



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Renato Ferreira Ordonho

Mapeamento de teorias RGBs: o caso da gravidade EiBI com campo escalar

Campina Grande, Paraíba, Brasil

19 de maio de 2022

Renato Ferreira Ordonho

**Mapeamento de teorias RGBs: o caso da gravidade
EiBI com campo escalar**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Victor Ignacio Afonso, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Victor Ignacio Afonso

Campina Grande, Paraíba, Brasil

19 de maio de 2022

O65m Ordonho, Renato Ferreira.
Mapeamento de teorias RGBs: o caso da gravidade EiBI com campo escalar / Renato ferreira Ordonho. – Campina Grande, 2022.
54 f. il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Victor Ignácio Afonso"
Referências.

1. Gravidade. 2. Métrico-afim. 3. EiBI. 4. Palatini. 5. Born-Infeld.
6. Wyman. I. Afonso, Victor Ignácio. II. Título.

CDU 531.5(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitário, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

RENATO FERREIRA ORDONHO

Mapeamento de teorias RGBs: o caso da gravidade EiBI com campo escalar

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 29/01/2021

Victor Ignácio Afonso
Presidente da Comissão e Orientador

João Rafael Lucio dos Santos
Examinador Interno

Emanuele Orazi
Examinador Externo



Documento assinado eletronicamente por **VICTOR IGNACIO AFONSO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 29/01/2021, às 11:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Emanuele Orazi, Usuário Externo**, em 29/01/2021, às 12:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, COORDENADOR (A)**, em 01/02/2021, às 10:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **1218165** e o código CRC **538D3959**.



Referência: Processo nº 23096.000385/2021-21

SEI nº 1218165



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitário, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA EM 29 DE JANEIRO DE 2021

Aos vinte e nove dias do mês de janeiro do ano de dois mil e vinte e um, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **RENATO FERREIRA ORDONHO** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Victor Ignácio Afonso** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **João Rafael Lucio dos Santos** – Doutor em Física, o professor **Emanuele Orazi** – Doutor em Física, sendo os dois primeiros, integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o terceiro, integrante do corpo docente da Universidade Federal do Rio Grande do Norte e do Instituto Internacional de Física. HORA DE INÍCIO: **10h00** – LOCAL: **Sala Virtual, em virtude da suspensão de atividades na UFG decorrente do corona vírus**. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **Victor Ignácio Afonso**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **RENATO FERREIRA ORDONHO**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado **“Mapeamento de teorias RGBs: o caso da gravidade EiBI com campo escalar”**. Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Hélio Pereira de Oliveira, secretário, lavrei a ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 29 de janeiro de 2021.

Hélio Pereira de Oliveira
Secretário

Victor Ignácio Afonso
Presidente da Comissão e Orientador

João Rafael Lucio dos Santos
Examinador Interno

Emanuele Orazi
Examinador Externo

Renato Ferreira Ordonho
Candidato(a)

João Rafael Lúcio dos Santos
Coordenador do Programa

2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **RENATO FERREIRA ORDONHO**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **VICTOR IGNACIO AFONSO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 29/01/2021, às 11:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Emanuele Orazi, Usuário Externo**, em 29/01/2021, às 12:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, COORDENADOR (A)**, em 01/02/2021, às 10:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renato Ferreira Ordonho, Usuário Externo**, em 01/02/2021, às 12:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **1218159** e o código CRC **9EE6F8EF**.

Resumo

A Relatividade Geral vem sendo bem testada desde a sua formulação. No entanto, com a evolução das observações em Cosmologia, surgiram algumas discrepâncias entre observações e cálculos teóricos. Essas discrepâncias são explicadas incorporando as chamadas matéria e energia escura. Porém, essas novas componentes ainda nunca foram efetivamente medidas, para além de seus efeitos gravitacionais. Buscando caminhos alternativos ou complementares à introdução de componentes exóticas, uma enorme quantidade de modificações e extensões das leis da gravidade surgiram nas últimas décadas. No entanto, novas propostas trazem também novos problemas. O formalismo métrico-afim (ou de Palatini) é uma forma de estender a RG, sem introduzir novos graus de liberdade dinâmicos, e mantendo equações de campo de segunda ordem. Neste trabalho analisamos o modelo de gravidade Eddington-Inspired-Born-Infeld, descrito no formalismo de Palatini, utilizando para isso uma poderosa ferramenta que permite construir soluções explícitas para a classe de teorias RGBs, da qual EiBI forma parte. As soluções são analisadas e discutidas detalhadamente.

Palavras-chave: Gravidade, métrico-afim, EiBI, Palatini, Born-Infeld, Wyman.

Abstract

General Relativity has been very well tested since its formulation. However, with the evolution of observations in Cosmology, discrepancies between observations and theoretical calculations arised. These discrepancies are explained by incorporating the so-called dark matter and dark energy. However, these new components have never been effectively measured, apart from their gravitational effects. Seeking alternative routes to avoid or complement the introduction of exotic components, a huge number of modifications and extensions of the laws of gravity have emerged in recent decades. However, new proposals also pose new problems. The metric-affine (or Palatini) formalism is a way of extending GR without introducing new dynamic degrees of freedom, and maintaining second order field equations. In this work we analyze the Eddington-Inspired-Born-Infeld gravity model, described in the Palatini formalism, making use of a powerful tool that allows to build explicit solutions for the RBG class of theories, to which EiBI belongs. The obtained solutions are analyzed and discussed thoroughly.

Keywords: Gravity, métric-affine, EiBI, Palatini, Born-Infeld, Wyman.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Cosmologia	13
1.2	Energia Escura	14
1.3	A Matéria Escura	15
1.3.1	Partículas de Matéria Escura	15
1.4	Modelo ΛCDM	16
1.4.1	Problemas com o modelo	17
1.5	Gravidade modificada	17
1.5.1	Modified Newtonian Dynamics (MOND)	17
1.5.2	Teorias $f(R)$	19
2	FORMALISMOS VARIACIONAIS	21
2.0.1	Formalismo métrico	21
2.0.2	Formalismo de Palatini	22
2.1	RBGs (Ricci-based Gravities)	25
2.1.1	Exemplo: <i>Teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini</i>	27
2.1.2	Exemplo: <i>Eddington inspired Born-Infeld gravity</i>	29
3	MAPA DE SOLUÇÕES DE RG PARA SOLUÇÕES DE RGBS	33
3.0.1	Mapeamento Teorias $f(R)$ com matéria escalar	34
3.0.2	Mapeando RGBs com matéria escalar	35
3.1	Mapeando a gravidade de Eddington-inspired-Born-Infeld	38
3.1.1	EiBI com matéria escalar	38
3.1.2	EiBI para Relatividade Geral	38
3.1.3	Da Relatividade Geral para EiBI	39
4	GERANDO SOLUÇÕES PARA A GRAVIDADE EIBI	41
4.1	Solução de Wyman (RG)	41
4.2	Mapeando a gravidade de EiBI com campo escalar	43
4.2.1	Matriz deformação	44

4.3	Solução para gravidade EiBI	45
4.3.1	Energia	49
4.3.2	Geodésicas	50
5	CONCLUSÕES	55
	REFERÊNCIAS	57

1 Introdução

1.1 Cosmologia

Em seu livro “A ciência da Mecânica” de 1883, o físico Ernst Mach criticou o entendimento do tempo e do espaço “absolutos” de Newton. Segundo ele, a mecânica deveria ser baseada na posição relativa dos corpos, e a sua ideia era utilizar as estrelas fixas como referencial inercial para movimentos de grande extensão. Desse modo, o “Princípio de Mach” se entende como a ideia de que a inércia de um corpo não é uma propriedade *intrínseca* dele, mas advém da interação com todos os outros corpos do Universo [1]. Einstein foi profundamente influenciado por este princípio e, para ele, o modelo cosmológico teria que obedecer a condição que, a uma distância suficiente, a inércia deveria cair para zero. No entendimento de Einstein para satisfazer esta condição, o Universo deveria ser estático. [2].

Em busca de conhecer um pouco mais sobre o universo os cientistas começaram a estudá-lo considerando diferentes topologias, são elas: Espacialmente fechado, aberto ou plano. Um universo espacialmente fechado pode ser imaginado como uma hiper-esfera de 3 dimensões um com curvatura positiva; O universo aberto, ou hiperbólico, seria com uma curvatura negativa que pode ser imaginado em forma de uma sela infinita; Por fim, um universo plano ou euclidiano, teria uma geometria plana (curvatura nula).

Apesar das suas tentativas de entender o Universo através das equações de campo relativísticas, no início do século XX, maiores avanços só foram possíveis a partir das observações feitas por Milton Humason e Edwin Hubble, em conjunto com a formulação teórica de Alexander Friedmann e Georges Lemaître.

De acordo com as equações de Friedmann, existem três possíveis casos de evolução do Universo que são distinguidos pelo valor da curvatura do espaço-tempo. Essa curvatura poderia ser determinada se fosse possível conhecer o valor da densidade do Universo. O parâmetro de densidade Ω é definido como sendo a razão entre a densidade média do universo ρ e a densidade crítica ρ_c (que é a

densidade necessária para que o universo seja plano). Assim, os casos mencionados anteriormente correspondem a: espacialmente aberto/curvatura negativa ($\Omega < 1$), espacialmente fechado/curvatura positiva ($\Omega > 1$) ou espacialmente plano ($\Omega = 1$), que foi o modelo desenvolvido por Einstein e de Sitter em 1932.

Com o passar dos anos, várias descobertas foram feitas na área da Cosmologia (devido a possibilidade de se obter melhores observações), e um dos objetivos principais da cosmologia moderna é o de compreender e determinar a densidade de matéria-energia do Universo.

1.2 Energia Escura

No final do século XX, um grande problema foi descoberto com relação à Cosmologia. A existência desse problema se dá primeiro por uma discrepância nas observações: segundo os dados, a densidade de energia do Universo é muito próxima à densidade crítica. Porém, a densidade de massa observada é, aparentemente, apenas um terço da densidade crítica. Assim, os outros dois terços permanecem inexplicados.

Desde a época do Hubble sabe-se que o Universo está em expansão. Esta expansão é descrita basicamente por dois parâmetros: a constante de Hubble (H_0), e a constante de desaceleração (q_0). Porém, no final dos anos noventa, devido as observações das supernovas tipo *SnIa*, se descobriu que a taxa dessa expansão não é constante, mas crescente. Não se tem certeza do que está causando essa aceleração na expansão do Universo e essa fonte desconhecida foi chamada de “Energia Escura”.

A Relatividade Geral (RG) tem sido muito bem testada quando se trata de escalas sub-galácticas [3]. Porém, quando consideramos largas escalas existem certos fenômenos que precisam ser melhor entendidos. Tais fenômenos deram origem a elementos “escuras”, que foram acrescentados ao modelo padrão da cosmologia. Assim, muitos cosmólogos acreditam que para explicar a aceleração na expansão do Universo, o mesmo deveria ser dominado, nos dias de hoje, por uma componente suave de pressão *negativa*, que deveria aparecer nas equações de campo.

1.3 A Matéria Escura

Os sucessivos avanços nas qualidades das observações astronômicas, tanto cosmológicas quanto astrofísicas, deram acesso a informações muito mais precisas, porém surpreendentes. As melhores observações no que diz respeito às galáxias nos anos 1970s levaram à confirmação de que, além do problema da Energia Escura, existe um outra grande questão até o momento sem solução.

Sabendo que toda a matéria presente em uma galáxia sofre efeito da atração gravitacional da mesma, orbitando o centro, estudando o movimento das estrelas e do gás que permeia as galáxias seria possível determinar a quantidade de matéria presente nessa galáxia. Porém, ao realizar esse tipo de cálculos baseados na aproximação newtoniana da Relatividade Geral, foi observado que a velocidade das estrelas mais afastadas do centro, é muito maior do que esperado levando em consideração toda a matéria luminosa. Isto é, se nenhum ajuste tiver que ser feito nas equações, existe algo que interfere na velocidade dessas estrelas.

Para suprir essa diferença entre velocidade observada e estimada a maior parte dos cientistas acreditam que essa velocidade pode ser explicada através de uma massa invisível, ou seja, não detectável pelos instrumentos que estão à disposição. Essa matéria “faltante”, apesar de não ser detectada é responsabilizada pela maior parte da massa nas galáxias. Porém, apesar dessa interação gravitacional ser intensa, aparentemente, esse tipo de matéria não interage eletromagneticamente. Por conta dessas características, a essa matéria, é dado o nome de “Matéria Escura”.

1.3.1 Partículas de Matéria Escura

Como não é possível medir ou observar diretamente a Matéria Escura, uma possibilidade é que ela seja constituída por algum tipo de partícula exótica, não-bariônica de tipo desconhecido que não eletromagneticamente, ou interage de forma extremamente fraca.

Esse argumento abre a porta para, no geral, três possíveis tipos de partículas exóticas: partículas parceiras supersimétricas, axions, ou partículas massivas de interação fraca, denominadas WIMPs (sigla em inglês para “Weakly Interacting Massive Particles”) [4].

Vários experimentos foram desenhados e construídos na últimas décadas ao redor do mundo, para realizar buscas por essas partículas exóticas. Porém, até o presente não conseguiram obter resultados positivos. A maioria dos cientistas que apoiam essa teoria acreditam que ainda falta um detector que seja sensível o suficiente para captar uma interação tão fraca quanto a dessas partículas. Também, por exemplo, espera-se que em galáxias anãs exista uma concentração alta de Matéria Escura e pouca emissão de raios gamma, mas ainda não foi possível identificar essas partículas [5].

Finalmente, uma outra questão que é importante mencionar é que, comparando a diferença entre a distância de luminosidade obtida observando supernovas, em um Universo dominado pela Matéria Escura e em um dominado pela Energia Escura, o Universo dominado pela Energia Escura possui distância luminosa maior, o que traz consequências observáveis [6].

1.4 Modelo Λ CDM

O modelo Λ CDM é conhecido hoje como o Modelo Cosmológico Padrão, e inclui Energia Escura e Matéria Escura.

Quando Einstein considerou que o Universo deveria ser estático, introduziu um termo proporcional à métrica em suas equações (conhecido como o maior erro da sua vida) e, mais tarde, Lemaître adicionou a constante de proporcionalidade nas suas equações de expansão do Universo. Essa constante, que ficou conhecida como Constante Cosmológica Λ , por muitos anos foi desprezada e se admitia como sendo nula, pois as observações forneciam um valor muito próximo a zero. Porém, no modelo Λ CDM a Energia Escura é associada a uma energia de vácuo não nula, que é representada pela constante cosmológica, com a equação de estado $p/\rho = \omega$ onde ω é bem próximo, mas não exatamente igual, a -1, o que causaria uma expansão acelerada.

No início do Universo, porém, a equação de estado poderia ser bem próximo, mas não exatamente $\omega = 1$ como na época atual [7].

Já a Matéria Escura neste modelo é chamada de “*Cold Dark Matter*” (CDM,

ou em português “Matéria Escura fria”). É chamada de fria pois ela se move lentamente, no sentido que é não-relativística. Enquanto as partículas bariônicas estão associadas eletromagneticamente ao fluido de fótons, a Matéria Escura Fria permanece dissociada deles, o que a permite se condensar e formar estruturas[7].

1.4.1 Problemas com o modelo

O modelo de Λ CDM, integrado às ideias do Big Bang inicial seguido de um período de Inflação, tem sido extremamente bem sucedido no sentido de reproduzir os dados observacionais conhecidos, o que lhe proporcionou uma grande popularidade na comunidade da Cosmologia. Porém, um dos maiores desafios deste modelo é provar a existência de Matéria e Energia Escuras com as características levadas em conta na própria teoria a qual, apesar dos enormes esforços experimentais realizados, não tem acontecido até o presente. Cientistas de diversos experimentos, defensores do modelo, acreditam que ainda é preciso instrumentos mais sensíveis para detectá-las.

1.5 Gravidade modificada

Devido a extrema dificuldade em encontrar evidências experimentais sólidas sobre a existência da Matéria e Energia Escura, e alguns problemas conceituais próprios da Relatividade Geral, ao longo dos anos foram surgindo modelos alternativos no intuito de explicar a discrepância entre observação e teoria. Em particular, algumas teorias buscam excluir a necessidade da Matéria e/ou da Energia Escura. Em forma geral, esses modelos, são chamados de Teorias de Gravidade Modificada. Nesta seção traremos algumas delas.

1.5.1 Modified Newtonian Dynamics (MOND)

Falando em termos precisos ela não é nem uma teoria, nem de gravidade: a Dinâmica newtoniana Modificada (MOND), é um modelo fenomenológico que vale a pena mencionar, tanto pela simplicidade da proposta, quanto pelos surpreendentes

resultados que ela obtém no que diz respeito à Matéria Escura, apesar dessa simplicidade.

Apesar de, como dito, a Relatividade Geral ter sido bastante bem testada na escala do Sistema Solar, ainda existem problemas em aberto, sendo um deles o chamado problema das curvas de rotação de galáxias. Esse fenômeno foi descoberto originalmente por Zwicky nos anos 1930s, e explorado em profundidade na década de 1970 por Vera Rubin que, após várias observações confirmou o observado por Zwicky em outras várias galáxias: uma discrepância entre a velocidade orbital prevista (segundo as leis de Newton) e a velocidade observada. É precisamente isto o que deu lugar à ideia da existência de “Halos” contendo grande quantidade de matéria escura nessas galáxias.

Em 1983 o Físico Mordehai Milgrom, no intuito de resolver essas discrepâncias entre observações e teoria, e sem utilizar conceitos como matéria ou energia exóticas, propôs uma modificação na *dinâmica* newtoniana. Nesse sentido, a ideia de MOND é que, além de no limite relativístico, a dinâmica newtoniana também precisaria de uma correção quando se trata de acelerações muito baixas. A alteração é feita introduzindo um parâmetro constante a_0 , correspondente a uma aceleração crítica, que divide a dinâmica em dois regimes distintos: quando $F/m = a \gg a_0$ temos o regime Newtoniano usual, e não há qualquer modificação observável. Porém, se $a \ll a_0$, aparece uma modificação tal que, nesse regime, $a = \sqrt{a_N a_0}$, onde a_N é a aceleração newtoniana, com o qual, a segunda lei de Newton pode ser escrita na forma $F = m\mu(x)a$, onde a função adimensional $\mu(x)$ vem dada por

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \gg 1 \\ x & x \ll 1 \end{cases}, \quad x \equiv \frac{a}{a_0} \quad (1.1)$$

Essa alteração fica mais evidente quando se considera uma partícula teste em movimento circular. Assumindo que se satisfaz a relação de aceleração centrípeta $V^2/r = a_N = GM/r^2$, para baixas acelerações temos:

$$\frac{V^2}{r} = \sqrt{\frac{GMa_0}{r^2}}, \quad (1.2)$$

ou ainda:

$$V^4 = a_0 GM \quad (1.3)$$

Note que, nesse caso, a velocidade circular não depende mais do raio, mas somente da massa e das constantes.

Surpreendentemente, essa modificação tão simples introduzida pelo modelo MOND é capaz de alcançar resultados impressionantes prevendo relações bem precisas simultaneamente para várias galáxias utilizando um único parâmetro, sem introduzir qualquer matéria exótica. Por outro lado, para se obter resultados semelhantes no modelo Λ CDM, é necessário a introdução da hipótese dos Halos de Matéria Escura: aglomerações esféricas da mesma centradas nas galáxias e que, devem apresentar características específicas para descrever corretamente cada galáxia, em oposição à quase universalidade do parâmetro a_0 . Mais resultados podem ser encontrados em [8].

1.5.2 Teorias $f(R)$

Com a evolução na qualidade das observações em cosmologia e, apesar dos cálculos utilizando a Relatividade Geral mostrarem o contrário, observou-se que o Universo se encontra em um estado de expansão acelerada. Dada essa descoberta, começaram a surgir novas teorias para explicar essa expansão sem a dependência de uma matéria ou Energia Escura, dentre elas, as chamadas teorias $f(R)$ [9].

Existem várias propostas distintas para a função $f(R)$, produzindo distintas extensões da RG. Por exemplo, o modelo $f(R) = R + \alpha R^2$, proposto por Starobinsky em 1980, consegue produzir uma expansão acelerada do universo por conta da presença do termo “ αR^2 ”. Essa diversidade resulta ainda maior, pois essas teorias modificadas podem ser estudadas seguindo distintos formalismos. No que segue, serão apresentados dois formalismos variacionais para teorias de gravidade: formalismo métrico, e o formalismo de Palatini ou métrico-afim.^a

^a Na literatura, por vezes se faz diferença entre “formalismo de Palatini” e “formalismo métrico-afim” no sentido que, nesse último, seria levado em conta acoplamento direto entre a matéria e a conexão, ou seja, $S_m[g_{\mu\nu}, \Gamma_{\lambda\nu}^\mu, \Phi(m)]$. Neste trabalho porém, não tomaremos em conta esse tipo de interação, já que introduz um conflito com o Princípio de Equivalência de Einstein. Usaremos, no entanto, os termos “formalismo de Palatini” e “formalismo métrico-afim” de maneira indistinta.

2 Formalismos variacionais

Nesse capítulo vamos apresentar alguns tipos de formalismos. Primeiramente mostraremos o formalismo métrico, utilizado na RG. Na sequência, apresentaremos o formalismo de Palatini, ou métrico-afim, que utilizaremos em distintas teorias de gravidade modificada.

2.0.1 Formalismo métrico

A formulação variacional da Relatividade Geral é baseada na ação de Einstein-Hilbert, dada por:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M), \quad (2.1)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$, R é o escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\beta\lambda} g_{\alpha\lambda} R_{\beta\mu\nu}^\alpha$, sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci e $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ o tensor de Riemann. \mathcal{L}_M é a densidade lagrangiana de matéria. Na RG temos ainda que a conexão é do tipo Levi-Civita, cujas componentes vêm dadas pelos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \equiv \frac{g^{\alpha\lambda}}{2} \left(\frac{\partial g_{\gamma\lambda}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (2.2)$$

Esta condição é imposta na relatividade Geral no intuito de obter uma derivada covariante compatível com a métrica ($\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$), o que elimina a diferenciação entre geodésicas métricas (“o caminho mais curto”) e geodésicas afins (“o caminho mais reto”).

Note que, por essas conexões serem simétricas, a torção ($S_{\beta\gamma}^\alpha \equiv \frac{1}{2}\Gamma_{[\beta\gamma]}^\alpha$) é idênticamente nula. Portanto, a única “variável” livre na ação é $g_{\mu\nu}$. Portanto, a variação da ação só pode ser realizada com relação ao tensor métrico e, por isso, chamamos essa formulação de “formalismo métrico”. A variação de (2.1) no formalismo métrico nos leva às equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

Onde $T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}$. Nas teorias $f(R)$, a densidade lagrangiana não é mais linear no escalar de Ricci (R), mas uma função não linear dele. De modo que a ação será:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M) \quad (2.4)$$

Onde $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, e $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e \mathcal{L}_M é a Lagrangiana de matéria.

Derivando a ação (2.4) com respeito a $g_{\mu\nu}$ obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial R} R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f(R) + g_{\mu\nu} \square \frac{\partial f}{\partial R} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(M)} \quad (2.5)$$

e o traço será:

$$3\square \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{\partial f}{\partial R} R - 2f(R) = \kappa^2 T \quad (2.6)$$

Note que, se consideramos $f(R) = R \frac{\partial f}{\partial R} = 1$, e o termo $\square \frac{\partial f}{\partial R}$ desaparece. Consequentemente, recuperamos a RG (sem a constante cosmológica). Porém, em teorias com qualquer outra forma da função $f(R)$, esses termos continuam presentes nas equações e a dinâmica resulta modificada com relação à RG.

É importante destacar que as equações (2.5) aqui obtidas com o formalismo métrico, apresentam derivadas superiores a 2ª ordem, o que as torna problemáticas ou até inviáveis em certos contextos.

2.0.2 Formalismo de Palatini

No formalismo métrico-afim (ou de Palatini) se assume que a métrica e a conexão são objetos geométricos igualmente fundamentais e independentes entre si, de modo que as equações de campo são obtidas variando a ação com relação à métrica e à conexão. Como a conexão e a métrica são independentes, a conexão

deixa de ser a de Levi-Civita (símbolos de Christoffel), e passa a ser determinada dinamicamente, ou seja, resolvendo a equação correspondente.

Portanto, o formalismo métrico-afim fornece uma forma de estender a RG modificando a estrutura geométrica das teorias, porém sem introduzir novos graus de liberdade dinâmicos, desde que as novas componentes da conexão não são campos com capacidade de se propagar no espaço-tempo. Uma propriedade geral bastante interessante das equações de campo obtidas com esse procedimento é que elas resultam de segunda ordem em todas as teorias.

Veremos também que, apesar da conexão não ser do tipo Levi-Civita, a equação de compatibilidade entre métrica e conexão ainda jogará um papel importante nessa abordagem.

A utilização desse formalismo vem crescendo nos últimos anos, e será o foco no decorrer deste trabalho.

Ao longo desse trabalho iremos considerar que a matéria é acoplada somente à métrica. Isto é de fundamental importância para preservar o Princípio de Equivalência de Einstein, que garante que as trajetórias percorridas por partículas materiais são as geodésicas métricas, como observado nos experimentos.

Ação e equações.

Vamos considerar a ação mais genérica, para obter o caso mais geral das equações de campo de teorias *à la* Palatini:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R^\alpha_{\beta\mu\nu}) + S_m[g_{\mu\nu}, \Psi] , \quad (2.7)$$

onde \mathcal{L}_G representa a lagrangiana da gravidade, a variação total de (2.7) nos dá:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial R^\alpha_{\beta\mu\nu}} \delta R^\alpha_{\beta\mu\nu} \right] + \delta S_m \quad (2.8)$$

O tensor de Riemann é construído exclusivamente a partir da conexão afim Γ . Então, explicitamente teremos:

$$\delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}(\Gamma) = \nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) + 2S_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} \quad (2.9)$$

Como a conexão é determinada dinamicamente, vamos assumir que a métrica e as estruturas afins são independentes, isto é, não podemos determinar nenhuma simetria entre os índices. Isto significa que não podemos considerar a torção como sendo nula, sendo assim: $S_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda})$ será a torção.

Introduzindo o objeto $P_{\alpha}^{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial R^{\alpha\beta\mu\nu}}$ podemos escrever:

$$\int d^4x \left[\nabla_{\mu}(\sqrt{-g}J^{\mu}) - \delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \nabla_{\mu}(\sqrt{-g}P_{\alpha}^{\beta\mu\nu}) \right], \quad (2.10)$$

onde $J^{\mu} \equiv P_{\alpha}^{\beta\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}$. Dado que:

$$\nabla_{\mu}(\sqrt{-g}J^{\mu}) = \partial_{\mu}(\sqrt{-g}J^{\mu}) + 2S_{\sigma\mu}^{\sigma}\sqrt{-g}J^{\mu}, \quad (2.11)$$

a equação (2.10) se torna:

$$\int d^4x \left[\partial_{\mu}(\sqrt{-g}J^{\mu}) - \delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \left\{ \nabla_{\mu}(\sqrt{-g}P_{\alpha}^{\beta\mu\nu}) - 2S_{\sigma\mu}^{\sigma}\sqrt{-g}P_{\alpha}^{\beta\mu\nu} \right\} \right]. \quad (2.12)$$

Voltando agora à (2.8), teremos:

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\sqrt{-g} \left(\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \partial_{\mu}(\sqrt{-g}J^{\mu}) + \right. \\ \left. + 2 \left\{ -\nabla_{\mu}(\sqrt{-g}P^{\beta[\mu\nu]}) + \sqrt{-g} \left[S_{\sigma\rho}^{\nu}P_{\alpha}^{\beta\sigma\rho} + 2S_{\sigma\mu}^{\sigma}P_{\alpha}^{\beta[\mu\nu]} \right] \right\} \delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \right] + \delta S_m \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nos levando às equações de campo:

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial g^{(\mu\nu)}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2} g_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

e

$$\kappa^2 H_{\alpha}^{\sigma\beta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_{\mu}(\sqrt{-g}P_{\alpha}^{\beta[\mu\nu]}) + S_{\sigma\rho}^{\nu}P_{\alpha}^{\beta\sigma\rho} + 2S_{\sigma\mu}^{\sigma}P_{\alpha}^{\beta[\mu\nu]} \quad (2.15)$$

Onde $H_{\alpha}^{\sigma\beta} \equiv \frac{-1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha}}$. Como dito, neste trabalho não iremos considerar acoplamento direto entre os campos de matéria e a conexão afim, portanto, para todos os casos teremos $H_{\alpha}^{\sigma\beta} = 0$.

Note então que quando $\mathcal{L}_G = R/2\kappa^2$, a Eq. (2.15) se torna a equação de compatibilidade entre métrica e conexão, cuja solução é a conexão de Levi-Civita, e recuperamos as equações de Einstein.

2.1 RBGs (Ricci-based Gravities)

Devido a observações recentes pelo *VIGO/Virgo collaboration* de ondas gravitacionais atribuídas a buracos negros binários e fusões de estrelas de nêutrons, hoje é possível testar a gravidade em ambientes altamente massivos e em larga escala. Esses novos dados impõem limites mais rígidos para extensões da RG. Alguns estudos como o da fusão de estrelas de neutrons GW170817, que foi melhor estudada em [10] e em [11] com gravidade modificada *beyond Horndeski* [12], nos trás a ideia de que os novos objetos exóticos que vem surgindo ao longo dos anos com gravidade modificada não podem ser apenas desconsiderados. Esses objetos precisam ser estudados e as suas implicações precisam ser analisadas cuidadosamente, aos olhos da gravidade modificada; esses objetos foram estudados por exemplo em [13].

Apesar das extensões métrico-afins da RG proverem equações de campo de segunda ordem, também são altamente não-lineares, e obter soluções explícitas diretas resulta, na maioria das vezes, inviável, o que contribuiu para esse formalismo ser, relativamente menos explorado, dependendo de *ansatzes* ou métodos de aproximação [14].

Por esse motivo, centraremos o nosso estudo em uma classe de teorias baseadas no Ricci (*Ricci-based Gravities*, ou RBGs). Uma das principais características das RBGs é que, combinando uma redefinição da métrica via transformações específicas, as equações de campo associadas à conexão podem ser reduzidas a uma de compatibilidade com métrica [15], o que permite sua resolução formal direta. Uma consequência extremamente importante disso é que, por podermos resolver parte da conexão utilizando uma métrica auxiliar, é possível identificar para essas teorias um *frame* (ou descrição tipo) de Einstein. Isto é, as equações de campo das RBGs podem ser relacionadas com as equações de Einstein, porém associadas a uma matéria com dinâmica diferente da original [15]. Veremos isto em detalhe no Capítulo 3

Ação e equações

A ação para as teorias RBGs pode ser representada como:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, R_{(\mu\nu)}(\Gamma)) + S_m[g_{\mu\nu}, \Psi_m] , \quad (2.16)$$

onde $R_{(\mu\nu)}$ corresponde à parte simétrica do tensor de Ricci. Essa escolha tem a motivação de garantir a invariância perante transformações projetivas (semelhantes a transformações de calibre na conexão), que é uma característica fundamental desta classe de teorias. Essa restrição elimina a possibilidade de aparição dos chamados campos “fantasmas” (*ghosts*), que levam a divergências e instabilidades das soluções. No nível prático, a invariância projetiva se traduz em uma liberdade na escolha do calibre (*gauge*) da conexão, o que garante que a torção pode ser sempre eliminada com uma escolha adequada. Portanto, desde que a invariância projetiva seja garantida podemos, sem perda de generalidade, tomar a torção como nula ($S_{\mu\nu}^\lambda = 0$) [16], o que simplifica bastante os cálculos.

As RBGs também supõem que não há acoplamento direto entre a matéria e a conexão, ou seja, $(\delta S_m / \delta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha) = 0$, a fim de preservar o Princípio de Equivalência de Einstein. Assim, as equações de campo serão:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial g^{(\mu\nu)}} - \frac{\mathcal{L}_G}{2} g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

$$\nabla_\mu (\sqrt{-g} P_\alpha^{\beta[\mu\nu]}) = 0 \quad (2.18)$$

Introduzindo uma métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ (distinta de $g_{\mu\nu}$), definida segundo a relação:

$$\sqrt{-h} h^{\mu\nu} = \sqrt{-g} P_\alpha^{\beta[\mu\nu]} , \quad (2.19)$$

a equação (2.18) vira:

$$\nabla_\mu (\sqrt{-h} h^{\alpha\beta}) = 0 . \quad (2.20)$$

que pode ser resolvida formalmente tomando Γ como sendo a conexão de Levi-Civita construída a partir de $h_{\mu\nu}$.

Veremos que é possível também encontrar uma relação *algébrica* entre a métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ e a métrica física $g_{\mu\nu}$ através de uma matriz Ω^α_ν , que depende apenas dos campos de matéria, e sua forma é definida pela teoria de gravidade considerada. As equações de campo também podem ser escritas utilizando a métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ como:

$$R^\mu_\nu(h) = \frac{\kappa^2}{|\Omega|^{1/2}} [T^\mu_\nu + \mathcal{L}_G \delta^\mu_\nu] \quad (2.21)$$

Onde $|\Omega|$ é o determinante de Ω^α_ν . Podemos ainda escrever essa expressão em termos do tensor de Einstein $G^\mu_\nu(h)$, que será:

$$G^\mu_\nu(h) = \frac{\kappa^2}{|\Omega|^{1/2}} \left[T^\mu_\nu - \left(\frac{T}{2} + \mathcal{L}_G \right) \delta^\mu_\nu \right] \quad (2.22)$$

Note que, para $\mathcal{L}_G = R/2\kappa^2$, recobramos as equações de Einstein e a conexão de Levi-Civita associada a $g_{\mu\nu}$. A possibilidade de, ao introduzir uma métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$, recobrar a geometria Riemanniana dá a oportunidade de encontrar relações entre as RBGs e RG. Nos próximos capítulos vamos mostrar que é possível mapear soluções da RG para teorias RGBs na presença de matéria, tanto do tipo escalar, quanto eletromagnética e fluidos [14].

2.1.1 Exemplo: Teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini

A classe de teorias RGB incluem, além da própria RG, todas as teorias tipo $f(R)$, entre outras.

As equações de campo (2.14) e (2.15), para o caso $\mathcal{L}_G = f(R)/2\kappa^2$, se tornam:

$$\frac{\partial f}{\partial R} R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

$$\nabla_\lambda \left(\sqrt{-g} \frac{\partial f}{\partial R} g^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (2.24)$$

Escrevendo para o presente caso a métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ temos:

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\frac{\partial f}{\partial R}g^{\mu\nu} \quad (2.25)$$

Logo, a equação (2.24) vira: $\nabla_\mu(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}) = 0$. Isto é, a conexão Γ é compatível com métrica auxiliar h . Portanto, a solução desta equação é, simplesmente, que as componentes de Γ são os símbolos de Christoffel construídos a partir de h :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}h^{\lambda\alpha}(\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) \quad (2.26)$$

com o qual, o tensor de Ricci se torna automaticamente uma função de h

Tomando o determinante de (2.25) temos que

$$h = \frac{\partial f}{\partial R}g \quad (2.27)$$

com o qual, substituindo h de volta em (2.25), teremos que a relação entre $g_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ tem a forma

$$h_{\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial R}g_{\mu\nu} , \quad (2.28)$$

que satisfaz a relação de inversa $h_{\mu\alpha}h^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu$, com a expressão $h^{\mu\nu}$ obtida de (2.25).

Por outro lado, se temos um setor de matéria dado por um campo escalar real ϕ , descrito por uma densidade lagrangiana $P(X, \phi) = X - 2V(\phi)$, com $X \equiv g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi$, o traço de (2.23) será: ^a

$$R\frac{\partial f}{\partial R} - 2f(R) = \kappa^2 T = (XP_X - 2P) \quad (2.29)$$

Essa equação mostra que o escalar de Ricci (lado esquerdo da equação) depende exclusivamente do conteúdo de matéria (lado direito da equação), em alguma maneira mais ou menos complicada, dependendo da forma da função f . Esta observação se tornará um argumento essencial para o método de resolução que utilizaremos mais adiante.

^a Tomamos $V(\phi) = 0$ por simplicidade do exemplo

Por exemplo, se consideremos a teoria de Starobinsky, $f(R) = R + \lambda R^2$, de (2.29), identificamos que:

$$R = -\kappa^2(X P_X - 2P) \quad (2.30)$$

Explicitando $X = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 1 + 2\lambda R = 1 - 2\lambda \kappa^2 g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \quad (2.31)$$

A lição importante aqui é que o fator que relaciona ambas as métricas em (2.28), $\frac{\partial f}{\partial R}$, fica completamente especificado pela matéria. Assim, $h_{\mu\nu}$ se apresenta como uma “deformação” de $g_{\mu\nu}$, induzida pela presença dos campos de matéria. Veremos que esse comportamento não é exclusivo desse exemplo particular, mas uma característica de todas as RBGs, cujas equações, nas regiões livres de matéria, se reduzem exatamente às da Relatividade Geral.

2.1.2 Exemplo: *Eddington inspired Born-Infeld gravity*

Em 1934, buscando eliminar as divergências no campo e na auto energia de uma partícula carregada, Born e Infeld propõem uma ação não-linear para eletrodinâmica clássica ($\mathcal{L}_{BI} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{|g_{\mu\nu} + \kappa \mathcal{F}_{\mu\nu}|}$). Mais recentemente Bañados e Ferreira [17] reformularam essa ideia em uma ação gravitacional com estrutura tipo raiz quadrado, *à la* Born-Infeld, em uma formulação métrico-afim, que na literatura é conhecida pelo nome de *Eddington inspired Born-Infeld gravity*, ou EiBI. EiBI é interessante pela sua habilidade de “curar” ou melhorar o comportamento de singularidades em certas soluções, e tem recebido bastante atenção nos últimos anos, principalmente no tocante a suas possíveis aplicações em astrofísica, por descrever objetos compactos exóticos que poderiam funcionar como “imitadores de buracos negro” (*black hole mimickers*).

A ação é dada por:

$$S = \frac{1}{\kappa^2 \epsilon} \int d^4x \left[\sqrt{-|g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu}|} - \lambda \sqrt{-|g_{\mu\nu}|} \right] + S_m[g_{\mu\nu}, \psi], \quad (2.32)$$

onde o termo ϵ é um parâmetro pequeno com dimensões de comprimento ao quadrado. Esta teoria, como todas as que chamamos de RGBs, apresenta invariância projetiva e, portanto, tomaremos novamente a torção nula, e o setor de matéria independente da conexão.

Também como qualquer RGB, a equação da conexão pode ser resolvida utilizando uma métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$. Escreveremos a ação (2.32) em termos da métrica auxiliar $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu}$:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2\epsilon} \int d^4x \left[\sqrt{-h} - \sqrt{-g} \right] + S_m[g_{\mu\nu}, \psi] \quad (2.33)$$

Variando a ação com respeito à métrica ($g_{\mu\nu}$) e à conexão chegamos às equações de campo:

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu} = -\epsilon\sqrt{-g}\kappa^2 T^{\mu\nu} \quad (2.34)$$

$$\nabla_\mu(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}) = 0 \quad (2.35)$$

Como vimos na seção anterior, mais especificamente na Eq. (2.28), existe, no caso das teorias $f(R)$, uma relação algébrica entre a métrica física $g_{\mu\nu}$ e métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$. Acontece que todas as RGBs admitem esse tipo de relação e, para encontrar sua maneira precisa, podemos proceder propondo un ansatz. Para isto, introduzimos uma matriz Ω (“matriz de deformação”), que irá implementar essa relação algébrica entre as métricas na forma

$$h_{\mu\nu} = \Omega_\mu^\alpha g_{\alpha\nu}. \quad (2.36)$$

Utilizando a matriz de deformação Ω_ν^α , Vamos escrever (2.34) como:

$$\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{h}} h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \epsilon\kappa^2 T^{\mu\nu} \quad (2.37)$$

Agora, lembrando que:

$$h^{\mu\nu} = (\Omega^{-1})^\mu{}_\alpha g^\alpha{}_\nu \quad (2.38)$$

substituindo (2.38) em (2.37), teremos finalmente:

$$\sqrt{|\Omega|}(\Omega^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \epsilon\kappa^2 T^\mu{}_\nu . \quad (2.39)$$

Essa relação é muito importante pois mostra que, independente de se somos capazes ou não de resolver a equação, a matriz Ω é determinada inteiramente pelo conteúdo de matéria. Portanto, é a presença e distribuição dessa matéria o que irá “deformar” a métrica $g_{\mu\nu}$ com relação à métrica $h_{\mu\nu}$

3 Mapa de soluções de RG para soluções de RGBs

Após a descoberta das ondas gravitacionais grandes quantidades de dados estão sendo coletadas, o que permite explorar vários objetos compactos, que, no contexto da RG, são identificados com buracos negros. Porém, os dados disponíveis não permitem ainda determinar se esses objetos possuem ou não um horizonte de eventos. Por isso, os chamados objetos compactos exóticos (ou ECOs, por *exotic compact objects*), soluções que surgem em distintas extensões da RG, e em vários casos não possuem horizonte, até o momento não podem ser descartados.

Por outro lado, as mesmas medidas de ondas gravitacionais tem praticamente descartado a presença de componentes do tipo escalar nos sinais observados. Com isso a quantidade de teorias além da Relatividade Geral, diminuiu consideravelmente, já que a maioria delas incluem graus de liberdade dinâmicos além das duas componentes tensoriais que se propagam na descrição de Einstein. Nesse sentido, uma das características que torna mais atraentes as RGBs é que, nas regiões onde a matéria está ausente ($T_{\mu\nu} = 0$) se reduzem *exatamente* para a RG (veja que nesse caso, a matriz de deformação em (2.39) se torna a identidade, com o qual $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, e Γ se torna a conexão de Levi-Civita). Esse é precisamente o caso das regiões interestelares por onde as ondas gravitacionais viajam. Portanto, nas teorias da classe RGB, os graus de liberdade que se propagam são exatamente os mesmos que os da RG. Nas regiões com matéria porém, as equações dinâmicas das RGBs se tornam muito mais complicadas do que na RG, ao ponto de tornar sua resolução inviável.

Afortunadamente, para a classe das RGBs é possível encontrar uma correspondência entre seus espaços de soluções e o espaço de soluções da Relatividade Geral. O que se torna uma ferramenta de enorme importância para a obtenção de soluções para essas teorias, tanto exatas quanto numéricas.

O mapa propõe uma reinterpretação dos termos do lado direito das equações

de campo de Einstein, de modo que tomam a mesma forma do tensor de energia de um campo de matéria escrito por uma lagrangiana generalizada (não linear), ou ainda, por fluidos anisotrópicos. [14].

3.0.1 Mapeamento Teorias $f(R)$ com matéria escalar

Considerando uma densidade lagrangeana descrevendo um campo de matéria do tipo escalar, com a forma $\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi$, o tensor de energia-momento fica:

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\delta^\mu{}_\nu, \quad (3.1)$$

com o traço $T = -g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi$. Assim, a equação encontrada em (2.22) toma a forma:

$$G^\mu{}_\nu(h) = \frac{\kappa^2}{\sqrt{|\Omega|}} [g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi - \mathcal{L}_G\delta^\mu{}_\nu] \quad (3.2)$$

Para teorias $f(R)$, onde $\mathcal{L}_G = \frac{f(R)}{2\kappa^2}$, como vimos em (2.28), levam a:

$$\Omega^\mu{}_\nu = \frac{df}{dR}\delta^\mu{}_\nu \quad (3.3)$$

Logo $\sqrt{|\Omega|} = (df/dR)^2$.

Expressando o tensor de energia momento (3.1) em termos da métrica $h_{\mu\nu}$ chegamos a $\tilde{T} \equiv -h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi = T\frac{dR}{df}$. Substituindo em (3.2) obtemos:

$$G^\mu{}_\nu(h) = \kappa^2 \left[\frac{1}{\frac{df}{dR}(R[\tilde{T}])} h^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi - \frac{f(R[\tilde{T}])}{2\kappa^2 \left(\frac{df}{dR}(R[\tilde{T}])\right)^2} \delta^\mu{}_\nu \right] \quad (3.4)$$

Como observamos antes em (2.29), o escalar de Ricci fica completamente determinado pela forma funcional de f e pelo conteúdo de matéria, neste caso, através de \tilde{T} . Assim, vemos que, além dos campos de matéria, no lado direito da relação acima aparece somente a métrica $h_{\mu\nu}$.

Portanto, caso o lado direito de (3.4) possa ser interpretado como um tensor de energia momento $\tilde{T}_{\mu\nu}$ associado a alguma lagrangiana de matéria, a

estrutura das equações será exatamente a das equações de Einstein, desde que o lado esquerdo é o tensor de Einstein de $h_{\mu\nu}$, métrica compatível com a conexão (geometria Riemanniana).

No caso das teorias $f(R)$ deveremos ter então $G^\mu{}_\nu(h) = \kappa^2 \tilde{T}^\mu{}_\nu$, sendo que $\tilde{T}^\mu{}_\nu = h^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \delta^\mu{}_\nu$ deverá satisfazer

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu = \frac{1}{\frac{df}{dR}} h^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi - \frac{f(R)}{2\kappa^2 \left(\frac{df}{dR}\right)^2} \delta^\mu{}_\nu \quad (3.5)$$

Isto é um resultado extraordinário pelo seu grande potencial, e pode ser generalizado a todas as RGBs, como ilustraremos nos próximos capítulos.

3.0.2 Mapeando RGBs com matéria escalar

Se tivermos uma lagrangiana mais geral que para o caso $f(R)$, utilizando a relação entre $g_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ e, com a matrix $\Omega^\mu{}_\nu$ sendo uma função do $T^\mu{}_\nu$. De modo que teremos:

$$S_m(X, \phi) = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} P(X, \phi) \quad (3.6)$$

Onde $X = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi$ e P é uma função arbitrária de ϕ e X . O tensor de energia tomará a forma de:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{dP}{dX} g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi - \frac{P(X, \phi)}{2} \delta^\mu{}_\nu \quad (3.7)$$

Expandindo a matriz de transformação $\Omega^\mu{}_\nu = a_0(X, \phi) \delta^\mu{}_\nu + a_1(X, \phi) T^\mu{}_\nu + a_2(X, \phi) T^\mu{}_\alpha T^\alpha{}_\nu \dots$. A chave para simplificar é uma propriedade do próprio X , de modo que tomaremos $X^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi$, ou seja, X é simplesmente o traço de $X^\mu{}_\nu$, o que significa que potencias de $\hat{X} \equiv X^\mu{}_\nu$ resultam proporcionais a \hat{X} mesmo, ou seja, $\hat{X}^n = X^{n-1} \hat{X}$. Podemos escrever então a matriz $\Omega^\mu{}_\nu$ como:

$$\Omega^\mu{}_\nu = C(X, \phi) \delta^\mu{}_\nu + D(X, \phi) X^\mu{}_\nu \quad (3.8)$$

onde $C(X, \phi)$ e $D(X, \phi)$ são funções que dependem do modelo utilizado. Da relação:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\Omega_\nu^\alpha \quad (3.9)$$

Encontramos que: $g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi = \Omega_\sigma^\mu h^{\sigma\alpha}\partial_\alpha\phi$. Utilizando essa relação para (3.8):

$$\Omega_\alpha^\lambda\partial_\lambda\phi = (C + DX)\partial_\alpha\phi \quad (3.10)$$

Novamente, de (3.9):

$$X^\mu_\nu = (C + DX)Z^\mu_\nu \longrightarrow Z = \frac{X}{C + DX} \quad (3.11)$$

Onde $Z^\mu_\nu = h^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_\nu\phi$, $Z \equiv Z^{\mu\nu}$ e $Z = Z(X, \phi)$. Podemos escrever ainda (2.22) como sendo o tensor de energia da teoria de campo escalar:

$$\tilde{S}_m(Z, \phi) = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-h} K(Z, \phi) \quad (3.12)$$

Sendo assim:

$$\tilde{T}^\mu_\nu = K_z Z^\mu_\nu - \frac{K(Z, \phi)}{2} \delta^\mu_\nu \quad (3.13)$$

Agora, encontraremos uma relação entre a RBG (3.6) e a GR (3.12). Para isso encontramos \tilde{T}^μ_ν :

$$\tilde{T}^\mu_\nu = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \left[T^\mu_\nu - \left(\mathcal{L}_G + \frac{T}{2} \right) \delta^\mu_\nu \right] \quad (3.14)$$

Substituindo T e T^μ_ν :

$$\tilde{T}^\mu_\nu = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \left[P_X X^\mu_\nu - \left(\mathcal{L}_G + \frac{X P_X - P}{2} \right) \delta^\mu_\nu \right] \quad (3.15)$$

A equação (3.15) pode ser escrita de duas formas:

$$\partial_\mu (\sqrt{g} P_X g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi) - \sqrt{-g} \frac{P_\phi}{2} = 0 \quad (3.16)$$

ou

$$\partial_\mu \left(\sqrt{h} K_Z h^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \right) - \sqrt{-h} \frac{K_\phi}{2} = 0 \quad (3.17)$$

Agora vamos encontrar as relações mais relevantes para o mapa. Igualando as equações (3.16) e (3.17) e utilizando as relações (3.9) e (3.11), teremos:

$$\sqrt{-g} P_X g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi = \sqrt{-h} |\hat{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} P_X (X + DX) h^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \quad (3.18)$$

E, finalmente, de (3.18):

$$K(Z, \phi) = \frac{1}{|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} (2\mathcal{L}_G + X P_X - P) \quad (3.19)$$

$$K_Z Z_\nu^\mu = \frac{P_X X_\nu^\mu}{|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow Z K_z = \frac{X P_X}{|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \quad (3.20)$$

$$K_\phi = \frac{P_\phi}{|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \quad (3.21)$$

Agora, podemos substituir na equação (3.20), $\frac{X}{Z} = (C + DX)$, logo:

$$K_Z = \frac{P_x (C + DX)}{|\hat{\Omega}|^{\frac{1}{2}}} \quad (3.22)$$

Ao invertemos a relação (3.11) para encontrar $X = X(Z, \phi)$, então a Lagrangiana de $K = K(Z, \phi)$ segue automaticamente inserindo essa expressão na equação (3.19). Essa abordagem requer que as derivadas parciais de $K(Z, \phi)$ devem ser as mesmas das obtidas nas equações (3.21) e (3.22). Por isso nota-se que é muito mais fácil obter uma expressão para $K(Z, \phi)$ em termos de X e ϕ e depois inverter a relação [18].

3.1 Mapeando a gravidade de Eddington-inspired-Born-Infeld

3.1.1 EiBI com matéria escalar

Vamos usar a ação para a gravidade EiBI (2.32). Da relação (2.34) e do Ω da equação (3.8), podemos construir então a seguinte equação:

$$|\hat{\Omega}|^{1/2}(\Omega^{-1})^\mu{}_\nu = \lambda\delta^\mu{}_\nu - \epsilon\kappa^2 T^\mu{}_\nu \quad (3.23)$$

Com o tensor de energia, dado por (3.7), teremos então:

$$|\hat{\Omega}|^{1/2}(\Omega^{-1})^\mu{}_\nu = A(X, \phi)\delta^\mu{}_\nu + B(X, \phi)X^\mu{}_\nu \quad (3.24)$$

onde, $L_X \equiv dL/dX$, $X^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu\phi$, $A = \lambda + \frac{\epsilon\kappa^2}{2}L(X, \phi)$ e $B = -\epsilon\kappa^2 L_X$. Agora podemos calcular o determinante de Ω e invertendo a relação (3.24) para, finalmente, obter:

$$\Omega^\mu{}_\nu = a(X, \phi)\delta^\mu{}_\nu + b(X, \phi)X^\mu{}_\nu \quad (3.25)$$

com $a = \sqrt{A(A + BX)}$, $b = -|A|B/a$ e, o determinante, $|\hat{\Omega}| = A^2 a^2$

3.1.2 EiBI para Relatividade Geral

As equações apresentadas na subseção anterior estão em função de X e ϕ , para determinar um mapa entre EiBI e RG nós temos que escrever em termos de $\tilde{L}(Z, \phi)$. Utilizando as equações encontradas para a forma geral (3.19) e (3.20) e, sabendo que a Lagrangiana para esse caso específico é $\mathcal{L}_G = (\hat{\Omega}^{1/2} - \lambda)/\epsilon\kappa^2$:

$$(\Omega^{-1})^\mu{}_\nu = \tilde{A}(Z, \phi)\delta^\mu{}_\nu + \tilde{B}(Z, \phi)Z^\mu{}_\nu \quad (3.26)$$

onde $\tilde{A} = 1 - \frac{\epsilon\kappa^2}{2}(\tilde{L} - Z\tilde{L}_Z)$ e $\tilde{B} = -\epsilon\kappa^2\tilde{L}_Z$ da qual podemos ainda obter, invertendo a equação:

$$\Omega^\mu{}_\nu = \tilde{a}(Z, \phi)\delta^\mu{}_\nu + \tilde{b}(Z, \phi)Z^\mu{}_\nu \quad (3.27)$$

com $\tilde{a} = 1/\tilde{A}$, $\tilde{b} = -\tilde{B}/\tilde{A}(\tilde{A} + \tilde{B}Z)$, e $|\tilde{\Omega}| = \tilde{A}^{-3}(\tilde{A} + \tilde{B}Z)^{-1} = \tilde{a}^{-3}(\tilde{a} + \tilde{b}Z)$ e, com isso, a equação (2.22) toma a forma:

$$G^\mu{}_\nu(h) = \tilde{T}^\mu{}_\nu(h) \quad (3.28)$$

onde \tilde{T} corresponde a uma nova lagrangiana de matéria acoplada à Relatividade Geral.

3.1.3 Da Relatividade Geral para EiBI

Um dos resultados mais excitantes do mapa é que também é possível fazer o inverso, mapear soluções exatas da Relatividade Geral, partindo de um campo escalar conhecido $\tilde{L}(Z, \phi)$ acoplado a RG, para soluções exatas em EiBI com um campo escalar de matéria $L(X, \phi)$ acoplado à EiBI. Para isso, primeiro vamos escrever a Lagrangiana de EiBI em termos da Relatividade geral utilizando (3.19) e (3.20):

$$L(X, \phi) = 2\mathcal{L}_G + |\hat{\Omega}|^{1/2}(Z\tilde{L}_Z - \tilde{L}) \quad (3.29)$$

onde $\mathcal{L}_G = (|\hat{\Omega}|^{1/2} - \lambda)/\epsilon\kappa^2$ e $\hat{\Omega}$ expressado por (3.27). E, finalmente, podemos encontrar:

$$L(X, \phi) = \frac{2}{\epsilon\kappa^2} \left[\left[1 - \frac{\epsilon\kappa^2}{2}(\tilde{L} - Z\tilde{L}_Z) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\epsilon\kappa^2}{2}(\tilde{L} + Z\tilde{L}_Z) \right]^{\frac{1}{2}} - \lambda \right] \quad (3.30)$$

4 Gerando soluções para a gravidade EiBI

No capítulo anterior foi apresentado o método do mapeamento para obter soluções para as teorias tipo Ricci-based. Agora aplicaremos o que foi apresentado para o caso da gravidade de Eddington-inspired-Born-Infeld.

O procedimento prescrito pelo mapa nos permite, através de soluções exatas da Relatividade Geral, gerar soluções exatas para o caso EiBI.

Apesar da teoria EiBI incluir uma constante cosmológica efetiva dada por $\Lambda_{eff} = (\lambda - 1)/\epsilon\kappa^2$, nós utilizaremos uma solução onde $\lambda = 1$ ($\Lambda = 0$), para encontrar soluções assintoticamente planas. Já o parâmetro ϵ , determina a escala na qual os desvios da RG deixam de ser desprezíveis. Como veremos, no caso de $|R_{\mu\nu}| \ll 1/\epsilon$, a própria expressão (2.22) se aproxima das eqs. de Einstein.

4.1 Solução de Wyman (RG)

Em 1957 Bergmann e Leipnik procuraram encontrar soluções de uma forma especial das equações de campo da RG com campo escalar, mas não conseguiram encontrar expressões para o potencial gravitacional [19]. Mais tarde, em 1981, Wyman percebeu que essas expressões podem ser encontradas utilizando um sistema de coordenadas diferente, que lhe permitiu achar uma solução estática e esfericamente simétrica do sistema RG + campo escalar [20].

A solução de Wyman tem um tensor energia momento especial, do tipo:

$$\kappa T_{ij} = \mu(V_i V_j - \frac{1}{2}g_{ij}g^{mn}V_m V_n) \quad (4.1)$$

onde V é um escalar e $V_i = \frac{\partial V}{\partial x^i}$. Wyman assume o elemento de linha ds^2 como sendo esfericamente simétrico e estático da forma:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.2)$$

Onde λ e ν dependem somente de r . Para encontrar as soluções, através de uma inspeção de (4.1) e (4.2), pode ser utilizado um procedimento desenvolvido por Buchdahl [21] quando a solução das equações no vácuo $R_{\mu\nu} = 0$ é conhecida. O procedimento de Buchdahl encontra de forma efetiva as soluções procuradas por Leipnik e Bergmann.

Para encontrar as soluções $\lambda(r)$ e $\nu(r)$, Wyman utilizou uma engenhosa mudança de coordenadas que envolve o próprio campo escalar.

Pela solução basear-se em uma substituição levando em consideração a simplicidade da equação do campo escalar, $\phi_{yy} = 0$, podemos escolher, sem perda de generalidade, $\phi = y$; de modo que a equação (4.2) pode ser escrita como:

$$ds_{RG}^2 = -e^\nu dt^2 + e^\nu W^{-4} dy^2 + W^{-2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (4.3)$$

No caso assintoticamente plano teremos que:

$$e^\nu = e^{\beta y} \quad (4.4)$$

$$W = \gamma^{-1} e^{\beta \frac{y}{2}} \sinh \gamma y \quad (4.5)$$

onde a constante $\gamma \equiv \sqrt{\beta^2 + 2\kappa^2}/2$, $\beta = -2GM$, e M é a massa de Schwarzschild.

Precisamos ainda lembrar que, ao trabalhar com as coordenadas utilizadas por Wyman, o centro da solução esférica é encontrado em $y \rightarrow \infty$, enquanto o limite assintótico, coincidente com $\phi \rightarrow 0$, é obtido quando $y \rightarrow 0$

Agora que a solução de Wyman foi apresentada voltaremos nossa atenção para o procedimento descrito pelo mapa, no capítulo anterior. Esse procedimento possibilita, através da solução de Wyman da RG, gerar de forma eficiente soluções exatas para a gravidade EiBI [22].

4.2 Mapeando a gravidade de EiBI com campo escalar

Vamos utilizar os resultados obtidos no capítulo anterior, porém consideraremos uma lagrangiana de matéria (campo escalar real) da forma:

$$L(X, \phi) = p(X) - 2V(\phi) \quad (4.6)$$

onde $p(X)$ é uma função arbitrária de X , e $V(\phi)$ é um potencial escalar.

A Lagrangiana correspondente para a RG será:

$$\tilde{L}(X, \phi) = \frac{2}{\epsilon\kappa^2} \left(1 - \frac{a+b}{\sqrt{ab^3}} \right) \quad (4.7)$$

onde

$$a = b - 2\epsilon\kappa^2 X p_X, \quad b = 2\lambda + \epsilon\kappa^2 (p(X) - 2V(\phi)) \quad (4.8)$$

Como apresentado no capítulo anterior, nós podemos mapear a lagrangiana de RG \rightarrow EiBI. Considerando o modelo de campo escalar canônico $\tilde{L}(Z, \phi) = Z - 2V(\phi)$ acoplado à Relatividade Geral, e aplicando o procedimento do mapa, podemos escrever a equação (3.30) utilizando essa lagrangiana e o determinante (3.27) de modo que obtemos:

$$L(Z, \phi) = \frac{2}{\epsilon\kappa^2} \left[\left[(1 + \epsilon\kappa^2 V(\phi))(1 - Z\epsilon\kappa^2 + \epsilon\kappa^2 V(\phi)) \right]^{1/2} - \lambda \right] \quad (4.9)$$

E ainda, se combinarmos as equações (3.19) e (3.20) para obter:

$$P(Z, \phi) = 2\mathcal{L}_G + |\hat{\Omega}|^{1/2} (ZK_Z - K) \quad (4.10)$$

Utilizando a Lagrangiana apresentada ($\tilde{L}(Z, \phi) = Z - 2V(\phi)$) na equação (4.10), teremos que a relação entre os termos cinéticos (Z e X) se dá por:

$$Z = (1 + \epsilon\kappa^2 V(\phi)) \frac{X}{1 + \epsilon\kappa^2 X} \quad (4.11)$$

Ao inserir (4.11) em (4.9), obtemos:

$$L(X, \phi) = \frac{2}{\epsilon\kappa^2} \left(\frac{\sqrt{1 + \epsilon\kappa^2 X}}{1 + \epsilon\kappa^2 V(\phi)} - \lambda \right) \quad (4.12)$$

Note que se considerarmos $V(\phi) \rightarrow 0$ a equação (4.12) se torna:

$$L(X) = \frac{2}{\epsilon\kappa^2} (\sqrt{1 + \epsilon\kappa^2 X} - \lambda) \quad (4.13)$$

O que fizemos aqui foi derivar o mapa inverso de um modelo de campo escalar livre, e a equação (4.13) é uma densidade lagrangiana *não canônica* para o campo escalar. É válido observar que no caso canônico do campo escalar livre, isto é $p(X) = X$ com $V = 0$, substituindo esses valores em (4.8), teremos que a equação (4.7) (no limite de campo fraco) se reduz a:

$$\tilde{L} \equiv Z + \frac{\epsilon\kappa^2}{4} Z^2 \quad (4.14)$$

4.2.1 Matriz deformação

Para concluir a aplicação do mapeamento iremos encontrar uma equação para a matriz deformação $(\Omega^{-1})^\mu{}_\nu$ que, como mencionado anteriormente, depende da teoria de gravidade considerada (nesse caso, a gravidade de EiBI). Agora, da equação (3.26), lembrando que $\tilde{L}(Z) = Z$:

$$\tilde{B}(Z) = -\epsilon\kappa^2 \tilde{L}_Z \quad (4.15)$$

$$\tilde{A}(Z) = 1 - \frac{\epsilon\kappa^2}{2} (\tilde{L} - \tilde{L}_Z), \quad (4.16)$$

Chegaremos então a:

$$(\Omega^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \epsilon\kappa^2 Z^\mu{}_\nu, \quad (4.17)$$

Agora que conseguimos aplicar o mapa para o caso da gravidade de EiBI com um campo escalar, iremos nos focar em aplicar os métodos apresentados até agora na solução de Wyman, encontrando a correspondente para a gravidade de EiBI. Logo após tentaremos identificar as consequências físicas que essa solução irá nos trazer.

4.3 Solução para gravidade EiBI

Substituindo (4.17) na relação apresentada nos capítulos anteriores entre a métrica física e métrica auxiliar, $h_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\Omega^\alpha{}_\nu$, teremos:

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \epsilon\kappa^2 Z_{\mu\nu} \quad (4.18)$$

Por conta da forma do campo escalar na solução de Wyman, podemos escrever $\phi(y) = 1$, de modo que teremos que $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu\phi = \delta_{\mu y}\delta_{\nu y}$. Sendo assim, aplicando (4.18) na equação (4.3), podemos escrever a solução para a gravidade EiBI como:

$$ds_{EiBI}^2 = -e^\nu dt^2 + (e^\nu W^{-4} - \epsilon\kappa^2)dy^2 + W^{-2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.19)$$

Apesar de a única modificação com relação RG aparentemente ser apenas a adição da constante $\epsilon\kappa^2$ na componente g_{yy} da métrica, irão surgir algumas consequências físicas notáveis que iremos analisar à seguir.

Sabendo que das relações (4.4) e (4.5) podemos encontrar a função radial através da equação (4.19), de modo que:

$$r^2(y) = \frac{1}{W^2}(y) = \gamma^2 \text{csch}^2(\gamma y) e^{-\beta y}, \quad (4.20)$$

onde $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 2\kappa^2}$.

Fazendo uma análise assintótica dessa função (4.20) podemos observar que longe do centro (para $y \rightarrow 0$), a função começa como $r^2(y) \simeq 1/y^2$, enquanto

que na região central ($y \rightarrow \infty$), vemos que vai como $r^2(y) \simeq 4\gamma^2 e^{-(\beta+2\gamma)y}$. Esse comportamento se mostra na Figura 1.

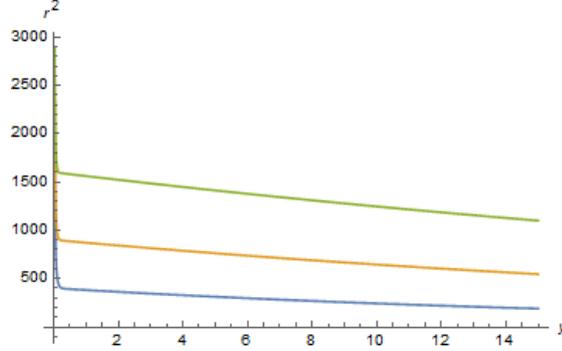


Figura 1 – Função radial $r^2(y)$ para $M = 10$ (Azul), $M = 15$ (Laranja) e $M = 20$ (Verde)

Como foi dito anteriormente e, como podemos observar através de (4.19) o parâmetro ϵ vai influenciar diretamente na solução, o que nos leva a dois casos que convém discutirmos separadamente.

- Caso EiBI $\epsilon > 0$

Nesse caso a componente $g_{tt} = -e^\nu$ será sempre negativa, e a componente $g_{yy} = e^\nu W^{-4} - \epsilon \kappa^2$, pode ser negativa para valores finitos de y , sendo que a região aceitável fisicamente requer $g_{yy} \geq 0$. Podemos encontrar então um valor crítico y_c , a partir do qual a solução é válida:

$$y_c \equiv \frac{\log\left(\frac{(\beta^2 + 2\kappa^2)^2}{\kappa^2 |\epsilon|}\right)}{2\sqrt{\beta^2 + 2\kappa^2} + \beta} \quad (4.21)$$

Utilizando o limite astrofísico $|\beta|^2 \gg \kappa^2$ (soluções com massa suficientemente grande, para as quais $\gamma \sim |\beta|/2$) [23], a eq. (4.21) se torna:

$$y_c \approx |\beta|^{-1} \log\left(\frac{\beta^4}{|\epsilon| \kappa^2}\right), \quad (4.22)$$

e uma expansão da função radial (4.20) nesse ponto e considerando o mesmo limite, nos traz:

$$r_c^2(y_c) \equiv \beta^2 - \left(\log \left[\frac{\beta^4}{|\epsilon|\kappa^2} \right] - 2 \right) \kappa^2 + \mathcal{O}(\kappa^4) \quad (4.23)$$

Podemos notar em (4.23) que r_c é sempre menor que $|\beta| = 2M = r_S$, o que significa que o valor de r_c é sempre menor que o raio de Schwarzschild (r_S) para um objeto com uma massa equivalente.

Analisando um pouco a solução podemos identificar que esse resultado com $\epsilon > 0$ trás consigo uma má notícia: apesar de na região exterior a solução no caso EiBI possuir praticamente as mesmas propriedades que para a RG, no interior $r < r_c$ esse objeto é mal definido. Observando o comportamento do escalar de Ricci vemos que perto do ponto y_c diverge polinomialmente ($R \sim 1/(\epsilon\kappa^2(y - y_c)^2)$, [23]) Também, pode se ver [23] que qualquer geodésica nula radial não pode ser estendida além da superfície $r = r_c$, que é alcançada em um tempo (parâmetro afim) finito, o que demonstra que o espaço-tempo é geodesicamente incompleto.

- Caso EiBI $\epsilon < 0$

Olhamos primeiro para o elemento de linha (4.19). O que podemos observar inicialmente nessa equação é que a solução é bem definida em todo o caminho até o centro, ou seja $y \rightarrow \infty$, onde g_{yy} é não nulo e definido positivo. Por outro lado, ainda para $y \rightarrow \infty$, g_{yy} se torna constante ($g_{yy} \rightarrow |\epsilon|\kappa^2$), de modo que a distância radial até o centro será infinita, pois:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} L = \int^y \sqrt{g_{yy}} dy \quad (4.24)$$

$$\simeq \int^y \sqrt{\epsilon\kappa^2 + (\beta^2 + 2\kappa^2)^2 e^{-|\beta|y}} dy \rightarrow \sqrt{|\epsilon|\kappa^2} y \rightarrow \infty \quad (4.25)$$

Felizmente para esse caso não temos a adversidade encontrada no caso anterior, isto é, a região interior ($r < |\beta| = 2M$) tem um comportamento muito melhor para o caso $\epsilon < 0$, e nos trás um resultado interessante. Como os resultados

encontrados nesse caso são mais “acolhedores” vamos nos focar em estudá-lo mais profundamente e, por isso, dividiremos em basicamente três áreas de análise: *Curvatura, Energia e Geodésicas*.

Curvatura

Como pode ser verificado numericamente, podemos, nas regiões de interesse, aproximar as funções hiperbólicas por exponenciais para obter expressões compactas do escalar de Ricci. Na região central, isto leva a que o escalar de Ricci tende a uma constante para $y \rightarrow \infty$, que seria $R \rightarrow -\frac{\beta^2}{2|\epsilon|\kappa^2}$. Porém, a análise mais cuidadosa da expressão completa em termos da solução achada possui a seguinte forma:

$$R = -\frac{5}{2|\epsilon|\kappa^2} \left(\beta^2 + \frac{8}{5}\beta\gamma + \kappa^2 \right) + \frac{1}{2\gamma^2} e^{(\beta+2\gamma)y} \quad (4.26)$$

O que trás consigo uma clara divergência exponencial no centro da solução. Apesar disto, obtemos um resultado animador é que a divergência para esse caso se comporta na forma:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} R_{EiBI} \sim e^{\frac{\kappa^2}{|\beta|}y}, \quad (4.27)$$

o que representa uma divergência bem mais suave em relação à obtida na Relatividade Geral que, para fins de comparações, vem a ser:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} R_{GR} \approx \frac{\kappa^2}{(\beta^2 + 2\kappa^2)^2} e^{(2\sqrt{\beta^2+2\kappa^2}+\beta)y} \sim e^{|\beta|y} \quad (4.28)$$

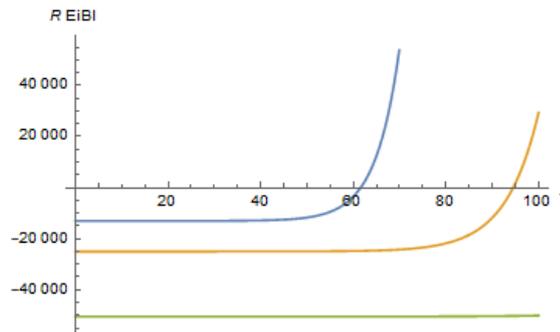


Figura 2 – Variação do Escalar de Ricci EiBI para $\beta = -5$ (Azul), $\beta = -7$ (Laranja) e $\beta = -10$ (Verde)

4.3.1 Energia

Se observarmos a zona de transição (dentro \Leftrightarrow fora) do objeto, a densidade de energia efetiva gerada pela geometria, representada por:

$$\kappa^2 \rho_{eff} = G^t_t, \quad (4.29)$$

No caso EiBI, quando nos aproximamos do centro da solução, o tensor de Einstein completo é da seguinte forma:

$$\mathbf{G}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \frac{3(\beta^2 + \kappa^2 + 2\beta\gamma)}{2|\epsilon|\kappa^2} - \frac{e^{2\beta\gamma y}}{4\gamma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{e^{2\beta\gamma y}}{4\gamma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta^2 + 4\gamma^2 + \beta\sqrt{4\gamma^2 + 2\kappa^2\beta}}{4|\epsilon|\kappa^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta^2 + 4\gamma^2 + \beta\sqrt{4\gamma^2 + 2\kappa^2\beta}}{4|\epsilon|\kappa^2} \end{pmatrix},$$

que apresenta contribuições divergentes nesse limite ($y \rightarrow \infty$).

Por outro lado, se consideramos a densidade de energia associada ao tensor de energia-momento do campo escalar, então, do ponto de vista da RG temos que $\rho_{GR} \equiv -T^t_t = Z/2 = h^{yy}/2$, e na região interior diverge segundo $\rho_{GR} \sim e^{|\beta|y}$, que é apenas um reflexo da estrutura das equações de Einstein.

Porém, no caso EiBI teremos $\rho_{EiBI} = L(X)/2$ que, por sua vez, tende a $\rho_{EiBI} \approx \frac{1}{|\epsilon|\kappa^2}$ na região interior. Assim, a densidade de energia da região central é uma constante positiva que satisfaz a escala natural da Lagrangiana de EiBI representado pela equação (4.13).

O que podemos concluir dessa análise é que a interpretação considerada “padrão”, do tensor de Einstein como um tensor energia-momento efetivo *observável*, nos traz uma imagem física totalmente diferente do comportamento do campo escalar, que é fisicamente aceitável.

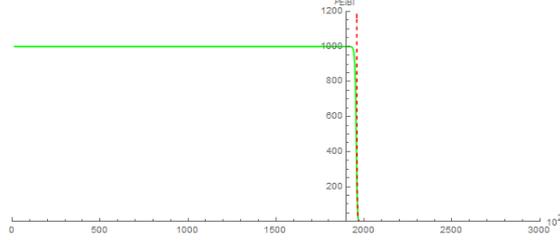


Figura 3 – A densidade de energia, $\rho_{E\dot{I}BI} = L(X)/2$ ($\epsilon > 0$ vermelho, $\epsilon < 0$, verde), apresenta um comportamento tipo “kink”, com $\rho_{E\dot{I}BI} = 0$ no vácuo, $e\rho_{E\dot{I}BI} = 1/|\epsilon|\kappa^2$ na região interna. Fonte: Ref.[22]

4.3.2 Geodésicas

Para completar a nossa análise iremos estudar agora a estrutura geodésica da solução. Como dito, nessas teorias não há acoplamento direto entre os campos de matéria e a conexão, e a matéria seguirá as geodésicas métricas.

Vamos derivar a forma geral da equação da geodésica para o caso de uma métrica esfericamente simétrica, como mostrado em [24]. A partir de uma ação da forma:

$$S = \frac{1}{2} \int d\lambda g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (4.30)$$

iremos utilizar o elemento de linha:

$$ds^2 = -C(x)dt^2 + B^{-1}(x)dx^2 + r^2(x)d\Omega^2. \quad (4.31)$$

Substituindo (4.31) em (4.30), chegamos a:

$$\frac{1}{2} \int d\lambda \left[-C(x)\dot{t}^2 + \frac{1}{B(x)}\dot{x}^2 + r^2(x)\dot{\theta}^2 + r^2(x)\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right] \quad (4.32)$$

Sendo assim, o momentum associado à equação (4.32) terá componentes:

$$P_t = -\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \dot{t}C(x) \quad (4.33)$$

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{B(x)} \quad (4.34)$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2(x)\dot{\theta} \quad (4.35)$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2(x)\sin^2\theta\dot{\phi} \quad (4.36)$$

O Hamiltoniano $H = -P_t\dot{t} + P_x\dot{x} + P_\theta\dot{\theta} + P_\phi\dot{\phi} - L$ pode ser reescrito como:

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}x_\mu P_\nu \quad (4.37)$$

E as equações da geodésica (dinâmica de uma partícula) resultam:

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial P_\mu} = g^{\mu\nu}P_\nu \quad (4.38)$$

$$\dot{P}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu g^{\alpha\beta})P_\alpha P_\beta \quad (4.39)$$

Dessas equações podemos concluir: primeiro, que P_t e P_ϕ são constantes de movimento ($\dot{P}_t = 0 = \dot{P}_\phi$) e, segundo, que $\frac{dH}{d\lambda} = 0$, ou seja, H é conservado (com o qual podemos relacioná-lo com a energia do sistema. Teremos então:

$$P_t = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)C(x) \equiv \mathcal{E} \quad (4.40)$$

$$P_\phi = \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)r^2(x)\sin^2\theta \equiv \mathcal{L} \quad (4.41)$$

Logo

$$2H = -\frac{P_t^2}{C(x)} + B(x)P_x^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2(x)} + \frac{P_\phi^2}{r^2(x)\sin^2\theta} = -\frac{\mathcal{E}^2}{C(x)} + \frac{\dot{x}^2}{B(x)} + \frac{\mathcal{L}^2}{r^2}, \quad (4.42)$$

Onde na equação (4.42) podemos fixar $\theta = \pi/2$, sem perda de generalidade pois o movimento se encontra em um plano.

Quando $H \neq 0$ podemos reescalonar a constante $\lambda \rightarrow \lambda/\sqrt{|2H|}$ o que nos mostra que, fisicamente, apenas o sinal de H é relevante. Utilizando $k \equiv 2H$ a equação (4.42) pode ser reescrita como [25] :

$$\frac{C(x)}{B(x)} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 = \mathcal{E}^2 - C(x) \left[\frac{\mathcal{L}^2}{r^2(x)} - k \right] \quad (4.43)$$

onde $k = 1, 0, -1$ são, respectivamente, geodésicas espaciais, nulas e temporais.^a

Para geodésicas temporais, as quantidades conservadas $\mathcal{E} \equiv Cdt/d\lambda$ e $\mathcal{L} \equiv r^2(x)d\phi/d\lambda$ são interpretadas como a energia total e o momento angular por unidade de massa, respectivamente. No caso das geodésicas nulas \mathcal{L}/\mathcal{E} pode ser identificado com um parâmetro de impacto para o infinito assintótico[25].

A conservação de energia do elemento de linha EiBI (4.19) será $\mathcal{E} = e^\nu dt/d\lambda$, enquanto a geodésica nula radial ($k = 0 = \mathcal{L}$) satisfaz:

$$\left(\frac{d(\mathcal{E}\lambda)}{dy} \right)^2 = e^\nu \left(\frac{e^\nu}{W^4} + |\epsilon|\kappa^2 \right) \quad (4.44)$$

Vale a pena observar que, longe da região onde o campo escalar está localizado, a geometria da solução no caso da RG deve ser recuperada. Ou seja, longe do centro ($y \rightarrow 0$), teremos $e^\nu \approx 1$ e $W = 1/r \approx y$. Sendo assim, o interessante é analisar os resultados apenas na região interior.

Agora, perto do centro ($y \rightarrow \infty \Leftrightarrow r = 1/W \rightarrow 0$), teremos $(d(\mathcal{E}\lambda)/dy)^2 \approx |\epsilon|\kappa^2 e^{-|\beta|y}$ que, integrando, fica:

$$\mathcal{E}\Delta\lambda = \mp 2|\beta|^{-1} \sqrt{|\epsilon|\kappa^2} e^{-|\beta|y/2} \quad (4.45)$$

O que esse resultado nos trás de interessante é que a velocidade efetiva dos raios de luz próximos ao centro aumenta exponencialmente, o que implica em um raio que viaja da superfície do objeto em y_c , através do centro até seu ponto antipodal, em um tempo afim que é extremamente curto $\Delta\lambda \propto e^{-|\beta|y_c/2}$.

^a A equação (4.43) é equivalente à equação da geodésica $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$, que pode ser derivada variando (4.30) com relação à métrica, para uma conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ dada pela Eq. (2.2)

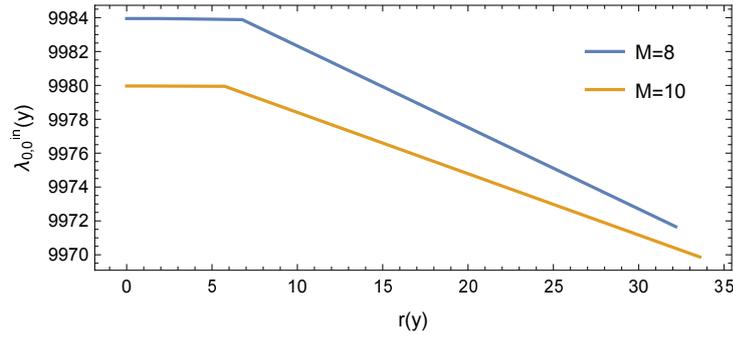


Figura 4 – Geodésica radial nula entrante no caso $\epsilon < 0$. Após atravessar a superfície do objeto, os raios de luz viajam até o centro em forma praticamente horizontal, ou seja, num tempo quase zero.

Mas o que realmente significa esse resultado é que, como se mostra na Figura 4 de forma impressionante, a informação e as partículas podem atravessar esse objeto quase que instantaneamente mesmo quando a distância radial do centro (4.24) é infinita. E o que é mais excitante ainda é que essa interpretação é fisicamente plausível: se quiséssemos calcular a distância própria radial da superfície até o centro do objeto em forma “operacional”, ou seja, assumindo a velocidade da luz c e utilizando o tempo próprio $\Delta\lambda$ chegaríamos ao resultado de $\Delta L = c\Delta\lambda \rightarrow 0$, como se não houvesse interior.

Isto é, o objeto funciona como um *buraco de minhoca* “membrana”, que transfere partículas e informações de um ponto a outro quase que instantaneamente.

5 Conclusões

Com o passar dos anos as tecnologias relacionadas às observações astronômicas foram crescendo até atingir um grau de amadurecimento. Isto possibilitou um entendimento mais profundo daquilo que se passa a distâncias gigantescas, e com isso foram surgindo também discrepâncias entre o modelo padrão e as observações, o que deu lugar ao surgimento das componentes escuras.

Com o intuito de contornar ou reduzir a inclusão dessas componentes, e na tentativa de montar um modelo que seja mais condizente com aquilo que está sendo observado, foram surgindo algumas teorias de gravidade modificada. Nesse sentido, o formalismo de Palatini (métrico-afim), se torna uma ferramenta muito interessante para garantir que as equações de campo das teorias não lineares no escalar de Ricci preservem a estrutura de derivadas em segunda ordem, sem a necessidade de incluir graus de liberdade associados a componentes não observadas.

Em nosso trabalho, abordamos algumas dessas teorias, da classe das RGBs (baseadas no tensor de Ricci), mostrando que podem trazer alguns resultados notáveis.

Um diferencial inegável que possuem as Teorias RGBs é a possibilidade de se construir um mapa, introduzido e explorado em [26], [27] e [22]; que é capaz de trazer soluções encontradas na RG para teorias RGBs. O inverso também é possível, isto é, trazer soluções das RGBs para o quadro do formalismo métrico da RG.

Dentro dessas teorias RGBs se encontra a chamada EiBI (Eddington-inspired-Born-Infeld gravity) que tem como base a ação criada por Eddington para o eletromagnetismo e, posteriormente, reformulada por Bañados e Ferreira [17] para um modelo de gravidade com raiz quadrado do tipo Born-Infeld.

A teoria da gravidade EiBI estudada no presente trabalho é um caso onde a ação do procedimento se mostra muito eficiente, permitindo o mapeamento explícito em ambas as direções. Essa teoria nos traz alguns resultados interessantes, como foi

apresentado, e o resultado mais excitante é um novo objeto compacto, encontrado em [23], que apresenta características de ‘buraco de minhoca’, capaz de transferir partículas e informações de um ponto a outro, em forma praticamente instantânea.

Uma outra característica muito interessante da técnica de mapeamento aqui discutida é que, além da obtenção direta de soluções para teorias extremamente não lineares, essas teorias e soluções podem ganhar uma nova interpretação, no sentido que soluções no contexto da RG para sistemas *gravidade (RG) + matéria “exótica”* podem ser interpretadas no contexto das RBGs como sistemas de *gravidade (RBG) + matéria “normal”*, o que nos leva a pensar que talvez a explicação para alguns problemas possa estar realmente em uma reformulação da gravidade.

Além do mapa podemos perceber, através dos resultados encontrados, que a gravidade de EiBI é um caso muito promissor e pode ser usado para entender um pouco mais sobre os chamados *blackhole mimickers*.

Pesquisas futuras

O mais excitante de se trabalhar com o formalismo de Palatini é a possibilidade de encontrar novos objetos, aplicar novas teorias e encontrar novas formas de mapear. Atualmente estamos trabalhando em uma forma de aplicar o mapa para teorias $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$.

Referências

- 1 ASSIS, A.; JR, O. P. Erwin schrödinger e o princípio de mach. *Cad. Hist. Fil. Ci*, p. 131–52, 2001. Citado na página 13.
- 2 SWART, J. de. Closing in on the Cosmos: Cosmology’s Rebirth and the Rise of the Dark Matter Problem. 2019. Citado na página 13.
- 3 WILL, C. M. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 1, Jun 2014. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2014-4>>. Citado na página 14.
- 4 BERTONE, G.; TAIT TIM, M. A new era in the search for dark matter. *Nature*, v. 562, n. 7725, p. 51–56, 2018. Citado na página 15.
- 5 LÓPEZ-CORREDOIRA, M. Problems with the dark matter and dark energy hypotheses, and alternative ideas. In: *Cosmology on Small Scales 2018: Dark Matter Problem and Selected Controversies in Cosmology*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 126–138. Citado na página 16.
- 6 DODELSON, S. Book. *Modern Cosmology*. [S.l.]: Academic Press, Elsevier Science, 2003. Citado na página 16.
- 7 FAMAHEY, B.; MCGAUGH, S. S. Modified newtonian dynamics (mond): Observational phenomenology and relativistic extensions. *Living Reviews in Relativity*, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 1, Sep 2012. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2012-10>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- 8 SANDERS, R. H. The published extended rotation curves of spiral galaxies: Confrontation with modified dynamics. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 473, n. 1, p. 117–129, dec 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F178131>>. Citado na página 19.
- 9 FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. $f(r)$ theories. *Living Reviews in Relativity*, Springer Science and Business Media LLC, v. 13, n. 1, Jun 2010. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2010-3>>. Citado na página 19.
- 10 CREMINELLI, P.; VERNIZZI, F. Dark energy after gw170817 and grb170817a. *Physical Review Letters*, American Physical Society

- (APS), v. 119, n. 25, Dec 2017. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251302>>. Citado na página 25.
- 11 SAKSTEIN, J.; JAIN, B. Implications of the neutron star merger gw170817 for cosmological scalar-tensor theories. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 119, n. 25, Dec 2017. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251303>>. Citado na página 25.
- 12 GLEYZES, J. et al. Exploring gravitational theories beyond horndeski. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2015, n. 02, p. 018–018, Feb 2015. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2015/02/018>>. Citado na página 25.
- 13 CARBALLO-RUBIO, R. et al. Phenomenological aspects of black holes beyond general relativity. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 12, Dec 2018. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.124009>>. Citado na página 25.
- 14 AFONSO, V.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Mapping ricci-based theories of gravity into general relativity. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 2, Jan 2018. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.021503>>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 27 e 34.
- 15 ORAZI, E. *Generating Solutions of Ricci-Based gravity theories from General Relativity*. 2020. Citado na página 25.
- 16 OLMO, G. Introduction to palatini theories of gravity and nonsingular cosmologies. 12 2012. Citado na página 26.
- 17 BANADOS, M.; FERREIRA, P. G. Eddington’s theory of gravity and its progeny. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 011101, 2010. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 113, 119901 (2014)]. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 55.
- 18 AFONSO, V. I. et al. Correspondence between modified gravity and general relativity with scalar fields. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 99, n. 4, Feb 2019. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.99.044040>>. Citado na página 37.
- 19 BERGMANN, O.; LEIPNIK, R. Space-time structure of a static spherically symmetric scalar field. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 107, p. 1157–1161, Aug 1957. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.107.1157>>. Citado na página 41.

- 20 WYMAN, M. Static Spherically Symmetric Scalar Fields in General Relativity. *Phys. Rev. D*, v. 24, p. 839–841, 1981. Citado na página 41.
- 21 BUCHDAHL, H. A. Reciprocal static metrics and scalar fields in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 115, p. 1325–1328, Sep 1959. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.1325>>. Citado na página 42.
- 22 AFONSO, V. I. et al. New scalar compact objects in Ricci-based gravity theories. *JCAP*, v. 12, p. 044, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 42, 50 e 55.
- 23 AFONSO, V. I. Compact scalar field solutions in EiBI gravity. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 29, n. 11, p. 2041011, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 56.
- 24 JIMENEZ, J. B. et al. Born–Infeld inspired modifications of gravity. *Phys. Rept.*, v. 727, p. 1–129, 2018. Citado na página 50.
- 25 OLMO, G. J. Nonsingular Black Holes in Palatini Extensions of General Relativity. *Springer Proc. Phys.*, v. 176, p. 183–219, 2016. Citado na página 52.
- 26 AFONSO, V. I. et al. Correspondence between modified gravity and general relativity with scalar fields. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 4, p. 044040, 2019. Citado na página 55.
- 27 AFONSO, V.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Mapping Ricci-based theories of gravity into general relativity. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 2, p. 021503, 2018. Citado na página 55.
- 28 ALHO, A.; UGGLA, C.; WAINWRIGHT, J. Perturbations of the Lambda-CDM model in a dynamical systems perspective. *JCAP*, v. 1909, n. 09, p. 045, 2019. Nenhuma citação no texto.
- 29 FARAONI, V. *f(R) gravity: successes and challenges*. 2008. Nenhuma citação no texto.
- 30 KLEIN, N. *Evidence for Modified Newtonian Dynamics from Cavendish-type gravitational constant experiments*. 2019. Nenhuma citação no texto.
- 31 REBOUCAS, M. J.; GOMERO, G. Cosmic topology: A Brief overview. *Braz. J. Phys.*, v. 34, p. 1358–1366, 2004. Nenhuma citação no texto.
- 32 SANDERS, R. H. Dark matter – Modified dynamics: Reaction vs. Prediction. In: . [S.l.: s.n.], 2019. Nenhuma citação no texto.
- 33 SMOLYANINOV, I. I. *Oscillating cosmological force modifies Newtonian dynamics*. 2019. Nenhuma citação no texto.

- 34 SOTIRIOU, T. P. *The significance of matter coupling in $f(R)$ gravity*. 2006. Nenhuma citação no texto.