

---

# Identificação e Controle Iterativo Aplicados a Veículos Autoguiados

Reginaldo Corteletti

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação

Péricles Rezende Barros, PhD.

Orientador

Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Reginaldo Corteletti, 15 de Outubro de 2002

**DIGITALIZAÇÃO:**  
**SISTEMOTECA - UFCG**

C827i 3371 Corteletti, Reginaldo  
2002 Identificação e controle iterativo aplicados a veículos autoguiados/  
Reginaldo Corteletti. - Campina Grande: UFCG, 2002.  
177 p.: il.

Tese (doutorado)- UFCG/CCT/DEE  
Inclui bibliografia

1. Alocação de Pólos 2. Controle Iterativo 3. Identificação de  
Sistemas 4. Identificação de Subespaço I.Título

CDU: 621.3.044.6

## Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus familiares que, apesar da distância, sempre estiveram presentes. Em especial aos que partiram prematuramente.

## Agradecimentos

Agradeço aos professores Péricles Rezende Barros e Antonio Marcus Nogueira Lima pela incansável orientação e inesgotável paciência sem as quais não seria possível realizar este trabalho.

Também agradeço aos colegas do *LIEC* e *LEIAM* que direta ou indiretamente tornaram possível a realização deste trabalho. Terminada a jornada, ficam os amigos inesquecíveis.

Ao pessoal administrativo, em especial, a nossa secretária Ângela, por sua colaboração desde o mestrado.

## Resumo

Diversas abordagens para identificação e controle estão disponíveis na literatura. O desempenho máximo que pode ser alcançado para a operação em malha fechada do sistema é uma variável desconhecida. Esta variável deve ser especificada pelo engenheiro de controle baseado em conhecimentos sobre a planta cuja dinâmica deseja modificar. O conhecimento sobre a planta pode ser traduzido em termos de modelos matemáticos.

Para obter o desempenho máximo para a operação da planta operando em malha fechada, é necessário ter um modelo que represente idealmente o comportamento dinâmico da mesma. Por diversas razões, isto não é factível na prática. Portanto, A especificação de antemão para o desempenho máximo não pode ser fornecido. Se for especificado um desempenho, não se pode garantir que este é o máximo que pode ser alcançado para a complexibilidade do controlador e modelo da planta utilizados no projeto. Existe na literatura uma abordagem que permite buscar o limite máximo para o desempenho com a planta operando em malha fechada. Esta é conhecida na literatura como Controle Iterativo. Nos esquemas iterativos, a busca do desempenho máximo é feita através da repetição dos passos da identificação e controle com o sistema operando em malha fechada. A sinergia entre estas etapas é o ponto chave das abordagens iterativas.

Como contribuição na área de controle, é apresentado um esquema iterativo que, garantindo simultaneamente a estabilidade, ajusta a malha automaticamente para o desempenho máximo. A estrutura utilizada para modelo da planta é resultante do esquema para controle iterativo proposto e do critério de controle utilizado. Como contribuição na área de identificação, é apresentado um método para a determinação da ordem e parâmetros para modelos lineares.

A planta utilizada para avaliar os esquemas propostos para identificação e controle é um veículo autoguiado. No Capítulo 4 são apresentadas as estruturas para o controle de velocidade e trajetória, e os respectivos resultados dos experimentos efetuados utilizando um protótipo disponível no Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle. No Apêndice A, apresenta-se a modelagem analítica do veículo.

## Abstract

Several approaches for the identification and control are presented in the literature. The optimal performance that can be attained for a closed loop system is an unknown variable. This variable must be specified *a priori* based on the knowledge that the controller's engineer has about the plant which dynamic behavior has to be modified. This knowledge about the plant can be represented in terms of its mathematical model.

In order to obtain the optimal performance of the plant it is necessary to have a model that ideally represent its dynamic behavior. For several reasons this is not possible in practical terms. If a performance is specified, it is not guaranteed that this performance is the best that can be attained with the controller's complexity and plant's model used. Nevertheless, there is one approach that searches for the maximum performance for operation in closed loop. This approach is known as Iterative Control. In the iterative schemes the search for the maximum performance is done based on the repetition of identification and control designing steps. The synergy between these steps is the key point of the iterative approaches.

This thesis presents an iterative scheme that automatically tune the closed loop in order to obtain the maximum performance while keeping the stability of the system. The definition of the model structure is based on the proposed iterative control scheme and on the control criterium. Furthermore, this thesis presents a new approach for the model order estimation of linear models.

The plant used in the experimental results is an autonomous vehicle which model is in the appendix.

# Conteúdo

ESCOPO DA TESE	1
<b>1 ESTADO DA ARTE E CONTEXTO DAS CONTRIBUIÇÕES</b>	<b>3</b>
1.1 Introdução	3
1.2 Modelagem de Sistemas	3
1.2.1 Breve história	5
1.2.2 Problemas da identificação em malha fechada	6
1.3 Abordagens Propostas para Estrutura de Modelo e Cálculo dos Parâmetros	8
1.4 Sintonia de Controladores	8
1.4.1 Breve história	9
1.4.2 Projeto iterativo do controlador	11
1.5 Casando os Critérios de Controle e Identificação e Controle Iterativo	14
1.5.1 Abordagem de Schrama	16
1.5.2 Abordagem de Zang	19
1.5.3 Abordagem do Surfista	21
1.5.4 Sintonia Iterativa <i>IFT</i>	23
1.6 Outras Abordagens Iterativas	25
1.7 Convergência e Estimação de Modelos em Esquemas Iterativos	26
1.8 Abordagem Proposta para Controle Iterativo	27
1.9 Conclusão	28
<b>2 ALGORITMO PARA IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS LINEARES</b>	<b>29</b>
2.1 Introdução	29
2.2 Representação Alternativa para Modelos <i>ARX</i>	31
2.2.1 Caso determinístico	31
2.2.2 Caso estocástico	34
2.3 Estimação da Ordem e Parâmetros	37

2.3.1	Introdução . . . . .	37
2.3.2	Estimação do modelo . . . . .	37
2.3.3	Ordem requerida para o modelo . . . . .	39
2.4	Estimação dos Parâmetros do Modelo . . . . .	43
2.4.1	Estimação utilizando estruturas estendidas . . . . .	43
2.4.2	Cálculo de <b>A</b> e <b>B</b> . . . . .	44
2.4.3	Análise de convergência . . . . .	47
2.5	Resultados de Simulações e Experimentos . . . . .	48
2.5.1	Resultados de simulação . . . . .	49
2.5.2	Resultados experimentais: Sistema <i>SISO</i> . . . . .	51
2.5.3	Resultados experimentais: Sistema <i>TITO</i> . . . . .	54
2.6	Conclusão . . . . .	59
<b>3</b>	<b>PROJETO ITERATIVO UTILIZANDO ALOCAÇÃO DE PÓLOS</b>	<b>60</b>
3.1	Introdução . . . . .	60
3.2	A Planta . . . . .	61
3.2.1	Modelagem da Planta . . . . .	61
3.2.2	Estimativa do tempo morto $\tau_d$ . . . . .	62
3.2.3	Critério para estimação do modelo . . . . .	62
3.3	Especificação do Desempenho . . . . .	63
3.3.1	O experimento do relé . . . . .	63
3.3.2	Cálculo do desempenho . . . . .	65
3.4	Parametrização do Controlador . . . . .	65
3.4.1	Projeto nominal do controlador . . . . .	67
3.4.2	Estrutura utilizada para implementação . . . . .	68
3.4.3	Casando os critérios de identificação e controle . . . . .	70
3.5	Análise da Estabilidade . . . . .	71
3.5.1	Estimativa da Margem de Ganho . . . . .	71
3.5.2	Desempenho Nominal <i>versus</i> Estabilidade . . . . .	72
3.6	Avaliação do Desempenho Obtido . . . . .	72
3.7	O Algoritmo . . . . .	73
3.8	Simulações . . . . .	73
3.8.1	Discretização de modelos, amostragem, sinais, e perturbações . . . . .	76
3.8.2	Sintonia iterativa: Ausência de ruído e perturbações . . . . .	76
3.8.3	Análise dos resultados obtidos . . . . .	84

3.8.4	Sintonia iterativa: Presença de ruído nas medições . . . . .	84
3.8.5	Sintonia iterativa: Ausência de ruído e perturbações . . . . .	84
3.8.6	Desempenho do controlador diante de perturbações na entrada e saída da planta . . . . .	97
3.9	Conclusão . . . . .	98
<b>4</b>	<b>ESTIMAÇÃO E CONTROLE PARA VEÍCULOS AUTOMÁTICOS</b>	<b>100</b>
4.1	Introdução . . . . .	100
4.2	Controle do Veículo . . . . .	104
4.2.1	Controle de velocidade . . . . .	105
4.2.2	Controle de trajetória . . . . .	107
4.3	Resultados Experimentais . . . . .	111
4.3.1	Controladores de velocidade . . . . .	111
4.3.2	Controle de trajetória . . . . .	119
4.4	Conclusão . . . . .	126
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>128</b>
<b>A</b>	<b>REPRESENTAÇÃO ALTERNATIVA PARA ESPAÇO DE ESTADOS</b>	<b>130</b>
A.1	Gerando a Estrutura Alternativa: Caso determinístico . . . . .	130
A.1.1	Sistemas <i>SISO</i> . . . . .	130
A.1.2	Sistemas <i>TITO</i> . . . . .	135
A.2	Gerando a Estrutura Alternativa: Caso estocástico . . . . .	139
A.2.1	Modelo <i>SISO</i> . . . . .	139
A.2.2	Modelo <i>TITO</i> . . . . .	142
<b>B</b>	<b>VEÍCULOS AUTÔNOMOS</b>	<b>144</b>
B.1	Introdução . . . . .	144
B.2	Veículos Autônomos Terrestres . . . . .	145
B.3	Sistemas de Auxílio a Navegação . . . . .	148
B.3.1	Guiagem por condutores elétricos . . . . .	148
B.3.2	Odometria . . . . .	149
B.3.3	Triangularização . . . . .	149
B.3.4	Sistema inercial . . . . .	150
B.3.5	Navegação auxiliada por imagens . . . . .	150
B.3.6	Ultra-som . . . . .	151
B.3.7	Sistema de Posicionamento Global - <i>GPS</i> . . . . .	151

B.3.8	Utilização de códigos e produtos químicos, faixa pintada ou colada sobre o assoalho . . . . .	152
B.4	Modelagem da Dinâmica e Cinemática de Veículos Automáticos . . . . .	153
B.4.1	Introdução . . . . .	153
B.4.2	Modelo dinâmico do atuador . . . . .	153
B.4.3	Modelagem do comportamento cinemático . . . . .	164
B.4.4	Equações discretas para simulação . . . . .	166
	<b>Bibliografia</b>	<b>168</b>

# Lista de Símbolos e Abreviaturas

## Abreviações

<i>ARX</i>	Modelo auto-regressivo com entrada exógena
<i>IFT</i>	<i>Iterative Feedback Tuning</i>
<i>IMC</i>	Controle utilizando modelo interno
<i>MIMO</i>	Sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas
<i>LQG</i>	Controle linear quadrático
<i>PID</i>	Controlador Proporcional+Integral+Derivativo
<i>PRBS</i>	Seqüência binária pseudo aleatória
<i>PWM</i>	Modulação por largura de pulso
<i>SISO</i>	Sistemas com uma entrada e uma saída
<i>SNR</i>	Relação sinal/ruído
<i>SVD</i>	Decomposição em valores singulares
<i>TITO</i>	Sistemas com duas entradas e duas saídas
<i>VA</i>	Veículo autônomo
<i>VAA</i>	Veículo autônomo aéreo
<i>VAT</i>	Veículo autônomo terrestre

## Simbologia

- $(\bullet)^d$  A variável  $(\bullet)$  é determinística
- $(\bullet)^s$  A variável  $(\bullet)$  é estocástica

$\widehat{(\bullet)}$	Valor estimado da variável $(\bullet)$
$(\bullet)^f$	Valor filtrado da variável $(\bullet)$
$(\bullet)^T$	Transposta da matriz ou vetor $(\bullet)$
$(\bullet)^\dagger$	Pseudo-inversa da matriz $(\bullet)$
$\ \bullet\ _2$	norma-2 do sinal ou função de transferência $(\bullet)$
$\ \bullet\ _\infty$	norma- $\infty$ do sinal ou função de transferência $(\bullet)$
$ \bullet $	Função módulo de $(\bullet)$
$\mathbf{M}$	Matriz $M$
$\mathbf{m}$	Vetor $\mathbf{m}$
$m$	Valor escalar $m$
$\Re$	Conjunto dos números reais
$q$	Operador deslocamento: $qu(kt) = u((t+1)T)$
$N(\mu, \sigma)$	Ruído branco gaussiano com média $\mu$ e desvio padrão $\sigma$
$H_\infty$	Conjunto de todas as funções complexas analíticas e limitadas sobre e fora o círculo unitário
$H_2$	Conjunto de todas as funções complexas, analíticas e integráveis fora e sobre o círculo unitário, cujo integrando pode ser uma função quadrática
$\mathcal{L}_\infty$	Conjunto de todas as funções complexas que são limitadas sobre o círculo unitário
$\mathcal{L}_2$	Conjunto de todas as funções que possuem integral, cujo integrando pode ser uma função quadrática
$J(P, C)$	Função objetivo de controle
$T(P, C)$	Função que mapeia todas as entradas para todas as saídas do sistema

# Lista de Figuras

1.1	Etapas necessárias à identificação de modelos paramétricos da planta. . . . .	4
1.2	Seqüência para as estimativas: Diferença básica entre os métodos de identificação clássicos e subespaço. . . . .	9
1.3	Seqüências necessárias para a sintonia iterativa de controladores em malha fechada.	12
1.4	Estruturas de controle. (a) Malha ideal: Composta pela planta e controlador, que é projetado utilizando o modelo real da planta e o critério global; (b) Malha real: Composta pela planta e controlador, que é projetado utilizando modelo estimado da planta e o critério local; (c) Malha nominal: Composta pelo modelo da planta e controlador, que é projetado utilizando modelo estimado da planta e o critério local. . . . .	12
1.5	Estrutura para alocação de pólos utilizada por Åström e Wittenmark. . . . .	14
2.1	Amostra dos sinais de excitação e medido na saída da planta. . . . .	49
2.2	Valores singulares estimados. Curva contínua: Algoritmo de Van Overschee e De Moor; Curva pontilhada: Algoritmo proposto. Figura ao centro: Detalhe das amplitudes dos dez primeiros valores singulares estimados . . . . .	50
2.3	Valores singulares estimados pelo algoritmo de Van Overschee e De Moor sob a condição de adição de ruído $N(0; 0,05)$ ao sinal medido. . . . .	51
2.4	Valores singulares estimados pelo algoritmo proposto sob a condição de adição de ruído $N(0; 0,05)$ ao sinal medido. . . . .	52
2.5	Valores singulares estimados pelo algoritmo proposto utilizando dados experimentais. . . . .	53
2.6	Valores singulares estimados pelo algoritmo de Van Overschee e De Moor utilizando dados experimentais. . . . .	53
2.7	Amostras dos sinais de entrada utilizados nas estimativas. . . . .	54
2.8	Estrutura utilizada no experimento do motor. . . . .	55
2.9	Valores singulares estimados pelo algoritmo proposto. . . . .	56
2.10	Valores singulares estimados pelo algoritmo de Van Overschee e De Moor. . . . .	56

2.11	Parâmetros estimados da matriz <b>A</b> da representação em espaço de estados. . . .	57
2.12	Parâmetros estimados da matriz <b>B</b> da representação em espaço de estados. . . .	58
2.13	Erro médio quadrático para as saídas do modelo x número de amostras. . . . .	58
2.14	Resultados de validação do modelo estimado. Saída simulada: Curva contínua; Saída medida: Curva pontilhada. . . . .	59
3.1	Experimento padrão do relé. . . . .	63
3.2	Estrutura de controle IMC. . . . .	66
3.3	Estrutura clássica de controle. . . . .	66
3.4	Estrutura de controle equivalente. . . . .	68
3.5	Nova estrutura de controle. . . . .	69
3.6	Estrutura de controle clássica equivalente. . . . .	69
3.7	Estrutura para teste da estabilidade da malha utilizando o controlador projetado. . . . .	71
3.8	Fluxograma que descreve as etapas da sintonia iterativa do controlador. . . . .	74
3.9	Sinais utilizados na identificação em malha aberta. Curva pontilhada: Entrada da planta. Curva contínua: saída da planta. . . . .	77
3.10	Resposta impulsiva via análise de correlação: Tempo morto = Número de atrasos com valor inicial nulo ou negativo. . . . .	78
3.11	Valores singulares estimados considerando uma ordem máxima esperada para o modelo igual a vigésima. . . . .	78
3.12	Teste padrão do relé para obtenção da freqüência de oscilação. . . . .	80
3.13	Curva de resposta ao degrau estimada e real (coincidentes). Detalhe na figura: (amplitude x tempo) (8, 44, 0, 63). . . . .	80
3.14	Diagrama de Bode. Curva contínua: Modelo real da planta; Curva tracejada: Modelo de oitava ordem estimado com a planta operando em malha aberta; Curva pontilhada: Primeiro modelo de quinta ordem estimado com a planta em malha fechada; Curva traço-ponto: Segundo modelo de quinta ordem estimado com a planta em malha fechada. . . . .	85
3.15	Amostra das saídas do sistema submetido ao sinal de referência tipo <i>PRBS</i> para o controlador projetado utilizando: Curva pontilhada em negrito: Primeiro modelo de segunda ordem estimado em malha fechada para $w_0 = 0,5w_{osc}$ ; Curva tracejada: Primeiro modelo de segunda ordem estimado em malha fechada para $w_0$ nominal; Curva pontilhada: segundo modelo estimado em malha fechada; Curva contínua: Modelo de terceira ordem estimado em malha fechada. . . . .	86
3.16	Sinais de referência e saída da planta operando em malha aberta. . . . .	86

3.17	Valores singulares estimados para uma definição de ordem máxima esperada para o modelo igual a vigésima. . . . .	87
3.18	Número de atrasos negativos ou nulos indicando o tempo morto. . . . .	88
3.19	Resultado do experimento padrão do relé para estimativa da frequência de oscilação. Curva contínua: Saída da planta. Curva pontilhada: Saída do relé. . . .	88
3.20	Curva de resposta ao degrau. Curva contínua: Saída da planta; Curva pontilhada: Saída do modelo de primeira ordem. Detalhe na figura: (tempo $x$ amplitude) (0, 63,8, 73). . . . .	89
3.21	Amostra dos sinais de referência (curva pontilhada) e saída (curva contínua) da planta utilizando o modelo de segunda ordem estimado em malha aberta para o projeto do controlador com $w_0 = 0,5w_{osc}$ . . . . .	93
3.22	Modelos real e estimados. Curva contínua: Modelo real da planta; Curva pontilhada: Modelo de segunda ordem estimado em malha aberta; Curva tracejada: Primeiro modelo de segunda ordem estimado em malha fechada; Curva traço-ponto: Modelo de terceira ordem estimado em malha fechada. . . . .	97
3.23	Teste de desempenho para operação na presença de perturbações e ruído de medição. (a): Perturbação adicionada à entrada da planta. (b): Perturbação adicionada à saída da planta. Curvas tracejadas: Sinais de referência, Curvas contínuas: Saídas da planta, Curvas traço-ponto: Perturbações. . . . .	98
4.1	Planta baixa do veículo protótipo. . . . .	101
4.2	Trajetória a ser seguida pelo veículo. . . . .	102
4.3	Caracterização do erro de trajetória para o veículo descrevendo movimento curvilinear. . . . .	103
4.4	Comportamento das velocidades nas rodas do veículo para diferentes tensões de alimentação dos motores. . . . .	104
4.5	Estrutura para controle multivariável de veículos autônomos. . . . .	105
4.6	Estrutura para controle de velocidade. . . . .	106
4.7	Detalhe das dimensões do sensor de trajetória e respectiva partição em quadrantes. . . . .	108
4.8	Possíveis localizações da trajetória sob o sensor e respectivas áreas (porção hachurada nas figuras) geradas pelos segmentos de retas sob o primeiro e quarto quadrantes do sensor. . . . .	109
4.9	Estrutura resultante para controle da trajetória. . . . .	111
4.10	Sinais de entrada e saída da planta durante a sintonia iterativa. Sinais de referência e saída da planta para: (a) Operação em malha aberta, (b) Primeira operação em malha fechada, (c) Segunda operação em malha fechada. . . . .	112

4.11	Valores singulares estimados para a determinação da ordem para o modelo do sistema de controle de velocidade da roda direita. . . . .	113
4.12	Resultado do experimento do relé para obter a condição de operação ciclo-limite da planta. . . . .	114
4.13	Curva pontilhada: Modelo estimado em malha aberta; Curva contínua: Primeiro modelo estimado em malha fechada; Curva tracejada: segundo modelo estimado em malha fechada. Curva traço-ponto: Terceiro modelo estimado em malha fechada (de segunda ordem). . . . .	117
4.14	Zoom na faixa de passagem para os modelos estimados no domínio da frequência. . . . .	118
4.15	Rastreio de velocidade das rodas ( $rad.s^{-1}$ ). Curvas pontilhadas: sinais de referência, Curvas contínuas: saídas medidas. (a) Roda direita, (b) Roda esquerda. . . . .	118
4.16	Erros de rastreio de velocidade: $erro = (y_{ref} - y_{sada})$ . (a) Roda direita, (b) Roda esquerda. . . . .	119
4.17	Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando controlador de trajetória proporcional. . . . .	120
4.18	Valores singulares estimados que foram utilizados na definição da ordem para o modelo a ser utilizado no projeto do controlador de trajetória. . . . .	121
4.19	Experimento do relé para obter o comportamento ciclo-limite da planta. . . . .	122
4.20	Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando o primeiro controlador de trajetória. . . . .	123
4.21	Sinal de erro de trajetória $A(t)$ utilizado na validação do segundo modelo estimado em malha fechada. Curva contínua: Saída do modelo. Curva pontilhada: Sinal de erro medido. . . . .	123
4.22	Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando o segundo controlador de trajetória. . . . .	124
4.23	Sinal de erro de trajetória $A(t)$ utilizado na validação do terceiro modelo estimado em malha fechada. Curva contínua: Saída do modelo. Curva pontilhada: Valor medido. . . . .	125
4.24	Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando o terceiro controlador de trajetória. . . . .	125
4.25	Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando o terceiro controlador e variações na velocidade de referência. . . . .	127
B.1	Modelo não considerando aproximações para as não linearidades. . . . .	154
B.2	Modelo considerando aproximações para as não linearidades. . . . .	154
B.3	Sistema de coordenadas no plano de deslocamento. . . . .	156

B.4	Dimensões e forças que atuam sobre o veículo. . . . .	158
B.5	Diferencial de velocidade → Rotação. . . . .	165

# ESCOPO DA TESE

Diversas abordagens para a identificação e controle estão disponíveis na literatura. O desempenho máximo que pode ser alcançado para a operação em malha fechada de um sistema é uma variável desconhecida. Este pode ser traduzido em termos de tempo de resposta, de acomodação ou sobresinal máximo permitido, por exemplo. No projeto de controladores, esta variável deve ser especificada pelo engenheiro de controle baseado em conhecimentos *a priori* sobre a planta cujo comportamento dinâmico deseja modificar. O conhecimento sobre a planta pode ser traduzido em termos de um modelo matemático. O modelo pode ser obtido de forma analítica ou probabilística, de acordo com a complexibilidade da planta.

O primeiro passo na área de modelagem de sistemas dinâmicos foi dado por Gauss, que desenvolveu o método dos mínimos quadrados. A maioria dos algoritmos existentes atualmente utilizam, em alguma de suas etapas, este método para obter o modelo. Como contribuição na área de identificação, é apresentado um método para a determinação da ordem e parâmetros de modelos lineares. A aplicação do método proposto não requer a interferência do modelador em nenhuma de suas etapas, a não ser na etapa de validação do modelo.

Para obter o desempenho máximo para a operação de uma planta em malha fechada, é necessário um modelo que represente idealmente o seu comportamento dinâmico. Por diversas razões, isto não é factível na prática. Portanto, a especificação *a priori* para o desempenho máximo que uma planta pode atingir em malha fechada não pode ser fornecida. Se o desempenho fosse conhecido, não se pode afirmar que este poderia ser alcançado utilizando as técnicas de projeto de controladores existentes. Existe na literatura uma abordagem que permite a busca do limite máximo para desempenho para a operação da planta em malha fechada. Esta é conhecida como *Controle Iterativo*. Nos esquemas iterativos, a busca do desempenho máximo é feita através da repetição dos passos de projeto da identificação e do controlador. A sinergia entre estas etapas é o ponto chave das abordagens iterativas. Como contribuição na área de controle, é apresentado nesta Tese um esquema iterativo que, garantindo simultaneamente a estabilidade, ajusta a malha automaticamente para o desempenho máximo.

A organização das partes desta Tese segue a seguinte estrutura. No Capítulo 1 é apresentada

uma breve história das áreas de identificação e controle, seguida de uma revisão bibliográfica com o objetivo de contextualizar as contribuições desta tese. A contribuição na área de identificação é apresentada no Capítulo 2, que é uma abordagem onde a identificação da planta pode ser efetuada de forma automática. No Capítulo 3 é proposto um esquema para a sintonia iterativa de controladores. A plataforma utilizada para experimentos nesta tese, foi um veículo automático. As estruturas de controle propostas e experimentos efetuados, que são descritos no Capítulo 4, utilizaram os métodos de identificação e controle propostos nos Capítulos 2 e 3. O Capítulo 5 conclui a Tese e apresenta sugestões para trabalhos futuros. No Apêndice A é apresentada a extensão da estrutura proposta para a representação de modelos para a estrutura em espaço de estados. O Apêndice B é composto por uma revisão sobre o estado da arte para veículos autônomos terrestres e a modelagem analítica para este tipo de veículo.

# Capítulo 1

## ESTADO DA ARTE E CONTEXTO DAS CONTRIBUIÇÕES

### 1.1 Introdução

Este Capítulo tem por objetivo contextualizar as contribuições desta Tese. Para cumprir este objetivo, apresenta-se inicialmente um visão panorâmica dos desenvolvimentos ocorridos recentemente nas áreas de controle e identificação de sistemas. Em seguida, as contribuições são localizadas nos contextos das referidas técnicas.

### 1.2 Modelagem de Sistemas

O destaque que modelagem de sistemas ocupa na engenharia e demais ciências é cada vez maior. Os modelos obtidos podem ser utilizados para fins de análise, simulação, detecção de falhas, treinamento, projeto de controladores, entre outras aplicações [52]. Modelos que são obtidos visando determinada aplicação, não são necessariamente úteis para outras. Por exemplo, quando se utiliza modelos para fins de análise do comportamento de uma determinada planta visando a melhoria do seu projeto construtivo, deve-se buscar um modelo tão preciso quanto possível. Neste caso, não são impostas restrições à complexibilidade do modelo. Entretanto, se o modelo for desenvolvido para ser utilizado no projeto de controladores, este não terá que ser tão preciso [83]. Neste caso, admite-se que a planta pode ser modelada utilizando modelos de complexibilidade reduzida.

Para obter o modelo com a precisão e características desejadas, a identificação de sistemas envolve etapas iterativas entre o projeto do experimento, análise dos dados, escolha da estrutura para o modelo, definição do critério a ser minimizado, estimação da ordem e parâmetros do



Figura 1.1: Etapas necessárias à identificação de modelos paramétricos da planta.

modelo e validação do modelo [7], [70]. As possíveis iterações entre as diferentes etapas do procedimento de identificação são descritas pelo fluxograma apresentado na Fig. 1.1. Neste fluxograma, as iterações têm por objetivo permitir a utilização de diferentes critérios, classes de modelos e sinais com diferentes características que são estimadas em diferentes experimentos na geração do modelo final. Como consequência, as chances de se obter um modelo que reproduza o comportamento entrada/saída da planta de acordo com as necessidades da aplicação pretendida para o modelo, é elevada.

A modelagem pode ser efetuada sob diferentes graus de conhecimento da planta, a saber:

- i) Modelagem *Caixa-branca*: Modelagem onde se utiliza os princípios físicos (leis físicas, químicas, balanço de massa e energia, etc) que descrevem o comportamento do sistema, e respectivas constantes físicas [43]. Este procedimento pode ser aplicado na modelagem de plantas de baixa complexibilidade (em muitos casos, o comportamento da planta é tão complexo que não pode ser traduzido por leis físicas conhecidas, o que não permite a aplicação desta abordagem);
- ii) Modelagem *Caixa-cinza*: É conhecida a estrutura da planta e alguns de seus parâmetros.

Para obter os demais parâmetros, recorre-se às técnicas estatísticas de estimação [17];

- iii) Modelagem *Caixa-preta*: Não estão disponíveis informações sobre a planta, a não ser as seqüências de dados medidos na entrada e saída da planta. [2], [69], [70].

### 1.2.1 Breve história

Uma breve história do desenvolvimento da área de identificação de sistemas é apresentada por Ljung [71]. Nesta publicação, são referenciadas as principais contribuições na área até o ano de 1985. O Autor dividiu a cronologia da área em quatro períodos distintos. No primeiro período, que se encerrou em 1960, considerou-se que os fundamentos estatísticos para os diferentes métodos de estimação estavam consolidados. A grande expansão da área ocorreu no período 1960 – 1970. Neste período surgiram vários algoritmos para identificação [107]. Os métodos foram consolidados na teoria e na prática no período 1970 – 1985 [69], [70]. O ano de 1985 é tido como sendo o marco para o surgimento de métodos que não possuíam raízes na estatística [85], [91].

O método dos mínimos quadrados, que foi desenvolvido por Gauss, foi o trabalho pioneiro na solução do problema de parametrização de modelos lineares. Até os anos sessenta, as fundamentações estatísticas do método, e versões modificadas do algoritmo original, foram propostas por estatísticos. A partir dos anos sessenta verificou-se um aumento crescente do interesse de pesquisadores das áreas técnicas pela modelagem estatística de sistemas devido, principalmente, ao surgimento de técnicas de projetos de controladores que requeriam em seu projeto modelos paramétricos da planta. Desde então, o número de artigos publicados em congressos e revistas especializadas contavam, até o ano 2000, a aproximadamente  $10^5$  publicações. Entretanto, as supostas diferenças entre os algoritmos que surgiram neste período, estavam, segundo Ljung [71], apenas nas “(...) diferentes suposições para o ruído e estrutura de modelo (...)” adotadas.

Uma das etapas iterativas para a solução do problema de identificação, é a estimação da ordem necessária para o modelo da planta. A seleção da ordem necessária para o modelo tem sido investigada na literatura seguindo diferentes abordagens [62]. Os métodos mais comumente utilizados na prática são os critérios da informação de Akaike (*AIC*) e de Bayes (*BIC*) [2]. Em fins dos anos oitenta surgiu a técnica de identificação em subespaço [91]. Na técnica de identificação em subespaço, a determinação da ordem é feita através da estimação da dimensão do subespaço gerado pela seqüência de estados, que deve ser estimada antes de se estimar a ordem e os parâmetros do modelo. Ao se definir a ordem para o modelo como sendo igual à ordem do subespaço gerado pela seqüência de estados, está se definindo um modelo para a planta cuja realização é mínima [1], [25], [80]. Na teoria da realização mínima de sistemas, o número de

estados que pode ser observado e controlado em uma planta, é igual a ordem mínima necessária para representar o comportamento entrada/saída da planta.

Para a modelagem paramétrica, foram propostas uma diversidade de estruturas para modelo. A escolha da estrutura a ser utilizada está relacionada com o grau de complexibilidade requerido para a modelagem do comportamento dinâmico da planta e ruído. Para estruturas de modelos *AR* ou *ARX*, que utilizam critérios quadráticos, é possível utilizar diretamente o método dos mínimos quadrados na estimativa dos parâmetros do modelo. Para estruturas mais complexas, do tipo *ARMAX*, *Box-Jenkins*, *erro na saída*, deve-se recorrer a métodos iterativos para a solução de problemas de estimação [40].

Modelos podem conter imperfeições. As imperfeições podem ter duas origens distintas. A primeira ocorre devido à impossibilidade dos modelos capturarem todos os comportamentos dinâmicos que a planta pode apresentar (submodelagem da planta). Esta fonte de erro provoca uma polarização nos parâmetros estimados do modelo. A outra fonte, são os erros cometidos nas estimativas dos parâmetros do modelo, que são provocados pelo ruído de medição. O efeito do ruído de medição é provocar uma variância nas estimativas dos parâmetros do modelo [44], [54]. A presença de ruído do tipo branco nas medições não compromete as estimativas se o número de dados disponíveis para a medição for elevado [81]. Entretanto, se houver realimentação de sinais medidos, este ruído poderá comprometer a qualidade do modelo estimado [59].

Para concluir o procedimento de identificação, é necessário validar o modelo obtido. A escolha do critério a ser utilizado na validação não deve ser dissociada da aplicação desejada para o modelo. Por exemplo, o método de validação para um modelo a ser utilizado em simulações não deve ter as mesmas características do utilizado para validar modelos que serão utilizados na sintonia de controladores em malha fechada [46].

### 1.2.2 Problemas da identificação em malha fechada

Os dados coletados de experimentos realizados para a determinação dos parâmetros são contaminados por ruído. A importância do ruído em identificação é tal que, se for utilizada uma estrutura incorreta para o modelo do ruído, todo o procedimento de modelagem da planta operando em malha fechada pode ser comprometido [76]. Mesmo que a ordem e estrutura para o modelo tenham sido escolhidos corretamente, se a planta operar em malha fechada, podem ocorrer três situações que podem comprometer as estimativas: i) Leis de controle simples podem comprometer a qualidade do sinal de excitação (persistência do sinal de excitação) [110]. Considere, por exemplo, o caso onde a planta [40]

$$y(t) + ay(t - 1) = bu(t - 1) + e(t), \quad (1.1)$$

que é contaminada por ruído branco  $e(t)$ , é controlada pelo controlador proporcional

$$u(t) = -ky(t).$$

Substituindo a lei de controle na equação (1.1), resulta

$$y(t) + (a + bk)y(t - 1) = e(t). \quad (1.2)$$

Esta expressão mostra que todos os modelos estimados

$$\hat{a} = a - \gamma k, \quad \hat{b} = b + \gamma,$$

satisfazem a equação (1.2), o que compromete as estimativas de  $a$  e  $b$  do modelo (1.1); ii) Outra situação que pode ocorrer, é o caso onde o sistema opera com um controlador próximo do ideal (rastreamento quase perfeito) [120]. Neste caso, o sinal de excitação não possuirá a ergodicidade necessária para que se possa identificar a planta [70]; iii) As estimativas também podem ser comprometidas se os sinais que contaminam as medições forem correlacionados com o ruído. Desde que na prática não é possível obter um modelo que capture todas as possíveis dinâmicas e características do ruído, sempre haverá problemas de polarização nos modelos estimados. Diversas propostas para contornar este problema foram sugeridas na literatura [34], [40], [59]. O ponto-chave entre as diferentes técnicas, é a síntese de sinais e/ou estruturas, que são utilizados na geração de sinais para a estimação que são descorrelacionados do ruído.

Inicialmente, o interesse pelas características da identificação de plantas operando em malha fechada deveu-se à necessidade de se estimar modelos sob esta condição de operação pelas técnicas de controle adaptativo. Mais recentemente, as abordagens iterativas de controle renovaram o interesse pela utilização de modelos gerados em malha fechada [13]. Neste trabalho, as estimativas serão efetuadas com a planta operando em malha fechada utilizando a abordagem direta de identificação [34]. Portanto, mesmo que o número de amostras tenda para infinito, os parâmetros estimados do modelo não convergirão assintoticamente para os reais. A não convergência dos parâmetros estimados para os reais é consequência da correlação entre sinais e ruído [81]. Ou seja, as estimativas obtidas para o modelo da planta operando em malha fechada serão polarizadas. Desde que os modelos estimados serão utilizados na sintonia de controladores em malha fechada, não é necessário obter estimativas não polarizadas para os parâmetros do modelo. Deve-se apenas assegurar que as estimativas estejam conectadas com a finalidade de aplicação do modelo [40], o que é garantido pela unificação dos critérios de identificação e controle no algoritmo de sintonia iterativa do controlador proposto.

### 1.3 Abordagens Propostas para Estrutura de Modelo e Cálculo dos Parâmetros

No Capítulo 2 desta tese, é apresentada uma estrutura de modelo que utiliza a estrutura de modelo *ARX* em seu desenvolvimento. Para a estimativa dos parâmetros do modelo, é utilizada uma solução mínimos quadrados baseada no conceito de projetores [4], [10]. O algoritmo proposto permite a estimação da ordem e parâmetros de modelos *MIMO*, *SISO*, e variantes, cuja estrutura em espaço de estados foi proposta por Ljung [70].

As soluções dos problemas de estimação da ordem e parâmetros são baseadas na técnica de identificação em subespaço [74], [91], [116], [117]. Pode-se dizer que a diferença básica entre os métodos de identificação clássicos e subespaço está na seqüência utilizada para estimar os parâmetros e estados da planta (Fig. 1.2) [91]. Como pode ser observado no fluxograma apresentado na Fig. 1.2, nas técnicas de identificação em subespaço é necessário estimar inicialmente a seqüência de estados antes de efetuar as demais estimativas, o que permite estimar a ordem necessária para o modelo através da determinação da dimensão do espaço de estados gerados pela seqüência de estados estimados. Esta é uma vantagem, se comparada às demais técnicas de estimação da ordem necessária para o modelo (*AIC*, *BIC*, por exemplo), que estimam a ordem para o modelo a partir da inicialização do algoritmo de estimação dos parâmetros do modelo.

Na técnica proposta, não é necessário estimar a seqüência de estados devido à utilização de uma base especial onde o sistema é identificado. A utilização desta base permite obter o conhecimento *a priori* dos estados. Como consequência, é possível obter a estimativa da ordem e parâmetros do modelo de forma similar às técnicas de identificação em subespaço. A utilização da base na qual o sistema é identificado restringe a aplicação da técnica a plantas estritamente apropriadas (grau do polinômio numerador menor ou igual ao do denominador da função de transferência). O cálculo dos parâmetros do modelo é efetuado utilizando o método dos mínimos quadrados, o que leva a um método puramente linear de estimação. Desde que a detecção da ordem para o modelo pode ser efetuada de forma automática, o método pode ser utilizado na sintonia automática de controladores, que é o objetivo final desta tese: apresentar um método de sintonia automática de controladores.

### 1.4 Sintonia de Controladores

Nesta seção é apresentada uma breve história do desenvolvimento da teoria de controle para justificar o aparecimento da técnica de controle iterativo na década de noventa. Em seguida é apresentada uma revisão bibliográfica sobre controle iterativo para contextualizar a abordagem

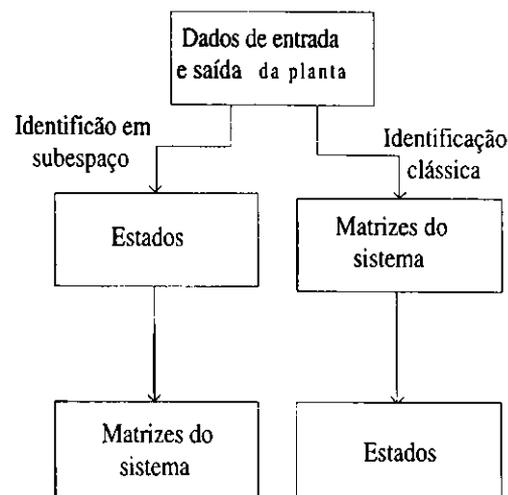


Figura 1.2: Seqüência para as estimativas: Diferença básica entre os métodos de identificação clássicos e subespaço.

proposta para a sintonia iterativa de controladores.

### 1.4.1 Breve história

A sintonia de controladores tem sido estudada desde o advento da realimentação negativa. Até a década de sessenta, só existiam técnicas de projetos de controladores que utilizavam modelos não paramétricos da planta. Estas eram baseadas em curvas de resposta ao degrau e em modelos no domínio da frequência da planta [89]. No projeto de controladores no domínio da frequência, utilizava-se especificações do tipo margem de ganho e margem de fase. Estas especificações tinham por objetivo gerar controladores que apresentavam a característica de robustez (preservar o desempenho e estabilidade) em contrapartida aos erros cometidos na modelagem da planta.

Pode-se considerar os métodos propostos por Ziegler e Nichols como sendo uma das primeiras tentativas para sistematizar o procedimento de ajuste de parâmetros de controladores do tipo *PID* [73]. Na prática, o sucesso de controladores *PID* ocorreu por este possuir as duas ações necessárias para controle; que são o zeramento do erro de regime e ação antecipativa de controle. Além disso, o operador, com o modelo mental da operação da planta em malha fechada, poderia facilmente resintonizar o controlador por este possuir apenas três parâmetros. Este tipo de controlador apresenta desempenho razoável para sistemas de baixa complexibilidade. Sistemas que possuem complexibilidade elevada, e que requerem alto desempenho, necessitam de controladores mais elaborados.

O desenvolvimento da teoria da realização mínima, e da representação de modelos em espaços de estados, por Kalman e colaboradores, em princípios dos anos sessenta, possibilitou o

desenvolvimento de técnicas de projeto de controladores com maior grau de liberdade e complexibilidade, se comparados aos controladores *PID*. As técnicas de projeto de controladores que surgiram neste período eram baseados em modelos paramétricos da planta. No projeto do controlador, utilizava-se o *princípio da certeza*, onde o engenheiro de controle considerava que o modelo que estava à sua disposição para projetar o controlador representava perfeitamente o comportamento entrada/saída da planta. As técnicas de projeto de controladores baseadas neste princípio, como, por exemplo, *LQG* [8] e adaptativa [104], [111], que surgiram neste período, dominaram o interesse de pesquisadores até os anos oitenta.

Dos anos sessenta até os anos oitenta, a questão da existência de incertezas nos modelos foi relegada a segundo plano pelos pesquisadores. Em princípios dos oitenta, ressurgiu o interesse em analisar os efeitos da modelagem imperfeita da planta sobre o desempenho e estabilidade do sistema. Como resposta às indagações, surge a teoria de controle robusto [50]. No projeto do controlador robusto, são feitas suposições sobre os limites para os erros cometidos na modelagem da planta. Além do modelo nominal da planta, a técnica de projeto robusta também requer informações (um modelo) sobre os limites para os erros cometidos na modelagem da planta.

Até o momento não existe ainda um método de identificação que forneça simultaneamente um modelo nominal e a estimativa de um modelo para os limites dos erros contidos no modelo nominal da planta. Um procedimento prático recomendado na literatura [40], é estimar um modelo *ARX* de ordem elevada a partir do qual se determina os limites das incertezas presentes em um modelo estimado de ordem reduzida. Certamente, os limites estimados para os erros de modelos sempre terão associados a eles uma confiança, que nunca será de 100%, como suposto pelas técnicas robustas de projeto do controlador. Portanto, pode-se concluir que a teoria de controle robusto possui uma lacuna semelhante à das técnicas que utilizam o princípio da certeza. Outro ponto a se considerar, é que as técnicas de projeto de controladores robustos não utilizam as informações que são disponibilizadas pela operação em malha fechada do sistema. Isto é, descarta qualquer possibilidade de reajuste dos parâmetros em malha fechada do controlador. Este pode ser considerado como um ponto-falho da técnica robusta de projeto de controladores, já que o comportamento dinâmico da planta operando em malha fechada pode diferir significativamente do que foi capturado pelo modelo utilizado no projeto do controlador. A resintonia do controlador utilizando um modelo estimado sob a nova condição de operação da planta poderia levar a uma melhoria do desempenho do sistema [15].

Controladores adaptativos são auto-ajustáveis via estimativa recursiva de modelos em malha fechada e reprojeto do controlador. Estas etapas são repetidas para cada período de amostragem. O auto-ajuste do controlador tem por objetivo contornar problemas de estabilidade e comprometimento do desempenho. Estas deteriorações do sistema ocorrem devido às variações na

dinâmica do ambiente ou processo. A capacidade de auto-ajuste do controlador é obtida graças à utilização dos dados coletados na operação em malha fechada da planta. Estes dados são utilizados para estimar modelos, que por sua vez são utilizados para reprojeter o controlador em tempo real. Entretanto, controladores adaptativos podem apresentar baixo desempenho durante um longo período, o que é inaceitável em alguns casos [47].

### 1.4.2 Projeto iterativo do controlador

Observando as deficiências inerentes às técnicas adaptativas e robustas, pode-se dizer que uma técnica que incorporasse em seu projeto as vantagens destas e suprisse, de alguma forma e grau, as suas deficiências, poderia levar a projetos de controladores de alto desempenho.

A abordagem conhecida como *Controle iterativo* [13], [14], [34], [44], [45], [47], [57], que surgiu nos anos noventa, apresenta as características mencionadas no parágrafo anterior. As etapas geralmente encontradas em projetos iterativos de controladores são descritas pelo diagrama de blocos apresentado na Fig. 1.3. Como pode ser observado, controle iterativo nada mais é do que uma metodologia onde se verificam sucessivas etapas de modelagem e reprojeto do controlador utilizando o último modelo estimado. Do diagrama, pode-se concluir que é possível obter uma melhoria de desempenho e inserção cautelosa do controlador na malha em cada etapa iterativa. A justificativa comumente apresentada para a aplicação da técnica, é que o máximo desempenho que um sistema em malha fechada pode alcançar nunca é conhecido *a priori*. Portanto, este deve ser procurado através da estimativa de um modelo que seja de melhor qualidade do ponto de vista de sua aplicação no projeto de controladores.

No projeto do controlador, a técnica iterativa considera a existência de três cenários, que são descritos pelos diagramas de blocos apresentados nas Figs. 1.4 (a), (b) e (c). Nestes diagramas,  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ ,  $u(t)$ ,  $u^d(t)$ ,  $u^o(t)$ ,  $y(t)$  e  $y^o(t)$  são os sinais de referência, as entradas real, desejada e ideal e saídas real, ideal e desejada da planta, respectivamente. O diagrama de blocos da Fig. 1.4 (a) apresenta o caso ideal onde o controlador  $C_G$  é projetado considerando que o modelo da planta é conhecido perfeitamente ( $\hat{G}(q) = G(q)$ ). Esta malha é denominada *sistema ideal*. O diagrama de blocos da Fig. 1.4 (c) é formado pelo modelo da planta,  $\hat{G}$ , e pelo controlador  $C_{\hat{G}}$ , que foi projetado utilizando o modelo da planta e uma determinada técnica de projeto de controladores. Esta malha é denominada *sistema nominal*. O diagrama de blocos da Fig. 1.4 (b) é formado pela planta e pelo controlador  $C_{\hat{G}}$ , que foi projetado utilizando no ambiente descrito pelo diagrama de blocos da Fig. 1.4 (c). Esta malha é denominada *sistema real*. O objetivo da abordagem iterativa, é obter uma aproximação do comportamento do sistema descrito pelo diagrama de blocos da Fig. 1.4 (b), do comportamento exibido pelo sistema descrito pelo diagrama de blocos da Fig. 1.4 (a) através da repetição dos passos de identificação em malha

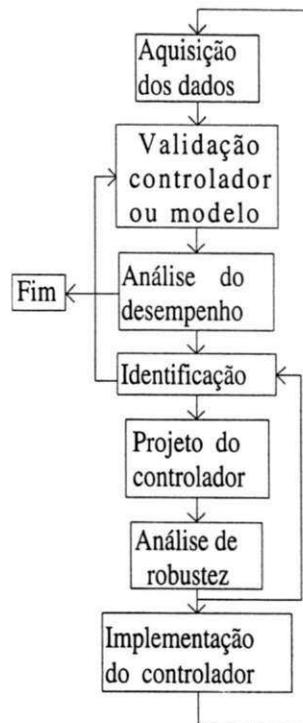


Figura 1.3: Seqüências necessárias para a sintonia iterativa de controladores em malha fechada.

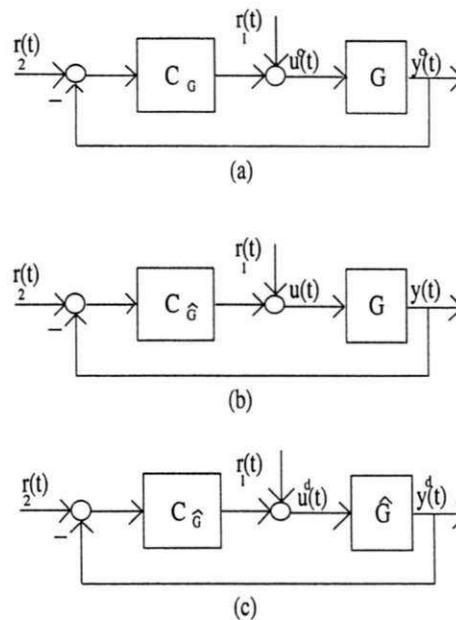


Figura 1.4: Estruturas de controle. (a) Malha ideal: Composta pela planta e controlador, que é projetado utilizando o modelo real da planta e o critério global; (b) Malha real: Composta pela planta e controlador, que é projetado utilizando modelo estimado da planta e o critério local; (c) Malha nominal: Composta pelo modelo da planta e controlador, que é projetado utilizando modelo estimado da planta e o critério local.

fechada e reprojeto do controlador baseado no novo modelo estimado. Para obter este objetivo, é necessário que o critério de projeto do controlador seja relevante para o da identificação, e *vice-versa* [105].

Tendo definido a técnica a ser utilizada no projeto do controlador, o próximo passo é parametrizar o controlador. A parametrização do controlador pode ser obtida através da minimização de uma determinada função de custo. Considere, por exemplo, o projeto do controlador  $C_G$ , que é utilizado para controlar a planta no sistema descrito pelo diagrama de blocos da Fig. 1.4 (a), como resultado da minimização da função de custo

$$C_G = \min_{\tilde{C}} \left\| T(G, \tilde{C}) \right\|, \quad (1.3)$$

que pode ser calculada em  $H_2$  ou  $H_\infty$ , por exemplo. Neste caso, a especificação de desempenho está contida na especificação da função  $T(G, \tilde{C})$ , que pode ser a função de transferência desejada para o sistema, por exemplo.

Na prática, o modelo exato da planta não é conhecido. Portanto, não é possível obter a solução do problema descrito pela equação (1.3) diretamente. O máximo que se pode obter é um modelo aproximado da planta,  $\hat{G}$ , e respectivo intervalo de confiança para o modelo estimado. Neste caso, o controlador é projetado sob as condições descritas pelo diagrama de blocos da Fig. 1.4 (c),

$$C_{\hat{G}} = \min_{\tilde{C}} \left\| T(\hat{G}, \tilde{C}) \right\|, \quad (1.4)$$

e utilizado para controlar a planta real de acordo com o diagrama de blocos da Fig. 1.4 (b).

Desde que os problemas para obter  $\hat{G}$  e a solução para (1.4) não podem ser obtidos simultaneamente, estes deverão ser resolvidos em diferentes etapas, que é uma solução sub-ótima para o problema descrito pela equação (1.3), que é um problema de controle do tipo dual [120].

Utilizando a técnica iterativa baseada em modelos, é possível projetar controladores utilizando alocação de pólos [108], critério  $H_\infty$  [33], [98], estrutura *IMC*, [30], [31], [65] e controle *LQ*. Também surgiram técnicas que não são baseadas em modelos [56], [60]. Nestes casos, a parametrização do controlador é feita utilizando diretamente os dados medidos na entrada e saída da planta. A seguir, são apresentadas algumas abordagens para controle iterativo para que se possa contextualizar a abordagem para controle iterativa proposta diante das técnicas correlatas existentes. Para iniciar a discussão, é apresentado o conceito de casamento de critérios de identificação e controle, que é utilizado pelas técnicas iterativas apresentadas em seguida.

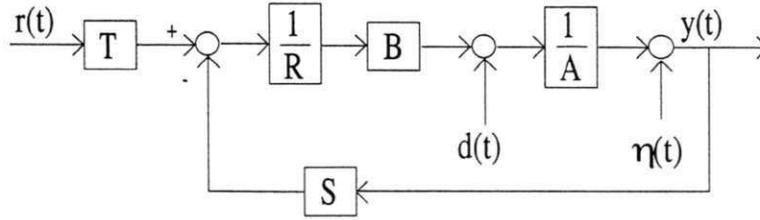


Figura 1.5: Estrutura para alocação de pólos utilizada por Åström e Wittenmark.

## 1.5 Casando os Critérios de Controle e Identificação e Controle Iterativo

O problema da necessidade de se efetuar a identificação e projeto do controlador de forma não separada já tinha sido investigado por Åstrom e Wittenmark [109]. Em 1994, Åström e Nilsson [108] desenvolveram um esquema iterativo onde o controlador é projetado via alocação de pólos utilizando a estrutura apresentada na Fig. 1.5, onde  $d(t)$  e  $\eta(t)$  podem ser interpretadas como perturbações tipo carga e ruído de medição, por exemplo.

Considerando que o projeto do controlador é feito para rastreamento do sinal de entrada sob ambiente determinístico e livre de perturbações, pode-se escrever para o modelo da planta

$$Ay(t) = B(q)u(t),$$

que possui função de transferência  $G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$ . No projeto, foi utilizada a lei de controle

$$\begin{aligned} R(q)u(t) &= T(q)r(t) - S(q)y(t) \\ \therefore u(t) &= \frac{T(q)}{R(q) + G(q)S(q)}r(t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Como consequência, obteve-se para a malha fechada

$$y(t) = \frac{G(q)T(q)}{R(q) + G(q)S(q)}r(t), \quad (1.6)$$

que possui polinômio característico  $A_c(q) = A(q)R(q) + B(q)S(q)$ .

Define-se como medida para o desempenho do sistema

$$e_{cp}(t) = y(t) - y^d(t),$$

onde

$$y^d(t) = \frac{\widehat{G}(q)T(q)}{R(q) + \widehat{G}(q)S(q)}r(t),$$

e  $\widehat{G}(q) = \frac{\widehat{B}(q)}{\widehat{A}(q)}$  é o modelo da planta.

Utilizando o princípio da certeza, o modelo estimado, e a estrutura de modelo erro na saída, para a especificação de alocação de pólos  $A_c(q)$ , pode-se obter  $R(q)$  e  $S(q)$  via solução da equação diofantina

$$\begin{aligned}\widehat{A}_c(q) &= \widehat{A}(q)R(q) + \widehat{B}(q)S(q), \\ &= A_o(q)A_m(q),\end{aligned}$$

onde  $A_o(q)$  é um "polinômio observador" e  $A_m(q)$  é a alocação desejada.

Utilizando estes resultados, obtém-se para o desempenho em termos do erro de rastreamento (sempre que não causar problemas de interpretação, a variável  $q$  será omitida para simplificar a notação)

$$e_{cp}(t) = \frac{TR}{(R + GS)(R + \widehat{G}S)}(G - \widehat{G})r(t). \quad (1.7)$$

Utilizando (1.6) - (1.5) e o fato de que  $R + \widehat{G}S = \frac{\widehat{A}_c}{A}$ , pode-se escrever para (1.7)

$$e_{cp}(t) = \frac{R}{\widehat{A}_c}(\widehat{A}y(t) - \widehat{B}u(t)). \quad (1.8)$$

Se for utilizado o critério dos mínimos quadrados na identificação, e os sinais filtrados por  $F(q)$  nas estimativas, resulta para o critério a ser minimizado na etapa de identificação

$$e_i(t) = F[\widehat{A}(q)y(t) - \widehat{B}(q)u(t)]. \quad (1.9)$$

Portanto, para obter o casamento entre os critérios de identificação e controle (a igualdade entre as equações (1.8) e (1.9)), deve-se utilizar o filtro

$$F(q) = \frac{R(q)}{\widehat{A}_c(q)},$$

nos dados utilizados na identificação.

Para  $\widehat{G}$  possuindo  $2n$  parâmetros, os autores mostraram que o procedimento iterativo proposto pode ser considerado como um mapeamento  $V : \mathcal{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{R}^{2n}$  no espaço paramétrico  $\theta^{i+1} = \gamma(\theta^i)$ . Em alguns casos, esta interpretação permite investigar propriedades de convergência, desempenho, complexibilidade necessária para o modelo/controlador, etc., via investigação do mapeamento  $\gamma$  [108].

Neste contexto, as seguintes observações são relevantes:

- Na identificação, utilizando métodos clássicos, o problema está em obter a função de sensibilidade para se definir o filtro de dados ótimo, o que é aqui solucionado via casamento dos critérios;

- Se o critério de controle for definido adequadamente, pode-se obter um bom controle mesmo para especificações de desempenho não adequadas (excessivamente otimistas);
- A especificação de desempenho de forma inadequada e a restrição na complexibilidade do modelo podem não permitir a convergência do procedimento ou gerar controladores instáveis [108].

Como pode ser observado do procedimento iterativo, o casamento dos critérios é perdido ao se projetar o novo controlador ou identificar o novo modelo, por se utilizar o modelo ou controlador projetado no passo anterior. Nos casos onde o cálculo dos parâmetros do controlador não podem ser interpretados utilizando o conceito de mapeamento proposto pelos autores, se houver convergência do procedimento iterativo, não é possível garantir que o desempenho máximo possível foi atingido para os critério de controle e identificação utilizados.

### 1.5.1 Abordagem de Schrama

Schrama [98] e Schrama e Bosgra [99] apresentaram uma abordagem iterativa onde os projetos da identificação e do controlador foram formulados em  $H_\infty$  e resolvidos em  $H_2$ . Como ponto de partida para análise e projeto, foi considerado que a função de transferência que mapeia as entradas  $[r_1(t) \ r_2(t)]^T$  para as saídas  $[y(t) \ u(t)]^T$  na estrutura descrita pelo diagrama de blocos da Fig. 1.4 (a)

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(I + C_G G)^{-1} C_G & G(I + C_G G)^{-1} \\ (I + C_G G)^{-1} & (I + C_G G)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2(t) \\ r_1(t) \end{bmatrix},$$

$$T(G, C_G) = \begin{bmatrix} G(I + C_G G)^{-1} C_G & G(I + C_G G)^{-1} \\ (I + C_G G)^{-1} & (I + C_G G)^{-1} \end{bmatrix},$$

onde  $C_G$  foi obtido como a solução do seguinte problema de minimização

$$C_G = \min_{\tilde{C}} \|T(G, C_G)\|_\infty.$$

Em problemas práticos, a minimização de  $T(G, C_G)$  em um passo não é possível por envolver  $G$ , que é desconhecida. Para resolver o problema, foi proposta uma solução aproximada para o problema, que é descrita em (1.10), utilizando a abordagem iterativa.

$$\|T(G, C)\|_\infty \leq \|T(\hat{G}, C_{\hat{G}})\|_\infty + \|T(G, C_{\hat{G}}) - T(\hat{G}, C_{\hat{G}})\|_\infty, \quad (1.10)$$

No projeto iterativo, considerou-se que a aproximação da malha real da ideal (aproximar o termo à esquerda de (1.10) ao primeiro termo à direita de (1.10)), poderia ser resolvido na etapa

de projeto do controlador. A condição para obter esta aproximação estaria condicionada à possibilidade de se obter em cada etapa do procedimento iterativo, modelos que aproximassem a malha nominal da real via minimização do segundo termo à direita da desigualdade expressa em (1.10) (A desigualdade presente em (1.10) pode ser vista como uma caracterização das distâncias entre os sistemas ideal e real, e real e nominal, respectivamente). Se forem obtidas sucessivas minimizações dos critérios em cada etapa, o comportamento das malhas real e nominal convergiriam para a ideal em cada etapa iterativa.

Na equação (1.10), o primeiro e segundo termos à direita da desigualdade correspondem ao desempenho nominal e degradação do desempenho nominal, respectivamente. Ou seja, a partir de um critério global, que não possui solução (lado esquerdo da desigualdade), obteve-se dois critérios locais (termos do lado direito da desigualdade) que deverão levar a uma solução aproximada do global.

Foi sugerida uma solução iterativa para os problemas de minimização descritos pelos primeiro e segundo termos do lado direito da desigualdade. O objetivo da aplicação do procedimento iterativo é possibilitar, indiretamente, a minimização do termo à esquerda da desigualdade, que leva ao desempenho máximo para o sistema, através da minimização dos termos à direita da desigualdade.

Considere que no  $i$ -ésimo passo do procedimento iterativo o sistema opera em malha fechada sob a ação do controlador  $C_{\hat{G}}^{i-1}$ . O segundo termo da desigualdade pode ser minimizado pela etapa de identificação, que irá atualizar o modelo  $\hat{G}_i$  com a malha operando sob a ação do controlador  $C_{\hat{G}}^{i-1}$ . Ou seja,

$$\hat{G}_i = \arg \min_{\tilde{G} \in \mathcal{G}(\Theta)} \left\| T(G, C_{\hat{G}}^{i-1}) - T(\tilde{G}, C_{\hat{G}}^{i-1}) \right\|_{\infty}, \quad (1.11)$$

onde  $\mathcal{G}(\Theta)$  é o conjunto de todos os modelos que são estabilizados pelo controlador .

Estimado  $\hat{G}_i$ , projeta-se o controlador  $C_{\hat{G}}^i$  para minimizar o primeiro termo à direita da desigualdade presente na equação (1.10). Isto é,

$$C_{\hat{G}}^i = \arg \min_{\tilde{C} \in \mathcal{C}(\hat{G}_i)} \left\| T(\hat{G}_i, \tilde{C}) \right\|_{\infty} \quad (1.12)$$

onde  $\mathcal{C}(\hat{G}_i)$  é o conjunto de todos os controladores que estabilizam  $\hat{G}_i$ .

Para a solução proposta pelos autores, deve-se observar que:

1. A identificação é efetuada utilizando dados coletados com o sistema operando em malha fechada. Portanto, a especificação da abordagem a ser utilizada para identificação é crítica, por haver a possibilidade de ocorrência de erros nas estimativas devido às características de correlacionamento entre ruído e sinais e submodelagem da planta [34];

2. Para inserir o controlador na malha, o requerimento mínimo é que este leve o sistema à condição de estabilidade. Schrama e Bosgra [99] propuseram um critério para testar esta condição. A utilização do critério requer um modelo de ordem elevada para a planta;
3. Não existia na época uma solução para o problema de identificação (1.11) (Uma solução, para um número de pontos reduzido, foi proposta por de Callafon em sua tese de doutorado [32]);
4. A minimização de (1.10) depende de (1.12) - cujo cálculo depende apenas de  $\widehat{G}_i$  - o que pode comprometer a convergência do procedimento iterativo - já que a distância entre  $T(G, C_G^i)$  e  $T(\widehat{G}_i, C_G^i)$  pode ser elevada;
5. A utilização de (1.11) garante que a etapa de identificação irá fornecer um modelo que aproxima a malha nominal da real. O modelo resultante pode não ser o melhor para representar o comportamento entrada/saída da planta, mas é o mais adequado para o projeto do controlador. O ponto-chave do método é justamente este: Buscar (ajustar) um modelo que aproxime a malha nominal da real, sob às restrições impostas a complexibilidade do modelo e do controlador.

Para a solução do problema de identificação, foi proposta uma técnica indireta [34]. Na técnica indireta proposta, é necessário estimar um modelo de ordem elevada para a função de transferência que mapeia  $r_2(t)$  para  $u(t)$ . Utilizando o modelo estimado, é sintetizado o sinal  $\widehat{u}(t)$  que permite estimar o modelo da planta utilizando os sinais  $\{\widehat{u}(t), y(t)\}$ . Neste caso, o ruído presente em  $y(t)$  é descorrelacionado do sinal  $\widehat{u}(t)$ , o que permite obter modelos cujas estimativas possuem as mesmas características da modelagem em malha aberta.

Para a análise da robustez, utilizou-se um critério que requer o conhecimento de  $G$ . Na análise de estabilidade proposta,  $G$  é substituído por um modelo de ordem elevada.

Devido à inexistência de uma técnica de identificação que resolvesse o problema de aproximação em  $H_\infty$  definido em (1.12), foi proposta uma aproximação em  $H_2$ . A aproximação considerada é validada utilizando os resultados apresentados por Caines e Baykal-Gürsoy, cujo artigo é referenciado pelos autores. O quarto e quinto itens das observações são interrelacionados. Para obter a melhoria do desempenho através do cálculo de um novo controlador, não se considera o critério (1.12), o que pode levar a um distanciamento entre  $\|T(G, C_G^i)\|$  e  $\|T(\widehat{G}_i, C_G^i)\|$ , e, conseqüentemente à não convergência do procedimento iterativo. Para manter uma semelhança para as degradações de desempenho entre as etapas anterior e atual, foi proposto um ajuste "cauteloso" para o desempenho do sistema, que atua como uma ponderação escalar tanto na etapa de projeto do controlador quanto na de identificação.

A abordagem proposta não apresenta uma prova para a convergência do procedimento iterativo. Outro ponto a se questionar, é a prova analítica para robustez do controlador, que utiliza um modelo da planta. Entretanto, o algoritmo proposto permite controlar o ajuste da especificação para desempenho utilizando uma variável escalar, que define aproximadamente a largura de faixa do sistema real. Esta variável não permite o distanciamento entre as malhas reais projetadas em cada etapa iterativa, o que permite obter um controle sobre o desempenho e estabilidade do sistema (característica de robustez).

### 1.5.2 Abordagem de Zang

Motivados pelos resultados obtidos por Bitmead et alli [16], Zang et alli [122] propuseram uma abordagem iterativa para solucionar um problema de controle *LQG*, que contempla tanto a solução aproximada do problema de minimização de um critério de desempenho global, quanto a sintonia do procedimento de identificação para os objetivos de controle. Sejam estes definidos para desempenho ou estabilidade robusta. Outra característica interessante da abordagem proposta - que pode ser considerado o ponto-chave do método - foi propor uma modificação no critério *LQG* clássico de modo a permitir a incorporação da informação quanto ao erro cometido na etapa de modelagem da planta. A incorporação da informação do erro de modelagem ao critério, permite a recuperação aproximada do critério de desempenho global a partir de um critério *LQG* local. Não menos interessante foi a forma utilizada pelos autores para incorporar esta informação ao critério, que é inteiramente baseada nos sinais disponibilizados pelas medições e simulação. Como resultado, foi obtido um método de projeto de controladores que envolve tanto a filosofia de controle robusto quanto à de controle adaptativo: O projeto do controlador considera os erros de modelagem (controle robusto) e a utilização dos dados disponibilizados pela operação em malha fechada do sistema na sintonia dos parâmetros do controlador (controle adaptativo com baixa taxa de atualização dos parâmetros).

Esta abordagem foi investigada por Partanen e Bitmead [92], [93], que propuseram modificações para "alinhar" o procedimento e, simultaneamente, controlar a taxa de atualização do controlador. O alinhamento foi obtido através da mudança na ordem em que os cálculos eram efetuados no procedimento iterativo original. A taxa de atualização do controlador - que é um procedimento cauteloso de ajuste do controlador - é definida através de variações na ponderação utilizada no projeto do controlador.

O ponto de partida do projeto iterativo, é considerar que o comportamento da planta é

descrito pela equação

$$\begin{aligned} y^o(t) &= G(q)u^o(t) + v(t), \\ v(t) &= H(q)e(t), \end{aligned} \quad (1.13)$$

e controlada pela lei de controle

$$u^o(t) = C_G(q)[r_2(t) - y(t)], \quad (1.14)$$

com  $C_G$  sendo obtido através da minimização do critério de controle

$$J_g = \min_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y^o(t)^2 + \lambda^2 u^o(t)^2]. \quad (1.15)$$

Considerando que o modelo exato da planta não está disponível, utiliza-se o princípio da certeza da equivalência para projetar o controlador. Utilizando o modelo da planta e a especificação de desempenho em termos da seqüência desejada para a saída da planta, pode-se escrever

$$y^d(t) = \widehat{G}(q)u^d(t) + v'(t), \quad (1.16)$$

onde  $v'(t)$  é estimado utilizando o modelo  $\widehat{H}(q)$  e o ruído  $e'(t)$ ,  $v'(t) = \widehat{H}(q)e'(t)$ .

Para a lei de controle do sistema nominal, obtém-se

$$u^d(t) = C_{\widehat{G}}(q)[r_2(t) - y^d(t)]. \quad (1.17)$$

No projeto, considera-se que  $r_1(t) = r_2(t) = 0$ . Portanto, o controlador  $C_{\widehat{G}}$  é projetado para rejeitar perturbações.

A modificação proposta para o critério  $LQ$  incorporar a informação do erro de modelagem, é a de ponderar o mesmo em freqüência utilizando os filtros  $F_1(q)$  e  $F_2(q)$ . Considere o critério de projeto nominal

$$J_N = \min_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [F_1(q)y^d(t))^2 + \lambda^2 (F_2(q)u^d(t))^2], \quad (1.18)$$

onde o sobrescrito  $N$  indica que os sinais são provenientes do sistema nominal definido em (1.16) e (1.17). As ponderações têm por objetivo casar  $J_N$  a  $J_g$ , de modo a aproximar (1.18) a (1.15) (aproximar  $J_N$  a  $J_g$ , e, conseqüentemente, a malha real da ideal). Por inspeção destas equações, resulta a definição dos filtros  $F_1$  e  $F_2$ :

$$F_1 = \left(\frac{\Phi_y}{\Phi_{y^d}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad F_2 = \left(\frac{\Phi_u}{\Phi_{u^d}}\right)^2, \quad (1.19)$$

onde  $\Phi_y$ ,  $\Phi_{y^d}$ ,  $\Phi_u$  e  $\Phi_{u^d}$  são os espectros dos sinais das saídas medidas e desejadas e dos sinais de controle medido e desejado. Como conseqüência da ponderação, se  $F_1$  e  $F_2$  forem perfeitos,

os espectros dos sinais presentes em (1.15) e (1.18) serão iguais. Se  $r(t)$  for nulo, resulta que  $F_1 = F_2 = F$ , que é o caso a ser considerado na etapa de projeto do controlador (na prática,  $F$  é definido como sendo a razão entre modelos *AR* para as seqüências  $\{y\}$ ,  $\{y^c\}$ ,  $\{u\}$  e  $\{u^c\}$ ).

O descasamento entre a malha nominal e a real, em freqüência, poderia ser verificada utilizando a amplitude de  $F$ ,  $|F(jw)|$ . De (1.19) pode-se concluir que se o sistema nominal representasse perfeitamente o sistema real, o filtro  $F$  seria do tipo “passa-tudo”. Em todas as freqüências onde a amplitude de  $F$  difere da unidade, ocorre descasamento. Se a amplitude for maior que a unidade, resulta que o desempenho obtido é inferior ao projetado. Para compensar tal degradação de desempenho, estas freqüências devem ser enfatizadas via  $F$  em (1.18). Caso a amplitude seja inferior a unidade, o desempenho obtido é superior ao projetado para estas freqüências. Logo, para se permitir a compensação do caso onde  $|F| > 1$ , mantendo-se (1.18), deve haver uma diminuição da importância destas freqüências; o que resultará em um desempenho inferior, em relação ao obtido, para estas freqüências quando o controlador que está sendo projetado atuar na malha. A utilização da ponderação em freqüência corresponde, portanto, a uma equalização dos sinais utilizados pelo critério de controle, antes dos mesmos serem utilizados no projeto do controlador. Desde que a finalidade da ponderação é aproximar (1.15) a (1.18), pode-se concluir que seu único objetivo é a busca, através do procedimento iterativo, do desempenho robusto.

### 1.5.3 Abordagem do Surfista

Observando que a variável desempenho máximo para um sistema não é conhecida de antemão pelo engenheiro de controle, Lee et alli [64], [65], [66], propuseram a abordagem do surfista. Nesta abordagem, o desempenho máximo é procurado utilizando um procedimento iterativo. Em cada etapa do procedimento, o conhecimento das características dinâmicas da planta operando em malha fechada deve ser melhorado via identificação de modelos de melhor qualidade, se comparados aos obtidos nas etapas anteriores, que podem ter o mesmo (ou maior) grau de complexibilidade. Utilizando o modelo, projeta-se uma seqüência de controladores com exigências progressivas para o desempenho (abertura cautelosa da largura de faixa do sistema em malha fechada através de um filtro  $F$ ). Para cada novo controlador inserido na malha, verifica-se o desempenho obtido através da comparação das formas de onda dos sinais de saída da planta atual e a fornecida pelo controlador anterior. Se as restrições impostas ao sobresinal máximo, oscilações, tempo de acomodação, etc, forem respeitadas, pode-se aumentar o desempenho via abertura da largura de faixa do sistema. A validade do modelo para projeto de novos controladores permanece até o ponto onde a influência das incertezas do modelo (erros de modelagem) acima da largura de faixa do sistema comprometem o desempenho. Quando o desempenho se tornar

inaceitável, conclui-se que o desempenho máximo que poderia ser atingido utilizando o modelo atual no projeto de controladores foi alcançado. Se for necessário aumentar o desempenho, um novo modelo, de melhor qualidade, deve ser estimado. Inicia-se então uma nova seqüência de projetos de controladores. Estas etapas são repetidas até não ser mais possível melhorar o desempenho utilizando as restrições de complexibilidade impostas ao modelo e controlador, ou pelo atuador e planta.

Para resolver o problema de identificação em malha fechada, os autores utilizaram o método de Hansen [34]. A utilização do método de Hansen transforma o problema da identificação em malha fechada em um problema de identificação em malha aberta. A solução do problema de identificação resultante é dual ao de controle proposto por Youla e Kucera: A busca de um modelo, no conjunto de todos os modelos que sejam estabilizados pelo controlador que atualmente atua na planta [34].

No projeto do controlador, foi utilizado a estrutura e critério de controle *IMC* [83], que pode ser aplicado a plantas assintoticamente estáveis. O critério global  $H_\infty$  a ser minimizado pelo procedimento iterativo, é especificado utilizando a diferença entre a função de sensibilidade complementar real e à desejada (nominal). Isto é,

$$\|T(G, C_{\hat{G}}) - T(\hat{G}, C_{\hat{G}})\|_\infty, \quad (1.20)$$

A utilização da abordagem *IMC* implica que

$$T(\hat{G}, C_{\hat{G}}) = F(q) = \left(\frac{1 + \lambda}{q + \lambda}\right)^n,$$

onde  $F$  é o filtro definido por Morari e Zafiriou [83]. Portanto, o projetista tem acesso direto ao controle do desempenho via  $\lambda$ . O escalar  $\lambda$  permite o ajuste cauteloso do controlador através do ajuste progressivo da largura de faixa do sistema. Como resultado, o controlador  $C_{\hat{G}}^i$  é obtido através da solução do seguinte problema de minimização

$$C_{\hat{G}}^i = \min_{\tilde{C}} \|T(\hat{G}_i, \tilde{C}) - F(q)\|_\infty.$$

Quando for alcançado o limite de desempenho utilizando o modelo  $\hat{G}_{i-1}$  no projeto do controlador, via aumento progressivo de  $\lambda$ , deve-se obter um novo modelo  $\hat{G}_i$ , que seja de melhor qualidade e relevante para o projeto do controlador, utilizando

$$\hat{G}_{i+1} = \min_{\tilde{G}} \|T(G, C_{\tilde{G}}^i) - T(\tilde{G}, C_{\tilde{G}}^i)\|_\infty. \quad (1.21)$$

Desde que  $G$  é desconhecido, os autores sugeriram a utilização de um modelo de ordem elevada em vez de  $G$  na equação (1.21).

Estimativas seqüenciais de modelos utilizando o método de Hansen levam a modelos cujas ordens são progressivamente crescentes. Portanto, o método iterativo deve contemplar uma etapa de redução de modelos. A solução proposta pelos autores para a redução de modelos, é dual com relação à apresentada por Liu e Anderson [66] para a redução de ordem para controladores. A etapa de redução de ordem para o modelo não é mais necessária. De Bruyne e colaboradores [21] propuseram uma modificação ao método de Hansen que permite obter o controle sobre a ordem do modelo estimado.

Utilizando a estrutura *IMC*, é possível garantir a estabilidade da malha nominal, já que o sistema resultante é estável se o controlador e o modelo forem estáveis. A estabilidade robusta depende do cumprimento da seguinte condição [83]

$$\left| (G - \hat{G}) \frac{C}{1 + CG} \right| < 1, \quad (1.22)$$

que depende da qualidade do modelo estimado. A condição expressa em (1.22) é necessária para garantir estabilidade robusta, mas implica em um projeto conservador, que pode levar a baixos desempenhos.

O procedimento adotado para “garantir” a estabilidade da malha durante o procedimento iterativo de busca do desempenho máximo, é aumentar de forma incremental (cautelosa) a largura de faixa do sistema via escolha de  $\lambda_i = \lambda_{i-1} + \varepsilon$ . Esta atualização de  $\lambda$  indica que, quanto menor  $\varepsilon$ , mais cauteloso é o procedimento iterativo. Ao mesmo tempo, verifica-se visualmente o comportamento para o desempenho em cada etapa iterativa. Quando o desempenho for comprometido pelo novo controlador, significa que do erro de modelagem ( $G - \hat{G}$ ) passa a ser significativo, e um modelo de melhor qualidade deve ser estimado caso o desempenho obtido não seja “suficiente”. Portanto, a abordagem proposta não oferece nenhuma prova de convergência para as iterações.

#### 1.5.4 Sintonia Iterativa *IFT*

Entre as técnicas iterativas encontradas na literatura, destaca-se a abordagem *IFT* proposta por Hjalmarsson et alli [37], [56]. A característica interessante desta técnica, é a de não utilizar modelos da planta no projeto do controlador. No procedimento, o ajuste dos parâmetros do controlador é efetuado utilizando a estimativa não polarizada do gradiente do critério de controle. O gradiente é estimado utilizando os dados medidos na entrada e saída da planta. Para obter a estimativa do gradiente, é necessário efetuar três experimentos com o sistema operando em malha fechada. Se não for possível obter o gradiente, o mesmo poderia ser gerado utilizando dados gerados a partir de simulações utilizando modelos da planta [22].

Utilizando três diferentes sinais de excitação propostos pelos autores, foi possível estimar as derivadas de primeira ordem do critério de controle utilizado, a menos de perturbações estocásticas em determinados termos. Estas derivadas foram utilizadas para calcular a direção para o ajuste dos parâmetros do controlador através de uma estimativa aproximada da Hessiana para o critério de controle a ser minimizado. Para obter uma nova direção em cada iteração, é necessário repetir os experimentos.

A aplicação da técnica requer que o sistema já esteja operando em malha fechada sob a ação de um controlador. Além disso, ao efetuar cada experimento, as condições iniciais do sistema devem ser nulas. Entretanto, a influência das condições iniciais pode ser desprezada se for utilizado um número elevado de amostras.

Em determinada aplicação do método, mesmo que a função de custo tenha comportamento monotonicamente decrescente, pode ocorrer que na  $i$ -ésima iteração o controlador obtido não estabilize a malha. Ou seja, o decréscimo da função custo não garante que o controlador obtido estabiliza a malha. Um mecanismo que garante a estabilidade robusta para o procedimento foi proposto por De Bruyne e Kammer [23] utilizando modelo de ordem elevada para a função de transferência e o conhecimento do controlador. Como resultado residual do método, pode-se definir o valor máximo para a taxa de atualização dos parâmetros do controlador.

O método tem sido aplicado com sucesso na prática para uma diversidade de plantas. Em especial, na indústria de processos, para sistemas não lineares, sistemas lineares invariantes no tempo do tipo *SISO* e *MIMO*, e robótica [36], [37].

O método foi estendido para aplicação no domínio da frequência, utilizando análise espectral, por Kammer et alli [60], com algumas vantagens sobre a sua aplicação no domínio do tempo. A principal, é a possibilidade de cálculo da Hessiana resultante da minimização da função de custo utilizada com relação ao vetor de parâmetros do controlador. Além disso, foi possível obter o cálculo despolarizado da segunda derivada no domínio da frequência, o que permite verificar a existência de mínimos.

Hjalmasson et alli [37] propuseram utilizar uma aproximação para a Hessiana, o que implica na perda da capacidade de se detectar mínimos locais para o critério utilizado. O teste de estabilidade, semelhante ao utilizado por De Bruyne e Kammer [23], foi aplicado com a vantagem de não utilizar estimativas, mas apenas sinais medidos e o conhecimento dos controladores atual e passado nos cálculos, o que não envolve aproximações. A escolha da taxa de atualização do controlador foi feita de forma similar à definida por De Bruyne e Kammer [23].

## 1.6 Outras Abordagens Iterativas

O sucesso em aplicações industriais da abordagem iterativa para a sintonia de controladores é um dos fatores que motivam o surgimento de novos algoritmos. Besançon-Voda [12] considera o problema de controlar plantas *SISO* sobre as quais não existem informações disponíveis *a priori*. O ponto de partida da técnica, é obter informações sobre a fase e amplitude da planta em determinadas frequências utilizando o método do relé. Utilizando-se estas informações, parte-se para a sintonia de controladores do tipo *PID* robustos utilizando a técnica desenvolvida por Besançon-Voda e colaboradores. Se o desempenho obtido não for suficiente, parte-se para a sintonia iterativa de controladores por alocação de pólos utilizando a estrutura disponibilizada por Åström e Wittenmark [110]. Para efetuar a sintonia iterativa, obtém-se inicialmente o casamento dos critérios de identificação e controle através do filtro de dados para a estimação como em Åström e Nilsson [108]. Para garantir um baixo valor para a função de sensibilidade de entrada em baixas frequências, o polinômio no ramo de realimentação possui uma parte fixa, que é definida pelo projetista de antemão. Experimentos efetuados em planta piloto e industrial indicaram que a abordagem proposta melhorou o desempenho tanto com relação ao sinal de controle, que passou a ser menos oscilante, quanto ao rastreamento da referência obtido; se comparado aos resultados fornecidos pelos controladores *PID*.

Em Skelton e Shi [102], a identificação é efetuada utilizando o método em subespaço denominado *q*-Markov Cover, que foi desenvolvido por Skelton e colaboradores, e estendido para o caso de identificação em que há erros nas medições das entradas e saídas do sistema. Como vantagem do método, se comparado ao mínimos quadrados tradicional, é mencionado a possibilidade do método dos mínimos quadrados fornecer modelos de fase não mínima para plantas de fase mínima, o que não ocorreria com o método proposto.

Para o projeto do controlador, é sugerido a utilização do critério de controle que minimiza a variância do sinal de saída da planta, que foi desenvolvido por Skelton e colaboradores. A identificação é efetuada de modo a fornecer modelos relevantes para controle via ponderação sugerida pela especificação do desempenho.

Em de Callafon e van den Hof [33], os problemas de identificação e controle são resolvidos de forma iterativa em  $H_\infty$ . Partindo do critério de controle robusto, utilizando transformação linear fracionária para o modelo nominal da planta e sistema de malha fechada, obtém-se um critério para o projeto da identificação, que é relevante para o projeto de controladores robustos. A representação para o limite do erro cometido na modelagem, que é utilizado no projeto do controlador robusto tradicional, permite a sua estimação através de algoritmos disponibilizados na literatura. Baseando-se nas transformações lineares fracionárias, resulta uma equação que

permite calcular o desempenho do controlador que atua na malha e prever o desempenho a ser fornecido pelo controlador projetado na iteração atual. A especificação de um desempenho mínimo a ser atingido pelas etapas de identificação e projeto do controlador, leva a geração de uma limitação para a incerteza de modelo, que gera uma família de modelos à qual pertence a planta. O conjunto de modelos resultante é resumido, se comparado ao conjunto de todos os controladores que poderiam ser estabilizados pelo controlador que atua na planta, o que permite obter desempenho elevado.

Continuam surgindo publicações relatando o sucesso da aplicação de esquemas iterativos na prática [87]. A utilização dos esquemas iterativos na indústria deveu-se basicamente ao fato da abordagem fornecer uma ferramenta analítica que formaliza o procedimento de tentativa-e-erro utilizado na prática pelos engenheiros de processos no procedimento de sintonia “fina” de controladores. Ao assegurar uma sintonia cautelosa, tanto do ponto de vista da estabilidade quanto do desempenho, ao operador da planta é assegurado que a interferência sobre o sistema não irá comprometer a segurança e desempenho. As mesmas garantias não poderiam ser asseguradas, por exemplo, pelas técnicas de controle adaptativo, o que dificultou inicialmente a utilização desta técnica na indústria.

## 1.7 Convergência e Estimação de Modelos em Esquemas Iterativos

Um ponto crítico dos métodos iterativos, é a questão da análise de convergência para as iterações. Ainda não existe prova analítica para a convergência de esquemas iterativos baseados em modelos. A convergência ou não da sintonia é geralmente definida ao se atingir o desempenho especificado, não observância de melhoria significativa para o desempenho para duas etapas iterativas consecutivas, ou se atingir o limite para a complexibilidade definida para o controlador e/ou controlador.

Ao final da sintonia iterativa do controlador, o modelo resultante pode não representar adequadamente o processo, mas é o mais adequado para o projeto do controlador. Neste ponto, obtém-se uma identificação voltada para o objetivo de utilização do modelo - como diria Gevers - uma “identificação relevante para controle”. Um dos primeiros trabalhos a mostrar que os projetos da identificação e do controlador não deveriam ser efetuados de forma independente, foi apresentada por Åström e Wittenmark [109]. A questão da inseparabilidade dos projetos da identificação e do controlador ressurgiu em 1989 [101]. Neste trabalho, Skelton sugere seis “Princípios de modelagem” que apontam para as seguintes conclusões:

Erros de modelagem em malha aberta insignificantes podem degradar sensivelmente o desempenho obtido para a malha fechada (este depende também do critério de controle utilizado);

Modelagem inadequada do ponto de vista de predição do comportamento do sistema em malha aberta não implica em valores elevados para o erro de predição de malha fechada (desde que o critério de controle tenha a característica certa);

Erros de modelagem em malha aberta (e seus limites) geralmente não são informações suficientes para o sucesso do projeto do controlador (modelos podem ser equivalentes em termos de controle: Diferentes modelos podem gerar a mesma lei de controle ótimo, por exemplo);

Os problemas de modelagem e controle não são separáveis e são necessariamente *iterativos* (Os erros de predição de malha fechada são funções da lei de controle);

A não controlabilidade e observabilidade de sistemas dinâmicos não são, necessariamente, um problema no projeto de sistemas de controle (O não cancelamento de estados não observáveis e não controláveis do modelo pode, por exemplo, levar a sinais de controle de menor energia).

Os tópicos mencionados foram expostos utilizando exemplos simples para justificar as afirmações. Pode-se concluir que a observação dos princípios analisados permite uma melhor compreensão das questões que se colocam para o projetista de sistemas de controle; melhorando assim a possibilidade de sucesso em sua implementação.

A ausência de provas analíticas para esquemas iterativos baseados em modelo não invalida os resultados obtidos na utilização da mesma na prática. Esta abordagem tem muito a oferecer na questão de resintonizar malhas que operam apresentando baixo desempenho, o que não é raro na indústria de processos.

## 1.8 Abordagem Proposta para Controle Iterativo

No Capítulo 3 desta tese, é proposto um esquema iterativo onde é possível casar os critérios de identificação e controle. Ao se obter o casamento, o projeto da identificação passa a ser relevante para o projeto do controlador, e *vice-versa*, o que aumenta as chances de convergência para o esquema de sintonia iterativa proposto.

No esquema proposto, o controlador é projetado utilizando alocação de pólos e a estrutura de controle *IMC* [83], o que aproxima o esquema proposto da abordagem do surfista. No

esquema iterativo proposto, é esperado que o mesmo convirja para um menor reduzido de iterações, já que a especificação de desempenho inicial utilizada para o projeto do primeiro controlador é próxima da máxima que pode ser alcançada pelo sistema. Considere, por exemplo, o algoritmo do surfista. Para inicializar a sintonia iterativa, a abordagem do surfista projeta um controlador com baixo desempenho (largura de faixa reduzida). Para garantir uma sintonia cautelosa (projetar controladores que estabilizam a planta), a largura de faixa do sistema é aumentada progressivamente. Este procedimento pode levar a um número elevado de etapas iterativas.

A possibilidade de partir a sintonia para desempenho próximo do máximo sem comprometer a estabilidade, é obtida graças a utilização de um experimento baseado no método do relé para estimar a margem de ganho da malha resultante. A utilização apenas da margem de ganho como informação de estabilidade, pode ser justificada ao se observar que sistemas operando em malha fechada geralmente apresentam um comportamento monotônico [113] para as curvas do Diagrama de Bode. Se a margem de ganho especificada não for alcançada, o procedimento oferece uma possibilidade para permitir a continuidade do procedimento de sintonia iterativa do controlador.

Para a identificação dos modelos a serem utilizados nos projetos dos controladores, é utilizado o método descrito no Capítulo 2 desta tese.

## **1.9 Conclusão**

Neste Capítulo foi apresentada uma breve história do desenvolvimento das áreas de identificação e controle, e uma revisão bibliográfica das técnicas de controle iterativo. Como resultado, é possível contextualizar as contribuições nas áreas de identificação e controle desta Tese diante das técnicas correlatas existentes.

## Capítulo 2

# ALGORITMO PARA IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS LINEARES

### 2.1 Introdução

Nas técnicas de identificação clássicas, são necessárias etapas iterativas entre o projeto do experimento, análise dos dados, escolha da estrutura para o modelo, definição do critério a ser minimizado, estimação e validação do modelo. As técnicas de identificação em subespaço geram modelos em espaço de estados. Para estimar a ordem e parâmetros do modelo, é necessário estimar - em uma etapa intermediária - a seqüência de estados da representação em espaço de estados utilizando os dados medidos na entrada e saída da planta. Utilizando a seqüência de estados estimada, calcula-se a ordem e parâmetros do modelo.

Tradicionalmente, a utilização de estruturas canônicas para modelos em espaço de estados visa diminuir o número de parâmetros a serem estimados durante o procedimento de identificação. A redução do número de parâmetros a serem estimados melhora a característica da identificabilidade da planta [70]. Os desenvolvimentos apresentados neste Capítulo demonstram que, ao se reescrever estruturas *ARX* em termos de uma estrutura particular que se encontra na forma canônica de Luenberger [1], [25], resulta uma base onde é possível estimar a ordem e parâmetros do modelo. A importância da definição da base onde o sistema é identificado em subespaço, é bem conhecida [91]. A unificação das diferentes técnicas de identificação em subespaço pode ser obtida através da definição de diferentes bases onde o sistema é identificado.

Na estrutura proposta, estão presentes apenas as variáveis medidas na entrada e saída da planta. Do procedimento adotado para obter a base na qual o sistema é identificado, resulta

o conhecimento da seqüência de estados. As variáveis de estados que formam a seqüência de estados são fornecidas pelas medições das saídas da planta. A estrutura resultante possui  $nm$  entradas e  $l$  saídas, onde  $n$  é a ordem escolhida para o modelo e  $m$  e  $l$  são os números de entradas e saídas da planta, respectivamente. As estimativas da ordem e parâmetros do modelo são efetuadas de forma similar às utilizadas pelas técnicas de identificação em subespaço [91], [116], [117].

Definida a estrutura do modelo e os sinais a serem utilizados nas estimativas, resta estimar a ordem e parâmetros para o modelo. O problema da estimação da ordem para modelos em identificação de sistemas tem sido investigado, utilizando diferentes abordagens, desde a década de sessenta [70]. Utilizando os dados disponíveis para a identificação, é possível estimar a ordem empregando, por exemplo, a curva de resposta em freqüência estimada, correlação de variáveis, teste do posto de amostras da matriz de covariância e da matriz de informação [70]. Além destas abordagens, é possível utilizar métodos que utilizam técnicas de identificação em subespaço [72], [91].

No caso de Ljung e McKelvey [72], primeiro estima-se um modelo de ordem elevada. Em seguida, o modelo é utilizado para fornecer predições dos estados. O próximo passo, é calcular a decomposição em valores singulares (*SVD*) de uma matriz formada pelos estados estimados. A estimação da ordem é obtida por inspeção dos valores singulares da *SVD* da referida matriz, que fornece o posto da referida matriz.

Na abordagem proposta por Overschee e De Moor [91], é necessário o cálculo de uma projeção oblíqua para estimar a seqüência de estados. Os elementos das matrizes utilizadas na projeção são fornecidos pelas medições das entradas e saídas da planta. Estimada a seqüência de estados, calcula-se a ordem e parâmetros do modelo utilizando a *SVD* da matriz correspondente à seqüência de estados. No algoritmo, a *SVD* permite calcular a ordem e os parâmetros do modelo. A ordem é definida pela inspeção dos valores singulares da decomposição.

Desde que na estrutura proposta para o modelo, a seqüência de estados é conhecida, pode-se estimar a ordem para o modelo através da determinação do posto de matriz conhecida. O posto de uma matriz pode ser estimado utilizando *SVD*, que é o procedimento adotado na identificação em subespaço. A escolha da ordem para o modelo (posto da matriz) é feita por inspeção dos valores singulares da decomposição. Definida a ordem, o problema de parametrização do modelo pode ser resolvido, em um passo, utilizando estrutura estendida e decomposição *LQ*, que é a transposta da decomposição *QR*.

O desenvolvimento deste capítulo segue a seguinte estrutura: A geração da estrutura alternativa para o modelo é fornecida pela seção 2.2. O problema de estimação da ordem requerida para o modelo é resolvido na seção 2.3. A seção 2.4 apresenta o algoritmo utilizado para calcular

os parâmetros do modelo. Alguns resultados experimentais e de simulações são apresentados na seção 2.5. A conclusão do Capítulo encontra-se na seção 2.6.

## 2.2 Representação Alternativa para Modelos ARX

Nesta seção, inicialmente é apresentado o procedimento para obter a estrutura alternativa para o caso determinístico. Em seguida, utilizando os resultados obtidos para sistemas determinísticos, o procedimento é estendido para o caso onde as saídas da planta são contaminadas por perturbações estocásticas. Os modelos estão no domínio de tempo discreto utilizando o operador  $q$ . A técnica é restrita a plantas estritamente apropriadas.

### 2.2.1 Caso determinístico

Esta seção apresenta as estruturas alternativas para estruturas ARX para plantas SISO e TITO. A extensão do método para plantas com diferentes números de entradas e saídas é trivial e não será comentada.

#### Plantas SISO

Considere o modelo ARX

$$A(q)y^d(t) = B(q)u(t), \quad (2.1)$$

onde

$$A(q) = 1 + a_{nn}q^{-1} + a_{n(n-1)}q^{-2} + \dots + a_{n1}q^{-n}, \quad (2.2)$$

$$B(q) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_nq^{-n}, \quad (2.3)$$

$$qu(t) = u(t+1). \quad (2.4)$$

Utilizando (2.1), é possível escrever as seguintes equações matriciais

$$\begin{bmatrix} y^d(t-n+1) \\ y^d(t-n+2) \\ \dots \\ y^d(t-1) \\ y^d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^d(t-n) \\ y^d(t-n+1) \\ \dots \\ y^d(t-2) \\ y^d(t-1) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & \dots & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t-n) \\ u(t-n+1) \\ \dots \\ u(t-2) \\ u(t-1) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$y^d(t-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^d(t-n) & y^d(t-n+1) & \dots & y^d(t-2) & y^d(t-1) \end{bmatrix}^T. \quad (2.6)$$

Utilizando o desenvolvimento anterior, pode-se definir os estados como sendo

$$\mathbf{w}^d(t-1) = \begin{bmatrix} y^d(t-n) & y^d(t-n+1) & \dots & y^d(t-2) & y^d(t-1) \end{bmatrix}^T,$$

e o vetor de entradas

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{bmatrix} u(t-n) & u(t-n+1) & \dots & u(t-1) \end{bmatrix}^T,$$

que permitem definir a seguinte realização

$$\mathbf{w}^d(t) = \mathbf{A}^* \mathbf{w}^d(t-1) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}^*(t), \quad (2.7)$$

$$y^d(t-1) = \mathbf{c} \mathbf{w}^d(t-1), \quad (2.8)$$

que é uma representação canônica (de Luenberger) para modelos de ordem  $n$  com  $n$  entradas e uma saída em espaço de estados.

As matrizes e vetores paramétricos do modelo são:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & \dots & b_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que os estados atuais e passados,  $\mathbf{w}^d(t)$  e  $\mathbf{w}^d(t-1)$ , dessa estrutura são conhecidos - são medidos na saída da planta. Como será visto posteriormente, empregando (2.7) na construção de estruturas estendidas, é possível estimar a ordem e parâmetros do modelo.

Como é demonstrado no Apêndice A, existe uma ligação entre o modelo descrito pela tripla  $\{\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*, \mathbf{c}\}$  e a estrutura de modelo em espaço de estados em inovação  $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{k}\}$  utilizada por Ljung [70] para identificação de plantas *SISO*. No desenvolvimento é provado que existe uma correspondência um-a-um entre as matrizes  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ ). A matriz  $\mathbf{b}$  pode ser recuperada a partir das matrizes  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{B}^*$ . O vetor  $\mathbf{k}$  pode ser estimado utilizando os resíduos, que são gerados pela diferença entre a saída medida e a estimada pelo modelo [91]. Esta observação também é válida para o caso de identificação de plantas *TITO*.

### Planta *TITO*

Considere o seguinte modelo *ARX* determinístico

$$\mathbf{A}(q)\mathbf{y}^d(t) = \mathbf{B}(q)\mathbf{u}(t), \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{A}(q)$  e  $\mathbf{B}(q)$  são matrizes cujos elementos são polinômios em  $q$ , com  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  e  $\mathbf{y}^d(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  sendo as entradas e saídas da planta, respectivamente.

Para plantas *TITO* de ordem  $n$ , que possuem o mesmo índice de controlabilidade e observabilidade para cada entrada e saída [1], se  $n_a = n_b = \frac{n}{2}$ , onde  $n_a$  e  $n_b$  são as ordens dos polinômios presentes nas matrizes  $\mathbf{A}(q)$  e  $\mathbf{B}(q)$ , onde  $n$  é a ordem do modelo, pode-se escrever para (2.9)

$$= \begin{bmatrix} 1 + a_{n_a n_a} q^{-1} + \dots + a_{n_a 1} q^{-n_a} & a_{n_a n} q^{-1} + \dots + a_{n_a(n_a+1)} q^{-n_a} \\ a_{n n_a} q^{-1} + \dots + a_{n 1} q^{-n_a} & 1 + a_{n n} q^{-1} + \dots + a_{n(n_a+1)} q^{-n_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^d(t) \\ y_2^d(t) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} b_{n_a n_a} q^{-1} + \dots + b_{n_a 1} q^{-n_a} & b_{n_a n} q^{-1} + \dots + b_{n_a(n_a+1)} q^{-n_a} \\ b_{n n_a} q^{-1} + \dots + b_{n 1} q^{-n_a} & b_{n n} q^{-1} + \dots + b_{n(n_a+1)} q^{-n_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Utilizando (2.10), é possível escrever as seguintes equações matriciais

$$\begin{bmatrix} y_1^d(t - n_a + 1) \\ \dots \\ y_1^d(t) \\ y_2^d(t - n_a + 1) \\ \dots \\ y_2^d(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 -a_{n_a1} & -a_{n_a2} & \dots & -a_{n_a n_a} & -a_{n_a(n_a+1)} & -a_{n_a(n_a+2)} & \dots & -a_{n_a n} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
 -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn_a} & -a_{n(n_a+1)} & -a_{n(n_a+2)} & \dots & -a_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 y_1^d(t - n_a) \\
 \dots \\
 y_1^d(t - 1) \\
 y_2^d(t - n_a) \\
 \dots \\
 y_2^d(t - 1)
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 b_{n_a1} & \dots & b_{n_a n_a} & b_{n_a(n_a+1)} & \dots & b_{n_a n} \\
 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 b_{n1} & \dots & b_{nn_a} & b_{n(n_a+1)} & \dots & b_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1(t - n_a) \\
 \dots \\
 u_1(t - 1) \\
 u_2(t - n_a) \\
 \dots \\
 u_2(t - 1)
 \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

que permite definir a seguinte realização em espaço de estados

$$\mathbf{w}^d(t) = \mathbf{A}^* \mathbf{w}^d(t - 1) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}^*(t), \tag{2.12}$$

$$\mathbf{y}^d(t - 1) = \mathbf{C} \mathbf{w}^d(t - 1), \tag{2.13}$$

onde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
 \end{bmatrix},$$

com os elementos unitários em  $\mathbf{C}$  ocorrendo nas posições  $(1, n_a)$  e  $(2, n)$ , respectivamente.

Observando o procedimento para obter as realizações (2.5) e (2.11), pode-se concluir que este pode ser aplicado a plantas com  $m$  entradas e  $l$  saídas.

### 2.2.2 Caso estocástico

Os resultados apresentados nesta seção referem-se a sistemas que apresentam perturbações estocásticas nas saídas. No desenvolvimento, as equações que descrevem os modelos ARX são decompostas em duas componentes: uma, que é resultante da contribuição da componente determinística, e outra, que é devido à componente estocástica.

**Sistemas SISO**

Considere o modelo ARX,

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t), \tag{2.14}$$

onde  $e(t)$  é um ruído branco.

A saída  $y(t)$  é gerada pela contribuição de duas componentes. Uma determinística,  $u(t)$ , e outra estocástica,  $e(t)$ . Isto é,

$$y(t) = y^d(t) + y^s(t),$$

onde

$$A(q)y^d(t) = B(q)u(t), \tag{2.15}$$

$$A(q)y^s(t) = e(t), \tag{2.16}$$

$$\therefore A(q)(y^d(t) + y^s(t)) = B(q)u(t) + e(t). \tag{2.17}$$

Observando as equações (2.15), (2.16) e 2.17, pode-se concluir que é possível utilizar os desenvolvimentos do caso determinístico na geração da estrutura alternativa para o modelo estocástico descrito pela equação (2.14). Levando em conta esta consideração, a utilização de (2.17) permite escrever as equações matriciais

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(t-n+1) \\ y(t-n+2) \\ \dots \\ y(t-1) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-n) \\ y(t-n+1) \\ \dots \\ y(t-2) \\ y(t-1) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & \dots & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t-n) \\ u(t-n+1) \\ \dots \\ u(t-2) \\ u(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t). \\ \mathbf{w}(t) &= \mathbf{A}^* \mathbf{w}(t-1) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}^*(t) + \mathbf{k}^* e^*(t), \end{aligned}$$

$$y(t-1) = \mathbf{c} \mathbf{w}(t-1),$$

onde  $\mathbf{k}^* = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ ,  $\mathbf{c} = [0 \ 0 \ \dots \ 1]$  e  $e^*(t) = e(t)$ . O modelo resultante é de ordem  $n$  com  $n$  entradas e uma saída.

**Plantas TITO**

Considere o modelo ARX

$$\mathbf{A}(q)y(t) = \mathbf{B}(q)u(t) + \mathbf{e}(t), \tag{2.18}$$

onde  $\mathbf{A}(q)$  e  $\mathbf{B}(q)$  são as matrizes presentes na equação (2.10) e  $\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) & e_2(t) \end{bmatrix}^T$ .

Novamente, o procedimento adotado para o caso TITO determinístico pode ser estendido para o presente caso. Como resultado, obteve-se

$$\begin{bmatrix} y_1(t - n_a + 1) \\ \dots \\ y_1(t) \\ y_2(t - n_a + 1) \\ \dots \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n_a1} & -a_{n_a2} & \dots & -a_{n_a n_a} & -a_{n_a(n_a+1)} & -a_{n_a(n_a+2)} & \dots & -a_{n_a n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn_a} & -a_{n(n_a+1)} & -a_{n(n_a+1)} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t - n_a) \\ \dots \\ y_1(t - 1) \\ y_2(t - n_a) \\ \dots \\ y_2(t - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{n_a1} & \dots & b_{n_a n_a} & b_{n_a(n_a+1)} & \dots & b_{n_a n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{n1} & \dots & b_{nn_a} & b_{n(n_a+1)} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t - n_a + 1) \\ \dots \\ u_1(t - 1) \\ u_2(t - n_a + 1) \\ \dots \\ u_2(t - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix},$$

Neste caso, os ruídos que aparecem nas medições são adicionados na equação utilizando a matriz  $\mathbf{K}$ , resultando a seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(t) &= \mathbf{A}^* \mathbf{w}(t-1) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}^*(t-1) + \mathbf{K}^* \mathbf{e}^*(t), \\ \mathbf{y}(t-1) &= \mathbf{C} \mathbf{w}(t-1),\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

Utilizando as restrições impostas às ordens dos polinômios que compõem as matrizes  $A(q)$  e  $B(q)$  (ou  $A(q)$  e  $B(q)$ ), dos modelos  $ARX$ , é possível obter uma representação alternativa em espaço de estados.

## 2.3 Estimação da Ordem e Parâmetros

### 2.3.1 Introdução

Nos desenvolvimentos anteriores, foram utilizadas estruturas de modelos  $ARX$  para gerar estruturas alternativas. Para concluir a modelagem, falta estimar a ordem e parâmetros do modelo. Para estimar a ordem e parâmetros do modelo, será utilizada a equação

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{A}^* \mathbf{w}(t-1) + \mathbf{B}^* \mathbf{u}^*(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{e}^*(t), \quad (2.19)$$

na formação de uma representação estendida. Utilizando a representação estendida, estima-se a ordem e as matrizes  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{B}^*$  da representação (2.19).

Na estimativa dos parâmetros, considera-se que existe uma solução mínimos quadrados para o problema de minimização. A solução mínimos quadrados existe, e é assintoticamente não polarizada, se os ruídos forem descorrelacionados dos sinais de excitação e medidos na saída da planta [81].

No cálculo das estimativas, recorre-se à decomposição  $LQ$ . A utilização desta decomposição visa robustificar numericamente as soluções do ponto de vista de condicionamento numérico e imunidade a ruído [103].

### 2.3.2 Estimação do modelo

Nesta seção, a representação alternativa (2.19) é utilizada para construir uma representação estendida de comprimento  $j$ . A representação estendida é construída através do empilhamento de estados e entradas. Como resultado, obtém-se as seqüências

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) & \mathbf{w}(t+1) & \cdots & \mathbf{w}(t+j-1) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{W}(t-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t-1) & \mathbf{w}(t) & \cdots & \mathbf{w}(t+j-2) \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^*(t) & \mathbf{u}^*(t+1) & \cdots & \mathbf{u}^*(t+j-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{e}^*(t+1) & \cdots & \mathbf{e}^*(t+j-1) \end{bmatrix},$$

que estão presentes na equação em espaço de estados estendida

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{A}^* \mathbf{W}(t-1) + \mathbf{B}^* \mathbf{U}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{E}(t). \quad (2.22)$$

Na equação (2.22), os termos (2.20), (2.21) são seqüências de estados. Portanto, pode-se utilizar (2.22) em procedimentos de estimação da ordem e parâmetros de modelos ARX que podem ser reescritos na forma descrita pela equação (2.19).

As notações utilizadas para matrizes e vetores no restante do Capítulo, seguem a notação utilizada no *MATLAB*. Por exemplo, considere a matriz  $\mathbf{W}(t) \in \mathfrak{R}^{20 \times 1000}$ , que possui 20 linhas e 1000 colunas, e a matriz  $\overline{\mathbf{W}}(t) \in \mathfrak{R}^{8 \times 460}$ , que é formada pelas linhas 5 a 12 e colunas 41 a 500 da matriz  $\mathbf{W}(t)$ . Neste caso, as matrizes  $\overline{\mathbf{W}}(t)$  e  $\mathbf{W}(t)$  assumem as seguintes representações:  $\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}_{1:20,1:1000}$   $\overline{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{W}_{5:12,41:500}$ .

A possibilidade de obter uma seqüência de estados cujo posto linha seja igual a ordem  $n$  do modelo da planta, depende do cumprimento da seguinte condição de persistência para o sinal de excitação [91]:

**Definição 1** *Um seqüência de entrada  $\{u(t)\}$ , de comprimento  $j \gg n$ , onde  $n$  é a ordem da planta, é considerada como sendo excitante persistentemente de ordem  $nm$  se for verificada a seguinte condição para o posto da matriz de entradas*

$$\text{Posto} (U_{1:nm,1:j} U_{1:nm,1:j}^T) = nm,$$

onde  $m$  é o número de entradas do sistema e  $n$  é a ordem do modelo da planta.

Se o sinal de excitação for persistente, implica que os modos controláveis serão excitados adequadamente. Neste caso, a ordem e os parâmetros serão estimados sob as restrições impostas ao ruído pelo procedimento de estimação.

### 2.3.3 Ordem requerida para o modelo

Se os únicos dados disponíveis sobre o sistema a ser identificado forem as medições das entradas e saídas da planta, a planta é vista pelo projetista como sendo uma caixa preta. Como consequência, o modelo resultante do procedimento de identificação tem apenas a capacidade de traduzir o comportamento entrada/saída do sistema. Neste caso, as informações sobre o comportamento das variáveis físicas do sistema serão perdidas. Na verdade, a modelagem se restringe a capturar informações sobre os modos do sistema que sejam controláveis e observáveis. Um modelo que possui tais características é conhecido na literatura como sendo de realização mínima [25]. Ou seja, na seqüência de estados do modelo obtido, existe uma correspondência um-a-um entre estados e os modos controláveis e observáveis do sistema. Como resultado, o subespaço linha gerado pela seqüência de estados desse modelo terá posto  $n$ , que é igual a ordem do subsistema a ser modelado. Este fato será utilizado na determinação da ordem para o modelo. Para a estimação do posto do espaço linha da seqüência de estados, que define a ordem para o modelo, utiliza-se a *SVD*, que é um método numérico eficaz no cálculo do posto de matrizes [103].

#### O procedimento

A estimação da ordem para o modelo pode ser feita utilizando a determinação do posto da matriz formada pelas seqüências de estados e de entradas ou apenas pela seqüência de estados. A utilização apenas da seqüência de estados é restrita ao caso onde ruídos com características distintas contaminam as entradas e saídas da planta. Esta particularidade está relacionada aos valores numéricos estimados para os valores singulares da *SVD* da referida matriz. Suponha que utilizou-se a matriz formada pela seqüência de entradas e saídas na estimação da ordem para o modelo, que apenas as saídas são contaminadas por ruído, e que os valores singulares referentes à matriz de entradas sejam inferiores aos valores singulares devido ao ruído. Neste caso, o procedimento utilizado na determinação da ordem do sistema fornecerá a informação incorreta para a determinação da ordem para o modelo.

Observando (2.22), verifica-se que as seqüências de estados estão disponíveis. Portanto, é possível estimar a ordem para o modelo através da determinação do posto da seqüência de estados (matriz)  $\mathbf{W}(t)$  ou da matriz  $\left[ \mathbf{U}(t-1)^T \quad \mathbf{W}(t)^T \right]^T$ . Esta possibilidade deve-se ao fato de que [74]

$$\text{Posto} \left( \left[ \mathbf{U}(t-1)^T \quad \mathbf{W}(t)^T \right]^T \right) = nm + n, \quad (2.23)$$

De acordo com a condição de persistência para o sinal de excitação, resulta que  $\text{Posto}(\mathbf{U}(t)) =$

$nm$ . Portanto,

$$\text{Posto}(\mathbf{W}(t)) = n,$$

onde  $n$  é a ordem do modelo e  $m$  é o número de entradas do sistema.

O método proposto define a ordem para o modelo através da inspeção dos valores singulares da *SVD* da matriz em consideração. No caso determinístico, o número de valores singulares não nulos da *SVD* indica a ordem para o modelo. O número de estados do subsistema é igual ao número de pólos que podem ser excitados pelas entradas e cujos estados podem ser observados nas saídas. Se o número de pólos do subsistema for  $n$ , o número de variáveis de estados do modelo correspondente em espaço de estados será  $n$ . Como resultado,  $\mathbf{W}(t) \in \mathbb{R}^{n \times j}$ , onde  $n$  indica que a seqüência de estados determina um subespaço para os estados que são controláveis e observáveis. Isto é, são resultantes de um modelo cuja realização é mínima [25].

Considerando ausência de ruído nas medições (caso determinístico), a condição de ordem  $n$  para a seqüência de estados deve-se ao seguinte lema:

**Lema 2** *Considere que os sinais presentes em (2.22) foram gerados sob a condição de persistência para a excitação. Para obter uma realização mínima do modelo da planta, a seqüência de estados,  $\mathbf{W}(t)$  ou  $\mathbf{W}(t - 1)$  em (2.22), deve possuir posto igual a ordem  $n$  da planta.*

**Prova.** recursivamente, para condições iniciais nulas, o que não é uma restrição, pode-se reescrever para (2.22)

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* & \mathbf{A}^* \mathbf{B}^* & \mathbf{A}^{*2} \mathbf{B}^* & \dots & \mathbf{A}^{*j-1} \mathbf{B}^* \end{bmatrix} \times \\ &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}^*(t-1) & \mathbf{u}^*(t) & \mathbf{u}^*(t+1) & \dots & \mathbf{u}^*(t+j-2) \\ 0 & \mathbf{u}^*(t-1) & \mathbf{u}^*(t) & \dots & \mathbf{u}^*(t+j-3) \\ 0 & 0 & \mathbf{u}^*(t-1) & \dots & \mathbf{u}^*(t+j-4) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{u}^*(t+j-5) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{u}^*(t-1) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C} \mathbf{U}^\Delta(t). \end{aligned}$$

Nesta equação,  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{B}^*$  são matrizes pertencentes à classe das realizações canônicas, e  $\mathbf{C}$  à respectiva matriz de controlabilidade do sistema.

Do cumprimento da condição de persistência para o sinal de excitação, resulta que

$$\text{Posto}(\mathbf{U}^\Delta(t)) \geq nm.$$

Desde que o modelo representa uma realização mínima para a planta, este será controlável e observável. Como consequência,  $\text{Posto}(\mathcal{C}) = n$ , e

$$\text{Posto}(\mathbf{W}(t)) = \text{Posto}(\mathcal{C}\mathbf{U}^\Delta(t)) = n,$$

o que prova o lema. ■

### Definição da ordem para o modelo

Para a estimação da ordem, é necessário construir a representação (2.22) de tal forma que o espaço linha gerado possua como subespaço o espaço de estados correspondente à realização mínima. Sob esta condição, deve-se definir a ordem máxima esperada para o modelo,  $n_e$ , como sendo maior ou igual a  $n$ , que é a ordem do modelo cuja realização é mínima. Ao definir  $n_e$ , definiu-se implicitamente que o modelo (2.22) possui  $n_e$  estados e  $nm$  entradas. A definição de  $n_e \geq n$  não compromete a estimativa de  $n$ , já que as demais  $(n_e - n)$  linhas da seqüência de estados em (2.22) serão combinações lineares das  $n$  linhas que definem a ordem do modelo (como será visto, no caso determinístico, o subespaço gerado pelas linhas  $n_e$  possui dimensão  $n$ ). Portanto, a estimação da ordem para o modelo depende da estimativa da ordem do subespaço gerado pela seqüência de estados sob a condição de que a seqüência de entradas tenha posto  $nm$  (veja equação (2.23)).

O comprimento  $j$  para as seqüências é definido pelo número de amostras disponível. Entretanto, a capacidade computacional pode restringir o valor máximo de  $j$ . O valor desejável seria  $j \rightarrow \infty$ . A utilização do valor máximo para  $j$  é justificada pela característica das estimativas. Se for utilizado mínimos quadrados nas estimativas e o ruído presente no sistema for do tipo branco, os parâmetros estimados convergirão assintoticamente para os valores reais com  $j \rightarrow \infty$  [81].

A definição da ordem para o modelo depende da determinação do posto da matriz  $[\mathbf{U}(t)^T \mathbf{W}(t)^T]^T$  ou  $\mathbf{W}(t)$  utilizando *SVD*. O posto de uma matriz utilizando *SVD* corresponde ao número de valores singulares não nulos da decomposição. A *SVD* de uma matriz, permite decompor a matriz como o produto de três matrizes

$$\begin{aligned} \text{SVD}(\cdot) &= \mathbf{S}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$  e  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{j \times j}$  são matrizes ortonormais e  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n_e \times j}$  é uma matriz diagonal. Os valores singulares da decomposição são os valores da matriz  $\mathbf{\Sigma}$ .

Apesar de não haver relação entre valores singulares e número de pólos de uma planta, a decomposição *SVD* de uma matriz de transferência pode ser utilizada para elucidar a relação entre valores singulares correspondentes aos sinais dos correspondentes ao ruído, o que é utilizado a seguir para a determinação da ordem da planta. Considere que uma planta que possui matriz de transferência  $G$  é excitada por um vetor de entradas  $u$ , produzindo um vetor de saídas  $y$ ,  $y = Gu$ . Tomando a *SVD* da matriz  $G$ ,  $G = USV$ , resulta que  $u$  é decomposto sobre o espaço linha gerado por  $V$ , amplificado dos valores contidos nos elementos diagonais de  $S$  e decompostos sobre o espaço de saídas definido por  $U$ . Neste caso, a amplitude (energia) dos sinais contidos no vetor de saídas  $y$ , é proporcional as ampliações definidas pela matriz  $S$  da decomposição, o que pode ser interpretado como respostas dos modos espúrios e dominantes da planta para modelos balanceados [80]. Portanto, a utilização dos distanciamentos entre os valores singulares para determinar a ordem da planta, pode levar a estimativas erradas se os ruídos que contaminam as medições das entradas e saídas da planta tiverem energia suficientes para mascarar a resposta dos modos espúrios da planta.

Se for utilizada a *SVD* da matriz  $W(t)$  na determinação da ordem para o modelo, as matrizes  $\Sigma_{11}$  e  $\Sigma_{22}$  são tais que  $\Sigma_{11} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)^1$  e  $\Sigma_{22} = \text{diag}(\sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}, \dots, \sigma_{ne})$ , com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq \sigma_{n+1} \geq \dots \geq \sigma_{ne} \geq 0$ . Se não houver ruído nos dados medidos e a excitação for persistente, a matriz  $\Sigma_{22}$  é nula. Neste caso, a ordem do sistema será  $n$ , que é o posto da matriz  $W(t)$ .

Se for utilizada a *SVD* da matriz  $\begin{pmatrix} U(t)^T & W(t)^T \end{pmatrix}^T$  e  $U(t)^T$  tiver posto  $nm$ , obtêm-se  $\Sigma_{11} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{nm+n})$  e  $\Sigma_{22} = \text{diag}(\sigma_{nm+n+1}, \dots, \sigma_{2ne})$ . Se os dados não forem contaminados por ruído e a excitação for persistente, a matriz  $\Sigma_{22}$  é nula. Neste caso, a ordem para o modelo é calculada observando que  $\text{Posto}(\Sigma_{11}) = nm + n$ . Desde que  $m$  é conhecido (número de entradas da planta), é possível calcular  $n$ .

Considere o caso onde as medições são contaminadas por ruído. O efeito do ruído é tornar a matriz  $\Sigma_{22}$  não nula. Neste caso, a possibilidade de determinar a ordem correta para o modelo está relacionada a possibilidade de detectar os valores singulares correspondentes aos sinais dos correspondentes ao ruído. Ou seja, a ordem será definida através da verificação da ocorrência de saltos significativos entre as amplitudes de dois valores singulares consecutivos. O número de valores singulares antes do salto pertencem aos sinais, e os demais, ao ruído. Como resultado, a ordem é estimada como sendo o número de valores singulares que são definidos como pertencente à classe de sinais. A distância entre o último valor singular pertencente aos sinais com relação ao primeiro pertencente ao ruído, é uma medida da relação sinal/ruído para os sinais analisados [79].

<sup>1</sup>Onde  $v = \text{diag}(\cdot)$  indica que o vetor  $v$  é formado pelos termos da diagonal da matriz  $(\cdot)$ .

## 2.4 Estimação dos Parâmetros do Modelo

Supondo que a ordem para o modelo é conhecida, pode-se estimar os parâmetros desconhecidos da realização definida pela equação (2.22). Para estimar apenas os elementos desconhecidos das matrizes  $A^*$  e  $B^*$  do modelo (2.22), são necessários  $l$  regressores, onde  $l$  é o número de entradas da planta. Entretanto, para chegar a um resultado que possa ser comparado com o apresentado por Knudsen [61], em termos das polarizações existentes nas estimativas utilizando estruturas estendidas, são construídos regressores para estimar todos os elementos das matrizes  $A^*$  e  $B^*$ . Estas matrizes são estimadas utilizando o método dos mínimos quadrados. Em seguida, é apresentada a análise de convergência para os parâmetros estimados utilizando um resultado clássico da literatura [81].

### 2.4.1 Estimação utilizando estruturas estendidas

Após a determinação da ordem necessária para o modelo, a equação estendida a ser utilizada na estimação dos parâmetros pode ser escrita em termos de um regressor linear. Considerando que a ordem necessária para o modelo é  $n$ , define-se a matriz paramétrica do regressor como sendo  $\Theta_{A^*B^*} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \end{bmatrix}$ . A matriz de regressão é formada a partir das matrizes  $W(t)$ ,  $W(t-1)$  e  $U(t)$ .

Para plantas *SISO* determinísticas, pode-se escrever para o regressor

$$W_{1:n}(t) = \hat{w} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1:n,:}(t-1) \\ U_{1:n,:}(t) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$= \Theta_{A^*B^*} \begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{U} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$= \Theta_{A^*B^*} \Phi(t) \quad (2.26)$$

e para o caso de plantas *TITO*,

$$\begin{bmatrix} W_{1:\frac{n}{2},:}(t) \\ W_{\frac{n_e}{2}+1:\frac{n_e}{2}+\frac{n}{2},:}(t) \end{bmatrix} = \hat{w} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1:\frac{n}{2},:}(t-1) \\ W_{\frac{n_e}{2}+1:\frac{n_e}{2}+\frac{n}{2},:}(t-1) \\ U_{1:\frac{n}{2},:}(t) \\ U_{\frac{n_e}{2}+1:\frac{n_e}{2}+\frac{n}{2},:}(t) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$= \Theta_{A^*B^*} \begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{U} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$= \Theta_{A^*B^*} \Phi(t). \quad (2.29)$$

As equações dos regressores em ambos os casos podem ser escritas como sendo

$$\begin{aligned}\overleftarrow{w} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{W} \\ \overrightarrow{U} \end{bmatrix} \\ &= \Theta_{\mathbf{A}^* \mathbf{B}^*} \Phi(t),\end{aligned}\quad (2.30)$$

onde  $\Theta_{\mathbf{A}^* \mathbf{B}^*}$  é a matriz de parâmetros e  $\Phi(t)$ , a matriz de sinais.

Se houver ruído nas medições, a equação que descreve o comportamento do sistema pode ser escrita na forma do regressor linear

$$\begin{aligned}\overleftarrow{w} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{W} \\ \overrightarrow{U} \end{bmatrix} + \mathbf{K}^* \mathbf{E}(t) \\ &= \Theta_{\mathbf{A}^* \mathbf{B}^*} \Phi(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{E}(t),\end{aligned}\quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} e^{*T}(t) & e^{*T}(t+1) & \cdots & e^{*T}(t+j-1) \end{bmatrix}^T$ .

Resolvendo (2.31) para  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{B}^*$ , chega-se ao seguinte problema de minimização

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^* & \hat{\mathbf{B}}^* \end{bmatrix} = \min_{\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*} \left\| \overleftarrow{w} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{W} \\ \overrightarrow{U} \end{bmatrix} \right\|_F^2. \quad (2.32)$$

Considerando a existência da solução mínimos quadrados para (2.32), esta pode ser escrita como sendo [4], [10]

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^* & \hat{\mathbf{B}}^* \end{bmatrix} = \overleftarrow{w} \begin{bmatrix} \overrightarrow{W} \\ \overrightarrow{U} \end{bmatrix}^\dagger, \quad (2.33)$$

onde o expoente “†” indica a pseudo-inversa à direita da matriz em consideração [103].

## 2.4.2 Cálculo de A e B

A solução mínimos quadrados para obter  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  pode ser obtida em um passo utilizando a decomposição  $LQ$  da matriz formada pelo empilhamento das matrizes  $\overrightarrow{U}$ ,  $\overrightarrow{W}$  e  $\overleftarrow{w}$ .

**Lema 3** Considere a estimativa mínimos quadrados para  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{B}^*$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^* & \hat{\mathbf{B}}^* \end{bmatrix} = \overleftarrow{w} \begin{bmatrix} \overrightarrow{W} \\ \overrightarrow{U} \end{bmatrix}^\dagger, \quad (2.34)$$

e a decomposição LQ da matriz formada pelo empilhamento das matrizes  $\vec{U}$ ,  $\vec{W}$  e  $\overleftarrow{w}$

$$\begin{aligned} LQ \begin{bmatrix} \vec{U} \\ \vec{W} \\ \overleftarrow{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T \\ (\mathbf{Q}^\perp)^T \end{bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{Q}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_3^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Substituindo as respectivas representações LQ das matrizes  $\vec{U}$ ,  $\vec{W}$  e  $\overleftarrow{w}$  em (2.34), calculando a pseudo-inversa, e o produto de matrizes presentes nesta equação, resulta para  $\hat{\mathbf{A}}^*$  e  $\hat{\mathbf{B}}^*$

$$\hat{\mathbf{A}}^* = \mathbf{R}_{32}\mathbf{R}_{22}^{-1}, \quad (2.36)$$

$$\hat{\mathbf{B}}^* = (\mathbf{R}_{31} - \mathbf{R}_{32}\mathbf{R}_{22}^{-1}\mathbf{R}_{21})\mathbf{R}_{11}^{-1}. \quad (2.37)$$

**Prova.** considere inicialmente a existência da inversa da matriz  $\vec{W}\vec{W}^T$ , que é utilizada no cálculo da pseudo-inversa da matriz  $\begin{bmatrix} \vec{W}^T & \vec{U}^T \end{bmatrix}^T$ ,

$$\begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{U} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{U} \end{bmatrix}^T \left[ \begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{U} \end{bmatrix}^T \right]^{-1}.$$

Utilizando a propriedade de inversão de matrizes em blocos  $2 \times 2$  [118] para o cálculo da pseudo-inversa, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{U} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \Pi_{\vec{W}^\perp} \vec{U}^T (\vec{U} \Pi_{\vec{W}^\perp} \vec{U}^T)^{-1} \vec{U}) \vec{W}^\dagger & \Pi_{\vec{W}^\perp} \vec{U}^T (\vec{U} \Pi_{\vec{W}^\perp} \vec{U}^T)^{-1} \end{bmatrix}, \text{ onde } \Pi_{\vec{W}^\perp}$$

é o projetor ortogonal

$$\Pi_{\vec{W}^\perp} = \mathbf{I} - \vec{W}^T \begin{bmatrix} \vec{W} & \vec{W}^T \end{bmatrix}^{-1} \vec{W},$$

tal que

$$\Pi_{\vec{W}} = \vec{W}^T \begin{bmatrix} \vec{W} & \vec{W}^T \end{bmatrix}^{-1} \vec{W}$$

e  $\mathbf{I} = \Pi_{\vec{W}^\perp} + \Pi_{\vec{W}}$  onde  $\Pi_{\vec{W}^\perp} \perp \Pi_{\vec{W}}$ ; com o símbolo “ $\perp$ ” indicando ortogonalidade entre os operadores [10], [79].

Substituindo este resultado em (2.33), resulta

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^* & \hat{\mathbf{B}}^* \end{bmatrix} = \overleftarrow{w} \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \Pi_{\vec{W}^\perp} \vec{U}^T (\vec{U} \Pi_{\vec{W}^\perp} \vec{U}^T)^{-1} \vec{U}) \vec{W}^\dagger & \Pi_{\vec{W}^\perp} \vec{U}^T (\vec{U} \Pi_{\vec{W}^\perp} \vec{U}^T)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Observando (2.38), conclui-se que existe uma substituição implícita da solução de  $\hat{\mathbf{B}}^*$  no cálculo de  $\hat{\mathbf{A}}^*$ . Além disso [4], [10]

$$\hat{\mathbf{A}}^* = \overleftarrow{\mathbf{w}} \left[ \mathbf{I} - \Pi_{\overrightarrow{\mathbf{W}}^\perp} \overrightarrow{\mathbf{U}}^T \left[ \overrightarrow{\mathbf{U}} \Pi_{\overrightarrow{\mathbf{W}}^\perp} \overrightarrow{\mathbf{U}}^T \right]^{-1} \overrightarrow{\mathbf{U}} \right] \overrightarrow{\mathbf{W}}^\dagger \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} &= \overleftarrow{\mathbf{w}} /_{\overrightarrow{\mathbf{U}}} \overrightarrow{\mathbf{W}} \\ &= \overleftarrow{\mathbf{w}} (\overrightarrow{\mathbf{W}} \Pi_{\overrightarrow{\mathbf{U}}^\perp}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde  $\overleftarrow{\mathbf{w}} /_{\overrightarrow{\mathbf{U}}} \overrightarrow{\mathbf{W}}$  é um projetor oblíquo que projeta  $\overleftarrow{\mathbf{w}}$  ao longo da direção paralela ao subespaço gerado por  $\overrightarrow{\mathbf{U}}$ ,  $\langle \overrightarrow{\mathbf{U}} \rangle$ , no subespaço gerado por  $\overrightarrow{\mathbf{W}}$ ,  $\langle \overrightarrow{\mathbf{W}} \rangle$ . A notação  $\overrightarrow{\mathbf{W}}$  indica que a projeção é sobre o subespaço  $\langle \overrightarrow{\mathbf{W}} \rangle$ .

Para  $\hat{\mathbf{B}}^*$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}^* &= \overleftarrow{\mathbf{w}} \Pi_{\overrightarrow{\mathbf{X}}^\perp} \overrightarrow{\mathbf{U}}^T \left[ \overrightarrow{\mathbf{U}} \Pi_{\overrightarrow{\mathbf{W}}^\perp} \overrightarrow{\mathbf{U}}^T \right]^{-1} \\ &= \left[ \overleftarrow{\mathbf{w}} /_{\overrightarrow{\mathbf{W}}} \overrightarrow{\mathbf{U}} \right] \overrightarrow{\mathbf{U}}^\dagger \\ &= \overleftarrow{\mathbf{w}} \left[ \overrightarrow{\mathbf{U}} \Pi_{\overrightarrow{\mathbf{W}}^\perp} \right]^\dagger. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Utilizando a decomposição  $LQ$  definida em (2.35), resulta que

$$\overrightarrow{\mathbf{U}} = \mathbf{R}_{11} \mathbf{Q}_1^T,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}^T,$$

e

$$\overleftarrow{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T.$$

Substituindo estes valores em (2.40) e (2.41), resulta

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{R}_{32} \mathbf{R}_{22}^{-1},$$

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{R}_{31} - \mathbf{R}_{32} \mathbf{R}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{21}) \mathbf{R}_{11}^{-1},$$

o que prova o Lema. ■

A solução mínimos quadrados utilizando projetores, é uma nova interpretação para o cálculo das matrizes de sistemas dinâmicos utilizando o conceito de subespaço. Como pode ser observado, foi possível provar que, utilizar uma solução mínimos quadrados para o cálculo das matrizes  $\hat{\mathbf{A}}^*$  e  $\hat{\mathbf{B}}^*$  do modelo, é equivalente a utilizar projetores nos cálculos das respectivas matrizes. O efeito do projetor oblíquo na estimativa de  $\hat{\mathbf{A}}^*$  é o de pré-processamento de dados. Este pré-processamento tem o efeito de eliminar as componentes de  $\overrightarrow{\mathbf{U}}$  em  $\langle \overrightarrow{\mathbf{X}} \rangle$ . De modo similar ao cálculo de  $\hat{\mathbf{A}}^*$ , no cálculo de  $\hat{\mathbf{B}}^*$  existe o pré-processamento de dados onde se elimina

as componentes de  $\vec{X}$  em  $\langle \vec{U} \rangle$ . Pode-se ainda observar que existe uma substituição de  $\hat{A}^*$  no cálculo da matriz  $\hat{B}^*$ .

Na prova do Lema, a condição de invertibilidade das matrizes depende da escolha correta da ordem para o modelo e da condição de persistência para a excitação. Se a ordem for maior que a necessária, a matriz de estados e/ou de entradas podem ter linhas (colunas) linearmente dependentes das demais. Se a ordem for maior que a necessária, as matrizes possuirão inversas, mas as estimativas serão polarizadas (problema de submodelagem).

Devido a presença dos projetores oblíquos no cálculo de  $\hat{A}^*$  e  $\hat{B}^*$ , e considerando que estes projetores podem ter norma-2 maior que a unidade, o cálculo da estimativa via mínimos quadrados pode ser comprometido se não for respeitada a condição de descorrelação dos ruídos com relação aos sinais de entrada e saída do sistema. Ou seja, se os ruídos não forem correlacionados com os sinais de dados, estes podem ser amplificados pela ação da projeção oblíqua, o que comprometeria as estimativas. Este fato explica os problemas de estimativas mínimos quadrados que são polarizadas devido a utilização de dados que são correlacionados com ruídos.

### 2.4.3 Análise de convergência

Considerando que os dados medidos na saída da planta são contaminados por ruído branco, a utilização da solução mínimos quadrados para (2.33) possui a seguinte característica para a convergência dos parâmetros estimados [81]:

**Teorema 4** *Se os sinais correspondentes às entradas e saídas da planta forem descorrelacionados dos ruídos, e a classe definida para o modelo da planta pertencer à classe de subsistemas controláveis e observáveis, então as estimativas dos parâmetros convergirão para os valores reais quando o número de amostras tender para infinito.*

**Prova.** considerando a solução mínimos quadrados (2.33), obtém-se para  $\hat{\Theta}_{A^*B^*} = \begin{bmatrix} \hat{A}^* & \hat{B}^* \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{A^*B^*} &= \overleftarrow{w} \Phi^\dagger \\ &= \overleftarrow{w} \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \\ &= \Theta_{A^*B^*} \Phi \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} + \\ &\quad K^* \left( \sum_{l=0}^{j-1} (e^*(t+l) \phi^T(t+l)) \right) \left( \sum_{k=l}^{j-1} (\phi(t+l) \phi^T(t+l)) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\hat{\Theta}_{A^*B^*} \rightarrow \Theta_{A^*B^*}, j \rightarrow \infty \text{ com probabilidade } 1,$$

o que prova o teorema. ■

Na prova do teorema, o produto  $\mathbf{E}^*(t)\Phi^T [\Phi\Phi^T]^{-1}$  foi decomposto em

$$\sum_{l=0}^{j-1} (\mathbf{e}^*(t+l)\phi^T(t+l)) \left( \sum_{k=l}^{j-1} (\phi(t+k)\phi^T(t+k)) \right)^{-1}.$$

Se a ordem para o modelo for estimada corretamente, e se os produtos  $\mathbf{e}^*(t+l)\phi^T(t+l)$  forem nulos, a convergência das estimativas estará garantida. Para que os produtos  $\mathbf{e}^*(t+l)\phi^T(t+l)$  sejam nulos, é necessário que os sinais e ruídos sejam estatisticamente independentes (o conceito de independência estatística entre sinais e ruído, é equivalente ao conceito geométrico de ortogonalidade entre o subespaço linha gerado pelo ruído e o subespaço linha gerado pelos sinais).

Os desenvolvimentos apresentados para obter (2.22), diferem do resultado apresentado por Knudsen [61], onde os estados "futuros"  $\mathbf{x}(t+i)$

$$\mathbf{x}(t+i) = (\mathbf{A} - \mathbf{kC})^i \mathbf{x}(t) + \Psi \mathbf{u}(t) + \Omega \mathbf{y}(t), \quad (2.43)$$

são obtidos de forma recursiva utilizando a representação em espaço de estados do sistema. Na representação (2.43), as matrizes  $\Psi$  e  $\Omega$  são formadas pelas matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  da representação em espaço de estados em inovação. Nesta equação, os estados iniciais  $\mathbf{x}(t)$  não são conhecidos. A influência deste termo nas estimativas será tanto maior quanto menor for o número de amostras disponíveis para a estimação. Este termo não aparece em (2.22), devido ao conhecimento disponível de antemão de toda a seqüência de estados nessa estrutura.

Se os sinais medidos forem correlacionados com os ruídos, a análise de convergência apresentada não é mais válida, e as estimativas seriam polarizadas, independente do número de amostras utilizado. Em identificação, o problema de correlacionamento dos sinais com ruídos pode ser resolvido, por exemplo, utilizando variáveis instrumentais [75], ou métodos indiretos de identificação [34].

## 2.5 Resultados de Simulações e Experimentos

Nesta seção são apresentados alguns resultados de simulações e experimentos para verificar o desempenho do algoritmo proposto para identificação. O comportamento do método proposto para a estimação da ordem para modelos é analisado utilizando a comparação de seus resultados com os fornecidos pelo algoritmo *subid.m*. Este algoritmo está disponível em Van Overschee e De Moor [91].

O primeiro caso estudado teve por objetivo verificar o comportamento do algoritmo em ambiente conhecido. Neste caso, foi simulada uma planta de quarta ordem. Em seguida, efetuou-se dois experimentos. No primeiro, a planta utilizada foi um sistema viga-bola, que é

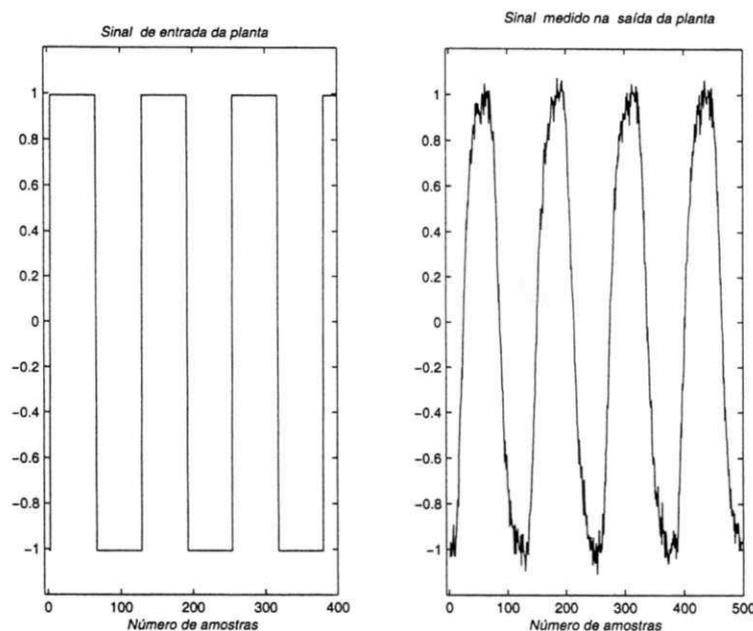


Figura 2.1: Amostra dos sinais de excitação e medido na saída da planta.

um sistema *SISO* de segunda ordem [91]. Os dados para este experimento encontram-se no arquivo *apl9.mat*, que é disponibilizado por Overschee e De Moor [91]. O segundo, é um motor, que possui modelo *TITO* de quarta ordem em espaço de estados [95]. A estimação de parâmetros foi efetuada apenas para o sistema *TITO*.

### 2.5.1 Resultados de simulação

Para verificar o comportamento do algoritmo em ambiente determinístico, utilizou-se simulação. Na simulação, foi utilizado o modelo

$$G(q) = \frac{1}{s^4 + 2,8s^3 + 3,96s^2 + 2,8s + 1},$$

que possui dois pares de pólos complexos conjugados em  $-0,7 \pm j0,7141$ .

Inicialmente, considerou-se a estimação na ausência de ruído. Em seguida, injetou-se o ruído  $N(0; 0,05)$  na medição da saída. A adição deste ruído ao sinal de saída, implica que a amplitude máxima do ruído é 10% da amplitude máxima do sinal. Uma amostra dos sinais de excitação e da saída contaminada pelo ruído é apresentada na Fig. 2.1.

Para verificar o comportamento do algoritmo para a variável *número de amostras*, procedeu-se a estimação da ordem com o número de amostras variando de 200 a 2540. O valor máximo esperado para a ordem do modelo foi considerado como sendo igual a vinte ( $n_e = 20$ ). Como resultado, obteve-se seqüências  $\mathbf{U}(t_1)$  e  $\mathbf{W}(t_1)$  com número de linhas igual a vinte. Em seguida,

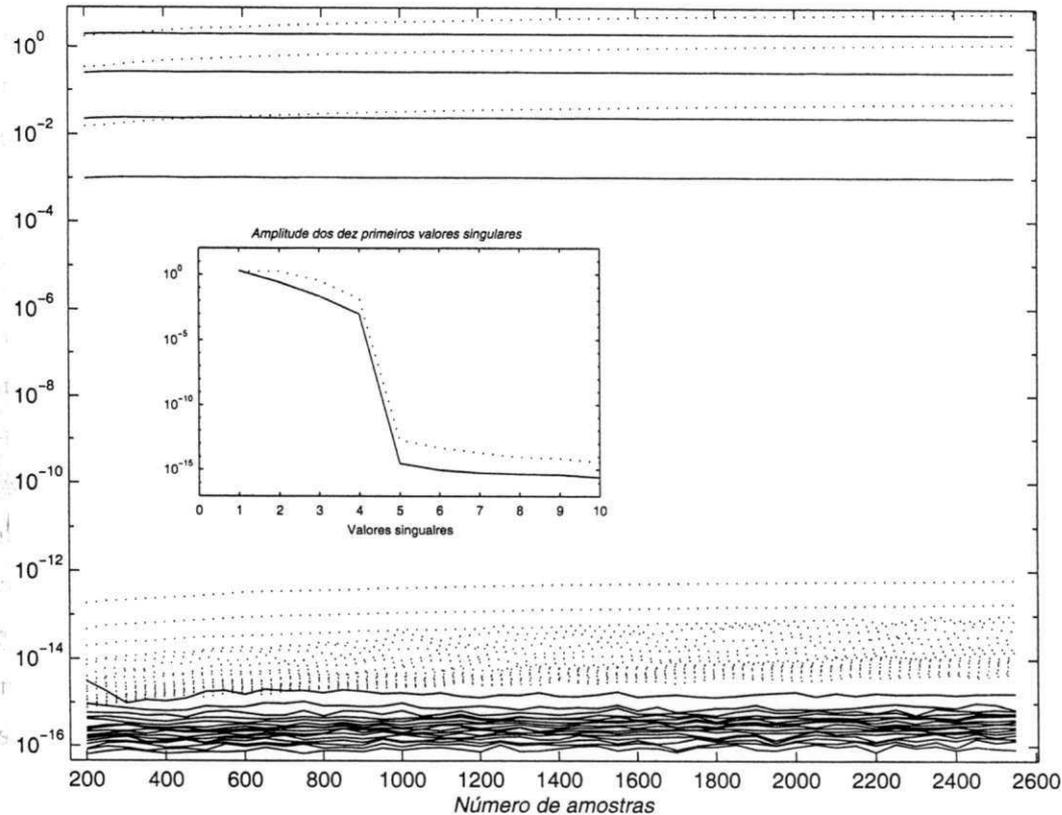


Figura 2.2: Valores singulares estimados. Curva contínua: Algoritmo de Van Overschee e De Moor; Curva pontilhada: Algoritmo proposto. Figura ao centro: Detalhe das amplitudes dos dez primeiros valores singulares estimados

procedeu-se a decomposição *SVD* da matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}^T(t) & \mathbf{W}^T(t) \end{bmatrix}^T$ . A *SVD* forneceu 40 valores singulares. Para a determinação da ordem, utilizou-se os 20 últimos valores singulares da decomposição (Fig. 2.2), já que os vinte eram devidos a inclusão de  $\mathbf{U}(t)$  em  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}^T(t) & \mathbf{W}^T(t) \end{bmatrix}^T$ ; que possui posto igual a 20. A inspeção dos valores fornecidos pelo método proposto, e pelo algoritmo *subid.m*, possibilitou determinar que o modelo deveria ser de quarta ordem, que é uma estimativa correta. A indicação da ordem foi baseada na existência de um salto da ordem de  $10^{-10}$  entre os quatro primeiros valores singulares e os dezesseis restantes (Fig. 2.2). Os quatro primeiros valores singulares foram classificados como pertencentes à classe de sinais, e os dezesseis últimos valores podem ser considerados como sendo nulos por estarem na faixa de erros numéricos do *MATLAB*.

Considerando a adição de ruído  $N(0; 0,05)$  na medição da saída da planta, efetuou-se a *SVD* apenas de  $\mathbf{W}(t)$ . A não utilização de  $\mathbf{U}(t)$  na composição da matriz a ser utilizada na determinação da ordem, deveu-se ao fato de que os ruídos presentes nas medições das saídas

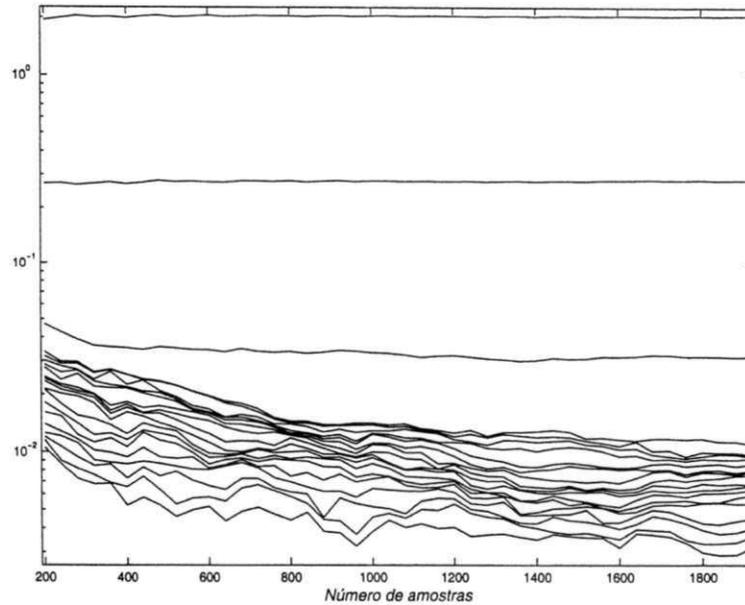


Figura 2.3: Valores singulares estimados pelo algoritmo de Van Overschee e De Moor sob a condição de adição de ruído  $N(0; 0,05)$  ao sinal medido.

poderiam mascarar as estimativas dos valores singulares correspondentes à matriz  $\mathbf{U}(t)$  em uma SVD da matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}^T(t) & \mathbf{W}^T(t) \end{bmatrix}^T$ . Para este caso, o algoritmo *subid.m* forneceu os resultados apresentados na Fig. 2.3. A estimativa fornecida pelo algoritmo proposto é apresentado na Fig. 2.4.

Da observação destes resultados, pode-se concluir que os algoritmos tiveram comportamento semelhante na estimação dos valores singulares. Nas estimativas, destacam-se três valores singulares. Os dezessete demais encontram-se agrupados, e são classificados como relacionados ao ruído. Utilizando esta análise, pode-se indicar um modelo de terceira ordem para a planta, que é uma estimativa incorreta.

Comparando as estimativas obtidas para os valores singulares para o caso determinístico e estocástico, pode-se concluir que a estimativa da ordem pode ser comprometida se não houver uma relação sinal/ruído adequada.

## 2.5.2 Resultados experimentais: Sistema SISO

Neste experimento, a planta analisada é um sistema viga-bola, que é de segunda ordem [91]. Inicialmente, considerou-se a aplicação dos métodos de estimação considerando que a ordem máxima esperada para o modelo fosse igual a 20, e que os sinais medidos estivessem contaminados por ruído. Primeiro, utilizou-se o algoritmo proposto. Os dados coletados na saída

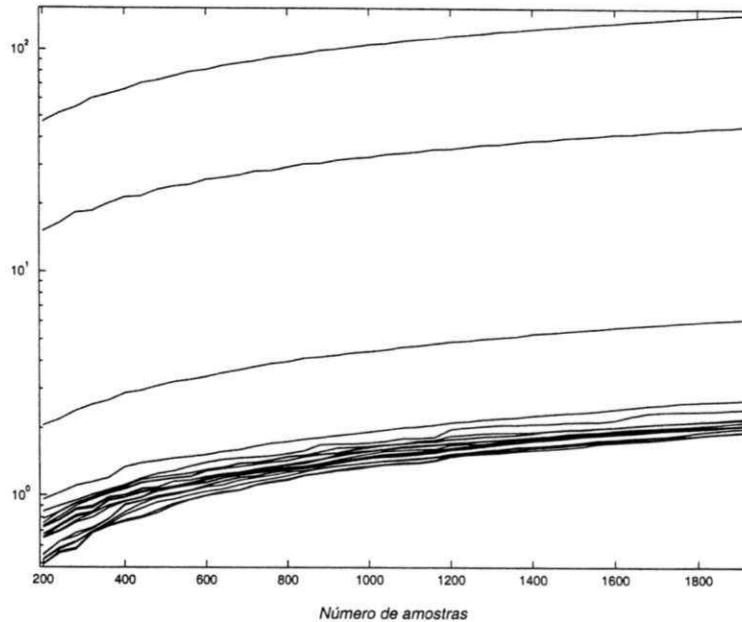


Figura 2.4: Valores singulares estimados pelo algoritmo proposto sob a condição de adição de ruído  $N(0; 0, 05)$  ao sinal medido.

sendo contaminados por ruído, indicou a necessidade de utilizar apenas a matriz de estados na estimativa da ordem para o modelo. Nas estimativas, utilizou a matriz  $\mathbf{W}(t) \in \mathbb{R}^{20 \times j}$ , com  $j = 150, \dots, 980$ .

Foi calculada a SVD para cada seqüência de estados. Observando os valores singulares para o conjunto de dados (Fig. 2.5), constatou-se a existência de um distanciamento significativo entre o segundo e terceiro valores singulares. Este distanciamento foi mais significativo ao se utilizar um número de amostras superior a 700 nas estimativas. A existência deste distanciamento, e o agrupamento dos demais 18 valores, sugere um modelo de segunda ordem para a planta.

Utilizando as estimativas dos valores singulares via algoritmo *subid.m* (Fig. 2.6), não foi possível definir claramente um modelo de segunda ordem para o sistema.

As simulações dos modelos obtidos nas estimativas de modelos de diferentes ordens comprovaram que o modelo de segunda ordem era a indicação correta da ordem para o sistema. Esta conclusão foi obtida ao se observar que os modelos de primeira e terceira ordem eram de qualidade inferior, se comparados ao de segunda.

Neste exemplo, verificou-se um desempenho superior do algoritmo proposto com relação ao algoritmo *subid.m* para todo o conjunto de dados utilizados na indicação da ordem para o modelo. Na realidade, para um número de amostras inferior a 400 amostras, não era possível indicar um modelo de segunda ordem para a planta utilizando o algoritmo *subid.m*.

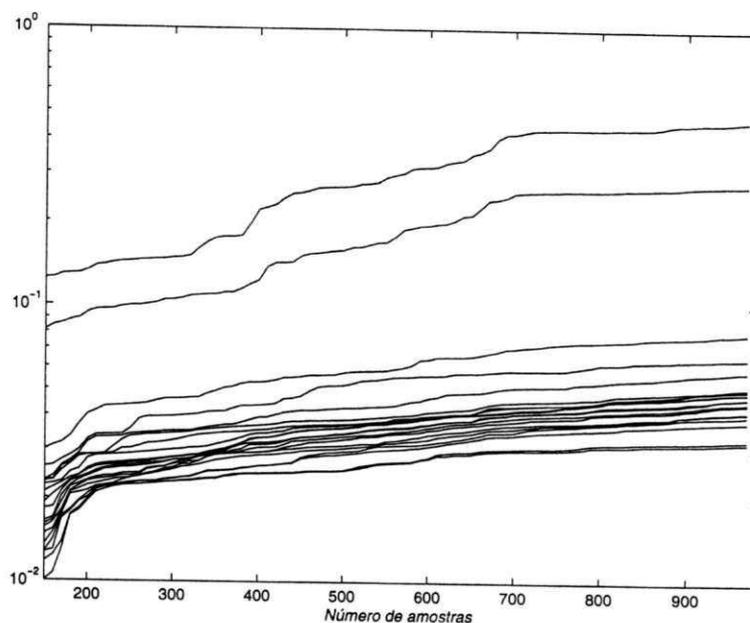


Figura 2.5: Valores singulares estimados pelo algoritmo proposto utilizando dados experimentais.

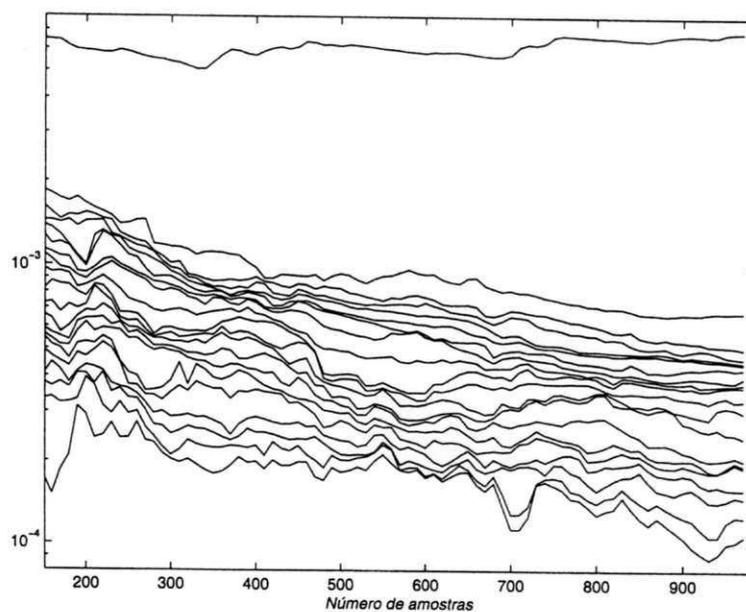


Figura 2.6: Valores singulares estimados pelo algoritmo de Van Overschee e De Moor utilizando dados experimentais.

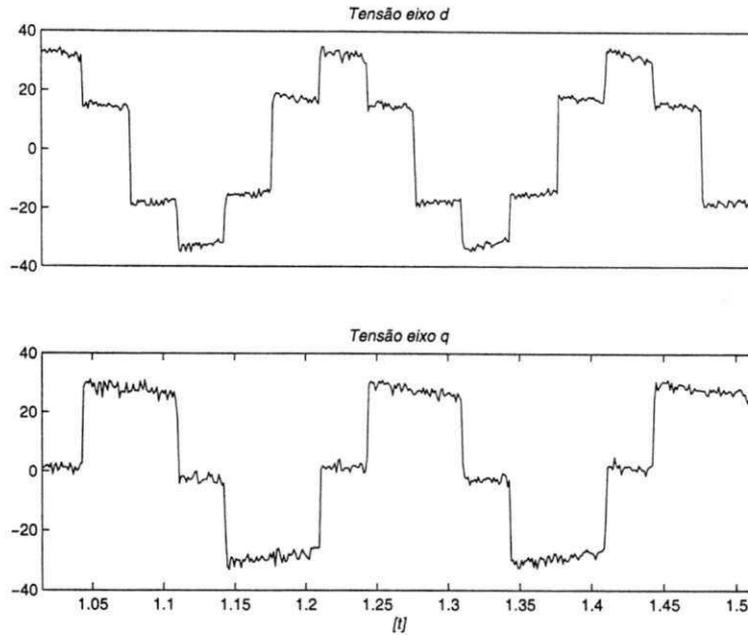


Figura 2.7: Amostras dos sinais de entrada utilizados nas estimativas.

### 2.5.3 Resultados experimentais: Sistema TITO

A planta analisada a seguir é um motor assíncrono cujo modelo tensão-corrente é descrito em Ribeiro et alli [95]. O modelo analítico fornecido pelos autores é apresentado na equação abaixo

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} i_{sd}(t) \\ \frac{d}{dt} i_{sq}(t) \\ \frac{d}{dt} \phi_{rd}(t) \\ \frac{d}{dt} \phi_{rq}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r_s+r_r(\frac{l_m}{l_r})^2}{\sigma l_s} & 0 & \frac{l_m}{\sigma l_s l_r \tau_r} & \frac{w_r l_m}{\sigma l_s l_r} \\ 0 & -\frac{r_s+r_r(\frac{l_m}{l_r})^2}{\sigma l_s} & -\frac{w_r l_m}{\sigma l_s l_r} & \frac{l_m}{\sigma l_s l_r \tau_r} \\ \frac{l_m}{\tau_r} & 0 & -\frac{1}{\tau_r} & -w_r \\ 0 & \frac{l_m}{\tau_r} & w_r & -\frac{1}{\tau_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd}(t) \\ i_{sq}(t) \\ \phi_{rd}(t) \\ \phi_{rq}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma l_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma l_s} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_{sd}(t) \\ v_{sq}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\begin{pmatrix} i_{sd}(t) \\ i_{sq}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} & i_{sq} & \phi_{rd}(t) & \phi_{rd}(t) \end{pmatrix}^T.$$

As variáveis de estados desse modelo são as correntes no estator e fluxos no rotor, nos eixos  $d$  e  $q$ , respectivamente. O modelo possui como entradas, as tensões nos eixos  $d$  e  $q$  (Fig. 2.7). Estes sinais foram coletados com operação em malha aberta utilizando período de amostragem de  $0,1ms$ . Os sinais utilizados nas estimativas foram reamostrados à uma razão de 1:12, o que modificou o período de amostragem para  $1,2ms$ . A estrutura utilizada no experimento é apresentada na Fig. 2.8.

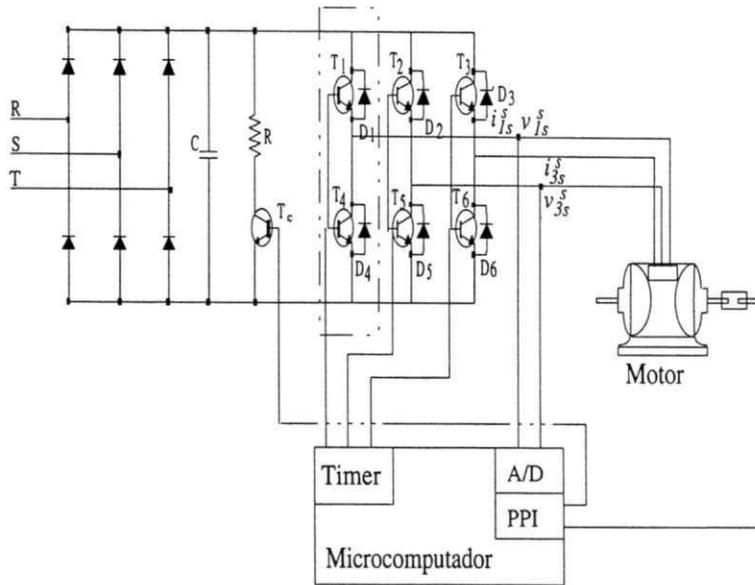


Figura 2.8: Estrutura utilizada no experimento do motor.

Inicialmente, efetuou-se a estimação da ordem utilizando o método proposto. Para a estimação da ordem, considerou-se que os ruídos que contaminaram as medições das entradas e saídas possuíam as mesmas características. Sob esta condição, a estimação da ordem foi efetuada utilizando a matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{U}^T(t) & \mathbf{W}^T(t) \end{bmatrix}^T$ . Na geração das seqüências, considerou-se que o modelo poderia ser no máximo de décima ordem. Como resultado desta consideração, obteve-se seqüências com vinte linhas, o que implica em 40 valores singulares a serem estimados na *SVD* da referida matriz. Nas estimativas, utilizou-se  $j$  variando de 200 a 2640 amostras. Aplicando a *SVD* sobre a seqüência de estados, e considerando que são os últimos vinte valores singulares que definem a ordem para o modelo, obteve-se as estimativas apresentadas na Fig. 2.9 para estes valores singulares. Considerando que uma aglomeração de valores singulares existe a partir do quarto valor singular, e que as medições foram contaminadas por ruído, pode-se indicar um modelo de quarta ordem para a planta, que é o valor correto.

O resultado fornecido pelo algoritmo *subid.m* (Fig. 2.10) também permitiu indicar que o modelo do motor deveria ser de quarta ordem. Este resultado foi superior ao apresentado pelo algoritmo proposto, já que, neste caso, o distanciamento dos valores singulares com relação ao ruído foi mais significativo, se comparado com o resultado obtido pelo algoritmo proposto.

Para esta planta, estimou-se os parâmetros do modelo. Utilizando as estimativas de  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{B}^*$ , fez-se a sua conversão para espaço de estados utilizando os resultados apresentados no Apêndice A. Os parâmetros foram estimados utilizando os resultados da subseção 2.4.2. Nas estimativas, utilizou-se diferentes números de amostras para verificar se os parâmetros apresentavam a característica de convergência assintótica ao se aumentar o número de amostras.

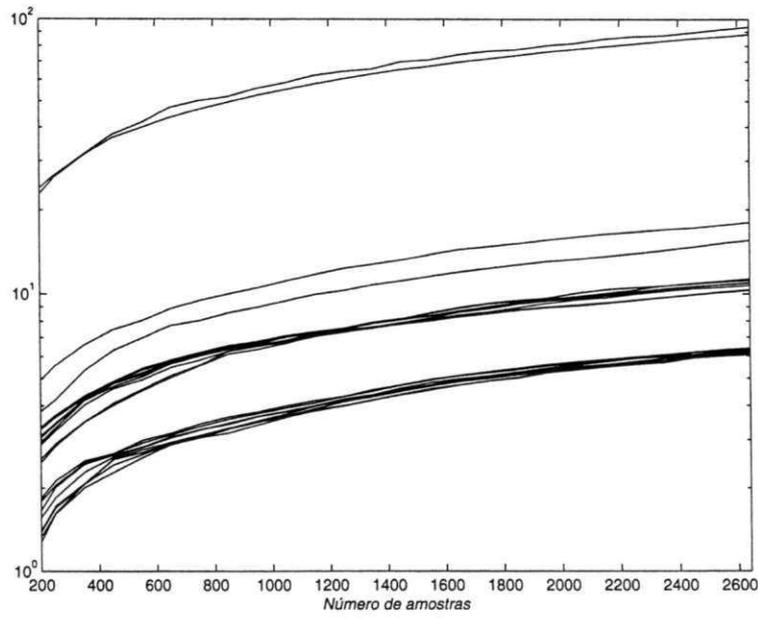


Figura 2.9: Valores singulares estimados pelo algoritmo proposto.

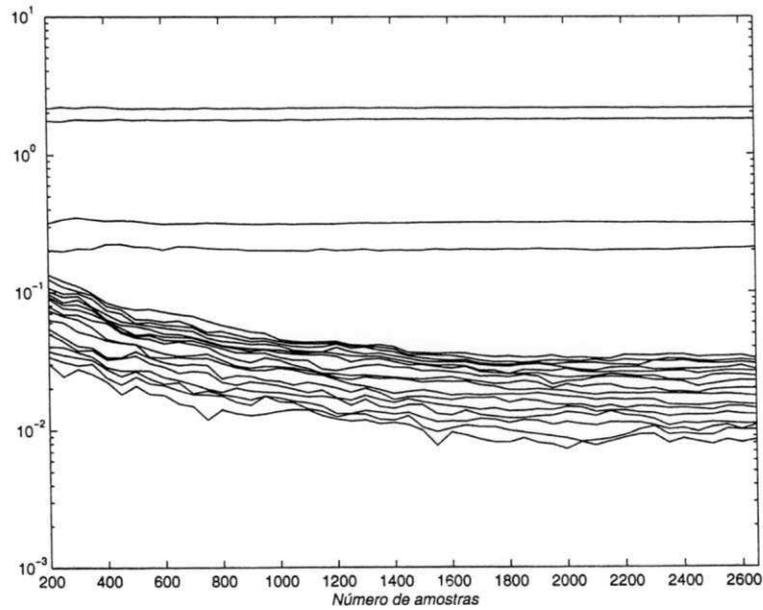


Figura 2.10: Valores singulares estimados pelo algoritmo de Van Overschee e De Moor.

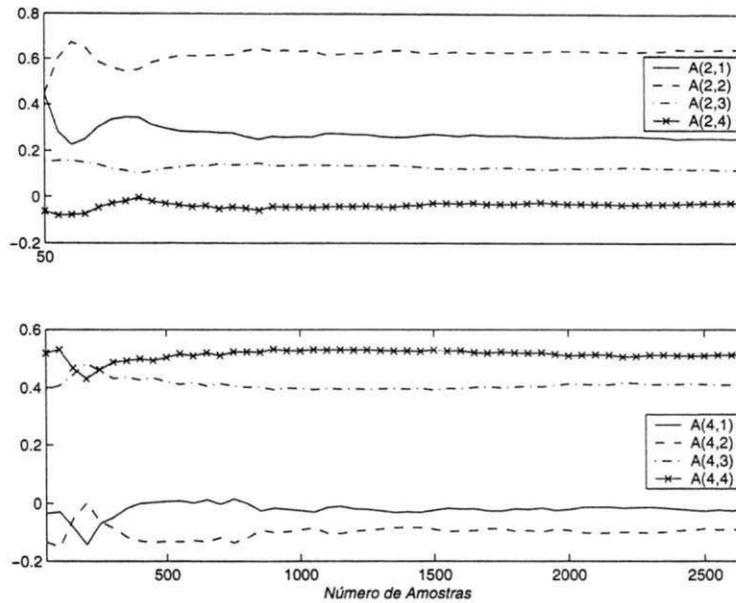


Figura 2.11: Parâmetros estimados da matriz **A** da representação em espaço de estados.

Observando-se os valores obtidos para as estimativas das matrizes **A** e **B** (Figs. 2.11 e 2.12), pode-se afirmar que as estimativas convergiram para um determinado valor. Esta afirmativa pode ser reforçada observando os erros cometidos pelas estimativas oferecidas pelos modelos para as saídas da planta (Fig. 2.13), que diminuíram com o aumento do número de amostras utilizadas nas estimativas, como era esperado para estimativas mínimos quadrados sob as condições impostas para a convergência do algoritmo. Os erros são calculados como o valor médio quadrático da diferença entre as saídas medidas da planta e a simulada utilizando o modelo estimado.

Para 1500 amostras, obteve-se a matriz **A**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,2718 & 0,6272 & 0,1233 & -0,0278 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,5216 & 0,4013 & -0,0943 & -0,0191 \end{pmatrix},$$

da representação em espaço de estados. Para a matriz **B**, obteve-se

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0107 & 0.0016 & 0.0118 & 0.0047 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0060 & 0.0091 & -0.0079 & 0.0153 \end{pmatrix}.$$

A Fig 2.14 apresenta os resultados de validação para este modelo. Como resultado da validação utilizando simulação, pode-se concluir que os resultados obtidos foram satisfatórios.

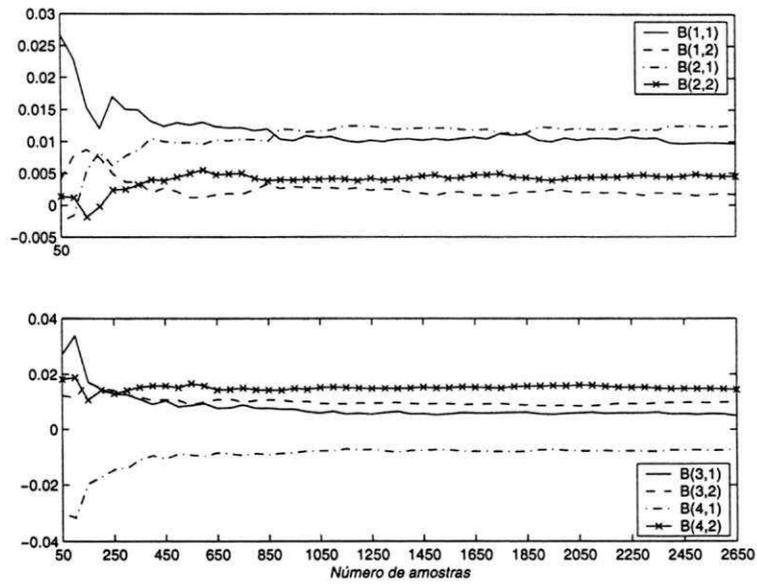


Figura 2.12: Parâmetros estimados da matriz  $B$  da representação em espaço de estados.

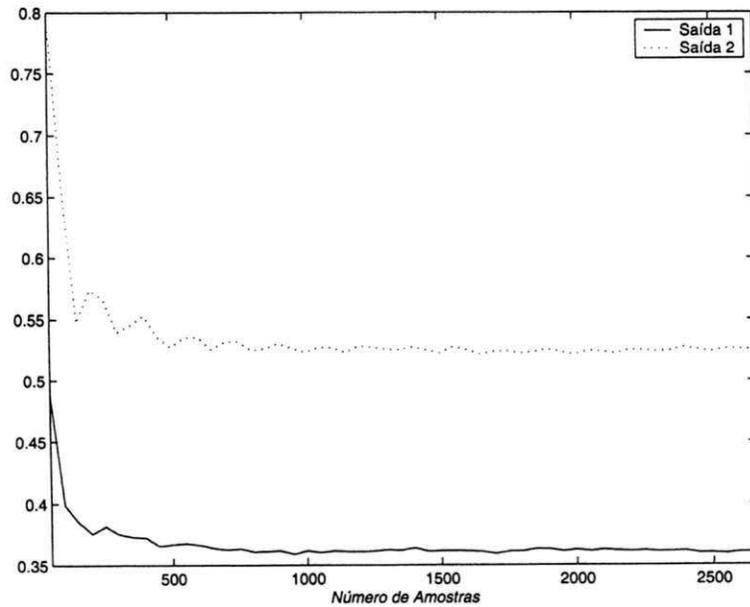


Figura 2.13: Erro médio quadrático para as saídas do modelo x número de amostras.

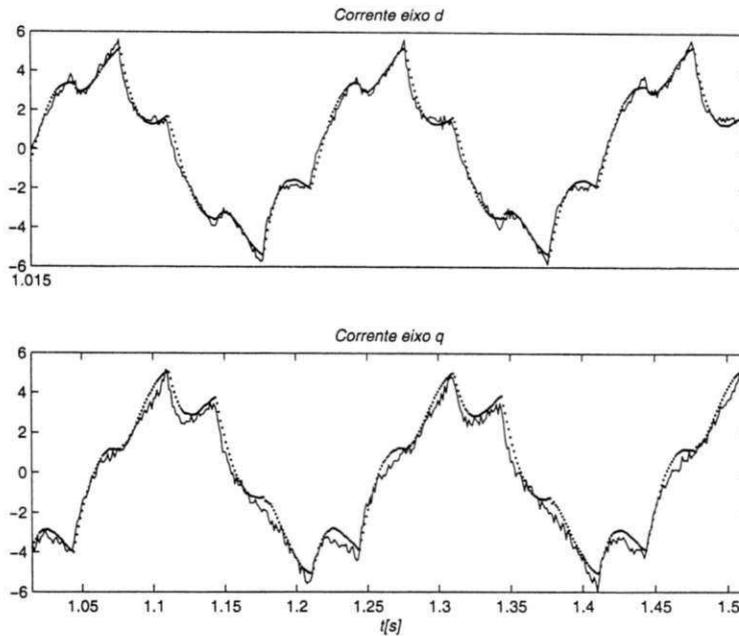


Figura 2.14: Resultados de validação do modelo estimado. Saída simulada: Curva contínua; Saída medida: Curva pontilhada.

O modelo estimado, ao ser transformado para o domínio de tempo contínuo utilizando o período de amostragem de  $1,2ms$ , possui como variáveis de estados, as saídas e derivadas das saídas da planta. Para obter as variáveis de estado em termos de correntes e fluxos nos eixos  $d$  e  $q$  do modelo analítico original apresentado por Ribeiro et alli [95], é necessário calcular a matriz de transformação de similaridade que transforma a variável de estados do modelo estimado na variável de estados do modelo analítico original.

## 2.6 Conclusão

Neste Capítulo foi apresentada uma metodologia que permite estimar a ordem e parâmetros de modelos lineares. Tendo os resultados de simulação e experimentais como base, pode-se concluir que o método proposto para a estimação da ordem para modelos apresentou resultados satisfatórios. O comportamento das estimativas paramétricas obtidas para os diferentes números de amostras utilizados, está em concordância com os resultados teóricos apresentados.

A necessidade de definir uma base adequada para a identificação em subespaço foi verificada ao se eliminar, na análise apresentada, o termo de polarização presente na análise de convergência apresentada em Knudsen [61].

## Capítulo 3

# PROJETO ITERATIVO UTILIZANDO ALOCAÇÃO DE PÓLOS

### 3.1 Introdução

O comportamento dinâmico de uma planta está relacionado com a configuração de seus pólos e zeros. É possível modificar o comportamento dinâmico da planta utilizando controladores. A utilização de controladores permite estabelecer a localização desejada para os pólos e zeros do sistema em malha fechada. Neste Capítulo, é proposta uma estrutura para controle que utiliza alocação de pólos e o princípio de operação da estrutura de controle *IMC* [83]. Para a sintonia do controlador, é proposta uma abordagem iterativa. A aplicação da técnica é restrita plantas estáveis ou pré-estabilizadas.

Para utilizar alocação de pólos, é necessário obter um modelo da planta e definir o desempenho em termos da posição desejada para os pólos do sistema em malha fechada. A definição da posição dos pólos define aproximadamente a largura de faixa do sistema. A largura de faixa que o sistema pode alcançar é estimada utilizando a abordagem empírica proposta por Lundh e Åström [73]. Na alocação de pólos proposta, não são impostas restrições à localização dos zeros do sistema resultante. O cancelamento de zeros da planta pode levar a ações lentas de controle, ou, até mesmo, à instabilidade do sistema, caso o modelo da planta possua zeros de fase não mínima.

Uma etapa importante no projeto, análise e implementação de controladores, é a que fornece a informação sobre o efeito estabilizante do controlador sobre o sistema. Em projetos iterativos, a sintonia do controlador contempla várias etapas de reprojeção do controlador. Para cada etapa

de reprojeto do controlador, deve-se buscar alguma informação sobre a estabilidade da malha resultante, antes de inserir o novo controlador no sistema. A informação sobre o efeito estabilizante do controlador sobre a malha é obtida através da estimativa da margem de ganho do sistema utilizando o experimento do relé [89], [105].

Nos experimentos efetuados, as estimações da ordem e parâmetros do modelo são efetuadas utilizando o algoritmo proposto no Capítulo 2, considerando que a estimativa do tempo morto é conhecida de antemão.

Este Capítulo segue a seguinte estrutura: Na seção 3.2 são caracterizadas as plantas que podem utilizar a técnica proposta de projeto iterativo de controladores. A modelagem e o critério utilizados na estimação do modelo são apresentados na seção 3.2.1. A especificação do desempenho para o sistema é feita na seção 3.3. Na seção 3.4.2, apresenta-se a estrutura de controle utilizada para implementar a lei de controle, e a respectiva parametrização do controlador. O método utilizado para estimar a margem de ganho do sistema resultante é apresentado na seção 3.5. A avaliação do desempenho do controlador que atua na malha é calculada utilizando o resultado da seção 3.6. Na seção 3.7 é apresentada a seqüência a ser seguida pelas etapas do procedimento iterativo de sintonia do controlador. Alguns resultados de simulações são apresentados na seção 3.8. Na seção 3.9 é apresentada a conclusão do Capítulo.

## 3.2 A Planta

As plantas consideradas pela abordagem proposta pertencem à classe de sistemas *SISO* estáveis, ou pré-estabilizados, invariantes no tempo que podem ser descritos pelo modelo discreto

$$\begin{aligned} A(q)y(t) &= B(q)u(t) + e(t) \\ y(t) &= G(q)u(t) + v(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $y(t)$  é a saída,  $u(t)$  a entrada e  $e(t)$  é um ruído branco e  $G(q)$  é a função de transferência da planta, que é dada por

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}. \quad (3.2)$$

### 3.2.1 Modelagem da Planta

O ponto de partida é considerar a existência de uma planta cuja dinâmica deve ser modificada utilizando controladores em malha fechada. Uma das etapas do projeto iterativo deve contemplar a estimação de um modelo para a planta. Inicialmente, estima-se o tempo morto da planta,  $\tau_d$ .

### 3.2.2 Estimativa do tempo morto $\tau_d$

O tempo morto é estimado utilizando a estimativa da resposta impulsiva da planta, como descrito por Ljung [70], utilizando os dados gerados pelo experimento de identificação em malha aberta, ou através da curva de resposta ao degrau da planta. Utilizando a função *cr.m* do pacote de identificação do *MATLAB* para estimar a resposta impulsiva da planta, obtém-se como resposta, uma curva em termos de atrasos. Neste caso, o tempo morto é determinado em termos do número de atrasos que sejam nulos ou negativos a partir de zero[70].

### 3.2.3 Critério para estimação do modelo

Considere que a planta é completamente desconhecida - uma "caixa preta" [70]. Para estimar o modelo, primeiro estima-se o tempo morto,  $\tau_d$ . A estimativa de  $\tau_d$  é necessária para diminuir a possibilidade de estimar zeros de fase não mínima para plantas que possuem tempo morto e não possuem tais zeros. Conhecido  $\tau_d$ , parte-se para a estimação da ordem e coeficientes dos polinômios do modelo utilizando o procedimento descrito no Capítulo 2.

Sob a condição de que a planta ainda não foi submetida a operação em malha fechada, o primeiro modelo é estimado utilizando os dados resultantes de um experimento efetuado com a planta operando em malha aberta. Nas demais etapas do procedimento iterativo, a identificação é efetuada com a planta operando em malha fechada. A abordagem adotada para as etapas de identificação em malha fechada é a direta [34].

O critério dos mínimos quadrados é aplicado na busca de um modelo para a planta que minimize o erro

$$\begin{aligned} e_i(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ &= [\hat{A}(q)y(t) - \hat{B}(q)u(t)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $\hat{y}(t) = (1 - \hat{A}(q))y(t) + \hat{B}(q)u(t)$ , que é resultante da estimativa da saída da planta utilizando o modelo,  $\hat{y}(t)$ , com relação a saída medida da planta,  $y(t)$ .

Para o cálculo do modelo, utiliza-se o critério

$$\begin{aligned} V(\theta, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t [F_d(q)e_i(i)]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t [e_i^f(i)]^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $F_d(q)$  filtra os dados utilizados nas estimativas. Este filtro será projetado de acordo com a condição para se obter o casamento entre os critérios de identificação e controle (obter um

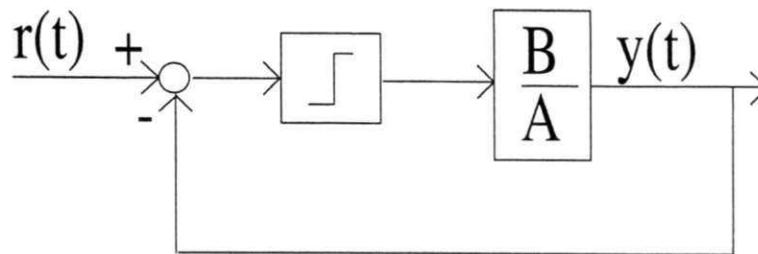


Figura 3.1: Experimento padrão do relé.

critério global, que deve ser minimizado nas etapas de identificação e controle do esquema iterativo).

### 3.3 Especificação do Desempenho

O ponto de partida do projeto do controlador, é estimar o desempenho que pode ser alcançado pelo sistema em malha fechada. Ao utilizar alocação de pólos, o desempenho passa a ser traduzido em termos da posição desejada para os pólos do sistema em malha fechada. A localização dos pólos define aproximadamente a largura de faixa do sistema, que por sua vez, está relacionada ao desempenho (tempo de resposta e de acomodação, por exemplo). Para a especificação da alocação de pólos, serão utilizados os resultados empíricos disponibilizados por Lundh e Åström [73].

#### 3.3.1 O experimento do relé

Ao discutir sintonia de controladores *PID*, sempre é lembrado na literatura o trabalho de Ziegler e Nichols [111]. Em um dos métodos propostos para a parametrização do controlador, era necessário efetuar um experimento que fornecesse o ganho  $K_u$  necessário para levar o sistema ao limite de estabilidade. Sob esta condição, a saída da planta é oscilante (condição de operação ciclo-limite). O período do sinal oscilante de saída,  $T_{osc}$ , é a outra grandeza utilizada no ajuste dos parâmetros do controlador. Este procedimento não é prático devido à necessidade de se levar o sistema a condição limite de estabilidade, que não é uma condição segura de operação da planta. Para contornar este problema, é utilizada a estrutura apresentada na Fig. 3.1 para a obtenção de  $K_u$  e  $T_{osc}$ . A proposta de utilização desta estrutura para a sintonia de controladores *PID* foi originalmente proposta por Åström et alli [111].

É possível obter o comportamento ciclo-limite para um grande número de processos utilizando o experimento do relé, como descrito pelo diagrama de blocos da Fig. 3.1. O comportamento ciclo-limite é devido à característica de operação dessa estrutura ao utilizar o relé sem histerese,

o que leva a saída do sistema a ser defasada de  $180^\circ$  da entrada, ( $\angle G(j\omega_{osc}) = 180^\circ$ ). Para elucidar este comportamento, suponha que o sistema possua um atraso e esteja em repouso. Ao iniciar a operação, considere  $r(t) = 0$ , o sinal de realimentação nulo e a saída do relé com valor  $d$ , que é a amplitude do relé. A entrada da planta passa a ser um sinal constante de amplitude  $d$ . Passado o tempo morto, a saída da planta atinge um valor  $0^+$ , o que provoca o chaveamento do relé devido ao sinal de erro no ramo de realimentação. Neste instante, o relé passa a fornecer um sinal constante para a entrada da planta de amplitude  $-d$ . Este comportamento é repetido seqüencialmente. Ao final, a entrada da planta passa a ser um sinal tipo onda quadrada, com período  $T_{osc}$ , e amplitude  $\pm d$ . Neste caso, a saída passa a ser um sinal oscilante de amplitude  $a$  e período  $T_{osc}$  [111]. Esta condição de operação é atingida automaticamente.

Para o cálculo do ganho sob esta condição de operação, utiliza-se a decomposição em série de Fourier do sinal de entrada e estudo do comportamento do relé via função descritiva [89]. A decomposição em série de Fourier fornece a amplitude da primeira harmônica do sinal periódico que excita a planta como sendo  $\frac{4d}{\pi}$ . Para a amplitude do sinal de saída da planta, resulta

$$a = \frac{4d}{\pi} |G(j\omega_{osc})|.$$

Esta condição de operação ocorre para

$$\angle G(j\omega_{osc}) = 180^\circ; K_u = \frac{4d}{\pi a} = \frac{1}{|G(j\omega_{osc})|},$$

onde  $K_u$  pode ser considerado como o ganho equivalente do relé para a transmissão de um sinal senoidal de amplitude  $a$ . A condição para obter oscilação está relacionada à curva de Nyquist de  $G(j\omega)$  interceptar a curva correspondente à função descritiva do relé. Na ausência de zona de histerese no relé, a interseção ocorre sobre eixo real negativo do diagrama de Nyquist. Isto se deve à condição de oscilação para o teste do relé, que está relacionado a equação característica do sistema

$$1 + N(a)G(j\omega_{osc}) = 0,$$

que é definida pelo diagrama de blocos da Fig. 3.1, onde  $N(a)$  é a função descritiva do relé. Para o caso do relé sem histerese, resulta que [89]

$$N(a) = \frac{4d}{\pi a}.$$

Como resultado, obtém-se ao final do experimento um sinal oscilante de frequência  $\omega_{osc} = \frac{2\pi}{T_{osc}}$ , que ocorre para a condição de ganho  $K_u$ .

### 3.3.2 Cálculo do desempenho

Para calcular o desempenho que pode ser atingido pelo sistema em malha fechada, falta obter a constante de tempo máxima da planta,  $\tau_{\max}$ . Para o cálculo de  $\tau_{\max}$ , é possível utilizar estimativa de um modelo via método dos mínimos quadrados, ou inspeção da curva de resposta ao degrau da planta [9], por exemplo. Se for utilizada a curva de resposta ao degrau,  $\tau_{\max}$  irá traduzir o comportamento da planta em termos de um modelo de primeira. Esta técnica pode ser aplicada se a curva de resposta ao degrau não apresentar oscilações durante o regime transitório. Se for estimado um modelo de ordem superior à primeira, deve-se determinar as constantes de tempo do modelo contínuo para se determinar o valor da constante de tempo máxima.

Utilizando a estimativa da constante de tempo mais lenta da planta,  $\tau_{\max}$ , e a estimativa da frequência de oscilação,  $w_{osc}$ , que é fornecida pelo experimento do relé descrito pela Fig. 3.1, resulta a estimativa de  $w_0$

$$w_0 = 0,5w_{osc} + \frac{1}{\tau_{\max}} + \frac{0,12}{w_{osc}\tau_{\max}^2} \text{rad/s}, \quad (3.5)$$

obtida empiricamente [73], que define a distância dos pólos de malha fechada com relação à origem.

A localização das raízes para os pólos é então definida no domínio de Laplace por [73]

$$\begin{aligned} A_c(s) &= s + w_0, \\ A_c(s) &= s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2, \\ A_c(s) &= (s + w_0)(s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

para controladores de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente. Desde que no projeto, os pólos devem ser equidistantes da origem de  $w_0$ , e que foi definido um coeficiente de amortecimento de  $\xi = 0,7$  [73], resulta que os pólos do polinômio  $A_c(s)$ , que define a alocação de pólos, possui configuração Butterworth [27]. Esta definição de  $A_c(s)$ , corresponde à utilização do critério de projeto *ITAE* para a definição do desempenho do controlador. Para a implementação digital do controlador, é necessária a discretização deste polinômio utilizando o período de amostragem utilizado para implementar o controlador discreto (procedimento que fornecerá o polinômio discreto  $A_c(q)$  utilizado na implementação do controlador).

## 3.4 Parametrização do Controlador

O controlador é projetado utilizando o princípio de operação da estrutura de controle *IMC*, que é ilustrada pelo diagrama de blocos da Fig. 3.2. Neste diagrama,  $r(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\hat{y}(t)$  e  $u(t)$

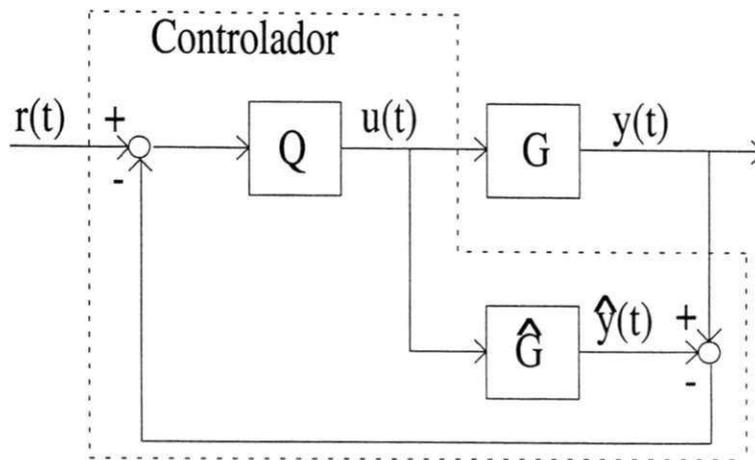


Figura 3.2: Estrutura de controle IMC.

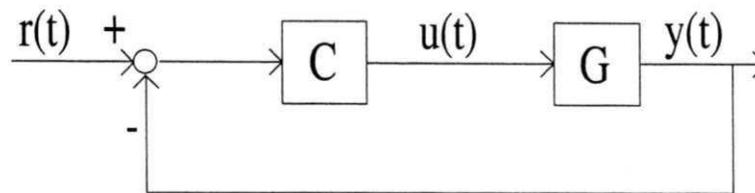


Figura 3.3: Estrutura clássica de controle.

correspondem à referência, saída da planta, saída do modelo e sinal de controle, respectivamente. No ramo de realimentação dessa estrutura, estarão presentes apenas os efeitos das perturbações, pequenas modificações na dinâmica da planta e efeitos da modelagem imperfeita, que justificam a utilização de controle em malha fechada. A realimentação das informações referentes às fontes mencionadas, permite a diminuição ou eliminação de seus efeitos, que é de degradação do desempenho.

Através de manipulações do diagrama de blocos da Fig. 3.2, obtém-se o controlador  $C(q)$

$$C(q) = \frac{Q(q)}{1 - \hat{G}(q)Q(q)}, \quad (3.7)$$

da estrutura clássica de controle, que é apresentada no diagrama de blocos da Fig. 3.3.

No projeto do controlador,  $Q(q)$  é projetado utilizando o princípio da certeza da equivalência [111]. Isto é, considerando-se que  $G(q) = \hat{G}(q)$ . Sob esta condição, e considerando que não existem perturbações atuando sobre o sistema, resulta para a saída do sistema

$$y(t) = Q(q)G(q)r(t). \quad (3.8)$$

Esta equação indica que o sistema opera em malha aberta, ao serem verificadas as condições de operação idealizadas anteriormente. Sob esta condição, observando (3.8), pode-se concluir que

o sistema é estável se  $Q(q)$  e  $G(q)$  forem estáveis. Este fato permite utilizar a estrutura *IMC* para parametrizar todos os controladores  $C(q)$  que estabilizam o sistema, utilizando o conjunto formado pelos  $Q(q)$  estáveis. A definição de todo o conjunto  $C(q)$  que estabiliza o sistema não é trivial utilizando a estrutura clássica.

### 3.4.1 Projeto nominal do controlador

Considerando a condição de operação definida pela equação (3.8), define-se a alocação utilizando

$$Q(q) = k_c \frac{\widehat{A}(q)}{A_c(q)}, \quad (3.9)$$

onde  $\text{grau}(A_c(q)) \geq \text{grau}(\widehat{A}(q)) = n$  garante a implementação física ou causalidade do controlador.

O ganho  $k_c$  do controlador é calculado utilizando a equação

$$k_c = \frac{A_c(1)}{\widehat{B}(1)}, \quad (3.10)$$

o que permite obter um controlador que cancela os pólos da planta, adiciona a dinâmica desejada e fornece ganho de regime unitário.

Para  $Q(q)$  definido de acordo com (3.9), e considerando a estrutura de controle *IMC* (Fig. 3.2), utilizando o polinômio observador  $E(q)$  e algumas manipulações algébricas, pode-se escrever a lei de controle

$$u(t) = [E(q) - A_c(q) + k_c \widehat{B}(q)] \frac{u(t)}{E(q)} + k_c \widehat{A}(q) \left[ \frac{r(t)}{E(q)} - \frac{y(t)}{E(q)} \right], \quad (3.11)$$

onde  $E(q)$  é um polinômio mônico estável

$$E(q) = q^{n_c} + e_{n_c-1}q^{n_c-1} + \dots + qe_1 + e_0.$$

Para a implementação da lei de controle (3.11) seria necessária a estrutura de controle apresentada na Fig. 3.4. A lei de controle (3.11) refere-se à situação do controlador projetado utilizando o princípio da certeza da equivalência. A obtenção desta lei de controle é apresentada sob a forma de um lema da seguinte forma:

**Lema 5** *O controlador descrito em (3.11) é equivalente ao controlador IMC com pólos alocados em  $A_c(q)$ .*

*Prova.* Por inspeção do diagrama de blocos da Fig. 3.2, e considerando (3.9), pode-se escrever

$$A_c(q)u(t) = k_c \widehat{A}(q)[r(t) - y(t) + \widehat{y}(t)]. \quad (3.12)$$

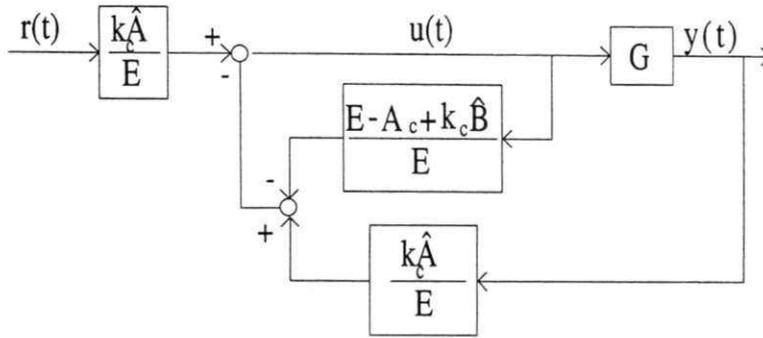


Figura 3.4: Estrutura de controle equivalente.

Desde que para o caso determinístico,  $\hat{A}(q)y(t) = \hat{B}(q)u(t)$ , resulta para (3.12)

$$[A_c(q) - k_c \hat{B}(q)]u(t) = k_c \hat{A}(q)[r(t) - y(t)]. \quad (3.13)$$

Adicionando-se  $[E(q) - A_c(q) + k_c \hat{B}(q)]u(t)$  em ambos os lados de (3.13), obtém-se a lei de controle definida em (3.11), o que prova o lema. ■

Diferentes escolhas do polinômio observador  $E(q)$  em (3.11), levam a diferentes leis de controle. As análises consideradas a seguir são efetuadas para o caso de  $E(q) = A_c(q)$ , o que permite a implementação do controlador com as características desejadas.

### 3.4.2 Estrutura utilizada para implementação

Considere o sistema descrito pelo diagrama de blocos da Fig. 3.4 e a escolha do polinômio observador como sendo  $E(q) = A_c(q)$ . Neste caso, a lei de controle pode ser reescrita como sendo

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{k_c \hat{A}(q)}{A_c(q)} r(t) - \frac{k_c}{A_c(q)} [\hat{A}(q)y(t) - \hat{B}(q)u(t)] \\ &= \frac{k_c \hat{A}(q)}{A_c(q)} r(t) - e_c(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

O sinal  $e_c(t)$  em (3.14), corresponde ao erro de controle devido à modelagem imperfeita da planta e à presença de perturbações atuando sobre o sistema. A realimentação apenas de  $e_c(t)$  é característica do comportamento da estrutura IMC. A estrutura para implementar (3.14) é apresentada na Fig. 3.5.

Através de simples manipulação do diagrama de blocos da Fig. 3.5, chega-se à estrutura de controle clássica, que é apresentada no diagrama de blocos da Fig. 3.6. Se não houver atraso no

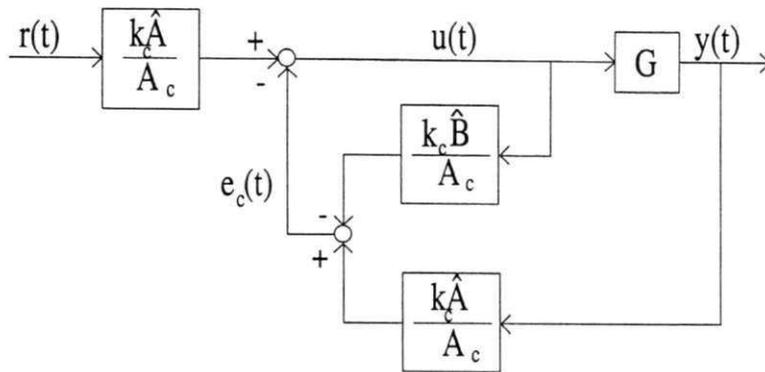


Figura 3.5: Nova estrutura de controle.

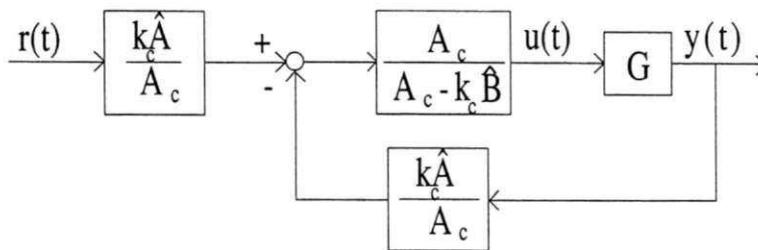


Figura 3.6: Estrutura de controle clássica equivalente.

modelo estimado, os últimos coeficientes de  $A_c(q)$  e  $k_c \hat{B}(q)$  serão iguais, e se anularão. Portanto, o controlador resultante terá inerentemente a ação de controle integral, a menos que haja tempo morto no modelo da planta. Se houver tempo morto, os últimos termos dos polinômios na soma  $A_c(q) - k_c \hat{B}(q)$  não mais se cancelarão, o que não permitirá obter a ação de controle integral.

Por inspeção do diagrama de blocos da Fig. 3.5, pode-se escrever a seguinte função de transferência de  $r(t)$  para  $y(t)$

$$T(q) = k_c \frac{\hat{A}(q)B(q)}{A(q)A_c(q)} \frac{1}{1 + \frac{k_c}{A_c(q)A(q)}(\hat{A}(q)B(q) - A(q)\hat{B}(q))}. \quad (3.15)$$

Observando esta equação, pode-se concluir que: Se a modelagem for perfeita, os zeros do sistema em malha fechada serão definidos pelos zeros da planta; a estabilidade do sistema dependerá da magnitude do segundo termo à direita da igualdade, que descreve o descasamento entre planta e modelo ponderado por  $\frac{k_c}{A_c}$ ; mesmo que o erro de modelagem seja elevado, se  $\hat{A}(q)B(q) = A(q)\hat{B}(q)$ , a estabilidade do sistema não será comprometida, independente da magnitude do erro.

Para a sintonia fina do controlador, é utilizada uma abordagem iterativa. Para que haja uma minimização dos critérios em cada etapa do procedimento, é necessário que o projeto da identificação seja relevante para o projeto do controlador [98]. No projeto, a relevância é obtida através do casamento dos critérios de identificação e controle, que é alcançado utilizando um

projeto específico para o filtro de dados  $F_d$ .

### 3.4.3 Casando os critérios de identificação e controle

Partindo da lei de controle (3.14), para a obtenção de um índice de desempenho global (casamento dos critérios de identificação e controle), o principal resultado apresentado por Åström [105] pode ser reescrito para o presente caso como sendo:

**Teorema 6** *Se for utilizado o método dos mínimos quadrados na estimativa do modelo que minimiza o erro (3.3) e o critério de desempenho do controlador for calculado utilizando o erro de controle  $e_c(t)$ , a condição para obter a igualdade entre estes erros (obter um índice de desempenho global), é efetuar a identificação em malha fechada utilizando o filtro*

$$F_d(q) = \frac{k_c}{A_c(q)},$$

para os dados utilizados na estimação, e uma estrutura ARX para o modelo.

**Prova.** O erro de controle na estrutura de controle descrita pelo diagrama de blocos da Fig. 3.5 é dado por

$$e_c(t) = \frac{k_c}{A_c(q)} [\hat{A}(q)y(t) - \hat{B}(q)u(t)]. \quad (3.16)$$

Para o resíduo da estimativa da saída da planta utilizando o modelo estimado, resulta

$$e_i(t) = [\hat{A}(q)y(t) - \hat{B}(q)u(t)]. \quad (3.17)$$

Comparando (3.16) e (3.17), verifica-se que a igualdade destas equações ocorre se for utilizado o filtro

$$F_d(q) = \frac{k_c}{A_c(q)}, \quad (3.18)$$

para os dados a serem utilizados na estimação. ■

Não é possível obter a minimização direta de (3.16), já que os sinais  $y(t)$  e  $u(t)$  são dependentes dos parâmetros  $\hat{A}(q)$ ,  $\hat{B}(q)$  e  $Q(q)$ , que são desconhecidos - problema dual de controle que não possui solução prática [120]. Para a solução deste problema de minimização, será proposta uma abordagem iterativa, que envolve várias etapas de projeto da identificação e do controlador.

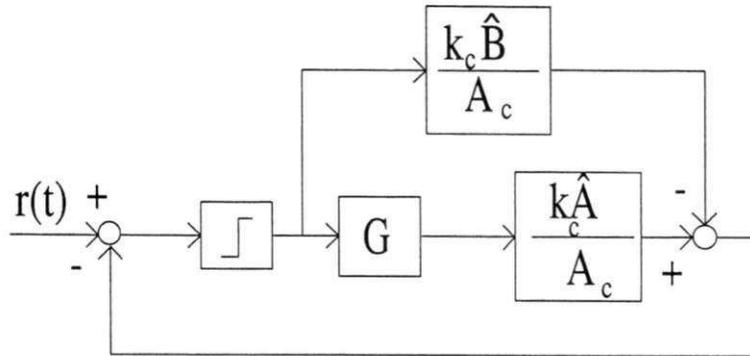


Figura 3.7: Estrutura para teste da estabilidade da malha utilizando o controlador projetado.

### 3.5 Análise da Estabilidade

Tendo concluído o projeto do controlador para desempenho nominal, é necessário obter alguma informação quanto ao efeito estabilizante do controlador projetado sobre o sistema. O estudo da estabilidade da estrutura resultante é efetuado utilizando o experimento do relé, como sugerido por Åström [106].

#### 3.5.1 Estimativa da Margem de Ganho

A inserção do controlador projetado na malha deve ser precedida de algum teste que valide o controlador do ponto de vista de seu efeito estabilizante sobre o sistema em malha fechada resultante. Como observado na seção 3.4.2, se a planta e  $Q$  forem estáveis, a estabilidade da malha irá depender apenas do descasamento entre planta e modelo.

Para testar se o controlador projetado estabiliza a malha descrita pelo diagrama de blocos da Fig. 3.5, será utilizado o método do relé [89], [106] para estimar a margem de ganho da malha fechada presente nesta estrutura. Para a implementação do experimento do relé, é utilizada a estrutura descrita pelo diagrama de blocos da Fig. 3.7, já que a estabilidade do sistema é independente da pré-filtragem do sinal de referência.

O experimento do relé fornece a estimativa onde a função de transferência

$$G_{fb} = (\hat{A}B - A\hat{B}) \frac{k_c}{A_c A} \tag{3.19}$$

apresenta a condição de operação ciclo-limite. Isto é, onde  $\angle G_{fb}(j\omega_{osc}) = 180^\circ$  para um ganho  $K_u$  da função descritiva do relé.

Como resultado do experimento, pode-se calcular o ganho  $K_u$  - que é a margem de ganho da malha analisada - como sendo

$$K_u = \frac{4d}{\pi a} = \frac{1}{|G_{fb}(j\omega_{osc})|} \tag{3.20}$$

Da estimativa obtida em (3.20), e da condição de estabilidade de Nyquist, pode-se concluir que a estabilidade da malha fechada estará condicionada à magnitude do descasamento entre planta e modelo, que é indicado pelo termo  $\widehat{A}B - A\widehat{B}$  em (3.19), na frequência onde ocorre oscilação. Isto é, onde ocorre o cruzamento da curva de Nyquist de (3.19) e a reta correspondente ao eixo real negativo do diagrama, que é a curva da função descritiva do relé sem histerese.

A margem de ganho estimada permite averiguar o cumprimento ou não da especificação de projeto “margem de ganho”, que pode ser interpretada como uma margem de segurança para a operação do sistema.

### 3.5.2 Desempenho Nominal versus Estabilidade

Como observado na seção 3.5, a estabilidade da malha depende da qualidade do modelo estimado. Caso não seja obtida uma margem de ganho que permita a operação segura do sistema utilizando o controlador projetado a partir dos modelos disponíveis, o desempenho deve ser sacrificado para se obter estabilidade. Para contornar o problema de estabilidade mencionado, admite-se um desempenho para o sistema, que é inferior ao nominal especificado em (3.5). O novo desempenho, que é calculado a partir de um truncamento em (3.5), passa a ser

$$w_0 = 0,5w_{osc}rad/s.$$

A frequência  $w_0$  é utilizada para definir o novo polinômio  $A_{cr}$ , que define a nova alocação para o novo desempenho.

Ao final da sintonia iterativa, se não for possível retornar ao desempenho definido por (3.5), admite-se que o desempenho nominal não pode ser alcançado para a planta em consideração. Caso seja possível recuperar o desempenho nominal definido por (3.5), o projeto nominal será preservado. Neste caso, a característica interessante da sintonia iterativa de controladores, é ressaltada; que é a de fornecer modelos em malha fechada que sejam relevantes para o projeto de controladores.

## 3.6 Avaliação do Desempenho Obtido

Para avaliar o desempenho obtido pelo controlador que atua na malha, será utilizado o critério de desempenho

$$J_j^N = \|r(t) - y(t)\|_2 = \|e_s(t)\|_2,$$

onde  $N$  é a duração do experimento e  $j$  indica que o desempenho foi calculado para o  $j$ -ésimo controlador atuando na malha. O algoritmo irá utilizar esta medida de avaliação para auxiliar

na definição da parada ou não da sintonia. A avaliação do desempenho obtido pelo controlador que atua na etapa iterativa atual, com relação ao desempenho fornecido pelo controlador que atuou na malha na etapa anterior, é calculada por

$$\alpha_j = \frac{J_j^N - J_{j+1}^N}{J_j^N} \times 100\%, \quad (3.21)$$

Se  $\alpha_j > \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é o mínimo admitido para a melhoria do desempenho entre duas etapas consecutivas de sintonia do controlador, que é definido de antemão pelo projetista, o procedimento iterativo prossegue. Caso contrário, o procedimento é encerrado.

### 3.7 O Algoritmo

As etapas da sintonia iterativa do controlador são efetuadas de acordo com o fluxograma da Fig. 3.8. Observando este fluxograma, pode-se distinguir duas fases distintas de operação da planta. Na primeira, a planta opera em malha aberta. Na segunda, em malha fechada.

Inicialmente, é projetado e executado um experimento de identificação com a planta operando em malha aberta. Os sinais obtidos são utilizados na estimação de um modelo. Utilizando o procedimento da seção 3.3, calcula-se  $w_0$  e  $A_c(q)$ . Estimado o modelo e definido  $A_c(q)$ , parametriza-se o controlador utilizando (3.9). A inserção do controlador na malha dependerá do resultado do teste de estabilidade descrito na seção 3.5. Caso passe no teste, a malha poderá ser fechada com este controlador, e o procedimento iterativo continua com a planta operando em malha fechada.

Inserido o controlador na malha, efetua-se um experimento de identificação, calcula-se o desempenho utilizando o procedimento da seção 3.3.2, estima-se o modelo e projeta-se um novo controlador baseado neste modelo. As etapas de identificação e controle continuam até que não se verifique melhoria considerável de  $\alpha$ , com relação a especificada,  $\epsilon$ .

Da inspeção do fluxograma, pode-se concluir que a sintonia do controlador pelo método proposto não ocorre em um caso - se não for possível fechar a malha para o desempenho mínimo considerado:  $w_0 = 0,5w_{osc}$ . Caso seja admitido um desempenho inferior a  $0,5w_{sc}$ , o procedimento poderia prosseguir. Neste caso, o retorno à especificação poderia ser efetuado após finalizar a sintonia para o desempenho especificado.

### 3.8 Simulações

Com o objetivo de verificar o comportamento da abordagem proposta para controle iterativo foram efetuadas simulações. A planta utilizada nas simulações foi de oitava ordem com função

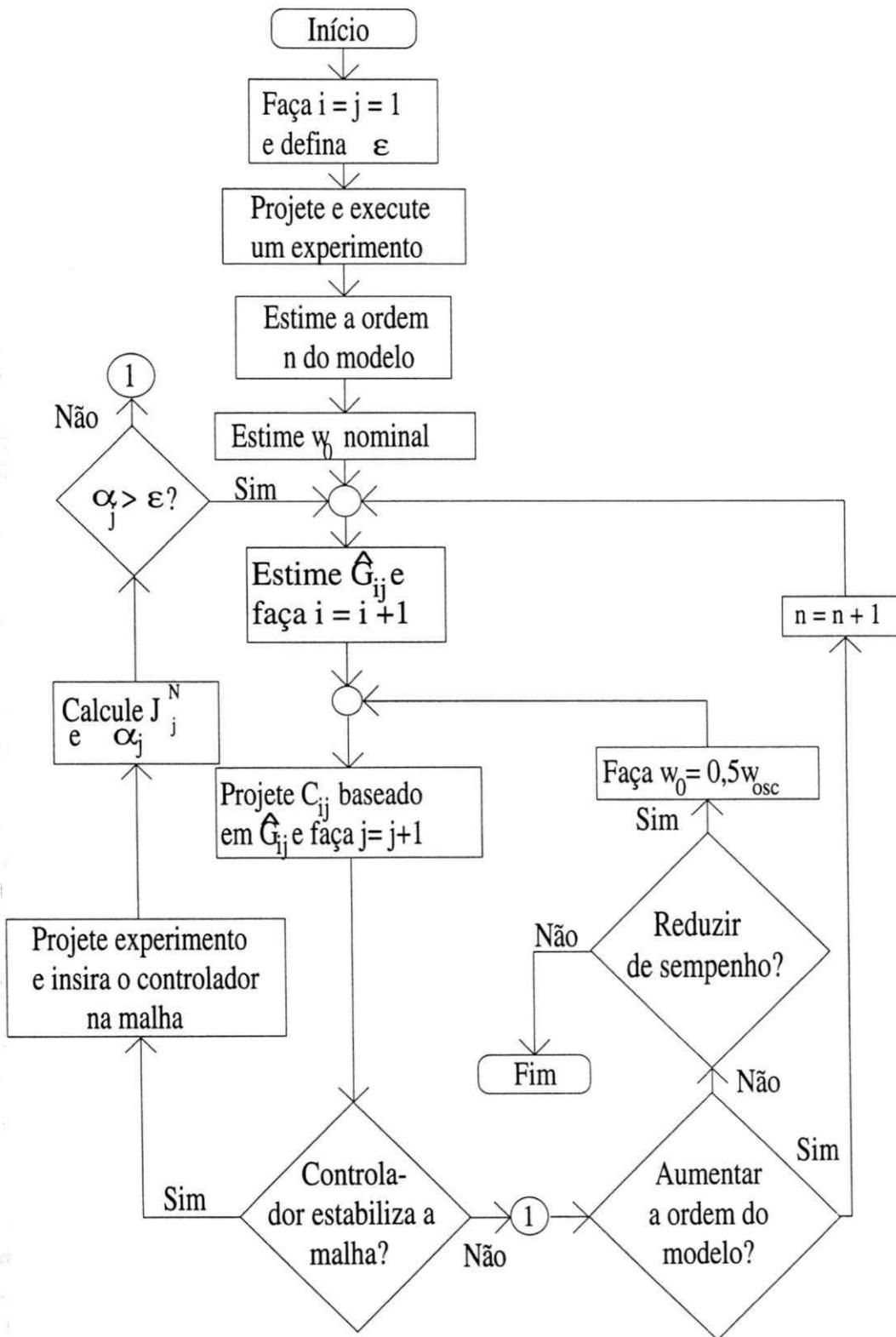


Figura 3.8: Fluxograma que descreve as etapas da sintonia iterativa do controlador.

de transferência dada por

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{(s+1)^8} \\ &= \frac{1}{s^8 + 8s^7 + 28s^6 + 56s^5 + 70s^4 + 56s^3 + 28s^2 + 8s + 1}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

que possui oito pólos reais em  $s = -1$ . Levando em consideração a característica de resposta ao degrau da planta (Fig. 3.13), foi escolhido um período de amostragem de  $0,4s$  para a coleta de dados. Utilizando este período de amostragem para discretizar o polinômio (3.22), obteve-se o modelo discreto

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)},$$

onde

$$\begin{aligned} A(q) &= q^8 - 5,36256q^7 + 12,581211q^6 - 16,866875q^5 + 14,132756q^4 \\ &\quad - 7,578775q^3 + 2,540102q^2 - 0,4864805q + 0,0407622, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B(q) &= 1,39969 \times 10^{-8}q^7 + 1,97765 \times 10^{-6}q^6 + 2,413897 \times 10^{-5}q^5 + 6,161228 \times 10^{-5}q^4 + \\ &\quad + 4,31723 \times 10^{-5}q^3 + 8,305534 \times 10^{-6}q^2 + 3,341881 \times 10^{-7}q + 9,46171 \times 10^{-10}, \end{aligned}$$

que possui quatro pares de pólos complexos conjugados em  $0,65906 \pm i0,01113$ ;  $0,67019 \pm i0,015928$ ;  $0,659057 \pm i0,0111302$ ;  $0,68638 \pm i0,65452$ , três zeros reais de fase não-mínima em  $-160,499$ ;  $-9,8054$ ;  $-2,2022$  e quatro zeros de fase mínima em  $-0,7007$ ;  $-0,223$ ;  $-0,0501$  e  $-0,0031$ . Diferentes valores seriam obtidos se fosse discretizado o modelo  $\frac{1}{s+1}$ , e tomado o oitavo expoente deste resultado para obter o modelo de oitava ordem discreto.

Como pode ser observado, apesar do modelo da planta no domínio de tempo contínuo não possuir zeros finitos ou de fase não mínima, a discretização do modelo gera três zeros de fase não-mínima.

Para esta planta, foram efetuadas simulações para três situações distintas. Na primeira, é efetuada a sintonia iterativa do controlador na ausência de ruído de medição e perturbações. Em seguida, a sintonia foi efetuada introduzindo ruído na medição do sinal de saída da planta. A terceira simulação foi efetuada para verificar a capacidade do controlador, que foi projetado na última etapa da sintonia iterativa para o caso de ruído nas medições e rejeitar perturbações

injetadas na entrada e saída da planta. Para esta terceira simulação, também foi injetado ruído nas medições da saída da planta.

A lei de controle implementada, é a descrita pelo diagrama de blocos da Fig. 3.5. Para verificar o desempenho do controlador projetado em cada etapa iterativa, utilizou-se o critério descrito na seção 3.6.

### 3.8.1 Discretização de modelos, amostragem, sinais, e perturbações

A planta foi simulada utilizando Runge-Kutta de quarta ordem e passo fixo de 0,01. Para o domínio de tempo discreto para sinais, modelos e controladores, foi utilizado um período de amostragem de 0,4s. O tempo de simulação foi de 800s.

Os sinais de referência utilizados nas simulações foram do tipo *PRBS*<sup>1</sup>. A utilização deste sinal deveu-se à necessidade de se obter um sinal de excitação que fosse persistente [70]. Foi escolhida uma duração máxima para os *bits* do sinal *PRBS* de modo a permitir que a planta tivesse tempo de responder, o que garante que os modos da planta serão excitados adequadamente [42]. Os sinais gerados nos experimentos foram utilizados na estimação de modelos da planta, e cálculo do desempenho do controlador que atuava na malha durante o experimento.

Para o caso estocástico, a saída medida da planta foi contaminada por ruído branco gaussiano do tipo  $N(0; 0,05)$ . Esta característica do ruído implica que a amplitude máxima do ruído será igual a 10% do valor máximo da saída da planta. Ao serem utilizados em procedimentos de identificação, os sinais amostrados foram filtrados por  $\frac{A_c(1)}{A_c}$  para obter uma identificação relevante para controle, como descrito na seção 3.4.3.

### 3.8.2 Sintonia iterativa: Ausência de ruído e perturbações

Com o objetivo de verificar o comportamento da abordagem proposta em ambiente determinístico, apresenta-se nesta seção a sintonia do controlador com a planta operando na ausência de ruído e perturbações. A sintonia iterativa do controlador foi efetuada em etapas sucessivas. À cada etapa, correspondeu a uma tarefa executada, que pode englobar mais de um passo do algoritmo.

#### 1ª Etapa) Modelagem da planta em malha aberta

O ponto de partida foi projetar um experimento para identificação em malha aberta. O sinal *PRBS* utilizado foi projetado tal que a duração mínima para os *bits* fosse igual ao tempo

---

<sup>1</sup>Seqüência Binária Pseudo-Aleatória

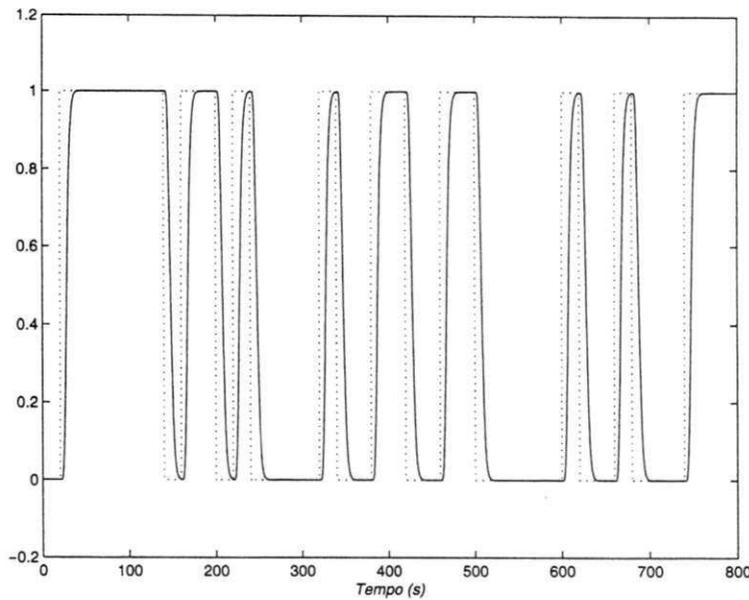


Figura 3.9: Sinais utilizados na identificação em malha aberta. Curva pontilhada: Entrada da planta. Curva contínua: saída da planta.

necessário para a saída da planta atingir pela primeira vez o valor de regime. Os sinais obtidos são apresentados na Fig. 3.9.

O tempo morto foi estimado por análise de correlação [70], via estimativa da resposta impulsiva da planta, que foi estimada utilizando os dados gerados pelo experimento de malha aberta. Na estimativa da resposta impulsiva da planta, utilizou-se a função *cra.m*, que está disponível no pacote de identificação do *MATLAB*. Por inspeção da curva de resposta impulsiva obtida (Fig.

3.10), verifica-se que não existe correção nula ou negativa, portanto o tempo morto para este sistema é nulo [70],  $\tau_d = 0$ .

Estimou-se a ordem necessária para o modelo da planta utilizando o método proposto no Capítulo 2. A definição da ordem foi efetuada através da inspeção dos valores singulares estimados (Fig. 3.11). Considerando que ocorrência de saltos significativos entre os valores singulares consecutivos define a ordem requerida para o modelo, por inspeção dos valores singulares estimados, resultou a definição de um modelo de oitava ordem para a planta.

Utilizando os dados gerados pelo experimento de identificação em malha aberta, o conhecimento de  $\tau_d$  e o valor estimado para a ordem do modelo, efetuou-se a estimativa dos parâmetros. Como resultado, obteve-se o modelo de oitava ordem

$$\hat{A}_{1q}(q) = q^8 - 5,362793q^7 + 12,5824q^6 - 16,8695q^5 + 14,136q^4 - 7,581203q^3 + 2,541205q^2 - 0,486762q + 0,040793,$$

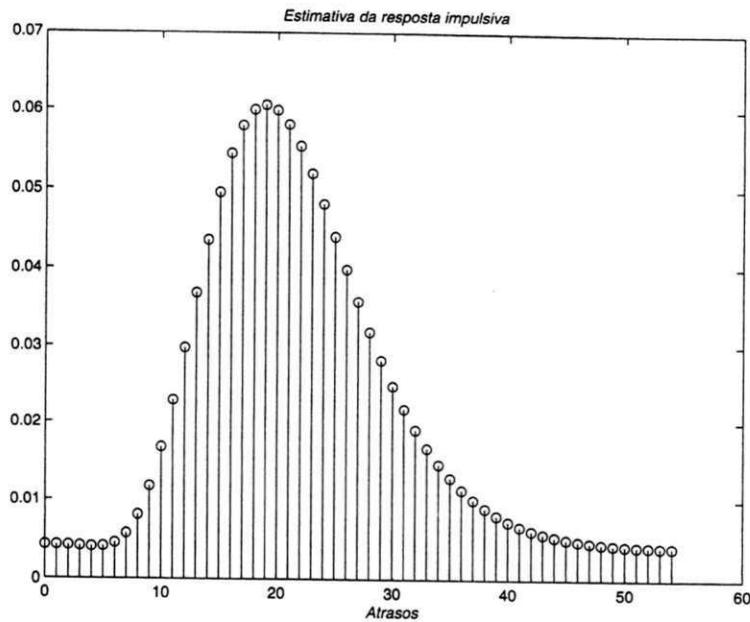


Figura 3.10: Resposta impulsiva via análise de correlação: Tempo morto = Número de atrasos com valor inicial nulo ou negativo.

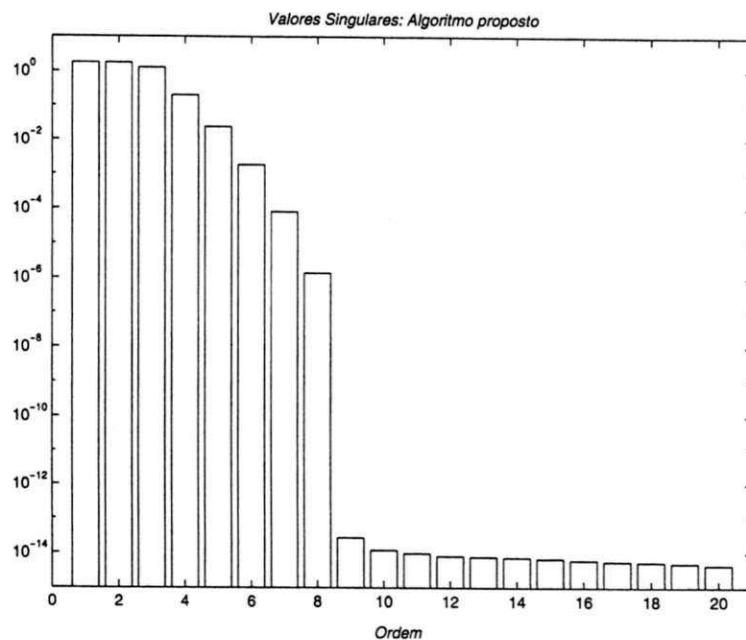


Figura 3.11: Valores singulares estimados considerando uma ordem máxima esperada para o modelo igual a vigésima.

$$\widehat{B}_{1q}(q) = 3,3329 \times 10^{-13} q^7 + 1,1399 \times 10^{-8} q^6 + 1,99777 q^5 + 2,4139 \times 10^{-5} q^4 + 6,1607 \times 10^{-5} q^3 + 4,3157 \times 10^{-5} q^2 + 8,2917 \times 10^{-6} q + 3,2916 \times 10^{-7},$$

que possui quatro pares de pólos complexos conjugados em  $0,65249 \pm i0,08944$ ;  $0,7119 \pm i0,06792$ ;  $0,74036 \pm i0,02433$ ;  $+0,57659 \pm i0,0513$  e sete zeros reais em  $-3,1587 \times 10^4$ ;  $-161,39$ ;  $-9,8051$ ;  $-2,2022$ ;  $-0,70067$ ;  $-0,2224$ ;  $-0,05346$ .

Considerando o período de amostragem de  $0,4s$ , e utilizando a função *c2dm.m* do MATLAB, que faz a conversão de modelos discretos para contínuos, obteve-se o modelo

$$\widehat{A}_{s1}(s) = s^8 + 7,9980s^7 + 27,99006s^6 + 55,9756s^5 + 69,9657s^4 + 55,9702s^3 + 27,9842s^2 + 7,9952s + 0,99938,$$

$$\widehat{B}_{s1}(s) = -2,849 \times 10^{-7} s^7 + 5,193 \times 10^{-6} s^6 - 8,3044 \times 10^{-5} s^5 + 1,0553 \times 10^{-3} s^4 - 1,062 \times 10^{-2} s^3 + 7,9839 \times 10^{-2} s^2 - 3,9958 \times 10^{-1} s + 0,9993,$$

que possui quatro pares de pólos complexos conjugados em  $-1,3666 \pm i0,2218$ ;  $-1,0441 \pm i0,34059$ ;  $-0,838 \pm i0,2378$ ;  $-0,7501 \pm i0,08215$ . O modelo possui um zero real em  $6,8592$  e três pares de zeros complexos conjugados em  $-3,1979 \pm i10,9373$ ;  $2,9468 \pm i8,1012$ ;  $5,9352 \pm i4,2154$ .

Considerando os modelos estimados e reais na faixa de passagem, pode-se afirmar que as estimativas foram praticamente exatas na faixa de passagem da planta (Fig. 3.14), a menos de discrepâncias na fase.

## 2ª Etapa) Experimento do relé para estimar $w_{osc}$

Esta etapa teve por finalidade fornecer a localização desejada para os pólos do sistema em malha fechada. O experimento do relé foi efetuado como descrito pelo diagrama de blocos da Fig. 3.1. O resultado obtido é apresentado na Fig. 3.12. Por inspeção desta figura, obteve-se  $w_{osc} = 0,345 rad/s$ .

Para obter a constante de tempo máxima da planta, considerou-se a estimativa do tempo morto estimado e a utilização da curva de resposta ao degrau da planta (Fig. 3.13). O valor obtido foi de  $\tau_{max} = 8,44s$ .

Substituindo  $\tau_{max}$  e  $w_{osc}$  em (3.5), obteve-se  $w_0 = 0,30 rad/s$ . Desde que a ordem do modelo estimado foi a oitava, definiu-se uma alocação de pólos de oitava ordem para o sistema. O polinômio discreto equivalente foi calculado para a configuração Butterworth, obtendo-se

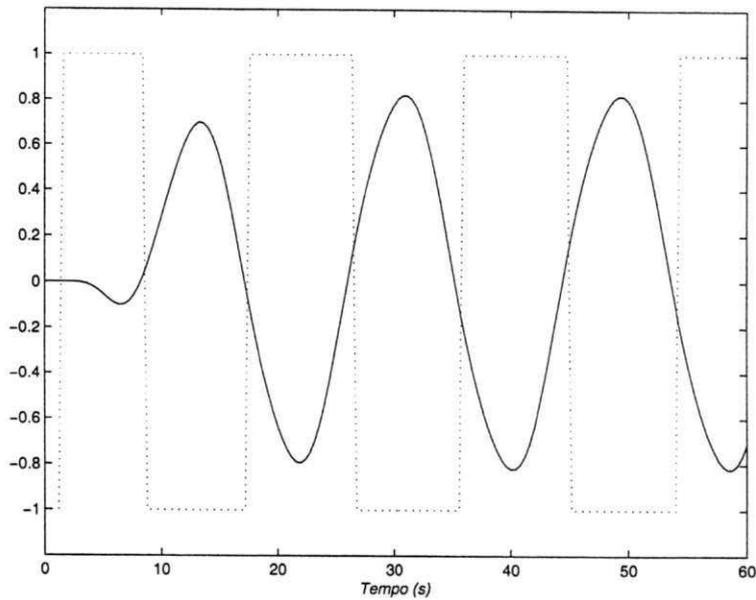


Figura 3.12: Teste padrão do relé para obtenção da frequência de oscilação.

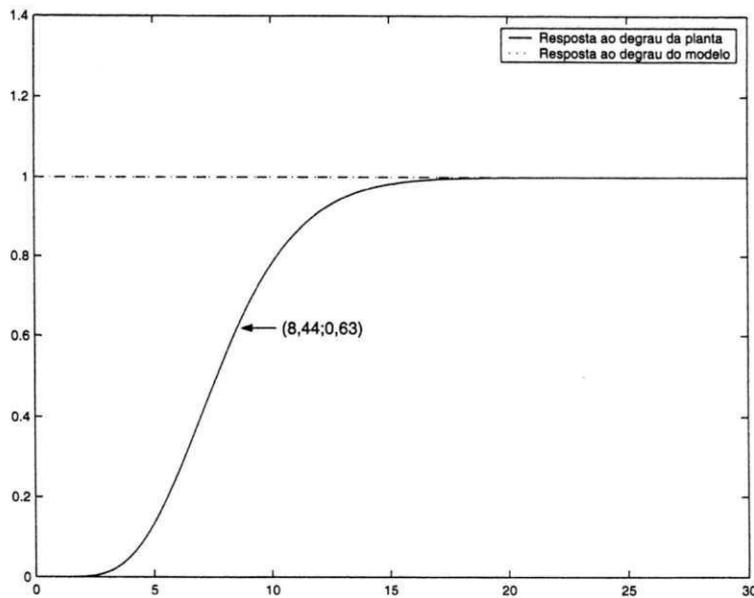


Figura 3.13: Curva de resposta ao degrau estimada e real (coincidentes). Detalhe na figura: (amplitude  $\times$  tempo) (8,44, 0,63).

$$A_{c_1}(q) = q^8 - 7,3854q^7 + 23,8852q^6 - 44,1809q^5 + 51,1207q^4 - 37,8883q^3 + 17,565q^2 - 4,6569q + 0,5406.$$

### 3ª Etapa) Parametrização do controlador

Utilizando o modelo da planta e o polinômio que define a localização desejada para os pólos do sistema em malha fechada, calculou-se o ganho do controlador, obtendo-se

$$k_1 = \frac{A_{c_1}(1)}{\widehat{B}_{1q}(1)} = 2,2661 \times 10^{-4}.$$

Para implementar a lei de controle definida pelo diagrama de blocos da Fig. 3.5, definiu-se as parametrizações dos filtros que compõem o controlador:  $k_1 \frac{\widehat{A}_{1q}}{A_{c_1}}$  e  $k_1 \frac{\widehat{B}_{1q}}{A_{c_1}}$ .

### 4ª Etapa) Estimando a margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um teste do relé para estimar a margem de ganho utilizando a estrutura descrita pelo diagrama de blocos da Fig. ???. Como resultado, obteve-se o valor 10,2238, que corresponde a uma margem de ganho de aproximadamente 46 dB. Com esta margem, foi possível inserir o controlador na malha.

### 5ª Etapa) Cálculo do desempenho

Considerando o controlador projetado na 3ª Etapa, efetuou-se um experimento de identificação em malha fechada utilizando como referência o mesmo sinal utilizado na etapa de identificação em malha aberta. Utilizando os sinais de referência e amostrado na saída da planta, calculou-se o desempenho. O valor obtido foi de  $J_0^N = 26,7561$ .

### 6ª Etapa) Estimando o primeiro modelo em malha fechada

Os dados utilizados nessa estimativa foram os gerados na quinta etapa iterativa. Inicialmente, filtrou-se os dados coletados na entrada e saída da planta por  $\frac{A_c(1)}{A_{c_1}}$ . Esta filtragem foi efetuada para obter uma identificação relevante para o projeto do controlador. Em seguida, procedeu-se a estimação dos parâmetros do modelo. Observando os pólos e zeros do modelo estimado, verificou-se que não seria necessária a estimativa de um modelo de oitava ordem para a planta operando em malha fechada. O modelo a ser estimado deveria ser de quinta ordem. Esta conclusão foi obtida a partir da constatação de que três pólos e três zeros do modelo de oitava

ordem estimado eram coincidentes. Partiu-se então para a estimação de um modelo de quinta ordem. Utilizando o mesmo conjunto de dados, obteve-se o modelo

$$\widehat{A}_{2q}(q) = q^5 - 3,907631q^4 + 6,136437q^3 - 4,84138q^2 + 1,919214q - 0,305852,$$

$$\widehat{B}_{2q}(q) = 0,0024024q^4 - 0,0129863q^3 + 0,02728q^2 - 0,0267498q + 0,0108322$$

que possui dois pares de pólos complexos conjugados em  $0,76137 \pm i0,15702$ ;  $0,7923 \pm i0,0681$ , um pólo real em  $0,8003$ , com dois pares de zeros complexos conjugados em  $0,9907 \pm i0,6774$ ;  $1,712 \pm i0,4464$ .

Para o modelo contínuo, correspondente a utilização de um período de amostragem de  $0,4s$ , obteve-se

$$\widehat{A}_{2s}(s) = s^5 + 2,96163s^4 + 3,810686s^3 + 2,59773s^2 + 0,925204s + 0,13645,$$

$$\widehat{B}_{2s}(s) = 3 \times 10^{-2}s^4 - 0,0979s^3 + 0,18865s^2 - 0,22235s + 0,13645,$$

que possui dois pares de pólos complexos conjugados em  $-0,6295 \pm i0,5084$ ;  $-0,5728 \pm i0,2145$ , um pólo real em  $-0,55694$ , e dois pares de zeros complexos conjugados em  $0,4068 \pm i1,4924$ ;  $1,2252 \pm i0,6318$ .

#### 7ª Etapa) Parametrização do controlador

O modelo estimado na etapa anterior sendo de quinta ordem, requer uma alocação de pólos de quinta ordem

$$A_{c2}(q) = q^5 - 4,612q^4 + 8,5223q^3 - 7,8861q^2 + 3,654q - 0,6781.$$

Calculando o ganho do controlador, obteve-se

$$k_2 = \frac{A_{c2}(1)}{\widehat{B}_{2q}(1)} = 0,02631,$$

que permitiu definir as funções de transferência  $k_2 \frac{\widehat{A}_{2q}}{A_{c2}}$  e  $k_2 \frac{\widehat{B}_{2q}}{A_{c2}}$  que implementam a lei de controle presente no diagrama de blocos da Fig. 3.5.

#### 8ª Etapa) Estimando a margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um teste do relé para verificar a margem de ganho utilizando a estrutura da Fig. 3.7. Como resultado, obteve-se o valor  $12,62$ , que corresponde a uma margem de ganho de aproximadamente  $50 \text{ dB}$ . O controlador pode então ser inserido na malha.

## 9ª Etapa) Cálculo do desempenho

Com a parametrização do controlador definida, executou-se um experimento de identificação semelhante ao da quinta etapa. Utilizando o sinal de referência e o amostrado na saída da planta, calculou-se o desempenho. O valor obtido foi de  $J_1^N = 22,8571$ . A melhoria do desempenho, em relação ao controlador projetado a partir do modelo obtido em malha aberta, foi de 14,57%. Desde que a melhoria de desempenho foi razoável, o procedimento iterativo prosseguiu.

## 10ª Etapa) Estimando o segundo modelo de quinta ordem em malha fechada

Os dados utilizados na estimação foram os mesmos utilizados para o cálculo do desempenho. Inicialmente, os dados coletados na entrada e saída da planta foram filtrados por  $\frac{A_{c2}(1)}{A_{c2}}$ . Em seguida, procedeu-se a estimação dos parâmetros do modelo, obtendo-se

$$\widehat{A}_{3q}(q) = q^5 - 3,9475q^4 + 6,2668q^3 - 5,002q^2 + 2,0076q - 0,324187,$$

$$\widehat{B}_{3q}(q) = 16,11475 \times 10^{-4}q^4 - 8,6419 \times 10^{-3}q^3 + 0,01904q^2 - 0,01921q + 0,008133,$$

que possui um pólo real em 0,8103 e dois pares de pólos complexos conjugado em  $0,7667 \pm j0,17058$ ;  $0,80184 \pm j0,07379$ , e dois pares de zeros complexos conjugados em  $1,76428 \pm j0,4895$ ;  $0,9860 \pm j0,73028$ .

O modelo contínuo equivalente sendo dado por

$$\widehat{A}_{s3}(s) = s^5 + 2,81608s^4 + 3,52147s^3 + 2,355s^2 + 0,82728s + 0,12075,$$

$$\widehat{B}_{s3}(s) = 0,02097s^4 - 0,07364s^3 + 0,15107s^2 - 0,1882s + 0,12075$$

que possui um pólo real em  $-0,5259$  e dois pares de pólos complexos conjugados em  $-0,6035 \pm j0,5472$ ;  $-0,5415 \pm j0,2294$ , dois pares de zeros complexos conjugados em  $1,76428 \pm j0,4895$ ;  $0,986 \pm j0,73028$ .

## 11ª Etapa) Parametrização do controlador

Calculado o ganho do controlador, obteve-se

$$k_3 = \frac{A_{c2}(1)}{\widehat{B}_{3q}(1)} = 0,0289,$$

que permitiu definir as funções de transferência  $k_3 \frac{\widehat{A}_{3q}}{A_{c2}}$  e  $k_2 \frac{\widehat{B}_{3q}}{A_{c2}}$  que implementam a lei de controle presente no diagrama de blocos da Fig. 3.5.

## 12ª Etapa) Estimando a margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um teste do relé para verificar a margem de ganho. Como resultado, obteve-se o valor 15,44, que corresponde a uma margem de ganho de aproximadamente 54 dB. Com esta margem de ganho, foi possível inserir o controlador na malha.

### 13ª Etapa) Cálculo do desempenho

Com a parametrização do controlador definida, executou-se um experimento de identificação semelhante ao da quinta etapa. Utilizando o sinal de referência e o amostrado na saída da planta, calculou-se o desempenho. O valor obtido foi de  $J_2^N = 22,7945$ . A melhoria do desempenho, com relação ao controlador projetado a partir do primeiro modelo estimado em malha fechada, foi de 0,274%. Desde que a melhoria de desempenho com relação a etapa anterior foi marginal, e que a ordem necessária para o modelo utilizado no projeto do controlador foi atingida, o procedimento iterativo foi encerrado.

### 3.8.3 Análise dos resultados obtidos

Para estimação em ambiente determinístico, como esperado, os modelos estimados estão próximos do real na faixa de passagem, o que é confirmado pelo Diagrama de Bode apresentado na Fig. 3.14.

Para efeitos de comparação, apresenta-se na Fig. 3.15 uma amostra dos resultados obtidos para as saídas da planta sob a ação de controladores projetados a partir do modelo estimado com a planta operando em malha aberta, do primeiro e segundo modelos estimados em malha fechada.

Observando estes sinais, pode-se concluir que o tempo de resposta e dinâmica provenientes dos controladores projetados a partir dos modelos de quinta ordem estimados com a planta operando em malha fechada, foram superiores ao fornecido pelo controlador projetado a partir do modelo de oitava ordem estimado com a planta operando em malha aberta.

### 3.8.4 Sintonia iterativa: Presença de ruído nas medições

Para analisar o comportamento do esquema iterativo proposto na presença de ruído, a seguir efetua-se a sintonia do controlador para a mesma planta descrita na seção 3.8. A saída da planta foi contaminada por ruído branco gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,05.

### 3.8.5 Sintonia iterativa: Ausência de ruído e perturbações

#### 1ª Etapa) Modelagem da planta em malha aberta

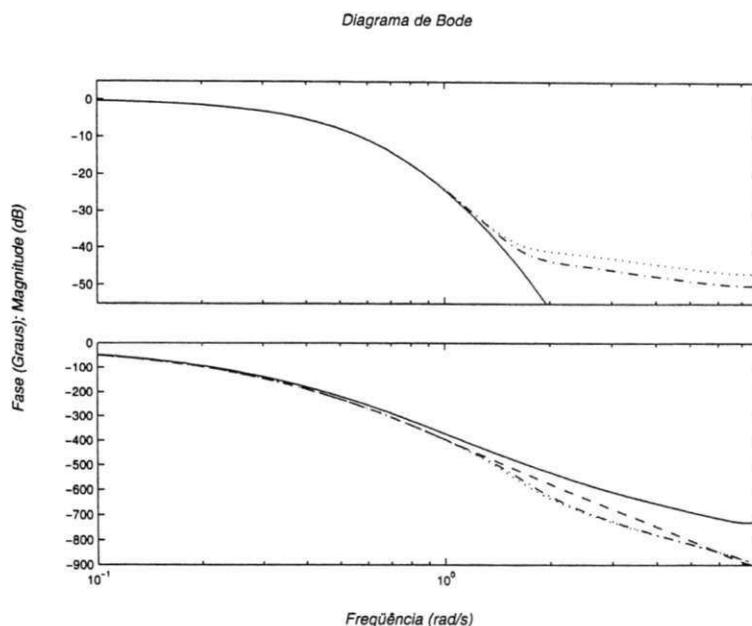


Figura 3.14: Diagrama de Bode. Curva contínua: Modelo real da planta; Curva tracejada: Modelo de oitava ordem estimado com a planta operando em malha aberta; Curva pontilhada: Primeiro modelo de quinta ordem estimado com a planta em malha fechada; Curva traço-ponto: Segundo modelo de quinta ordem estimado com a planta em malha fechada.

Projetou-se inicialmente um experimento para a identificação em malha aberta. O sinal utilizado foi do tipo *PRBS* com duração mínima para os “bits” igual ao tempo necessário para a saída da planta atingir pela primeira vez o valor de regime. Os sinais de referência e de saída da planta resultantes do experimento são apresentados na Fig. 3.16.

Efetuuou-se primeiro a estimativa da ordem necessária para o modelo. A definição da ordem foi efetuada através da inspeção dos valores singulares estimados utilizando os dados provenientes do experimento de identificação (Fig. 3.17).

Por inspeção da Fig. 3.17, pode-se afirmar que os valores singulares a partir do terceiro são devidos ao ruído (estes valores singulares possuem praticamente a mesma amplitude). Observando que ocorreu um salto mais significativo entre o primeiro e segundo valores singulares, definiu-se pela utilização de um modelo de primeira ordem. De acordo com a análise da *SNR* para os valores singulares estimados [79], a ordem para o modelo poderia chegar no máximo à terceira. Para ordem superior a terceira, os valores singulares indicam que os sinais e ruído não possuem *SNR* - os sinais estão imersos em ruído [79], [115].

Antes de estimar os parâmetros do modelo, foi estimada a resposta impulsiva para obter a estimativa do tempo morto da planta utilizando análise de correlação [70]. Observando a estimativa para a resposta impulsiva (Fig. 3.18), foi possível definir um tempo morto igual a

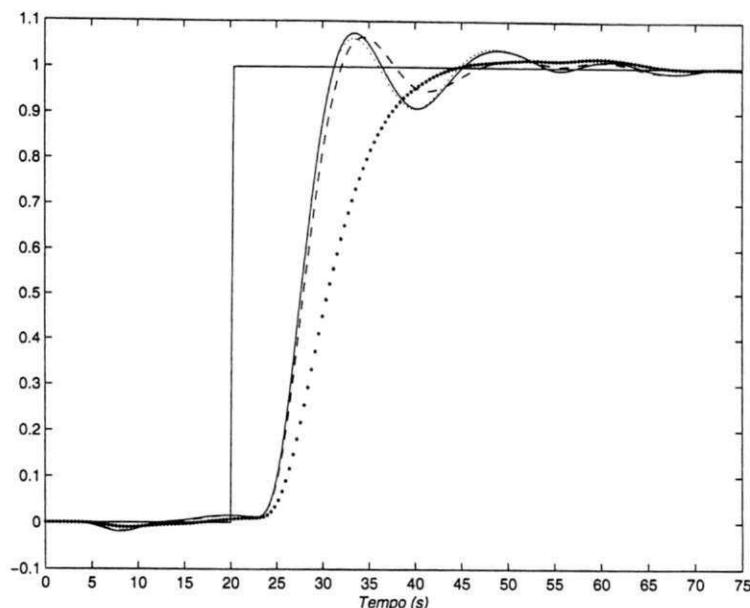


Figura 3.15: Amostra das saídas do sistema submetido ao sinal de referência tipo *PRBS* para o controlador projetado utilizando: Curva pontilhada em negro: Primeiro modelo de segunda ordem estimado em malha fechada para  $w_0 = 0,5w_{osc}$ ; Curva tracejada: Primeiro modelo de segunda ordem estimado em malha fechada para  $w_0$  nominal; Curva pontilhada: segundo modelo estimado em malha fechada; Curva contínua: Modelo de terceira ordem estimado em malha fechada.

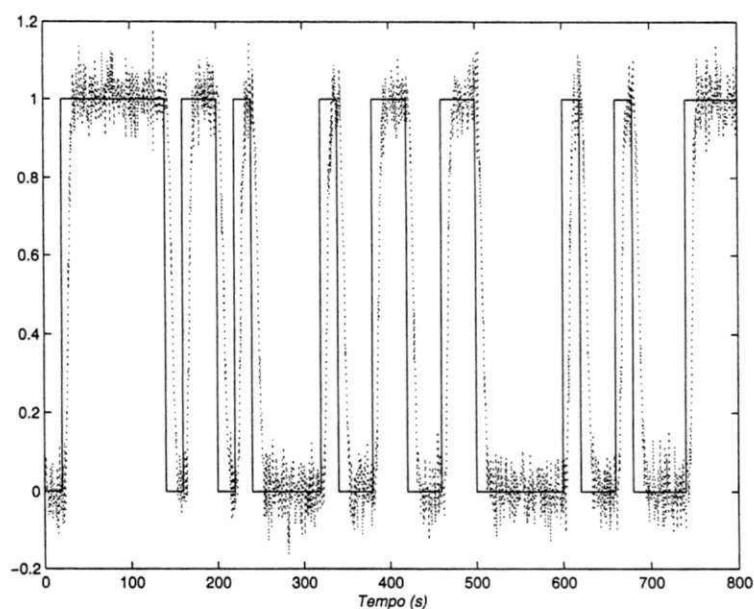


Figura 3.16: Sinais de referência e saída da planta operando em malha aberta.

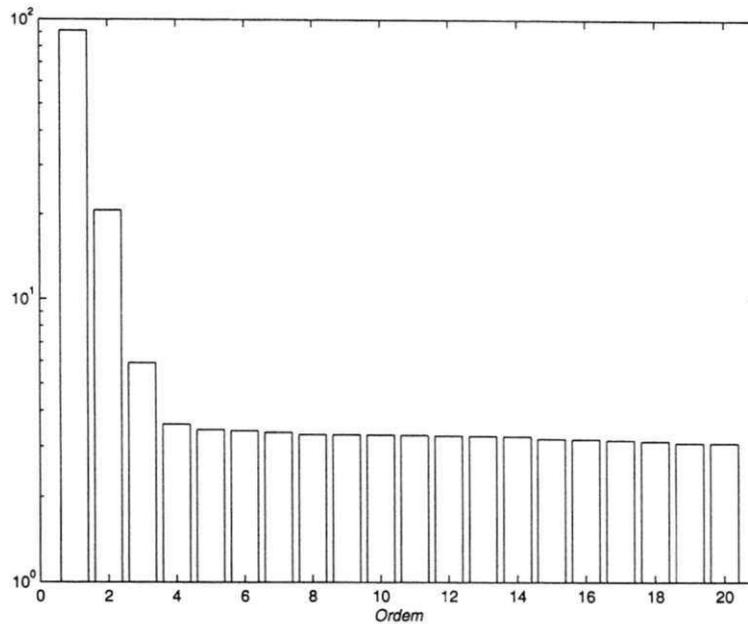


Figura 3.17: Valores singulares estimados para uma definição de ordem máxima esperada para o modelo igual a vigésima.

0,8s, que corresponde a dois períodos de amostragem.

Utilizando os dados gerados pelo experimento de identificação em malha aberta, a estimativa do tempo morto, e a definição da ordem para o modelo, estimou-se o modelo

$$\hat{G}_{1q}(q) = q^{-1} \frac{\hat{B}_{1q}(q)}{\hat{A}_{1q}(q)} = \frac{0,0472q^{-1}}{q - 0,9531},$$

Para o modelo contínuo, correspondente ao período de amostragem de 0,4s, resultou

$$\hat{G}_{1s}(s) = \frac{\hat{B}_{1s}(s)}{\hat{A}_{1s}(s)} e^{-0,4s} = \frac{0,1209}{s + 0,1201} e^{-0,4s}.$$

### 2ª Etapa) Experimento do relé

Esta etapa teve por finalidade fornecer a localização desejada para os pólos do sistema em malha fechada. As curvas resultantes do experimento do relé são apresentadas na Fig. 3.19. Por inspeção destas curvas, obteve-se  $w_{osc} = 0,345rad/s$ .

A constante de tempo máxima pode ser obtida pela inspeção da curva de resposta ao degrau da planta. No presente caso, pode-se utilizar a constante de tempo fornecida pelo modelo ou utilizar a resposta ao degrau para a planta (Fig. 3.20).

Observando as curvas, obteve-se a maior constante de tempo para a planta como sendo  $\tau_{max} = 8,73 - 0,8 = 7,93s$ . Substituindo  $w_{osc}$  e  $\tau_{max}$  em (3.5), obteve-se  $w_0 \cong 0,30rad/s$ .

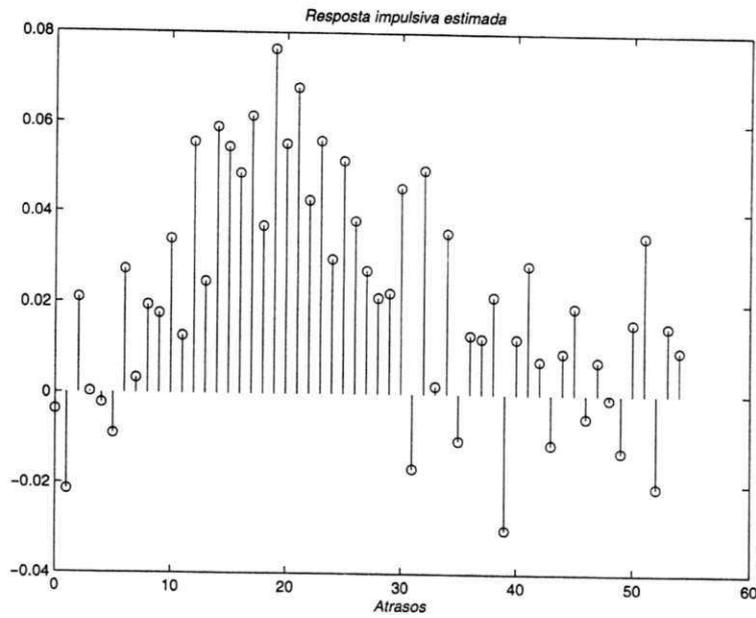


Figura 3.18: Número de atrasos negativos ou nulos indicando o tempo morto.

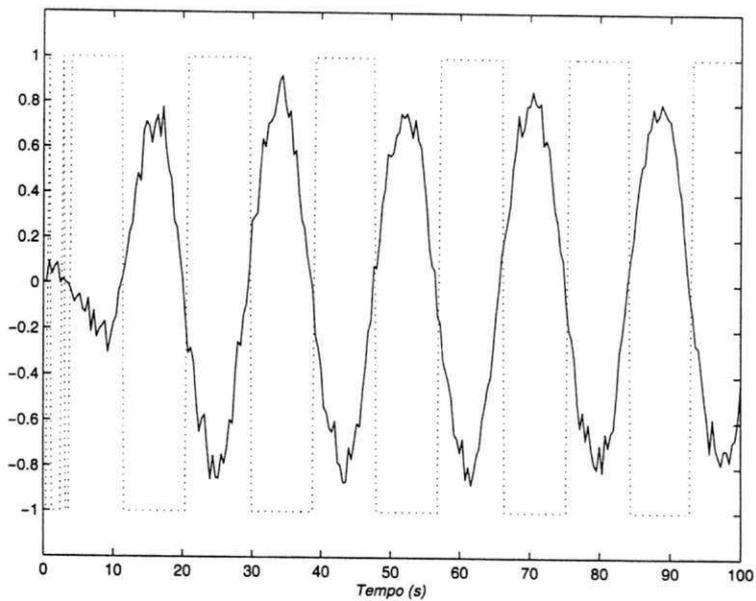


Figura 3.19: Resultado do experimento padrão do relé para estimativa da frequência de oscilação. Curva contínua: Saída da planta. Curva pontilhada: Saída do relé.

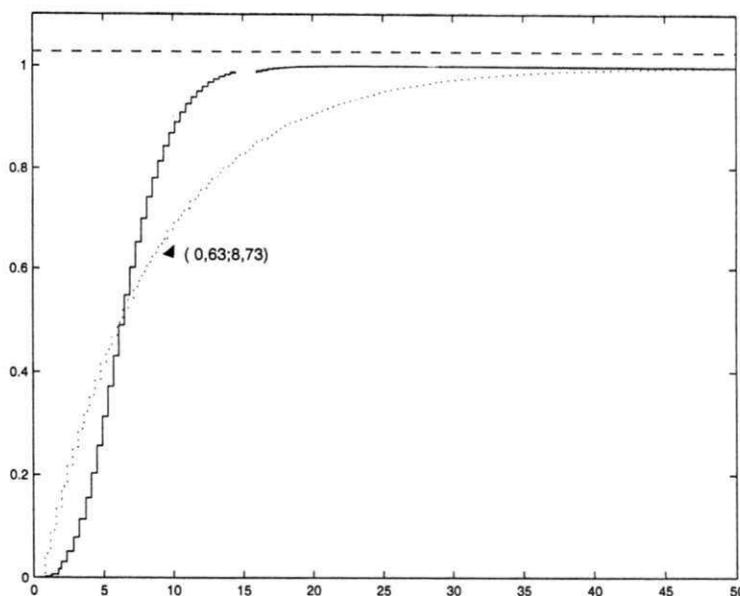


Figura 3.20: Curva de resposta ao degrau. Curva contínua: Saída da planta; Curva pontilhada: Saída do modelo de primeira ordem. Detalhe na figura: (tempo  $\times$  amplitude) (0, 63, 8, 73).

Desde que na sintonia iterativa seria possível estimar modelos até a terceira ordem, a alocação foi calculada para modelos de primeira, segunda e terceira ordem. Utilizando  $\omega_0$  e o período de amostragem de 0,4s, resultou para os polinômios discretos em  $q$  a serem utilizados nos projetos dos controladores

$$\begin{aligned} A_{c_1}(q) &= q - 0,8869, \\ A_{c_2}(q) &= q^2 - 1,83068q + 0,8439, \\ A_{c_3}(q) &= q^3 - 2,6608q - 0,6977. \end{aligned}$$

A escolha do polinômio a ser utilizado no projeto do controlador dependerá da ordem utilizada para o modelo da planta na respectiva etapa iterativa.

### 3ª Etapa) Parametrização do controlador

Considerando o modelo de primeira ordem obtido, definiu-se que a alocação seria de primeira ordem. Para esta especificação, resultou para o ganho do controlador

$$k_1 = \frac{A_{c1}(1)}{\hat{B}_{1q}(1)} = 2.377,$$

e para as funções de transferência que implementam a lei de controle definida pelo diagrama de blocos da Fig. 3.5,

$$k_1 \frac{\hat{A}_{1q}}{A_{c1}}, \quad k_1 \frac{q^{-1} \hat{B}_{1q}}{A_{c1}}.$$

## 4ª Etapa) Estimativa da margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um teste do relé para estimar a margem de ganho fornecida pelo controlador projetado utilizando a estrutura apresentada pelo diagrama de blocos da Fig. 3.7. Como resultado, obteve-se o valor 0,6978. Este valor sendo, inferior a unidade, indica que o controlador projetado não estabiliza a malha.

## 5ª Etapa) Estimando modelo de segunda ordem em malha aberta

Nesta etapa, foi efetuada a estimação de um modelo de segunda ordem para a planta. O objetivo desta etapa foi considerar a possibilidade de preservar o desempenho nominal, contornando o problema de instabilidade através da estimação de um modelo de qualidade superior ao modelo disponível para o projeto do controlador. A estimação forneceu o modelo

$$\hat{G}_{2q}(q) = q^{-1} \frac{\hat{B}_{2q}(q)}{\hat{A}_{2q}(q)} = \frac{-0,023014 + 0,08022q^{-1}}{q^2 - 0,5366q - 0,40939},$$

que possui dois pólos reais 0,9622 e  $-0,4255$ , e um zero real, de fase não mínima, em 3,4856. Desde que o modelo possui um pólo negativo, o mapeamento do plano  $\mathcal{Z}$  para o plano de Laplace não é possível, e o modelo contínuo não pode ser apresentado.

## 6ª Etapa) Parametrizando o controlador

Desde que o modelo utilizado no projeto do controlador passou a ser de segunda ordem, resultou para o ganho do controlador

$$k_2 = \frac{A_{c2}(1)}{\hat{B}_{2q}(1)} = 0,23124.$$

Utilizando o novo modelo, resultou para as funções de transferência para a implementação da lei de controle utilizando os filtros:  $k_2 \frac{q^{-1}\hat{B}_{2q}}{A_{c2}}$ ,  $k_2 \frac{\hat{A}_{2q}}{A_{c2}}$ .

## 7ª Etapa) Estimativa da margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um teste do relé para verificar a margem de ganho utilizando a estrutura da Fig. 3.7. Como resultado, obteve-se o valor 0,7666. Este valor indica que o controlador projetado não estabilizaria a malha. Portanto, o controlador não pode ser inserido no sistema.

## 8ª Etapa) Estimando modelo de terceira ordem em malha aberta

Desde que a qualidade do modelo de segunda ordem estimado não foi suficiente para estabilizar a malha para o desempenho especificado, nesta etapa foi estimado um modelo de terceira ordem na tentativa de obter um modelo que permitisse preservar o desempenho especificado, e, simultaneamente, estabilizar o sistema. O modelo estimado foi

$$\widehat{G}_{3q}(q) = q^{-1} \frac{\widehat{B}_{3q}(q)}{\widehat{A}_{3q}(q)} = \frac{-0,01942q + 0,01948 + 0,06639q^{-1}}{q^3 - 0,46329q^2 - 0,32320q - 0,1512467},$$

que possui um par de pólos complexos conjugados em  $-0,2496 \pm j0,308$ , um pólo real em  $0,9624$ , e dois zeros reais em  $2,4168$  e  $-1,4140$ .

Para o modelo contínuo correspondente, obteve-se

$$\widehat{G}_{3s}(s) = \frac{\widehat{B}_{3s}(s)}{\widehat{A}_{3s}(s)} e^{-0,4s} = \frac{0,5104s^2 - 2,2361s + 3,7864}{s^3 + 4,7221s^2 + 37,4834s + 3,5476} e^{-0,4s},$$

que possui um par de pólos complexos conjugados em  $-2,3132 \pm j5,6293$ , um pólo real em  $-0,0958$ , e um par de zeros complexos conjugados em  $2,1907 \pm j1,6187$ .

#### 9ª Etapa) Parametrizando o controlador

Para o modelo estimado de terceira ordem, foi utilizada uma alocação de terceira ordem. O ganho calculado para o controlador foi de

$$k_3 = \frac{A_{c3}(1)}{\widehat{B}_{3q}(1)} = 0,0230659.$$

Para as funções de transferência dos filtros que implementam o controlador, obteve-se:  $k_3 \frac{q^{-1} \widehat{B}_{3q}}{A_{c3}}$ ,  $k_3 \frac{\widehat{A}_{3q}}{A_{c3}}$ .

#### 10ª Etapa) Estimando margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um novo teste do relé para verificar a margem de ganho. Como resultado, obteve-se o valor  $0,858$ . Este valor, sendo inferior a unidade, indica que o controlador projetado não estabiliza a malha.

Através da análise dos valores singulares efetuada na primeira etapa, foi detectado que a *SNR* entre sinais e ruído não permite a estimativa de modelos com ordem superior a terceira. Portanto, a próxima etapa iterativa deve considerar o sacrifício do desempenho na busca de um controlador que estabilizasse a malha.

#### 11ª Etapa) Redefinindo desempenho

Desde que não foi possível obter estabilidade para o desempenho especificado utilizando os modelos estimados, considerou-se a possibilidade de obter estabilidade através da redução do desempenho. Considerando a utilização de um modelo de primeira ordem e a nova especificação de desempenho,  $w_0 = 0,5w_{osc}$ , obteve-se o polinômio para alocação de primeira ordem

$$A_{c1r}(q) = q - 0,9305309,$$

que foi utilizado na parametrização do controlador.

Utilizando a alocação de pólos definida por  $A_{c1r}$  e o modelo de primeira ordem estimado em malha aberta, resultou para o ganho do controlador

$$k_4 = \frac{A_{c1r}(1)}{\widehat{B}_{1q}(1)} = 1,4732,$$

e para as funções de transferência para implementar a lei de controle:  $k_4 \frac{q^{-1}\widehat{B}_{1q}}{A_{c1r}}$ ,  $k_4 \frac{\widehat{A}_{1q}}{A_{c1r}}$ .

#### 12ª Etapa) Estimando a margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um novo teste do relé para verificar a margem de ganho. Como resultado, obteve-se o valor 1,0913. Este valor, sendo maior que a unidade, indica que o controlador projetado estabiliza a malha. Entretanto, esta margem de ganho não permitia a operação segura da planta (pequenas variações paramétricas da planta poderiam levar o sistema a instabilidade).

#### 13ª Etapa) Parametrizando o controlador utilizando o modelo de segunda ordem

A busca de uma margem de ganho superior foi efetuada através da utilização do modelo de segunda ordem. A utilização do modelo de segunda ordem requer uma definição de alocação de pólos de segunda ordem para  $w_0 = 0,5w_{osc}$ . Isto é,

$$A_{c2r}(q) = q^2 - 1,89826q + 0,903189.$$

Utilizando a alocação de pólos definida por  $A_{c2r}$  e o modelo de segunda ordem estimado em malha aberta, resultou para o ganho do controlador

$$k_5 = \frac{\widehat{B}_{2q}(1)}{A_{c2r}(1)} = 0,086123,$$

e para as funções de transferência para implementar a lei de controle:  $k_5 \frac{q^{-1}\widehat{B}_{2q}}{A_{c2r}}$ ,  $k_5 \frac{\widehat{A}_{2q}}{A_{c2r}}$ .

#### 14ª Etapa) Estimando a margem de ganho

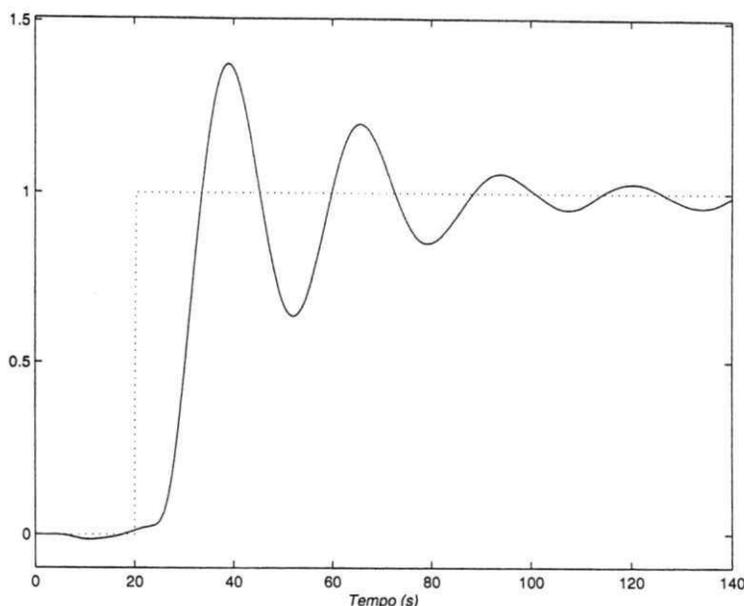


Figura 3.21: Amostra dos sinais de referência (curva pontilhada) e saída (curva contínua) da planta utilizando o modelo de segunda ordem estimado em malha aberta para o projeto do controlador com  $w_0 = 0,5w_{osc}$ .

Parametrizado o controlador, fez-se um novo teste do relé para verificar a margem de ganho. Como resultado, obteve-se o valor 1,56 ( que corresponde a aproximadamente 9 dB). Este valor sendo 56% maior que a unidade, indicou que o controlador projetado estabilizaria a malha, e a sintonia iterativa pode prosseguir de forma segura.

#### 15ª Etapa) Análise do desempenho

Tendo como referência o sinal projetado na etapa de identificação em malha aberta, o controlador foi inserido na malha. Utilizando o sinal de referência e o medido na saída da planta, calculou-se o desempenho. O valor obtido foi de  $J_0^N = 23,5938$ . Uma amostra dos sinais de referência e saída da planta é apresentada na Fig. 3.21. Observando o resultado obtido, pode-se concluir que, apesar do controlador estabilizar a malha, o sistema possui sobressinal e oscilações não admissíveis para a operação normal do sistema.

#### 16ª Etapa) Primeira identificação em malha fechada

Visando a melhoria do modelo de segunda ordem estimado em malha aberta, e conseqüente melhoria do desempenho, nesta etapa, efetuou-se a primeira identificação da planta operando em malha fechada. O sinal de referência utilizado foi o gerado pelo experimento de identificação em malha aberta.

Para a estimação de um modelo que fosse relevante para o projeto do controlador, os dados de entrada e saída da planta foram filtrados por  $\frac{A_{c2}(1)}{A_{c2}}$ . O modelo estimado foi

$$\widehat{G}_{4q}(q) = q^{-1} \frac{\widehat{B}_{4q}(q)}{\widehat{A}_{4q}(q)} = \frac{-0,050551 + 0,06044q^{-1}}{q^2 - 1,84q + 0,849973},$$

que possui um par de pólos complexos conjugados em  $0,92 \pm j0,0593$  e um zero em 1,19. Considerando o período de amostragem de 0,4s, resultou para o modelo contínuo de segunda ordem

$$\widehat{G}_{4s}(s) = \frac{\widehat{B}_{4s}(s)}{\widehat{A}_{4s}(s)} e^{-0,4s} = \frac{-0,151s + 0,0670}{s^2 + 0,4064s + 0,0672} e^{-0,4s},$$

que possui um par de pólos complexos conjugados em  $0,2032 \pm j0,161$  e um zero de fase não-mínima em 0,444.

#### 17ª Etapa) Parametrização do controlador

Nesta etapa, considerou-se a possibilidade de recuperar o desempenho nominal via  $A_{c2}$ , utilizando o modelo de segunda ordem obtido em malha fechada,  $\widehat{G}_{4q}$ , para o projeto do controlador. Para este projeto, obteve-se para o ganho do controlador

$$k_6 = \frac{A_{c2}(1)}{\widehat{B}_{4q}(1)} = 1,57029,$$

e para as funções de transferência que implementam a lei de controle, resultou:  $k_6 \frac{\widehat{A}_{4q}}{A_{c2}}; k_6 \frac{q^{-1} \widehat{B}_{4q}}{A_{c2}}$ .

#### 18ª Etapa) Estimando a margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um teste do relé para estimar a margem de ganho utilizando a estrutura da Fig. 3.7. Como resultado, obteve-se o valor 2,451, que corresponde a uma margem de ganho de aproximadamente 17 dB. Com esta margem de ganho, foi possível inserir o controlador na malha.

#### 19ª Etapa) Análise do desempenho

Tendo como referência o sinal projetado na etapa de identificação em malha aberta, o controlador foi inserido na malha. Utilizando o sinal de referência e medido na saída da planta, calculou-se o desempenho. O valor obtido foi de  $J_1^N = 16,7714$ . A melhoria de desempenho, com relação ao controlador projetado utilizando  $\widehat{G}_{4q}$  e  $A_{c2r}$ , foi de 28,9%. Esta melhoria foi significativa. Portanto, a sintonia deveria prosseguir.

20ª Etapa) Segunda identificação em malha fechada

Para verificar se ainda era possível melhorar o desempenho do sistema, via melhoria do modelo de segunda ordem, efetua-se um novo experimento de identificação em malha fechada similar ao anterior. Estimando o modelo para os dados obtidos do experimento e a filtragem dos dados para a estimação por  $\frac{A_{c2}(1)}{A_{c2}}$ , obteve-se

$$\widehat{G}_{5q}(q) = q^{-1} \frac{\widehat{B}_{5q}(q)}{\widehat{A}_{5q}(q)} = \frac{-0,039 + 0,04743q^{-1}}{q^2 - 1,83068q + 0,8439},$$

que possui um par de pólos complexos conjugados em  $0,931 \pm j0,061$  e um zero em 1,21. Para o modelo contínuo equivalente, obteve-se

$$\widehat{G}_{5s}(s) = \frac{\widehat{B}_{5s}(s)}{\widehat{A}_{5s}(s)} e^{-0,4s} = \frac{-0,1161s + 0,0564}{s^2 + 0,3467s + 0,0568} e^{-0,4s},$$

que possui um par de pólos complexos conjugados em  $-0,1734 \pm j0,1635$  e um zero em 0,4858.

21ª Etapa) Parametrizando o controlador

Utilizando a alocação de pólos  $A_{c2}$  e o novo modelo, obteve-se para o ganho do controlador

$$k_7 = \frac{\widehat{B}_{5q}(1)}{A_{c2}(1)} = 1,5703.$$

Para as funções de transferência utilizadas na implementação da lei de controle, resultou:

$$k_7 \frac{\widehat{A}_{5q}}{A_{c2}}; k_7 \frac{q^{-1} \widehat{B}_{5q}}{A_{c2}}.$$

22ª Etapa) Estimando a margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um novo teste do relé para verificar a margem de ganho. Como resultado, obteve-se o valor 2,55, que corresponde a uma margem de ganho de aproximadamente 18,73dB. Com esta margem, o controlador pode ser inserido na malha.

23ª Etapa) Análise do desempenho

Para este controlador, o desempenho calculado, foi de  $J_3^N = 16,5484$ , que correspondeu a uma melhoria, com relação ao controlador anterior, de 1,31%. Neste caso, a melhoria de desempenho foi marginal. Deve-se então buscar a melhoria de desempenho via estimativa de um modelo de ordem imediatamente superior à utilizada na última etapa de estimação.

24ª Etapa) Terceira identificação em malha fechada

Desde que a estimativa do segundo modelo em malha fechada não ofereceu um aumento significativo para o desempenho, nesta etapa foi estimado um modelo de terceira ordem para a planta visando a melhoria do desempenho através da utilização de um modelo de melhor qualidade no projeto do controlador. Estimado o modelo, obteve-se

$$\widehat{G}_{6q}(q) = \frac{q^{-1}\widehat{B}_{6q}(q)}{\widehat{A}_{6q}(q)} = \frac{-0,01943q + 0,01948 + 0,06639q^{-1}}{q^3 - 2,76029q^2 + 2,54844q - 0,7866},$$

que possui um pólo real em 0,9624, um par de pólos complexos conjugados em  $-0,2496 \pm j0,308$ , e dois zeros reais em 2,4168 e  $-1,414$ . Para o modelo contínuo, obteve-se

$$\widehat{G}_{6s}(s) = \frac{\widehat{B}_{6s}(s)}{\widehat{A}_{6s}(s)} e^{-0,4s} = \frac{0,5104s^2 - 2,2361s + 3,7864}{s^2 + 4,7221s^2 + 37,4834s + 3,5476} e^{-0,4s},$$

que possui um par de pólos complexos conjugados em  $-2,3132 \pm j5,6293$  e um pólo real em  $-0,0958$ .

#### 25ª Etapa) Parametrizando o controlador

Utilizando a alocação de pólos  $A_{c3}$  e o novo modelo de terceira ordem, parametrizou-se novamente o controlador para um ganho de

$$k_8 = \frac{\widehat{B}_{6q}(1)}{A_{c3}(1)} = 0,02306,$$

resultando para as funções de transferência dos filtros que são utilizados para implementar o controlador:  $k_8 \frac{\widehat{A}_{6q}}{A_{c3}}$ ;  $k_8 \frac{q^{-1}\widehat{B}_{6q}}{A_{c3}}$ .

#### 26ª Etapa) Estimando a margem de ganho

Parametrizado o controlador, fez-se um novo teste do relé para verificar a margem de ganho. Como resultado, obteve-se o valor 1,5944, que corresponde a uma margem de ganho de aproximadamente 9,33dB. O controlador pode então ser inserido na malha.

#### 27ª Etapa) Análise do desempenho

Efetou-se um experimento de malha fechada similar aos anteriores. Para o controlador que atuou na malha, o desempenho calculado foi de  $J_4^N = 18,86$ , que foi inferior ao fornecido pelo controlador projetado utilizando o segundo modelo estimado em malha fechada. Já que o aumento da ordem para o modelo não levou à melhoria do desempenho, o procedimento foi encerrado. Portanto, o controlador a ser utilizado na malha deve ser o projetado na 23ª etapa iterativa.

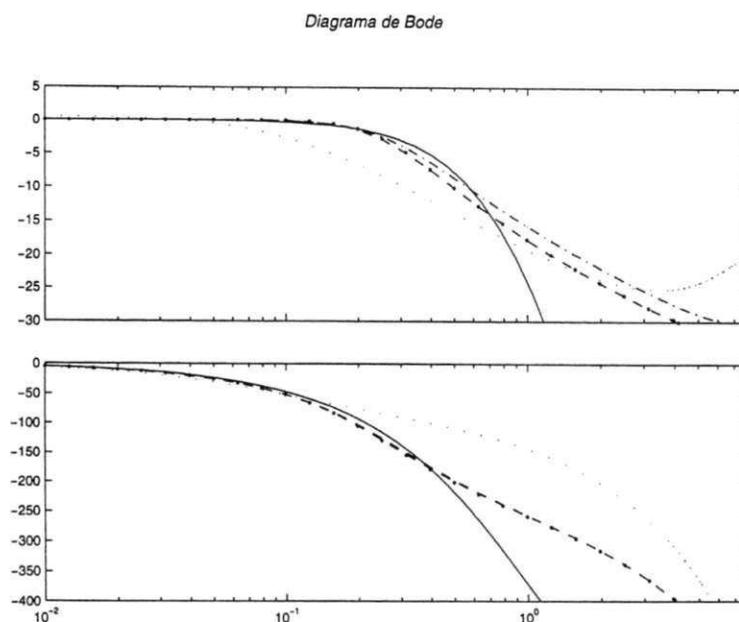


Figura 3.22: Modelos real e estimados. Curva contínua: Modelo real da planta; Curva pontilhada: Modelo de segunda ordem estimado em malha aberta; Curva tracejada: Primeiro modelo de segunda ordem estimado em malha fechada; Curva traço-ponto: Modelo de terceira ordem estimado em malha fechada.

Na Fig. 3.15 é apresentada uma amostra das saídas antes de serem contaminadas por ruído para diversos controladores operando na malha. Observando os resultados obtidos, pode-se concluir que o procedimento iterativo levou a uma abertura gradual da malha, via estimativas em malha fechada de modelos de melhor qualidade para o projeto do controlador, além de possibilitar o retorno à especificação de desempenho nominal.

Na Fig. 3.22 são apresentados os Diagramas de Bode para os modelos utilizados no projeto de controladores que estabilizaram as respectivas malhas. Dos Diagramas de Bode pode-se concluir que, a menos do modelo de segunda ordem estimado em malha aberta, os demais modelos apresentam uma estimativa razoável tanto para a fase quanto para a amplitude na faixa de passagem da planta. Pode-se afirmar que os modelos obtidos em malha fechada são razoavelmente precisos na faixa de frequências de interesse: 0 a  $0,3 \text{ rad/s}$ .

### 3.8.6 Desempenho do controlador diante de perturbações na entrada e saída da planta

Para avaliar a qualidade do controlador obtido, além de ruído de medição, foram adicionadas perturbações na entrada e saída da planta (Figs. 3.23 (a) e (b)).

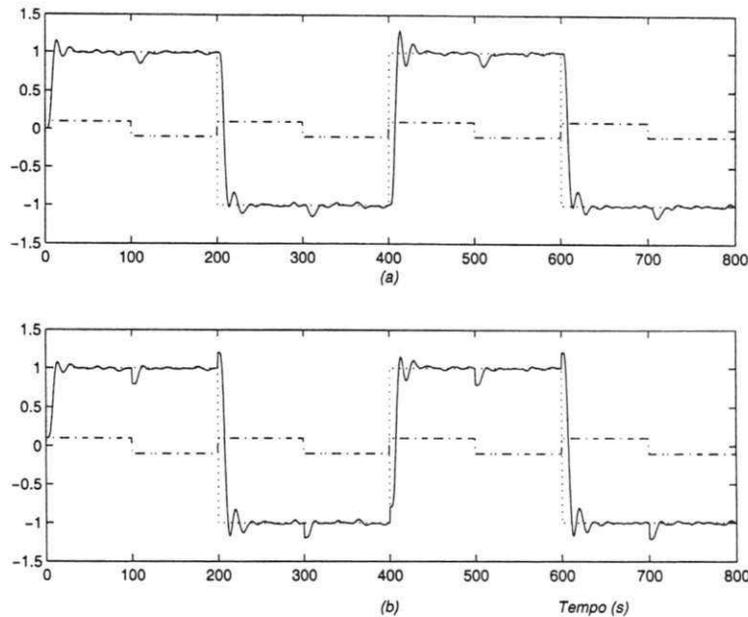


Figura 3.23: Teste de desempenho para operação na presença de perturbações e ruído de medição. (a): Perturbação adicionada à entrada da planta. (b): Perturbação adicionada à saída da planta. Curvas tracejadas: Sinais de referência, Curvas contínuas: Saídas da planta, Curvas traço-ponto: Perturbações.

Dos resultados obtidos, pode-se concluir que, utilizando o procedimento iterativo proposto, foi possível obter controladores que apresentaram, simultaneamente, capacidade de rastreamento e rejeição a perturbações razoáveis.

### 3.9 Conclusão

Utilizando a estrutura de controle e o procedimento iterativo propostos, obteve-se uma metodologia simples para o projeto do controlador. No procedimento iterativo, não é requerido o cancelamento de zeros. Além disso, a estrutura permite obter um controlador que possui a ação de controle integral, a menos que o modelo da planta possua tempo morto.

O método proposto oferece maior flexibilidade, do ponto de vista da especificação da dinâmica, se comparado ao projeto *IMC* clássico [83], devido à liberdade oferecida para a escolha do polinômio  $A_c$ , que no presente caso utilizou a definição do desempenho utilizando o método proposto por de Lundh e Åström [73].

Do ponto de vista do casamento dos critérios de controle e identificação, o procedimento iterativo é semelhante ao proposto por Åström [108].

Dos resultados obtidos nas simulações, é possível concluir que o algoritmo apresenta carac-

terísticas interessantes quanto à rejeição de perturbações e ruídos de medição.

## Capítulo 4

# ESTIMAÇÃO E CONTROLE PARA VEÍCULOS AUTOMÁTICOS

### 4.1 Introdução

Neste Capítulo, os algoritmos desenvolvidos nos Capítulos 2 e 3 são utilizados para a estimação de modelos e sintonia de controladores de um veículo autônomo (automático). A Fig. 4.1 apresenta a planta baixa do veículo protótipo utilizado nos experimentos.

O veículo possui quatro rodas. As duas rodas traseiras são livres, e as dianteiras são responsáveis pela tração e controle da trajetória. Para a tração das rodas, são utilizados dois motores de corrente contínua. A alimentação dos motores é feita através de dois sistemas de acionamento independentes. Estes sistemas permitem o controle de trajetória utilizando o conceito de velocidade diferencial [35]. A utilização deste conceito permite a simplificação do problema de controle e modelagem. Neste caso, utiliza-se um controlador *SISO* para cada roda. O controle das velocidades das rodas sendo do tipo *SISO*, implica que o requerimento para a modelagem para controle de velocidade fica restrito à geração de dois modelos *SISO*. Este modelos devem descrever o comportamento das velocidades das rodas de tração de forma independente. Para efetuar a modelagem e sintonia dos controladores sob estas condições, as rodas do veículo deverão ser suspensas sobre duas plataformas. As plataformas devem permitir as rodas girarem sem que ocorra o deslocamento do veículo.

O controle da tensão entregue aos motores, que tracionam as rodas do veículo, é feito por codificação da largura de pulso (controle *PWM*). Para obter o controle, utiliza-se uma fonte que disponibiliza ao barramento uma tensão *cc* com capacidade de 96W (12V@8,0A). Esta fonte é alimentada pela rede elétrica via cabo.

Os motores são acoplados às rodas via eixos-sem-fim e engrenagens. As engrenagens possuem

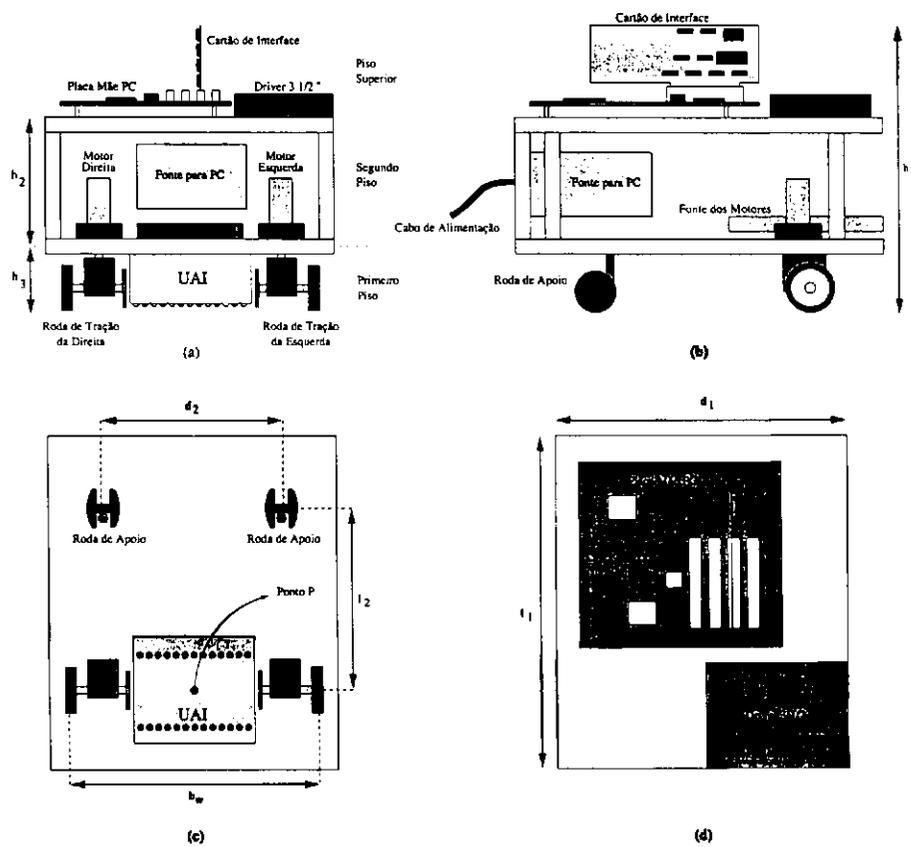


Figura 4.1: Planta baixa do veículo protótipo.

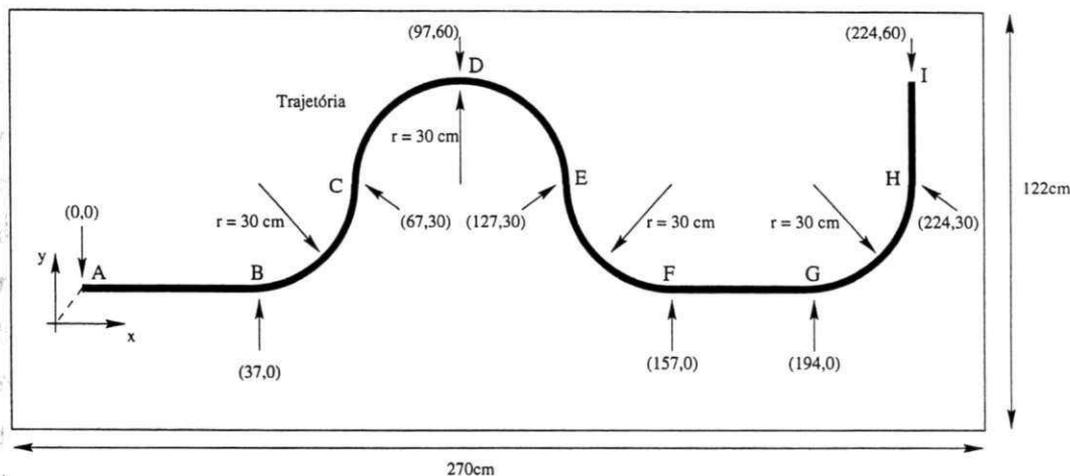


Figura 4.2: Trajetória a ser seguida pelo veículo.

fator de redução de 1:20. Esta redução permite disponibilizar um conjugado nas rodas vinte vezes superior ao fornecido no eixo do motor.

A velocidade de navegação do veículo é calculada utilizando a medição das velocidades nas duas rodas de tração, que são fornecidas por dois codificadores incrementais acoplados aos eixos das rodas de tração.

A rota de teste a ser executada pelo veículo é definida por uma faixa preta curvilínea pintada sobre uma superfície branca (Fig. 4.2). Portanto, é do tipo fixa. A rota sendo do tipo fixa, implica que o veículo auto-guiado é do tipo automático (VA). Neste caso, o problema de planejamento da rota fica simplificado à determinação da posição relativa do veículo com relação a trajetória. Para obter a informação sobre a posição relativa do veículo com relação a trajetória a ser seguida, é utilizado um sistema de aquisição de imagens de baixa resolução e baixo custo [20] (sensor de trajetória). Este sensor informa a posição instantânea do veículo com relação à rota (Fig. 4.3). A posição do veículo é informada utilizando um sistema de coordenadas, que é fixo com relação ao veículo, em termos do ângulo formado entre a linha de visada do veículo (direção do eixo  $x'$ ) e da trajetória (curva traço-ponto),  $\theta(t)$ , em radianos, e a distância, em centímetros, do ponto médio entre as rodas de tração e a trajetória,  $\Gamma(t)$ .

A interface entre o sistema de aquisição de dados e sensores é formada por uma placa e respectivo programa, que é escrito em linguagem C. A placa tem a capacidade de coletar os dados provenientes dos sensores de velocidade das rodas, e de trajetória, a uma taxa de 3,90625ms. Para o processamento dos algoritmos de aquisição, processamento dos dados e controle, é utilizada uma placa PC100. O sistema operacional utilizado foi o DOS.

Existem três limitações físicas que restringem o desempenho do sistema. Uma refere-se ao sistema de acionamento dos motores. Os circuitos de acionamento fornecem tensões de

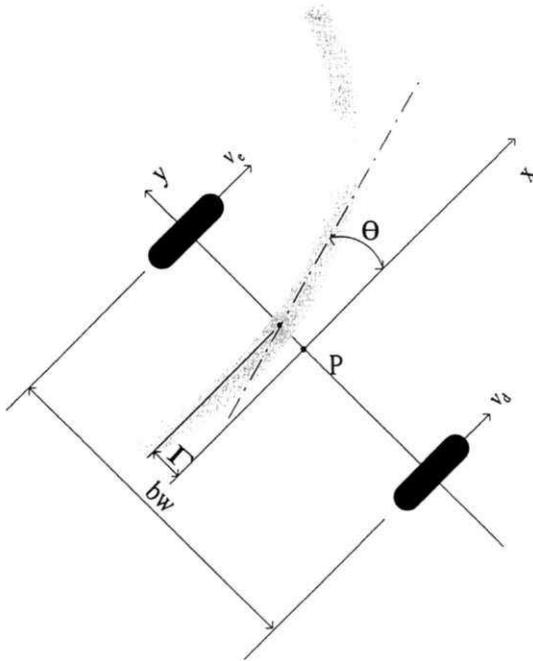


Figura 4.3: Caracterização do erro de trajetória para o veículo descrevendo movimento curvilíneo.

alimentação reduzida, devido às perdas, se comparada aos valores da tensão contínua disponibilizada no barramento pela fonte. Foi executado um experimento para verificar a faixa de tensão disponibilizada pelos circuitos de acionamento. Para este experimento, o ciclo de trabalho foi variado de zero a 100%. Os valores obtidos, em termos de velocidade das rodas *versus* tensão de alimentação para os motores, são apresentadas na Fig. 4.4. Observa-se que os valores finais de tensão entregue aos motores são 65% do valor disponibilizado pela fonte ao barramento.

Como pode ser observado na Fig. 4.4, o sistema apresenta uma não linearidade tipo zona morta (velocidade nula para tensão de alimentação não nula) para valores de tensão de alimentação dos motores na faixa de  $(-2, 2)$  Volts. Este tipo de não linearidade pode ser compensado em malha aberta utilizando este modelo.

Outra limitação, é a imposta pelo sensor de trajetória com relação às componentes dos erros de trajetória [20]. Tem-se os seguintes limites para a operação do sensor de trajetória

$$|\Theta(t)| < \arctan\left(\frac{0.0478 - |\Gamma(t)|}{0.032}\right),$$

$$|\Gamma(t)| < 0.0478 \text{ m.}$$

Se um dos erros ultrapassar o limite, o sensor não será mais operacional. Portanto, o sistema de controle terá como requerimento mínimo, não permitir que o erro de trajetória atinja as

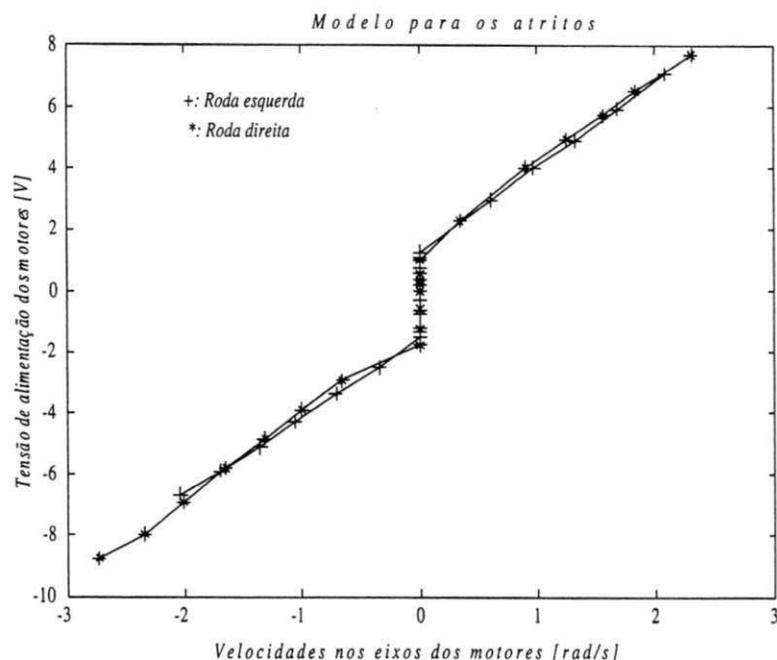


Figura 4.4: Comportamento das velocidades nas rodas do veículo para diferentes tensões de alimentação dos motores.

restrições impostas pelo sensor de trajetória.

O controle dos motores é efetuado por tensão devido às limitações da placa de aquisição de dados. Se fosse possível utilizar sensores de corrente no sistema, os motores poderiam ser controlados por corrente. O controle por corrente permite impor o conjugado no eixo do motor, e, conseqüentemente, a velocidade na respectiva roda de tração. Não foi possível utilizar controle por corrente devido às limitações impostas pela placa de aquisição de dados.

## 4.2 Controle do Veículo

No projeto do controlador de trajetória, considera-se que os controladores de velocidade das rodas de tração são perfeitos. As referências para as malhas de controle das velocidades são fornecidas pelo controlador de trajetória. Nesta seção são apresentadas as estruturas dos controladores de velocidade das rodas de tração e de trajetória utilizados no controle do VA.

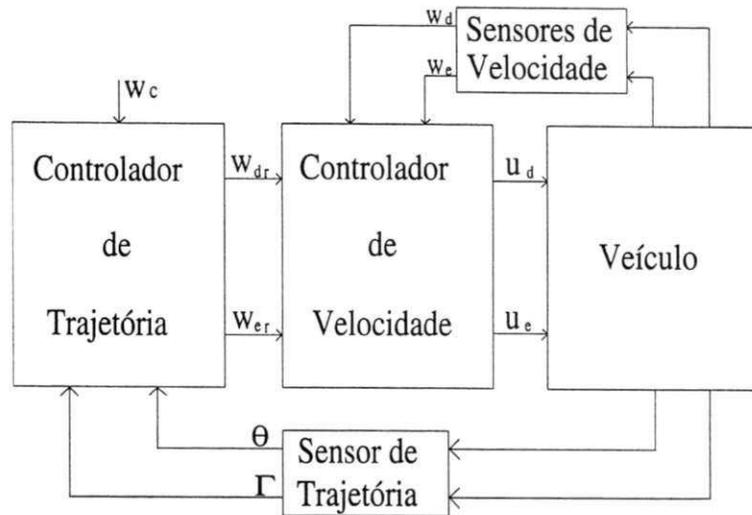


Figura 4.5: Estrutura para controle multivariável de veículos autônomos.

### 4.2.1 Controle de velocidade

#### Definição do problema

A estrutura de controle comumente utilizada para este tipo de veículo é apresentada na Fig. 4.5. Neste diagrama de blocos  $w_c(t)$  é a velocidade de cruzeiro desejada para o veículo,  $w_d(t)$  e  $w_e(t)$  são as velocidades angulares medidas das rodas direita e esquerda, e  $\Gamma(t)$  e  $\theta(t)$  são os erros de trajetória medidos pelo sensor de trajetória, respectivamente. Nesta estrutura de controle, são necessários dois controladores: um para o controle das velocidades das rodas de tração e outro, para o controle da trajetória.

O comportamento das velocidades nos eixos das respectivas rodas de tração do veículo, que é descrito pela equação (B.17), é o mesmo das velocidades das rodas de tração do veículo. Isto é,  $w_e(t) = w_{me}(t)$ ,  $w_d(t) = w_{md}(t)$ . A modelagem completa do veículo é apresentada no Apêndice B.

Na composição das velocidades, existem duas componentes. Uma linear, que é devido aos dois primeiros termos à esquerda da igualdade na equação, e uma não linear, que é devida aos demais termos da equação. Os dois primeiros termos não lineares, que são correspondentes aos atritos seco e viscoso, podem ser compensados em malha aberta utilizando os respectivos modelos dos atritos.

Considerando que as componentes não lineares correspondentes ao atrito seco e viscoso foram eliminadas perfeitamente pelo controle em malha aberta, e que o controle das velocidades nas rodas será efetuado considerando que o sistema é linear, as não linearidades devido ao produto cruzado de variáveis e termos quadráticos de variáveis serão desprezadas. Os seus efeitos deverão

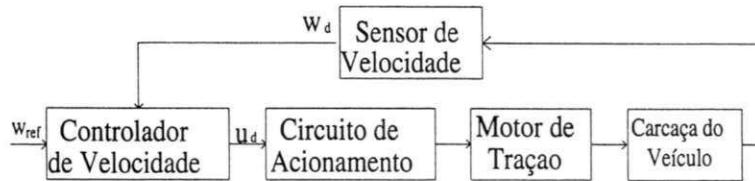


Figura 4.6: Estrutura para controle de velocidade.

ser compensados pelos controladores. Como resultado, obtém-se o modelo descrito pela equação (B.24). Neste ponto, o controle de velocidade das rodas de tração do veículo poderia ser efetuado utilizando controle linear.

### Estrutura do controlador

Desde que o algoritmo para a sintonia iterativa de controladores apresentado no Capítulo 3 é para sistemas *SISO*, é necessário converter os problemas de controle *TITO* em problemas do tipo *SISO*.

Considere a equação (B.24). Sob a condição de desacoplamento entre as rodas de tração, pode-se escrever a equação

$$\dot{w}(t) = a_o w(t) + b_o u(t), \quad (4.1)$$

que descreve o comportamento da velocidade em cada roda de tração do veículo. Portanto, considerando que as rodas operam de forma desacoplada, é possível modelar os dois subsistemas de controle de velocidade das rodas através de modelos *SISO*. Cada subsistema de controle de velocidade é formado por uma roda, engrenagem, eixo-sem-fim, motor de tração, sistema de acionamento, e respectivo peso sobre a roda. Para o controle de velocidade da roda direita, é utilizada a estrutura de controle apresentada no diagrama de blocos da Fig. 4.6, que é a mesma estrutura utilizada para o controle de velocidade da roda esquerda.

Para efetuar a sintonia dos controladores sob a condição de desacoplamento, as rodas de tração do veículo são suspensas sobre duas rodas livres. As velocidades angulares de referência para as rodas,  $w_{dr}(t)$  e  $w_{er}(t)$ , deverão ser fornecidas pelo controlador de trajetória.

No sistema, os efeitos residuais das não linearidades e acoplamento são tratados como perturbações a serem compensadas pelos controladores lineares de velocidades das rodas e de trajetória.

## 4.2.2 Controle de trajetória

### Definição do problema

Diferentes abordagens podem ser utilizadas na solução do problema de controle de robôs móveis [88], [90], [96], [97]. Os problemas de controle de trajetória associados ao veículo considerado neste trabalho são de baixa complexibilidade, se comparados aos encontrados em veículos que possuem maior grau de autonomia. A simplicidade do projeto deve-se a dois fatores: i) A trajetória a ser seguida pelo veículo é do tipo fixa; ii) O controlador de trajetória é projetado considerando que o controle de velocidade é ideal. Como resultado, elimina-se o problema de planejamento de rotas, e simplifica-se o problema de projeto do controlador de trajetória. Isto é, sob a condição de que o controle de velocidade é ideal, o controle de trajetória pode ser projetado desconsiderando as demais malhas existentes no sistema.

### Estrutura do controlador

O controle de trajetória é projetado utilizando o conceito de velocidade diferencial entre as rodas (*DVBW*) [35]. Ao utilizar *DVBW*, a direção de deslocamento do veículo passa a ser definida pela velocidade relativa entre as duas rodas de tração. Se a velocidade da roda direita for maior que a da roda esquerda, o veículo descreve movimento curvilíneo à esquerda de sua linha de visada atual, e *vice-versa*. Se as velocidades forem iguais, o veículo desloca-se em linha reta. Portanto, para que o veículo rastreie a trajetória a uma dada velocidade de cruzeiro,  $w_c(t)$ , é necessário que o controlador de trajetória forneça a diferença de velocidade necessária entre as rodas,  $\Delta w(t) = w_d(t) - w_e(t)$ , que irá permitir a correção do erro de trajetória. Isto é, para o veículo seguir a trajetória é necessário que o controlador de trajetória forneça  $\Delta w(t)$  adequada.

Para obter o deslocamento do veículo com a velocidade de cruzeiro desejada seguindo a trajetória, as velocidades de referência para as rodas são corrigidas de acordo com as equações

$$\begin{aligned}w_{dr}(t) &= w_c(t) - \Delta w(t), \\w_{er}(t) &= w_c(t) + \Delta w(t).\end{aligned}$$

A trajetória é detectada através do sensor de trajetória. O sensor é posicionado no ponto médio entre as rodas de tração do veículo (ponto *P* nas Figs. 4.3 e 4.8 (1)). A Fig. 4.7 apresenta as dimensões do sensor e as definições dos quadrantes através dos quais será definida a nova variável de erro de trajetória. Considerando o não paralelismo da trajetória com relação ao eixo  $y'$ , que é uma das condições necessárias para manter o veículo na rota, a trajetória pode se encontrar sob os quadrantes 1 e 2; 1 e 3; 2 e 4; ou 3 e 4 do sensor.

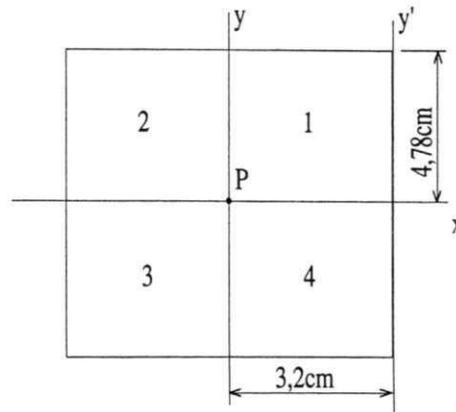


Figura 4.7: Detalhe das dimensões do sensor de trajetória e respectiva partição em quadrantes.

De acordo com a posição do veículo sobre a trajetória, o sistema de coordenadas, que é fixo com relação ao veículo (observe a Fig. 4.2), permite ao sensor fornecer as informações sobre a distância entre o ponto médio entre as rodas de tração do veículo (ponto  $P$ ) e a trajetória,  $\Gamma(t)$ , e o ângulo entre a linha de visada do veículo e a da trajetória,  $\theta(t)$ .(Fig. 4.3).

Para o sistema de coordenadas fixo, como descrito pela Fig. 4.8, e com o sensor estando posicionado na parte inferior do veículo (Fig. 4.1), qualquer segmento de reta (de trajetória) sob o sensor (sob o veículo) pode ser descrito pela equação

$$y'(t) = x' \tan(\theta(t)) + \Gamma(t),$$

onde  $\Gamma(t)$  é o ponto de cruzamento da trajetória com o eixo  $y'$ , e  $\theta(t)$  é a inclinação da reta com relação ao eixo  $x'$ .

Considerando que  $\theta(t)$  e  $\Gamma(t)$  são fornecidos pelo sensor de trajetória, pode-se determinar o ponto onde a trajetória passa sobre o eixo  $y''$ ,  $y^*(t)$ , utilizando a equação

$$y^*(t) = 3,2 \tan(\theta(t)) + \Gamma(t).$$

Se  $\Gamma(t)$  e  $y^*(t)$  forem simultaneamente positivos ou negativos no instante  $t$ , a trajetória não cruza o eixo  $x'$ . Caso contrário, o ponto onde a trajetória intercepta o eixo  $x'$ ,  $x^*(t)$ , é calculado utilizando a equação

$$x^*(t) = \frac{-\Gamma(t)}{\tan(\theta(t))}.$$

Considere as posições que o sensor pode assumir com relação à trajetória, e as respectivas áreas geradas pelos segmentos de reta no primeiro e quarto quadrantes (Fig. 4.8).

De acordo com as Fig 4.8, pode-se afirmar que para manter o veículo sobre a trajetória para  $\theta(t) = 0$ , é necessário manter o módulo da área gerada no primeiro ou quarto quadrante inferior

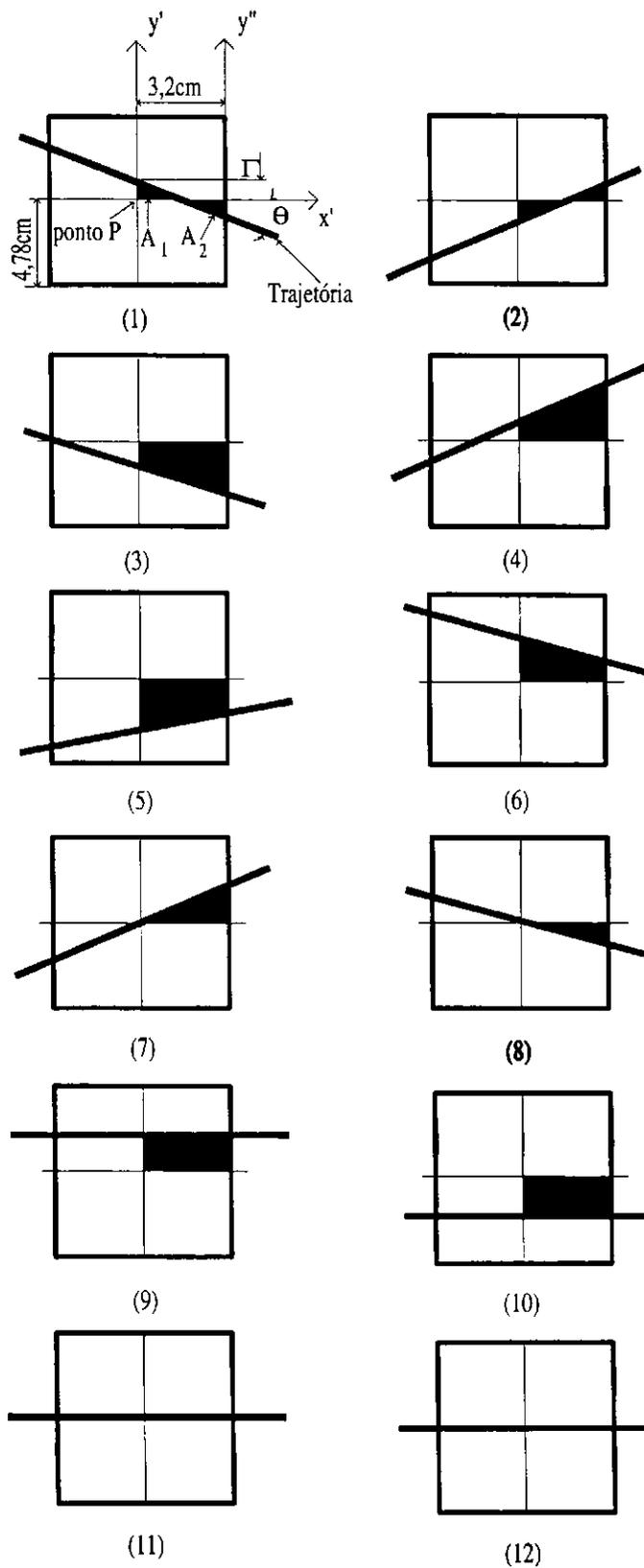


Figura 4.8: Possíveis localizações da trajetória sob o sensor e respectivas áreas (porção hachurada nas figuras) geradas pelos segmentos de retas sob o primeiro e quarto qua-drantes do sensor.

a  $15,296\text{cm}^2$  (caso 9 e 10 na Fig. 4.8). Caso contrário, o sensor não seria mais operacional, e o veículo perderia a trajetória.

No caso de  $\Gamma(t) = 0$ , é necessário que a área sob o primeiro ou quarto quadrante seja inferior a  $7,648\text{cm}^2$  (caso (7) e (8) na Fig. 4.8). A mesma análise pode ser efetuada para os demais casos onde  $\Gamma(t)$  e  $\theta(t)$  são simultaneamente não nulos. Portanto, é possível traduzir a informação quanto aos erros de trajetória,  $\Gamma(t)$  e  $\theta(t)$ , em uma única variável de erro, que é a soma das áreas geradas sob trajetória no primeiro e quarto quadrantes (áreas hachuradas na Fig. 4.8),

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t),$$

onde  $A_1(t)$  é a área gerada no quadrante 1, e  $A_2(t)$  é a área gerada no quadrante 4.

Para os casos 1 e 2, a área no quadrante 1 é calculada pela equação

$$A_1(t) = -\frac{\Gamma^2(t)}{\tan(\theta(t))}\text{cm}^2,$$

e a do quadrante 4, por

$$A_2(t) = \frac{(\Gamma(t) + 3,2 \tan(\theta(t)))^2}{2 \tan(\theta(t))}\text{cm}^2.$$

Para os casos 3, 4, 7, 8, 11 e 12, calcula-se a área do quadrante 1 por

$$A_1(t) = 3,2\Gamma(t) + 10,14 \tan(\theta(t))\text{cm}^2,$$

e a área do quadrante 4 por

$$A_2(t) = -5,12 \tan(\theta(t))\text{cm}^2.$$

Para os casos 5, 6, 9 e 10, calcula-se a área do quadrante 1 por

$$A_1(t) = 3,2\Gamma(t)\text{cm}^2,$$

e a do quadrante 4, por

$$A_2(t) = 5,12 \tan(\theta(t))\text{cm}^2.$$

Considerando  $A(t)$  como a variável de erro de controle, pode-se projetar um controlador  $C$  de uma entrada e uma saída para efetuar o controle de trajetória. O controlador terá como sinal de saída  $\Delta w(t)$ ,

$$\Delta w(t) = CA(t)\text{sig}(\theta), \begin{cases} \text{sig}(\theta) = +1, \theta > 0 \\ \text{sig}(\theta) = -1, \theta < 0 \end{cases}$$

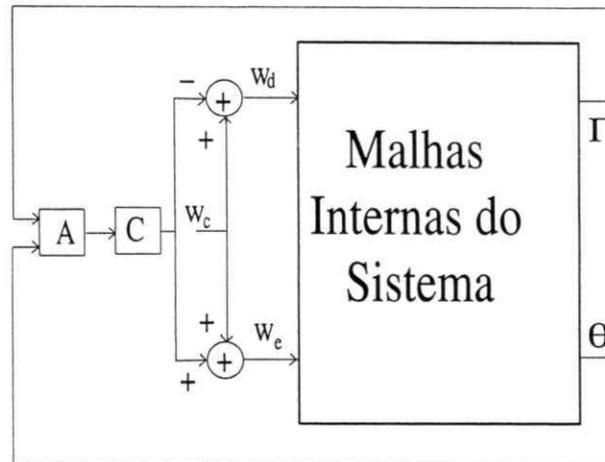


Figura 4.9: Estrutura resultante para controle da trajetória.

que é o valor necessário para gerar as novas velocidades de referência para as rodas de tração direita e esquerda, respectivamente (ver Apêndice B). Isto é,

$$w_{dr}(t) = w_c - \Delta w(t),$$

$$w_{er}(t) = w_c + \Delta w(t).$$

A modificação das velocidades de referência das rodas de tração,  $w_{dr}(t)w_{er}(t)$  que levarão a correção do erro de trajetória  $A(t)$  utilizando a estrutura de controle apresentada na Fig. 4.9. Nesta estrutura,  $A(t)$  é a função que calcula o erro de trajetória, e  $C$  é o controlador de trajetória.

### 4.3 Resultados Experimentais

Nesta seção são apresentados os resultados das sintonias iterativas dos controladores de velocidade e trajetória. Os algoritmos utilizados na estimação de modelos e sintonia dos controladores foram desenvolvidos nos Capítulos 2 e 3.

#### 4.3.1 Controladores de velocidade

Para o controle de velocidade, é necessário sintonizar dois controladores *SISO*. Um para cada roda de tração. A estrutura do controlador utilizado é apresentada na Fig. 3.5. Para cada controlador, o sinal de referência a ser rastreado é a velocidade da respectiva roda de tração. O sinal de controle é o ciclo de trabalho *PWM* utilizado pelo sistema de acionamento.

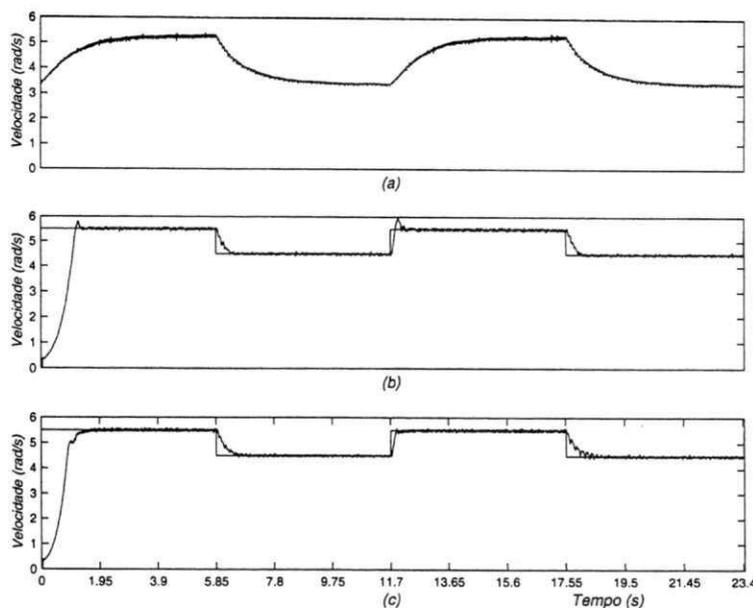


Figura 4.10: Sinais de entrada e saída da planta durante a sintonia iterativa. Sinais de referência e saída da planta para: (a) Operação em malha aberta, (b) Primeira operação em malha fechada, (c) Segunda operação em malha fechada.

### A sintonia iterativa

Primeiro efetuou-se a sintonia do controlador de velocidade da roda direita. Para inicializar a sintonia iterativa, foi estimado um modelo em malha aberta (*MA*) para a planta. O sinal de excitação utilizado foi do tipo onda quadrada com período de 11,7s e nível *cc*. O nível *cc* foi adicionado para não permitir a excursão da planta pela região não linear de operação. Além desta característica, o sinal sintetizado permitiu que a planta tivesse tempo de responder ao sinal de excitação. Essa característica do sinal de excitação indicou que os modos do sistema foram excitados adequadamente [42]. O sinal *PWM* gerado teve ciclos de trabalho mínimo e máximo de 35% e 45%, respectivamente. A saída da planta para a entrada tipo onda quadrada é apresentada na Fig. 4.10 (a).

Para os sinais de excitação e saída da planta operando em malha aberta, estimou-se o atraso, via estimativa da resposta impulsiva, e a ordem necessária para o modelo da planta. O valor estimado para o tempo morto foi  $\tau_d = 0$ . A estimativa da ordem indicou a necessidade de um modelo de primeira ordem para a planta (Fig. 4.11).

Utilizando os conhecimentos do tempo morto e da ordem necessária para o modelo, estimou-se o modelo de primeira ordem *MA* na Tabela 4.1.

Para definir a alocação de pólos, estimou-se a constante de tempo máxima e a frequência onde ocorre o comportamento ciclo-limite da planta. O valor estimado para a constante de

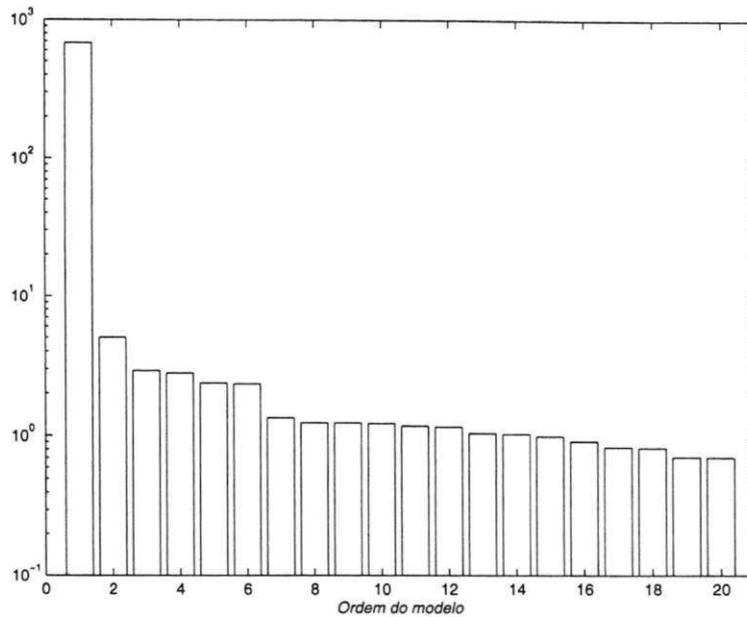


Figura 4.11: Valores singulares estimados para a determinação da ordem para o modelo do sistema de controle de velocidade da roda direita.

tempo máxima da planta foi de  $\tau_{T_{max}} \cong 1,5s$ . A frequência na qual a planta apresentou condição de operação ciclo-limite foi  $w_{T_{osc}} \cong 40rad/s$  (Fig. 4.12).

Utilizando esses dados, obteve-se  $w_0 \cong 20rad/s$ , que permitiu especificar os polinômios

$$A_{T_{c1}}(q) = q - 0,6766,$$

$$A_{T_{c2}}(q) = q^2 - 1,4598q + 0,5756,$$

a serem utilizados em alocação de pólos de primeira e segunda ordem.

Para  $A_{T_{c1}}$  e o modelo estimado de primeira ordem, projetou-se o primeiro controlador para operar em malha fechada (MF). O ganho calculado para o controlador foi de  $k_{T_{c1}} = 0,788$ . Utilizando a estrutura de controle da Fig. 3.5 para implementar o controlador, é necessário definir as seguintes funções de transferência para os filtros que compõem o controlador

$$k_{T_{c1}} \frac{\hat{A}_{T1}}{A_{T_{c1}}}, k_{T_{c1}} \frac{\hat{B}_{T1}}{A_{T_{c1}}}.$$

Para inserir o controlador na malha, efetuou-se o teste de estabilidade utilizando o método do relé. A margem de ganho (MG) foi calculada. O valor obtido foi de  $MG = 2,48$ . Esse valor permitiu inserir o controlador na malha.

Para efetuar um novo experimento, o controlador projetado na etapa anterior foi inserido na malha. O sinal de referência utilizado foi o mesmo da etapa de identificação em malha aberta. O resultado do experimento é apresentado na Fig. 4.10 (b).

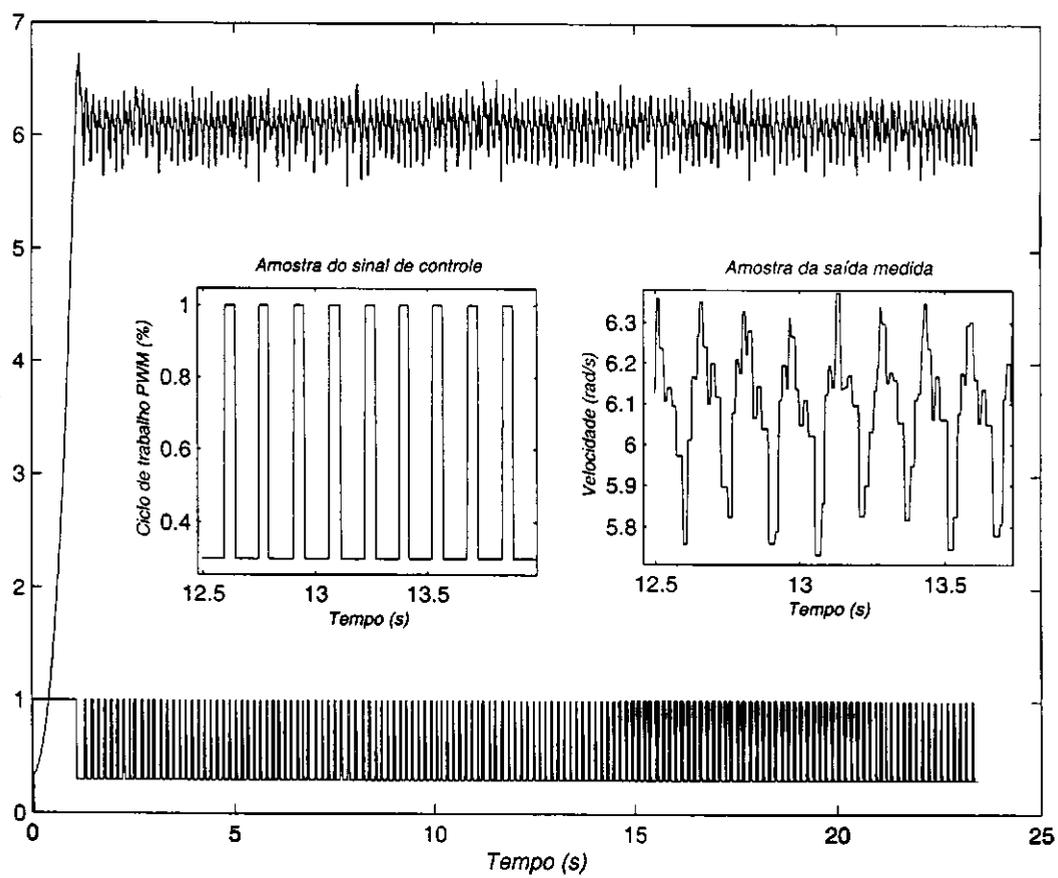


Figura 4.12: Resultado do experimento do relé para obter a condição de operação ciclo-limite da planta.

Utilizando os dados resultados do primeiro experimento em  $MF$ , calculou-se o desempenho. O valor obtido foi de 0,0123. Utilizando estes mesmos dados, estimou-se o primeiro modelo em malha fechada (modelo 1<sup>a</sup> $MF$  na Tabela 4.1).

O controlador foi reprojeto para o novo modelo 1<sup>a</sup> $MF$ . Utilizando  $A_{c1}$  e o novo modelo, calculou-se o ganho do controlador, obtendo-se o valor  $k_{c2} = 1,2096$ . Calculado o ganho, parametrizou-se as funções de transferência dos filtros  $k_{c2} \frac{\hat{A}_2}{A_{c1}}$ ,  $k_{c2} \frac{\hat{B}_2}{A_{c1}}$  para implementar a lei de controle.

Para inserir o controlador na malha, efetuou-se um novo teste de estabilidade utilizando o método do relé. Utilizando os dados resultantes do experimento, calculou-se a margem de ganho gerada pelo controlador. O valor obtido foi de 1,7381. O valor estimado da margem de ganho permitiu inserir o controlador na malha. O controlador foi inserido na malha para efetuar o segundo experimento em malha fechada utilizando o mesmo sinal de referência das etapas anteriores. Como resultado, obteve-se as curvas apresentadas na Fig. 4.10 (c).

Para avaliar o desempenho do controlador atual com relação ao controlador que atuou na malha na etapa anterior, calculou-se o desempenho e  $\alpha$ , que fornece a melhoria do controlador atual, com relação ao anterior, em %. O valor obtido para o desempenho foi de 0,0117. Para  $\alpha$ , obteve-se o valor 4,98%. Esse valor indicou que o controlador projetado nessa etapa foi, em termos de desempenho, 4,98% superior ao anterior.

Utilizando os dados gerados no segundo experimento, estimou-se o modelo 2<sup>a</sup> $MF$  na Tabela 4.1. Um novo controlador foi projetado para esse modelo. O Ganho calculado para o controlador foi de  $k_{c2} = 1,138$ . Calculado o ganho, parametrizou-se as funções de transferência  $k_{c3} \frac{\hat{A}_3}{A_{c1}}$ ,  $k_{c3} \frac{\hat{B}_3}{A_{c1}}$  para implementar o controlador.

Para inserir o controlador na malha, efetuou-se um novo teste de estabilidade. Para os resultados obtidos, calculou-se a margem de ganho gerada pelo controlador. O valor obtido foi de 1,7188. Com esse valor, foi possível inserir o controlador na malha. O controlador foi inserido na malha para efetuar o segundo experimento em malha fechada. O sinal de referência utilizado foi o mesmo das etapas anteriores. Utilizando os sinais gerados no experimento, calculou-se o desempenho e  $\alpha$  para esse controlador. O valor do desempenho foi de 0,0166, resultando em  $\alpha = 0,8491\%$ . O valor de  $\alpha$  indicou uma melhoria marginal de desempenho.

A possibilidade de alcançar maior desempenho neste estágio do procedimento iterativo, está condicionado à possibilidade de se estimar um modelo com ordem imediatamente superior a atual, que seja de melhor qualidade. Utilizando os dados coletados no último experimento, efetuou-se a estimação de um modelo de segunda ordem (modelo 3<sup>a</sup> $MF$  na Tabela 4.1). Este modelo foi utilizado para parametrizar o controlador. O ganho calculado para o controlador foi de  $k_{c4} = 1,1745$ .

	MA	1ªMF	2ªMF	3ªMF
$\hat{b}_0$	0,4388	0,3202	0,3401	0,168
$\hat{b}_1$	–	–	–	–0,0241
$\hat{a}_0$	–0,9743	–0,9833	–0,9819	0,6221
$\hat{a}_1$	–	–	–	–1,6139
$J$	0,0123	0,0117	0,0116	0,1273
$\alpha(\%)$	–	4,97	0,8491	<0
MG	2,47	1,74	1,72	1,77
$A_c$	$A_{c1}$	$A_{c1}$	$A_{c1}$	$A_{c2}$

Tabela 4.1: Modelos, desempenhos ( $J$ ), melhoria de desempenho ( $\alpha$ ), margens de ganho (MG) e polinômios para alocação de pólos gerados pela sintonia iterativa.

O teste de estabilidade para o controlador projetado na última etapa, forneceu o valor de 1,775 para a margem de ganho, o que permitiu inserir o controlador na malha. Os dados gerados pelo experimento efetuado utilizando o controlador baseado no modelo 3ªMF permitiu calcular o desempenho do controlador, que foi inferior aos desempenhos fornecidos pelos controladores projetados a partir dos modelos estimados em malha fechada. Sob estas condições, optou-se por encerrar o procedimento iterativo.

A Tabela 4.1 apresenta os diversos modelos, desempenhos, margens de ganho e alocações de pólos geradas pelo procedimento iterativo.

O mesmo procedimento de sintonia do controlador da roda direita foi utilizado para a sintonia do controlador de velocidade da roda esquerda. Para inicializar a sintonia iterativa do controlador de velocidade da roda esquerda, foi utilizado o controlador de velocidade da roda direita, que foi projetado na segunda operação em malha fechada. A alocação de pólos utilizada foi para  $w_0 = 20rad/s$ , que é a mesma utilizada para a roda direita. Portanto, foi requerido o mesmo desempenho para os controladores de velocidade das rodas de tração do veículo.

Foi necessária apenas uma iteração para obter o controlador final. Na iteração, obteve-se o modelo

$$\begin{aligned}\hat{A}_{e1}(q) &= q - 0,9837, \\ \hat{b}_{e1}(q) &= 0,3254,\end{aligned}$$

que foi utilizado no projeto do segundo controlador de velocidade da roda esquerda. O ganho calculado para o controlador foi de  $k_{ce1} = 1$ .

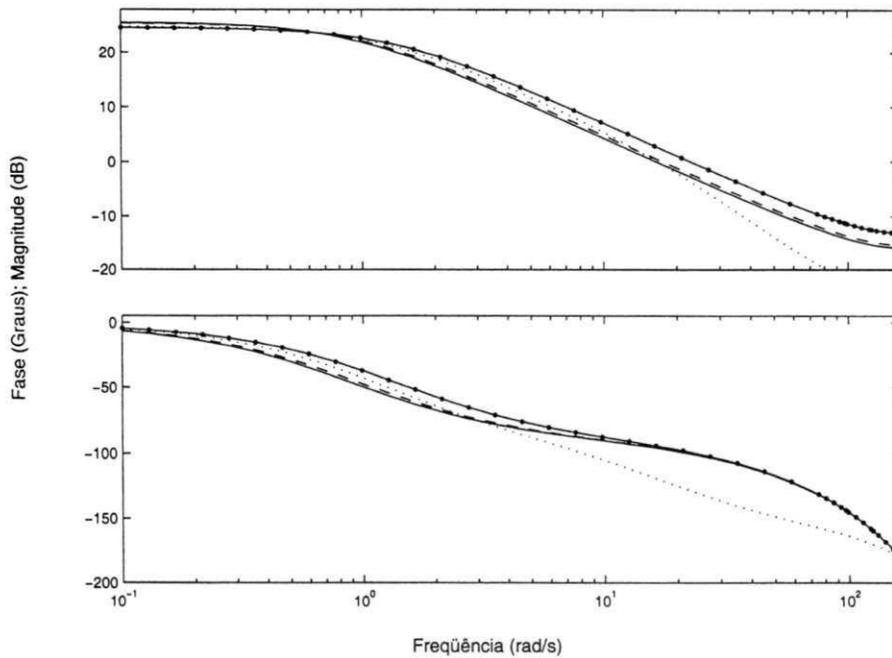


Figura 4.13: Curva pontilhada: Modelo estimado em malha aberta; Curva contínua: Primeiro modelo estimado em malha fechada; Curva tracejada: segundo modelo estimado em malha fechada. Curva traço-ponto: Terceiro modelo estimado em malha fechada (de segunda ordem).

### Análise no domínio da frequência e rastreamento da referência

Para a roda direita, obteve-se os modelos descritos pelos diagramas de Bode da Fig. 4.13. Analisando as curvas na faixa de passagem (Fig. 4.14), pode-se concluir que o modelo estimado em malha aberta estava próximo do terceiro modelo estimado em malha fechada. Devido ao princípio de operação da estrutura de controle utilizada, que é o de apresentar sinal de realimentação nulo quando o modelo for ideal e não houver perturbações atuando na saída da planta, este fato indicou que a utilização do segundo modelo estimado em malha fechada permitiu projetar um controlador que levasse o sistema a operar em uma condição próxima da operação em malha aberta. Chegou-se a esta conclusão, por se verificar que, na faixa de passagem, o modelo estimado  $3^a MF$ , estava próximo do modelo  $MA$ , que foi estimado utilizando os dados da operação em malha aberta da planta.

Ao final das sintonias iterativas dos controladores, fez-se um avaliação dos controladores em termos de capacidade de rastreamento de velocidade. Os resultados obtidos são apresentados nas Figs. 4.15 e 4.16. Dos resultados obtidos, pode-se concluir que as características dinâmicas das respostas das plantas às variações tipo rampa e degrau foram semelhantes. Esse fato era esperado, já que os sistemas são formados pelos mesmos componentes.

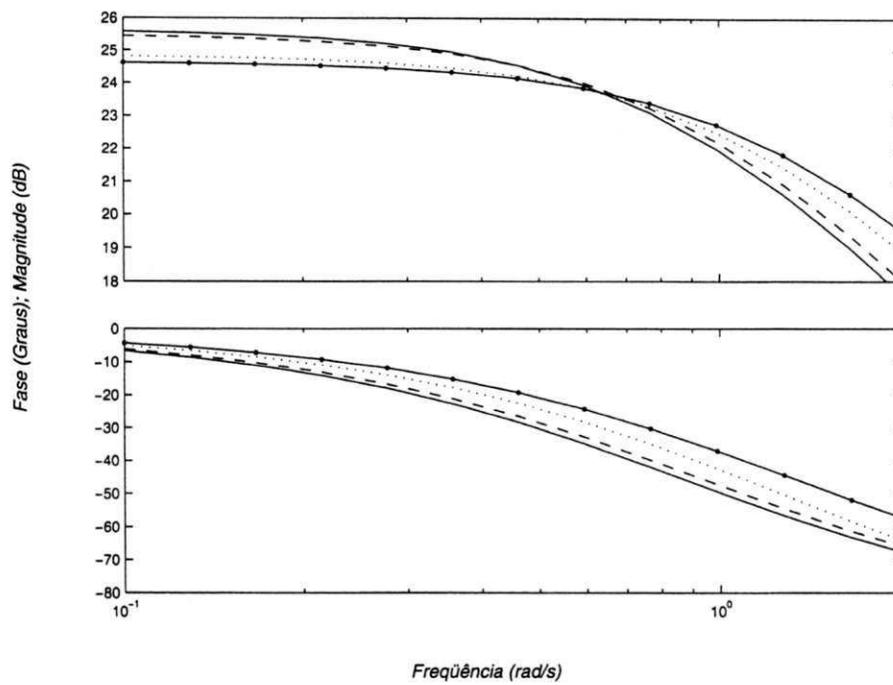


Figura 4.14: Zoom na faixa de passagem para os modelos estimados no domínio da frequência.

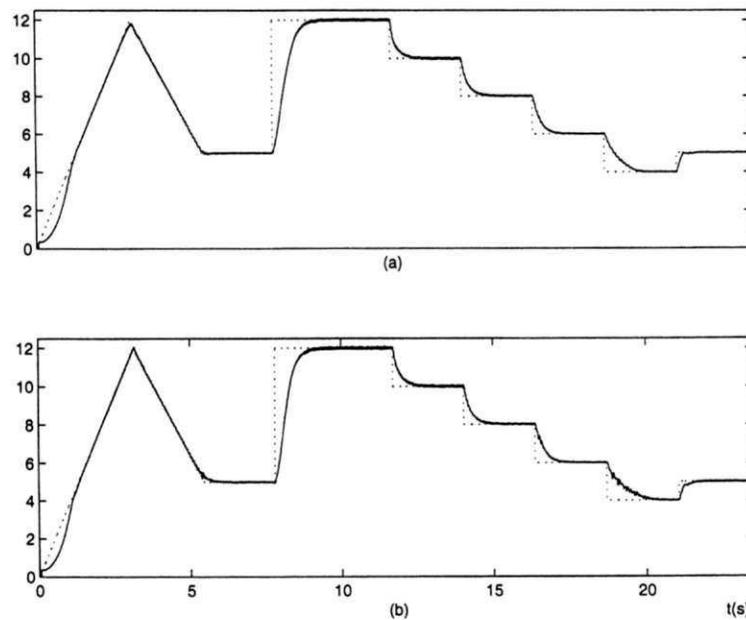


Figura 4.15: Rastreamento de velocidade das rodas ( $rad.s^{-1}$ ). Curvas pontilhadas: sinais de referência, Curvas contínuas: saídas medidas. (a) Roda direita, (b) Roda esquerda.

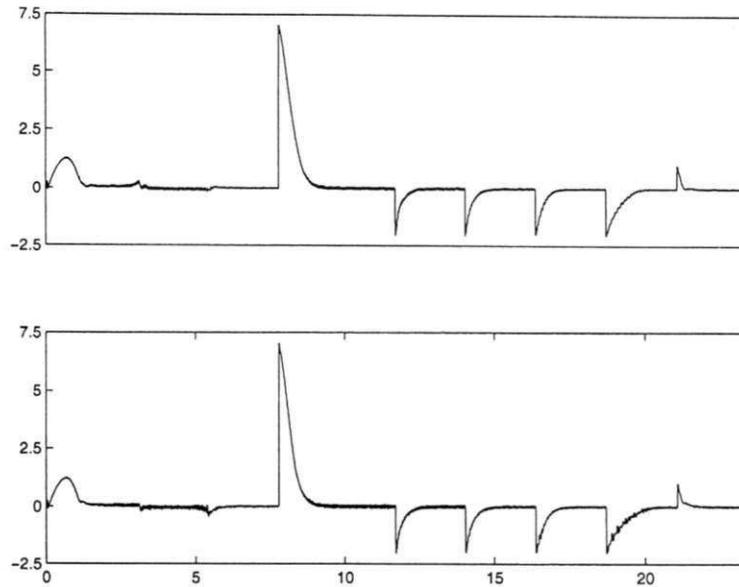


Figura 4.16: Erros de rastreamento de velocidade:  $erro = (y_{ref} - y_{sada})$ . (a) Roda direita, (b) Roda esquerda.

### 4.3.2 Controle de trajetória

#### Introdução

A trajetória seguida pelo veículo é apresentada na Fig 4.2. De acordo com o desenvolvimento apresentado na seção 4.2.2, o problema de controle da trajetória é do tipo *SISO*. Pode-se então aplicar o método apresentado no Capítulo 3 para a sintonia do controlador. Nesse caso, a variável controlada do sistema é  $A(t)$ , que sintetiza os erros de trajetória  $\theta(t)$  e  $\Gamma(t)$  em uma única variável.

A especificação de desempenho para o controlador de trajetória possui dois requisitos, que são conflitantes: Oferecer o mínimo erro de trajetória durante a excursão do veículo pela trajetória, apresentando, simultaneamente, um comportamento “suave” para o deslocamento do veículo (veículo não apresentar movimentos bruscos). O comportamento “suave” do veículo é perdido quando é exigida uma excursão com precisão elevada do ponto de vista de erros de trajetória. Isto ocorre devido à necessidade de se efetuar correções rápidas dos erros de trajetória, que provoca mudanças bruscas na direção de deslocamento do veículo.

Para verificar o comportamento do veículo sob restrições severas para os erros, foi efetuado um experimento utilizando controlador proporcional com ganho igual a 10. Os erros de trajetória cometidos pelo veículo para este controlador são apresentados na Fig. 4.17. Como pode ser observado, o erro  $\Gamma(t)$  foi limitado a aproximadamente  $0,5cm$  em módulo e o erro  $\theta(t)$ , a  $0,28rad$ . Entretanto, o veículo apresentou comportamento oscilatório, o que pode ser constatado

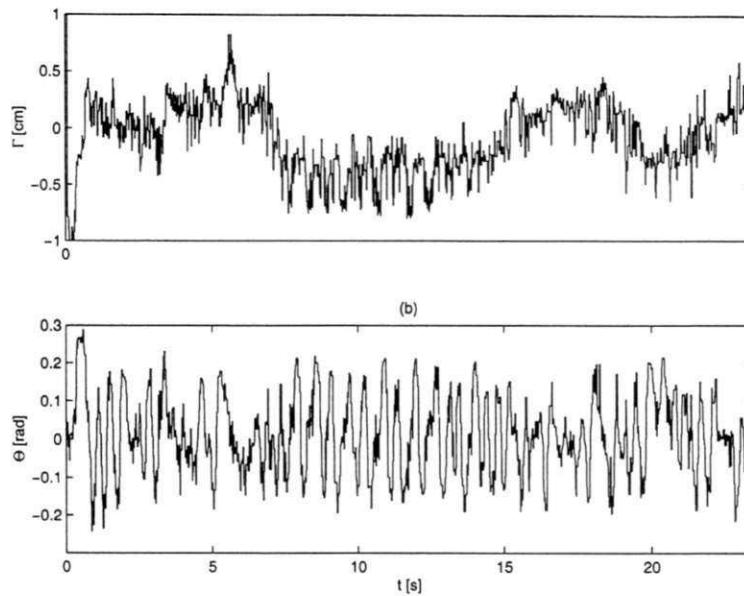


Figura 4.17: Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando controlador de trajetória proporcional.

pela característica de variabilidade dos erros.

### A sintonia iterativa

Para projetar o primeiro controlador, são necessários a especificação do desempenho desejado para o sistema, e um modelo da planta. Inicialmente, fez-se a estimativa do desempenho que a planta poderia atingir através da estimativa de  $w_0$ . Para obter  $w_0$ , foi necessário estimar a constante de tempo máxima e a frequência na qual o sistema apresentasse comportamento ciclo-limite.

Desde que o sinal de saída,  $A(t)$ , é obtido com o sistema operando em malha fechada, efetuou-se um experimento utilizando um controlador proporcional que permitisse fechar a malha (o veículo percorrer a trajetória). Como entrada da planta, foi utilizado o sinal de correção de erro de trajetória,  $\Delta w(t)$ .

Para a estimativa da ordem e parâmetros do modelo, foi utilizado o algoritmo proposto no Capítulo 2. Utilizando os dados gerados pelo experimento, estimou-se a ordem necessária para o modelo através da estimativa dos valores singulares (Fig. 4.18) da matriz  $\mathbf{W}(t)$ , que foi construída considerando que a ordem máxima esperada para o modelo fosse  $n_e = 20$ . No procedimento, foi utilizada apenas a matriz  $\mathbf{W}(t)$ . Utilizou-se apenas  $\mathbf{W}(t)$ , por ter sido verificado que os ruídos que contaminavam às medições das velocidades das rodas, que são utilizadas para definir  $\Delta w(t)$ , possuíam características diferentes dos que contaminavam os erros de trajetória

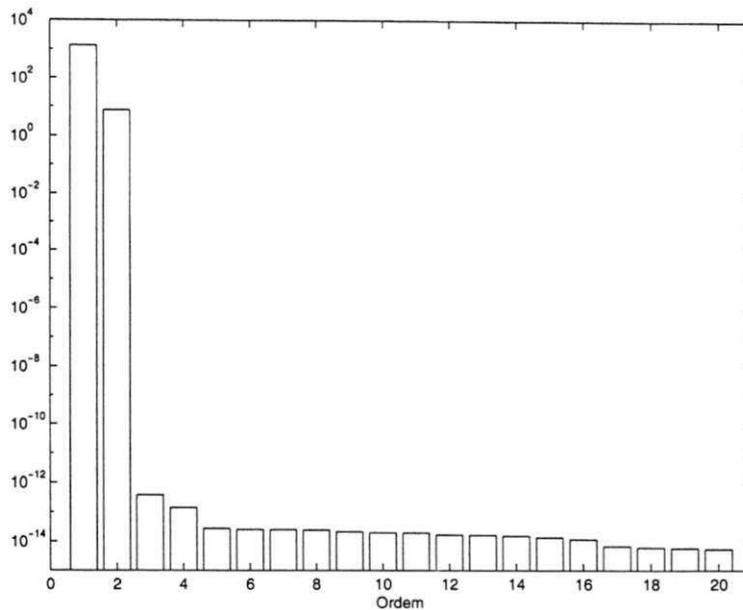


Figura 4.18: Valores singulares estimados que foram utilizados na definição da ordem para o modelo a ser utilizado no projeto do controlador de trajetória.

$\theta(t)$  e  $\Gamma(t)$ , que são utilizados para calcular  $A(t)$ .

Considerando que os dados utilizados na estimativa tinham sido contaminados por ruído, que os dezoito últimos valores singulares estavam na faixa de erro numérico do *MATLAB* (para valores passíveis de serem considerados nulos), e que existiu um salto da ordem de duas décadas entre o primeiro e segundo valores singulares, definiu-se que o modelo deveria ser de primeira ordem.

Utilizando a estimativa da ordem, resultou a seguinte parametrização para o modelo

$$\begin{aligned} \hat{A}_1(q) &= q - 0,9531, \\ \hat{b}_1(q) &= 0,0614. \end{aligned}$$

Esse modelo possui constante de tempo de  $\tau_{\max} \cong 0,08s$ .

Para obter o comportamento ciclo-limite, foi efetuado o teste do relé para estimar  $w_{osc}$ . Nesse caso, o sinal de referência foi nulo e o sinal de saída considerado foi  $A(t)$ . O resultado do teste do relé é apresentado na Fig. 4.19. Por inspeção dessa figura, obteve-se  $w_{osc} \cong 6,124rad/s$ .

Utilizando  $w_{osc}$  e  $\tau_{\max}$ , calculou-se  $w_0 \cong 25rad/s$ . Para estes valores, e considerando que o modelo estimado para a planta foi de primeira ordem, calculou-se o polinômio para a alocação de pólos de primeira ordem

$$A_{Tc_1}(q) = q - 0,9070.$$

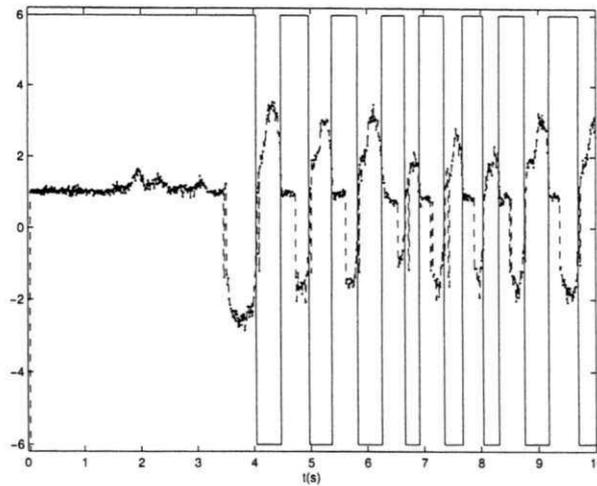


Figura 4.19: Experimento do relé para obter o comportamento ciclo-limite da planta.

Utilizando o modelo estimado de primeira ordem e a especificação de pólos, calculou-se o ganho do controlador

$$k_{T1} = 2,6414.$$

O controlador foi inserido na malha. Efetuou-se um experimento de seguimento da trajetória. Os resultados para os erros cometidos são apresentados na Fig. 4.20. Para esse experimento, observou-se que o veículo percorreu a trajetória sem apresentar movimentos bruscos acentuados, o que é confirmado pela característica de variabilidade das curvas  $\Gamma(t)$  e  $\theta(t)$  (compare este resultado com o apresentado na Fig. 4.17, por exemplo).

Observando as variações dos erros  $\Gamma(t)$  e  $\theta(t)$  (Fig. 4.20), pode-se concluir que o controlador não é aceitável. A não aceitação do desempenho desse controlador deveu-se às oscilações cometidas pelo veículo durante a sua excursão pela trajetória.

Os dados gerados no experimento efetuado na etapa anterior foram empregados na estimativa do modelo de primeira ordem

$$\begin{aligned} \hat{A}_{T2}(q) &= q - 0,8641531, \\ \hat{b}_{T2}(q) &= 0,1175. \end{aligned}$$

Utilizando esse modelo e a especificação de pólos anterior, calculou-se o ganho do controlador, obtendo-se

$$k_{T2} = 0,7917.$$

Para verificar a qualidade do modelo, este foi validado utilizando simulação. Na Fig. 4.21 são apresentadas as curvas medidas e geradas pelo modelo estimado. Deste resultado, pode-se concluir que o modelo estimado foi razoável.

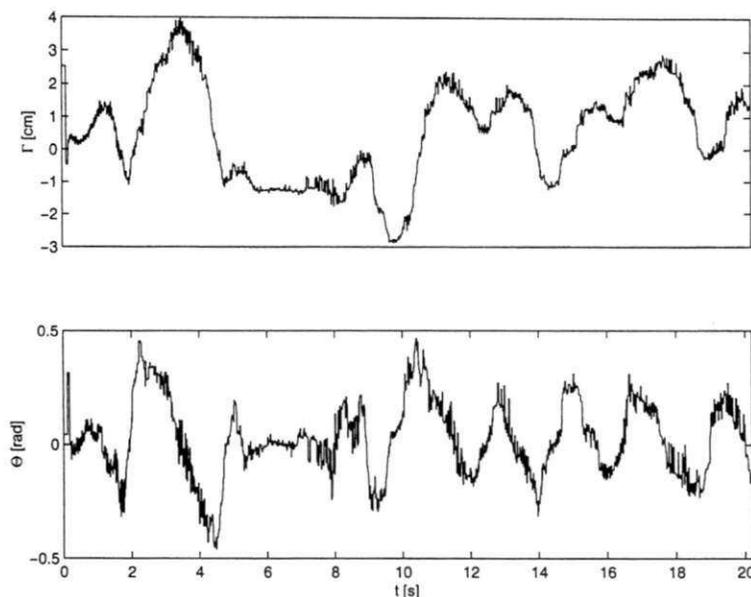


Figura 4.20: Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando o primeiro controlador de trajetória.

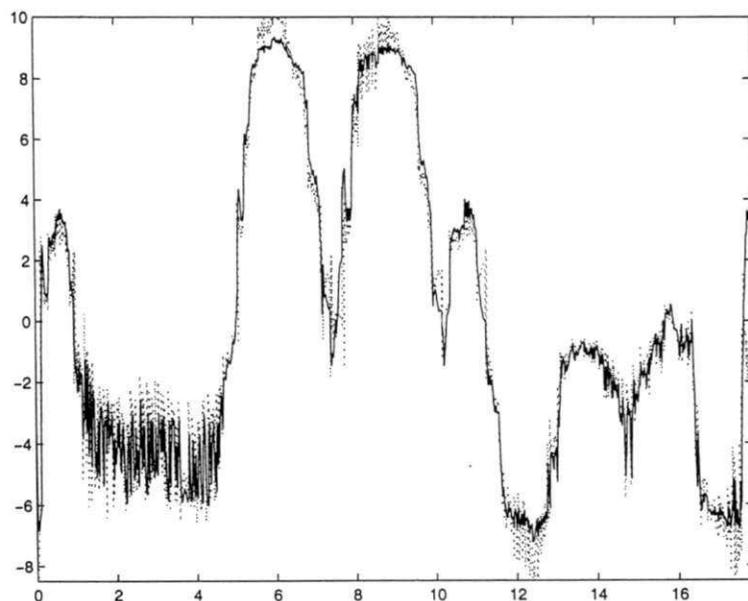


Figura 4.21: Sinal de erro de trajetória  $A(t)$  utilizado na validação do segundo modelo estimado em malha fechada. Curva contínua: Saída do modelo. Curva pontilhada: Sinal de erro medido.

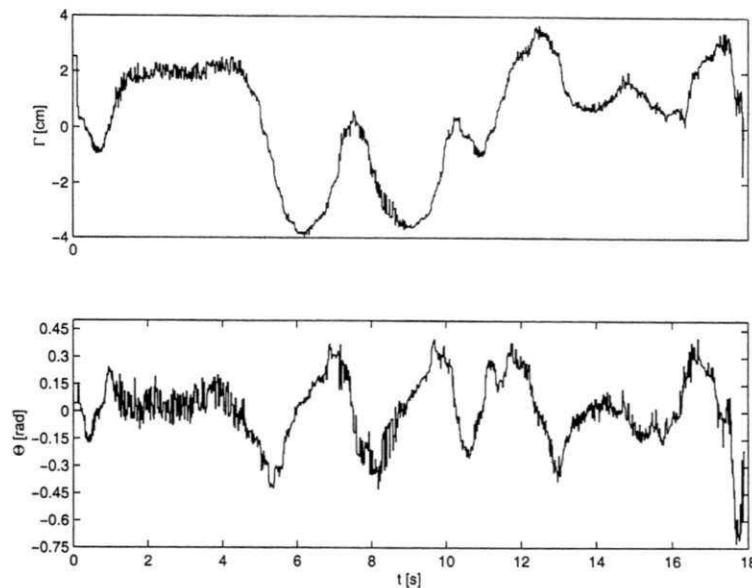


Figura 4.22: Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando o segundo controlador de trajetória.

Para o controlador utilizado nesta etapa, obteve-se um comportamento menos oscilatório do veículo ao excursionar pela trajetória, se comparado ao resultado obtido no experimento anterior (observe o comportamento de  $\Gamma(t)$  e  $\theta(t)$  nas Figs. 4.20 e 4.22).

Utilizando os dados gerados pelo terceiro experimento em malha fechada, estimou-se o modelo de primeira ordem

$$\begin{aligned}\hat{A}_{T3}(q) &= q - 0,9139, \\ \hat{b}_{T3}(q) &= 0,0632.\end{aligned}$$

O modelo foi validado. A Fig. 4.23 apresenta as curvas medida e gerada pelo modelo estimado. Analisando este resultado, pode-se concluir que o modelo estimado foi capaz de reproduzir o comportamento entrada/saída da planta.

Utilizando esse modelo e a especificação de pólos anterior, calculou-se o ganho do controlador, obtendo-se

$$k_{T3} = 1,4711.$$

O controlador foi inserido na malha. Efetuou-se um experimento de seguimento da trajetória. Os resultados para os erros cometidos são apresentados na Fig. 4.24. Observando os resultados obtidos, pode-se concluir que o comportamento do veículo ao executar a trajetória não foi tão suave quanto no caso anterior. Entretanto, o erro de trajetória  $\Gamma(t)$  não atingiu valores superiores a  $3\text{cm}$  em valor absoluto. Este fato, associado a variabilidade do erro  $\theta(t)$ , indica que o veículo trafega com uma margem razoável de segurança quanto à possibilidade de perder a trajetória.

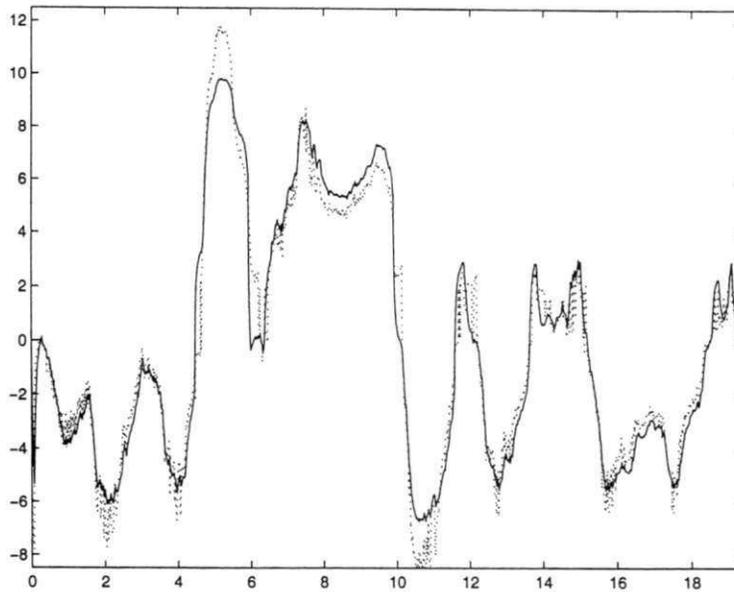


Figura 4.23: Sinal de erro de trajetória  $A(t)$  utilizado na validação do terceiro modelo estimado em malha fechada. Curva contínua: Saída do modelo. Curva pontilhada: Valor medido.

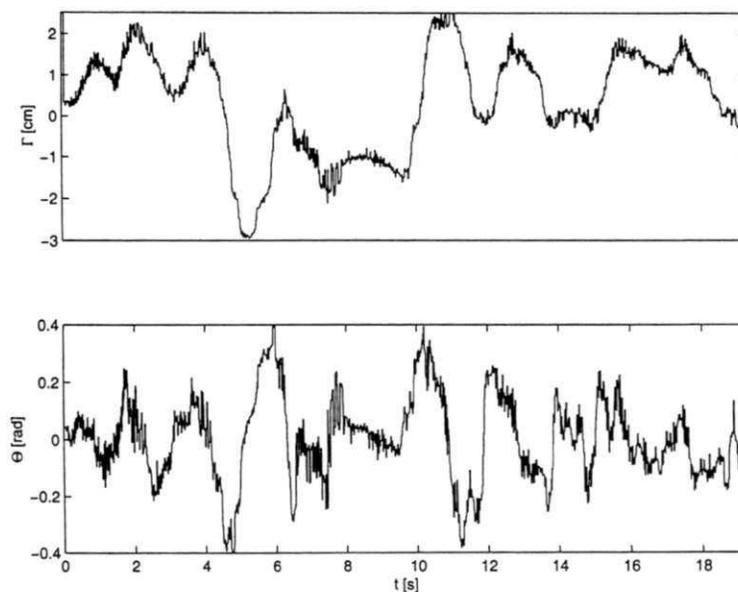


Figura 4.24: Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando o terceiro controlador de trajetória.

Utilizando os dados gerados pelo experimento efetuado na etapa anterior, estimou-se o modelo de primeira ordem

$$\begin{aligned}\widehat{A}_{T_4}(q) &= q - 0,9074, \\ \widehat{b}_{T_4}(q) &= 0,0911.\end{aligned}$$

Como pode ser observado, o pólo estimado da planta é próximo do especificado pela alocação de pólos (polinômio  $A_{T_{c1}}$ ). Considerando o princípio de operação da estrutura utilizada para a implementação da lei de controle, pode-se dizer que neste estágio da etapa iterativa, a planta apresenta um comportamento próximo do especificado para o sistema. Portanto, foi razoável considerar o encerramento do procedimento de sintonia iterativa.

Observando que os veículos diminuem a velocidade ao se aproximarem de curvas, fez-se um experimento onde a velocidade de cruzeiro do veículo era modificada de acordo com o módulo do erro  $A(t)$  - já que o sistema de visão não permitia antecipar a informação quanto a existência de curvas na trajetória - de acordo com a equação

$$w_c^*(t) = w_c - 0,15|A(t)|.$$

Esta lei define a nova velocidade de cruzeiro,  $w_c^*(t)$ , em termos da velocidade de cruzeiro constante,  $w_c$ , definida anteriormente, e a amplitude do erro de trajetória. Portanto, a nova velocidade de cruzeiro passa a ser função do erro de trajetória. No experimento, foi utilizado o controlador projetado na última etapa iterativa.

Observando os resultados obtidos (Fig. 4.25), pode-se concluir que o erro  $\Gamma(t)$  diminuiu sensivelmente, se comparado ao resultado obtido ao utilizar velocidade de cruzeiro fixa e o controlador projetado na última etapa iterativa. Este fato permite concluir que o veículo irá trafegar com menores chances de perder a trajetória quando se utiliza uma velocidade de cruzeiro que varia de acordo com os erros de trajetória.

Como pode ser observado na Fig. 4.25, as variações dos erros de trajetória indicam que o veículo executou a rota sem apresentar comportamentos oscilatórios bruscos.

## 4.4 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas duas novas estruturas de controle. Uma para a implementação de alocação de pólos e a outra, para a implementação da lei de controle para a correção dos erros de trajetória utilizando apenas controladores *SISO*.

Dos resultados apresentados nas etapas de modelagem e experimentos em malha fechada, pode-se concluir que os métodos de estimação e sintonia de controladores propostos nos Capítulos

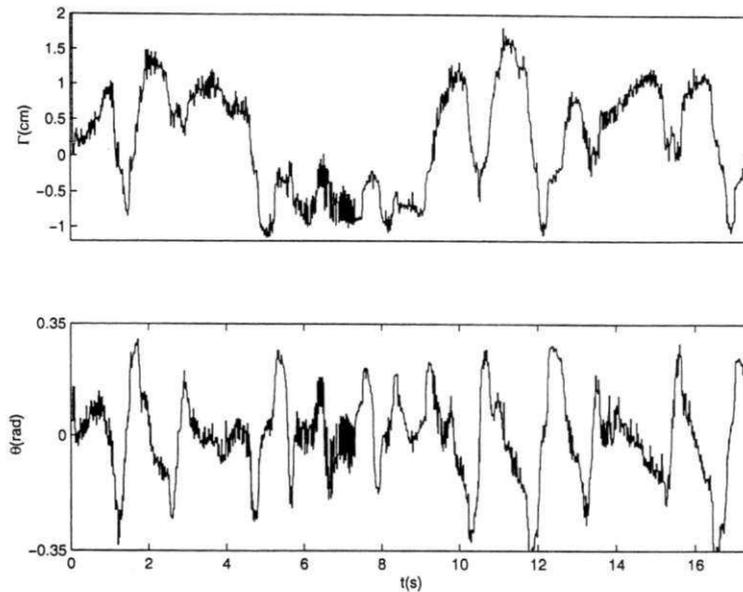


Figura 4.25: Erros de trajetória cometidos pelo veículo utilizando o terceiro controlador e variações na velocidade de referência.

2 e 3 apresentaram resultados satisfatórios, tanto para o projeto dos controladores de velocidade quanto de trajetória.

Tendo como base os resultados experimentais apresentados pelas sintonias iterativas dos controladores, pode-se definir um critério de parada do procedimento iterativo (indícios de convergência da sintonia iterativa), que foi baseado nas características de modelos obtidos em malha aberta e malha fechada da planta. O término da sintonia pode ser indicada ao se estimar um modelo da planta em malha fechada que fosse próximo da especificação de pólos utilizada no projeto do controlador,  $A_c$ . Este indicativo de convergência resultou da utilização da nova estrutura de controle proposta para alocação de pólos.

## Capítulo 5

# CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta Tese foi proposta uma abordagem para a modelagem de plantas utilizando a estrutura *ARX*. O método permite a determinação da ordem e parâmetros do modelo utilizando apenas os dados medidos na entrada e saída da planta. A identificação pode ser efetuada de forma automática. A estimação dos parâmetros do modelo foi obtida sem a presença do termo de polarização que ocorre em outros algoritmos devido ao conhecimento de toda a seqüência de estados na estrutura utilizada. Também foi demonstrado que existe uma correspondência entre os cálculos dos parâmetros do modelo utilizando uma solução mínimos quadrados e a utilização de projetores oblíquos.

Como contribuição na área de controle, apresentou-se um esquema iterativo que, garantido simultaneamente a estabilidade, ajusta a malha automaticamente para máximo desempenho.

Para o projeto dos controladores *SISO* para o veículo automático foi utilizado, com sucesso, os métodos propostos de identificação, projeto iterativo do controlador e estruturas para o controle de velocidade e trajetória do veículo.

Como sugestões para trabalhos futuros, tem-se a extensão da técnica de sintonia iterativa para plantas *MIMO*, e respectivos problemas de definição para o desempenho e sintonia cautelosa do controlador.

Outra questão que poderia ser analisada, seria a utilização de desacopladores em conjunto com os controladores *SISO*, para tentar melhorar o desempenho do sistema.

Outro ponto que poderia ser investigado, seria a caracterização da solução mínimos quadrados em termos de operadores de projeção, o que pode resultar em uma técnica de estimação puramente em subespaço.

Utilizando a especificação de desempenho, e medições das entradas e saídas da planta,

poderia ser investigada a possibilidade de se obter um algoritmo de estimação que fornecesse diretamente o controlador. Neste caso, a sintonia do controlador não necessitaria do modelo da planta.

A exploração da técnica proposta para a sintonia iterativa de controladores PID para plantas com atraso seria outro ponto relevante a ser investigado.

## Apêndice A

# REPRESENTAÇÃO ALTERNATIVA PARA ESPAÇO DE ESTADOS

### A.1 Gerando a Estrutura Alternativa: Caso determinístico

Os desenvolvimentos apresentados neste Apêndice, demonstram que estruturas em espaço de estados sugerida por Ljung [70] podem ser reescritas utilizando de forma similar à efetuada no Capítulo 2 para modelos ARX. Para a estrutura em espaço de estados utilizada, reescreve-se a representação eliminando-se a variável de estado, que é desconhecida. Ao final, obtêm-se uma representação onde estão presentes apenas as variáveis de entrada e saída do sistema. O modelo resultante possui  $nm$  entradas e  $l$  saídas, onde  $n$  é a ordem do modelo e  $m$  e  $l$  são os números de entradas e saídas da planta, respectivamente.

Inicialmente apresenta-se o procedimento para sistemas determinísticos. Em seguida, utilizando os resultados obtidos para sistemas determinísticos, o procedimento é estendido para o caso onde os estados e/ou as saídas do sistema são contaminados por perturbações estocásticas.

#### A.1.1 Sistemas SISO

Para verificar a possibilidade de reescrever o modelo em espaço de estados utilizando apenas os sinais de entrada e saída do sistema, considere o modelo em espaço de estados de quarta ordem

$$\begin{bmatrix} x_1^d(t+1) \\ x_2^d(t+1) \\ x_3^d(t+1) \\ x_4^d(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^d(t) \\ x_2^d(t) \\ x_3^d(t) \\ x_4^d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix} u(t), \quad (\text{A.1})$$

$$y^d(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^d(t) \\ x_2^d(t) \\ x_3^d(t) \\ x_4^d(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

A partir da saída e estados, pode-se escrever

$$\begin{aligned} x_1^d(t+1) &= y^d(t+1) = x_2^d(t) + b_{11}u(t). \\ \Rightarrow x_2^d(t+1) &= y^d(t+2) - b_{11}u(t+1) = x_3^d(t) + b_{21}u(t). \\ \Rightarrow x_3^d(t+1) &= y^d(t+3) - b_{11}u(t+2) - b_{21}u(t+1) = x_4^d(t) + b_{31}u(t). \\ \Rightarrow x_4^d(t+1) &= y^d(t+4) - b_{11}u(t+3) - b_{21}u(t+2) - b_{31}u(t+1) \\ &= a_{41}y^d(t) + a_{42}[y^d(t+1) - b_{11}u(t)] + a_{43}[y^d(t+2) - b_{11}u(t+1) - b_{21}u(t)] \\ &\quad + a_{44}[y^d(t+3) - b_{11}u(t+2) - b_{21}u(t+1) - b_{31}u(t)] + b_{41}u(t). \\ \therefore y^d(t+4) &= a_{41}y^d(t) + a_{42}y^d(t+1) + a_{43}y^d(t+2) + a_{44}y^d(t+3) + \\ &\quad [b_{41} - a_{42}b_{11} - a_{43}b_{21} - a_{44}b_{31}]u(t) + [b_{31} - a_{43}b_{11} - a_{44}b_{21}]u(t+1) \\ &\quad + [b_{21} - a_{44}b_{11}]u(t+2) + b_{11}u(t+3). \end{aligned}$$

Este conjunto de equações admite a seguinte representação matricial compacta

$$\begin{bmatrix} y^d(t+1) \\ y^d(t+2) \\ y^d(t+3) \\ y^d(t+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^d(t) \\ y^d(t+1) \\ y^d(t+2) \\ y^d(t+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} - a_{42}b_{11} - a_{43}b_{21} - a_{44}b_{31} & b_{31} - a_{43}b_{11} - a_{44}b_{21} & b_{21} - a_{44}b_{11} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ u(t+2) \\ u(t+3) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Define-se a estrutura em espaço de estados procurada como sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^d(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}^d(t) + \mathbf{B}^*u^*(t), \\ y^d(t) &= \mathbf{c}\mathbf{w}^d(t), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\mathbf{w}^d(t) = \begin{bmatrix} y(t) & y(t+1) & y(t+2) & y(t+3) \end{bmatrix}^T.$$

Observa-se que a matriz  $\mathbf{A}$  é a mesma da representação em espaço de estados original. A matriz  $\mathbf{B}^*$  é definida por

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41}-a_{42}b_{11}-a_{43}b_{21}-a_{44}b_{31} & b_{31}-a_{43}b_{11}-a_{44}b_{21} & b_{21}-a_{44}b_{11} & b_{11} \end{bmatrix},$$

e o vetor de entradas,  $\mathbf{u}^*(t)$ , por

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ u(t+2) \\ u(t+3) \end{bmatrix}.$$

Para facilitar a obtenção de um termo geral para a matriz  $\mathbf{B}^*$  via indução, reescreve-se esta como sendo

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{31} & b_{21} & b_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{21} & b_{11} & 0 \end{bmatrix},$$

onde os termos  $b_{i1}$ ,  $i, i = 1, \dots, 4$ , em  $\mathbf{B}^*$  correspondem aos elementos de cada linha do vetor  $\mathbf{b}$ , os termos  $a_{ij}$  em  $\mathbf{B}^*$  correspondem aos elementos da matriz  $\mathbf{A}$  da representação em espaço de estados. Observe que é possível recuperar o vetor  $\mathbf{b}$  a partir da matriz  $\mathbf{B}^*$ . Para recuperar  $\mathbf{b}$ , considere o seguinte conjunto de equações lineares obtidos via inspeção de  $\mathbf{B}^*$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \mathbf{B}^*(4, 4) = b_{11}, \\ \beta_2 &= \mathbf{B}^*(4, 3) = b_{21} - a_{44}b_{11}, \\ \beta_3 &= \mathbf{B}^*(4, 2) = b_{31} - a_{43}b_{11} - a_{44}b_{21}, \\ \beta_4 &= \mathbf{B}^*(4, 1) = b_{41} - a_{42}b_{11} - a_{43}b_{21} - a_{44}b_{31}, \end{aligned}$$

que pode ser arranjada na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{44} & 1 & 0 & 0 \\ -a_{43} & -a_{44} & 1 & 0 \\ -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{\beta} = \mathbf{T}\mathbf{b}. \quad (\text{A.5})$$

A partir de (A.5), é possível recuperar  $\mathbf{b}$  via

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\beta}. \quad (\text{A.6})$$

Utilizando-se o procedimento para obter (A.3), por indução, pode-se mostrar que um modelo de ordem  $n$  em espaço de estados onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

com  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , e com número de elementos desconhecidos  $a_{ij}$  é igual a  $n$ . O vetor-coluna  $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ , é do tipo

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{bmatrix},$$

com  $n$  elementos  $b_{i1}$  desconhecidos. O vetor-linha conhecido  $\mathbf{c} \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ , é dado por

$$\mathbf{c} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0],$$

indicando que se tem acesso à variável de estado  $w_1^d(t)$  para medição, pode ser reescrito como sendo

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y^d(t+1) \\ y^d(t+2) \\ \dots \\ y^d(t+n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^d(t) \\ y^d(t+1) \\ \dots \\ y^d(t+n-1) \end{bmatrix} + \\
 &\left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{n1} & b_{(n-1)1} & \dots & b_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{11} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \dots - \right. \\
 &\quad \left. \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{(n-1)1} & b_{(n-2)1} & \dots & b_{11} & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \dots \\ u(t+n-1) \end{bmatrix} \quad (A.8) \\
 \mathbf{w}^d(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}^d(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{u}^*(t), \\
 y^d(t) &= \mathbf{c}\mathbf{w}^d(t).
 \end{aligned}$$

Observe que a representação encontra-se na forma canônica de Luenberger [1], [25].

Para modelos de ordem  $n$ , a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  assume a forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{nn} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{nn-1} & -a_{nn} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & -a_{nn} & 1 \end{bmatrix}, \quad (A.9)$$

e o vetor  $\beta$

$$\beta = \left[ \mathbf{B}^*(n, n) \quad \mathbf{B}^*(n, n-1) \quad \dots \quad \mathbf{B}^*(n, 1) \right]^T,$$

com a recuperação de  $\mathbf{B}$  sendo possível utilizando  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\beta$ .

Portanto, conclui-se que é possível reescrever representações para modelos em espaço de estados utilizando a estrutura canônica utilizada para sistemas *SISO* onde apenas as variáveis de entrada e saída do sistema estão presentes. Por inspeção de (A.8), conclui-se que apenas

as últimas linhas das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}^*$  possuem elementos desconhecidos. Além disso, a seqüência de estados da estrutura é conhecida. Outra facilidade oferecida pela estrutura, é a de possibilitar a estimação de todos os elementos desconhecidos das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}^*$  utilizando um regressor linear. Neste caso, o regressor seria construído pelos elementos da  $n$ -ésima linha da representação proposta, que corresponde a linha onde os termos das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}^*$  são desconhecidos.

### A.1.2 Sistemas TITO

A estrutura alternativa para sistemas TITO será obtida considerando o seguinte modelo de quarta ordem

$$\begin{bmatrix} x_1^d(t+1) \\ x_2^d(t+1) \\ x_3^d(t+1) \\ x_4^d(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^d(t) \\ x_2^d(t) \\ x_3^d(t) \\ x_4^d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y^d(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^d(t).$$

Utilizando o procedimento anterior para a descrição do modelo em termos das variáveis de entrada e saída do sistema, chega-se a seguinte representação

$$\begin{bmatrix} y_1^d(t+1) \\ y_1^d(t+2) \\ y_2^d(t+1) \\ y_2^d(t+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^d(t) \\ y_1^d(t+1) \\ y_2^d(t) \\ y_2^d(t+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} - a_{22}b_{11} - a_{24}b_{31} & b_{22} - a_{22}b_{12} - a_{24}b_{32} & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} - a_{42}b_{11} - a_{44}b_{31} & b_{42} - a_{42}b_{12} - a_{44}b_{32} & b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_1(t+1) \\ u_2(t+1) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^d(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}^d(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{U}(t), \\ y^d(t) &= \mathbf{C}\mathbf{w}^d(t). \end{aligned}$$

A matriz  $\mathbf{B}^*$  pode ser reescrita como sendo

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{24} \\ 0 \\ a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22} \\ 0 \\ a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

onde  $\mathbf{b}_i, i = 1, \dots, 4$ , referem-se aos vetores-linha da matriz  $\mathbf{B}$ .

Neste caso também é possível obter uma transformação de  $\mathbf{B}^*$  para  $\mathbf{B}$ . Utilizando-se as equações lineares presentes em  $\mathbf{B}^*$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \mathbf{B}^*(2, 3) = b_{11}, \beta_{12} = \mathbf{B}^*(2, 4) = b_{12} \\ \beta_{21} &= \mathbf{B}^*(2, 1) = b_{21} - a_{22}b_{11} - a_{24}b_{31}, \\ \beta_{22} &= \mathbf{B}^*(2, 2) = b_{22} - a_{22}b_{12} - a_{24}b_{32} \\ \beta_{31} &= \mathbf{B}^*(4, 3) = b_{31}, \beta_{32} = \mathbf{B}^*(4, 4) = b_{32} \\ \beta_{41} &= \mathbf{B}^*(4, 1) = b_{41} - a_{42}b_{11} - a_{44}b_{31}, \\ \beta_{42} &= \mathbf{B}^*(4, 2) = b_{42} - a_{42}b_{12} - a_{44}b_{32}, \end{aligned}$$

que admite a seguinte representação matricial

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \\ \beta_{41} & \beta_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{22} & 1 & -a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{42} & 0 & -a_{44} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \quad \beta = \mathbf{T}\mathbf{B}. \quad (\text{A.11})$$

Pode-se recuperar  $\mathbf{B}$  a partir de (A.11) via

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\beta. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando-se o procedimento para obter (A.10), por indução, pode-se mostrar que um modelo *TITO* de ordem  $n$  pode ser reescrito como sendo

$$\begin{bmatrix} y_1^d(t+1) \\ y_1^d(t+2) \\ \dots \\ y_1^d(t+i_F) \\ y_2^d(t+1) \\ y_2^d(t+2) \\ \dots \\ y_2^d(t+n-i_F) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i_F 1} & a_{i_F 2} & \dots & a_{i_F i_F} & a_{i_F i_F+1} & a_{i_F i_F+2} & \dots & a_{i_F n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{ni_F} & a_{ni_F+1} & a_{ni_F+2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^d(t) \\ y_1^d(t+1) \\ \dots \\ y_1^d(t+i_F-1) \\ y_2^d(t) \\ y_2^d(t+1) \\ \dots \\ y_2^d(t+n-i_F-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_{i_F} & \mathbf{b}_{i_F-1} & \dots & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_n & \mathbf{b}_{n-1} & \dots & \mathbf{b}_{i_F+2} & \mathbf{b}_{i_F+1}^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{i_F,2} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{n,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{i_F,3} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{n,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
 & \dots - \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{i_F,i_F} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{n,i_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i_F-1} & \mathbf{b}_{i_F-2} & \dots & \mathbf{b}_1 & 0 \end{bmatrix} - \\
 & \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{i_F,i_F+2} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{n,i_F+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i_F+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{i_F,i_F+3} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{n,i_F+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i_F+2} & \mathbf{b}_{i_F+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
 & \dots - \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{i_F,n} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_{i_F+1}^- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_1(t+1) \\ u_2(t+1) \\ \dots \\ u_1(t+i_F-1) \\ u_2(t+i_F-1) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{w}^d(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{w}^d(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{u}^*(t),$$

$$\mathbf{y}^d(t) = \mathbf{C}\mathbf{w}^d(t),$$

onde  $i_F$  é a dimensão do primeiro bloco de Frobenius da matriz  $\mathbf{A}$ . Se  $n$  for ímpar, o vetor-linha  $\mathbf{b}_{i_F+1}^-$  desloca-se para a esquerda de 2 posições. Neste caso, um vetor-linha nulo de mesma dimensão ocupa a sua posição. Para este caso, também é possível obter a matriz de transformação de  $\mathbf{B}^*$  para  $\mathbf{B}$  utilizando as equações lineares presentes em  $\mathbf{B}^*$ .

É interessante fazer as seguintes observações: O vetor de entradas  $\mathbf{u}^*(t)$  é formado pelas entradas "atuais",  $\mathbf{u}(t)$ , e vetores de entradas deslocados até obter o deslocamento  $(t + i_F - 1)$ ; o número de linhas não nulas da matriz  $\mathbf{B}^*$  é igual ao número de saídas mensuráveis; a matriz  $\mathbf{B}$  pode ser recuperada a partir da matriz  $\mathbf{B}^*$ ; as linhas não nulas de  $\mathbf{B}^*$  ocorrem nas posições correspondentes as posições das linhas da matriz  $\mathbf{A}$  onde terminam os blocos de Frobenius.

## A.2 Gerando a Estrutura Alternativa: Caso estocástico

Os resultados apresentados nesta seção referem-se a sistemas que apresentam perturbações estocásticas em seus estados e/ou saídas. No desenvolvimento, os estados e saídas são decompostos em duas componentes. Uma, que é resultante da contribuição da componente determinística, e outra, que é devido à componente estocástica.

A seguir, os desenvolvimentos para sistemas determinísticos são estendidos para o caso de sistema *SISO* e *TITO* para modelagem via espaço de estados em inovação utilizando a estrutura disponibilizada por Ljung [70]. Para ilustrar o procedimento, os resultados são apresentados para sistemas de quarta ordem. A extensão para os demais casos não oferece dificuldade e não será comentada.

### A.2.1 Modelo *SISO*

Considere o sistema linear invariante no tempo discreto, de quarta ordem em inovação

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} e(t) \\
 & = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{k}e(t), \\
 y(t) & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + e(t). \\
 & = \mathbf{c}\mathbf{x}(t),
 \end{aligned}$$

onde  $e(t)$  é um ruído branco.

Os estados podem ser decompostos em duas componentes. Uma determinística

$$\mathbf{x}^d(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x}^d(t) + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix} u(t), \quad (\text{A.13})$$

e outra estocástica,  $\mathbf{x}^s(t)$ ,

$$\mathbf{x}^s(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x}^s(t) + \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} e(t), \quad (\text{A.14})$$

onde  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^d(t) + \mathbf{x}^s(t)$ .

A saída também pode ser decomposta em duas componentes. Uma determinística

$$y^d(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}^d(t),$$

e outra estocástica

$$y^s(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}^s(t) + e(t),$$

onde

$$\begin{aligned}
 y(t) & = y^d(t) + y^s(t) = \mathbf{c}[\mathbf{x}^d(t) + \mathbf{x}^s(t)] + e(t) \\
 & = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + e(t).
 \end{aligned}$$

Os estados determinísticos e estocásticos podem ser reescritos em termos apenas das variáveis de entrada, saída e do ruído de medição. Ou seja, pode-se eliminar as variáveis intermediárias  $\mathbf{x}^d(t)$  e  $\mathbf{x}^s(t)$  em (A.13) e (A.14), respectivamente.

Para a componente determinística, resulta (A.3)

$$\begin{bmatrix} y^d(t+1) \\ y^d(t+2) \\ y^d(t+3) \\ y^d(t+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^d(t) \\ y^d(t+1) \\ y^d(t+2) \\ y^d(t+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41}-a_{42}b_{11}-a_{43}b_{21}-a_{44}b_{31} & b_{31}-a_{43}b_{11}-a_{44}b_{21} & b_{21}-a_{44}b_{11} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ u(t+2) \\ u(t+3) \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^d(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}^d(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{u}^*(t), \\ y^d(t) &= \mathbf{c}\mathbf{w}^d(t), \end{aligned}$$

com

$$\mathbf{w}^d(t) = \begin{bmatrix} y(t) & y(t+1) & y(t+2) & y(t+3) \end{bmatrix}^T.$$

Para a estocástica, obtém-se

$$\begin{bmatrix} y^s(t+1) \\ y^s(t+2) \\ y^s(t+3) \\ y^s(t+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^s(t) \\ y^s(t+1) \\ y^s(t+2) \\ y^s(t+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{41}-a_{41}-a_{42}k_{11}-a_{43}k_{21}-a_{44}k_{31} & k_{31}-a_{42}-a_{43}k_{11}-a_{44}k_{21} & k_{21}-a_{43}-a_{44}k_{11} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{11}-a_{44} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t+1) \\ e(t+2) \\ e(t+3) \\ e(t+4) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^s(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}^s(t) + \mathbf{K}^*\mathbf{e}(t), \\ y^s(t) &= \mathbf{c}\mathbf{w}^s(t). \end{aligned}$$

Desde que  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}^d(t) + \mathbf{w}^s(t)$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}^*\mathbf{e}^*(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{w}(t).\end{aligned}$$

## A.2.2 Modelo TITO

Considere o sistema TITO em inovação

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \\ k_{41} & k_{42} \end{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\mathbf{u}(t) + \mathbf{k}\mathbf{e}(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t). \\ &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$ ,  $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]$ ,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$

Reescrevendo esta representação em termos das entradas e saídas, para a decomposição dos estados e saídas em componentes suas componentes determinística

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} y_1^d(t+1) \\ y_1^d(t+2) \\ y_2^d(t+1) \\ y_2^d(t+2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^d(t) \\ y_1^d(t+1) \\ y_2^d(t) \\ y_2^d(t+1) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} - a_{22}b_{11} - a_{24}b_{31} & b_{22} - a_{22}b_{12} - a_{24}b_{32} & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} - a_{42}b_{11} - a_{44}b_{31} & b_{42} - a_{42}b_{12} - a_{44}b_{32} & b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_1(t+1) \\ u_2(t+1) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

e estocástica,

$$\begin{bmatrix} y_1^s(t+1) \\ y_1^s(t+2) \\ y_2^s(t+1) \\ y_2^s(t+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^s(t) \\ y_1^s(t+1) \\ y_2^s(t) \\ y_2^s(t+1) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_{21} - a_{21} - a_{22}k_{11} - a_{24}k_{31} & k_{22} - a_{23} - a_{22}k_{12} - a_{24}k_{32} & k_{11} - a_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{41} - a_{41} - a_{42}k_{11} - a_{44}k_{31} & k_{42} - a_{43} - a_{42}k_{12} - a_{44}k_{32} & k_{31} - a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_1(t+1) \\ e_2(t+1) \\ e_1(t+2) \\ e_2(t+2) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{w}^s(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{w}^s(t) + \mathbf{K}^*\mathbf{e}^*(t).$$

resulta a nova representação em espaço de estados

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{u}^*(t) + \mathbf{K}^*\mathbf{e}^*(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{w}(t). \end{aligned}$$

Como o esperado, foi possível reescrever a representação em espaço de estados em uma representação alternativa, que é semelhante à apresentada para o modelo ARX no Capítulo 2.

# Apêndice B

## VEÍCULOS AUTÔNOMOS

### B.1 Introdução

Veículos autônomos (VA's) são veículos que possuem a capacidade de se deslocar sem condutor embarcado. Estes podem operar com ou sem o auxílio de operadores remotos [77], [78], de acordo com o grau de autonomia necessário para a missão. Um veículo para ser classificado como autônomo deve ter a capacidade de planejar e executar rotas utilizando recursos embarcados. Isto é, prover as demandas de energia, capacidade computacional, propriedades de tolerância a falhas, capacidade de responder às mudanças ambientais e prover o seu resgate após o término da missão.

Atualmente veículos autônomos são utilizados no auxílio a automação da manufatura, correios, inspeção em locais hostis, desarme de bombas, reconhecimento aéreo, exploração oceânica, bombas autoguiadas, entre outras [55], [112]. Por exemplo, A's podem ser equipados com braços e pinças capazes de manipulação robótica. Neste caso, os VA's podem executar operações de empilhamento em armazéns, podendo armazenar cargas até 10 metros de altura ou mais [3].

Dadas as características necessárias para um veículo ser denominada autônomo, a construção de VA envolve conhecimentos nas áreas de automação e controle; inteligência artificial, ciências da computação; instrumentação; processamento de imagens e sinais; telecomunicações; mecânica fina; ciência dos materiais e eletrônica. Os pesquisadores das diferentes áreas devem resolver problemas de controle a eventos discretos e contínuo; implementar uma capacidade de tomada de decisão inteligente pela máquina (não apenas capacidade de reação ao meio); fornecer algoritmos e arquiteturas para programas que possibilitem o tratamento de grande volume de dados em tempo real; disponibilizar sensores com capacidades semelhantes (ou superiores) às fornecidas pelos sentidos presentes nos seres humanos; construir artefatos de grande precisão e robustez mecânica e desenvolver circuitos específicos.

Alguns especialistas são pessimistas quanto a possibilidade de obtenção de veículos que possam ser designados de autônomos no sentido amplo da palavra, pelos seguintes fatos<sup>1</sup>: Programas para robô, como para outros sistemas controlados por computador, objetivam efetuar determinada tarefa; diferentemente dos seres humanos, são incapazes de generalizar (adaptar-se ao meio); um programa escrito para desempenhar determinada tarefa é geralmente incapaz de desenvolver outras tarefas não previstas; robôs móveis permanecem incapazes de reproduzir comportamento orgânico a um grau que sugira que estes sejam "inteligentes".

A possibilidade de construir uma "maquina pensante" é simplesmente descartada em Uttal [114]. Por outro lado, alguns pesquisadores acreditam que em um horizonte próximo, existirão tarefas que serão executadas por humanos utilizando grupo de robôs cooperativos de forma segura, interativa e inteligente [112]. Atualmente, veículos denominados autônomos podem ter deslocamento teleoperado por humanos e/ou deslocamento autônomo por intervalo de tempo reduzido.

Para que um VA efetue tarefas especificadas de modo eficiente e confiável, é necessário que este possua capacidade de perceber o ambiente. O grau de percepção necessário aumenta à medida que o ambiente passa de estático para dinâmico, de conhecido para desconhecido, de restrito a genérico. A única maneira de fornecer a capacidade de percepção ao VA, é através de sensores; que permitem a construção de modelos (ou mapas) para auxiliar a tomada de decisão pelo veículo em um horizonte de incertezas reduzido. Os sensores utilizados podem estar no ambiente e/ou embarcados no veículo, o seu número e tipo depende da tarefa a ser executada e do ambiente. Os VA 's modernos utilizam canais de comunicação por rádio em FM para enviar e receber dados das estações de controle fixas. As comunicações por rádio, por si só, aumentam o grau de liberdade e mobilidade dos VA's.

A próxima seção apresenta as características que um veículo deve ter para se considerado autônomo. Como será visto, quanto maior o grau de autonomia requerido para o veículo, maior será complexibilidade dos subsistemas que devem ser embarcados no veículo. A apresentação a seguir é restrita a veículos terrestres, que é o tipo de veículo abordado nesta tese. Para veículos que atuam no ambiente aquático e aéreos, veja [38], [88].

## B.2 Veículos Autônomos Terrestres

O maior desafio para um Veículo autônomo terrestre (VAT), como para os demais tipos de veículos autônomos, é obter autonomia no sentido amplo da palavra. Para serem considerados

---

<sup>1</sup>William R. Uttal. Crítica do livro: "Artificial Intelligence and Mobile Robots", Journal of Mathematical Psychology, 43: 155-164, 1999.

autônomos, estes veículos deverão ter a capacidade de navegar e sobreviver em ambientes hostis e desconhecidos. Mesmo inserindo humanos na malha de controle, esta tarefa atualmente não é factível [77]. Ainda existem restrições na questão de autonomia energética e percepção do ambiente com qualidade e velocidade adequadas à navegação e recuperação do veículo.

A fusão de dados ocupa um lugar especial na busca da autonomia. Fusão de dados nada mais é do que a combinação, correlação, associação, estimação de estados, identificação e outros tipos de processamentos efetuados sobre o conjunto dos dados fornecidos pelos diferentes tipos de sensores. Estes processamentos têm por finalidade fornecer uma descrição do ambiente que seja de melhor qualidade e utilidade, se comparada a obtida ao se utilizar os dados gerados de forma independente pelos sensores. A fusão de dados justifica-se pelos seguintes fatos: Nenhum sistema particular de medição possui a capacidade de suprir todas as necessidades exigidas para a navegação de um veículo; determinados sensores apresentam características complementares [51]. Por exemplo, para a navegação de VAT's, a fusão de dados possibilita obter a percepção do ambiente tridimensional através da utilização de sistemas de visão e fusão dos dados das diferentes câmaras [51]; classificação do terreno - se é arenoso, obter o grau da granulação - utilizando a fusão dos dados provenientes do sistema de odometria e triangularização [100]; robustez e precisão na estimação de posição do veículo utilizando fusão de dados provenientes dos sistemas inercial e GPS [49], e de sistemas de visão, inercial e GPS [48].

Considerando que a tecnologia fosse capaz de fornecer ao veículo todas as informações sobre o ambiente necessárias a sua navegação, a definição da rota poderia ser obtida por duas abordagens. Na primeira, o veículo constrói um mapa, define uma rota e a executa. Esta abordagem é conhecida na literatura pela sigla *SMPA*<sup>2</sup>. A *SMPA* permite um planejamento de longo prazo para a navegação do veículo, o que permite deslocamentos longos antes que se faça necessário um novo planejamento. Entretanto, esta abordagem leva o veículo a apresentar respostas lentas. Na segunda, após perceber o ambiente, o veículo reage ao mesmo de modo similar aos insetos; o que restringe os deslocamentos a jornadas curtas mas aumenta a velocidade de resposta. De acordo com Cao [24], as abordagens encontradas na literatura geralmente resolvem os problemas de navegação utilizando visão de máquina fornecida por câmaras de vídeo. Para a modelagem do ambiente e detecção de marcas utilizando processamento dos dados fornecidos pelo sistema de visão, utiliza-se geralmente lógica nebulosa e métodos probabilísticos [26], [48], [67], [68].

Veículos autônomos podem ser utilizados para desempenhar tarefas em ambientes estruturados e de dinâmica conhecida. Neste caso, a complexibilidade associada a construção e operação do veículo é reduzida sensivelmente. O sistema mais simples é o de rotas fixas. Neste caso,

---

<sup>2</sup> *SMPA*: "Sense, Plan, Map, and Act"

a rota é definida antes do início de operação do sistema. Neste tipo de rota, o controle da dinâmica do veículo é feita de acordo com a percepção da posição do veículo com relação a trajetória, e velocidade de navegação desejada. Os veículos que atuam neste tipo de sistema são denominados “automáticos”.

O robô “Shakey” é considerado na bibliografia como sendo o primeiro robô sobre rodas com capacidade de percepção e planejamento de rotas [78]. A capacidade de percepção neste robô foi obtida através da utilização de câmara de vídeo que fornecia uma visão ampla do ambiente. Utilizando os dados fornecidos pelo sistema de visão, determinava-se a posição do veículo e construía-se um modelo do ambiente. Este modelo era comparado com o armazenado na memória. Da comparação entre estes modelos, resultava a definição da rota a ser seguida pelo veículo. Devido às necessidades computacionais envolvidas no procedimento, que utilizava comunicação via rádio, a maioria do processamento era efetuado em uma estação remota.

O desenvolvimento dos primeiros protótipos tiveram o mérito de indicar os novos desafios a serem superados na busca da autonomia para VAT's. O desafio principal sendo o de embarcar todos os recursos necessários para obter navegação autônoma. A navegação autônoma pode ser relaxada em alguns casos. Por exemplo, quando o objetivo é utilizar VAT's para deslocamento de cargas em ambientes conhecidos e estruturados [53], [82], [119], razoavelmente estruturados e conhecidos [11], [39], [84] e não estruturados e completamente desconhecidos [77]. Ou seja, de acordo com a dinâmica e complexibilidade do ambiente onde o VAT's irá atuar, a condição de autonomia pode ser relaxada em maior ou menor grau. O grau de autonomia do veículo também define o número e qualidade dos sensores, necessidade computacional, mecânica, materiais e fontes de energia utilizadas.

A existência de diferentes níveis para o planejamento, definição e execução das rotas, levou ao desenvolvimento de diferentes arquiteturas para controle de VAT's. Em sua grande maioria, as arquiteturas de controle são divididas em três camadas [5], [58]. Nestas arquiteturas, o controle da dinâmica do veículo encontra-se na camada de mais baixo nível. As ações de controle podem sofrer maior ou menor grau de interferência das camadas superiores da arquitetura. Observando que determinados comportamentos simples, tais como mover-se para frente e evitar colisões, operando em paralelo, de modo aproximadamente independente, podem levar um VAT a exibir comportamento relativamente sofisticado, foi proposta recentemente uma nova arquitetura onde não é assumido um controle central do veículo. A utilização do termo “aproximadamente independente” significa que uma ação de controle pode, de acordo com as condições ambientais detectadas pelos sensores, requerer que outra ação fique ativa. Como consequência, o controle não requer a modelagem do ambiente e do veículo, o que permite reações rápidas às variações nas condições ambientais. As ações de reação são previamente armazenadas, o que reduz o tipo

de operação a ambientes com dinâmica previsível. Outra desvantagem desta arquitetura está em não permitir o planejamento para deslocamentos de longas distâncias [78].

Considerando apenas às necessidades de controle, a tarefa não é simples. Para se controlar um VAT, é necessário resolver problemas de controle do tipo híbrido. Neste tipo de controle, são necessárias ações de controle discretas e contínuas [63], [121].

## B.3 Sistemas de Auxílio a Navegação

Existem diferentes sistemas de auxílio a navegação para VAT's. O definição do sistema a ser utilizado depende das características do ambiente e do tipo de rota. O tipo de rota a ser utilizado depende de diferentes fatores. À saber: se o ambiente é conhecido (rota fixa ou livre) ou desconhecido (rota livre); o ambiente é ou não estruturado; custo; flexibilidade para mudanças/expansões futuras. Mesmo para rotas fixas, o "custo de parada de produção" devido a instalação/mudança de posição do sistema de guiagem deve ser levado em consideração. Por outro lado, a guiagem por rota livre possui a vantagem de ser programada e, portanto, é mais flexível à mudanças [55]. Atualmente existem vários sistemas para a orientação e navegação de VAT's, tais como: *Laser scanners*, *transponders* de microondas, giroscópios inerciais, sensores de ultra-som, ímãs permanentes, sistemas de visão de máquina entre outros. De acordo com a tecnologia utilizada, o veículo poderá ter maior ou menor grau de autonomia.

Para ambientes estruturados, os locais por onde o veículo vai trafegar devem ser marcados. As marcas são colocadas no ambiente de modo a permitir que o sistema determine a posição relativa do veículo com relação ao ambiente [3].

A seguir apresenta-se alguns dos diferentes sistemas utilizados para o auxílio a navegação de VAT's. Os diferentes sistemas de auxílio a guiagem de veículos são apresentados de acordo com o princípio físico e/ou tecnologia utilizada pelo sensor na detecção da posição do veículo.

### B.3.1 Guiagem por condutores elétricos

A utilização de fios condutores foi um dos primeiros métodos para a orientação de VAT's. Neste caso, o VAT segue um fio condutor percorrido por uma corrente elétrica. A definição da rota é feita através da instalação dos fios em ranhuras feitas no assoalho por onde deve trafegar o veículo.

Alguns sistemas modernos de orientação por fio utilizam este apenas como referência, podendo o VAT mover-se fora da linha definida pelo fio [3]. A questão da navegação do VAT traduz-se numa questão de graus de liberdade. Nos projetos, a relação entre o custo inicial e

os custos adicionais de atualização e manutenção do sistema VAT [3]. Como vantagens deste sistema, pode-se citar: robustez para operar em ambientes sujos, ruidosos e de tráfego intenso (por operar sem transmissões de sinais de rádio no espaço livre ou depender de sinais luminosos e luminosidade do ambiente, é praticamente imune a interferências do ambiente no qual opera); baixo custo, se não forem freqüentes as necessidades de mudança de rotas. A desvantagem está no baixo grau de flexibilidade e custo de manutenção (em caso de danos nos condutores).

### B.3.2 Odometria

Esta técnica permite medir a posição e direção relativa do veículo através do conhecimento de sua velocidade, que é fornecida por codificadores incrementais acoplado as rodas do veículo. Este sistema é caracterizado pelo baixo custo, precisão para distâncias curtas e possibilidade de utilizar altas taxas de amostragem. A desvantagem da técnica está no fato do erro de medição crescer de forma ilimitada com a distância percorrida. O crescimento sem limite de erros de medição é devido a necessidade de integração da seqüência de dados gerados na determinação da posição. O erro pode ter diferentes fontes. Por exemplo, se a roda do veículo deslizar sobre a superfície (que pode ser interpretado como um ruído impulsivo na medição) ou se o diâmetro das rodas variarem (erro de polarização).

Para sanar problemas de erros de medição originados por mudanças nos parâmetros do veículo, pode-se utilizar calibrações periódicas, ou reinicializar o sistema utilizando dados de sistemas GPS, ou fusão dos dados fornecidos pela odometria com outros fornecidos por diferentes sensores [18], [49], [51].

### B.3.3 Triangularização

É baseado em marcas naturais ou artificiais (sinais pintados ou fontes de sinais infravermelho, por exemplo) localizadas estrategicamente no ambiente de navegação. A posição absoluta do veículo é obtida através da medição dos ângulos planos formados entre o VAT e as marcas. A leitura é feita utilizando-se câmaras de vídeo, laser de varredura ou detectores de sinais infravermelho, que são embarcados nos veículos. As medições são processadas por algoritmos de triangularização, que relacionam matematicamente os ângulos relativos entre as posições das marcas com a posição real do VAT [100]. Sob determinadas condições, o método pode falhar. Considere, por exemplo, a situação do veículo movendo-se em um ambiente cujo assoalho contém desníveis ou detritos com diferentes granulações. Em tais situações, a estrutura do veículo pode inclinar ou vibrar. A ocorrência destes eventos pode comprometer as leituras dos ângulos e, conseqüentemente, comprometer o cálculo final da posição do veículo.

Apesar deste método apresentar certo grau de flexibilidade na definição/mudanças das rotas, este só pode ser aplicado em ambientes estruturados. Isto é, que são conhecidos e podem sofrer alterações de modo a permitir a inserção de marcas de modo a definir os ambientes nos quais o veículo irá navegar.

### B.3.4 Sistema inercial

Baseado no princípio da inércia. Isto é, na tendência dos corpos manterem a condição atual de movimento. Sistemas inerciais podem medir tanto aceleração angular (giroscópios) quanto linear (acelerômetros). Por exemplo, para medir a aceleração retilínea de um corpo, pode-se utilizar um pêndulo cuja estrutura de sustentação está presa a carcaça do corpo. Quando o corpo acelera para frente, o pêndulo tende a manter a sua posição, o que acarreta um deslocamento relativo entre a estrutura e o pêndulo. Este deslocamento é proporcional a magnitude da aceleração. Outra possibilidade seria a aplicação da segunda lei de Newton a um sistema onde uma massa livre é presa na extremidade de duas molas, que são presas a estrutura do corpo que se desloca [38]. Para obter a velocidade e posição do veículo, é necessário a integração simples ou dupla. Devido a utilização de integração no procedimento, pequenos erros de medição crescem proporcionalmente com o tempo de operação do sistema. Entretanto, já estão disponíveis no mercado giroscópios de alta precisão utilizando fibra ótica (denominados "giroscópios à laser") [24]. A utilização da fusão de dados é uma opção para se obter sistemas de grande robustez utilizando dados provenientes de sensores inerciais e *GPS* [49].

### B.3.5 Navegação auxiliada por imagens

Um dos maiores desafios para obter a navegação autônoma, é a dificuldade de fornecer ao veículo a capacidade de percepção do ambiente. A capacidade de percepção do ambiente bi e tridimensional pode ser obtida utilizando uma ou mais câmaras de vídeo. Para a percepção do ambiente bidimensional, utiliza-se processamento de imagens tradicional dos dados fornecidos por uma câmara de vídeo. Para perceber o ambiente tridimensional, além do processamento de imagens, utiliza-se a fusão dos dados fornecidos por duas ou mais câmaras de vídeo [51].

Para sistemas de guiagem baseados em imagens, existe a necessidade de elevada carga computacional devido ao grande volume de dados gerados. O tempo de processamento pode não permitir a construção de modelos sintéticos do ambiente para a operação em tempo real do veículo. Se os dados forem tratados pelo computador de bordo, para diminuir o volume de dados, pode-se utilizar câmaras de baixa resolução. Além destes fatores, deve-se também considerar o custo das necessidades computacionais. Se o tratamento dos dados tiver que ser efetuado em

estação remota, a compressão dos dados é uma possibilidade para diminuir a largura de faixa necessária para a transmissão.

As câmaras devem ser selecionadas de acordo com as seguintes especificações: Número de linhas, ou de "pixels" para as digitais, de resolução; largura de faixa; resposta espectral; relação sinal/ruído; controle automático de ganho e tempo de resposta. Para o tratamento das imagens, existem abordagens clássicas, que utilizam métodos estatísticos, e não convencionais, tais como lógica nebulosa [67].

Condições ambientais, tais como poeira e falta de iluminação adequada, podem restringir a qualidade das imagens, o que pode comprometer a geração dos mapas para a navegação. Para aplicação industrial, a utilização de imagens para a inspeção de 100% da produção é praticamente uma realidade hoje. Apesar das pesquisas em visão de máquina terem iniciado a aproximadamente 35 anos, só atualmente a visão para robôs está sendo introduzida na prática [24].

### B.3.6 Ultra-som

Para medir a distância de VAT's a obstáculos, pode-se utilizar ultra-som. No mercado estão disponíveis sensores que possuem a capacidade de detectar objetos de 5cm a 12 metros do sensor [28]. Utilizando a fusão de dados fornecidos por ultra-som e imagem, é possível obter a percepção visual do deslocamento de objetos [53].

Sistemas utilizando ultra-som são robustos em aplicações onde existe baixo índice de luminosidade, transparência de objetos, problemas de reflexão da luz, opacidade dos objetos a serem detectados. Além disso, podem detectar objetos de pequena dimensão. Em alguns casos, a textura do alvo pode apresentar problema.

### B.3.7 Sistema de Posicionamento Global - GPS

É um sistema de auxílio a navegação baseado na localização de uma rede de satélites. Este sistema determina com precisão a latitude, longitude e altitude utilizando os sinais emitidos pelos satélites. O sistema passou a ser operacional em 1995, sendo formado por 24 satélites orbitando a terra de modo a cobrir todo o planeta durante 24.

Dependendo do tipo de receptor e outras condições, é possível obter a posição em tempo real com precisão da ordem de centímetros, com a posição sendo fornecida várias vezes no intervalo de um segundo. Os receptores para o sistema GPS são do tipo passivo, o que torna o número de usuários ilimitado.

Os satélites emitem dois sinais: Uma portadora e um sinal de código pseudo-aleatório. Os

sinais são sincronizados por relógios atômicos presentes nos satélites. O receptor *GPS* gera um "casamento" de códigos, que é sincronizado pelo seu próprio relógio. O tempo de trânsito do sinal para chegar ao receptor indica a distância entre satélite e receptor. O cálculo é geralmente efetuado utilizando sinais de código pseudo-aleatório. Para melhor precisão, pode-se utilizar o sinal de portadora. Para o cálculo da posição, são necessários sinais de quatro ou mais satélites. Os três primeiros são utilizados para obter a triangularização da posição. O quarto é utilizado para melhorar a precisão da estimativa da posição via fatoração do erro de regime do sistema de relógios dos satélites e do receptor *GPS*. A qualidade dos receptores variam de acordo com a sua precisão/robustez com relação a captação dos sinais.

Mais recentemente, tem-se utilizado *GPS* em robôs móveis. É esperada a utilização de *GPS* em rodovias automatizadas. Para a melhoria das estimativas de posição utilizando *GPS*, pode-se utilizar *GPS* diferenciais (*DGPS*). A operação deste sistema é auxiliada por *GPS*, uma estação terrestre fixa e outra móvel, fazendo medições de posição para obter um sistema de coordenadas terrestre fixo [29].

### **B.3.8 Utilização de códigos e produtos químicos, faixa pintada ou colada sobre o assoalho**

Uma possibilidade para determinar a posição absoluta do *VAT*, é através da utilização de códigos *PRBS* [94]. O código *PRBS* é pintado no chão definindo uma rota fixa para o veículo. A definição de "1" e "0" do código é feita utilizando as letras *H* e *E*. Estas letras são "lidas" do assoalho por um sistema de visão utilizando câmara de vídeo. A posição é determinada pelo código contido em uma determinada "janela" contendo os últimos  $n$  "bits" lidos. A determinação da direção do veículo com relação a rota a ser seguida, é feita utilizando-se processamento da imagem da letra *E*, que contém em sua assimetria esta informação.

Considerando a propriedade de reação de determinados produtos químicos, tais como fluorescência e odor, utilizando sensores adequados no veículo, pode-se utilizar estas características físicas e químicas do guia "pintado" sobre a superfície de modo a obter as informações codificadas sobre a trajetória. No caso de odor, a informação pode ser referente as áreas que já foram limpas pelo robô, por exemplo. Quanto as marcas fluorescente, estas são pintadas no ambiente a fim de possibilitar, através de algoritmos de triangularização, a determinação da posição relativa do veículo.

Outra possibilidade, é ter apenas uma faixa contínua pintada (colada) sobre a superfície. Esta faixa deve ser "lida" pelo sistema de visão, e interpretada de modo a fornecer a posição relativa do veículo com relação a trajetória [20]. Este é o sistema utilizado pelo *VAT* que foi

utilizado nos experimentos de controle de trajetória descritos nesta tese.

A principal vantagem deste sistema está em sua simplicidade e baixo custo. Como desvantagens, além da inexistência de flexibilidade, os métodos de guiagem utilizando a leitura de faixas ou códigos de posição podem ser comprometidos por sujeira no ambiente. Para os baseados em odor, as correntes de ar no ambiente podem comprometer as medições [19].

## B.4 Modelagem da Dinâmica e Cinemática de Veículos Automáticos

### B.4.1 Introdução

Este trabalho objetiva fornecer um modelo analítico para veículos autônomos (VA). O modelo resultante pertence a classe de modelos não lineares e multivariáveis. A sua utilização pode ser para fins de análise, simulação, detecção de falhas, treinamento, controle, projeto de observadores, etc. A aplicação define o grau de precisão necessário para o modelo. A princípio, o modelo será utilizado para fins de simulação e definição de estrutura para modelos a serem utilizados em projeto de controladores. Pode-se também pensar na sua utilização em observadores utilizando filtro de Kalman visando a melhorar a qualidade das medições dos sensores de velocidade e posição presentes no veículo.

O processo de modelagem envolve a obtenção das equações físicas que descrevem o comportamento dinâmico e cinemático do veículo. A descrição do comportamento dinâmico considera os efeitos de variáveis tipo conjugado, gravidade, forças, atritos, inércia, aceleração, centro de massa, etc, atuando sobre o veículo. O comportamento cinemático descreve a iteração, em termos de posição e velocidade, do veículo com relação a um sistema de coordenadas (referência) fixo. O desenvolvimento aqui apresentado segue estritamente [86], com algum detalhamento adicional utilizando [6] e [41].

### B.4.2 Modelo dinâmico do atuador

A propulsão do AGV é obtida através de dois motores à corrente contínua (cc) acoplados a dois eixos cujas trações são independentes. A tração nas rodas é feita de forma independente para permitir o controle de velocidade e trajetória do veículo utilizando o conceito de velocidade diferencial entre as rodas. A tração é transmitida para as rodas do veículo via engrenagens com reduções para elevar o conjugado disponível nas mesmas. Na modelagem do motor cc, pode-se considerar diferentes tipos de aproximações. A Fig. B.1 apresenta as não linearidades

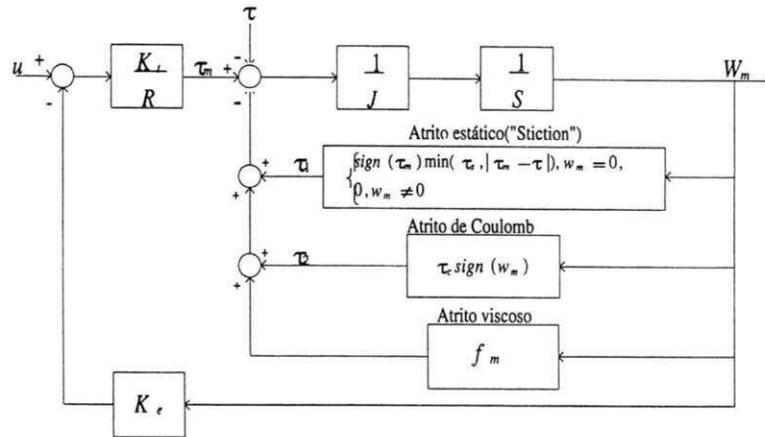


Figura B.1: Modelo não considerando aproximações para as não linearidades.

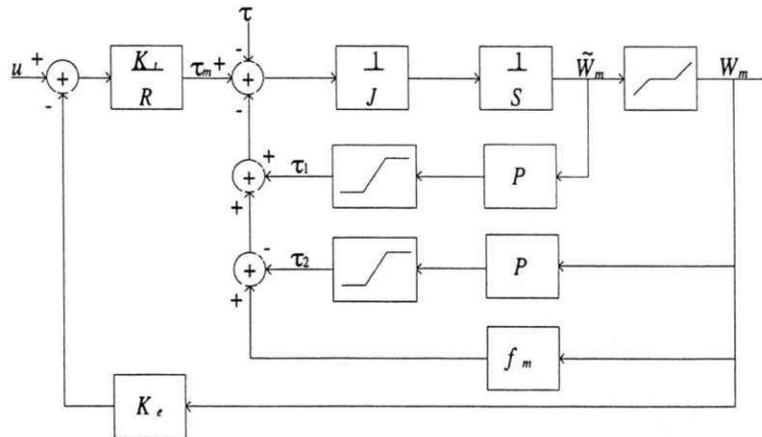


Figura B.2: Modelo considerando aproximações para as não linearidades.

sem aproximações. Se este modelo for utilizado para simulações, quando houver mudança no sentido de rotação, seria necessária uma aceleração infinita, o que não é possível do ponto de vista prático.

Para resolver tal problema, recorre-se ao modelo apresentado na Fig. B.2, que faz aproximações para as não linearidades e não exige aceleração infinita quando muda o sentido de rotação do motor.

Onde:

- $J$  é o momento de inércia;
- $R$  é a resistência;
- $K_e$  e  $K_t$  são constantes tipo tensão;

- $\tau_1$  e  $\tau_2$  referem-se aos conjugados devido a atritos: conjugado devido a  $\tau_c$  (atrito de Coulomb) e a  $\tau_s$  (atrito estático);
- $P$  é um ganho relacionado com a precisão desejada para a simulação;
- $\tau$  é o conjugado causado no eixo do motor devido à forças atuando nas rodas do veículo;
- $W_m$  é a velocidade angular no eixo do motor;
- $f_m$  é o coeficiente de atrito viscoso.

Para completar o diagrama de blocos, falta definir as equações para as não linearidades. Isto é,

$$W_m = \begin{cases} \widetilde{W}_m - \frac{\tau_s}{P}, \widetilde{W}_m < -\frac{\tau_s}{P}; \\ \widetilde{W}_m + \frac{\tau_s}{P}, \widetilde{W}_m > \frac{\tau_s}{P}; \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\tau_1 = \begin{cases} -\tau_s, W_m < 0; \\ \tau_s, W_m > 0; \\ P\widetilde{W}_m, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$\tau_2 = \begin{cases} -(\tau_s - \tau_c), W_m < -\frac{\tau_s - \tau_c}{P}; \\ \tau_s - \tau_c, W_m > \frac{\tau_s - \tau_c}{P}; \\ PW_m, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$P = G \times \frac{K_e K_t + f_m R}{R}, G \in [10, 100]. \quad (\text{B.4})$$

Falta definir a perturbação  $\tau$ , que descreve a perturbação tipo conjugado no eixo do motor, que é o assunto do próximo tópico.

### Modelagem da perturbação tipo conjugado

Para a obtenção de tal variável, será considerada a iteração do veículo com o meio externo. O ponto de partida é considerar o veículo movendo-se sobre um plano sob as influências de variáveis físicas tais como forças, velocidades, acelerações, conjugado, etc. Tais variáveis são consideradas como grandezas vetoriais no desenvolvimento.

Os conjugados que aparecem nos eixos dos motores devem-se às forças que atuam nas rodas do veículo. Para a análise das influências destas forças, considera-se um sistema de coordenadas preso ao veículo (Fig. B.3), que é móvel, e um de referência fixo, como mostra a Fig. B.4.

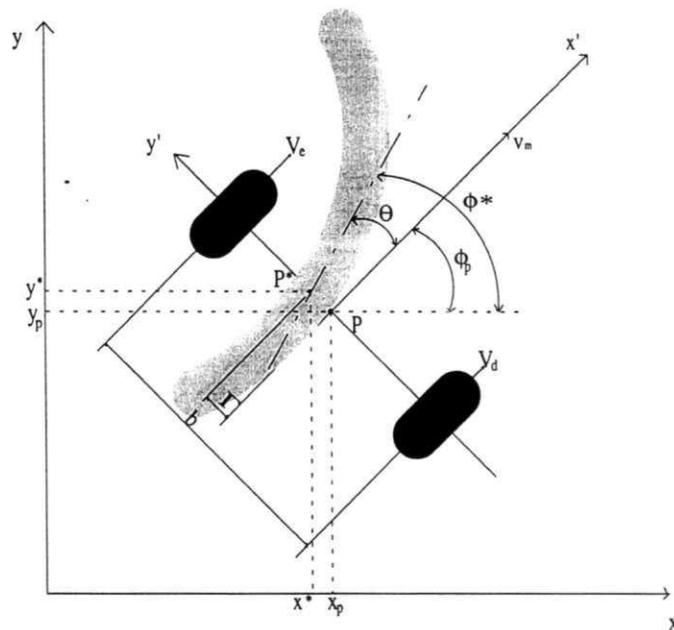


Figura B.3: Sistema de coordenadas no plano de deslocamento.

As grandezas vetoriais são representadas por grafia em negrito, às demais (escalares) em grafia normal.

- $P_{cm}$  o centro de massa do veículo;
- $\mathbf{r}$  o vetor correspondente ao segmento orientado  $OP_{cm}$ ;
- $\theta$  o ângulo de  $\mathbf{r}$  com relação ao eixo  $X$ .

Da cinemática para corpos rígidos descrevendo movimento curvilíneo, resulta para a velocidade de um ponto preso ao corpo que se move com relação a um determinado referencial fixo [6]

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}r\mathbf{i}_r,$$

onde  $\mathbf{i}_r$  é o vetor unitário de direção de  $\mathbf{r}$  e  $r$  é o módulo de  $\mathbf{r}$ . Desde que  $\mathbf{V}$  muda instantaneamente tanto em módulo quanto de direção, resulta que

$$\mathbf{V} = r\frac{d}{dt}\mathbf{i}_r + \mathbf{i}_r\frac{d}{dt}r.$$

Mas  $\mathbf{i}_r = \cos\theta\mathbf{i}_o + \sin\theta\mathbf{j}_o$ , o que leva a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{i}_r = -\sin\theta\dot{\theta}\mathbf{i}_o + \cos\theta\dot{\theta}\mathbf{j}_o.$$

A partir deste resultado, chega-se a

$$\mathbf{V} = [\cos\theta\dot{r} - r\sin\theta\dot{\theta}]\mathbf{i}_o + [\sin\theta\dot{r} + r\cos\theta\dot{\theta}]\mathbf{j}_o,$$

onde

$$y = r\sin\theta, \quad x = r\cos\theta, \quad v_x = \dot{r}\cos\theta, \quad v_y = \dot{r}\sin\theta, \quad w = \dot{\theta}.$$

Portanto, a velocidade do ponto  $P_{cm}$  com relação ao sistema de coordenadas fixo, será

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= [v_x - wy]\mathbf{i}_o + [v_y + wx]\mathbf{j}_o \\ &= V_x\mathbf{i}_o + V_y\mathbf{j}_o, \end{aligned}$$

com  $V_x = \dot{x} - wy$  e  $V_y = \dot{y} + wx$  sendo as velocidades resultantes nas direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Para as acelerações, obtêm-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \dot{v}_x - \dot{w}y - wv_y - w^2x; \\ \dot{V}_y &= \dot{v}_y + x\dot{w} + v_xw - w^2y. \end{aligned}$$

Aplicando-se a segunda lei de Newton, pode-se escrever para as forças nas direções  $X$  e  $Y$

$$\begin{aligned} F_x &= M\dot{V}_x = M(\dot{v}_x - \dot{w}y - wv_y - w^2x), \\ F_y &= M\dot{V}_y = M(\dot{v}_y + x\dot{w} + v_xw - w^2y), \end{aligned}$$

onde  $M$  é a massa do veículo. O segundo termo entre parênteses nas equações corresponde a força de aceleração angular. O terceiro termo corresponde a força de Coriolis e o quarto termo, a força centrípeta. A Fig. B.4 apresenta a ação destas forças sobre o veículo e as respectivas grandezas métricas.

Para as forças atuando sobre as rodas direita e esquerda nas direções  $x$  e  $y$  com relação ao ponto  $P_{cm}$ , verifica-se que  $y = 0, V_y = 0, x = -h$ , e

$$\begin{aligned} F_{xr} + F_{xl} &= M(\dot{v}_x - w^2x) = M(\dot{v}_x + w^2h), \\ F_{yr} + F_{yl} &= M(\dot{w}x + w\dot{v}_x) = M(-\dot{w}h + v_xw), \end{aligned} \tag{B.5}$$

onde os subscritos  $r$  e  $l$  referem-se às rodas direita e esquerda, respectivamente.

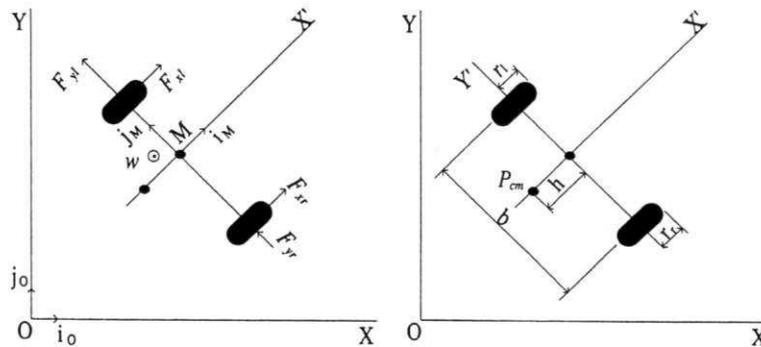


Figura B.4: Dimensões e forças que atuam sobre o veículo.

Introduzindo  $I$ , o momento de inércia do VAT com relação ao seu centro de massa  $P_{cm}$ , e  $\tau_{p,ext}$ , a soma de todos os conjugados com relação a este ponto, o teorema do momento angular para corpos rígidos diz que

$$\tau_{p,ext} = \dot{\mathbf{L}} \Rightarrow \frac{d}{dt} I \boldsymbol{\omega} = I \dot{\boldsymbol{\omega}},$$

onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular do veículo com relação ao seu centro de massa. Para os módulos, pode-se escrever

$$\tau_{p,ext} = I \dot{\omega}.$$

Desde que  $Conjugado = Força \times Distância$ , resulta para os conjugados no ponto  $M$

$$\tau_{M,ext} = \frac{b_w}{2} F_{xr} - \frac{b_w}{2} F_{xl}.$$

O conjugado sendo uma grandeza perpendicular ao plano de deslocamento do veículo, no presente caso, considerado como plano, este pode ser expresso como a soma de todos os conjugados no ponto  $P_{cm}$ ; formado por  $\tau_{p,ext}$  e pelo conjugado provocado pelas forças externas em relação ao ponto  $M$ . Portanto

$$\tau_{M,ext} = \tau_{p,ext} + F_{ext}d,$$

onde  $\tau_{p,ext}$  são os conjugados em  $P_{cm}$  devido a aceleração angular  $\dot{\omega}$ . O conjugado  $F_{ext}d$ , refere-se aos conjugados provocados em  $P_{cm}$  pelas forças nas rodas na direção do eixo  $Y$ ; já que o conjugado devido às forças na direção do eixo  $X$  são nulos, neste caso. A distância  $d$  sendo  $h$ , resulta que

$$\begin{aligned}
 \tau_{M,ext.} &= \tau_{p,ext.} + h(F_{yr} + F_{yl}) \\
 &= \frac{b_w}{2}F_{xr} - \frac{b_w}{2}F_{xl} + h(F_{yr} + F_{yl}) \\
 \therefore I\dot{w} &= \frac{b_w}{2}F_{xr} - \frac{b_w}{2}F_{xl} + h[M(-\dot{w}h + wv_x)] \\
 \left(\frac{I + Mh^2}{b_w}\right)\dot{w} &= \frac{1}{2}(F_{xr} - F_{xl}) + \frac{Mh}{b_w}v_xw.
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

De (B.5) pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 F_{xr} &= -F_{xl} + M(\dot{v}_x + w^2h), \\
 F_{xl} &= -F_{xr} + M(\dot{v}_x + w^2h).
 \end{aligned}$$

resultando para (B.6)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{I + Mh^2}{b_w}\right)\dot{w} &= -\frac{M}{2}\dot{v}_x - \frac{Mh}{2}w^2 + \frac{Mh}{b_w}wv_x + F_{xr}; \\
 \left(\frac{I + Mh^2}{b_w}\right)\dot{w} &= \frac{M}{2}\dot{v}_x + \frac{Mh}{2}w^2 + \frac{Mh}{b_w}wv_x - F_{xl}.
 \end{aligned}$$

Explicitando em termos das forças

$$F_{xr} = \left(\frac{I + Mh^2}{b_w}\right)\dot{w} + \frac{M}{2}\dot{v}_x + \frac{Mh}{2}w^2 - \frac{Mh}{b_w}wv_x; \tag{B.7}$$

$$F_{xl} = -\left(\frac{I + Mh^2}{b_w}\right)\dot{w} + \frac{M}{2}\dot{v}_x + \frac{Mh}{2}w^2 + \frac{Mh}{b_w}wv_x. \tag{B.8}$$

As velocidades  $v_x$  e  $w$  podem ser expressas em termos das velocidades lineares nas rodas. Por inspeção das Figs. B.3 e B.5, obtém-se

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{v_d + v_e}{2} \Rightarrow \dot{v}_x = \frac{\dot{v}_d + \dot{v}_e}{2}; \\
 w &= \frac{v_d - v_e}{b_w} \Rightarrow \dot{w} = \frac{\dot{v}_d - \dot{v}_e}{b_w},
 \end{aligned}$$

onde  $b_w$  é a distância entre as rodas,  $v_d$ ,  $v_e$  são as velocidades nas rodas direita e esquerda e  $w$  é a velocidade de rotação do veículo com relação ao sistema de referência fixo, respectivamente. Substituindo-se estes valores em (B.7) e (B.8) e considerando que  $v_d = r_d w_d$  e  $v_e = r_e w_e$ , onde  $r_d$  e  $r_e$  são os raios das rodas direita e esquerda, resulta

$$F_{xl} = r_d \left( \frac{M}{4} - \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right) \dot{w}_d + r_e \left( \frac{M}{4} + \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right) \dot{w}_e + r_d^2 \frac{Mh}{b_w^2} w_d^2 - r_d r_e \frac{Mh}{b_w^2} w_d w_e, \quad (\text{B.9})$$

$$F_{xr} = r_d \left( \frac{M}{4} + \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right) \dot{w}_d + r_e \left( \frac{M}{4} - \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right) \dot{w}_e + r_e^2 \frac{Mh}{b_w^2} w_e^2 - r_d r_e \frac{Mh}{b_w^2} w_d w_e. \quad (\text{B.10})$$

A transmissão do eixo do motor para as rodas inclui uma engrenagem com relação  $\frac{1}{N}$ , resultando em um conjugado  $N$  vezes superior nas rodas do que o presente no eixo do motor. Logo, obtêm-se para a velocidade no eixo do motor

$$w_{roda} = \frac{w_{motor}}{N}. \quad (\text{B.11})$$

Para as forças presentes nas rodas, escreve-se

$$F = \frac{N}{r} \tau, \quad (\text{B.12})$$

onde  $r$  é o raio da roda.

Substituindo (B.11) e (B.12) em (B.9) e (B.10) e definindo-se

$$\begin{aligned} K_{ll} &\triangleq \frac{r_e^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right), \\ K_{rr} &\triangleq \frac{r_d^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right), \\ K_{lr} &\triangleq \frac{r_d r_e}{N^2} \left( \frac{M}{4} - \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right), \\ K_{llr} &\triangleq r_d r_e^2 \frac{Mh}{b_w^2 N^3}, \\ K_{rrl} &\triangleq r_e r_d^2 \frac{Mh}{b_w^2 N^3}, \end{aligned}$$

resulta para os conjugados nas rodas direita e esquerda

$$\begin{aligned} \tau_l &= K_{lr} \dot{w}_{md} + K_{ll} \dot{w}_{me} + K_{rrl} w_{md}^2 - K_{llr} w_{md} w_{me}; \\ \tau_r &= K_{rr} \dot{w}_{md} + K_{lr} \dot{w}_{me} + K_{llr} w_{me}^2 - K_{rrl} w_{md} w_{me}. \end{aligned}$$

Modelo para simulação considerando Fig. B.1 Do diagrama em blocos da Fig. B.1, pode-se escrever

$$J_l \dot{w}_{me} = \frac{K_{tl}}{R_l} u_l - \frac{K_{el} K_{tl}}{R_l} w_{me} - \tau_l - f_{ml} w_{me} - \tau_{1l} - \tau_{2l}, \quad (B.13)$$

$$J_r \dot{w}_{md} = \frac{K_{tr}}{R_r} u_r - \frac{K_{er} K_{tr}}{R_r} w_{md} - \tau_r - f_{mr} w_{md} - \tau_{1r} - \tau_{2r}, \quad (B.14)$$

onde  $\tau_{1r}, \tau_{1l}, \tau_{2l}$  e  $\tau_{2r}$  são calculados de acordo com a definição apresentada na Fig. B.1.

Substituindo-se  $\tau_l$  e  $\tau_r$  em (B.13) e (B.14) e definindo-se

$$\tilde{\tau}_l \triangleq \frac{K_{tl}}{R_l} u_l - \frac{K_{el} K_{tl}}{R_l} w_{me} - f_{ml} w_{me} - \tau_{1l} - \tau_{2l} - K_{rrl} w_{md}^2 + K_{llr} w_{md} w_{me},$$

$$\tilde{\tau}_r \triangleq \frac{K_{tr}}{R_r} u_r - \frac{K_{er} K_{tr}}{R_r} w_{md} - f_{mr} w_{md} - \tau_{1r} - \tau_{2r} - K_{llr} w_{me}^2 + K_{rrl} w_{md} w_{me},$$

$$\tilde{J}_l \triangleq J_l + K_{ll} - \frac{K_{rl}^2}{J_r + K_{rr}},$$

$$\tilde{J}_r \triangleq J_r + K_{rr} - \frac{K_{rl}^2}{J_l + K_{ll}},$$

obtêm-se finalmente

$$\dot{w}_{me} = \frac{\tilde{\tau}_l}{\tilde{J}_l} - \frac{K_{lr}}{\tilde{J}_l (J_r + K_{rr})} \tilde{\tau}_r,$$

$$\dot{w}_{md} = \frac{\tilde{\tau}_r}{\tilde{J}_r} - \frac{K_{lr}}{\tilde{J}_r (J_l + K_{ll})} \tilde{\tau}_l.$$

Pode-se ainda escrever explicitamente  $\dot{w}_{md}$  e  $\dot{w}_{me}$  em função das entradas  $u_d(t)$  e  $u_e(t)$  como sendo

$$\begin{aligned} \dot{w}_{me}(t) = & \frac{1}{(J_l + K_{ll})(J_r + K_{rr}) - K_{lr}^2} \left\{ \frac{K_{tl}(J_r + K_{rr})}{R_l} u_e(t) - \frac{K_{lr} K_{tr}}{R_r} u_d(t) \right. \\ & - \frac{(J_r + K_{rr})(K_{el} K_{tl} + f_{ml} R_l)}{R_l} w_{me}(t) + \frac{K_{lr}(K_{er} K_{tr} + f_{mr} R_r)}{R_r} w_{md}(t) + K_{lr} K_{llr} w_{me}^2(t) \\ & - K_{rrl}(J_r + K_{rr}) w_{md}^2(t) + [K_{llr}(J_r + K_{rr}) - K_{lr} K_{rrl}] w_{me}(t) w_{md}(t) \\ & \left. - (J_r + K_{rr})(\tau_{1l}(t) + \tau_{2l}(t)) + K_{lr}(\tau_{1r}(t) + \tau_{2r}(t)) \right\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{w}_{md}(t) = & \frac{1}{(J_l + K_{ll})(J_r + K_{rr}) - K_{lr}^2} \left\{ -\frac{K_{lr} K_{tl}}{R_l} u_e(t) + \frac{K_{tr}(J_l + K_{ll})}{R_r} u_d(t) \right. \\ & + \frac{K_{lr}(K_{el} K_{tl} + f_{ml} R_l)}{R_l} w_{me}(t) - \frac{(J_l + K_{ll})(K_{er} K_{tr} + f_{mr} R_r)}{R_r} w_{md}(t) - K_{llr}(J_l + K_{ll}) w_{me}^2(t) \\ & + K_{lr} K_{rrl} w_{md}^2(t) + [K_{rrl}(J_l + K_{ll}) - K_{lr} K_{llr}] w_{me}(t) w_{md}(t) \\ & \left. + K_{lr}(\tau_{1l}(t) + \tau_{2l}(t)) - (J_l + K_{ll})(\tau_{1r}(t) + \tau_{2r}(t)) \right\}. \end{aligned}$$

Definindo-se

$$\begin{aligned}
 K_0 &= (J_l + K_{ll})(J_r + K_{rr}) - K_{lr}^2, \\
 a_{11} &= -\frac{(J_r + K_{rr})(K_{el}K_{tl} + f_{ml}R_l)}{K_0R_l}, a_{12} = \frac{K_{lr}(K_{er}K_{tr} + f_{mr}R_r)}{K_0R_r}, \\
 a_{21} &= \frac{K_{lr}(K_{el}K_{tl} + f_{ml}R_l)}{K_0R_l}, a_{22} = -\frac{(J_l + K_{ll})(K_{er}K_{tr} + f_{mr}R_r)}{K_0R_r}, \\
 b_{11} &= \frac{K_{tl}(J_r + K_{rr})}{K_0R_l}, b_{12} = -\frac{K_{lr}K_{tr}}{K_0R_r}, b_{21} = -\frac{K_{lr}K_{tl}}{K_0R_l}, b_{22} = \frac{K_{tr}(J_l + K_{ll})}{R_rK_0}, \\
 c_{11} &= \frac{K_{lr}K_{llr}}{K_0}, c_{12} = \frac{-K_{rrl}(J_r + K_{rr})}{K_0}, c_{21} = \frac{-K_{llr}(J_l + K_{ll})}{K_0}, c_{22} = \frac{K_{lr}K_{rrl}}{K_0}, \\
 d_{11} &= \frac{[K_{llr}(J_r + K_{rr}) - K_{lr}K_{rrl}]}{K_0}, d_{21} = \frac{[K_{rrl}(J_l + K_{ll}) - K_{lr}K_{llr}]}{K_0}, \\
 e_{11} &= \frac{-(J_r + K_{rr})}{K_0}, e_{12} = \frac{K_{lr}}{K_0}, e_{21} = \frac{K_{lr}}{K_0} = e_{22} = \frac{-(J_l + K_{ll})}{K_0}.
 \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_{me}(t) &= a_{11}w_{me}(t) + a_{12}w_{md}(t) + b_{11}u_e(t) + b_{12}u_d(t) + c_{11}w_{me}^2(t) + c_{12}w_{md}^2(t) \\
 &+ d_{11}w_{me}(t)w_{md}(t) + e_{11}(\tau_{1l}(t) + \tau_{2l}(t)) + e_{12}(\tau_{1r}(t) + \tau_{2r}(t)) \quad (B.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_{md}(t) &= a_{21}w_{me}(t) + a_{22}w_{md}(t) + b_{21}u_e(t) + b_{22}u_d(t) + c_{21}w_{me}^2(t) + c_{22}w_{md}^2(t) \\
 &+ d_{21}w_{me}(t)w_{md}(t) + e_{21}(\tau_{1l}(t) + \tau_{2l}(t)) + e_{22}(\tau_{1r}(t) + \tau_{2r}(t)), \quad (B.16)
 \end{aligned}$$

com representação em espaço de estados

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{w}_{me} \\ \dot{w}_{md} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{me} \\ w_{md} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e \\ u_d \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{me}^2 \\ w_{md}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} [w_{me}w_{md}] \\
 &+ \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{1l} + \tau_{2l} \\ \tau_{1r} + \tau_{2r} \end{bmatrix}. \quad (B.17)
 \end{aligned}$$

**Modelo para simulação considerando Fig B.2** Da Fig. B.2, pode-se escrever

$$J_l \tilde{w}_{me} = \frac{K_{tl}}{R_l} u_e - \frac{K_{el}K_{tl}}{R_l} w_{me} - \tau_l - f_{ml}w_{me} - \tau_{1l}(\tilde{w}_{me}) + \tau_{2l}(w_{me}), \quad (B.18)$$

$$J_r \tilde{w}_{md} = \frac{K_{tr}}{R_r} u_d - \frac{K_{er}K_{tr}}{R_r} w_{md} - \tau_r - f_{mr}w_{md} - \tau_{1r}(\tilde{w}_{me}) + \tau_{2r}(w_{md}). \quad (B.19)$$

onde  $w_{me}$ ,  $w_{md}$ ,  $\tau_{1r}$ ,  $\tau_{1l}$ ,  $\tau_{2l}$  e  $\tau_{2r}$  são calculados de acordo com a definição apresentada em B.1, B.2, B.3 e B.4.

Utilizando o desenvolvimento anterior, chega-se a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{w}}_{me} \\ \dot{\tilde{w}}_{md} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(l_1+l_2) & -(rl_1+rl_2) \\ -(lr_1+lr_2) & -(r_1+r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{me} \\ w_{md} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_0 & -rl_0 \\ r_0 & -lr_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e \\ u_d \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -l_3 & -rl_3 \\ -r_3 & -lr_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{1l}(\tilde{w}_{me}) \\ \tau_{1r}(\tilde{w}_{md}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_4 & -rl_3 \\ -lr_3 & -r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{2l}(w_e) \\ \tau_{2r}(w_d) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -rl_4 & -l_5 \\ -r_5 & -lr_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{me}^2 \\ w_{md}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_6+rl_5 \\ r_6+lr_6 \end{bmatrix} [w_{me}w_{md}]. \end{aligned}$$

que é o modelo a ser simulado para a dinâmica do veículo utilizando o modelo de motor *cc* da Fig. B.2.

**Modelo desconsiderando as não linearidades e força de Coriolis e centrífuga** Se

forem desprezadas as não linearidades do modelo do motor *cc* apresentado na Fig. B.1 obtém-se

$$J_l \dot{w}_{me} = \frac{K_{tl}}{R_l} u_e - \frac{K_{el}K_{tl}}{R_l} w_{me} - \tau_l - f_{ml} w_{me}, \quad (B.20)$$

$$J_r \dot{w}_{md} = \frac{K_{tr}}{R_r} u_d - \frac{K_{er}K_{tr}}{R_r} w_{md} - \tau_r - f_{mr} w_{md}. \quad (B.21)$$

Se, além disso, forem desconsideradas as forças de Coriolis e centrífuga no cálculo dos conjugados nos eixos dos motores, resulta

$$\tau_l = \frac{r_e^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right) \dot{w}_{me} + \frac{r_d r_e}{N} \left( \frac{M}{4} - \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right) \dot{w}_{me}, \quad (B.22)$$

$$\tau_r = \frac{r_d^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right) \dot{w}_{md} + \frac{r_d r_e}{N} \left( \frac{M}{4} - \frac{I + Mh^2}{b_w^2} \right) \dot{w}_{me}. \quad (B.23)$$

Substituindo B.22 em B.20 e B.23 em B.21, obtém-se a seguinte representação em espaço de estados para as acelerações angulares

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_{me} \\ \dot{w}_{md} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{me} \\ w_{md} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e \\ u_d \end{bmatrix} \quad (B.24)$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_{1l} &= \frac{K_{tl}}{R_l \left[ J + \frac{r_d^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I+Mh^2}{b_w^2} \right) \right]}; k_{2l} = \frac{\frac{K_{tl}K_{el}}{R_l} + f_m}{\left[ J + \frac{r_d^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I+Mh^2}{b_w^2} \right) \right]}; \\
 k_{3l} &= \frac{\frac{r_d r_d}{N} \left( \frac{M}{4} - \frac{I+Mh^2}{b_w^2} \right)}{J + \frac{r_d^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I+Mh^2}{b_w^2} \right)}; \\
 k_{1r} &= \frac{K_{tr}}{R_r \left[ J + \frac{r_d^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I+Mh^2}{b_w^2} \right) \right]}; k_{2r} = \frac{\frac{k_{tr}K_{er}}{R_r} - f_r}{\left[ J + \frac{r_d^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I+Mh^2}{b_w^2} \right) \right]}; \\
 k_{3r} &= \frac{\frac{r_d r_e}{N^2} \left( \frac{M}{4} - \frac{I+Mh^2}{b_w^2} \right)}{J + \frac{r_d^2}{N^2} \left( \frac{M}{4} + \frac{I+Mh^2}{b_w^2} \right)}; \alpha = \frac{1}{1 + k_{3l}k_{3r}} \\
 a_{11} &= -k_{2l}; a_{12} = k_{3l}k_{2r}; a_{21} = k_{3r}k_{2l}; b_{11} = k_{1l}; b_{12} = -k_{3l}k_{1r} \\
 b_{21} &= k_{1r}; b_{22} = -k_{3r}k_{1l}.
 \end{aligned}$$

Portando, a partir da modelagem analítica, é possível obter diferentes estruturas para os modelos, dependendo do propósito de sua utilização.

### B.4.3 Modelagem do comportamento cinemático

A modelagem do comportamento cinemático do veículo é baseada na Fig. B.3, que apresenta o veículo descrevendo uma trajetória curvilínea sobre o plano.

Para modelar o veículo protótipo, considera-se o ponto  $M(t)$  que possui velocidade  $v(t)$ . da observação da Fig. B.3, pode-se obter o comportamento para as velocidades descrito pela Fig. B.5.

Por inspeção da Fig. B.5, obtém-se

$$v(t) = \frac{v_d(t) - v_e(t)}{2} + v_e(t) = \frac{v_d(t) + v_e(t)}{2}, \quad (B.25)$$

$$v(t) = \frac{w_d(t)r_d + w_e(t)r_e}{2},$$

$$\begin{aligned}
 w(t) &= \frac{v_d(t) - v_e(t)}{b_w} = \frac{r_d w_d(t)r_d - w_e(t)r_e}{b_w} \\
 &= r \frac{w_d(t) - w_e(t)}{b_w} = \dot{\theta}(t), r = r_d = r_e.
 \end{aligned} \quad (B.26)$$

onde  $v(t), v_d(t), v_e(t)$  são as velocidades lineares de cruzeiro e das rodas direita e esquerda,  $w_e(t), w_d(t), r_d$  e  $r_e$  são as velocidades angulares e raios das rodas, respectivamente. Também foi utilizado o fato de que  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} \rightarrow v = wr$ .

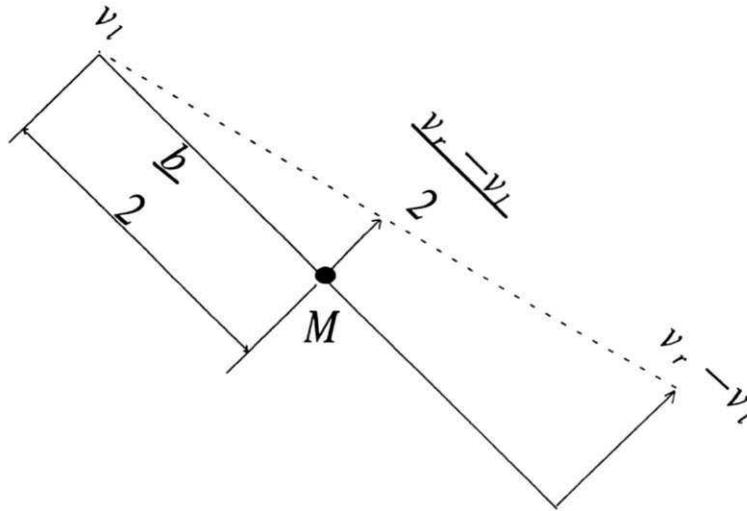


Figura B.5: Diferencial de velocidade → Rotação.

A partir da Fig. B.3, pode-se escrever para as velocidades nos eixos  $X$  e  $Y$

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos\theta; \tag{B.27}$$

$$\dot{y}(t) = v(t)\sen\theta. \tag{B.28}$$

Expressando as equações (B.27), (B.28) e (B.26) na forma matricial compacta, resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sen\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix},$$

e para  $v(t)$  e  $\dot{\theta}(t)$ , considerando (B.25) e (B.26), escreve-se

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \frac{r}{2N} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{b_w} & -\frac{2}{b_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{md}(t) \\ w_{me}(t) \end{bmatrix},$$

onde  $w_{md}(t)$  e  $w_{me}(t)$  são as velocidades angulares nos eixos dos motores.

Em termos de variáveis de estados, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} &= \frac{r}{2N} \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{b_w} & -\frac{2}{b_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{md}(t) \\ w_{me}(t) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} &= \frac{r}{2N} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta(t) & \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \sin\theta(t) \\ -\frac{2}{b_w} & -\frac{2}{b_w} \end{bmatrix}}_{G(\theta(t))} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{md}(t) \\ w_{me}(t) \end{bmatrix}}_{U(t)}. \\
 X(t) &\triangleq G(\theta(t))U(t).
 \end{aligned}$$

Esta equação corresponde a um sistema contínuo não linear multivariável e variante no tempo. Se for utilizado um período de amostragem  $T$  relativamente pequeno com segurador de ordem zero, pode-se considerar que, aproximadamente, durante o período de amostragem, a variação de posição do veículo é praticamente nula [90]. Como consequência, obtém-se

$$\begin{aligned}
 G(\theta(t)) &\cong G(\theta(tT)), \quad tT \leq t \leq (t+1)T, \\
 U(t) &= U(tT), \quad tT \leq t \leq (t+1)T,
 \end{aligned}$$

resultando para a equação em espaço de estados discreta

$$\begin{aligned}
 X[(t+1)T] &= X(tT) + \frac{Tr}{2N} \begin{bmatrix} \cos\theta(tT) & \cos\theta(tT) \\ \sin\theta(tT) & \sin\theta(tT) \\ -\frac{2}{b_w} & -\frac{2}{b_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{md}(tT) \\ w_{me}(tT) \end{bmatrix}; \\
 Y(t) &= X(tT).
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

#### B.4.4 Equações discretas para simulação

Considerando que o período de amostragem é suficientemente pequeno, a dinâmica e cinemática do veículo não se altera praticamente. Partindo desta suposição, chega-se ao seguinte conjunto de equações que descrevem o comportamento do VAT.

1. A simulação do comportamento dinâmico é efetuado considerando-se o modelo do motor  $cc$  apresentado na Fig. B.2. Portanto, pode-se calcular a dinâmica para o AGV utilizando-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{bmatrix} \tilde{w}_{me}(t+1) \\ \tilde{w}_{md}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{me}(t) \\ \tilde{w}_{md}(t) \end{bmatrix} + T \left\{ \begin{bmatrix} -(l_1 + l_2) & -(rl_1 + rl_2) \\ -(lr_1 + lr_2) & -(r_1 + r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{me} \\ w_{md} \end{bmatrix} \right\} +$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} l_0 & -rl_0 \\ r_0 & -lr_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e \\ u_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_3 & -rl_3 \\ -r_3 & -lr_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{1l}(\tilde{w}_{me}) \\ \tau_{1r}(\tilde{w}_{md}) \end{bmatrix} + \\ & \left. \begin{bmatrix} -l_4 & -rl_3 \\ -lr_3 & -r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{2l}(w_e) \\ \tau_{2r}(w_d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -rl_4 & -l_5 \\ -r_5 & -lr_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{me}^2 \\ w_{md}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_6 + rl_5 \\ r_6 + lr_6 \end{bmatrix} [w_{me}w_{md}] \right\}. \\ & \tau_{1i} = \begin{cases} -\tau_{si}, w_{mi} < 0; \\ \tau_{si}, w_{mi} > 0; \\ P_i w_{mi}, \text{ caso contr rio.} \end{cases} \\ & \tau_{2i}(t) = \begin{cases} -(\tau_{si} - \tau_{ci}), w_{mi} < -\frac{\tau_{si} - \tau_{ci}}{P_i}; \\ \tau_{si} - \tau_{ci}, w_{mi} > \frac{\tau_{si} - \tau_{ci}}{P_i}; \\ P w_{mi}, \text{ caso contr rio.} \end{cases} \\ & P_i = G_i \times \frac{K_{ei} K_{ti} + f_{mi} R_i}{R_i}, G_i \in [10, 100]. \\ & w_{mi} = \begin{cases} \tilde{W}_m - \frac{\tau_s}{P}, \tilde{W}_m < -\frac{\tau_s}{P}; \\ \tilde{W}_m + \frac{\tau_s}{P}, \tilde{W}_m > \frac{\tau_s}{P}; \\ 0, \text{ caso contr rio.} \end{cases}, i = r, l \end{aligned}$$

onde  $i = d, e$ .

2 Para a cinemática, escreve-se

$$X[(t+1)T] = X(tT) + \frac{Tr}{2N} \begin{bmatrix} \cos\theta(tT) & \cos\theta(tT) \\ \sen\theta(tT) & \sen\theta(tT) \\ -\frac{2}{b_w} & -\frac{2}{b_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{md}(tT) \\ w_{me}(tT) \end{bmatrix};$$

$$Y(t) = X(tT).$$

A partir deste conjunto de equações, pode-se determinar a posição e velocidade do VAT sobre o plano de deslocamento (fornecida pelas equações que descrevem o comportamento cinemático do veículo). Além disso, é possível determinar as velocidades das rodas de cada motor (a partir da modelagem da dinâmica do veículo).

# Bibliografia

- [1] Jürgen Ackermann. *Sampled-Data Control Systems*. Springer, Berlin, 1985.
- [2] Luis Antonio Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas*. Editora UFMG, Belo Horizonte, 2000.
- [3] AGVE. Tutorial on AGV. Relatório técnico, AGVE, <http://www.agve.se>, 2002.
- [4] P. L. Ainsleigh. Observations on Oblique Projectors and Pseudoinverses. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45:1886–1889, 1997.
- [5] R. Alami, S. Fleury, M. Herrb, F. Ingrand, e F. Robert. Multi-Robot Cooperation in the MARTHA project. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, pp. 36–47, march 1998.
- [6] Marcelo Alonso e Edward J. Finn. *Fundamental University Physics*, volume I. Addison-Wesley, Inc., 1967.
- [7] Henrik W. Andersen, Kent H. Rasmussen, e Sten Bay Jorgensen. Advances in Process Identification. *Simulation, Modeling and Identification*, pp. 237–269, 1991.
- [8] B. D. O. Anderson e J. B. Moore. *Linear Optimal Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- [9] Norman A. Anderson. *Instrumentation for Process Measurement and Control*. Chilton Company, Radnor, Pennsylvania, 3rd edition, 1980.
- [10] R. T. Behrens e L. L. Scharf. Signal Processing Applications of Oblique Projection Operators. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42:1413–1424, 1994.
- [11] Massimo Bertozzi, Alberto Broggi, e Alessandra Fascioli. Vision-Based Intelligent Vehicles: State of the art and perspectives. *Robotics and Autonomous Systems*, 32:1–16, 2000.
- [12] A. Besançon-Voda. Iterative Auto-Calibration of Digital Controllers: Methodology and applications. *Control Engineering Practice*, 6:345–358, 1998.

- [13] Robert R. Bitmead. Iterative Control Design Approaches. In *12th World Congress of IFAC*, pp. 145–148, 1993.
- [14] Robert R. Bitmead. Iterative Optimal Control. In P. Albertos e A. Sala, editors, *Lecture notes on iterative identification and control design*, Strasburgo, França, 2000. European Science Foudation.
- [15] Robert R. Bitmead, Brian D. O Anderson, Michel Gevers, e Leonardo C. Kammer. Cautious Controller Tuning. *Submitted for publication*, 2001.
- [16] Robert R. Bitmead, Michel Gevers, e Vincent Wertz. *Adaptive Optimal Control: The Thinking man's GPC*. Prentice Hall, Sydney, 1990.
- [17] Torsten Bohlin. A Case Study of Grey Box Identification. *Automatica*, 30:307–318, 1994.
- [18] J. Borenstein e L. Feng. Measurement and Correction of Systematic Odometry Errors in Mobily Robotics. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 12:869–880, 1996.
- [19] Geovany Araújo Borges. Um sistema Óptico de Reconhecimento de Trajetória para Veículos Automáticos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 1998.
- [20] Geovany Araújo Borges, A. M. N. Lima, e G. S. Deep. Characterization of Neural Network-Based Trajectory Recognition Optical Sensor for Autonomous Vehicle. *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement.*, 49(4):813–819, 2000.
- [21] F. De Bruyne, B. D. O. Anderson, e Natasha Linard. The Hansen Scheme Revisited. In *CDC*, pp. 706–711, Tampa, Florida, 1998.
- [22] F. De Bruyne e L. Kammer. Synthetic Generation of the Gradient for an Iterative Controller Optimization Method. *Submitted to ECC'97*, 1997.
- [23] F. De Bruyne e L. Kammer. Iterative Feedback Tuning with Guaranteed Stability. *Submitted to ACC'99*, 1999.
- [24] Jim Cao. Vision Techniques and Autonomous Navegation for Unmanned Mobile Robotic. Dissertação de Mestrado, University of Cincinati, 1999.
- [25] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart an Winston, New York, 1984.

- [26] Kuang-Hsing Chen e Wen-Hsing Tsai. Vision-Based Obstacle Detection and Avoidance for Autonomous Land Vehicle Navigation in Outdoor Roads. *Automation in Construction*, 10:1–25, 2000.
- [27] Wai-Kai Chen. *Passive and Active Filters*. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [28] Senix Corporation. *Technical Note*, 2000.
- [29] Trimble Corporation. *Tutorial on GPS*. <http://www.trimble.com>, 2000.
- [30] R. Corteletti, P. R. Barros, e A. M. N. Lima. Identificação para Controle: Alocação de pólos, IMC e estratégia do surfista. In *Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 995–1000, 1996.
- [31] R. Corteletti, P. R. Barros, e A. M. N. Lima. Alocação de Pólos Iterativa via Estrutura IMC. In *Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 2529–2534, 2002.
- [32] Raymond de Callafon. *Feedback Oriented Identification for Enhanced and Robust Control*. Tese de Doutorado, Delft University, 1998.
- [33] Raymond A. de Callafon e Paul M. J. van den Hof. Suboptimal Feedback Control by a Scheme of Iterative Identification and Control Design. *Mathematical Modelling of Systems*, 3:77–101, 1997.
- [34] Paul Van den Hof. Closed-Loop Issues in System Identification. *Annual Reviews in Control*, 22:173–186, 1998.
- [35] R. M. DeSantis. Modeling and Path-Tracking Control of a Mobile Wheeled Robot with a Differential Drive. *Robotica*, 13:401–410, 1995.
- [36] Khalid El-Awady, Anders Hansson, e Bo Walberg. Application of Iterative Feedback Tuning to a Thermal Cycling Module. Relatório técnico, Department of Electrical Engineering, Stanford, 1998.
- [37] H. Hjalmarsson et alli. Iterative Feedback Tuning: Theory and Applications. *IEEE Control Systems Magazine*, 18:26–41, 1998.
- [38] FAS. Fundamentals of Guidance Systems. Relatório técnico, FAS, <http://www.fas.org/man/dod-101/navy/doc/fun/part15.htm>, 2000.

- [39] Joaquín Ferruz e Aníbal Ollero. Integrated Real-Time Vision System for Vehicle Control in Nonstructured Environment. *Engineering Appl. of Artificial Intelligence*, 13:215–236, 2000.
- [40] Urban Forszell. *Closed-loop Identification: Methods, Theory, and Applications*. Tese de Doutorado, Universidade de Linköping, Linköping, Suécia, 1999.
- [41] P. Frauenfelder e P. Huber. *Introduction to Physics*. Addison Wesley, Inc., Reading, MA, 1967.
- [42] S. V. Gaikwad e D. E. Rivera. Control-Relevant Input Signal for Multivariable System Identification: Application to high-purity distillation. In *Proc. of the 13<sup>th</sup> World IFAC Congress*, pp. 349–354, 1996.
- [43] Cláudio Garcia. *Modelagem e Simulação de Sistemas Eletromecânicos*. EDUSP, São Paulo, 1997.
- [44] M. Gevers. Toward a Joint Design of Identification and Control? Relatório técnico, Universidade Católica de Louvain, Bélgica, 1993.
- [45] M. Gevers. Identification for Control. In *Adaptive Control and Signal Processing Conference*, pp. 1–12, 1995.
- [46] M. Gevers, Benoît Codrons, e Franky De Bruyne. Model Validation in Closed-Loop. Relatório técnico, Universidade Católica de Louvain, Bélgica, 2000.
- [47] Michel Gevers. Connecting Identification and Robust Control: A New Challenge. In *9th IFAC Symposium on Identification and Parameter Estimation*, pp. 1–10, Budapeste, Hungria, 1991.
- [48] J. Goldbeck, B. Huertgen, S. Ernst, e L. Kelch. Lane Following Combining Vision and DGPS. *Image and Vision Computing*, 18:425–433, 2000.
- [49] G. S. Gordon. Navigation Systems Integration. *The GEC Journal of Technology*, 15(2):80–90, 1998.
- [50] M. J. Grimble e M. A. Johnson.  $H_\infty$  Robust Control Design - A tutorial review. *Computing and Control Engineering Journal*, (November):275–282, 1991.
- [51] P. Grossmann. Multisensor Data Fusion. *The GEC Journal of Technology*, 15(1):25–37, 1998.

- [52] I. Gustavsson. Survey of Applications of Identification in Chemical and Physical Processes. *Automatica*, 11:3–24, 1975.
- [53] R. Gutschke, C. Laloni, e F. M. Wahl. MONAMOVE: A flexible transport system for industrial environment using global sensor and navigation concepts. *Robotics and Autonomous Systems*, 14:85–98, 1995.
- [54] R. G. Hakvoort. *System Identification for Robust Process Control*. Tese de Doutorado, Universidade de Tecnologia de Delft, Delft, Holanda, 1994.
- [55] Material Handling e Industrial Distribution Laboratory. Automated Guided Vehicle Systems. Relatório técnico, Dep. of Industrial Engineering, Purdue University, <http://gilbreth.ecn.purdue.edu/tanchocol/mhe/agvs/main.htm>, 2000.
- [56] H. Hjalmarsson, S. Gunnarsson, e M. Gevers. Optimal and Sub-optimality of Iterative Identification and Control Design Schemes. Relatório técnico, Universidade Católica de Louvain, Bélgica, 1994.
- [57] Paul M. J. Van Den Hof e R. J. P. Schrama. Identification and Control - Closed-loop Issues. *Automatica*, 31:1751–1770, 1995.
- [58] Sunan Huang e Wei Ren. Safety, Comfort, and Optimal Traking Control in AHS Applications. *IEEE Control Systems Magazine*, 18(4):50–64, 1998.
- [59] L. Ljung I. Gustavsson e T. Söderström. Identification of Process in Closed-Loop - Identifiability and Accuracy Aspects. *Automatica*, 13:59–75, 1977.
- [60] Leonardo Kammer, Robert R. Bitmead, e Peter L. Bartlett. Direct Iterative Feedback Tuning via Spectral Analysis. *Automatica*, 36:1301–1307, 2000.
- [61] Torben Knudsen. Consistency Analysis of Subspace Identification Methods Based on a Linear Regression Approach. *Automatica*, 37:81–89, 2001.
- [62] Aaron D. Lanterman. Schwarz, Wallace, and Rissanen: Interwining Themes in Theories of Model Selection. Relatório técnico, Coordinated Science Laboratory, Universidade de Illinois, Urbana, Illinois, 2000.
- [63] C. C. Lee e J. T. Lin. Deadlock Prediction and Avoidance Based on Petri Nets for Zone-Control Automated Guided Vehicle Systems. *International Journal of Production Research*, 33(12):3249–3266, 1995.

- [64] W. S. Lee, B. O. Anderson, R. Kosut, e I. M. Y Mareels. A New Approach to Adaptive Robust Control. *Int. J. of Adaptive Control and Signal processing*, 7:183–211, 1993.
- [65] W. S. Lee, B. O. Anderson, R. Kosut, e I. M. Y Mareels. On Robust Performance Improvement Through the Windsurfer Approach to Adaptive Robust Control. In *Proc. of the 32nd Conference on Decision and Control*, pp. 2821–2827, 1993.
- [66] W. S. Lee, B. O. Anderson, I. M. Y Mareels, e R. Kosut. On Some Key Issues in The Windsurfer Approach to Adaptive Robust Control. *Automatica*, 31(11):1619–1636, 1995.
- [67] Wei Li, Goutao Lu, e Yongqiang Wang. Recognizing White Line Markings for Vision-Guided Vehicle Navigation by Fuzzy Reasoning. *Pattern Recognition Letters*, 18:771–780, 1997.
- [68] Long-Ji Lin, Thomas R. Hancock, e J. Stephen Judd. A robust Landmark-Based System for Vehicle Location using Low-Bandwidth Vision. *Robotics and Autonomous Systems*, 25:19–32, 1998.
- [69] L. Ljung e T. Söderström. *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1983.
- [70] Lennart Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [71] Lennart Ljung. Development of system identification. Relatório técnico, Dep. Eng. Elétrica, Universidade de Linköping, Linköping, Suécia, 2000.
- [72] Lennart Ljung e Tomas McKelvey. A Least Squares Interpretation of the Sub-Space Methods for System Identification. In *Preprints of The CDC'96*, 1996.
- [73] M. Lundh e K. J. Åström. Automatic Initialization of Robust Adaptive Controllers. In *4th IFAC Symposium on Adaptive System in Control and Signal Processing*, pp. 439–444, Grenoble, 1992.
- [74] Lieven Vandenberghe M. B. Moonen, B. De Moor e J. Vandewalle. On and Off-line Identification of Linear State Space Models. *Int. Journal of Control*, 49(1):219–232, 1989.
- [75] B. Wahlberg M. Viberg e B. Ottersten. Analysis of State Space System Identification Methods Based on Instrumental Variable and Subspace Fitting. Relatório técnico, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, 1995.

- [76] J. F. MacGregor e D. T. Fogal. Closed-loop Identification: The role of the noise model and prefilter. *Journal of Process Control*, 5(3):163–171, 1995.
- [77] M. Maurette, L. Delpech, e C. Proy an C. Quere. Autonomy and Remote Control Experiment for Lunar Rover Missions. *Control Eng. Practice*, 5:851–857, 1997.
- [78] Alan L. Meyrowitz, D. Richard Blidberg, e Robert C. Michelson. Autonomous Vehicle. *Proc. of The IEEE*, 84:1147–1164, 1996.
- [79] Bart De Moor. The Singular Value Decomposition and Long and Short Spaces of Noisy Matrices. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41:2826–2838, 1993.
- [80] B. C. Moore. Principal Componentes Analysis in Linear Systems: Controlability, observability and model reduction. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 26:17–31, 1981.
- [81] John B. Moore. On Strong Consistency of Least Squares Identification Algorithms. *Automatica*, 14:505–509, 1978.
- [82] Philip Moore, Sandor Ujvari, Junsheng Pu, Jan-Olof Lundgren, e Changwen Xie. Intelligent Semi-Autonomous Vehicles in Material Handling. *Mechatronics*, 9:881–892, 1999.
- [83] M. Morari e E. Zafiriou. *Robust Process Control*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [84] Eduardo M. Nebot e Hugh Durrant-Whyte. A High Navigation Architecture for Outdoor Autonomous Vehicles. *Robotics and Autonomous Systems*, 26:81–97, 1999.
- [85] O. Nelles. *Nonlinear System Identification: From classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Springer, Berlin, 2001.
- [86] Magnus Norgaard e et alli. Autonomous Guided Vehicle: Modelling. Relatório técnico, Technical University of Denmark, 1998.
- [87] Stefan Ochs e Sebastian Engell. Application of an Iterative Identification for Control Scheme to a Neutralization Process. *Journal of Process Control*, 10:433–440, 2000.
- [88] Special Issue of The IEEE Robotics e Automation Magazine. Special issue on design and navigation of autonomous underwater vehicles. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 6(2), 1999.
- [89] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1970.

- [90] G. H. C. Oliveira e J. R. H. Carvalho. Trajectory Tracking for Nonholonomic Mobile Robots Using Predictive Methods. In *5th ECC*, p. 19, Karlsruhe, Alemanha, 1999.
- [91] Peter Van Overschee e Bart De Moor. *Subspace Identification for Linear Systems: Theory - Implementation - Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [92] Ari Partanen e Robert R. Bitmead. Two Stage Identification/Controller Design and Direct Experimental Controller refinement. In *Proc. 32nd IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 2833–2838, San Antonio, Texas, 1993.
- [93] Ari Partanen e Robert R. Bitmead. The Application of Iterative Identification and Controller Design to a Sugar Cane Crushing Mill. *Automatica*, 31:1547–1563, 1995.
- [94] E. M. Petriu. Absolute Position Measurements Using Pseudo-Random Binary Encoding. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, pp. 19–23, september 1998.
- [95] L. A. Ribeiro, C. B. Jacobina, e A. M. N. Lima. Real-time Estimation of The Electrical Parameters of an Induction Machine Using Sinusoidal PWM Voltage Waveforms. *IN:Annual meeting of The IEEE Industrial Application Society*, pp. 746–752, 1997.
- [96] C. Samson e K. Ait-Abderrahim. Mobile Robot Control. Relatório técnico, INRIA - Sophia Antipolis, França, 1990.
- [97] Aristide Santos e Robert Bitmead. Preserving Linear Design Capabilities in the Nonlinear Control of Nonholonomic Autonomous Underwater Vehicles. Relatório técnico, INRIA - Sophia Antipolis, França, 1995.
- [98] Ruud J. P. Schrama. Accurate Identification for Control: The Necessity of an Iterative Scheme. *IEEE Tran. on Automatic Control*, 37:991–994, 1992.
- [99] Ruud J. P. Schrama e Okko H. Bosgra. Adaptive Performance Enhancement by Iterative Identification and Control Design. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 7:475–487, 1993.
- [100] S. Shoval, A. Mishan, e J. Dayan. Odometry and triangularization data fusion for mobile-robots environment recognition. *Control Eng. Practice*, 6:1383–1388, 1998.
- [101] R. E. Skelton. Model Error Concepts in Control Design. *Int. Journal of Control*, 49:1725–1753, 1989.
- [102] R. E. Skelton e G. Shi. Iterative Identification and Control Using a Weighted q-Markov Cover with Measurement Noise. *Signal Processing*, 77:511–522, 1999.

- [103] G. W. Stewart e Ji guang Sun. *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press, New York, 1990.
- [104] K. J. Åström. Theory and Applications of Adaptive Control - A survey. *Automatica*, 19(2):471-486, 1983.
- [105] K. J. Åström. Autonomous Control. In *International Conference on the Occasion of the 25th Anniv. Of INRIA*, pp. 267-278, Paris, France, 1992.
- [106] K. J. Åström. Intelligent Tuning. In *IFAC Simposim on Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, pp. 359-370, Grenoble, France, 1992.
- [107] K. J. Åström e P. Eykhoff. System Identification: A survey. *Automatica*, 7:123-162, 1971.
- [108] K. J. Åström e J. Nilsson. Analysis of a Scheme for Iterated Identification and Control. In *SYSID'94*, volume 2, pp. 171-176, Copenhagen, Denmark, 1994.
- [109] K. J. Åström e B. Wittenmark. Problems of Identification and Control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34:90-113, 1971.
- [110] K. J. Åström e B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1984.
- [111] K.J. Åström e B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 2nd edition, 1995.
- [112] RIM Roadmap Development Team. A Critical Technology Roadmap for Robotics and Intelligent Machines. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, pp. 22-26, march 2000.
- [113] Alberto Tesi, A. Vicino, e G. Zappa. Clockwise Property of the Nyquist Plot with Implications for Absolute Stability. *Automatica*, 28:71-77, 1992.
- [114] William R. Uttal. *Toward a New Behaviorism: The case against perceptual reductionism*. Mahwah, New Jersey, 1998.
- [115] Alle-Jan van der Veen, E. F. Deprettere, e A. L. Swindlehurst. Subspace Based Signal Analysis Using Singular Value Decomposition. *IEEE Proceedings*, 81:1277-1308, 1993.
- [116] Michel Verhaegen. Identification of Deterministic Part of MIMO State Space Models Given in Innovation Form from Input-Output Data. *Automatica*, 30:61-74, 1993.

- [117] Mats Viberg. Subspace Methods in System Identification. *IN:Preprints of The SYSID'94*, pp. 1–12, 1994.
- [118] Alexander Weinmann. *Uncertain Models and Robust Control*. Springer-Verlag, Wien, 1991.
- [119] J. N. Wilson. Guidance of Agricultural Vehicles - A historical perspective. *Computers and electronics in agriculture*, 25:3–9, 2000.
- [120] B. Wittenmark. Stochastic Adaptive Control Methods: A survey. *Int. Journal of Control*, 21:705–730, 1975.
- [121] Xiang Yun e Yoshio Yamamoto. Stability Analysis of the Internal Dynamics of a Wheeled Mobile Robot. *Journal of Robotic Systems*, 14(10):697–709, 1997.
- [122] Z. Zang, R. Bitmead, e M. Gevers. Iterative Weighted Least-squares Identification and Weighted LQG Control Design. *Automatica*, 31:1577–1594, 1995.