$

e

$$|U(u_n)| = \left|\sum_{v=1}^{n} U(u_{t_v,x_v}) - U(u_{t_{v-1},x_v})\right| = \left|\sum_{v=1}^{n} \phi(t_v)[x_v] - \phi(t_{v-1})[x_v]\right| \leq \sum_{v=1}^{n} \|\phi(t_v) - \phi(t_{v-1})\| \|x_v\|.$$

Pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$|U(u_n)| \leq \left(\sum_{v=1}^{n} \frac{\|\phi(t_v)-\phi(t_{v-1})\|^q}{|t_v-t_{v-1}|^q-1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{v=1}^{n} \|x_v\|^p |t_v - t_{v-1}|\right)^{\frac{1}{p}} \leq \{V^q(\phi)^{\frac{1}{q}}\} \|u_n\|_{L^p(0,T,X)}.$$

Logo, se $u \in L^p(0,T,X)$ e u_n é escolhida tal que $u_n \to u$ na norma de $L^p(0,T,X)$, teremos que

$$|U(u)| \leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(0,T,X)}$$

e daí

$$\|U\|_{(L^p(0,T,X))'} \leq \{V^q(\phi)\}^{\frac{1}{p}} = \|S(U)\|_{V_0^q(0,T,X')}.$$

Concluímos então que a aplicação

$$\begin{aligned} S : (L^p(0,T,X))' &\to V_0^q(0,T,X) \\ U &\mapsto \phi \end{aligned}$$

é linear, sobrejetiva e preserva norma, o que implica $(L^p(0,T,X))'$ é equivalente a $V_0^q(0,T,X)$ sempre que X é um espaço de Banach e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1 < p \leq \infty$.

A.4 O espaço dual de L^p(0,T,X)

Nesta seção, vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned} L : V_0^p(0,T,Y) &\to L^p(0,T,Y) \\ u &\to u' \end{aligned}$$

está bem definida, preserva norma, é linear e sobrejetiva. Vamos demostrar em alguns casos.

1) L está bem definida.

De fato, seja $u \in V_0^p(0,T,Y)$. Mostraremos que $t \mapsto u'(t)$ é fortemente mensurável e $t \mapsto \|u'(t)\|_Y \in L^p(0,T,\mathbb{R})$.

Consideremos uma sequência de conjuntos finitos de pontos no intervalo $[0,T]$, o m-ésimo conjunto sendo $t_{m,1}, t_{m,2}, \ldots, t_{m,n}$ e tais que

$$\lim_{m\to\infty} \max_v (t_{m,v+1} - t_{m,v}) = 0$$

[como por exemplo se dividimos em 2^m partes iguais]. Definimos

$$u_m(t) = \frac{u(t_{m,v+1}) - u(t_{m,v})}{t_{m,v+1} - t_{m,v}},$$

em cada intervalo $t_{m,v} \leq t < t_{m,v+1}$. Se t não é um dos pontos $t_{m,v}$, com $t_{m,v} < t < t_{m,v+1}$, podemos escrever

$$u_m(t) = \frac{u(t_{m,v+1}) - u(t)}{t_{m,v+1} - t} \frac{t_{m,v+1} - t}{t_{m,v+1} - t_{m,v}} + \frac{u(t_{m,v}) - u(t)}{t_{m,v} - t} \frac{t - t_{m,v}}{t_{m,v+1} - t_{m,v}} =$$

$$= \{u'(t) + o_1(t)\} \frac{u(t_{m,v+1}) - u(t)}{t_{m,v+1} - t} + \{u'(t) + o_2(t)\} \frac{t_{m,v+1} - t}{t_{m,v+1} - t_{m,v}} = u'(t) + o_3(t)$$

onde $o_3(t) \leq \|o_1(t)\| + \|o_2(t)\|$, e $\|o_1(t)\|, \|o_2(t)\|$ tendem a zero quando $t_{m,v+1} - t_{m,v} \to 0$. Assim,

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m(t) - u'(t)\| = 0 \text{ quase sempre}$$

isto é, existe uma sequência de funções simples convergindo fortemente para u' quase sempre, logo u' é fortemente mensurável. Para cada m, $u_m \in L^p(0, T, X)$, logo

$$t \mapsto \|u_m(t)\| \in L^p(0, T, \mathbb{R})$$

e

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|^p dt = \sum_{P_m} \frac{\|u(t_{m,v+1} - u(t_{m,v}))\|^p}{|t_{m,v+1} - t_{m,v}|^{p-1}} \leq \sup_P \sum_{v=1}^{n_P} \frac{\|u(t_v) - u(t_{v-1})\|^p}{|t_v - t_{v-1}|^{p-1}} = V^p(u).$$

Pelo Lema $(B.2.5)$, segue que $t \mapsto \|u'(t)\|$ é integrável e $\displaystyle\int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq V^p(u)$, isto é, $\|u'\|_{L^p(0,T,Y)} \leq V^p(u)$.

Portanto, L está bem definida e

$$\|L(u)\|_{L^p(0,T,Y)} = \|u'\|_{L^p(0,T,Y)} \leq \|u\|_{V^p(0,T,Y)}. \tag{A.9}$$

2) L preserva norma

Com efeito, por $(A.9)$, é suficiente provar que

$$\|u\|_{V^p(0,T,Y)} \leq \|u'\|_{L^p(0,T,Y)}.$$

Para provarmos, iniciaremos definindo a função vetorial

$$\begin{aligned} v : [0, T] &\to Y \\ t &\mapsto u(0) + \int_0^t u'(s) ds \end{aligned}$$

e mostrando que $v(t) = u(t)$, $\forall t \in [0, T]$, para $u' \in L^p(0, T; Y)$

Seja $f \in Y'$ qualquer. Então: é quase sempre derivável, isto é, existe $\frac{d}{dt}$ quase sempre. De fato, para os $t's$ tais que existe $u'(t)$, temos

$$\lim_{h\to 0} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle = \left\langle f, \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle = \langle f, u'(t) \rangle$$

isto é

$$\frac{d}{dt}\langle f, u(t)\rangle = \langle f, \frac{d}{dt}u(t)\rangle.$$

Notemos que $t \mapsto \langle f, u(t)\rangle$ é absolutamente contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$ e se $I_n = (\alpha_n, \beta_n)$ é uma sequência de intervalos dois a dois disjuntos, definindo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|f\|(V^p(u))^{\frac{1}{p}}}$, obtemos

$$\sum |\langle f, u(\beta_n)\rangle - \langle f, u(\alpha_n)\rangle| \leq \|f\| \sum \|u(\beta_n) - u(\alpha_n)\| \leq \|f\| \left(\sum \frac{\|u(\beta_n) - u(\alpha_n)\|}{|\beta_n - \alpha_n|} \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Daí,

$$\langle f, u(t)\rangle = \langle f, u(0)\rangle + \int_0^t \frac{d}{dt}\langle f, u(s)\rangle ds = \langle f, u(0)\rangle + \int_0^t \left\langle f, \frac{d}{dt}u(s)\right\rangle ds = \langle f, v(t)\rangle.$$

Assim, $\forall f \in Y'$ e $\forall t \in [0, T]$, temos $\langle f, u(t)\rangle = \langle f, v(t)\rangle$ e, portanto, $u = v$, isto é

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)ds = \int_0^t u'(s)ds.$$

Seja agora P uma partição qualquer do intervalo $[0, T]$. Então,

$$\|u(t_{v+1}) - u(t_v)\| = \left\| \int_0^{t_v+1} u'(s)ds - \int_0^{t_v} u'(s)ds \right\| \leq \int_{t_v}^{t_v+1} \|u'(s)\|ds.$$

Novamente pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|u(t_{v+1}) - u(t_v)\| \leq \left(\int_{t_v}^{t_v+1} \|u'(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{t_v+1} 1ds \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Logo,

$$\frac{\|u(t_{v+1}) - u(t_v)\|}{|t_{v+1} - t_v|^{\frac{p-1}{p}}} \leq \left(\int_{t_v}^{t_v+1} \|u'(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

Daí, para toda partição P de $[0, T]$, obtemos

$$\sum_{v=1}^{n_P} \frac{\|u(t_{v+1} - u(t_v))\|^p}{|t_{v+1} - t_v|^p} \leq \int_0^T \|u'(s)\|^p ds,$$

donde

$$\|u\|_{V^q(0,T,Y)} = \{V^p(u)\}^{\frac{1}{p}} \leq \|u'\|_{L^p(0,T,Y)} = \|L(u)\|_{L^p(0,T,Y)}. \tag{A.10}$$

Portanto, de $(A.9)$ e $(A.10)$, temos $\|u'\|_{L^p(0,T,Y)} = \|u\|_{V^q(0,T,Y)}$.

3) L é linear.

De fato, sejam $u, v \in V_0^q(0, T, Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim

$$L(u + v) = (u + v)' = u' + v' = L(u) + L(v) \text{ e } L(\alpha u) = (\alpha u)' = \alpha u' = \alpha L(u)$$

4) L é sobrejetiva.

Seja $u \in L^p(0,T,Y)$. Devemos mostrar que existe $v \in V^p(0,T,Y)$ tal que $L(v) = v' = u$. Definimos

$$r(t) = \int_0^T u(s)ds, 0 \leq t \leq T.$$

Como $u \in L^p(0,T,Y)$ temos, por definição, que existe uma sequência (φ_n) de funções simples tal que (φ_n) converge fortemente para u quase sempre e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|\varphi_n - u(s)\|_Y ds = 0.$$

Mas,

$$\left\| \frac{1}{h} |r(t+h) - r(t)| - u(t) \right\| = \left\| \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} u(s)ds - \int_0^t u(s)ds \right] - u(t) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} (u(s) - \varphi_n(s))ds - \int_0^t (u(s) - \varphi_n(s))ds \right] \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{1}{h} \int_0^{t+h} \varphi_n(s)ds - \int_0^t \varphi_n(s)ds \right] - \varphi_n(t) \right\| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|u(s) - \varphi_n(s)\| ds \right| + \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)\| ds \right| + \|\varphi_n(t) - u(t)\|.$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $(u - \varphi_n) \in L^p(0,T,Y)$, logo, a função

$$s \mapsto \|u(s) - \varphi_n(s)\| \in L^p(0,T,\mathbb{R}),$$

e daí

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|u(s) - \varphi_n(s)\| \right\| = \|u(t) - \varphi_n(t)\|$$

e

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)\| \right\| = 0,$$

quase sempre em $[0, S]$. Agora

$$\left\| \frac{1}{h} \left[r(t+h) - r(t) \right] - u(t) \right\| \leq 2\|u(t) - \varphi_n(t)\| + o(h)$$

onde $o(h) \to 0$ e como o membro esquerdo não depende de n e pelo fato de $\varphi_n \to u$ fortemente, temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que se } n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|u'(t) - \varphi_n(t)\| < \varepsilon$$

para quase todo t. Assim, tomando o limite quando $h \to 0$, resulta que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\left[v(t+h)-v(t)\right]-u(t)\right\| = 0,$$

para quase todo $t \in [0,T]$ e, pela continuidade da norma, temos que existe $r'(t) = u(t)$ para quase todo $t \in [0,T]$.

Seja agora P uma partição qualquer do intervalo $[0,T]$. Então, pela desigualdade de Hölder

$$\|r(t_{v+1}) - u(t_v)\| = \left\|\int_{t_v}^{t_{v+1}} u(s)ds\right\| \leq \left(\int_{t_v}^{t_{v+1}} \|u(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t_v}^{t_{v+1}} 1ds\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Logo,

$$\frac{\|r(t_{v+1}) - r(t_v)\|}{|t_{v+1}-t_v|^{\frac{p-1}{p}}} \leq \left(\int_{t_v}^{t_{v+1}} \|u(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim,

$$\sum_{v=1}^{n_P} \frac{\|r(t_{v+1}) - r(t_v)\|^p}{|t_{v+1}-t_v|^{p-1}} \leq \int_0^T \|u(s)\|^p ds,$$

e como P é qualquer partição de $[0,T]$ temos,

$$\sup \sum_{v=1}^{n_P} \frac{\|r(t_{v+1}) - r(t_v)\|^p}{|t_{v+1}-t_v|^{p-1}} \leq \|u\|^p_{L^p(0,T,Y)}.$$

Portanto, $r \in V_0^p(0,T,Y)$, pois $v(0) = 0$ e $L(v) = u$. Por $(1), (2), (3), (4)$, obtemos que $V_0^p(0,T,Y)$ é equivalente a $L^p(0,T,Y)$.

Tomando $Y = X'$ e $p = q$, temos $V_0^q(0,T,X') \approx L^q(0,T,X')$. Mas foi provado anteriormente que $(L^p(0,T,X))' \approx V_0^q(0,T,X')$, e dessa forma podemos concluir que

$$(L^p(0,T,X))' = L^q(0,T,X').$$

Observação A.4.1 *A condição imposta ao dual de que toda função de variação limitada possui uma derivada quase sempre é satisfeita pelos espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$.*

Observação A.4.2 *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Então, a função*

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle : L^2(0,T,H) \times L^2(0,T,H) &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_H dt \end{aligned}$$

define um produto interno em $L^2(0,T;H)$ que nos fornece a norma

$$\|u\|^2_{L^2(0,T,H)} = \int_0^T \|u(t)\|^2_H dt.$$

Assim, $L^2(0,T;H)$ é um espaço de Hilbert, logo reflexivo. Desde que H é reflexivo, H satisfaz a condição de que toda função de variação limitada possui derivada quase sempre. Daí, teremos por exemplo para os espaços de Sobolev $H_0^m(\Omega)$, onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ que

$$(L^p(0,T;H_0^m(\Omega)))' = L^q(0,T;H^{-m}(\Omega))$$

Seja $V^\infty(0,T;X)$ o conjunto de todas as funções $f:[0,T]\to X$ Lipschitiziana, ou seja, $f\in V^\infty(0,T,X)$ se, e somente se,

$$L(f)=\sup_{x_1,x_2}\frac{\|f(x_1)-f(x_2)\|}{|x_1-x_2|}<\infty.$$

Observação A.4.3 *O conjunto $V^\infty(0,T;X)$ é um espaço vetorial munido da norma*

$$\|f\|_{V^\infty(0,T,X)}=\|f(0)\|+L(f).$$

Observação A.4.4 *No caso $p=1$, mostra-se de forma análoga ao feito anteriormente que $L^1(0,T;X)=L^\infty(0,T;X)$.*

Agora, vamos enunciar e demonstrar um resultado que foi usado de forma siginificativa neste trabalho.

Proposição A.4.1 *Sejam X' o dual de um espaço de Banach reflexivo X e $1\le p\le\infty$. Se (f_k) é uma sequência limitada de $L^p_{loc}(0,\infty;X')$, então existe uma subsequência de (f_k) que converge fraco para uma função de $L^p_{loc}(0,\infty;X')$(fraca estrela no caso $p=\infty$).*

Demonstração: Por hipótese, (f_k) é uma sequência limitada de $L^p(0,T;X')$ para todo $T>0$ e $T\in\mathbb{R}$. Em particular, (f_k) é uma sequência limitada de $L^p(0,1;X')$. Pela compacidade fraca de $L^p(0,1;X')$(fraca estrela no caso $p=\infty$), temos que existe uma subsequência (f_k^1) tais que

i) $f_k^1\rightharpoonup f^1$(fraca estrela no caso $p=\infty$)

Ora, (f_k^1) é limitada em $L^p(0,1,X')$, então seguindo raciocínio anterior, existe uma subsequência (f_k^2) de (f_k^1) e uma função f^2 tais que

ii)$f_k^2\rightharpoonup f^2$ (fraca estrela no caso $p=\infty$).

De forma indutiva, define-se uma subsequência (f_k^T) de (f_k) e uma função f^T tais que

iii)$f_k^T\rightharpoonup f^T$ (fraca estrela no caso $p=\infty$)

Por unicidade do limite fraco (fraco estrela no caso $p=\infty$), temos

$$f_k^T=f_k^{T-1},\forall t\in[0,T-1] \tag{A.11}$$

Seja a sequência diagonal (f_k^k). Dado $T \in \mathbb{R}$, observamos que

$$(f_k^k) \text{ é uma subsequência de } (f_k^T). \tag{A.12}$$

Assim, de $(A.12)$ podemos concluir que

$$f_k^k \rightharpoonup f^T (\text{ fraca estrela no caso } p = \infty) \tag{A.13}$$

Por $(A.11)$, podemos definir a função $f(t) = f^T$, se $t \in [0, T]$. Logo, de $(A.13)$ concluímos que

$$f_k^k \rightharpoonup f \text{ em } L^p_{loc}(0, \infty, X')(\text{ fraco estrela no caso } p = \infty).$$

■

Apêndice B

Resultados utilizados

No que segue, apresentaremos algumas definições e resultados que usamos na dissertação. Alguns destes resultados serão demonstrados.

B.1 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o Teorema de Carathéodory que será utilizado no Capítulo 2. O teorema fornece a existência de solução para um problema de Cauchy em um intervalo $[0, t_m]$, para cada $m \in \mathbb{N}$.
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t, x), onde $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{B.1}$$

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do teorema de Caratheódory sobre Ω se:

(i) f(t,x) é mensurável em t para cada x fixo

(ii) f(t,x) é contínua em x para cada t fixo

(iii) Para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \forall (t, x) \in K$$

Teorema B.1.1 (Teorema de Caracthéodory) *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* Ω. *Então, existe uma solução* $x(t)$ *de* $(B.1)$ *sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leq \beta$, *onde* $\beta > 0$ *é uma constante positiva.*

Observação B.1.1 *A demonstração desse teorema será feita quando* f *estiver definida em* $R : |t - t_0| \leq a$ *em* $|x - \xi| \leq b$.

Demonstração: A prova do teorema será obtida por limites de soluções aproximadas. Vamos construir a solução para $t \geq t_0$, e a construção no caso de $t \leq t_0$ é análoga. Defina $M(t)$ da seguinte forma:

$$M(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t \leq t_0 \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} m(s)ds, \text{ se } t \in [t_0, t_0 + a]. \end{cases} \tag{B.2}$$

Note que M é contínua, não-decrescente e $M(t_0) = 0$. Por continuidade de M existe $\beta > 0$ tal que $\big(t, x_0 \pm M(t)\big) \in R$, para algum intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta \leq t + a$, onde β é uma constante positiva. Escolhendo β para que isto seja verdade, definiremos a sequência de soluções aproximadas como:

$$u_j(t) = \begin{cases} \xi, \text{ se } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta}{j} \\ \xi + \displaystyle\int_{t_0}^{t - \frac{\beta}{j}} f(s, u_j(s))ds, \text{ se } t_0 + \frac{\beta}{j} < t < t_0 + \beta. \end{cases} \tag{B.3}$$

Temos que u_1 está definida em $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta$, para qualquer constante ξ. Fixemos $j \in \mathbb{N}$ qualquer. Daí, a primeira fórmula de $(B.3)$ define u_j no intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \dfrac{\beta}{j}$. Sendo $(t, \xi) \in R$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \dfrac{\beta}{j}$, a segunda fórmula de $(B.3)$ define u_j como uma função contínua no intervalo $t_0 + \dfrac{\beta}{j} \leq t \leq t_0 + \dfrac{2\beta}{j}$. Por outro lado, desde que $|f(t, x)| \leq m_K$ e pela definição de M, obtemos

$$|u_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right). \tag{B.4}$$

Suponhamos que u_j está definida para $t_0 \leq t \leq t_0 + \dfrac{k\beta}{j}$ para $1 < k < j$. Então, a segunda fórmula de $(B.3)$ define u_j para o intervalo $t_0 + \dfrac{k\beta}{j} < t \leq t_0 + \dfrac{(k+1)\beta}{j}$, sendo apenas necessário o integrando mensurável no intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \dfrac{k\beta}{j}$. Temos também que em $t_0 + \dfrac{k\beta}{j} < t \leq t_0 + \dfrac{(k+1)\beta}{j}$, a função u_j satisfaz a desigualdade $(B.4)$, devido a $|f(t,x)| \leq m_K$ e pela definição de M. Portanto, todas as u_j são definidas como funções contínuas em $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta$, satisfazendo

$$u_j(t) = \xi \text{ em } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta}{j}$$
$$|u_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right) \text{ em } t_0 + \frac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \beta \tag{B.5}$$

Seja $\mathcal{N} = \left\{u_j : j \geq j_0\right\}$. Mostraremos que $\mathcal{N}$ satisfaz as hipóteses do teorema de Ascoli-Arzelá. Sendo M contínua no intervalo $[t_0, t_0+\beta]$, segue que M é uniformemente contínua. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|t_1 - t_2| < \delta$

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq \left|M\left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - M\left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right)\right|.$$

Pela desigualdade triangular

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|.$$

Tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$, obtemos

$$|u_j(t_1) - u_j(t_2)| \leq \epsilon$$

mostrando que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente equicontínua em $[t_0, t_0 + \beta]$. Por outro lado, dado $t \in I_a$, tem-se que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, pois m é integrável.
Então, pelo teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma subsequência de $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_j \to u \text{ uniformemente em } [t_0, t_0 + \beta]$$

Como f é contínua em x, fixado t, temos que $f(t, u_j(t)) \to f(t, u(t))$ quando $j \to \infty$. Além disso, $|f(t, u_j(t))| \leq m$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{j\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u_j(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \forall t \in [t_0, t_0 + \beta].$$

Então, vamos escrever

$$u_j(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_j(s))ds - \int_{t-\frac{\beta}{j}}^{t} f(s, u_j(s))ds.$$

Passando ao limite quando $j \to \infty$, a última integral se anula e assim

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

mostrando o resultado. ■

Teorema B.1.2 (Teorema do prolongamento) *Seja* $\Omega = \big[0,T\big] \times B$ *com* $T > 0$, $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq b\big\}$, *onde* $b > 0$ *é uma constante positiva e* $\|\cdot\|$ *a norma euclidiana do* $\mathbb{R}^n$. *Suponha que* f *é uma função que satisfaz as duas primeiras condições do teorema de Carathéodory e que exista uma função* $m(t)$ *integrável tal que*

$$|f(t,x)| \leq m(t), m(t) \in L(0,T), \text{ para todo } (x,t) \in \Omega.$$

Seja $x(t)$ *uma solução de* $(B.1)$ *e suponha que* $x(t)$ *está definida em* I, *satisfazendo* $|x(t)| \leq M$, M *independente de* I *e* $M < b$ *para todo* $t \in I$. *Então,* $x(t)$ *pode ser prolongada à todo intervalo* $[0,T]$

Demonstração: Ver Coddington-Levinson [5]. ∎

Teorema B.1.3 (Aubin-Lions) *Sejam* X, B *e* Y *espaços de Banach com* $X \overset{comp}{\hookrightarrow} B \overset{cont}{\hookrightarrow} Y$, X *e* Y *reflexivos. Seja* $1 < p_0, p_1 < \infty$, *e* W *o espaço*

$$W = \{u \in L^{P_0}(0,T;B_0); u' \in L_1^p(0,T;B_1)\}$$

munido da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$. *Então,* W *é um espaço de Banach, e a imersão* W *em* $L^{p_0}(0,T;B)$ *é compacta.*

Demonstração: Para prova ver Lions [12] ou Temam [22]. ∎

Observação B.1.2 *Uma consequência do Teorema de Aubin-Lions é que se* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada em* $L^2(0,T;B_0)$ *tal que* $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada em* $L^p(0,T;B_1)$ *para algum* $p \geq 1$. *Então* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* W, *isto é, existe uma subsequência de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge forte em* $L^2(0,T;B)$.

Teorema B.1.4 (Strauss) *Seja* Ω *um aberto com medida de Lebesgue finita,* X *e* Y *espaços de Banach. Seja* (u_n) *uma sequência de funções fortemente mensuráveis de* Ω *em* X. *Seja* (F_n) *uma sequência de funções de* $\Omega \times X$ *em* Y *tal que*

(i) $F_n(x, u_n(x))$ *é uniformemente limitada de* Y *em* $\Omega \times B$, *para qualquer conjunto* B *limitado de* X;

(ii) $F_n(x, u_n(x))$ *é fortemente mensurável e*

$$\int_\Omega |u_n(x)|_X |F_n(x, u_n(x))|_Y dx \leq C \leq \infty;$$

(iii) $|F_n(x, u_n(x)) - v(x)|_Y \to 0$ *quase sempre em* Ω;

Então, $v \in L^1(\Omega; Y)$ *e* $\displaystyle\int_\Omega |F_n(x, u_n(x)) - v(x)|_Y dx \to 0.$

Demonstração: Ver Strauss [24]. ■

A seguir enunciaremos o teorema de Strauss para funções de uma variável, pois este teorema que usaremos nesta dissertação.

Teorema B.1.5 (Strauss) *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *e* (u_n) *uma sequência de funções reais mensuráveis definidas em* Ω*. Vamos considerar as sequências de funções reais* (F_n) *e* (G_n) *tal que* $F_n \circ u_n$ *e* $G_n \circ u_n$ *mensuráveis sobre* Ω *para* $n \in \mathbb{N}$*. Suponhamos que:*
(i) $F_n \circ u_n$ *converge para* v *quase sempre em* Ω*;*
(ii) $\displaystyle\int_\Omega |F_n(u_n(x))G_n(u_n(x))|dx < C$*, onde* C *é uma constante independente de* $n \in \mathbb{N}$*;*
(iii) $G_n \to \infty$ *quando* $F_n \to \infty$*.*

Então,
(iv) A função $v \in L^1(\Omega)$*;*
(v) $F_n \circ u_n$ *converge para* v *forte em* $L^1(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15]. ■

Observação B.1.3 *A notação* $F_n \circ u_n$ *representa a função* $(F_n \circ u_n)(x) = F_n(u_n(x))$*,* $\forall x \in \Omega$*. A hipótese (iii) equivale a dizer que para cada* $M > 0$ *existe* $N > 0$ *independente de* $n \in \mathbb{N}$*, tal que se*

$$|F_n(s)| \geq M \text{ então } |G_n(s)| \geq N, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Observação B.1.4 *Suponhamos que* $G_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é definida por* $G_n(s) = s$*,* $\forall s \in \mathbb{R}$ *e* $\forall n \in \mathbb{N}$*. As hipóteses do Teorema B.1.5 modificam e são:*

(i) $F_n \circ u_n$ *converge para* v *quase sempre em* Ω*;*
(ii) $\displaystyle\int_\Omega |F_n(u_n(x))u_n(x)|dx < C$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*;*
(iii) $s \to \infty$ *quando* $F_n(s) \to \infty$*.*
Então, segue (iv) e (v) do teorema B.1.5.

Corolário B.1.6 (Lema de Lions) *Seja* (u_n) *uma sequência de funções mensuráveis, limitada em* $L^q(\Omega)$*,* $1 < q < \infty$ *e converge para* u *quase sempre em* Ω*. Então,*
(i) $u_n \to u$ *(forte) em* $L^p(\Omega)$ *para todo* $1 \leq p < \infty$*;*
(ii) $u_n \rightharpoonup u$ *(fraco) em* $L^q(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [15] ou Lions [12]. ■

Lema B.1.1 (Sequência de Strauss) *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função real contínua, com* $sF(s) \geq 0$*,* $\forall s \in \mathbb{R}$*. Então, existe uma sequência* (F_n) *satisfazendo as condições:*

(i) $sF_n(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$ *e* $\forall n$;

(ii) F_n *é lipschtiziana para cada* n;

(iii) F_n *converge uniformemente em limitados de* $\mathbb{R}$.

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$F_k(s) = \begin{cases} A_1 s, \text{ se } 0 \leq s \leq \frac{1}{n}; \\ k\bigg(G(s+\frac{1}{n}) - G(s)\bigg), \text{ se } \frac{1}{n} \leq s \leq n; \\ A_2, \text{ se } s \geq k; \\ A_3 s, \text{ se } -\frac{1}{n} \leq s \leq 0; \\ -n\bigg(G(s+\frac{1}{n}) - G(s)\bigg), \text{ se } -n \leq s \leq -\frac{1}{n}; \\ A_4, \text{ se } s \leq -n. \end{cases}$$

onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s F(\xi)d\xi$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, A_1, A_2, A_3 e A_4 são escolhidas de forma a tornar F_n contínua. Então, considere

$$A_1 = n^2\left(G\left(\frac{2}{n}\right) - G\frac{1}{n}\right);$$

$$A_2 = n^2\left(G(n+\frac{1}{n}) - G(n)\right);$$

$$A_3 = -n^2\left(G\left(-\frac{2}{n}\right) - G - \frac{1}{n}\right);$$

$$A_4 = -n\left(G\left(n - \frac{1}{n}\right) - G(n)\right).$$

A demostração será feita em etapas.

Etapa 1

Vamos mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $sF_n(s) \geq 0$

(i) se $0 \leq s \leq \dfrac{1}{n}$, temos $F_n(s) = \displaystyle\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{1}{n}} F(\xi)d\xi \geq 0$

(ii) $\dfrac{1}{n} \leq s \leq n$, segue como em (i)

(iii) se $s \geq n$, segue analogamente como em (i)

(iv) se $-\dfrac{1}{n} \leq s \leq 0$, temos $F_n(s) = -n^2\bigg(-\displaystyle\int_{-\frac{2}{n}}^{0} F(\xi)d\xi + \int_{\frac{-1}{n}}^{0} F(\xi)d\xi\bigg) =$

$$= -n^2\int_{-\frac{2}{n}}^{-\frac{1}{n}} -F(\xi)d\xi \leq 0$$

Observação B.1.5 *A prova dos itens (v), (vi), (vii) segue como em (iv), provando a Etapa 1*

Etapa2

Provaremos que para cada n, F_n é uma função Lipschitiziana. Tomando $a_1 = -n, a_2 = -\dfrac{1}{n}, a_3 = 0, a_4 = -\dfrac{1}{n}$ e $a_5 = n$ e consideremos os intervalos $I_1 = (-\infty, a_1]$, $I_2 = [a_1, a_2]$, $I_3 = [a_2, a_3]$, $I_4 = [a_3.a_4]$, $I_5 = [a_4, a_5]$ e $I_6 = [a_5, \infty)$. Observe que (F_n) são funções diferenciáveis em cada I_j, $j = 1, \ldots, 6$ e pelo teorema de Valor Médio,

$$|F_n(s) - F_n(t)| = F_n'(\xi)|t - s|, \text{ com } \xi \in [t, s].$$

Observe que

(i) se $s \in I_1$, temos $|F_n(s) - F_m(t)| = 0$, $\forall s, t \in I_1$.

(ii) se $s \in I_2$, temos $F_k'(s) = -n\bigg(- F(s) + F(s - \frac{1}{n})\bigg) \leq nC, \forall s, t \in I_2,$

onde $C = \max |F(s)| < \infty$. Seguindo este raciocínio para $I_j, j = 3, 4, 5, 6$, concluímos que

$$|F_n(s) - F_m(t)| \leq M|s - t|, \forall s, t \in \mathbb{R},$$

onde M é as várias constantes que aparecem. Portanto, F_k é Lipschitiziana.

Etapa3

Mostraremos que (F_n) converge uniformemente para F em limitados da reta. Seja I um intervalo limitado e $b \in \mathbb{R}$ tal que $I \subset [-b, b]$. A princípio, provaremos que (F_n) converge uniformemente para F no intervalo $[0, b]$. De forma análoga, prova-se que (F_n) converge uniformemente para F em $[-b, 0]$.

Afirmação: Defina $\varphi_n(s) = n\bigg[G\left(s + \frac{1}{k}\right) - G(s)\bigg] = n \displaystyle\int_s^{s+\frac{1}{n}} F(\xi)d\xi$. Então, $\varphi_n(s)$ converge uniformemente.

Notemos que F é contínua no compacto $[0, b]$, logo F é uniformemente contínua. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $|t - s| < \frac{1}{k}$ então

$$|F(s) - F(t)| < \varepsilon.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [t, s]$ tal que

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}} F(\xi)d\xi = \left(t + \frac{1}{n} - t\right) F(c)$$

implicando que

$$F(c) = n\int_t^{t+\frac{1}{n}} F(\xi)d\xi.$$

Portanto,

$$|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| = |F(s) - F(t)| = \left| n\int_t^{t+\frac{1}{n}} F(s)d\xi - n\int_t^{t+\frac{1}{n}} F(s)d\xi \right| \leq$$

$$\leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} |F(s) - F(t)| < \frac{1}{n}\varepsilon < \varepsilon,$$

mostrando a afirmação.

Por fim, provaremos que $F_k \to F$ uniformemente em $[0, b]$, para tanto, usaremos a afirmação acima. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k_1 > b$. Como F é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|F(s)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, for all $s \in [0, \delta]$. Seja agora $k_2 > k_1$ e $\frac{1}{k_2} < \delta$. Pela afirmação, existe $k_3 \in \mathbb{N}$ com $k_3 > k_2$ tal que

$$|\varphi_k(s) - F(s)| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall s \in [0, b], \forall k > k_3.$$

Observemos que

$$\varphi_k\left(\frac{1}{k}\right) = F_k\left(\frac{1}{k}\right) \text{ e } \varphi_k(s) = F_k(s), \text{ se } \frac{1}{k} \leq s \leq k.$$

Assim, para $k > k_3$, temos

(i) $\dfrac{1}{k} \leq s \leq k \Rightarrow |F_k(s) - F(s)| = |\varphi_k(s) - F(s)| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$

(ii) $0 \leq s \leq \dfrac{1}{k} < \delta \Rightarrow |F_k(s) - F(s)| \leq |F_k(s)| + |F(s)| \leq |F(\dfrac{1}{k})| + \dfrac{\varepsilon}{4} = |\varphi_k(\dfrac{1}{k})| + \dfrac{\varepsilon}{4}$ $\dfrac{\varepsilon}{4} + |F_k(s)| + \dfrac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$, ($F_k$ é crescente em $(0, \frac{1}{k})$),

o que mostra que (F_k) converge uniformemente para F em limitados da reta. ∎

Definição B.1.1 *Seja I um intervalo. Dizemos que uma função u é absolutamente contínua quando $u \in W^{1,1}(I)$.*

Lema B.1.2 (Desigualdade de Gronwall) *Seja $z(t)$ uma função real, absolutamente contínua em $[0, a)$ tal que para todo $t \in [0, a[$ tem-se*

$$z(t) \leq C + \int_0^t z(s)ds, \tag{B.6}$$

onde C é uma constante não negativa. Então,

$$z(t) \leq Ce^t, \forall t \in [0, a[.$$

Consequêntemente, $z(t)$ é limitada.

Demonstração: Considere

$$w(s) = \int_0^t z(\xi)d\xi.$$

Daí, obtemos que $w'(s) = z(s)$. Observe que por $(B.6)$ temos

$$w'(s) \leq C + w(s).$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por e^{-s}, obtemos

$$e^{-s}w'(s) \leq e^{-s}C + w(s)e^{-s},$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-s}w(s)\right] \leq Ce^{-s}.$$

Integrando de 0 a t, obtém-se

$$e^{-t}w(t) \leq Ce^{-s}\Big|_0^t.$$

Assim,

$$w(t) \leq Ce^t - C. \tag{B.7}$$

Portanto, de $(B.6)$ e $(B.7)$, resulta que

$$z(t) \leq Ce^t.$$

■

B.2 Resultados Auxiliares

No que segue, enunciaremos sem demonstra-los resultados importantes que foram utilizados neste trabalho. Consideramos Ω como um subconjunto aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$.

Teorema B.2.1 *Suponha que X seja um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X. Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge na topologia fraca.*

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema B.2.2 *Seja X um espaço de Banach separável e seja (f_n) uma sequência limitada em X'. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) que converge na topologia $fraca^*$.*

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Lema B.2.1 (Desigualdade de Young) *Sejam* $p, q > 1$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \forall a \geq 0 \text{ e } \forall b \geq 0.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Lema B.2.2 (Imersões de Sobolev) *Seja* Ω *um aberto regular de* $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então, para qualquer* $j \in \mathbb{N}$, *as imersões abaixo são contínuas.*
i) *Se* $m < \frac{n}{p}$, *então* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), q \in [1, \frac{np}{n-mp})$;
ii) *Se* $m = \frac{n}{p}$, *então* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), q \in [1, \infty)$;
iii) *Se* $m > \frac{n}{p}$, *então* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$,
onde $C^j(\overline{\Omega})$ *é o conjunto das funções contínuas limitadas.*

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Teorema B.2.3 (Rellich-Kondrachov) *Suponha que* Ω *é um aberto limitado de classe* C^1, $j \in \mathbb{N}$. *Então temos que as imersões são compactas:*
i) Se $m < \frac{n}{p}$, *então* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in [1, \frac{np}{n-mp})$;
ii) Se $m = \frac{n}{p}$, *então* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$.

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Proposição B.2.1 *Suponha que* Ω *é um aberto limitado de classe* C^1, $j \in \mathbb{N}$. *Então temos as seguintes imersões:*
i) *Se* Ω *é limitado e* $p < n$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, *para,* $1 \leq \frac{np}{n-mp}$;
ii) *Se* Ω *é limitado e* $p < n$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, *para,* $1 \leq \frac{np}{n-p} = p^*$

Demonstração: Ver M.Milla Miranda e L.A. Medeiros [13]. ■

Observação B.2.1 *O número* p^* *é conhecido como expoente crítico de Sobolev.*

Teorema B.2.4 (Fórmulas de Green) ***i)*** *Se* $\rho \in H^2(\Omega)$, *então*

$$\int_\Omega \nabla\rho\nabla u dx = -\int_\Omega \Delta\rho dx + \int_\Gamma \frac{\partial\rho}{\partial\nu} u dx, \forall u \in H^1(\Omega).$$

ii) *Se* $\rho \in H^1(\Omega)$, *então*

$$(\Delta\rho, u)_{L^2(\Omega)} + ((\rho, u))_V = \langle\gamma_1\rho, \gamma_0 u\rangle_{H^{-\frac{1}{2}} \times H^{-\frac{1}{2}}}, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demonstração: Ver M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ■

Teorema B.2.5 (Representação de Riesz) *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Então, existe um único $u \in L^p(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega ufdx,\ \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, se verifica

$$\|u\|_{L^p} = \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema B.2.6 (Agmon-Douglis-Niremberg) *Suponha que Ω é um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $1 < p < \infty$. Então, para todo $f \in L^P(\Omega)$, existe uma única solução do problema*

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema B.2.7 (Lax-Milgran) *Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para todo $f \in H'$(espaço dual de H) existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Teorema B.2.8 (Gauss-Green) *Se $u \in C^1(\Omega)$, então*

$$\text{ß}nt_\Omega u_{x_i}dx = \int \gamma u\nu^i d\gamma;\ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Demonstração: Ver M.Milla Miranda e L.A. Medeiros [13]. ■

Lema B.2.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Lema B.2.4 (Desigualdade de Poincaré) *Suponhamos que Ω é um aberto e limitado em alguma direção x_i. Então, existe uma constante $C = c(\Omega)$ tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), (1 \leq p \leq +\infty)$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma equivalente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Demonstração: Ver Brezis [3] ou M. Milla Miranda e L. A. Medeiros [13]. ∎

Proposição B.2.2 (Regra da Cadeia) *Seja $g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$ e $|g'(s)| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e para alguma constante M. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$g \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ u) = (g' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ∎

Proposição B.2.3 *Seja (f_n) uma sequência em X'. Então,*

i) *Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow$ se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in X$.*
ii) *Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, então $\|f_n\|$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

Demonstração: Ver Brezis [3]. ∎

Teorema B.2.9 *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_L^p(\Omega) \to 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que*
(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k \in \mathbb{N}$, quase sempre em Ω

Demonstração: Ver Brezis [3]. ∎

Teorema B.2.10 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz as condições:*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω;

(ii) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω. Então,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ∎

Lema B.2.5 (Lema de Fatou) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz as condições* *(i) para todo n, $f_n(x) \geq 0$ quase sempre em Ω;*

(ii) $\sup_n \int_\Omega f_n dx < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$, considere $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \infty$. Então,

$$f \in L^1(\Omega) \ e \ \int_\Omega f dx \leq \liminf_n \int_\Omega f_n dx.$$

Demonstração: Ver Brezis [3]. ■

Proposição B.2.4 *O espaço $L^p(0,T;X)$ é denso em $\mathcal{D}'(0,T;X)$.*

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [4] ■

Observação B.2.2 *C(K) denota o espaço das funções contínuas sobre espaços métricos compactos K com valores em $\mathbb{R}$ e $\mathcal{L}(X,Y)$ o conjunto das aplicações lineares de X em Y.*

Teorema B.2.11 (Ascoli-Arzelá) *Seja K um espaço métrico compacto e $\mathcal{H}$ um subconjunto limitado de $C(K)$. Suponha que $\mathcal{H}$ é uniformemente contínuo, isto é,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ tal \ que \ d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{H}$$

Então, o fecho de $\mathcal{H}$ é compacto.

Demonstração: Ver Brezis [3] ■

Teorema B.2.12 (Hille) *Sejam X,Y espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $f \in L^1(I,X)$, onde I é um intervalo da reta. Então, $Af \in L^1(I,Y)$ e*

$$A\left(\int_I f(s)ds\right) = \int_I (Af)(s)ds.$$

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [4] ■

B.3 Existência de solução para o Problema Aproximado (2.12)

Para cada $k, m \in \mathbb{N}$, denotamos por

$$V_m^k = [w_1^k, \ldots, w_m^k]$$

o espaço gerado pelos primeiros m vetores da base especial $\{w_\nu^k\}$ de $V \cap H^2(\Omega)$ definida na seção 1.7.

Definamos

$$u_{km}(t) \in V_m^k \text{ se, e somente se, } u_{km}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jkm}(t) w_j^k.$$

$$\left| \begin{array}{l} (u''_{km}(t), w) + \mu(t)((u_{km}(t), w)) + (h(u_{km}(t)), w) + (\beta u'_{km}(t), v)_{L^2(\Gamma_1)} = (f(t), w), \forall w \in V_m^k. \\ u_{km}(x,0) = u_{0k} \\ u'_{km}(x,0) = u_{1k} \end{array} \right.$$

No que segue, obteremos um problema aproximado equivalente ao problema aproximado acima para que o mesmo esteja nas condições do Teorema de Carathéodory. Consideremos no problema aproximado $w = w_j, j = 1, \ldots, m$. Então, obtemos que

$$(u''_{km}(t), w_j) + \mu(t)((u_{km}(t), w_j)) + (h(u_{km}(t)), w_j) + (\beta u'_{km}(t), v)_{L^2(\Gamma_1)} = (f, w_j), j = 1, \ldots, m.$$

Substituindo $u_{km}(t)$ na equação acima, obtemos

$$\left(\textstyle\sum_{j=1}^m g''_{jkm}(t) w_j^k, w_i^k\right) + \mu(t)\left(\left(\textstyle\sum_{j=1}^m g_{jkm}(t) w_j^k, w_i^k\right)\right) + \left(h(\textstyle\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k, w_i^k\right)$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \beta(x) \sum_{j=1}^{m} g'_{jkm}(t) w_j^k w_i^k = (f(t), w_i^k)$$

Logo, o sistema de equação acima pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} (w_1^k, w_k^1) & (w_2^k, w_k^1) & \ldots & (w_m^k, w_k^1) \\ (w_1^k, w_k^2) & (w_2^k, w_k^2) & \ldots & (w_m^k, w_k^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1^k, w_k^m) & (w_2^k, w_k^m) & \ldots & (w_m^k, w_k^m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g''_{1km}(t) \\ g''_{2km}(t) \\ \vdots \\ g''_{mkm}(t) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\mu(t)((w_1^k, w_1^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_1^k)) & \ldots & -\mu(t)((w_m^k, w_1^k)) \\ -\mu(t)((w_1^k, w_2^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_2^k)) & \ldots & -\mu(t)((w_m^k, w_2^k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu(t)((w_1^k, w_m^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_m^k)) & \ldots & -\mu(t)((w_m^k, w_m^k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1km}(t) \\ g_{2km}(t) \\ \vdots \\ g_{mkm}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (h(\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k, w_1^k)) \\ (h(\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k, w_2^k)) \\ \vdots \\ (h(\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k, w_m^k)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \displaystyle\int_\Gamma \beta(x) \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k w_1^k d\Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma \beta(x) \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k w_2^k d\Gamma \\ \vdots \\ \displaystyle\int_\Gamma \beta(x) \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k w_m^k d\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f(t), w_1^k) \\ (f(t), w_2^k) \\ \vdots \\ (f(t), w_m^k) \end{pmatrix}$$

Vamos denotar cada matriz acima da seguinte forma:

$$C = \begin{pmatrix} (w_1^k, w_k^1) & (w_2^k, w_k^1) & \ldots & (w_m^k, w_k^1) \\ (w_1^k, w_k^2) & (w_2^k, w_k^2) & \ldots & (w_m^k, w_k^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1^k, w_k^m) & (w_2^k, w_k^m) & \ldots & (w_m^k, w_k^m) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\mu(t)((w_1^k, w_1^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_1^k)) & \ldots & -\mu(t)((w_m^k, w_1^k)) \\ -\mu(t)((w_1^k, w_2^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_2^k)) & \ldots & -\mu(t)((w_m^k, w_2^k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu(t)((w_1^k, w_m^k)) & -\mu(t)((w_2^k, w_m^k)) & \ldots & -\mu(t)((w_m^k, w_m^k)) \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} (h(\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k, w_1^k)) \\ (h(\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k, w_2^k)) \\ \vdots \\ (h(\sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t)w_j^k, w_m^k)) \end{pmatrix} \quad , \quad G = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_\Gamma \beta(x) \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k w_1^k d\Gamma \\ \displaystyle\int_\Gamma \beta(x) \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k w_2^k d\Gamma \\ \vdots \\ \displaystyle\int_\Gamma \beta(x) \sum_{j=1}^m g'_{jkm}(t) w_j^k w_m^k d\Gamma \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} (f(t), w_1^k) \\ (f(t), w_2^k) \\ \vdots \\ (f(t), w_m^k) \end{pmatrix} \quad , \quad z(t) = \begin{pmatrix} g_{1km}(t) \\ g_{2km}(t) \\ \vdots \\ g_{mkm}(t) \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} w_1^k & w_2^k & \ldots & w_m^k \end{pmatrix}$$

Sabemos que as condições iniciais são dadas por

$$u_{km}(0) = \sum_{j=1}^m g_{jkm}(0) w_j^k = u_{0k} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jkm} w_j^k,$$

de onde podemos concluir que $g_{jkm}(0) = \alpha_{jkm}$, para $j = 1, 2, \ldots, m$. De modo análogo, concluímos que $g'_{jkm}(0) = \beta_{jkm}$, para $j = 1, 2, \ldots, m$. Assim, tomando

$$z(0) = \big[\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km}\big]$$

e

$$z'(0) = \big[\beta_{k1}, \ldots, \beta_{km}\big],$$

obtemos o sistema de equações ordinárias abaixo

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) + Gz'(t) + H(z(t)) = F \\ z(0) = \big[\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km}\big],\ z'(0) = \big[\beta_{k1}, \ldots, \beta_{km}\big]. \end{cases}$$

Inicialmente, provaremos que a matriz C é invertível.

De fato, sendo C uma matriz real e simétrica então C é auto-adjunta e, portanto, diagonalizável, ou seja, existe uma matriz M inversível tal que

$$D = M^{-1}CM,$$

é uma matriz diagonal.

Logo, para mostrarmos que C é invertível é suficiente provar que D é inversível ou, equivalentemente, que zero não é autovalor de D.

Suponhamos, por absurdo, que zero é um autovalor de D. Então, existe um vetor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

não nulo do $\mathbb{R}^n$ tal que Dv=0. Sendo M inversível e, portanto, $M^{-1}\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$, resulta que o vetor CMv é igual a zero. Denotando

$$Mv = \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

temos:

$$0 = C\varphi = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j^k, w_1^k) \\ \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j^k, w_2^k) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j^k, w_m^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j^k . w_1^k \right) \\ \left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j^k . w_2^k \right) \\ \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j^k . w_m^k \right) \end{pmatrix}$$

Logo, $\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j^k . w_i^k \right) = 0$, para todo $j = 1, \ldots, m$, donde resulta que o vetor $\alpha = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j^k . w_i^k$ é ortogonal à todo vetor de V_m^k. Assim, $(\alpha, \alpha) = 0$, implicando que $\alpha = 0$. Portanto, $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j^k = 0$. Mas sendo $\{w_j^k\}$ uma base, então $\varphi_j = 0, \forall j = 1, \ldots, m$, ou seja, $\varphi = 0$. Desde que M é inversível, a tranformação linear definida por M é injetora, o que resulta $v = 0$, contrariando o fato de v ser autovalor de D. Concluímos então que a matriz C é de fato invertível.

Assim, podemos escrever o sistema de equações diferenciais ordinárias da seguinte forma:

$$\begin{cases} z''(t) + C^{-1}Az(t) + C^{-1}Gz'(t) + C^{-1}H(z(t)) = C^{-1}F \\ z(0) = \left[\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km}\right], \ z'(0) = \left[\beta_{k1}, \ldots, \beta_{km}\right] \end{cases}$$

Definamos

$Y_1(t) = z(t)$, $Y_2(t) = z'(t)$ e

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}$$

Então

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ -C^{-1}AY_1(t) - C^{-1}GY_2(t) - C^{-1}H(z(t)) + C^{-1}F \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1}F - C^{-1}G(Y_2(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}$$

Assim, temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1}F - C^{-1}GY_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{pmatrix} y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

onde

$$Y_0 = \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$

Provaremos, a seguir, que o problema acima possui uma solução local utilizando Teorema de Carathéodory. Consideremos a aplicação

$$h : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$$

definida por

$$h(t, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1}G(Y_2(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix} y(t),$$

onde $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{2m})$.

Inicialmente, iremos verificar que a aplicação h está nas condições do teorema de Carathéodory. Com efeito,

(i) Para cada $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixo, tem-se que $h(t, y)$ é mensurável, pois h não depende de t e $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$

(ii) Para cada t fixo, tem-se que h é contínua com função de y. De fato, $C^{-1}F$ é constante e $C^{-1}H(z(t))$ é contínua, pela continuidade da função h. Note que a aplicação

$$N : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$$
$$y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{pmatrix}$$

é linear e, portanto, contínua.

(iii) Seja $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um conjunto compacto, então

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|C^{-1}H(z(t))\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|Ny\|_{\mathbb{R}^{2m}}.$$

Como H e N são contínuas em $\mathbb{R}^{2m}$, temos que são contínuas em qualquer compacto K de $\mathbb{R}^{2m}$. Assim, existe um $M_K > 0$ tal que

$$\|C^{-1}H(z(t))\|_{\mathbb{R}^{2m}}, \|Ny\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_K,$$

para todo $(t, y) \in K$. Portanto, podemos concluir que existe uma constante positiva M_K satisfazendo

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq 2M_K.$$

Assim, por $(i), (ii), (iii)$ as condições do Teorema de Carathéodory estão satisfeitas e, como consequência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = h(t, y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

em algum intervalo $[0, t_{km})$, com $t_{km} > 0$.

Bibliografia

[1] ARARUNA, F.D and MACIEL, A.B., Existence and boundary stabilization of the semilinear wave equation, *Nonlinear Analysis* 67(2007),1288-1305.

[2] A. KUFNER, *Functions Spaces*, Czechoslovakia, Noordhoff, 1977.

[3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York, Springer, 2011.

[4] BREZIS, H and CAZENAVE, T., *Nonlinear Evolution Equations,* IM-UFRJ, Rio, 1994.

[5] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGrall-Hill, New York, (1955).

[6] DAUTRAY ROBERT E LIONS, *Functional and Variational methods*, Springer, Berlin, 2000.

[7] E. HEBEY, *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, New York, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999.

[8] KINDERLEHRER, D. and STAMPACCHIA, G., An Introduction to Variational Inequalities and their Applications, Academic Press, New York, (1980)

[9] KORMONIK, V and ZUAZUA, E., *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Pure Appl. 69(1990),33-54.

[10] KORMONIK, V., *Exact Controllability and Stabilization, The muitiplier Method*, Jonh Willey and Sons and Masson, 1994.

[11] LIONS, J.L., *Quelques Methods de Resolutions des Problèms aux Limites Non-Linaires*, Dunod, Paris.1969.

[12] LIONS, J.L., *Équations aux dérivées partielles interpolation, Volume I* Euvres choisies de Jacques-Louis Lions, SMAI, EDP Sciences, Paris, 2003.

[13] L.A. MEDEIROS and M. MILLA MIRANDA, *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogêneos),* Editora IM-UFRJ, 5ª edição, 2006.

[14] LIONS, J.L. and MAGENES., *Problèms aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol.1, Dunod, Paris,1968.

[15] MEDEIROS, L. A; *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais,* Parte I, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2006).

[16] M. MILLA MIRANDA and MEDEIROS,L.A., *On a boundary value problem for wave equations: Existence-uniquenes-assymptotic behavior*, Rev. de Mat. Appl.,Univ. de Chile 17(1996), 47-73.

[17] MATOS, M. P. - Integral de Bochner e Espaços $L^p(0,T,X)$, Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.

[18] M. MILLA MIRANDA, *Traço para o dual dos espaços de Sobolev,* Bol. Soc. Paran. Matemática (2^a série) 11(2) (1990), p.131-157.

[19] M.MILLA MIRANDA., *Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos*, vol. 28, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1994).

[20] M. MILLA MIRANDA and L.A. MEDEIROS; *Hidden regularity for semilinear hyperbolic partial differential equations*, Ann. Fac, Sci. Toulouse 9 (1)(1988), 103-120.

[21] NEYDE F. MARTINS RIBEIRO; *Dual dos espaços $L^p(0,T,X)$ de funções vetorias*, Lisboa, 1975.

[22] R. TEMAM; *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis,* Stud. Math. Appl., vol. 2, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[23] R.E.EDWARDS., *Functional analysis, Theory and Aplication*, Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[24] STRAUSS, W.A., *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations,* An. Acad. Brasil. Ciênc. 42(1970),645-651.

[25] S. BOCHNER ANN A.E.TAYLOR, *Annals of Mathematics-2*, Vol. 39,1938.