

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Testes de Bondade de Ajuste para
Distribuição Birnbaum-Saunders
Baseados na Informação de
Kullback-Leibler[†]

por

Ednário Barbosa de Mendonça

sob orientação da

Profa. Dra. Michelli Karinne Barros da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

- M539t Mendonça, Ednário Barbosa de.
Testes de bondade de ajuste para distribuição Birnbaum-Saunders baseados na informação de Kullback-Leibler / Ednário Barbosa de Mendonça. – Campina Grande, 2017.
102 f.
- Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Profa. Dra. Michelli Karinne Barros da Silva.
Referências.
1. Distribuição Birnbaum-Saunders. 2. Testes de Bondade de Ajuste. 3. Informação de Kullback-Leibler. 4. Dados Não Censurados. 5. Censura Progressiva do Tipo II. I. Silva, Michelli Karinne Barros da. II. Título.

CDU 51-3(043)

Testes de Bondade de Ajuste para Distribuição Birnbaum-Saunders Baseados na Informação de Kullback-Leibler

por

Ednário Barbosa de Mendonça

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

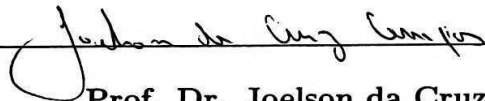
Área de Concentração: Probabilidade e Estatística

Aprovada por:



Profa. Dra. Divanilda Maia Esteves

(Membro externo)



Prof. Dr. Joelson da Cruz Campos

(Membro interno)



Profa. Dra. Michelli Karinne Barros da Silva

(Orientadora)

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2017

Resumo

Neste trabalho, propomos testes de bondade de ajuste baseados na informação de Kullback-Leibler para o modelo Birnbaum-Saunders, em que, inicialmente, consideramos dados não censurados e, em um segundo momento, foram considerados dados com censura progressiva do tipo II. Para cada caso, foram obtidas as respectivas estatísticas de teste, bem como foi discutido o processo de estimação dos parâmetros do modelo. No caso não censurado, foram obtidos os tamanhos e os poderes do teste para diferentes tamanhos amostrais e diferentes alternativas para a função de risco por meio de simulações de Monte Carlo e, além disso, comparamos tais poderes com os dos testes clássicos de bondade de ajuste, a saber: o teste de Cramér-von Mises e o teste de Anderson-Darling. No caso de censura progressiva do tipo II, também foram avaliados os tamanhos e os poderes do teste por meio de estudos de simulação considerando diferentes tamanhos amostrais, diferentes esquemas de censura e diferentes alternativas para a função de risco. Por fim, fizemos aplicações com conjuntos de dados reais.

Palavras-chave: Distribuição Birnbaum-Saunders; testes de bondade de ajuste; informação de Kullback-Leibler; dados não censurados; censura progressiva do tipo II.

Abstract

In this work, we propose goodness-of-fit tests based on the Kullback-Leibler information for the Birnbaum-Saunders model, in which we initially considered uncensored data and, in a second moment, we considered data with progressive censorship of type II. For each case, the respective test statistics were obtained, as well, as the process of estimation of the parameters of the model was discussed. In the uncensored case, the sizes and the powers of the test were obtained for different sample sizes and different alternatives for the risk function by means of Monte Carlo simulations and, in addition, we compared such powers with those of the classic tests of goodness of fit, namely the Cramér-von Mises test and the Anderson-Darling test. In the case of progressive type II censorship, the sizes and powers of the test were also evaluated through simulation studies considering different sample sizes, different censorship schemes and different alternatives for the risk function. Finally, we made applications with real data sets.

Keywords: Birnbaum-Saunders distribution; goodness-of-fit tests; Kullback-Leibler information; uncensored data; progressive type II censorship.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, por me abençoar sempre ao longo da caminhada até chegar aqui.

A minha família, em especial a minha mãe, Ediane, e a minha noiva, Thuanne, por todo apoio, carinho e compreensão que tiveram comigo em todos os momentos.

A professora Michelli, por me orientar ao longo dessa pós-graduação. Sem dúvida alguma, eu tive muita sorte de tê-la como orientadora, uma profissional preocupada com seus alunos e que sempre busca fazer o melhor. Agradeço a paciência, disponibilidade e todo o conhecimento a mim repassado.

Ao professor Joelson, por me auxiliar sempre que precisei durante todas as fases de elaboração deste trabalho. Posso dizer que toda a ajuda, o auxílio e as sugestões dadas por ele foram de grande valia para o enriquecimento desta dissertação.

A professora Divanilda Maia Esteves, aquela que me deu as primeiras oportunidades de crescimento no meio acadêmico e científico. Obrigado pela confiança depositada em mim durante a minha graduação e por aceitar o convite para está participando da banca de avaliação deste trabalho.

Aos professores Aline Tsuyuguchi e Ricardo Olinda por terem aceitado o convite para compor a suplência da banca avaliadora deste trabalho.

Dedicatória

A minha mãe, Ediane, e a minha
noiva, Thuanne.

Lista de Figuras

2.1	Densidade Birnbaum-Saunders para valores de α indicados e $\beta = 1$. . .	30
2.2	Densidade Birnbaum-Saunders para valores de β indicados e $\alpha = 0,5$. .	30
2.3	Curvas de sobrevivência da distribuição Birnbaum-Saunders para valores indicados de α com $\beta = 1$ (a) e para valores indicados de β com $\alpha = 0,5$ (b).	33
2.4	Curvas de risco da distribuição Birnbaum-Saunders para valores indicados de α com $\beta = 1$ (a) e para valores indicados de β com $\alpha = 1$ (b).	34
3.1	Comparação entre as funções de distribuição empírica e teórica para os dados de tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 26.000 psi.	54
3.2	Comparação entre as funções de distribuição empírica e teórica para os dados de tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 31.000 psi.	55
3.3	Comparação entre as funções de distribuição empírica e teórica para os dados de tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 21.000 psi.	56

Lista de Tabelas

3.1	Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(0, 5; 1)$ e um nível de 10% de significância.	43
3.2	Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(0, 5; 1)$ e um nível de 5% de significância.	44
3.3	Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(1; 1)$ e um nível de 10% de significância.	45
3.4	Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(1; 1)$ e um nível de 5% de significância.	46
3.5	Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(1, 5; 1)$ e um nível de 10% de significância.	47
3.6	Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(1, 5; 1)$ e um nível de 5% de significância.	48
3.7	Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 10% de significância, considerando tamanho amostral $n = 10$	50
3.8	Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 5% de significância, considerando tamanho amostral $n = 10$	51
3.9	Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 10% de significância, considerando tamanho amostral $n = 30$	51

3.10	Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 5% de significância, considerando tamanho amostral $n = 30$.	51
3.11	Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 10% de significância, considerando tamanho amostral $n = 50$.	52
3.12	Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 5% de significância, considerando tamanho amostral $n = 50$.	52
3.13	Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 26.000 psi.	53
3.14	Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 31.000 psi.	54
3.15	Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 21.000 psi.	56
4.1	Valores adequados para o tamanho da janela w , considerando diferentes tamanhos de m .	64
4.2	Valores críticos do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) aos níveis de 10% e 5% de significância.	65
4.3	Valores críticos do teste a partir da distribuição BS(1;1) aos níveis de 10% e 5% de significância.	66
4.4	Valores críticos do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) aos níveis de 10% e 5% de significância.	67
4.5	Poder do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.	68
4.6	Poder do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.	69
4.7	Poder do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.	70
4.8	Poder do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.	71

4.9	Poder do teste a partir da distribuição BS(1;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.	72
4.10	Poder do teste a partir da distribuição BS(1;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.	73
4.11	Poder do teste a partir da distribuição BS(1;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.	74
4.12	Poder do teste a partir da distribuição BS(1;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.	75
4.13	Poder do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.	76
4.14	Poder do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.	77
4.15	Poder do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.	78
4.16	Poder do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.	79
4.17	Amostra progressivamente censurada do tipo II referente aos tempos em quebras de um fluído isolante em um teste acelerado registrados em 34 kilovolts.	80
4.18	Amostra progressivamente censurada do tipo II referente a medida da força de ruptura de vigas de madeira.	81

Conteúdo

Introdução	6
1 Preliminares	9
1.1 Análise de Sobrevivência	9
1.1.1 Censura	10
1.1.2 Funções Importantes em Análise de Sobrevivência	11
1.1.3 Modelos Probabilísticos em Análise de Sobrevivência	16
1.2 Testes de Bondade de Ajuste	19
1.2.1 Estatística de Função de Distribuição Empírica	20
1.2.2 Teste de Bondade de Ajuste Aproximado	24
2 Distribuição Birnbaum-Saunders	26
2.1 Origem e Propriedades	26
2.2 Geração de Números Pseudo-Aleatórios	34
2.3 Estimação	35
2.3.1 Método de Máxima Verossimilhança	35
2.3.2 Método dos Momentos Modificado	36
3 Teste de Bondade de Ajuste para Distribuição Birnbaum-Saunders Baseado na Informação de Kullback-Leibler (sem Censura)	37
3.1 Entropia Diferencial e Informação de Kullback-Leibler	37
3.2 Estatística de Teste para a Distribuição Birnbaum-Saunders	40
3.3 Estudo de Simulação	42
3.3.1 Valores Críticos	42
3.3.2 Poder do Teste	48

	vi
3.4 Aplicações	53
3.4.1 Aplicação 1	53
3.4.2 Aplicação 2	54
3.4.3 Aplicação 3	55
4 Teste de Bondade de Ajuste para Distribuição Birnbaum-Saunders Baseado na Informação de Kullback-Leibler para Dados com Censura Progressiva do Tipo II	57
4.1 Introdução	57
4.2 Entropia Diferencial e Informação de Kullback-Leibler com Censura Progressiva do Tipo II	58
4.3 Estatística de Teste para o Modelo Birnbaum-Saunders	60
4.3.1 Estimadores de Máxima Verossimilhança para Distribuição BS Considerando Dados Progressivamente Censurados do Tipo II	61
4.4 Estudo de Simulação	63
4.5 Aplicações	80
4.5.1 Aplicação 1	80
4.5.2 Aplicação 2	80
5 Conclusões	82
A Demonstração da Função de Verossimilhança Progressivamente Censurada do Tipo II	84
B Demonstração da Expressão (4.2)	88
Bibliografia	92

Introdução

Nos dias atuais, dentre as várias distribuições de probabilidade existentes, a distribuição Birnbaum-Saunders vem chamando a atenção no ramo da estatística, tanto em aspectos teóricos quanto em aspectos práticos, pois trata-se de uma distribuição de tempos de vida que relaciona o tempo até a ocorrência de falha com algum dano cumulativo o qual é assumido ser gaussiano. Nessa vertente, essa distribuição tem sido amplamente aplicada em estudos de análise de sobrevivência.

Na Estatística, é de grande interesse saber se um determinado conjunto de dados amostrais provém de um determinado modelo probabilístico. Nesse sentido, vários testes de bondade de ajuste têm sido propostos para diferentes distribuições de probabilidade. Pelo fato dos testes de bondade de ajuste medirem a discrepância dos dados em relação ao modelo teórico, eles podem ser feitos de várias formas, como, por exemplo, baseado na função de distribuição empírica, na função característica empírica, na estatística qui-quadrado ou ainda em correlação e regressão. Além disso, podemos supor que o vetor de parâmetro sob a hipótese nula é conhecido ou desconhecido. Mais detalhes sobre testes de bondade de ajuste podem ser encontrados em (D'Agostino & Stephens, 1986).

Dentre as estatísticas de teste clássicas, podemos citar a estatística de Cramér-von Mises e a estatística de Anderson-Darling. Essas estatísticas se baseiam na distância entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição teórica. Na literatura, dentre os vários estudos que abordam esses testes, podemos citar (Chen & Balakrishnan, 1995), (Stephens, 1970) e (Choulakian & Stephens, 2001).

Em análise de sobrevivência, frequentemente trabalha-se com dados censurados. Sob essa perspectiva, testes de bondade de ajuste vêm sendo propostos e alguns até

modificados de modo a incorporar a presença de censura no processo de validação. Dentre os trabalhos produzidos nessa área, podemos citar (Pettitt & Stephens, 1976), (Pettitt, 1976) e (Castro-Kuriss, 2011). A censura progressiva do tipo II aparece como uma alternativa para estudos de tempos de vida, principalmente no que se refere a testes de vida útil de equipamentos, de modo a economizar tempo e recursos financeiros. Assim, testes de bondade de ajuste que incorporam esse tipo de censura são bastante úteis e vêm sendo estudados por vários autores, como, por exemplo, os estudos feitos em (Castro-Kuriss, Kelmansky, Leiva, & Martínez, 2010), (Balakrishnan & Sandhu, 1995), (Balakrishnan, Rad, & Arghami, 2007) e (Brito, 2014).

A informação de Kullback-Leibler consiste em uma medida de informação, a qual pode ser utilizada para medir a discrepância entre as funções de distribuição empíricas e teóricas. Tal medida de informação vem apresentando bons resultados no que se refere a testes de bondade de ajuste, sendo em muitos casos uma alternativa melhor do que os testes clássicos, como podemos ver nos trabalhos de (Rad, Yousefzadeh, & Balakrishnan, 2011), (Park, 2005) e (Balakrishnan & Sandhu, 1996).

Neste trabalho, nosso objetivo consiste em propor testes de bondade de ajuste baseados na informação de Kullback-Leibler para a distribuição Birnbaum-Saunders, de modo a considerar dados não censurados e dados com censura progressiva do tipo II. A ideia é propor tais testes com a primícia de obter ganhos consideráveis nos poderes em relação aos testes clássicos. Sendo assim, vamos mostrar que os testes baseados na informação de Kullback-Leibler são melhores que os testes de bondade de ajuste convencionais, na maioria dos casos. Além disso, propomos uma estatística de teste que consegue incorporar a censura progressiva do tipo II para testar o ajuste à distribuição Birnbaum-Saunders baseando-se em (Rad et al., 2011), já que tal tipo de censura vem ganhando destaque no âmbito acadêmico-científico.

No Capítulo 1 deste trabalho foi feita a abordagem dos principais conceitos referentes à análise de sobrevivência. No segundo capítulo, abordamos a distribuição Birnbaum-Saunders e suas propriedades. No Capítulo 3, foi proposto um teste de bondade de ajuste baseado na informação de Kullback-Leibler para distribuição Birnbaum-Saunders, considerando dados não censurados. No quarto capítulo, também foi proposto um teste de bondade de ajuste, entretanto considerou-se dados progressivamente censurados do tipo II. Por fim, relatamos as conclusões obtidas com os estudos feitos,

no Capítulo 5.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, iremos abordar os principais conceitos referentes à Análise de Sobrevivência, conceitos esses os quais serão de suma importância para os estudos que serão realizados neste trabalho. Além disso, faremos uma breve explanação sobre testes de bondade de ajuste e apresentaremos os testes clássicos de normalidade: Cramér-von Mises e Anderson-Darling.

1.1 Análise de Sobrevivência

A Análise de Sobrevivência consiste no estudo de dados relacionados ao tempo até a ocorrência de um determinado evento de interesse. Tal evento é denominado *falha*, e o tempo transcorrido desde o início da observação até a ocorrência da falha é dito ser o *tempo de falha*. Como exemplos de eventos de interesse em Análise de Sobrevivência, podemos citar: o tempo até o óbito de um certo paciente, o tempo até a recidiva de uma doença e o tempo até a falha de um certo equipamento. Engenheiros denominam esta área de Análise de Confiabilidade.

Na Análise de Sobrevivência, assume-se que a variável aleatória tempo de falha é não-negativa e medida em uma escala contínua.

Os estudos que envolvem a Análise de Sobrevivência se fazem peculiar devido a características especiais, as quais são inerentes ao tipo de dados que são encontrados em situações práticas. A seguir, veremos tais características.

1.1.1 Censura

O principal interesse em estudos de análise de sobrevivência é observar os tempos de falha das unidades observacionais em um experimento e, a partir dos dados obtidos, realizar a inferência estatística. Entretanto, esses experimentos podem ser de longa duração, de modo que muitas vezes o estudo termina antes que todas as unidades venham a falhar. Assim, uma característica decorrente desses estudos é a presença de observações incompletas ou parciais. Tais observações, denominadas censuras, podem ocorrer por várias razões, dentre elas, a perda de acompanhamento da unidade observacional no decorrer do estudo e a não ocorrência do evento de interesse até o término do experimento.

Basicamente, existem três tipos de censura: a censura do tipo I, a censura do tipo II e a censura aleatória. A censura do tipo I ocorre em estudos que ao serem finalizados após um certo período de tempo registram, em seu término, alguns indivíduos que ainda não apresentaram o evento de interesse. A censura do tipo II acontece em estudos os quais são finalizados após a ocorrência de um número pré-estabelecido de eventos de interesse. Por fim, a censura aleatória (tipo de censura que mais acontece em estudos clínicos) ocorre quando uma unidade ou indivíduo é retirado no decorrer do estudo sem que tenha ocorrido a falha, ou seja, por motivos que não têm ligação com o evento de interesse. Por exemplo, em estudos clínicos, o paciente morre por uma razão diferente da estudada.

As censuras ainda podem ser classificadas com sendo à direita, à esquerda ou intervalar. A censura à direita ocorre quando o tempo de ocorrência do evento de interesse está à direita do tempo registrado. A censura à esquerda acontece quando o tempo registrado é maior do que o tempo de falha, isto é, o evento de interesse já ocorreu quando o indivíduo foi observado. Na censura intervalar, não se sabe o momento exato da ocorrência do evento de interesse, no entanto, sabe-se que está dentro de um certo intervalo de tempo.

Uma generalização da censura do tipo II é a *censura progressiva do tipo II*. Assim como na censura do tipo II, o número de falhas é pré-estabelecido, todavia a cada uma dessas falhas são retiradas aleatoriamente outras unidades observacionais que ainda estão no experimento. Esse tipo de censura tem sido bastante utilizada em testes de

vida útil de equipamentos, de modo a economizar tempo e recursos financeiros. De acordo com (Brito, 2014), a diferença entre a censura do tipo II e a censura progressiva do tipo II se dá pelo pressuposto de que ao ocorrer uma falha em um equipamento por algum motivo, os outros equipamentos estariam também a falhar pelo mesmo motivo e, por isso, se dá a retirada de unidades do experimento após cada falha.

A censura progressiva do tipo II ocorre da seguinte forma: considere que n unidades observacionais são colocadas em teste e que deseja-se observar o tempo em que as m ($m < n$) primeiras falhas ocorrem. No momento em que ocorre a primeira falha são retiradas aleatoriamente R_1 unidades das $n - 1$ que não falharam, restando então $n - R_1 - 1$ unidades. Do mesmo modo, quando a segunda falha acontece, são retiradas aleatoriamente R_2 unidades das $n - R_1 - 2$ que não falharam, restando assim $n - R_1 - R_2 - 2$ unidades, e assim segue o experimento até a m -ésima falha. No momento da m -ésima falha, restam $n - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1} - m$ unidades no experimento e, portanto, essas unidades são censuradas, já que o número de m falhas foi atingido. Vale salientar que R_1, \dots, R_m são valores pré-estabelecidos.

Observe que $n = R_1 + R_2 + \dots + R_m + m$. Assim, se $R_1 + R_2 + \dots + R_m = 0$, então $n = m$, o que corresponde ao caso sem censura. Entretanto, se $R_1 + R_2 + \dots + R_{m-1} = 0$, então $R_m = n - m$, o que corresponde à censura do tipo II convencional.

1.1.2 Funções Importantes em Análise de Sobrevivência

Os dados de análise de sobrevivência, medem o tempo até a ocorrência de um determinado evento de interesse e, como esses tempos estão sujeitos a variações aleatórias, caracterizam uma variável aleatória. Tal variável é especificada, em análise de sobrevivência, pela sua função de sobrevivência ou pela função de taxa de falha.

Função de Sobrevivência

A função de sobrevivência é definida como sendo a probabilidade de uma observação não falhar até um certo tempo t , isto é, a probabilidade de uma observação sobreviver mais que um tempo t , com $t > 0$. Assim, considerando T a variável aleatória que representa o tempo de falha, a função de sobrevivência pode ser escrita, em termos probabilísticos, como:

$$S(t) = P(T > t).$$

A função de distribuição acumulada (fda), denotada por $F(t)$, é definida como a probabilidade de uma observação não sobreviver mais que um tempo t . Deste modo, temos que

$$S(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t).$$

Propriedade 1.1 *Se T é uma variável aleatória contínua e não-negativa e S é sua função de sobrevivência, então*

(i) S é contínua e monótona não-crescente;

(ii) $S(0) = 1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$.

Demonstração:

Seja $F(t)$ a fda da variável aleatória T . Pelo fato de F ser uma fda, então $F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ e, de acordo com (James, 2015, p. 41), goza das seguintes propriedades:

P1. F é não-decrescente;

P2. F é contínua à direita;

P3. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$.

Assim,

(i) Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, de modo que $t_1 \leq t_2$. Por P1, temos que F é não-decrescente, logo,

$$\begin{aligned} F(t_1) \leq F(t_2) &\Rightarrow -F(t_1) \geq -F(t_2) \\ &\Rightarrow 1 - F(t_1) \geq 1 - F(t_2) \\ &\Rightarrow S(t_1) \geq S(t_2). \end{aligned}$$

Portanto, S é não-crescente. Além disso, a função constante igual a 1 é contínua e, de P2, temos que F também é contínua. Portanto, como a diferença entre funções contínuas é contínua, $S(t) = 1 - F(t)$ é contínua para todo $t > 0$.

(ii) A função $S(t)$ está definida para valores de $t \geq 0$. Pela continuidade da função F e pelo fato de T ser uma variável aleatória contínua, temos que $F(0) = 0$. Daí,

$$S(0) = 1 - F(0) = 1.$$

Por P3, chegamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [1 - F(t)] = 1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1 - 1 = 0.$$

Função de Taxa de Falha

Temos que a probabilidade de ocorrer falha em um intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ é dada por

$$\begin{aligned} P(t_1 \leq T < t_2) &= P(T \leq t_2) - P(T < t_1) \\ &= F(t_2) - F(t_1) \\ &= [1 - S(t_2)] - [1 - S(t_1)] \\ &= S(t_1) - S(t_2). \end{aligned}$$

A taxa de falha no intervalo $[t_1, t_2)$, a qual denotaremos por $\lambda(t_1, t_2)$, é definida como a probabilidade de que a falha ocorra nesse intervalo, dado que não ocorreu antes de t_1 , dividida pelo comprimento do intervalo, ou seja,

$$\lambda(t_1, t_2) = \frac{P(t_1 \leq T < t_2 | T \geq t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{S(t_1) - S(t_2)}{(t_2 - t_1)S(t_1)}. \quad (1.1)$$

De modo geral, redefinindo o intervalo como $[t, t + \Delta t)$, a Expressão (1.1) assume a seguinte forma:

$$\lambda(t) = \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{S(t)\Delta t}.$$

Definição 1.1 *A função taxa de falha instantânea, também denominada função de risco, de uma variável aleatória não-negativa T , é dada por*

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t}.$$

Note que a função de risco pode ser escrita em termos da função densidade de probabilidade, $f(t)$, e da função de sobrevivência, $S(t)$, pois

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{P(T > t)\Delta t} \\ &= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(t)}{S(t)}. \end{aligned}$$

Função de Taxa de Falha Acumulada

Uma outra função bastante útil em análise de dados de sobrevivência é a função de taxa de falha acumulada.

Definição 1.2 *Seja T uma variável aleatória não-negativa, de modo que sua função de taxa de falha é $h(t)$. Então, a taxa de falha acumulada (ou função de risco acumulada) de T é dada por*

$$H(t) = \int_0^t h(u)du.$$

Segundo (Colosimo & Giolo, 2006, p. 24), a função de taxa de falha acumulada não tem uma interpretação direta, entretanto, ela pode ser útil na avaliação da função de maior interesse que é a de taxa de falha $h(t)$. Isso acontece, essencialmente, na estimação não-paramétrica em que $H(t)$ apresenta um estimador com propriedades ótimas e $h(t)$ é de difícil estimação.

Tempo Médio de Vida e Vida Média Residual

Outras duas funções que são de interesse em análise sobrevivência são o *tempo médio de vida* e a *vida média residual*.

Definição 1.3 *O tempo médio de vida de uma observação é dado por*

$$t_m = E(T).$$

O tempo médio de vida de uma observação ainda pode ser escrito da seguinte maneira:

$$t_m = \int_0^{\infty} S(t)dt.$$

De fato: de acordo com (James, 2015, p. 122), se T é uma variável aleatória não-negativa, então

$$E(T) = \int_0^{\infty} P(T > t)dt.$$

Daí,

$$t_m = E(T) = \int_0^{\infty} P(T > t)dt = \int_0^{\infty} S(t)dt.$$

Definição 1.4 *A vida média residual é o tempo médio de vida restante de uma observação que sobreviveu até um tempo t , ou seja,*

$$\text{vmr}(t) = E(T - t|T \geq t).$$

A vida média residual apresentada na Definição 1.4 ainda pode ser simplificada, de modo que

$$\text{vmr}(t) = \frac{\int_t^\infty (u-t)f(u)du}{S(t)} = \frac{\int_t^\infty S(u)du}{S(t)}.$$

(Colosimo & Giolo, 2006, p. 25) apresenta algumas relações envolvendo a vida média residual, são elas:

$$S(t) = \frac{\text{vmr}(0)}{\text{vmr}(t)} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{du}{\text{vmr}(u)} \right\}$$

e

$$h(t) = \frac{1}{\text{vmr}(t)} \left(\frac{d}{dt} \text{vmr}(t) + 1 \right).$$

Relações entre Funções de Tempo de Sobrevivência

A seguir, apresentaremos algumas relações importantes entre as funções de tempo de sobrevivência.

1. $f(t) = -S'(t)$.

Demonstração:

Temos que

$$S(t) = 1 - F(t) \Leftrightarrow F(t) = 1 - S(t).$$

Daí,

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} [1 - S(t)] = -S'(t).$$

2. $h(t) = -\frac{d}{dt} \log[S(t)]$.

Demonstração:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \log[S(t)].$$

3. $H(t) = -\log[S(t)]$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^t h(u)du \\ &= \int_0^t -\frac{d}{du} \log[S(u)]du \\ &= -\log[S(t)]. \end{aligned}$$

$$4. f(t) = h(t) \exp\{-H(t)\}.$$

Demonstração:

Observe que

$$\begin{aligned} H(t) = -\log[S(t)] &\Leftrightarrow -H(t) = \log[S(t)] \\ &\Leftrightarrow \exp\{-H(t)\} = S(t). \end{aligned}$$

Como,

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \Leftrightarrow f(t) = h(t)S(t),$$

então

$$f(t) = h(t) \exp\{-H(t)\}.$$

1.1.3 Modelos Probabilísticos em Análise de Sobrevida

Em análise de sobrevivência, se tratando de uma abordagem paramétrica, faz-se o uso de distribuições de probabilidade para modelagem do tempo de falha. Existem vários modelos probabilísticos que podem ser usados para tal modelagem, como, por exemplo, os modelos exponencial, Weibull, gama, log-normal e Birnbaum-Saunders. Tais modelos estatísticos, e outros mais, são caracterizados por quantidades desconhecidas denominadas *parâmetros*.

Nos estudos envolvendo tempos de falha, os parâmetros do modelo devem ser estimados a partir dos dados amostrais, permitindo assim que o modelo fique completamente determinado e que seja possível obter informações relevantes para o estudo.

Existem vários métodos de estimação conhecidos na literatura. No entanto, na presença de censura nem todos os métodos são adequados, pois não incorporam tais censuras. O Método de Máxima Verossimilhança surge como uma alternativa apropriada e tem a vantagem de possuir propriedades ótimas para grandes amostras.

Método de Máxima Verossimilhança

Escolhido o modelo probabilístico a ser utilizado para modelagem dos dados, o método de máxima verossimilhança busca o valor do parâmetro (ou vetor de parâmetros) com maior probabilidade de ter gerado a amostra em questão entre todos os possíveis valores para o parâmetro.

Inicialmente, suponha uma amostra de observações t_1, \dots, t_n de uma certa população de interesse, de modo que todas essas observações são não-censuradas. Suponha ainda que a população é caracterizada por sua função densidade $f(t)$. Assim, a função de verossimilhança para um parâmetro genérico θ (que pode ser um vetor de parâmetros) dessa população é expressa por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta).$$

Encontrar o estimador de máxima verossimilhança de θ corresponde a encontrar o valor $\hat{\theta}$ que maximiza a função L .

Observe que a função de verossimilhança $L(\theta)$ mostra que a contribuição de cada observação não-censurada é a sua função densidade. No entanto, (Colosimo & Giolo, 2006, p. 85) afirma que, no caso em que há presença de observações censuradas, temos apenas a informação de que o tempo de falha é maior que o tempo de censura observado e, portanto, a contribuição de cada uma dessas observações para $L(\theta)$ é sua função de sobrevivência $S(t)$. Então, essas observações podem ser divididas em dois conjuntos, em que um deles contém as r observações não-censuradas $(1, 2, \dots, r)$ e, o outro, contém as $n-r$ observações censuradas $(r+1, r+2, \dots, n)$. A seguir, iremos apresentar a função de verossimilhança considerando a censura à direita e as censuras do tipo I, tipo II e aleatória.

- **Censura do tipo I:** neste caso, tem-se r falhas e $n-r$ censuras observadas ao fim do experimento e, sendo assim, $L(\theta)$ assume a seguinte forma geral:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta) \prod_{i=r+1}^n S(t_i; \theta). \quad (1.2)$$

- **Censura do tipo II:** aqui, r é fixo e somente os r menores tempos são observados. Assim, de resultados baseados em estatísticas de ordem, segue que:

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta) \prod_{i=r+1}^n S(t_i; \theta).$$

Podemos notar que o termo $\frac{n!}{(n-r)!}$ é uma constante e, desse modo, pode ser desprezado, pois não envolve qualquer parâmetro de interesse. Portanto,

$$L(\theta) \propto \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta) \prod_{i=r+1}^n S(t_i; \theta), \quad (1.3)$$

onde \propto representa proporcionalidade.

Para mais detalhes sobre as demonstrações das Expressões (1.2) e (1.3), ver (Lawless, 2011).

• **Censura aleatória:** nesta situação, vamos considerar que:

1. T e C são variáveis aleatórias independentes as quais denotam os tempos de falha e de censura, respectivamente;
2. $S(t)$ e $G(t)$ são as funções de sobrevivência de T e C , respectivamente;
3. $G(t)$ não depende de nenhum parâmetro de $S(t)$ (censura não informativa);
4. $f(t_i)$ e $g(t_i)$ são, respectivamente, as funções densidade de probabilidade de T_i e C_i .

Sob essas considerações, (Colosimo & Giolo, 2006, p. 86) apresenta a função de verossimilhança para o caso em que temos censura aleatória da seguinte forma:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta) G(t_i) \prod_{i=r+1}^n g(t_i) S(t_i; \theta).$$

Sob a suposição de que estamos assumindo censura não informativa, os termos $G(t_i)$ e $g(t_i)$ podem ser desprezados, pois não envolvem θ . Logo, temos que

$$L(\theta) \propto \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta) \prod_{i=r+1}^n S(t_i; \theta).$$

Do que foi exposto, concluímos que a função de verossimilhança para os 3 tipos de censura é a mesma e é dada por:

$$L(\theta) \propto \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta) \prod_{i=r+1}^n S(t_i; \theta).$$

Considerando δ_i como sendo uma variável indicadora de falha, de modo que

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{se } t_i \text{ é um tempo de falha} \\ 0, & \text{se } t_i \text{ é um tempo censurado,} \end{cases}$$

então, a função de verossimilhança fica dada por:

$$L(\theta) \propto \prod_{i=1}^n [f(t_i; \theta)]^{\delta_i} [S(t_i; \theta)]^{1-\delta_i}.$$

Função de Verossimilhança para Dados Progressivamente Censurados do Tipo II

Sejam $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ variáveis aleatórias referentes aos tempos ordenados de falha das m unidades observacionais que falharam (estatísticas de ordem progressivamente censuradas do tipo II), e x_1, \dots, x_m suas respectivas observações. Considere, também, um esquema de censura progressiva do tipo II pré-definido R_1, \dots, R_m . Então, neste caso, a função de verossimilhança para um parâmetro genérico θ (que pode ser um vetor de parâmetros) é apresentada em (Rad et al., 2011) como sendo:

$$L(\theta) = f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m; \theta) = c \prod_{i=1}^m f(x_i; \theta) [1 - F(x_i; \theta)]^{R_i}, \quad (1.4)$$

de modo que $f(x_i; \theta)$ e $F(x_i; \theta)$ são a função densidade e a função de distribuição acumulada dos tempos de falha x_i , respectivamente, e

$$c = n(n - R_1 - 1) \times \dots \times (n - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$$

. **Demonstração:** ver Apêndice A.

1.2 Testes de Bondade de Ajuste

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória referente a um experimento. Muitas vezes nos deparamos com a necessidade de testar se essa amostra provém de uma variável aleatória com determinada distribuição de probabilidade. Nessa vertente, os testes de bondade de ajuste são frequentemente utilizados, de modo que se possa verificar se determinada distribuição de probabilidade ajusta-se bem aos dados observados. Assim, formalmente, testamos as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \text{Os dados provêm da variável aleatória } X \text{ com função de distribuição } F(x); \\ H_1 : \text{Os dados não provêm da variável aleatória } X \text{ com função de distribuição } F(x). \end{cases}$$

(D'Agostino & Stephens, 1986) designa hipótese simples como sendo os casos em que a hipótese nula especifica a função de distribuição acumulada e supõe que o vetor de parâmetros é conhecido. Se tal vetor é desconhecido, temos que a hipótese é dita composta. Neste trabalho, vamos nos ater apenas ao caso em que o vetor de parâmetros é desconhecido.

Para testar a hipótese H_0 , existem vários métodos na literatura. Nessa vertente, testes baseados na distância entre a função de distribuição empírica e a teórica são bastante utilizados, os quais são amplamente estudados em (D'Agostino & Stephens, 1986).

1.2.1 Estatística de Função de Distribuição Empírica

O fato de conhecermos a função de distribuição acumulada, ou apenas função de distribuição, nos permite obter muita informação sobre determinada variável. Anteriormente, na Seção 1.1.2, vimos um pouco sobre função de distribuição, no entanto, a seguir, iremos defini-la formalmente.

Definição 1.5 *A função de distribuição de uma variável aleatória X , denotada por $F_X(x)$, ou simplesmente $F(x)$, é definida por*

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uma função de distribuição é munida das seguintes propriedades:

- (i) F é não decrescente, ou seja, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.
- (ii) F é contínua à direita, isto é, $x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \downarrow F(x)$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

As demonstrações das propriedades acima podem ser vistas em (James, 2015, Pag. 41).

Definição 1.6 *Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$ contínua. Assim, a função de distribuição empírica (fde) dos X_i 's é dada por*

$$F_n(x) = \frac{\text{número de observações} \leq x}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(X_i \leq x)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

em que,

$$I_{(X_i \leq x)} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i \leq x; \\ 0, & \text{se } X_i > x. \end{cases}$$

Agora, suponha $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ como sendo as estatísticas de ordem dos X_i 's as quais satisfazem a condição $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$. Deste modo, escrevendo a fde em função das estatísticas de ordem $X_{(i)}$'s, temos que

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < X_{(1)}; \\ \frac{i}{n}, & X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1; \\ 1, & X_{(n)} \leq x. \end{cases} \quad (1.5)$$

Observe que a Expressão (1.5) é uma função degrau, calculada a partir dos dados amostrais. Nessas condições, quando x aumenta, a função $F_n(x)$ dá um salto de magnitude $1/n$ à medida que cada observação da amostra é atingida. Para qualquer x , $F_n(x)$ registra a proporção de observações menores ou iguais a x , enquanto que $F(x)$ fornece a probabilidade de uma observação ser menor ou igual a x .

Teorema 1.1 *Seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Então, $F_n(a)$ é um estimador consistente de $F(a)$.*

Demonstração: ver (Tsuyuguchi, n.d., Pag. 35).

(Tsuyuguchi, n.d.) apresenta uma consistência de modo mais geral do que a apresentada no Teorema 1.1, em que se considera qualquer valor de x pertencente ao domínio da função F , de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{D} 0.$$

Uma estatística que mede a discrepância entre $F_n(x)$ e $F(x)$ é chamada de estatística de função de distribuição empírica. Tais estatísticas são baseadas nas diferenças verticais entre $F_n(x)$ e $F(x)$, e é conveniente dividi-las em duas classes: a *classe supremo* e a *classe quadrática*.

Estatísticas Supremo

As duas primeiras estatísticas de fde que serão apresentadas são D^+ e D^- , as quais consistem, respectivamente, nas maiores diferenças verticais quando $F_n(x)$ é maior que $F(x)$ e quando $F_n(x)$ é menor que $F(x)$. Formalmente, tem-se que

$$D^+ = \sup_x \{F_n(x) - F(x)\}$$

e

$$D^- = \sup_x \{F(x) - F_n(x)\}.$$

A estatística de fde mais conhecida é a estatística D de Kolmogorov-Smirnov, a qual é definida da seguinte maneira:

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)| = \max(D^+, D^-). \quad (1.6)$$

Uma estatística relacionada à mostrada em (1.6), introduzida por (Kuiper, 1960), é a estatística V , definida como:

$$V = D^+ + D^-.$$

Estatísticas Quadráticas

Uma ampla classe de medidas de discrepância é dada pela família Cramér-von Mises, em que temos

$$Q = n \int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x) - F(x)\}^2 \psi(x) dF(x), \quad (1.7)$$

em que $\psi(x)$ é uma função adequada que dá pesos ao quadrado da diferença dado por $\{F_n(x) - F(x)\}^2$.

Quando $\psi(x) = 1$, tem-se que a Expressão (1.7) é chamada de estatística de Cramér-von Mises, e é denotada por W^2 . Ou seja,

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x) - F(x)\}^2 dF(x).$$

Quando $\psi(x) = [\{F(x)\}\{1 - F(x)\}]^{-1}$, a Expressão (1.7) é chamada de estatística de Anderson-Darling, e é denotada por A^2 . Logo,

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{F_n(x) - F(x)\}^2}{F(x)\{1 - F(x)\}} dF(x).$$

A partir das estatísticas supremo e quadráticas apresentadas anteriormente, podemos encontrar algumas fórmulas que facilitarão nossos cálculos computacionais mais à frente. Isso é feito usando a transformação integral de probabilidade.

Teorema 1.2 (*Transformação Integral de Probabilidade*) *Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição F . Considerando a variável aleatória*

$$Z = F(X),$$

temos que $Z \sim U(0; 1)$.

Demonstração: ver (Magalhães, 2006, p. 151).

A partir do Teorema 1.2, observa-se que Z tem função de distribuição dada por $F^*(z) = z$, $0 \leq z \leq 1$.

Agora, suponha uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n e considere a transformação $Z_i = F(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Observe que Z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, constitui uma amostra aleatória a partir dos valores X_i . Sendo $F_n^*(z)$ a fde dos valores Z_i , de acordo com (D'Agostino & Stephens, 1986), temos que as estatísticas de fde relativas aos X_i 's podem ser obtidas comparando a fde, $F_n^*(z)$, com a função de distribuição teórica de Z , pois os valores z e x são relacionados da forma $z = F(x)$, implicando nas seguintes igualdades:

$$F_n(x) - F(x) = F_n^*(z) - F^*(z) = F_n^*(z) - z,$$

consequentemente, as estatísticas de fde calculadas a partir da fde dos Z_i 's, comparada com a função de distribuição do modelo uniforme definido no intervalo $[0;1]$, terão os mesmos valores como se tais estatísticas fossem calculadas a partir da fde dos X_i 's, comparada com $F(x)$.

Visando a facilitação da implementação dos cálculos computacionais que serão feitos mais adiante, estudamos novas formas para as estatísticas supremo e quadráticas. Assim, sejam $Z_{(0)}, Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots, Z_{(n)}, Z_{(n+1)}$ as estatísticas de ordem dos valores observados de Z , de modo que $0 = Z_{(0)} < Z_{(1)} < \dots < Z_{(n)} < Z_{(n+1)} = 1$. Daí, temos que

$$D^+ = \max_i \left\{ \frac{i}{n} - Z_{(i)} \right\}; \quad D^- = \max_i \left\{ Z_{(i)} - \frac{(i-1)}{n} \right\}. \quad (1.8)$$

$$W^2 = \sum_i \left\{ Z_{(i)} - \frac{(2i-1)}{2n} \right\}^2 + \frac{1}{12n}. \quad (1.9)$$

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_i \left\{ (2i-1) \log[Z_{(i)}] + (2n+1-2i) \log[1-Z_{(i)}] \right\}. \quad (1.10)$$

As demonstrações de (1.8), (1.9) e (1.10) podem ser encontradas em (Tsuyuguchi, n.d., p. 73).

1.2.2 Teste de Bondade de Ajuste Aproximado

Na prática, diferentes distribuições de probabilidade são usadas para a descrição de fenômenos. Assim, para cada distribuição, uma nova tabela de pontos críticos precisa ser criada. Tendo em vista a observância desse fato, (Chen & Balakrishnan, 1995) propuseram um procedimento aproximado que pode ser utilizado para testar a adequação de conjuntos de dados a distintas famílias de distribuições, em que tal procedimento possui a vantagem de ser mais prático.

O método, primeiramente, transforma os dados originais em dados normalmente distribuídos. Em seguida, aplica os testes clássicos para a normalidade baseados na função de distribuição empírica, considerando os pontos críticos do mesmo. O procedimento empregado é fundamentado na ligação entre a hipótese composta H_0 e o problema de testar a normalidade quando a média e a variância são desconhecidos.

(Meintanis, 2010), tendo em vista o procedimento proposto por (Chen & Balakrishnan, 1995), ordenou os seguintes passos para testar a bondade de ajuste considerando uma distribuição de probabilidade de parâmetro θ , com base numa amostra aleatória, X_1, \dots, X_n , a qual é suposta independente da variável aleatória sob hipótese:

- (i) Estimar θ por $\hat{\theta}$ de modo eficiente.
- (ii) Calcular $\hat{U}_i = F(X_{(i)}; \hat{\theta})$, em que $X_{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ são as estatísticas de ordem dos X_i 's.
- (iii) Calcular $Y_i = \Phi^{-1}(\hat{U}_i)$, onde Φ é a função de distribuição acumulada da distribuição Normal padrão e Φ^{-1} é a sua inversa.
- (iv) Calcular (1.9) e (1.10), de modo que $Z_i = \Phi(Z_i^*)$, $j = 1, 2, \dots, n$, onde

$$Z_i^* = \frac{Y_i - \bar{Y}}{S_Y},$$

em que

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{e} \quad S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$$

(Meintanis, 2010) também descreve o processo acima relatando que o passo (i) consiste na estimação de modo eficiente. No passo (ii) aplica-se a transformação integral de probabilidade, de modo que as variáveis passam a ser uniformes. O passo (iii) torna

as variáveis Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ aproximadamente normais. Por fim, o passo (iv) nos traz os testes clássicos de normalidade incorporando as observações padronizadas, Z_i^* , e a função de distribuição acumulada da Normal padrão, Φ .

Capítulo 2

Distribuição Birnbaum-Saunders

Neste capítulo, iremos fazer uma abordagem sobre a distribuição Birnbaum-Saunders, abordagem essa que engloba a origem do modelo probabilístico bem como suas principais propriedades.

2.1 Origem e Propriedades

Quando um material é usado constantemente e/ou é exposto a situações de estresse e tensão naturalmente o mesmo deverá sofrer danos em sua estrutura e, a esses danos, damos o nome de fadiga. Por meio da análise de sobrevivência pode-se avaliar a durabilidade, qualidade e outras características de um certo material exposto a situações que proporcionam fadiga. Essa avaliação é feita por meio da modelagem do processo de fadiga, no intuito de descrever a variação aleatória dos tempos de falha associados a esse material. Nessa vertente, várias distribuições de probabilidade podem ser utilizadas, entre elas, a gama, Weibull e log-normal, as quais apresentam um bom ajuste na região central da distribuição. Entretanto, esses modelos probabilísticos não se adequam muito bem aos percentis mais extremos da distribuição. Em geral, estamos interessados nos percentis mais baixos e mais altos, já que, comumente, essas regiões possuem poucos dados, fazendo com que o ajuste dos modelos mencionados, em alguns casos, não seja bom. (Birnbaum & Saunders, 1969a) utilizaram o conhecimento sobre um tipo específico de processo de fadiga e propuseram uma nova distribuição de probabilidade denominada distribuição Birnbaum-Saunders, a qual apresentou-se como uma

excelente alternativa quando temos interesse em analisar a qualidade do ajuste de um modelo nos percentis mais baixos e mais altos da distribuição.

Para a criação do modelo Birbaum-Saunders, (Birbaum & Saunders, 1969a) fizeram as seguintes suposições sobre o processo de fadiga:

- Um material é submetido a oscilações de cargas periódicas (cíclicas) de estresse e tensão;
- A sequência de estresse e tensão imposta ao material é a mesma em cada ciclo;
- A falha por fadiga ocorre devido ao início, crescimento e extensão final de uma fissura dominante dentro do material, fissura essa criada pelas condições de estresse e tensão. Portanto, a falha ocorre quando a extensão final da fissura ultrapassa um certo nível de resistência w ;
- A extensão incremental da fissura X_i , resultante da aplicação da i -ésima oscilação de carga, é uma variável aleatória com uma distribuição que depende apenas da extensão da fissura atual causada pela tensão neste ciclo;
- A extensão da fissura durante o $(j + 1)$ -ésimo ciclo é

$$Y_{j+1} = X_{jm+1} + \dots + X_{jm+m}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

em que X_{jm+i} é a extensão da fissura (possivelmente microscópica) após a i -ésima oscilação de carga do $(j + 1)$ -ésimo ciclo;

Observação 2.1 *Por mais que exista dependência entre a extensão aleatória sucessiva por oscilação de cargas em cada ciclo, as extensões da fissura em ciclos distintos são supostamente independentes.*

- A extensão total da fissura Y_j , devida ao j -ésimo ciclo, é uma variável aleatória que segue uma distribuição de média μ e variância σ^2 , $\forall j = 1, 2, \dots$.

Deste modo, a extensão total da fissura após n ciclos é dada pela variável aleatória

$$W_n = \sum_{j=1}^n Y_j,$$

com função de distribuição acumulada dada por

$$H_n(w) = P(W_n \leq w), \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Consideremos C como sendo a variável aleatória que denota o número de ciclos requeridos até a observância da falha. Assim, a função de distribuição acumulada de C é

$$P(C \leq n) = P\left(\sum_{j=1}^n Y_j > w\right) = P(W_n > w) = 1 - H_n(w).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} P(C \leq n) &= P\left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Pelo fato de estarmos considerando que os Y_j 's são independentes com o acréscimo da suposição de que os mesmos são identicamente distribuídos, segue do Teorema Central do Limite que

$$\begin{aligned} P(C \leq n) &\cong 1 - \Phi\left(\frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{(n\mu - w)}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{n\mu - w}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{w}{\sigma\sqrt{n}}\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $\Phi(\cdot)$ representa a fda da distribuição Normal padrão.

Utilizando a Equação (2.1), (Birnbaum & Saunders, 1969a) definiram um novo modelo contínuo de vida. Segundo os autores, ao substituirmos n por uma variável real não-negativa t , então a variável aleatória T é a extensão contínua da variável aleatória discreta C . Dessa forma, T representa o tempo total até que ocorra a falha. Considerando a seguinte reparametrização

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu w}} > 0 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{w}{\mu} > 0,$$

a fda de T será dada por

$$F(t; \alpha, \beta) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right], \quad t > 0. \tag{2.2}$$

Dizemos, então, que T segue distribuição Birnbaum-Saunders com parâmetros α e β , a qual denotaremos por $T \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$, em que α é o parâmetro de forma e β o parâmetro de escala da distribuição.

De acordo com (Leiva, 2015, p. 9), se $T \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$, então podemos estabelecer a seguinte relação:

$$T = \frac{\beta(\alpha Z + \sqrt{\alpha^2 Z^2 + 4})^2}{4}, \quad (2.3)$$

em que $Z \sim N(0; 1)$. Conseqüentemente,

$$Z = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right) \sim N(0; 1).$$

A função densidade de probabilidade (fdp) de T é expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(t; \alpha, \beta) &= \frac{d}{dt} F(t; \alpha, \beta) \\ &= \phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right] \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right\} \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

de modo que $t, \alpha, \beta > 0$ e $\phi(\cdot)$ é a fdp da distribuição normal padrão.

A Figura 2.1 apresenta as curvas de densidade do modelo Birnbaum-Saunders considerando diferentes valores para o parâmetro de forma α e o parâmetro de escala fixo $\beta = 1$. Podemos observar que à medida que o valor de α aumenta, a curva de densidade vai ficando cada vez mais assimétrica. Na Figura 2.2, temos as curvas de densidade da distribuição Birnbaum-Saunders para diferentes valores de β e parâmetro de forma fixo em $\alpha = 0,5$. É fácil perceber que para valores menores de β , existe uma maior concentração em torno da moda da distribuição, isto é, temos curvas de densidade leptocúrticas. Entretanto, à medida que o valor de β aumenta, existe uma maior dispersão em torno do valor modal, gerando curvas platicúrticas.

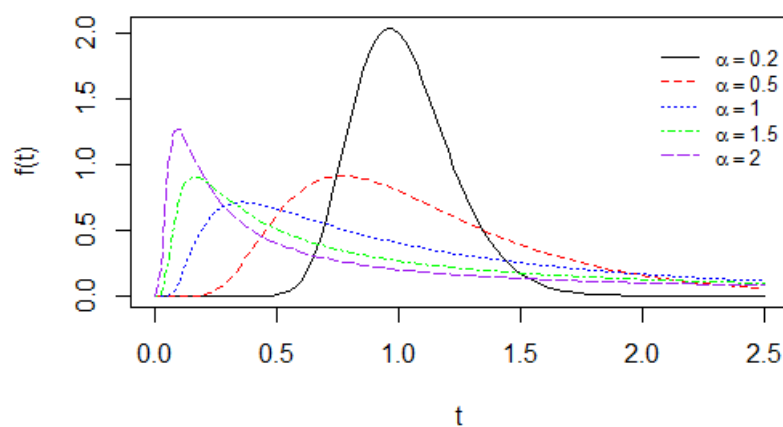
Considere uma variável aleatória T com distribuição Birnbaum-Saunders. Então, T é munida das seguintes propriedades:

Propriedade 2.1 *O parâmetro de escala β é a mediana da distribuição $\text{BS}(\alpha, \beta)$.*

Demonstração:

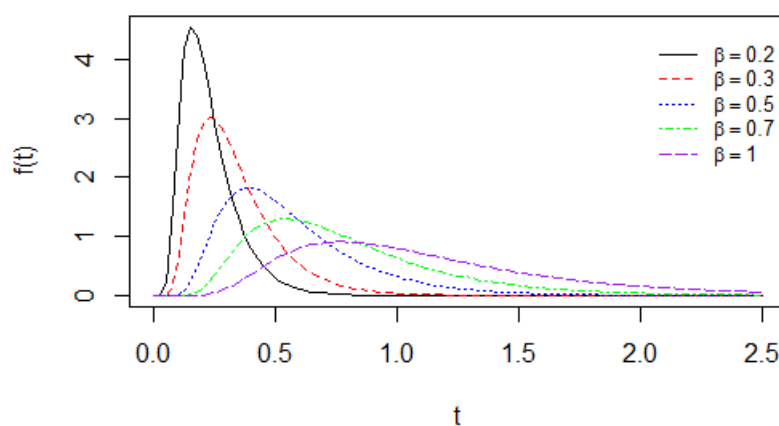
$$F(\beta; \alpha, \beta) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\beta}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{\beta}} \right) \right] = \Phi(0) = 0,5.$$

Figura 2.1: Densidade Birnbaum-Saunders para valores de α indicados e $\beta = 1$.



Fonte: Próprio autor.

Figura 2.2: Densidade Birnbaum-Saunders para valores de β indicados e $\alpha = 0,5$.



Fonte: Próprio autor.

Isso significa que β é o ponto da distribuição em que 50% dos dados são menores que ele e 50% são maiores, ou seja, β é a mediana da distribuição.

Propriedade 2.2 Se $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então $cT \sim BS(\alpha, c\beta)$, com $c > 0$.

Demonstração:

Seja $Y = cT$, em que $T \sim BS(\alpha, \beta)$. Daí,

$$\begin{aligned}
 F_Y(y; \alpha, \beta) &= P(Y \leq y) = P(cT \leq y) \\
 &= P\left(T \leq \frac{y}{c}\right) = F_T\left(\frac{y}{c}; \alpha, \beta\right) \\
 &= \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{y/c}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{y/c}}\right)\right] \\
 &= \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{y}{c\beta}} - \sqrt{\frac{c\beta}{y}}\right)\right].
 \end{aligned}$$

Portanto, temos que $Y \sim BS(\alpha, c\beta)$.

Propriedade 2.3 *Se $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então $T^{-1} \sim BS(\alpha, \beta^{-1})$.*

Demonstração:

Seja $Y = T^{-1}$, em que $T \sim BS(\alpha, \beta)$. Então,

$$\begin{aligned}
 F_Y(y; \alpha, \beta) &= P(Y \leq y) = P(T^{-1} \leq y) \\
 &= P(T \geq y^{-1}) = 1 - F_T(y^{-1}) \\
 &= 1 - \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{y^{-1}}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{y^{-1}}}\right)\right] \\
 &= \Phi\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{y^{-1}}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{y^{-1}}}\right)\right] \\
 &= \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{\beta}{y^{-1}}} - \sqrt{\frac{y^{-1}}{\beta}}\right)\right] \\
 &= \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{y}{\beta^{-1}}} - \sqrt{\frac{\beta^{-1}}{y}}\right)\right],
 \end{aligned}$$

de onde segue que $Y \sim BS(\alpha, \beta^{-1})$.

Propriedade 2.4 *Se $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então o valor esperado e a variância de T são dadas, respectivamente, por*

$$E(T) = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \quad e \quad \text{Var}(T) = \beta^2 \alpha^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right).$$

Demonstração: Ver (Leiva, 2015, p. 26) ou (Birnbaum & Saunders, 1969b).

Propriedade 2.5 *O percentil de ordem p da distribuição Birnbaum-Saunders pode ser obtido através de*

$$t_p = \frac{\beta(\alpha Z + \sqrt{\alpha^2 Z^2 + 4})^2}{4},$$

de modo que $Z = \Phi^{-1}(p) \sim N(0; 1)$.

Demonstração:

Considere que $T \sim BS(\alpha, \beta)$ e que $F(t; \alpha, \beta)$ é a fda de T . Podemos obter o percentil de ordem p da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F(t_p; \alpha, \beta) &= p \\ \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t_p}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t_p}} \right) \right] &= p \\ \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t_p}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t_p}} \right) &= \Phi^{-1}(p) \\ \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t_p}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t_p}} \right) &= Z, \end{aligned}$$

de onde, pela relação (2.3), obtém-se que

$$t_p = \frac{\beta(\alpha Z + \sqrt{\alpha^2 Z^2 + 4})^2}{4}.$$

Propriedade 2.6 *Se $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então sua função de sobrevivência é dada por:*

$$S(t; \alpha, \beta) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\beta}} \right) \right], \quad t > 0.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} S(t; \alpha, \beta) &= 1 - F(t; \alpha, \beta) \\ &= 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right] \\ &= \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\beta}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Propriedade 2.7 *Considere que $T \sim BS(\alpha, \beta)$. Então, a função de risco de T pode ser expressa da seguinte forma:*

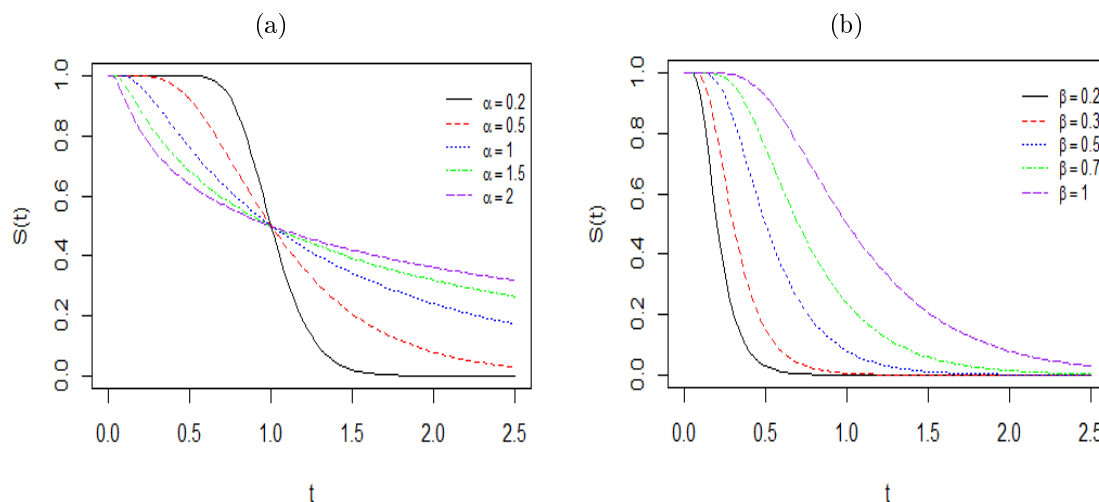
$$h(t; \alpha, \beta) = \frac{t^{-3/2}(t + \beta) \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right\}}{2\alpha\sqrt{2\pi\beta}\Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\beta}} \right) \right]}, \quad t > 0.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 h(t; \alpha, \beta) &= \frac{f(t; \alpha, \beta)}{S(t; \alpha, \beta)} \\
 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right\} \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}}{\Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\beta}} \right) \right]} \\
 &= \frac{t^{-3/2}(t + \beta) \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right\}}{2\alpha\sqrt{2\pi\beta} \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\beta}} \right) \right]}.
 \end{aligned}$$

As Figuras 2.3 e 2.4 apresentam as curvas de sobrevivência e de risco, respectivamente, para diferentes valores de α e β .

Figura 2.3: Curvas de sobrevivência da distribuição Birnbaum-Saunders para valores indicados de α com $\beta = 1$ (a) e para valores indicados de β com $\alpha = 0,5$ (b).

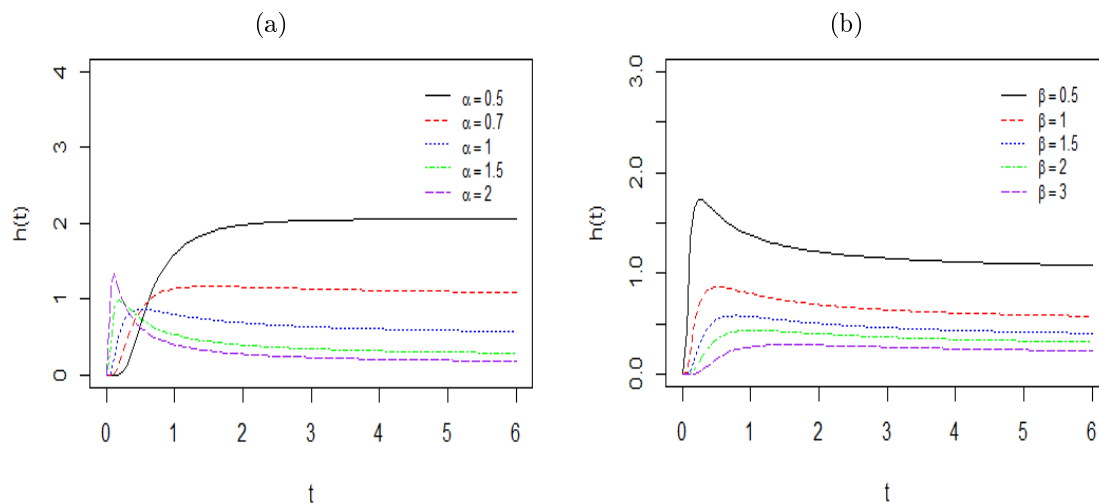


Fonte: Próprio autor.

Pela Figura 2.3(a), podemos observar que valores maiores de α fazem com que a função de sobrevivência decresça mais lentamente. Na Figura 2.3(b), percebe-se que a função de sobrevivência retorna probabilidades de sobrevivência maiores à medida que se aumenta o valor de β .

A Figura 2.4(a) nos mostra que os valores assumidos pela função de risco são menores à medida que se aumenta o valor do parâmetro α . Além disso, a função

Figura 2.4: Curvas de risco da distribuição Birnbaum-Saunders para valores indicados de α com $\beta = 1$ (a) e para valores indicados de β com $\alpha = 1$ (b).



Fonte: Próprio autor.

de risco cresce até um certo valor, de modo que após esse valor tal função tem um decréscimo o qual vai se estabilizando. A Figura 2.4(b) nos apresenta algo similar, de modo que os valores assumidos pela função de risco se tornam menores à medida que se aumenta o valor do parâmetro β e, após um certo valor, a curva se estabiliza..

2.2 Geração de Números Pseudo-Aleatórios

(Ribeiro, 2014) apresenta um algoritmo simples para a geração de números pseudo-aleatórios para o modelo Birnbaum-Saunders:

Algoritmo 1: Gerador de números pseudo-aleatórios a partir da distribuição Birnbaum-Saunders.

1. Gere valores z a partir da variável aleatória $Z \sim N(0; 1)$;
 2. Obtenha valores de t a partir da relação (2.3).
-

Também é possível utilizar a função `rbisa` do pacote VGAM no *software* R para gerar valores de uma distribuição Birnbaum-Saunders. Para mais informações, ver (Yee, 2017).

2.3 Estimação

Nesta seção, iremos apresentar dois métodos para estimação dos parâmetros α e β da distribuição Birnbaum-Saunders: o método de máxima verossimilhança e o método dos momentos modificado.

2.3.1 Método de Máxima Verossimilhança

Seja T uma variável aleatória com distribuição $BS(\alpha, \beta)$ e $f(t; \boldsymbol{\theta})$ sua fdp, em que $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)'$. Considere também uma amostra aleatória T_1, \dots, T_n de tamanho n tomada a partir de T , de modo que t_1, \dots, t_n sejam seus respectivos valores observados. Assim, temos que a função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^n f(t_i; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} - \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \frac{t_i^{-3/2}(t_i + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}. \end{aligned}$$

O logaritmo da função de verossimilhança fica dado por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \log[L(\boldsymbol{\theta})] \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \frac{t_i^{-3/2}(t_i + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) - \frac{3}{2} \log(t_i) + \log(t_i + \beta) - \log(2) \right. \\ &\quad \left. - \log(\alpha) - \frac{1}{2} \log(\beta) \right\} \\ &= n \left(\log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \log(2) \right) - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) - n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Derivando a Expressão (2.6) em relação a α e igualando a zero, obtemos que

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{t_i} - 2 \right)}. \tag{2.7}$$

Considerando

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad \text{e} \quad r = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}},$$

ou seja, as respectivas médias aritmética e harmônica amostrais, podemos reescrever a Expressão (2.7) de tal forma que

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{\bar{t}}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2} .$$

Agora, se derivarmos a Expressão (2.6) com relação a β e igualarmos a zero, obtemos

$$-\frac{1}{2\hat{\alpha}^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\hat{\beta}^2} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i + \hat{\beta}} - \frac{n}{2\hat{\beta}} = 0. \quad (2.8)$$

A Expressão (2.8) não possui solução analítica em $\hat{\beta}$ e, portanto, não podemos obter o estimador de máxima verossimilhança para β analiticamente. Uma alternativa é utilizar métodos computacionais iterativos como, por exemplo, o método de Newton-Raphson. Para mais detalhes sobre esse método, ver (Ortega & Rheinboldt, 1970).

2.3.2 Método dos Momentos Modificado

A estimação de parâmetros pelo método dos momentos é feita igualando-se os momentos populacionais aos respectivos momentos amostrais. Entretanto, no caso da distribuição Birnbaum-Saunders, de acordo com (Ribeiro, 2014), se o coeficiente de variação for menor que $\sqrt{5}$, os estimadores de momentos não existem. Deste modo, (Ng, Kundu, & Balakrishnan, 2003) propuseram utilizar a média harmônica para solucionar esse problema. O procedimento é o seguinte: iguala-se o inverso da média harmônica amostral a $E(1/T)$ em vez de igualar o segundo momento populacional ao respectivo momento amostral. Assim, para esse procedimento, temos

$$\bar{t} = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad \text{e} \quad r^{-1} = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right),$$

de modo que os estimadores obtidos pelo métodos dos momentos modificado são dados, respectivamente, por

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{2 \left(\sqrt{\frac{\bar{t}}{r}} - 1 \right)} \quad (2.9)$$

e

$$\tilde{\beta} = \sqrt{r\bar{t}}. \quad (2.10)$$

Capítulo 3

Teste de Bondade de Ajuste para Distribuição Birnbaum-Saunders Baseado na Informação de Kullback-Leibler (sem Censura)

Neste capítulo, iremos propor um teste de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders, de modo que tal teste será baseado na informação de Kullback-Leibler. Vale salientar que para o desenvolvimento desse teste, iremos considerar, inicialmente, dados não censurados.

Primeiramente, falaremos sobre a entropia diferencial e a informação de Kullback-Leibler, bem como seus estimadores não-paramétricos. Logo após, iremos desenvolver a estatística de teste e analisar o desempenho da mesma através de um estudo de simulação e, por fim, ilustraremos a metodologia com dados reais.

3.1 Entropia Diferencial e Informação de Kullback-Leibler

Definição 3.1 *Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição $F(x)$ e função densidade $f(x)$. A entropia diferencial de f é definida em (Shannon, 2001) como sendo*

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx. \quad (3.1)$$

Da Expressão (3.1), temos que

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[- \log(f(x))]dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log\left(\frac{1}{f(x)}\right) dx.$$

Agora, considere a seguinte transformação: $p = F(x) \Rightarrow dp = f(x)dx$. Observe ainda que $0 \leq p \leq 1$, já que $F(x)$ é uma função de distribuição e $x = F^{-1}(p)$. Daí, obtemos que

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dF^{-1}(p)}{dp} = \frac{1}{f(F^{-1}(p))} = \frac{1}{f(x)}.$$

Logo, chegamos que

$$H(f) = \int_0^1 \log\left\{\frac{d}{dp}F^{-1}(p)\right\} dp. \quad (3.2)$$

(Vasicek, 1976) foi o primeiro a propor um teste para normalidade baseado na entropia amostral, que também comparou o poder da estatística de teste com os principais testes para amostras completas, em que as estatísticas de teste utilizadas foram a de Kolmogorov-Smirnov, a de Cramér-von Mises, a de Kuiper, a de Watson, a de Anderson-Darling e, por fim, a de Shapiro-Wilk, isso considerando para a hipótese alternativa as distribuições Exponencial, Gama, Uniforme, Beta e Cauchy. Para tal teste, concluiu-se que para as alternativas Exponencial, Uniforme e Beta, o teste baseado em entropia obteve poderes maiores em relação as outras estatísticas de teste consideradas. A diferença de entropias, $H(f) - H(g)$, foi considerada em (Dudewicz & Van Der Meulen, 1981) e em (Gokhale, 1983) para estabelecer testes de bondade de ajuste para distribuições de probabilidade que maximizam a entropia (classe de distribuições de entropia máxima).

(Vasicek, 1976) propõe um estimador não paramétrico para $H(f)$. Para obter esse estimador, ele tomou como base a Expressão (3.2) e o fato de que um estimador para $f(x)$ pode ser obtido como o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(F(X_{(i+m)}), X_{(i+m)})$ e $(F(X_{(i-m)}), X_{(i-m)})$, de modo que $\left\{\frac{d}{dp}F^{-1}(p)\right\}$ pode ser estimado por $\frac{n}{2m}(x_{(i+m)} - x_{(i-m)})$. Assim, o estimador para $H(f)$ fica dado por:

$$H_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left\{\frac{n}{2m}(x_{(i+m)} - x_{(i-m)})\right\}, \quad (3.3)$$

em que a janela m é um número inteiro positivo menor que $n/2$ e $x_{(i-m)} = x_{(1)}$, $i - m < 1$, e $x_{(i+m)} = x_{(n)}$, $i + m > n$, de modo que $x_{(i)}$ é o i -ésimo valor observado das estatísticas de ordem.

Definição 3.2 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções densidade de probabilidade. A Informação de Kullback-Leibler (KL) é definida em (Kullback, 1959) da seguinte maneira:*

$$I(f : g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) dx, \quad (3.4)$$

de modo que $I(f : g)$ mede a distância entre a distribuição observada F , com fdp $f(x)$, e o modelo probabilístico G , com fdp $g(x)$.

Observe que a Expressão (3.4) nada mais é do que um conceito estendido de entropia. Como $I(g : f) \geq 0$, com $I(f : g) = 0$ se $f(x) = g(x)$, a estimativa da informação de KL também pode ser considerada como uma estatística de teste para testes de bondade de ajuste, ver (Rad et al., 2011).

Com o intuito de facilitar a estimação da informação de KL, vamos reescrever a Expressão (3.4) de tal forma que

$$\begin{aligned} I(f : g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\log(f(x)) - \log(g(x))] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(f(x)) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(g(x)) dx \\ &= -H(f) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(g(x)) dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A partir da Expressão (3.5), podemos obter uma estimativa não-paramétrica da informação de KL, de modo que substituimos $H(f)$ por sua estimativa dada em (3.3) e utilizamos os valores estimados dos parâmetros em $f(x)$. Assim, sob a hipótese nula de que $f(x) = g(x)$, podemos estimar a informação de KL por

$$I_{mn} = -H_{mn} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \hat{\theta}) \log(f(x; \hat{\theta})) dx, \quad (3.6)$$

em que $\hat{\theta}$ é um estimador consistente para o parâmetro θ . É importante atentar para o fato de que θ também pode ser um vetor de parâmetros.

Portanto, I_{mn} constitui uma estatística de teste para verificar a adequação de um conjunto de dados a um modelo probabilístico contínuo com função de distribuição dada por $F(x)$. Vale salientar que hipóteses sobre os parâmetros do modelo não são testadas, mas apenas o fato dos dados seguirem determinada distribuição de probabilidade.

3.2 Estatística de Teste para a Distribuição Birnbaum-Saunders

Queremos testar a hipótese nula H_0 : a variável aleatória X que descreve os dados segue distribuição Birnbaum-Saunders, contra a hipótese alternativa H_1 : a variável aleatória X não segue distribuição Birnbaum-Saunders.

Para tanto, temos que sob H_0 ,

$$f^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{x}{\beta} + \frac{\beta}{x} - 2 \right) \right\} \frac{x^{-3/2}(x+\beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \quad x > 0, \alpha, \beta > 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f^0(x) \log f^0(x) dx &= \int_0^\infty f^0(x) \log \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{x}{\beta} + \frac{\beta}{x} - 2 \right) \right\} \frac{x^{-3/2}(x+\beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}} \right] dx \\ &= \int_0^\infty f^0(x) \left[\log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{x}{\beta} + \frac{\beta}{x} - 2 \right) + \log[x^{-3/2}(x+\beta)] \right. \\ &\quad \left. - \log(2\alpha\sqrt{\beta}) \right] dx \\ &= \int_0^\infty f^0(x) \left[\log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{x}{2\alpha^2\beta} - \frac{\beta}{2\alpha^2x} + \frac{1}{\alpha^2} + \log x^{-3/2} \right. \\ &\quad \left. + \log(x+\beta) - \log(2\alpha\sqrt{\beta}) \right] dx \\ &= \int_0^\infty \left[f^0(x) \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2\alpha^2\beta} x f^0(x) - \frac{\beta}{2\alpha^2} \frac{f^0(x)}{x} + \frac{1}{\alpha^2} f^0(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \log(x) f^0(x) + \log(x+\beta) f^0(x) - \log(2\alpha\sqrt{\beta}) f^0(x) \right] dx \\ &= \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f^0(x) dx - \frac{1}{2\alpha^2\beta} \int_0^\infty x f^0(x) dx - \frac{\beta}{2\alpha^2} \int_0^\infty \frac{1}{x} f^0(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty f^0(x) dx - \frac{3}{2} \int_0^\infty \log(x) f^0(x) dx + \int_0^\infty \log(x+\beta) f^0(x) dx \\ &\quad - \log(2\alpha\sqrt{\beta}) \int_0^\infty f^0(x) dx \\ &= \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2\alpha^2\beta} E(X) - \frac{\beta}{2\alpha^2} E \left(\frac{1}{X} \right) + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{3}{2} E(\log(X)) \\ &\quad + E[\log(X+\beta)] - \log(2\alpha\sqrt{\beta}). \end{aligned}$$

Na Seção 2.1, vimos que $E(X)$ e $E(1/X)$ são dadas por

$$E(X) = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad \text{e} \quad E \left(\frac{1}{X} \right) = \beta^{-1} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^0(x) \log f^0(x) dx &= \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\alpha^2} - \log(2\alpha\sqrt{\beta}) - \frac{1}{2\alpha^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{1}{2\alpha^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \\
&\quad - \frac{3}{2} E(\log X) + E[\log(X + \beta)] \\
&= \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\alpha^2} - \log(2\alpha\sqrt{\beta}) - \frac{1}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{3}{2} E(\log X) \\
&\quad + E[\log(X + \beta)]. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Com base nas n estatísticas de ordem, $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$, e utilizando a lei forte dos grandes números de Kolmogorov, ver (James, 2015, p. 229), podemos estimar o valor da integral dado em (3.7) por

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^0(x) \log f^0(x) dx &= \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + \frac{1}{\hat{\alpha}^2} - \log \left(2\hat{\alpha}\sqrt{\hat{\beta}} \right) - \frac{1}{\hat{\alpha}^2} \left(1 + \frac{\hat{\alpha}^2}{2} \right) \\
&\quad - \frac{3}{2n} \sum_{i=1}^n \log(x_{(i)}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_{(i)} + \hat{\beta}). \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Assim, substituindo a integral estimada dada em (3.8) na Expressão (3.6), obtemos a informação de KL estimada considerando o modelo Birnbaum-Saunders, isto é,

$$\begin{aligned}
I_{mn} &= -H_{mn} - \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\hat{\alpha}^2} + \log \left(2\hat{\alpha}\sqrt{\hat{\beta}} \right) + \frac{1}{\hat{\alpha}^2} \left(1 + \frac{\hat{\alpha}^2}{2} \right) + \frac{3}{2n} \sum_{i=1}^n \log(x_{(i)}) \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_{(i)} + \hat{\beta}).
\end{aligned}$$

De acordo com (Arizono & Ohta, 1989), temos que $I_{mn} \in [0; \infty)$. Assim, no intuito de facilitar a obtenção dos valores críticos para a estatística de teste, iremos considerar a seguinte transformação:

$$KL_{mn} = \frac{1}{\exp\{I_{mn}\}}, \tag{3.9}$$

de modo que $0 \leq KL_{mn} \leq 1$. Observe que a função exponencial é monótona crescente, assim não teremos problemas em fazer a transformação acima. Deste modo, a Expressão (3.9) constitui uma estatística de teste para testar a bondade de ajuste de um conjunto de dados não-censurados ao modelo probabilístico Birnbaum-Saunders. É importante atentar ao fato de que o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\top$ tem que ser estimado consistentemente. Assim, a regra de decisão será: rejeitamos a hipótese H_0 se

$KL_{mn} \leq KL_{mn}^*(\rho)$, em que $KL_{mn}^*(\rho)$ é o valor crítico do teste ao nível de significância ρ . Como não temos a distribuição exata de KL_{mn} , então vamos obter $KL_{mn}^*(\rho)$ através de simulação de Monte Carlo.

3.3 Estudo de Simulação

Para avaliar o teste proposto, conduzimos um estudo de simulação baseado no método de Monte Carlo. Todas as simulações foram implementadas no *software* R.

3.3.1 Valores Críticos

Para obtenção dos valores críticos, foram consideradas 10.000 réplicas de Monte Carlo e diferentes tamanhos amostrais. Também foram considerados diferentes valores para a janela m , de modo que o valor de m apropriado será aquele que retornar o valor crítico máximo, ver (Arizono & Ohta, 1989). Vale salientar que considera-se como valores apropriados de m aqueles tais que $m < n/2$. Além disso, foram adotados os níveis de significância nominais de $\rho = 0,10$ e $\rho = 0,05$.

Algoritmo 2: Obtenção dos valores críticos do teste a partir da distribuição Birnbaum-Saunders, considerando dados não censurados.

1. Gerar 10.000 amostras aleatórias de tamanho n a partir da variável aleatória $X \sim BS(\alpha; \beta)$;
 2. Estimar o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\top$ consistentemente;
 3. Para cada amostra, obter os valores da estatística de teste KL_{mn} ;
 4. Ordenar os valores da estatística de teste obtidos no passo anterior e determinar os quantis de ordem 10% e 5%, e então obter os valores críticos para os respectivos níveis de significância.
-

Os valores críticos obtidos, considerando as distribuições $BS(0, 5; 1)$, $BS(1; 1)$ e $BS(1, 5; 1)$, encontram-se dispostos nas Tabelas 3.1–3.6.

Tabela 3.1: Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(0, 5; 1)$ e um nível de 10% de significância.

n	Valores de m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0,3101									
4	0,3145									
5	0,3535	0,4615								
6	0,3831	0,4833								
7	0,4130	0,5064	0,5140							
8	0,4393	0,5342	0,5385							
9	0,4593	0,5521	0,5610	0,5430						
10	0,4763	0,5730	0,5789	0,5661						
12	0,5066	0,6082	0,6143	0,6032	0,5843					
14	0,5331	0,6305	0,6430	0,6350	0,6189	0,5963				
16	0,5559	0,6547	0,6681	0,6603	0,6458	0,6272	0,6077			
18	0,5697	0,6719	0,6905	0,6847	0,6704	0,6528	0,6362	0,6172		
20	0,5842	0,6860	0,7098	0,7045	0,6916	0,6768	0,6617	0,6443	0,6263	
25	0,6088	0,7158	0,7423	0,7421	0,7353	0,7250	0,7099	0,6960	0,6795	0,6666
30	0,6250	0,7378	0,7647	0,7687	0,7679	0,7586	0,7474	0,7340	0,7228	0,7099
35	0,6378	0,7523	0,7802	0,7893	0,7892	0,7835	0,7755	0,7661	0,7548	0,7434
40	0,6498	0,7629	0,7958	0,8074	0,8068	0,8028	0,7961	0,7895	0,7799	0,7704
45	0,6569	0,7733	0,8071	0,8180	0,8215	0,8187	0,8139	0,8072	0,7997	0,7927
50	0,6641	0,7813	0,8159	0,8283	0,8314	0,8302	0,8285	0,8213	0,8169	0,8099
60	0,6767	0,7935	0,8290	0,8432	0,8484	0,8498	0,8486	0,8462	0,8414	0,8374
70	0,6842	0,8015	0,8393	0,8544	0,8622	0,8643	0,8642	0,8626	0,8604	0,8561
80	0,6909	0,8096	0,8471	0,8639	0,8711	0,8751	0,8766	0,8762	0,8735	0,8712
90	0,6952	0,8136	0,8530	0,8703	0,8794	0,8843	0,8865	0,8849	0,8842	0,8822
100	0,7002	0,8192	0,8578	0,8765	0,8852	0,8903	0,8928	0,8938	0,8922	0,8911

Fonte: Próprio autor.

Tabela 3.2: Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(0, 5; 1)$ e um nível de 5% de significância.

n	Valores de m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0,2462									
4	0,2577									
5	0,2925	0,4221								
6	0,3256	0,4404								
7	0,3544	0,4620	0,4835							
8	0,3866	0,4935	0,5083							
9	0,4054	0,5102	0,5319	0,5168						
10	0,4250	0,5340	0,5481	0,5401						
12	0,4614	0,5689	0,5840	0,5760	0,5625					
14	0,4911	0,5908	0,6114	0,6072	0,5973	0,5771				
16	0,5159	0,6207	0,6383	0,6354	0,6227	0,6069	0,5880			
18	0,5308	0,6396	0,6597	0,6605	0,6461	0,6331	0,6184	0,5980		
20	0,5499	0,6564	0,6820	0,6796	0,6674	0,6542	0,6428	0,6250	0,6082	
25	0,5754	0,6871	0,7176	0,7194	0,7124	0,7042	0,6905	0,6769	0,6617	0,6489
30	0,5976	0,7132	0,7421	0,7474	0,7481	0,7384	0,7280	0,7153	0,7036	0,6899
35	0,6122	0,7297	0,7593	0,7699	0,7707	0,7655	0,7577	0,7473	0,7352	0,7254
40	0,6243	0,7423	0,7766	0,7904	0,7900	0,7860	0,7789	0,7720	0,7620	0,7527
45	0,6343	0,7547	0,7887	0,8007	0,8053	0,8034	0,7975	0,7917	0,7832	0,7765
50	0,6426	0,7634	0,7982	0,8129	0,8165	0,8142	0,8146	0,8062	0,8027	0,7935
60	0,6568	0,7755	0,8135	0,8291	0,8350	0,8368	0,8355	0,8330	0,8274	0,8235
70	0,6646	0,7854	0,8251	0,8421	0,8498	0,8515	0,8522	0,8501	0,8476	0,8435
80	0,6751	0,7959	0,8349	0,8514	0,8596	0,8641	0,8644	0,8649	0,8628	0,8595
90	0,6804	0,8012	0,8408	0,8598	0,8687	0,8735	0,8758	0,8742	0,8733	0,8718
100	0,6858	0,8075	0,8471	0,8656	0,8760	0,8818	0,8833	0,8841	0,8826	0,8813

Fonte: Próprio autor.

Tabela 3.3: Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(1; 1)$ e um nível de 10% de significância.

n	Valores de m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0,3320									
4	0,3339									
5	0,3701	0,4923								
6	0,3959	0,5175								
7	0,4255	0,5401	0,5462							
8	0,4492	0,5610	0,5748							
9	0,4697	0,5789	0,5977	0,5778						
10	0,4869	0,5963	0,6144	0,6029						
12	0,5127	0,6282	0,6468	0,6421	0,6251					
14	0,5385	0,6467	0,6711	0,6718	0,6610	0,6419				
16	0,5606	0,6691	0,6939	0,6940	0,6883	0,6751	0,6582			
18	0,5736	0,6842	0,7098	0,7148	0,7075	0,6969	0,6867	0,6749		
20	0,5881	0,6973	0,7283	0,7316	0,7248	0,7189	0,7118	0,6975	0,6855	
25	0,6107	0,7229	0,7551	0,7618	0,7615	0,7582	0,7508	0,7426	0,7319	0,7263
30	0,6277	0,7440	0,7740	0,7839	0,7884	0,7852	0,7789	0,7726	0,7672	0,7617
35	0,6395	0,7573	0,7879	0,8021	0,8061	0,8043	0,8014	0,7975	0,7923	0,7863
40	0,6511	0,7672	0,8022	0,8169	0,8204	0,8205	0,8182	0,8153	0,8112	0,8055
45	0,6580	0,7760	0,8128	0,8265	0,8321	0,8326	0,8325	0,8288	0,8260	0,8235
50	0,6653	0,7840	0,8205	0,8358	0,8411	0,8426	0,8433	0,8404	0,8396	0,8354
60	0,6771	0,7955	0,8319	0,8487	0,8558	0,8586	0,8597	0,8600	0,8581	0,8576
70	0,6848	0,8028	0,8418	0,8584	0,8678	0,8711	0,8729	0,8732	0,8733	0,8714
80	0,6915	0,8106	0,8489	0,8669	0,8751	0,8806	0,8832	0,8849	0,8841	0,8830
90	0,6955	0,8149	0,8545	0,8727	0,8828	0,8884	0,8920	0,8919	0,8922	0,8920
100	0,7006	0,8201	0,8595	0,8782	0,8880	0,8943	0,8972	0,8993	0,8990	0,8991

Fonte: Próprio autor.

Tabela 3.4: Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(1; 1)$ e um nível de 5% de significância.

n	Valores de m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0,2618									
4	0,2724									
5	0,3066	0,4446								
6	0,3369	0,4698								
7	0,3653	0,4947	0,5095							
8	0,3974	0,5215	0,5398							
9	0,4132	0,5349	0,5650	0,5420						
10	0,4350	0,5575	0,5809	0,5691						
12	0,4681	0,5870	0,6143	0,6133	0,5941					
14	0,4960	0,6066	0,6390	0,6408	0,6338	0,6115				
16	0,5202	0,6338	0,6610	0,6654	0,6591	0,6464	0,6292			
18	0,5342	0,6508	0,6803	0,6871	0,6807	0,6709	0,6592	0,6416		
20	0,5539	0,6671	0,6974	0,7049	0,6989	0,6923	0,6854	0,6683	0,6558	
25	0,5778	0,6946	0,7299	0,7387	0,7371	0,7358	0,7279	0,7177	0,7056	0,6986
30	0,5987	0,7193	0,7525	0,7621	0,7686	0,7639	0,7587	0,7502	0,7436	0,7357
35	0,6140	0,7341	0,7680	0,7823	0,7863	0,7856	0,7827	0,7776	0,7709	0,7651
40	0,6258	0,7460	0,7830	0,7990	0,8038	0,8031	0,7997	0,7968	0,7911	0,7869
45	0,6355	0,7572	0,7942	0,8089	0,8156	0,8169	0,8157	0,8122	0,8085	0,8053
50	0,6436	0,7663	0,8028	0,8196	0,8261	0,8261	0,8289	0,8249	0,8231	0,8175
60	0,6575	0,7776	0,8169	0,8338	0,8422	0,8453	0,8471	0,8463	0,8431	0,8427
70	0,6651	0,7872	0,8279	0,8461	0,8555	0,8583	0,8603	0,8606	0,8596	0,8577
80	0,6753	0,7967	0,8375	0,8546	0,8637	0,8694	0,8717	0,8730	0,8727	0,8716
90	0,6806	0,8024	0,8429	0,8621	0,8722	0,8781	0,8815	0,8809	0,8816	0,8809
100	0,6859	0,8084	0,8484	0,8675	0,8789	0,8850	0,8877	0,8898	0,8895	0,8895

Fonte: Próprio autor.

Tabela 3.5: Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(1, 5; 1)$ e um nível de 10% de significância.

n	Valores de m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0,3532									
4	0,3573									
5	0,3905	0,5279								
6	0,4154	0,5576								
7	0,4407	0,5797	0,5877							
8	0,4634	0,5975	0,6212							
9	0,4825	0,6114	0,6452	0,6285						
10	0,4982	0,6277	0,6614	0,6552						
12	0,5215	0,6546	0,6886	0,6963	0,6859					
14	0,5454	0,6675	0,7077	0,7214	0,7227	0,7098				
16	0,5668	0,6874	0,7246	0,7377	0,7440	0,7409	0,7356			
18	0,5784	0,6989	0,7371	0,7541	0,7597	0,7601	0,7587	0,7607		
20	0,5916	0,7100	0,7518	0,7674	0,7711	0,7759	0,7814	0,7777	0,7754	
25	0,6135	0,7325	0,7721	0,7872	0,7969	0,8037	0,8075	0,8082	0,8090	0,8146
30	0,6299	0,7509	0,7874	0,8045	0,8163	0,8207	0,8240	0,8273	0,8319	0,8361
35	0,6412	0,7628	0,7981	0,8175	0,8272	0,8332	0,8377	0,8426	0,8465	0,8495
40	0,6525	0,7710	0,8098	0,8293	0,8382	0,8446	0,8489	0,8528	0,8553	0,8576
45	0,6591	0,7793	0,8196	0,8373	0,8466	0,8519	0,8574	0,8596	0,8634	0,8686
50	0,6665	0,7866	0,8254	0,8442	0,8536	0,8591	0,8647	0,8670	0,8716	0,8725
60	0,6778	0,7974	0,8356	0,8549	0,8651	0,8705	0,8758	0,8794	0,8819	0,8861
70	0,6852	0,8043	0,8445	0,8627	0,8744	0,8803	0,8848	0,8880	0,8911	0,8929
80	0,6918	0,8115	0,8514	0,8703	0,8805	0,8875	0,8923	0,8966	0,8983	0,9003
90	0,6957	0,8160	0,8562	0,8754	0,8870	0,8939	0,8995	0,9014	0,9037	0,9061
100	0,7007	0,8208	0,8610	0,8806	0,8915	0,8990	0,9033	0,9072	0,9082	0,9103

Fonte: Próprio autor.

Tabela 3.6: Valores críticos para a estatística KL_{mn} dada em (3.9), considerando o modelo $BS(1, 5; 1)$ e um nível de 5% de significância.

n	Valores de m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.2819									
4	0.2911									
5	0.3237	0.4760								
6	0.3514	0.5053								
7	0.3796	0.5303	0.5440							
8	0.4102	0.5547	0.5791							
9	0.4256	0.5665	0.6065	0.5852						
10	0.4449	0.5865	0.6206	0.6114						
12	0.4763	0.6121	0.6529	0.6591	0.6446					
14	0.5036	0.6274	0.6734	0.6850	0.6848	0.6684				
16	0.5270	0.6509	0.6916	0.7056	0.7080	0.7029	0.6938			
18	0.5385	0.6651	0.7067	0.7234	0.7267	0.7247	0.7198	0.7136		
20	0.5564	0.6787	0.7191	0.7371	0.7430	0.7454	0.7462	0.7343	0.7317	
25	0.5806	0.7025	0.7460	0.7630	0.7704	0.7791	0.7791	0.7785	0.7741	0.7770
30	0.6010	0.7260	0.7643	0.7816	0.7940	0.7992	0.8004	0.8024	0.8021	0.8048
35	0.6149	0.7396	0.7777	0.7984	0.8080	0.8131	0.8167	0.8198	0.8209	0.8238
40	0.6273	0.7499	0.7900	0.8116	0.8210	0.8254	0.8293	0.8318	0.8340	0.8349
45	0.6365	0.7602	0.8008	0.8193	0.8298	0.8358	0.8404	0.8425	0.8447	0.8478
50	0.6443	0.7685	0.8080	0.8285	0.8385	0.8425	0.8496	0.8507	0.8541	0.8544
60	0.6581	0.7794	0.8206	0.8402	0.8507	0.8572	0.8614	0.8645	0.8661	0.8708
70	0.6657	0.7884	0.8309	0.8506	0.8618	0.8677	0.8720	0.8749	0.8778	0.8789
80	0.6758	0.7977	0.8397	0.8580	0.8694	0.8761	0.8808	0.8847	0.8867	0.8886
90	0.6807	0.8026	0.8449	0.8652	0.8760	0.8838	0.8891	0.8904	0.8934	0.8946
100	0.6856	0.8089	0.8502	0.8699	0.8824	0.8895	0.8936	0.8972	0.8988	0.9012

Fonte: Próprio autor.

3.3.2 Poder do Teste

Para avaliar o desempenho do teste proposto em termos de poder, consideramos várias distribuições de probabilidade para a hipótese alternativa, distribuições essas com funções de risco monótona crescente, decrescente e não monótona. As distribuições de probabilidade consideradas na avaliação do poder do teste proposto foram:

- Gama, $\text{Gama}(\kappa; \theta)$, com função densidade dada por

$$f(x; \kappa, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\kappa)\theta^\kappa} x^{\kappa-1} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, \quad x > 0, \kappa, \theta > 0$$

e função de distribuição denotada por F_1 .

- Exponencial Generalizada, $\text{GExp}(\kappa; \theta)$, com função densidade dada por

$$f(x; \kappa, \theta) = \kappa\theta x \exp\{-\theta x\}(1 - \exp\{-\theta x\})^{\kappa-1}, \quad x > 0, \kappa, \theta > 0.$$

e função de distribuição denotada por F_2 .

- Beta, $\text{Beta}(\kappa; \theta)$, com função densidade dada por

$$f(x; \kappa, \theta) = \frac{\Gamma(\kappa + \theta)}{\Gamma(\kappa)\Gamma(\theta)} x^{\kappa-1}(1-x)^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \kappa, \theta > 0.$$

e função de distribuição denotada por F_3 .

- Pareto do tipo I, $\text{Pareto}(\kappa; \theta)$, com função densidade dada por

$$f(x; \kappa, \theta) = \frac{\kappa\theta^\kappa}{x^{\kappa+1}}, \quad x \in [\theta, \infty), \kappa, \theta > 0.$$

e função de distribuição denotada por F_4 .

- Weibull, $\text{Weibull}(\kappa; \theta)$, com função densidade dada por

$$f(x; \kappa, \theta) = \frac{\kappa}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\kappa-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\kappa\right\}, \quad x > 0, \kappa, \theta > 0.$$

e função de distribuição denotada por F_5 .

- *Half-Normal*, $\text{HN}(\theta)$, com função densidade dada por

$$f(x; \theta) = \frac{2\theta}{\pi} \exp\left\{-\frac{x^2\theta^2}{\pi}\right\}, \quad x \geq 0, \theta > 0.$$

e função de distribuição denotada por F_6 .

O poder do teste é calculado tendo como base o problema de testar as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : X \sim BS(\alpha, \beta), \text{ para algum } \alpha > 0 \text{ e } \beta > 0 \\ H_1 : X \sim F_i(\boldsymbol{\theta}), \text{ com } \boldsymbol{\theta} > 0 \text{ e } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

No procedimento, foram consideradas 10.000 réplicas de Monte Carlo e tamanhos amostrais de $n = 10$, $n = 30$, $n = 50$ e $n = 100$. Os poderes dos testes foram obtidos aos níveis de significância $\rho = 0,10$ e $\rho = 0,05$. Para cada valor de n e cada distribuição em H_1 , com diferentes parâmetros, foram geradas as 10.000 amostras e calculados os respectivos valores para estatística de teste apresentada em (3.9). Com base nos valores críticos apresentados nas Tabelas 3.3 e 3.4, obtivemos as proporções de rejeições baseadas nas 10.000 amostras aleatórias simuladas, isto é, o poder do teste. Vale salientar ainda que os valores críticos considerados foram aqueles cujo valor de m retorna o valor crítico máximo.

Além da estatística de teste apresentada em (3.9), também foi avaliado o poder do teste com base nas estatísticas de Cramér-von Mises e de Anderson-Darling, apresentadas pelas Expressões (1.9) e (1.10), respectivamente. Nosso objetivo é fazer uma comparação entre os testes e verificar em quais situações o teste baseado na informação de KL é melhor, no sentido de apresentar maior poder.

As Tabelas 3.7 – 3.12 apresentam os poderes para os teste em questão com tamanho amostrais de $n = 10$, $n = 30$ e $n = 50$, respectivamente.

Tabela 3.7: Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 10% de significância, considerando tamanho amostral $n = 10$.

Tipo da Função de Risco	Alternativas (sob H_1)	KL_{mn}	W^2	A^2
Monótona Crescente	Gama(3; 1)	0,2571	0,1538	0,1604
	GExp(3; 1)	0,2274	0,1436	0,1501
	Beta(2; 1)	0,8072	0,5074	0,5393
Monótona Decrescente	Gama(0, 5; 1)	0,0623	0,1703	0,1847
	GExp(0, 5; 1)	0,0655	0,1804	0,1927
Não Monótona	Pareto(2; 1)	0,6443	0,5089	0,5424
	Weibull(2; 1)	0,3743	0,2357	0,2465
	HN(3)	0,3426	0,3104	0,3353

Tabela 3.8: Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 5% de significância, considerando tamanho amostral $n = 10$.

Tipo da Função de Risco	Alternativas (sob H_1)	KL_{mn}	W^2	A^2
Monótona Crescente	Gama(3; 1)	0,1534	0,0873	0,0937
	GExp(3; 1)	0,1288	0,0805	0,0825
	Beta(2; 1)	0,6841	0,3970	0,4282
Monótona Decrescente	Gama(0, 5; 1)	0,0376	0,0890	0,0959
	GExp(0, 5; 1)	0,0428	0,0938	0,1025
Não Monótona	Pareto(2; 1)	0,4748	0,4070	0,4342
	Weibull(2; 1)	0,2405	0,1507	0,1617
	HN(3)	0,2434	0,2096	0,2298

Tabela 3.9: Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 10% de significância, considerando tamanho amostral $n = 30$.

Tipo da Função de Risco	Alternativas (sob H_1)	KL_{mn}	W^2	A^2
Monótona Crescente	Gama(3; 1)	0,3809	0,2749	0,2988
	GExp(3; 1)	0,3091	0,2423	0,2591
	Beta(2; 1)	0,9995	0,9428	0,9668
Monótona Decrescente	Gama(0, 5; 1)	0,4056	0,5843	0,7191
	GExp(0, 5; 1)	0,4225	0,5844	0,7203
Não Monótona	Pareto(2; 1)	0,9910	0,9462	0,9693
	Weibull(2; 1)	0,6602	0,5157	0,5539
	HN(3)	0,7987	0,7433	0,7812

Tabela 3.10: Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 5% de significância, considerando tamanho amostral $n = 30$.

Tipo da Função de Risco	Alternativas (sob H_1)	KL_{mn}	W^2	A^2
Monótona Crescente	Gama(3; 1)	0,2656	0,1856	0,2082
	GExp(3; 1)	0,2050	0,1544	0,1719
	Beta(2; 1)	0,9970	0,9053	0,9388
Monótona Decrescente	Gama(0, 5; 1)	0,3465	0,3959	0,5343
	GExp(0, 5; 1)	0,3638	0,3937	0,5442
Não Monótona	Pareto(2; 1)	0,9767	0,9039	0,9365
	Weibull(2; 1)	0,5458	0,4172	0,4559
	HN(3)	0,7164	0,6576	0,6987

Tabela 3.11: Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 10% de significância, considerando tamanho amostral $n = 50$.

Tipo da Função de Risco	Alternativas (sob H_1)	KL_{mn}	W^2	A^2
Monótona Crescente	Gama(3; 1)	0,4707	0,3765	0,4112
	GExp(3; 1)	0,3787	0,3146	0,3432
	Beta(2; 1)	1,0000	0,9961	0,9993
Monótona Decrescente	Gama(0, 5; 1)	0,7094	0,8606	0,9295
	GExp(0, 5; 1)	0,7274	0,8617	0,9379
Não Monótona	Pareto(2; 1)	0,9997	0,9965	0,9984
	Weibull(2; 1)	0,8146	0,7126	0,7590
	HN(3)	0,9379	0,9110	0,9334

Tabela 3.12: Poderes para diferentes alternativas de função de risco e diferentes distribuições ao nível de 5% de significância, considerando tamanho amostral $n = 50$.

Tipo da Função de Risco	Alternativas (sob H_1)	KL_{mn}	W^2	A^2
Monótona Crescente	Gama(3; 1)	0,3575	0,2774	0,3099
	GExp(3; 1)	0,2716	0,2187	0,2498
	Beta(2; 1)	1,0000	0,9905	0,9965
Monótona Decrescente	Gama(0, 5; 1)	0,6622	0,7369	0,8711
	GExp(0, 5; 1)	0,6779	0,7394	0,8748
Não Monótona	Pareto(2; 1)	0,9993	0,9922	0,9970
	Weibull(2; 1)	0,7317	0,6190	0,6671
	HN(3)	0,9026	0,8701	0,8999

As conclusões sobre este estudo de simulação são as seguintes: o teste de bondade de ajuste baseado na informação de Kullback-Leibler tem poderes melhores quando comparado com os poderes dos testes clássicos, salvo quando a função de risco sob hipótese alternativa é monótona decrescente. O fato é que quando a função de risco sob hipótese alternativa tem comportamento monótono decrescente, tal função se aproxima muito da função de risco da distribuição Birnbaum-Saunders, fazendo com que o teste proposto tenha dificuldade em detectar diferenças no comportamento dessas funções. Nas demais situações (considerando sob hipótese alternativa modelos cujas funções de risco são monótonas crescentes ou não monótonas) temos um ganho considerável nos poderes do teste quando adotamos a estatística de teste baseada na informação de Kullback-Leibler. Além disso, à medida que o tamanho amostral aumenta, o poder do

teste também aumenta.

3.4 Aplicações

Nesta seção, faremos três aplicações com base em conjuntos de dados obtidos em (Birnbaum & Saunders, 1969b).

3.4.1 Aplicação 1

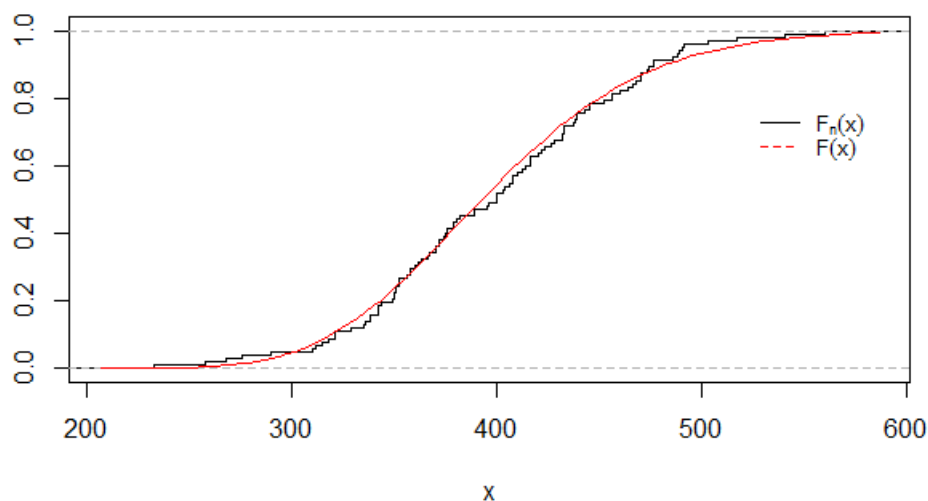
(Birnbaum & Saunders, 1969b) reportaram 102 dados de fadiga de vida correspondente aos ciclos ($\times 10^{-3}$) das amostras de alumínio do tipo 6061-T6. Estes espécimes foram cortados em um ângulo paralelo ao sentido de rotação e oscilação de 18 ciclos por segundo. Eles foram expostos a uma pressão com tensão máxima de 26.000 psi (libras por polegada quadrada). Os dados estão na Tabela 3.13.

Tabela 3.13: Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 26.000 psi.

233	258	268	276	290	310	312	315	318	321	321	329	335	336	338
338	342	342	342	344	349	350	350	351	351	352	352	356	358	358
360	362	363	366	367	370	370	372	372	374	375	376	379	379	380
382	389	389	395	396	400	400	400	403	404	406	408	408	410	412
414	416	416	416	420	422	423	426	428	432	432	433	433	437	438
439	439	443	445	445	452	456	456	460	464	466	468	470	470	473
474	476	476	486	488	489	490	491	503	517	540	560			

Queremos testar a hipótese nula de que a amostra apresentada na Tabela 3.13 segue distribuição Birnbaum-Saunders. As estimativas dos parâmetros do modelo, $\hat{\alpha} = 0,1614$ e $\hat{\beta} = 392,7622$. O valor observado para a estatística de teste foi $kl_{mn} = 0,9270$, de modo que o valor crítico para este caso é $KL_{mn}^*(\rho) = 0,8834$, ao nível de 5% de significância. Logo, não rejeitamos a hipótese de que os dados seguem distribuição Birnbaum-Saunders ao nível de significância $\rho = 0,05$. A Figura 3.1 compara a função de distribuição empírica com a teórica. Podemos observar por essa figura que as funções de distribuição empírica e teórica estão bem próximas, o que reforça a conclusão obtida no teste.

Figura 3.1: Comparação entre as funções de distribuição empírica e teórica para os dados de tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 26.000 psi.



Fonte: Próprio autor.

3.4.2 Aplicação 2

(Birnbaum & Saunders, 1969b) reportaram 101 dados de fadiga de vida correspondente aos ciclos ($\times 10^{-3}$) das amostras de alumínio do tipo 6061-T6. Estes espécimes foram cortados em um ângulo paralelo ao sentido de rotação e oscilação de 18 ciclos por segundo. Eles foram expostos a uma pressão com tensão máxima de 31.000 psi (libras por polegada quadrada). Os dados estão na Tabela 3.14

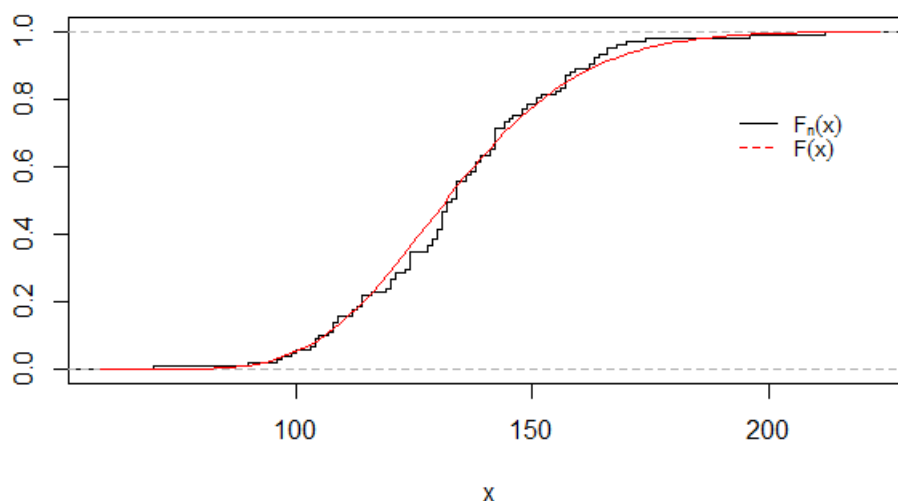
Tabela 3.14: Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 31.000 psi.

70	90	96	97	99	100	103	104	104	105	107	108	108	108	109
109	112	112	113	114	114	114	116	119	120	120	120	121	121	123
124	124	124	124	124	128	128	129	129	130	130	130	131	131	131
131	131	132	132	132	133	134	134	134	134	134	136	136	137	138
138	138	139	139	141	141	142	142	142	142	142	142	144	144	145
146	148	148	149	151	151	152	155	156	157	157	157	157	158	159
162	163	163	164	166	166	168	170	174	196	212				

Nosso objetivo é testar a hipótese nula de que a amostra apresentada na Tabela 3.14 segue distribuição Birnbaum-Saunders. As estimativas dos parâmetros do modelo,

$\hat{\alpha} = 0,1702$ e $\hat{\beta} = 131,8184$. O valor observado para a estatística de teste foi $kl_{mn} = 0,9478$, de modo que o valor crítico para este caso é $KL_{mn}^*(\rho) = 0,8824$, ao nível de 5% de significância. Logo, não rejeitamos a hipótese de que os dados seguem distribuição Birnbaum-Saunders ao nível de significância $\rho = 0,05$. A Figura 3.2 compara a função de distribuição empírica com a teórica. Podemos observar por essa figura que as funções de distribuição empírica e teórica estão bem próximas, o que reforça a conclusão obtida no teste.

Figura 3.2: Comparação entre as funções de distribuição empírica e teórica para os dados de tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 31.000 psi.



Fonte: Próprio autor.

3.4.3 Aplicação 3

(Birnbaum & Saunders, 1969b) reportaram 101 dados de fadiga de vida correspondente aos ciclos ($\times 10^{-3}$) das amostras de alumínio do tipo 6061-T6. Estes espécimes foram cortados em um ângulo paralelo ao sentido de rotação e oscilação de 18 ciclos por segundo. Eles foram expostos a uma pressão com tensão máxima de 21.000 psi (libras por polegada quadrada). Os dados estão na Tabela 3.15.

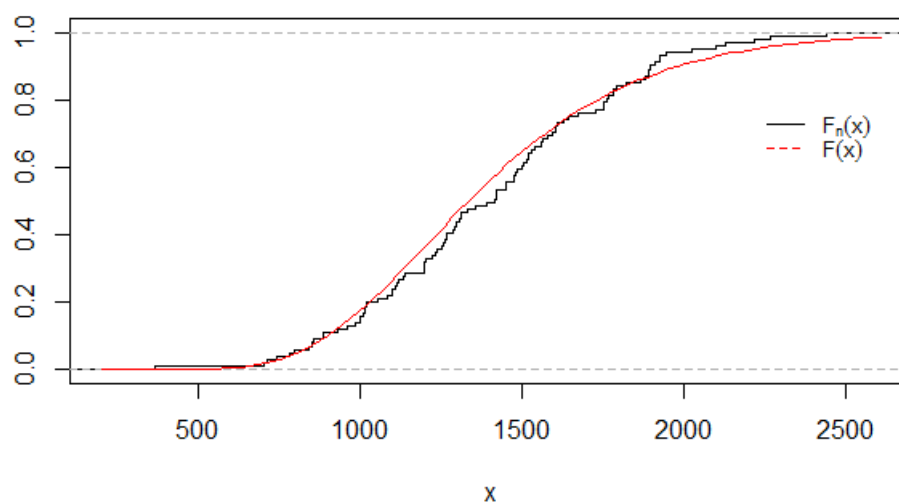
Novamente, nosso objetivo é testar a hipótese nula de que a amostra apresentada na Tabela 3.15 segue distribuição Birnbaum-Saunders. As estimativas dos parâmetros do modelo, $\hat{\alpha} = 0,3101$ e $\hat{\beta} = 1336,27$. O valor observado para a estatística de teste foi $kl_{mn} = 0,9008$, de modo que o valor crítico para este caso é $KL_{mn}^*(\rho) = 0,8839$,

Tabela 3.15: Tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 21.000 psi.

370	706	716	746	785	797	844	855	858	886	886	930	960
988	999	1000	1010	1016	1018	1020	1055	1085	1102	1102	1108	1115
1120	1134	1140	1199	1200	1200	1203	1222	1235	1238	1252	1258	1262
1269	1270	1290	1293	1300	1310	1313	1315	1330	1355	1390	1416	1419
1420	1420	1450	1452	1475	1478	1481	1485	1502	1505	1513	1522	1522
1530	1540	1560	1567	1578	1594	1602	1604	1608	1630	1642	1674	1730
1750	1750	1763	1768	1781	1782	1792	1820	1868	1881	1890	1893	1895
1910	1923	1924	1945	2023	2100	2130	2215	2268	2440			

ao nível de 5% de significância. Logo, não rejeitamos a hipótese de que os dados seguem distribuição Birnbaum-Saunders ao nível de significância $\rho = 0,05$. A Figura 3.3 compara a função de distribuição empírica com a teórica. Podemos observar por essa figura que as funções de distribuição empírica e teórica estão bem próximas, o que reforça a conclusão obtida no teste.

Figura 3.3: Comparação entre as funções de distribuição empírica e teórica para os dados de tempos de vida de alumínio, expostos a uma tensão máxima de 21.000 psi.



Fonte: Próprio autor.

Capítulo 4

Teste de Bondade de Ajuste para Distribuição Birnbaum-Saunders Baseado na Informação de Kullback-Leibler para Dados com Censura Progressiva do Tipo II

Neste capítulo, iremos propor um teste de bondade de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders, de modo que tal teste será baseado na informação de Kullback-Leibler e os dados terão a presença de censura progressiva do Tipo II.

4.1 Introdução

Dados resultantes de experimentos com tempos de vida e de reabilitação são frequentemente censurados devido a diversos fatores, como o alto custo financeiro e o tempo curto. Nessa vertente, as censuras do tipo I e II são as formas mais comuns. Nos últimos anos, a censura progressiva tem sido bastante estudada, devido ao fato da mesma ser mais flexível e eficiente pelo fato de otimizar o tempo do experimento e ser mais barata. Existem na literatura alguns testes de bondade de ajuste usando censura progressiva do tipo II, a saber: (Balakrishnan et al., 2007), considerando a distribuição exponencial, (Brito, 2014) e (Castro-Kuriss et al., 2010), considerando a

distribuição normal. A seguir, iremos obter um teste de bondade de ajuste para distribuição Birnbaum-Saunders baseado na informação de Kullback-Leibler, considerando dados progressivamente censurados do tipo II.

4.2 Entropia Diferencial e Informação de Kullback-Leibler com Censura Progressiva do Tipo II

A definição da entropia diferencial e da informação de Kullback-Leibler foi vista na Seção 3.1, no entanto, como estamos trabalhando com dados progressivamente censurados do tipo II, essas medidas irão sofrer algumas adaptações.

Definição 4.1 *Consideremos que $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ são estatísticas de ordem progressivamente censuradas do tipo II assumindo os respectivos valores x_1, \dots, x_m , em que n e m são tais como apresentado na Seção 1.1.1. Então, a entropia conjunta de $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$, apresentada em (Park, 2005), é dada por*

$$\begin{aligned} H_{1\dots m;m;n} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:m:n}} f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) \\ &= \log(f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m)) dx_1, \dots, dx_m. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pelo fato de $H_{1\dots m;m;n}$ ser uma integral m -dimensional, precisamos obter uma expressão mais simples para essa integral.

A integral múltipla da entropia para dados censurados do Tipo II foi simplificada para uma única integral por (Park, 2005), e a entropia conjunta das estatísticas de ordem para censura progressiva do Tipo II foi simplificada por (Balakrishnan et al., 2007) em termos de uma integral envolvendo a função de risco $h(x)$, resultando em:

$$H_{1\dots m;m;n} = -\log c + n\bar{H}_{1\dots m;m;n}, \quad (4.2)$$

em que

$$\bar{H}_{1\dots m;m;n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m f_{X_{i:m:n}}(x) \log h(x) dx.$$

A demonstração da Expressão (4.2) pode ser vista no Apêndice B.

Seja $U_{i:m:n}$, $i = 1, \dots, m$, uma amostra aleatória progressivamente censurada do tipo II obtida a partir da distribuição $U(0; 1)$, em que $U_{1:m:n} < U_{2:m:n} < \cdots < U_{m:m:n}$.

Então, de acordo com (Balakrishnan & Aggarwala, 2000, p. 23), temos que

$$E(U_{i:m:n}) = 1 - \prod_{j=m-i+1}^m \alpha_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

de modo que

$$\alpha_j = \frac{a_j}{1 + a_j}, \quad j = m - i + 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n$$

e

$$a_j = j + \sum_{j=m-i+1}^m R_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Uma estimativa não paramétrica da entropia conjunta dada em (4.2), foi apresentada em (Balakrishnan et al., 2007) e é dada por

$$H_{1\dots m:m:n}(w, n, m) = -\log c + nH(w, n, m), \quad (4.3)$$

em que

$$H(w, n, m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \log \left(\frac{x_{i+w:m:n} - x_{i-w:m:n}}{E(U_{i+w:m:n}) - E(U_{i-w:m:n})} \right) - \left(1 - \frac{m}{n}\right) \log \left(1 - \frac{m}{n}\right). \quad (4.4)$$

O tamanho da janela w na Expressão (4.4) depende dos valores de m , em que este é obtido de modo a se ter valores críticos mínimos.

Na Seção 3.1 vimos que a informação de Kullback-Leibler pode ser considerada uma estatística para testes de bondade de ajuste, pois $I(g : f) \geq 0$, com $I(f : g) = 0$ se $f = g$. Agora, consideremos $f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m)$ e $g_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m)$ como sendo duas densidades conjuntas de m estatísticas de ordem progressivamente censuradas do tipo II.

Definição 4.2 *A Informação de Kullback-Leibler (KL) conjunta a favor de $f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m)$ contra $g_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m)$ é dada por*

$$I_{1\dots m:m:n}(g : f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:m:n}} f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) \times \log \left(\frac{f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m)}{g_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m)} \right) dx_1 \cdots dx_m. \quad (4.5)$$

4.3 Estatística de Teste para o Modelo Birnbaum-Saunders

Considere uma amostra aleatória $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ formada por m estatísticas de ordem progressivamente censuradas do tipo II, de modo que $f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}^0(x_1, \dots, x_m; \theta)$, é a função densidade conjunta dessas estatísticas sob hipótese nula, e $f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m; \theta)$ é uma outra função densidade de probabilidade conjunta. Então, a partir da Expressão (4.5), a informação de KL conjunta a favor de $f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m; \theta)$ contra $f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}^0(x_1, \dots, x_m; \theta)$ é dada por:

$$I_{1 \dots m:m:n}(f : f^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:m:n}} f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m; \theta) \times \log \left(\frac{f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m; \theta)}{f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}^0(x_1, \dots, x_m; \theta)} \right) dx_1 \cdots dx_m.$$

Suponhamos, agora, sob hipótese nula, uma função densidade de probabilidade $f^0(x; \theta)$ cuja adequação a um conjunto de dados queremos avaliar. Então, usando uma estimativa da informação de KL baseada em uma amostra progressivamente censurada do tipo II, (Rad et al., 2011) propôs uma estatística de teste fundamentada em $(1/n)I_{1 \dots m:m:n}(f : f^0)$, dada por

$$T(w, n, m) = -H(w, n, m) - \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^m \log f^0(x_i; \hat{\theta}) + \sum_{i=1}^m R_i \log[1 - F^0(x_i; \hat{\theta})] \right\}, \quad (4.6)$$

onde $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ .

A ideia e motivação por trás da estatística de teste apresentada em (4.6) é a seguinte: com base na medida de informação de KL, estamos avaliando a discrepância entre o vetor observado de estatísticas de ordem progressivamente censuradas do tipo II e o que esperaríamos de tais dados se eles surgissem do modelo hipotético.

É possível observar que a estatística de teste $T(w, n, m)$ pode assumir valores negativos. No entanto, de acordo com (Rad et al., 2011), não há nenhum problema nisso, pois a estatística apresentada em (4.6) foi proposta para fins de bondade de ajuste, logo os valores críticos do teste são ajustados em conformidade.

Agora, vamos considerar que estamos interessados em testar a bondade de ajuste

para a distribuição $BS(\alpha, \beta)$. Assim, podemos estabelecer as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : f^0(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{x}{\beta} + \frac{\beta}{x} - 2 \right) \right\} \frac{x^{-3/2}(x + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}} \\ H_1 : f^0(x; \boldsymbol{\theta}) \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{x}{\beta} + \frac{\beta}{x} - 2 \right) \right\} \frac{x^{-3/2}(x + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \end{cases} \quad (4.7)$$

de modo que $x > 0$ e $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\top$, com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, é um vetor de parâmetros desconhecido. Então, a informação de KL para dados progressivamente censurados do tipo II pode ser estimada, e a estatística de teste dada em (4.6) pode ser obtida estimando o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\top$ por meio do método de máxima verossimilhança.

4.3.1 Estimadores de Máxima Verossimilhança para Distribuição BS Considerando Dados Progressivamente Censurados do Tipo II

Vamos considerar uma amostra aleatória progressivamente censurada do tipo II $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$. Considere, também, que R_1, \dots, R_m é o esquema de censura adotado. Então, a função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= c \prod_{i=1}^m f(x_i; \boldsymbol{\theta}) [1 - F(x_i; \boldsymbol{\theta})]^{R_i} \\ &= c \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{x_i}{\beta} + \frac{\beta}{x_i} - 2 \right) \right\} \frac{x_i^{-3/2}(x_i + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x_i}} \right) \right] \right\}^{R_i}. \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo em $L(\boldsymbol{\theta})$, temos:

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) &= \log[L(\boldsymbol{\theta})] \\ &= \log(c) + \sum_{i=1}^m \left[\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{x_i}{\beta} + \frac{\beta}{x_i} - 2 \right) + \log[x_i^{-3/2}(x_i + \beta)] \right. \\ &\quad \left. - \log(2\alpha\sqrt{\beta}) + R_i \log \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x_i}} \right) \right] \right\} \right] \\ &= \log(c) + m \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\beta} + \frac{\beta}{x_i} - 2 \right) + \sum_{i=1}^m \log[x_i^{-3/2}(x_i + \beta)] \\ &\quad - m \log(2\alpha\sqrt{\beta}) + \sum_{i=1}^m R_i \log \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x_i}} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log(c) + m \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2\alpha^2\beta} \sum_{i=1}^m x_i - \frac{\beta}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} + \frac{m}{\alpha^2} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^m \log(x_i) \\
&+ \sum_{i=1}^m \log(x_i + \beta) - m \log(2) - m \log(\alpha) - \frac{m}{2} \log(\beta) \\
&+ \sum_{i=1}^m R_i \log \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x_i}} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Denotando $z_i = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x_i}} \right)$ e $k = \log(c) + m \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^m \log(x_i) - m \log(2)$, temos que

$$\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta}) &= k - \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2\beta} \sum_{i=1}^m x_i + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} - m \right) + \sum_{i=1}^m \log(x_i + \beta) - m \log(\alpha) \\
&\quad - \frac{m}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^m R_i \log[1 - \Phi(z_i)].
\end{aligned}$$

Observe que:

- $\frac{\partial z_i}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2} \left(\sqrt{\frac{x_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x_i}} \right) = -\frac{1}{\alpha} z_i$.
- $\frac{\partial z_i}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\alpha\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta}{x_i}} + \sqrt{\frac{x_i}{\beta}} \right)$.

Agora, vamos encontrar as equações de verossimilhança para os parâmetros α e β .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} &= \frac{2}{\alpha^3} \left(\frac{1}{2\beta} \sum_{i=1}^m x_i + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} - m \right) - \frac{m}{\alpha} + \sum_{i=1}^m R_i \frac{1}{1 - \Phi(z_i)} \left[-\phi(z_i) \left(-\frac{1}{\alpha} z_i \right) \right] \\
&= \frac{1}{\alpha^3} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^m x_i + \beta \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} - 2m \right) \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m R_i \frac{\phi(z_i)}{1 - \Phi(z_i)} z_i \\
&= \frac{1}{\alpha^3} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^m x_i + \beta \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} - 2m \right) + \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i=1}^m R_i z_i h(z_i) - m \right],
\end{aligned}$$

em que $h(z_i) = \phi(z_i)/[1 - \Phi(z_i)]$ é a função de risco da distribuição Normal padrão no ponto z_i . Então, a equação de verossimilhança para o parâmetro α é dada por:

$$\frac{1}{\hat{\alpha}^2} \left(\frac{1}{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^m x_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} - 2m \right) + \sum_{i=1}^m R_i z_i h(z_i) - m = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta} &= -\frac{1}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} \right) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i + \beta} - \frac{m}{2\beta} \\
&\quad + \sum_{i=1}^m R_i \frac{1}{1 - \Phi(z_i)} \left\{ -\phi(z_i) \left[-\frac{1}{2\alpha\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta}{x_i}} + \sqrt{\frac{x_i}{\beta}} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2\alpha^2\beta^2} \sum_{i=1}^m x_i - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i + \beta} - \frac{m}{2\beta} \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha\beta} \sum_{i=1}^m R_i \frac{\phi(z_i)}{1 - \Phi(z_i)} \left(\sqrt{\frac{\beta}{x_i}} + \sqrt{\frac{x_i}{\beta}} \right) \\
&= \frac{1}{2\alpha^2\beta^2} \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i + \beta} - \frac{m}{2\beta} \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} + \frac{1}{2\alpha\beta} \sum_{i=1}^m R_i \left(\sqrt{\frac{\beta}{x_i}} + \sqrt{\frac{x_i}{\beta}} \right) h(z_i).
\end{aligned}$$

Assim, a equação de verossimilhança para o parâmetro β é

$$\frac{1}{2\hat{\alpha}^2\hat{\beta}^2} \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i + \hat{\beta}} - \frac{m}{2\hat{\beta}} - \frac{1}{2\hat{\alpha}^2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} + \frac{1}{2\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum_{i=1}^m R_i \left(\sqrt{\frac{\hat{\beta}}{x_i}} + \sqrt{\frac{x_i}{\hat{\beta}}} \right) h(z_i) = 0 \quad (4.9)$$

Deste modo, as equações de verossimilhança (4.8) e (4.9) formam um sistema de equações o qual não possui solução analítica. Assim, métodos iterativos devem ser usados para encontrar os valores de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ que maximizem a função de verossimilhança, como, por exemplo, o método de Newton-Raphson, ver (Ortega & Rheinboldt, 1970).

Portanto, para testarmos a bondade de ajuste para o modelo Birnbaum-Saunders, considerando dados progressivamente censurados do tipo II, partimos das hipóteses apresentadas em (4.7) e utilizamos a estatística de teste dada em (4.6), em que $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^\top$, f^0 é a função densidade a ser considerada em H_0 e F^0 é a função de distribuição acumulada sob H_0 .

4.4 Estudo de Simulação

Para avaliar o desempenho do teste proposto, fizemos um estudo de simulação de Monte Carlo. Os poderes do teste foram obtidos para diferentes alternativas de acordo

com a característica da função de risco: monótona crescente e monótona decrescente, além de outras alternativas, afim de avaliar o desempenho do teste em cada situação.

A Tabela 4.1, obtida em (Park, 2005), nos dá os valores adequados para o tamanho da janela m para cada valor de n .

Tabela 4.1: Valores adequados para o tamanho da janela w , considerando diferentes tamanhos de m .

m	w
5 – 7	2
8 – 15	3
16 – 30	4
31 – 40	5
41 – 50	6

Fonte: (Park, 2005).

As Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam os valores críticos obtidos a partir das distribuições $BS(0,5;1)$, $BS(1;1)$ e $BS(1,5;1)$, respectivamente. Os poderes do teste são apresentados nas Tabelas de 4.5 à 4.16.

Percebemos que, à medida que o tamanho amostral n aumenta, temos um aumento nos poderes do teste. Além disso, situações em que a censura é precoce, a exemplo dos esquemas $(R_1 = n - m, R_2 = 0, \dots, R_m = 0)$ e $(R_1 = 0, R_2 = n - m, \dots, R_m = 0)$, apresentam poderes mais altos. Conclusões semelhantes foram obtidas em (Rad et al., 2011). Casos em que a censura é distribuída uniformemente durante o esquema de censura também apresentam bons resultados, a exemplo dos esquemas $(R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_m = 1)$ e $(R_1 = 1, R_2 = 0, \dots, R_{m-1} = 1, R_m = 0)$. Entretanto, percebemos que teste é bastante afetado quando a censura é feita de forma tardia, a exemplo dos esquemas $(R_1 = 0, R_2 = 0, \dots, R_{m-1} = n - m, R_m = 0)$ e $(R_1 = 0, R_2 = 0, \dots, R_m = n - m)$. Esse resultado também foi relatado em (Balakrishnan et al., 2007). O teste se mostrou bem eficaz quando temos, sob hipótese alternativa, funções de risco monótonas decrescente e não monótonas, a exemplo das distribuições $Gama(0,5;1)$, $GExp(0;5,1)$, $Beta(0,5;1)$, $Pareto(1;1)$ e $Weibull(1;1)$. Ainda é possível observar que ao instante em que se aumenta o parâmetro de forma α , os poderes do teste vão diminuindo, isso independentemente do esquema de censura adotado.

Tabela 4.2: Valores críticos do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) aos níveis de 10% e 5% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Valores Críticos	
			$\rho = 0, 10$	$\rho = 0, 05$
10	5	(5,0,0,0,0)	-0,1131	-0,0611
10	5	(0,5,0,0,0)	0,0281	0,0927
10	5	(1,1,1,1,1)	0,2353	0,2828
10	5	(0,0,0,5,0)	0,4777	0,5560
10	5	(0,0,0,0,5)	0,9500	1,0920
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	-0,0921	-0,0318
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	-0,0429	0,0176
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1572	0,2202
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,3364	0,4013
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,5130	0,6082
20	5	(15,0,0,0,0)	0,0007	0,0339
20	5	(0,15,0,0,0)	0,1989	0,2517
20	5	(3,3,3,3,3)	0,5447	0,5689
20	5	(0,0,0,15,0)	0,8133	0,9504
20	5	(0,0,0,0,15)	1,7519	1,9607
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	-0,1627	-0,1344
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	-0,0973	-0,0676
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,2390	0,2634
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,6654	0,7463
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,9818	1,1116
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	-0,1871	-0,1604
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	-0,1419	-0,1170
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,2377	0,2634
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,7338	0,8122
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,9729	1,0749
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	-0,2232	-0,1961
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	-0,1980	-0,1708
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,0540	0,0810
30	20	(0,0,0,...,0,10,0)	0,4707	0,5168
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,5744	0,6404

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.3: Valores críticos do teste a partir da distribuição BS(1;1) aos níveis de 10% e 5% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Valores Críticos	
			$\rho = 0, 10$	$\rho = 0, 05$
10	5	(5,0,0,0,0)	-0,0970	-0,0452
10	5	(0,5,0,0,0)	0,0468	0,1194
10	5	(1,1,1,1,1)	0,2806	0,3312
10	5	(0,0,0,5,0)	0,5347	0,6279
10	5	(0,0,0,0,5)	1,0410	1,1767
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	-0,0818	-0,0227
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	-0,0248	0,0346
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1898	0,2490
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,3874	0,4523
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,5844	0,6753
20	5	(15,0,0,0,0)	0,0598	0,0914
20	5	(0,15,0,0,0)	0,2502	0,3004
20	5	(3,3,3,3,3)	0,6218	0,6508
20	5	(0,0,0,15,0)	0,8693	1,0252
20	5	(0,0,0,0,15)	1,8729	2,0729
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	-0,1335	-0,1058
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	-0,0545	0,0243
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,2970	0,3241
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,7545	0,8365
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	1,1202	1,2541
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	-0,1387	-0,1120
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	-0,0801	-0,0516
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,3109	0,3366
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,8449	0,9216
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	1,1293	1,2466
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	-0,1863	-0,1575
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	-0,1508	-0,1236
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,1115	0,1400
30	20	(0,0,0,...,0,10,0)	0,5659	0,6164
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,6965	0,7723

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.4: Valores críticos do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) aos níveis de 10% e 5% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Valores Críticos	
			$\rho = 0, 10$	$\rho = 0, 05$
10	5	(5,0,0,0,0)	-0,0925	-0,0374
10	5	(0,5,0,0,0)	0,0412	0,1129
10	5	(1,1,1,1,1)	0,2965	0,3503
10	5	(0,0,0,5,0)	0,5561	0,6645
10	5	(0,0,0,0,5)	1,1125	1,2410
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	-0,0788	-0,0198
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	-0,0217	0,0370
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,2052	0,2633
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,4107	0,4764
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,6422	0,7392
20	5	(15,0,0,0,0)	0,1082	0,1373
20	5	(0,15,0,0,0)	0,2643	0,3086
20	5	(3,3,3,3,3)	0,6623	0,6920
20	5	(0,0,0,15,0)	0,8854	1,0568
20	5	(0,0,0,0,15)	1,9608	2,1572
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	-0,1062	-0,0795
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	-0,0282	0,0014
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,3247	0,3526
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,8089	0,8959
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	1,2513	1,3963
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	-0,0799	-0,0512
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	-0,0206	0,0095
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,3583	0,3841
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,9233	1,0105
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	1,2806	1,4130
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	-0,1421	-0,1135
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	-0,1025	-0,0766
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,1509	0,1781
30	20	(0,0,0,...,0,10,0)	0,6422	0,6991
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,8193	0,9095

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.5: Poder do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Função de Risco Monótona Crescente		Função de Risco Monótona Decrescente	
			Gama(2;1)	GExp(2;1)	Gama(0,5;1)	GExp(0,5;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,1656	0,1607	0,1723	0,1761
10	5	(0,5,0,0,0)	0,2228	0,2182	0,1623	0,1653
10	5	(1,1,1,1,1)	0,2634	0,2637	0,3035	0,3096
10	5	(0,0,0,5,0)	0,1868	0,1849	0,1772	0,1786
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0886	0,0914	0,1607	0,1605
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,1652	0,1583	0,1310	0,1353
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,2155	0,2083	0,1605	0,1667
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1952	0,1921	0,1839	0,1869
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,1902	0,1881	0,1831	0,1853
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,1053	0,1093	0,1726	0,1711
20	5	(15,0,0,0,0)	0,3072	0,3217	0,9453	0,9463
20	5	(0,15,0,0,0)	0,3255	0,3275	0,4172	0,4206
20	5	(3,3,3,3,3)	0,6310	0,6426	0,9652	0,9660
20	5	(0,0,0,15,0)	0,2038	0,2018	0,1898	0,1907
20	5	(0,0,0,0,15)	0,1015	0,1033	0,1407	0,2754
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,2615	0,2537	0,7486	0,7536
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,3674	0,3635	0,6249	0,6336
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,5019	0,5047	0,8255	0,8302
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,2089	0,2094	0,2995	0,3015
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0923	0,0972	0,3838	0,3814
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,3389	0,3315	0,9791	0,9791
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,4514	0,4515	0,9845	0,9851
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,6581	0,6680	0,9871	0,9878
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,2103	0,2142	0,4495	0,4539
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,0834	0,0901	0,7030	0,7004
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,3978	0,3780	0,9639	0,9658
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,4575	0,4437	0,9661	0,9683
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,5314	0,5226	0,9243	0,9303
30	20	(0,0,0,...,0,10,0)	0,2490	0,2525	0,5743	0,5812
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,1243	0,1369	0,9332	0,9332

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.6: Poder do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Outras Alternativas				
			Beta(0,5;1)	LLog(0,5;1)	Pareto(1;1)	Weibull(1;1)	LNorm(1;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,3090	0,1317	0,3255	0,2239	0,1200
10	5	(0,5,0,0,0)	0,2537	0,1834	0,1800	0,2634	0,1480
10	5	(1,1,1,1,1)	0,3682	0,2328	0,2255	0,3826	0,2202
10	5	(0,0,0,5,0)	0,2211	0,1613	0,0640	0,2257	0,1538
10	5	(0,0,0,0,5)	0,1386	0,0976	0,2774	0,1148	0,1304
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,3267	0,1236	0,4294	0,1951	0,1137
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,3528	0,1591	0,4107	0,2625	0,1381
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,2812	0,1713	0,4448	0,2597	0,1663
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,2715	0,1567	0,1911	0,2409	0,1601
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,1454	0,1252	0,4508	0,1498	0,1582
20	5	(15,0,0,0,0)	0,9410	0,3420	0,5849	0,7525	0,4174
20	5	(0,15,0,0,0)	0,4976	0,3148	0,2369	0,4939	0,2824
20	5	(3,3,3,3,3)	0,9663	0,5829	0,1798	0,0988	0,6366
20	5	(0,0,0,15,0)	0,2095	0,1869	0,0484	0,2432	0,1523
20	5	(0,0,0,0,15)	0,2770	0,0987	0,2375	0,1524	0,1273
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,8802	0,1885	0,7419	0,5124	0,1886
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,8279	0,3044	0,6594	0,6023	0,2910
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,8924	0,4184	0,5352	0,7961	0,4415
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,3770	0,1814	0,1398	0,3188	0,1888
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,3214	0,1047	0,5121	0,1667	0,1729
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,9849	0,2678	0,9319	0,7442	0,3062
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,9928	0,4141	0,9036	0,8311	0,4633
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,9885	0,5695	0,7636	0,0960	0,6557
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,5816	0,1794	0,2085	0,4106	0,2118
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,6255	0,0985	0,6694	0,2575	0,1947
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,9928	0,2401	0,9519	0,7379	0,2447
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,9955	0,3279	0,9393	0,7969	0,3363
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,9905	0,3515	0,8236	0,8390	0,3724
30	20	(0,0,0,...,10,0)	0,7807	0,2141	0,3871	0,4995	0,2547
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,8996	0,1725	0,8650	0,5845	0,2930

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.7: Poder do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Função de Risco Monótona Crescente		Função de Risco Monótona Decrescente	
			Gama(2;1)	GExp(2;1)	Gama(0,5;1)	GExp(0,5;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,0903	0,0878	0,0981	0,1008
10	5	(0,5,0,0,0)	0,1486	0,1439	0,1006	0,1032
10	5	(1,1,1,1,1)	0,1646	0,1639	0,1907	0,1927
10	5	(0,0,0,5,0)	0,1179	0,1177	0,1293	0,1301
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0455	0,0468	0,0739	0,0735
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,0946	0,0902	0,0679	0,0704
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,1316	0,1271	0,0921	0,0959
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1074	0,1050	0,0895	0,0918
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,1082	0,1071	0,1168	0,1187
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0442	0,0456	0,0664	0,0648
20	5	(15,0,0,0,0)	0,1720	0,1783	0,8992	0,9004
20	5	(0,15,0,0,0)	0,2263	0,2249	0,2506	0,2529
20	5	(3,3,3,3,3)	0,4858	0,4941	0,9437	0,9452
20	5	(0,0,0,15,0)	0,1208	0,1198	0,1370	0,1373
20	5	(0,0,0,0,15)	0,0522	0,0533	0,0744	0,1462
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,1711	0,1646	0,6133	0,6221
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,2701	0,2654	0,4994	0,5082
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,3859	0,3858	0,7170	0,723
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,1152	0,1169	0,2213	0,2222
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0415	0,0436	0,1831	0,1813
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,2300	0,2206	0,9618	0,9618
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,3419	0,3392	0,9712	0,9713
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,5056	0,5116	0,9826	0,9831
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,1034	0,1079	0,3472	0,3499
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,0329	0,0362	0,3958	0,3920
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,2813	0,2640	0,9158	0,9199
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,3363	0,3237	0,9248	0,9282
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,4119	0,4005	0,8647	0,8732
30	20	(0,0,0,...,0,10,0)	0,1441	0,1482	0,4834	0,4896
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0478	0,0538	0,7180	0,7137

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.8: Poder do teste a partir da distribuição BS(0,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Outras Alternativas				
			Beta(0,5;1)	LLog(0,5;1)	Pareto(1;1)	Weibull(1;1)	LNorm(1;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,2039	0,0702	0,2098	0,1275	0,0624
10	5	(0,5,0,0,0)	0,1782	0,1124	0,0941	0,1800	0,0872
10	5	(1,1,1,1,1)	0,2442	0,1405	0,1344	0,2490	0,1209
10	5	(0,0,0,5,0)	0,1541	0,1033	0,0366	0,1578	0,0990
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0651	0,0497	0,1718	0,0549	0,0646
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,2175	0,0675	0,3167	0,1101	0,0596
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,2433	0,0940	0,2951	0,1658	0,0745
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1594	0,0893	0,3138	0,1392	0,0792
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,1687	0,0882	0,1250	0,1507	0,0911
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0511	0,0590	0,3203	0,0545	0,0742
20	5	(15,0,0,0,0)	0,8904	0,1877	0,4750	0,5785	0,2221
20	5	(0,15,0,0,0)	0,3335	0,2034	0,1351	0,3510	0,1584
20	5	(3,3,3,3,3)	0,9465	0,4431	0,1186	0,8451	0,4770
20	5	(0,0,0,15,0)	0,1455	0,1111	0,0271	0,1589	0,0945
20	5	(0,0,0,0,15)	0,1470	0,0495	0,1365	0,0745	0,0643
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,8040	0,1130	0,6519	0,3900	0,1060
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,7338	0,2143	0,5663	0,4883	0,1823
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,8257	0,3058	0,4304	0,6954	0,2992
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,2618	0,0985	0,0952	0,2126	0,1110
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,1413	0,0515	0,3757	0,0678	0,0865
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,9733	0,1624	0,8843	0,6070	0,1719
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,9846	0,3054	0,8568	0,7369	0,3155
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,9855	0,4097	0,6618	0,9045	0,4507
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,4271	0,0874	0,1545	0,2744	0,1199
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,3102	0,0426	0,5286	0,0896	0,1004
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,9855	0,1488	0,9111	0,6117	0,1336
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,9890	0,2189	0,8980	0,6880	0,1972
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,9821	0,2498	0,7415	0,7527	0,2399
30	20	(0,0,0,...,10,0)	0,6596	0,1257	0,3194	0,3928	0,1639
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,6121	0,0721	0,7634	0,2837	0,1375

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.9: Poder do teste a partir da distribuição BS(1;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Função de Risco Monótona Crescente		Função de Risco Monótona Decrescente	
			Gama(2;1)	GExp(2;1)	Gama(0,5;1)	GExp(0,5;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,1347	0,1311	0,1452	0,1488
10	5	(0,5,0,0,0)	0,1984	0,1932	0,1410	0,1444
10	5	(1,1,1,1,1)	0,1686	0,1685	0,1958	0,1975
10	5	(0,0,0,5,0)	0,1319	0,1334	0,1417	0,1429
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0583	0,0603	0,0961	0,0958
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,1499	0,1442	0,1170	0,1210
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,1855	0,1792	0,1352	0,1400
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1432	0,1400	0,1256	0,1272
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,1233	0,1225	0,1314	0,1323
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0547	0,0570	0,0861	0,0846
20	5	(15,0,0,0,0)	0,1037	0,1087	0,8374	0,8365
20	5	(0,15,0,0,0)	0,2287	0,2278	0,2538	0,2567
20	5	(3,3,3,3,3)	0,2566	0,2617	0,8422	0,8429
20	5	(0,0,0,15,0)	0,1658	0,1636	0,1659	0,1670
20	5	(0,0,0,0,15)	0,0691	0,0707	0,1003	0,1002
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,1688	0,1624	0,6099	0,6180
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,2387	0,2339	0,4469	0,4565
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,2610	0,2593	0,5630	0,5682
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,1074	0,1098	0,2130	0,2145
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0390	0,0421	0,1741	0,1726
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,1616	0,1518	0,9373	0,9378
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,1744	0,2265	0,9240	0,9248
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,2996	0,2989	0,9549	0,9564
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,0681	0,0704	0,3062	0,3083
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,0212	0,0231	0,2818	0,2775
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,2475	0,2295	0,8921	0,8967
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,2722	0,2597	0,8699	0,8760
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,2990	0,2896	0,7772	0,7890
30	20	(0,0,0,...,0,10,0)	0,0670	0,0704	0,3786	0,3832
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0222	0,0247	0,4692	0,4621

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.10: Poder do teste a partir da distribuição BS(1;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Outras Alternativas				
			Beta(0,5;1)	LLog(0,5;1)	Pareto(1;1)	Weibull(1;1)	LNorm(1;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,2733	0,1069	0,2861	0,1893	0,0965
10	5	(0,5,0,0,0)	0,2312	0,1595	0,1493	0,2356	0,1243
10	5	(1,1,1,1,1)	0,2500	0,1434	0,1384	0,2525	0,1244
10	5	(0,0,0,5,0)	0,1722	0,1189	0,0429	0,1763	0,1139
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0843	0,0629	0,2066	0,0711	0,0822
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,3056	0,1126	0,4091	0,1771	0,1029
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,3182	0,1358	0,3732	0,2306	0,1159
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,2134	0,1225	0,3711	0,1929	0,1138
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,1885	0,1011	0,1378	0,1711	0,1042
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0657	0,0701	0,3484	0,0695	0,0888
20	5	(15,0,0,0,0)	0,8277	0,1144	0,4010	0,4446	0,1272
20	5	(0,15,0,0,0)	0,3374	0,2057	0,1373	0,3548	0,1617
20	5	(3,3,3,3,3)	0,8455	0,2199	0,0489	0,6297	0,1949
20	5	(0,0,0,15,0)	0,1806	0,1495	0,0384	0,2069	0,1266
20	5	(0,0,0,0,15)	0,0973	0,0667	0,1755	0,0994	0,0856
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,8020	0,1112	0,6493	0,3864	0,1046
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,6888	0,1801	0,5251	0,4445	0,1479
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,6918	0,1972	0,3087	0,5478	0,1635
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,2520	0,0923	0,0921	0,2022	0,1054
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,1347	0,0486	0,3671	0,0639	0,0833
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,9584	0,1081	0,8420	0,4991	0,1042
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,9631	0,1933	0,7676	0,5891	0,1673
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,9649	0,2151	0,4746	0,7321	0,1830
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,3680	0,0593	0,1352	0,2160	0,0865
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,2084	0,0283	0,4611	0,0536	0,0686
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,9812	0,1222	0,8943	0,5645	0,1067
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,9810	0,1636	0,8605	0,6078	0,1315
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,9655	0,1698	0,6403	0,6414	0,1391
30	20	(0,0,0,...,10,0)	0,5150	0,0595	0,2570	0,2776	0,0870
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,3384	0,0393	0,6752	0,1431	0,0765

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.11: Poder do teste a partir da distribuição BS(1;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Função de Risco Monótona Crescente		Função de Risco Monótona Decrescente	
			Gama(2;1)	GExp(2;1)	Gama(0,5;1)	GExp(0,5;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,0753	0,0740	0,0826	0,0856
10	5	(0,5,0,0,0)	0,1258	0,1216	0,0847	0,0864
10	5	(1,1,1,1,1)	0,1021	0,1010	0,1219	0,1230
10	5	(0,0,0,5,0)	0,0717	0,0722	0,0883	0,0887
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0277	0,0286	0,0454	0,0451
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,0860	0,0826	0,0620	0,0648
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,1162	0,1107	0,0785	0,0812
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,0831	0,0804	0,0645	0,0657
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,0646	0,0635	0,0706	0,0711
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0249	0,0261	0,0364	0,0360
20	5	(15,0,0,0,0)	0,0575	0,0595	0,6826	0,6829
20	5	(0,15,0,0,0)	0,1648	0,1638	0,1562	0,1588
20	5	(3,3,3,3,3)	0,1765	0,1796	0,6961	0,6978
20	5	(0,0,0,15,0)	0,0859	0,0861	0,1092	0,1094
20	5	(0,0,0,0,15)	0,0341	0,0345	0,0496	0,0495
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,1106	0,1046	0,4768	0,4851
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,1797	0,1738	0,3432	0,3512
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,1888	0,1878	0,4396	0,4459
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,0431	0,0443	0,1408	0,1412
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0180	0,0191	0,0799	0,0791
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,1023	0,0947	0,8882	0,8877
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,1295	0,1659	0,8419	0,8443
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,2200	0,2148	0,9050	0,9080
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,0244	0,026	0,2070	0,2080
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,0092	0,0102	0,1331	0,1309
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,1656	0,1514	0,7973	0,8041
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,1986	0,1887	0,7772	0,7831
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,2198	0,2104	0,6693	0,6820
30	20	(0,0,0,...,0,10,0)	0,0316	0,0331	0,2821	0,2851
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0079	0,0081	0,2032	0,1980

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.12: Poder do teste a partir da distribuição BS(1;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Outras Alternativas				
			Beta(0,5;1)	LLog(0,5;1)	Pareto(1;1)	Weibull(1;1)	LNorm(1;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,1789	0,0572	0,1827	0,1086	0,0507
10	5	(0,5,0,0,0)	0,1507	0,0935	0,0719	0,1529	0,0704
10	5	(1,1,1,1,1)	0,1597	0,0847	0,0801	0,1663	0,0665
10	5	(0,0,0,5,0)	0,1043	0,0622	0,0174	0,1069	0,0599
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0389	0,0305	0,1216	0,0329	0,0420
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,2046	0,0611	0,2989	0,1005	0,0531
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,2158	0,0794	0,2691	0,1480	0,0616
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1238	0,0653	0,2681	0,1075	0,0577
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,1057	0,0508	0,0870	0,0935	0,0515
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0259	0,0332	0,2482	0,0295	0,0433
20	5	(15,0,0,0,0)	0,6927	0,0622	0,3127	0,3039	0,0606
20	5	(0,15,0,0,0)	0,2228	0,1432	0,0727	0,2534	0,0945
20	5	(3,3,3,3,3)	0,7078	0,1523	0,0262	0,4956	0,1155
20	5	(0,0,0,15,0)	0,1175	0,0785	0,0168	0,1242	0,0651
20	5	(0,0,0,0,15)	0,0476	0,0323	0,0921	0,0501	0,0427
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,7078	0,0683	0,5602	0,2858	0,0531
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,5900	0,1261	0,4332	0,3583	0,0879
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,5694	0,1393	0,2259	0,4399	0,0992
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,1605	0,0368	0,0603	0,1178	0,0486
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0576	0,0230	0,2543	0,0266	0,0409
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,9324	0,0666	0,7801	0,3902	0,0529
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,9298	0,1338	0,6924	0,4907	0,0978
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,9355	0,1554	0,3784	0,6248	0,1067
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,2383	0,0223	0,0943	0,1087	0,0378
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,0902	0,0119	0,3300	0,0173	0,0305
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,9619	0,0750	0,8358	0,4456	0,0489
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,9622	0,1144	0,7980	0,5105	0,0736
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,9304	0,1164	0,5460	0,5370	0,0750
30	20	(0,0,0,...,10,0)	0,3625	0,0289	0,2023	0,1700	0,0376
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,1065	0,0164	0,5352	0,0471	0,0347

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.13: Poder do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Função de Risco Monótona Crescente		Função de Risco Monótona Decrescente	
			Gama(2;1)	GExp(2;1)	Gama(0,5;1)	GExp(0,5;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,1283	0,1254	0,1384	0,1428
10	5	(0,5,0,0,0)	0,2050	0,2013	0,1460	0,1499
10	5	(1,1,1,1,1)	0,1428	0,1422	0,1677	0,1698
10	5	(0,0,0,5,0)	0,1179	0,1176	0,1290	0,1301
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0392	0,0415	0,0666	0,0660
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,1455	0,1399	0,1136	0,1172
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,1806	0,1731	0,1310	0,1359
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1248	0,1219	0,1074	0,1103
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,0972	0,0962	0,1085	0,1098
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0329	0,0344	0,0485	0,0477
20	5	(15,0,0,0,0)	0,0392	0,0404	0,5779	0,5788
20	5	(0,15,0,0,0)	0,2067	0,2056	0,2217	0,2251
20	5	(3,3,3,3,3)	0,1528	0,1550	0,6359	0,6380
20	5	(0,0,0,15,0)	0,1561	0,1547	0,1601	0,1606
20	5	(0,0,0,0,15)	0,0522	0,0533	0,1469	0,1491
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,1109	0,1053	0,4782	0,4863
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,1848	0,1809	0,3544	0,3641
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,1877	0,1865	0,4369	0,4433
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,0595	0,0607	0,1636	0,1643
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0182	0,0193	0,0816	0,0803
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,0606	0,0557	0,7878	0,7901
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,1233	0,1198	0,7197	0,7237
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,1711	0,1697	0,8316	0,8354
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,0239	0,0254	0,2053	0,2066
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,0071	0,0083	0,1070	0,1047
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,1322	0,1187	0,0737	0,7436
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,1564	0,1455	0,6917	0,6995
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,1947	0,1861	0,6236	0,6372
30	20	(0,0,0,...,0,10,0)	0,0217	0,0231	0,2341	0,2359
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0049	0,0048	0,1156	0,1116

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.14: Poder do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 10% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Outras Alternativas				
			Beta(0,5;1)	LLog(0,5;1)	Pareto(1;1)	Weibull(1;1)	LNorm(1;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,2640	0,1005	0,2750	0,1802	0,0910
10	5	(0,5,0,0,0)	0,2375	0,1664	0,1586	0,2432	0,1312
10	5	(1,1,1,1,1)	0,2176	0,1224	0,1139	0,2224	0,1014
10	5	(0,0,0,5,0)	0,1540	0,1033	0,0366	0,1578	0,0989
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0578	0,0438	0,1572	0,0486	0,0584
10	7	(3,0,0,0,0,0)	0,3002	0,1102	0,4030	0,1723	0,1002
10	7	(0,3,0,0,0,0)	0,3108	0,1322	0,3660	0,2245	0,1117
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1828	0,1066	0,3403	0,1630	0,0956
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,1552	0,0805	0,1167	0,1392	0,0830
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0365	0,0448	0,2834	0,0389	0,0570
20	5	(15,0,0,0,0)	0,6080	0,0440	0,2745	0,2411	0,0418
20	5	(0,15,0,0,0)	0,2999	0,1848	0,1184	0,3227	0,1381
20	5	(3,3,3,3,3)	0,6509	0,1307	0,0204	0,4410	0,0946
20	5	(0,0,0,15,0)	0,1736	0,1423	0,0362	0,1966	0,1196
20	5	(0,0,0,0,15)	0,1395	0,0495	0,1364	0,0745	0,0643
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,7103	0,0693	0,5612	0,2873	0,0542
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,6044	0,1317	0,4430	0,3700	0,0944
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,5788	0,1383	0,2240	0,4379	0,0975
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,1945	0,0510	0,0704	0,1449	0,0644
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0581	0,0236	0,2559	0,0269	0,0413
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,8774	0,0371	0,6922	0,2783	0,0230
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,8726	0,0944	0,6123	0,3938	0,0515
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,8888	0,1195	0,3075	0,5378	0,0665
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,2363	0,0218	0,0937	0,1068	0,0372
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,0699	0,0096	0,2977	0,0139	0,0232
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,9462	0,0601	0,8005	0,3911	0,0332
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,9382	0,0888	0,7436	0,4416	0,0469
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,9145	0,0994	0,5093	0,4979	0,0589
30	20	(0,0,0,...,10,0)	0,2931	0,0192	0,1764	0,1240	0,0246
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0438	0,0092	0,4570	0,0171	0,0221

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.15: Poder do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Função de Risco Monótona Crescente		Função de Risco Monótona Decrescente	
			Gama(2;1)	GExp(2;1)	Gama(0,5;1)	GExp(0,5;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,0690	0,0668	0,0750	0,0783
10	5	(0,5,0,0,0)	0,1300	0,1263	0,0881	0,0894
10	5	(1,1,1,1,1)	0,0859	0,0844	0,1007	0,1015
10	5	(0,0,0,5,0)	0,0503	0,0505	0,0705	0,0712
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0182	0,0191	0,0279	0,0279
10	7	(3,0,0,0,0,0,0)	0,0840	0,0798	0,0601	0,0629
10	7	(0,3,0,0,0,0,0)	0,1138	0,1083	0,0768	0,0797
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,0723	0,0696	0,0558	0,0570
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,0500	0,0492	0,0523	0,0529
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0142	0,0150	0,0199	0,0196
20	5	(15,0,0,0,0)	0,0235	0,0244	0,4024	0,4061
20	5	(0,15,0,0,0)	0,1579	0,1552	0,1429	0,1461
20	5	(3,3,3,3,3)	0,1090	0,1107	0,4772	0,4795
20	5	(0,0,0,15,0)	0,0726	0,0722	0,1002	0,1008
20	5	(0,0,0,0,15)	0,0238	0,0247	0,0715	0,0767
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,0739	0,0689	0,3628	0,3700
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,1408	0,1375	0,2729	0,2802
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,1379	0,1356	0,3256	0,3304
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,0201	0,0211	0,0938	0,0942
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0083	0,0088	0,0370	0,0366
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,0377	0,0343	0,6671	0,6698
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,0926	0,0900	0,5760	0,5813
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,1281	0,1265	0,6983	0,7039
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,0057	0,0060	0,1089	0,1087
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,0027	0,0031	0,0456	0,0441
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,0886	0,0804	0,6133	0,6208
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,1152	0,1089	0,5860	0,5958
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,1424	0,1350	0,5110	0,5245
30	20	(0,0,0,...,0,10,0)	0,0087	0,0088	0,1338	0,1342
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0011	0,0014	0,0388	0,0388

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.16: Poder do teste a partir da distribuição BS(1,5;1) para diferentes tipos de funções de risco, ao nível de 5% de significância.

n	m	Esquema de Censura (R_1, \dots, R_m)	Outras Alternativas				
			Beta(0,5;1)	LLog(0,5;1)	Pareto(1;1)	Weibull(1;1)	LNorm(1;1)
10	5	(5,0,0,0,0)	0,1666	0,0529	0,1707	0,0993	0,0463
10	5	(0,5,0,0,0)	0,1564	0,0980	0,0770	0,1585	0,0739
10	5	(1,1,1,1,1)	0,1355	0,0681	0,0653	0,1394	0,0523
10	5	(0,0,0,5,0)	0,0813	0,0436	0,0121	0,0831	0,0417
10	5	(0,0,0,0,5)	0,0247	0,0202	0,0880	0,0223	0,0286
10	7	(3,0,0,0,0,0)	0,2000	0,0595	0,2941	0,0983	0,0511
10	7	(0,3,0,0,0,0)	0,2128	0,0782	0,2660	0,1460	0,0603
10	7	(1,0,0,1,0,0,1)	0,1083	0,0576	0,2448	0,0948	0,0485
10	7	(0,0,0,0,0,3,0)	0,0811	0,0407	0,0725	0,0726	0,0387
10	7	(0,0,0,0,0,0,3)	0,0136	0,0191	0,1915	0,0168	0,0260
20	5	(15,0,0,0,0)	0,4662	0,0245	0,2132	0,1618	0,0210
20	5	(0,15,0,0,0)	0,2078	0,1346	0,0648	0,2405	0,0872
20	5	(3,3,3,3,3)	0,4918	0,0923	0,0099	0,3382	0,0544
20	5	(0,0,0,15,0)	0,1058	0,0677	0,0137	0,1111	0,0538
20	5	(0,0,0,0,15)	0,0712	0,0224	0,0676	0,0359	0,0308
20	10	(10,0,0,...,0,0,0)	0,6115	0,0435	0,4830	0,2141	0,0293
20	10	(0,10,0,...,0,0,0)	0,5088	0,0962	0,3581	0,3008	0,0594
20	10	(1,1,1,...,1,1,1)	0,4584	0,0984	0,1610	0,3427	0,0593
20	10	(0,0,0,...,0,10,0)	0,1018	0,0194	0,0436	0,0650	0,0264
20	10	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0245	0,0105	0,1667	0,0114	0,0192
30	15	(15,0,0,...,0,0,0)	0,8109	0,0230	0,6169	0,2093	0,0118
30	15	(0,15,0,...,0,0,0)	0,7905	0,0685	0,5333	0,3221	0,0292
30	15	(1,1,1,...,1,1,1)	0,8041	0,0856	0,2324	0,4399	0,0392
30	15	(0,0,0,...,0,15,0)	0,1212	0,0063	0,0579	0,0367	0,0149
30	15	(0,0,0,...,0,0,15)	0,0281	0,0042	0,1998	0,0045	0,0104
30	20	(10,0,0,...,0,0,0)	0,8999	0,0389	0,7323	0,3056	0,0165
30	20	(0,10,0,...,0,0,0)	0,8942	0,0643	0,6789	0,3722	0,0262
30	20	(1,0,1,...,0,1,0)	0,8495	0,0674	0,4237	0,4144	0,0324
30	20	(0,0,0,...,10,0)	0,1525	0,0094	0,1246	0,0626	0,0103
30	20	(0,0,0,...,0,0,10)	0,0091	0,0033	0,3311	0,0031	0,0077

Fonte: Próprio autor.

4.5 Aplicações

A seguir, serão mostradas duas aplicações feitas com base em conjuntos de dados reais com a característica da censura progressiva do tipo II.

4.5.1 Aplicação 1

Primeiramente, tomaremos o conjunto de dados reais obtido de (Nelson, 2005, p. 105), em que tais dados são referentes aos tempos em quebras de um fluído isolante em um teste acelerado realizado com várias voltagens. A partir desses dados, (Viveros & Balakrishnan, 1994) produziu uma amostra progressivamente censurada do tipo II, em que tal amostra tem tamanho $m = 8$ e foi obtida a partir de $n = 19$ observações registradas a 34 kilovolts. Esses dados são apresentados na Tabela 4.17.

Tabela 4.17: Amostra progressivamente censurada do tipo II referente aos tempos em quebras de um fluído isolante em um teste acelerado registrados em 34 kilovolts.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_{i:8:19}$	0,19	0,78	0,96	1,31	2,78	4,85	6,50	7,35
R_i	0	0	3	0	3	0	0	5

Fonte: (Nelson, 2005, pag. 105).

Nosso objetivo é testar se o conjunto de dados progressivamente censurados do tipo II, apresentado na Tabela 4.17, segue distribuição Birbaum-Saunders. A estatística de teste observada foi $t(w, n, m) = 0,6321$. De acordo com a Tabela 4.1, o valor adequado da janela w para esta situação é $w = 3$, assim, o valor crítico obtido para este caso foi $T(w, n, m)(\rho) = 0,1595$, considerando um nível de $\rho = 5\%$ de significância. Portanto, rejeitamos a hipótese de que os dados da Tabela 4.17 se adequam ao modelo Birnbaum-Saunders, ao nível de 5% de significância.

4.5.2 Aplicação 2

Em nossa segunda aplicação, tomamos o conjunto de dados em (Huber-Carol, Balakrishnan, Nikulin, & Mesbah, 2012, pag. 101) referente a medida da força de ruptura de vigas de madeira. A amostra progressivamente censurada do tipo II de

tamanho $m = 20$ foi obtida a partir $n = 32$ observações. Esses dados são apresentados na Tabela 4.18.

Tabela 4.18: Amostra progressivamente censurada do tipo II referente a medida da força de ruptura de vigas de madeira.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{i:20:32}$	43,19	49,44	51,55	56,63	67,27	78,47	86,59	90,63	94,38	98,21
R_i	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_{i:20:32}$	98,39	99,74	100,22	103,48	105,54	107,13	108,14	108,94	110,81	116,39
R_i	2	2	0	0	0	0	1	1	0	2

Fonte: (Nelson, 2005, pag. 105).

Nesta segunda aplicação, a estatística de teste observada foi $t(w, n, m) = 0,2228$. De acordo com a Tabela 4.1, o valor adequado da janela w para esta situação é $w = 4$, assim, o valor crítico obtido para este caso foi $T(w, n, m)(\rho) = 0,0511$, considerando um nível de $\rho = 5\%$ de significância. Portanto, rejeitamos a hipótese de que os dados da Tabela 4.18 se adequam ao modelo Birnbaum-Saunders, ao nível de 5% de significância.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho, propomos testes de bondade de ajuste baseados na informação de Kullback-Leibler, em que foram considerados duas situações: dados não censurados e dados progressivamente censurados do tipo II. Com o auxílio do *software* R, criamos rotinas computacionais para obtenção das estimativas dos parâmetros do modelos, bem como os valores críticos para as estatísticas de testes.

Considerando o caso em que os dados eram não censurados, obtivemos as seguintes conclusões:

- O teste de bondade de ajuste proposto teve um desempenho melhor que os testes clássicos (Cramér-von Mises e Anderson-Darling), no sentido de que tiveram poderes maiores para as alternativas com funções de risco monótonas crescente e não monótonas.
- Quando temos alternativas monótonas decrescentes para a função de risco, o teste baseado na informação de Kullback-Leibler tem desempenho inferior ao mostrado pelos testes clássicos. Isso se dá pelo fato de que, nessas situações, as funções de risco sob a hipótese alternativa têm comportamentos bem parecidos com a função de risco sob a hipótese nula, fazendo com que o teste baseado na informação de Kullback-Leibler tenha mais dificuldade em detectar essas diferenças.
- No geral, o teste baseado na informação de Kullback-Leibler se mostrou mais eficaz do que os testes clássicos.

No caso em que os dados apresentavam censura progressiva do tipo II, podemos concluir que:

- Nas situações em que a censura ocorre precocemente, o teste proposto apresenta bons resultados, assim como nas situações em que a censura é distribuída uniformemente ao longo do esquema de censura.
- O teste proposto é bastante afetado quando a censura é feita de modo tardio.
- O teste proposto se mostrou bastante eficaz em situações cujas alternativas para função de risco eram monótonas decrescente e não monótonas. Resultados semelhantes foram encontrados para as distribuição log-normal e exponencial em (Rad et al., 2011) e (Balakrishnan et al., 2007).

Apêndice A

Demonstração da Função de Verossimilhança Progressivamente Censurada do Tipo II

Primeiramente, iremos expor alguns resultados relacionados às estatísticas de ordem apresentados em (Arnold, Balakrishnan, & Nagaraja, 1992).

- (i) Sejam $X_{i:n}$, $i = 1, \dots, n$, estatísticas de ordem, em que $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$. Então,

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(x) [F(x)]^{i-1} [1-F(x)]^{n-i}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- (ii) Sejam X_i e X_j , $i = 1, \dots, n$ e $i < j \leq n$, estatísticas de ordem. Então,

$$f_{j:n}(x_j | X_{i:n} = x_i) = \frac{(n-i)}{(j-i-1)!(n-j)!} \frac{f(x_j)}{[1-F(x_i)]} \frac{[1-F(x_j)]^{n-j}}{[1-F(x_i)]^{n-j}},$$

com $x_i \leq x_j < \infty$.

Agora, considere $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas referentes aos tempos ordenados de falha das m unidades observacionais que falharam (estatísticas de ordem progressivamente censuradas do tipo II), e x_1, \dots, x_m suas respectivas observações. Consideremos também um esquema de censura progressiva do tipo II pré-definido R_1, \dots, R_m . Observemos que para a primeira falha, pelo resultado (i), a probabilidade de $X_{1:m:n} = x_1$ é dada por:

$$P(X_{1:m:n} = x_1) = n f(x_1; \theta) [1 - F(x_1; \theta)]^{n-1},$$

já que das n unidades, 1 falhou e $n - 1$ não falharam. Após essa falha, serão retiradas R_1 unidades das que sobraram, restando assim $n - R_1 - 1$ unidades.

Para a segunda falha, das $n - R_1 - 1$ unidades que sobraram, 1 irá falhar e $n - R_1 - 2$ não vão. Então, pelo resultado (ii), a probabilidade de $X_{2:m;n} = x_2$, dado que $X_{1:m;n} = x_1$ e que R_1 unidades foram retiradas, é:

$$\begin{aligned} P(X_{2:m;n} = x_2 | x_1, R_1) &= P(X_{2:m;n-R_1} = x_2 | x_1) \\ &= \frac{(n - R_1 - 1)!}{(n - R_1 - 2)!} \frac{f(x_2; \theta)}{[1 - F(x_1; \theta)]} \frac{[1 - F(x_2; \theta)]^{n-R_1-2}}{[1 - F(x_1; \theta)]^{n-R_1-2}} \\ &= (n - R_1 - 1) f(x_2; \theta) \frac{[1 - F(x_2; \theta)]^{n-R_1-2}}{[1 - F(x_1; \theta)]^{n-R_1-1}}. \end{aligned}$$

Após a segunda falha, são retiradas R_2 unidades das $n - R_1 - 2$ que sobraram, restando assim $n - R_1 - R_2 - 2$ unidades. Assim, para a terceira falha, das $n - R_1 - R_2 - 2$ unidades que sobraram, 1 irá falhar e $n - R_1 - R_2 - 3$ não vão. Então, pelo resultado (ii) e pelo fato de estarmos trabalhando com estatísticas de ordem, a probabilidade de $X_{3:m;n} = x_3$, dado que $X_{1:m;n} = x_1$, $X_{2:m;n} = x_2$ e que R_1 e R_2 unidades foram retiradas, é:

$$\begin{aligned} P(X_{3:m;n} = x_3 | x_1, R_1, x_2, R_2) &= P(X_{3:m;n-R_1-R_2} = x_3 | x_1, x_2) \\ &= P(X_{3:m;n-R_1-R_2-1} = x_3 | x_2) \\ &= \frac{(n - R_1 - R_2 - 2)!}{(n - R_1 - R_2 - 3)!} \frac{f(x_3; \theta)}{[1 - F(x_2; \theta)]} \frac{[1 - F(x_3; \theta)]^{n-R_1-R_2-3}}{[1 - F(x_2; \theta)]^{n-R_1-R_2-3}} \\ &= (n - R_1 - R_2 - 2) f(x_3; \theta) \frac{[1 - F(x_3; \theta)]^{n-R_1-R_2-3}}{[1 - F(x_2; \theta)]^{n-R_1-R_2-2}}. \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio até a m -ésima falha, chegamos que:

$$\begin{aligned} P(X_{m:m;n} = x_m | x_1, R_1, \dots, x_{m-1}, R_{m-1}) &= [n - R_1 - \dots - R_{m-1} - (m - 1)] f(x_m; \theta) \\ &\quad \times \frac{[1 - F(x_m; \theta)]^{n-R_1-\dots-R_{m-1}-m}}{[1 - F(x_{m-1}; \theta)]^{n-R_1-\dots-R_{m-1}-(m-1)}}. \end{aligned}$$

Como as variáveis $X_{1:m;n}, \dots, X_{m:m;n}$ são independentes e identicamente distribuídas, temos que a distribuição conjunta dessas variáveis é dada por:

$$\begin{aligned} f_{X_{1:m;n}, \dots, X_{m:m;n}}(x_1, \dots, x_m) &= P(X_{1:m;n}) \times P(X_{2:m;n} = x_2 | x_1, R_1) \\ &\quad \times \dots \times P(X_{m:m;n} = x_m | x_1, R_1, \dots, x_{m-1}, R_{m-1}), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m; \theta) &= n f(x_1; \theta) [1 - F(x_1; \theta)]^{n-1} \\
&\times (n - R_1 - 1) f(x_2; \theta) \frac{[1 - F(x_2; \theta)]^{n-R_1-2}}{[1 - F(x_1; \theta)]^{n-R_1-1}} \\
&\times (n - R_1 - R_2 - 2) f(x_3; \theta) \frac{[1 - F(x_3; \theta)]^{n-R_1-R_2-3}}{[1 - F(x_2; \theta)]^{n-R_1-R_2-2}} \\
&\times \dots \times [n - R_1 - \dots - R_{m-1} - (m-1)] f(x_m; \theta) \\
&\times \frac{[1 - F(x_m; \theta)]^{n-R_1-\dots-R_{m-1}-m}}{[1 - F(x_{m-1}; \theta)]^{n-R_1-\dots-R_{m-1}-(m-1)}} \\
&= n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \\
&\times \dots \times (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1) \\
&\times f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) f(x_3; \theta) \times \dots \times f(x_m; \theta) \\
&\times [1 - F(x_1; \theta)]^{n-1} \frac{[1 - F(x_2; \theta)]^{n-R_1-2}}{[1 - F(x_1; \theta)]^{n-R_1-1}} \\
&\times \frac{[1 - F(x_3; \theta)]^{n-R_1-R_2-3}}{[1 - F(x_2; \theta)]^{n-R_1-R_2-2}} \\
&\times \dots \times \frac{[1 - F(x_m; \theta)]^{n-R_1-\dots-R_{m-1}-m}}{[1 - F(x_{m-1}; \theta)]^{n-R_1-\dots-R_{m-1}-(m-1)}} \\
&= n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \\
&\times \dots \times (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1) \\
&\times f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) f(x_3; \theta) \times \dots \times f(x_m; \theta) \\
&\times [1 - F(x_1; \theta)]^{R_1} [1 - F(x_2; \theta)]^{R_2} [1 - F(x_3; \theta)]^{R_3} \\
&\times \dots \times [1 - F(x_m; \theta)]^{n-R_1-\dots-R_{m-1}-m}.
\end{aligned}$$

Pelo que foi visto na Seção 1.1.1, é fácil ver que $R_m = n - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1} - m$ e, denotando $c = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \times \dots \times (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$, temos que

$$\begin{aligned}
f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m; \theta) &= c f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) f(x_3; \theta) \times \dots \times f(x_m; \theta) \\
&\times [1 - F(x_1; \theta)]^{R_1} [1 - F(x_2; \theta)]^{R_2} [1 - F(x_3; \theta)]^{R_3} \\
&\times \dots \times [1 - F(x_m; \theta)]^{R_m} \\
&= c \prod_{i=1}^m f(x_i; \theta) [1 - F(x_i; \theta)]^{R_i}.
\end{aligned}$$

Segue, então, que a função de verossimilhança para o parâmetro θ baseada em uma amostra progressivamente censurada do tipo II é dada por

$$L(\theta) = c \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) [1 - F(x_i; \theta)]^{R_i}.$$

Apêndice B

Demonstração da Expressão (4.2)

Sejam $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ estatísticas de ordem progressivamente censuradas do tipo II. Então, de resultados referentes as estatísticas de ordem, temos que

$$f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m f(X_{i:m:n} = x_i | x_1, \dots, x_{i-1}).$$

Daí,

$$\begin{aligned} H_{1, \dots, m:m:n} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:m:n}} f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) \\ &\quad \times \log[f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m)] dx_1, \dots, dx_m \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:m:n}} f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) \\ &\quad \times \log \left[\prod_{i=1}^m f(X_{i:m:n} = x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) \right] dx_1, \dots, dx_m \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:m:n}} \sum_{i=1}^m \{ f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) \\ &\quad \times \log[f(X_{i:m:n} = x_i | x_1, \dots, x_{i-1})] \} dx_1, \dots, dx_m \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{x_{2:m:n}} f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) \right. \\ &\quad \left. \times \log[f(X_{i:m:n} = x_i | x_1, \dots, x_{i-1})] dx_1, \dots, dx_m \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m H(X_{i:m:n} | X_{1:m:n}, \dots, X_{i-1:m:n}) \\
&= H(X_{1:m:n} | X_{1:m:n}) + \sum_{i=2}^m H(X_{i:m:n} | X_{1:m:n}, \dots, X_{i-1:m:n}) \\
&= H_{1:m:n} + \sum_{i=2}^m H(X_{i:m:n} | X_{1:m:n}, \dots, X_{i-1:m:n})
\end{aligned}$$

Uma vez que a amostra progressivamente censurada do tipo II forma uma cadeia de Markov, temos

$$H(X_{i:m:n} | X_{1:m:n}, \dots, X_{i-1:m:n}) = H(X_{i:m:n} | X_{i-1:m:n}), \quad i = 1, \dots, m,$$

assim,

$$\begin{aligned}
H_{1,\dots,m:m:n} &= H_{1:m:n} + \sum_{i=2}^m H(X_{i:m:n} | X_{i-1:m:n}) \\
&= H_{1:m:n} + H(X_{2:m:n} | X_{1:m:n}) + \dots + H(X_{m:m:n} | X_{m-1:m:n})
\end{aligned} \tag{B.1}$$

De acordo com (Abo-Eleneen, 2011), temos o seguinte:

(i) Podemos escrever $H_{1:m:n}$ como sendo

$$H_{1:m:n} = 1 - \log(n) - \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{1:m:n}}(x) h(x) dx, \tag{B.2}$$

em que $h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$.

(ii) $H(X_{i+1:m:n} | X_{i:m:n})$ é a entropia esperada de $X_{i+1:m:n}$ dado que $X_{i:m:n} = x_i$, ou seja,

$$\begin{aligned}
H(X_{i+1:m:n} | X_{i:m:n}) &= E [H(X_{i+1:m:n} | X_{i:m:n} = x_i)] \\
&= E \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} f(X_{i+1:m:n} = x | X_{i:m:n} = x_i) \right. \\
&\quad \left. \times \log [f(X_{i+1:m:n} = x | X_{i:m:n} = x_i)] dx \right\}.
\end{aligned}$$

(Abo-Eleneen, 2011) ainda diz que observando a condição $X_{i:m:n} = x_i$, então $X_{i+1:m:n}$ tem a mesma fdp da primeira estatística de ordem de uma amostra aleatória progressivamente censurada do tipo II de tamanho $n - R_1 - \dots - R_i - i$ provinda

de uma fdp $g(x) = f(x)/1 - F(x)$. Assim, é possível escrever $H(X_{i+1:m:n}|X_{i:m:n})$ da seguinte maneira:

$$H(X_{i+1:m:n}|X_{i:m:n}) = 1 - \log(n - R_1 - \dots - R_i - i) - I,$$

onde,

$$I = E \left[\int_{x_i}^{\infty} f(X_{i+1:m:n} = x|X_{i:m:n} = x_i) \log[h(x)] dx \right]. \quad (\text{B.3})$$

Entretanto, observando que $X_{i+1:m:n} > X_{i:m:n}$, temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i+1:m:n}}(x_i) \left\{ \int_{x_i}^{\infty} f(X_{i+1:m:n} = x|X_{i:m:n} = x_i) \log[h(x)] dx \right\} dx_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \log[h(x)] \left\{ \int_{-\infty}^x f(X_{i+1:m:n} = x|X_{i:m:n} = x_i) f_{X_{i+1:m:n}}(x_i) dx_i \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \log[h(x)] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i:m:n}, X_{i+1:m:n}}(x_i, x) dx_i \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i+1:m:n}}(x) \log[h(x)] dx. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Substituindo (B.4) em (B.3),

$$H(X_{i+1:m:n}|X_{i:m:n}) = 1 - \log(n - R_1 - \dots - R_i - i) - \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i+1:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \quad (\text{B.5})$$

Das Expressões (B.1), (B.2) e (B.5), obtemos:

$$\begin{aligned} H_{1,\dots,m:m:n} &= 1 - \log(n) - \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{1:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \\ &\quad + \sum_{i=2}^m \left\{ 1 - \log[n - R_1 - \dots - R_{i-1} - (i-1)] \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \right\} \\ &= 1 - \log(n) - \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{1:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \\ &\quad + (m-1) - \sum_{i=2}^m \log[n - R_1 - \dots - R_{i-1} - (i-1)] \\ &\quad - \sum_{i=2}^m \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \\ &= m - \sum_{i=1}^m \log[n - R_1 - \dots - R_{i-1} - (i-1)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i:m:n}}(x) \log[h(x)] dx. \end{aligned}$$

Observe que a ideia por traz do somatório $S_i = \sum_{i=1}^m \log[n - R_1 - \dots - R_{i-1} - (i-1)]$ é a seguinte: se $i = 1$, temos que $S_1 = \log(n)$; se $i = 2$, então $S_2 = \log(n - R_1 - 1)$, pois, no momento da segunda falha, tem-se $n - R_1 - 1$ unidades observacionais; se $i = 3$, então $S_3 = \log(n - R_1 - R_2 - 2)$, pois, no momento da terceira falha, tem-se $n - R_1 - R_2 - 2$ unidades observacionais, e assim continua até a m -ésima falha, $i = m$. Portanto,

$$\begin{aligned}
H_{1,\dots,m:m:n} &= m - \log \left\{ \prod_{i=1}^m [n - R_1 - \dots - R_{i-1} - (i-1)] \right\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \\
&= m - \log[n(n - R_1 - 1) \dots (n - R_1 - R_2 - \dots - R_{i-1}) - (m-1)] \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \\
&= m - \log(c) - \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \\
&= -\log(c) + \frac{n}{n} \left\{ m - \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \right\} \\
&= -\log(c) + n \left\{ \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{i:m:n}}(x) \log[h(x)] dx \right\} \\
&= -\log(c) + n \bar{H}_{1,\dots,m:m:n}.
\end{aligned}$$

Assim, provamos a Expressão (4.2).

Bibliografia

- Abo-Eleneen, Z. A. (2011). The entropy of progressively censored samples. *Entropy*, *13*(2), 437–449.
- Arizono, I., & Ohta, H. (1989). A test for normality based on kullback-leibler information. *The American Statistician*, *43*(1), 20–22.
- Arnold, B. C., Balakrishnan, N., & Nagaraja, H. (1992). *A first course in order statistics* (Vol. 54). SIAM.
- Balakrishnan, N., & Aggarwala, R. (2000). *Progressive censoring: Theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media.
- Balakrishnan, N., Rad, A. H., & Arghami, N. R. (2007). Testing exponentiality based on kullback-leibler information with progressively type-ii censored data. *IEEE Transactions on Reliability*, *56*(2), 301–307.
- Balakrishnan, N., & Sandhu, R. (1995). A simple simulational algorithm for generating progressive type-ii censored samples. *The American Statistician*, *49*(2), 229–230.
- Balakrishnan, N., & Sandhu, R. A. (1996). Best linear unbiased and maximum likelihood estimation for exponential distributions under general progressive type-ii censored samples. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 1–9.
- Birnbaum, Z. W., & Saunders, S. C. (1969a). A new family of life distributions. *Journal of applied probability*, 319–327.
- Birnbaum, Z. W., & Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of Applied Probability*, 328–347.
- Brito, É. S. (2014). *Modelos de censura tipo ii progressiva e propriedades assintóticas do estimador de máxima verossimilhança* (Unpublished doctoral dissertation). Universidade Federal de Brasília.
- Castro-Kuriss, C. (2011). On a goodness-of-fit test for censored data from a location-scale distribution with applications. *Chilean Journal of Statistics*, *2*(1), 115–136.
- Castro-Kuriss, C., Kelmansky, D. M., Leiva, V., & Martínez, E. J. (2010). On a goodness-of-fit test for normality with unknown parameters and type-ii censored data. *Journal of Applied Statistics*, *37*(7), 1193–1211.

- Chen, G., & Balakrishnan, N. (1995). A general purpose approximate goodness-of-fit test. *Journal of Quality Technology*, 27(2), 154–161.
- Choulakian, V., & Stephens, M. A. (2001). Goodness-of-fit tests for the generalized pareto distribution. *Technometrics*, 43(4), 478–484.
- Colosimo, E. A., & Giolo, S. R. (2006). Análise de sobrevivência aplicada. In *Abeprojetos fisher*. Edgard Blücher.
- D’Agostino, R. B., & Stephens, M. A. (1986). *Goodness-of-fit techniques* (Vol. 68). Series Statistics: Textbooks and Monographs.
- Dudewicz, E. J., & Van Der Meulen, E. C. (1981). Entropy-based tests of uniformity. *Journal of the American Statistical Association*, 76(376), 967–974.
- Gokhale, D. V. (1983). On entropy-based goodness-of-fit tests. *Computational Statistics & Data Analysis*, 1, 157–165.
- Huber-Carol, C., Balakrishnan, N., Nikulin, M. S., & Mesbah, M. (2012). *Goodness-of-fit tests and model validity*. Springer Science & Business Media.
- James, B. R. (2015). *Probabilidade: um curso em nível intermediário* (4ª ed.). Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.
- Kuiper, N. H. (1960). Tests concerning random points on a circle. In *Indagationes mathematicae (proceedings)* (Vol. 63, pp. 38–47).
- Kullback, S. (1959). *Statistics and information theory*. J. Wiley and Sons, New York.
- Lawless, J. F. (2011). *Statistical models and methods for lifetime data* (Vol. 362). John Wiley & Sons.
- Leiva, V. (2015). *The birnbaum-saunders distribution*. Academic Press.
- Magalhães, M. N. (2006). *Probabilidade e variáveis aleatórias*. Edusp.
- Meintanis, S. G. (2010). Inference procedures for the birnbaum–saunders distribution and its generalizations. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54(2), 367–373.
- Nelson, W. B. (2005). *Applied life data analysis* (Vol. 577). John Wiley & Sons.
- Ng, H. K. T., Kundu, D., & Balakrishnan, N. (2003). Modified moment estimation for the two-parameter birnbaum–saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 43(3), 283–298.
- Ortega, J. M., & Rheinboldt, W. C. (1970). *Iterative solution of nonlinear equations in several variables* (Vol. 30). Siam.
- Park, S. (2005). Testing exponentiality based on the kullback-leibler information with the type ii censored data. *IEEE Transactions on reliability*, 54(1), 22–26.
- Pettitt, A. N. (1976). Cramér-von mises statistics for testing normality with censored samples. *Biometrika*, 63(3), 475–481.
- Pettitt, A. N., & Stephens, M. A. (1976). Modified cramer-von mises statistics for censored data. *Biometrika*, 63(2), 291–298.
- Rad, A. H., Yousefzadeh, F., & Balakrishnan, N. (2011). Goodness-of-fit test based

- on kullback-leibler information for progressively type-ii censored data. *IEEE Transactions on Reliability*, 60(3), 570–579.
- Ribeiro, T. K. A. (2014). *Distribuição Birnbaum-Saunders Tri-paramétrica*. (Universidade Federal de Campina Grande)
- Shannon, C. E. (2001). A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, 5(1), 3–55.
- Stephens, M. A. (1970). Use of the kolmogorov-smirnov, cramér-von mises and related statistics without extensive tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 115–122.
- Tsuyuguchi, A. B. (n.d.). *Testes de bondade de ajuste para a distribuição birnbaum-saunders* (Unpublished doctoral dissertation). Universidade Federal de Campina Grande.
- Vasicek, O. (1976). A test for normality based on sample entropy. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 54–59.
- Viveros, R., & Balakrishnan, N. (1994). Interval estimation of parameters of life from progressively censored data. *Technometrics*, 36(1), 84–91.
- Yee, T. W. (2017). VGAM: Vector generalized linear and additive models [Computer software manual]. Retrieved from <https://CRAN.R-project.org/package=VGAM> (R package version 1.0-3)