UNIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE -UFCG

CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA - UAFM

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOANA D'ARC CASTRO DE LIMA

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA EM TURMAS DE 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A PESPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CUITÉ-PB

2022

JOANA D’ARC CASTRO DE LIMA

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA EM TURMAS DE 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A PESPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande *campus* Cuité.

Orientador(a): Glageane da Silva Souza

CUITÉ – PB

2022

L732e Lima, Joana D'arc Castro de.

O ensino da trigonometria em turmas de 9° ano do ensino fundamental sob a perspectiva da resolução de problemas. / Joana D'arc Castro de Lima. - Cuité, 2022.

41 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2022.

"Orientação: Profa. Dra. Glageane da Silva Souza".

Referências.

1. Trigonometria. 2. Razões trigonométricas. 3. Educação matemática. 4. Trigonometria – ensino fundamental. 5. Trigonometria – resolução de problemas. I. Souza, Glageane da Silva. II. Título.

CDU 514.116(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

JOANA D’ARC CASTRO DE LIMA

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA EM TURMAS DE 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A PESPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande *campus* Cuité.

Aprovada em: 27/08-2022

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Glageane da Silva Souza

(Orientador – UFCG/CES)

Profa. Msc. Ticiany Marques da Silva - Examinadora

Prof. Msc. Wellison Gomes Casado - Examinador

CUITÉ – PB

2022

Dedico esse trabalho, primeiramente, a Deus por nunca me abandonar em cada passo que dei até aqui. Às minhas famílias por, de um jeito ou de outro, me apoiar e motivar nessa jornada. E a todos que foram instrumentos de Deus nesse processo.

AGRADECIMENTOS

Todo ciclo que se encerra em nossas vidas nos dá motivos de agradecimentos, pois, apesar dos desafios vividos e momentos de desânimo, os momentos de resiliência e aperfeiçoamento se sobressaem. E, deles, nunca saímos os mesmos.

Deste, saio agradecida e mais forte. Lembro-me de quando iniciei o curso. Uma menina inexperiente e com poucas experiências do mundo fora do meu contexto, pensei muitas vezes em desistir e procurar um caminho mais fácil. Porém, de que adiantaria seguir caminhos que todos seguem? Os resultados seriam os mesmos que todos os outros.

Nesses momentos de incertezas e dificuldades, lembro de vozes revitalizantes, mãos ajudadoras e conselhos sábios de pessoas que participaram desse ciclo ao meu lado e tomaram o papel de anjos nesse processo.

Inicialmente, agradeço à minha mãe, Maria Anita. Ela, com sua humildade e simplicidade sempre me apontou o caminho que me traria melhores resultados e fez o que pôde para que eu o seguisse. E mesmo sem ter noção da grandiosidade do seu papel em minha vida, agiu de variadas formas para me tornar a pessoa que sou hoje. Muito obrigada, mãe!

À Betânia Santos e Raniere Silva, meus pais na fé, devo favores impagáveis. Só Deus poderá retribuí-los pelo bem que me fizeram e continuam a me fazer mesmo que eu não mereça tanto. Nada que eu diga ou faça será suficiente para lhes demonstrar minha gratidão. Que em troca de tudo isso que vocês me fazem, Deus lhes abençoe com o galardão celeste e os faça muito felizes!

Não posso esquecer de Dalvina Medeiros e Sr. Argemiro Pereira, meus primeiros patrões que desempenharam papéis tão importantes em meu crescimento profissional, emocional, ético... lembro-me de cada acordo que fazíamos para que eu pudesse conciliar o trabalho com os horários de estudo. Porém nossa relação nunca foi apenas profissional. Os estimo e amo infinitamente!

Ao Trio JJJ e ao Isaac, dedico este trabalho. Jailton Cãndido, Josicleide Cardoso e Isaac Guedes, vocês foram agentes de Deus para tornar os dias mais sóbrios desse ciclo em momentos de descontração e gargalhadas. Os amigos que o curso me presenteou e que levarei para sempre em meu coração.

À Ticiany Marques, a minha estima e respeito. Uma pessoa que é ímpar por sua sabedoria, inteligência e altruísmo. Uma amiga que mesmo de longe, não deixou de me acompanhar e me ajudar. Lhe serei eternamente grata e lhe desejo muito sucesso, realizações e amor em toda a sua vida.

À minha orientadora Glageane Souza pela paciência e dedicação a mim. Que seus caminhos sejam abençoados por Deus!

Por fim, agradeço a todos aqueles que me ajudaram nesse processo e que não conseguirei citar nome por nome. Que vocês se sintam homenageados!

Este é só mais um degrau de tantos outros que subirei. Porém, sem a contribuição de cada um de vocês, não me seria possível tal realização.

A minha eterna gratidão a todos!

"A matemática não é algo que diz respeito a números, mas sim à vida. Ela é algo que nasce do mundo em que vivemos. Lida com ideias. E, longe de ser aborrecida e estéril, como muitas vezes é retratada, ela é cheia de criatividade." (Keith Devlin)

RESUMO

Diante das grandes e necessárias transformações que a sociedade a ciência vem sofrendo, a educação matemática não pode ficar para trás. Por isso, a necessidade de modificações e aperfeiçoamentos no processo de ensino e aprendizagem são indispensáveis. Pensando nisso, o presente trabalho de pesquisa teve como objetivo principal responder à pergunta de que forma a perspectiva de Resolução de Problemas contribui para o ensino e aprendizagem da Matemática das razões trigonométricas no triângulo retângulo em turmas de 9° ano do ensino fundamental? A abordagem foi realizada com 11 alunos de uma escola privada da cidade de Nova Floresta-PB. A pesquisa utilizada foi de natureza qualitativa, pois permite uma melhor interpretação dos dados no processo de analisar e discutir os resultados que foram coletados a partir da aplicação feita. Com isso, pôde-se perceber a eficácia da perspectiva de resolução de problemas em relação ao objeto de estudo. Com isso, trazemos algumas reflexões sobre os pontos positivos e negativos encontrados a partir da prática realizada.

Palavras chaves: Razões trigonométricas. Educação matemática. Ensino e aprendizagem.

ABSTRACT

Faced with the great and necessary transformations that society has been undergoing, mathematical education cannot be left behind. Therefore, the need for changes and improvements in the teaching and learning process are indispensable. Thinking about it, the main objective of this research study was to answer the question: how does the Problem Solving perspective contribute to the mathematics' teaching and learning of trigonometric ratios in the rectangle triangle in 9th grade classes of elementary school? The approach was carried out with 11 students from a private school in the city of Nova Floresta-PB. The kind of research used was a qualitative nature study, because it allows a better interpretation of the data in the process of analyzing and discussing the results that were collected from the application that was done. With this, it was possible to perceive the efficacy of the perspective of problem solving in related to the study object. This way, we bring some reflections about the positive and negative points found from the practice performed.

Palavras chaves: Trigonometric ratios; Match education; teaching and learning.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática é vista por muitos como algo difícil ou até mesmo complicado, principalmente quando tratamos do assunto de Trigonometria. Seus conceitos são estigmatizados e rejeitados antes mesmo de serem apresentados. Como consequência, as dificuldades de aprendizagem se acumulam e quando há a necessidade de utilizá-los, isso não acontece de forma eficiente e coesa.

Pensando nisso, este trabalho de cunho qualitativo foi elaborado objetivando fazer algumas reflexões sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, bem como, apontar a perspectiva de Resolução de Problemas como um meio facilitador no processo de ensino e aprendizagem desta, em essencial, no ensino da Trigonometria.

Diante dessa realidade, buscamos descobrir: de que forma a perspectiva de Resolução de Problemas contribui para o ensino e aprendizagem da Matemática quando se trata das razões trigonométricas no triângulo retângulo em turmas de 9° ano do ensino fundamental?

Para tanto, pretendemos mostrar a perspectiva de Resolução de Problemas como meio facilitador no ensino e aprendizagem da Matemática.

- Apresentar um breve histórico do processo de evolução da perspectiva de Resolução de Problemas no ensino da Matemática nas propostas norteadoras dos currículos das escolas básicas no Brasil;
- Apresentar como a metodologia de Resolução de Problemas pode ser usada como ponto de partida para a introdução do ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Com isso, temos o segundo capítulo onde abordamos o seguinte tema: Cenário atual da educação matemática no Brasil, onde apresentamos dados de exames avaliativos da Educação Básica no Brasil e abrimos as discussões sobre a educação matemática no país.

Já no terceiro capítulo intitulado “A Resolução de Problemas como metodologia no processo de ensino aprendizagem, mostramos um breve relato da história, tendo um subtópico abordando a evolução da perspectiva da resolução de problemas no ensino de matemática num contexto global.

No Quarto capítulo apresentamos um breve histórico e importância dos conceitos da trigonometria, além de dois subtópicos, sendo eles: o ensino de trigonometria nos anos finais segundo as propostas curriculares e a formação inicial dos docentes e a trigonometria.

Após isso, temos a metodologia onde apontamos a abordagem qualitativa como sendo a mais adequada para que se atinja os objetivos da pesquisa, bem como descrevemos, de forma sucinta, os sujeitos desta intervenção.

Em seguida, temos a descrição e análise das atividades realizadas utilizando a resolução de problemas, sendo apresentadas a aplicação e discussão da pesquisa apresentada.

Por fim, temos as considerações finais acerca de toda análise e discussão encontrados e mostrando o quanto a perspectiva de resolução de problemas contribuiu para o sucesso da intervenção proposta.

2. CENÁRIO ATUAL DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL

Um dos maiores objetivos de um professor em sala de aula é o de que seus alunos consigam compreender aquilo que lhe será exposto e desenvolvam habilidades suficientes para utilizar essas ferramentas em seu dia a dia, tanto para resolução de alguns problemas como para a interpretação do espaço onde ele está inserido. No ensino da Matemática não é diferente. Como defendem os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN 1998), "a atividade matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar o mundo ao seu redor."

Atingindo esse objetivo, podemos perceber a Matemática regendo cada detalhe e dando significado e justificativas para cada um deles. Desde uma pequena organização de crianças em uma fila, até mesmo, aos processos e projetos realizados para manter um avião no ar ou levar o homem à lua.

Entretanto, é comum notar que mesmo com mudanças e aperfeiçoamentos nas diretrizes que norteiam o estudo da matemática em sala de aula ou que sejam aplicados esforços para que isso se torne realidade, na prática, ainda podemos perceber certa frustração em relação a esse objetivo.

Dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - Pisa (2018), ferramenta avaliativa que compara o desempenho dos alunos na faixa etária de até 15 ano de idade, idade que, em média, se termina o ensino básico na maioria dos países, demonstram que "A maioria dos estudantes brasileiros que participaram [dessa edição] se encontra no Nível 1 ou abaixo dele (68,1%).[...]" Já o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) 2019, outro exame que busca o levantamento de informações sobre a educação básica, agora no Brasil, aponta que "cerca de 95% dos estudantes do Ensino Médio de escolas públicas não apresenta uma aprendizagem significativa em Matemática." Isso inclui a não compreensão da linguagem matemática, a falta de compreensão dos problemas propostos e a incapacidade de fazer correlações dos conceitos matemáticos com situações do dia a dia.

Muitos podem ser os fatores que devem estar influenciando a baixa qualidade da aprendizagem da Matemática no país. Advindas do meio escolar, do próprio aluno ou de fatores externos, segundo os PCN's:

> As dificuldades de aprendizagem em Matemática podem estar relacionadas a impressões negativas oriundas das primeiras experiências do aluno com a

> disciplina, à falta de incentivo no ambiente familiar, à forma de abordagem do professor, a problemas cognitivos, a não entender os significados, à falta de estudo, entre outros fatores. (BRASIL, 1997, P. 15)

Em decorrência disso, o estudo dessa ciência em sala de aula tem se restringido apenas à codificação de fórmulas e técnicas mecanizadas de cálculos que em quase nada se relacionam com o contexto onde o aluno está inserido, o que faz com que a Matemática se torne enfadonha e sem sentido. E alimenta a ideia de que ela é previsível e possui pouca abertura para a criatividade ou utilidade no dia a dia.

> De facto, a aprendizagem sem compreensão tem se revelado um problema persistente desde, pelo menos, a década de 30 e tem sido objeto de uma diversidade de debates e pesquisas, realizadas por psicólogos e educadores ao longo dos anos [...]. A aprendizagem da Matemática [...] exige compreensão e capacidade de aplicar procedimentos conceitos e processos. (NTCM, 1988, p.21)

Porém, ao mesmo tempo que enfrentamos essas dificuldades, nos deparamos com uma cobrança desenfreada de uma sociedade em constante evolução e que requer de seus membros habilidades, peculiarmente, suficientes para que esse processo perdure e que haja sucesso sempre ou, pelo menos, na maioria das vezes. Isso acontece nas esferas econômicas, industriais, tecnológicas, científicas e, até mesmo, nas relações mais simples do cotidiano de um indivíduo como aquisição do melhor plano de telefonia ou pacotes de dados de internet, compras no supermercado, escolha do melhor plano de saúde e outras decisões das quais depende seu bem estar e harmonia com outros.

Onuchic afirma:

> O mundo passa por mudanças. A tecnologia está mudando, a matemática está mudando; portanto, a educação matemática, assim como a percepção da sociedade e o apoio concedido a essa disciplina escolar, precisa mudar para ir ao encontro das necessidades do século XXI. (Onuchic, 2013, p. 88)

Ao nos depararmos com essa realidade, podemos seguir alguns caminhos: ignorá-la e apenas seguir sistemas de ensino e aprendizagem fadados ao fracasso ou tentar mudar essa realidade capacitando-nos, como educadores, e adequando os métodos de ensino de acordo com as necessidades de cada aluno.

3. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

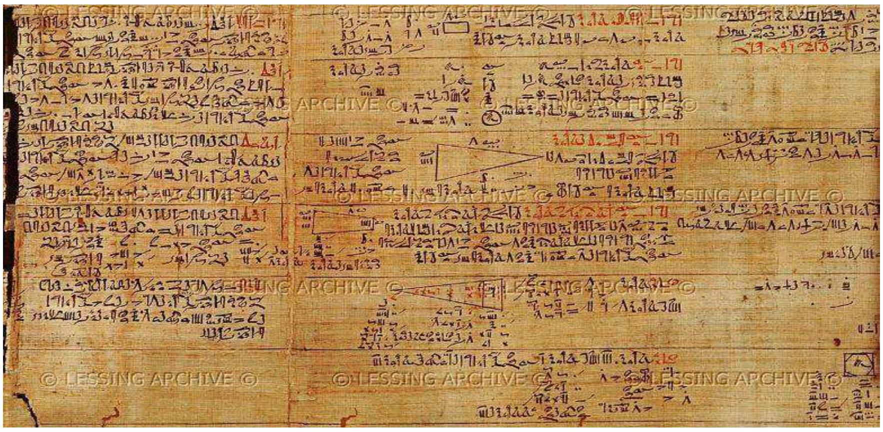
O processo de resolução de problema é caracterizado pela elaboração, organização e concretização de estratégias que apontem uma solução para determinadas situações problemas, sejam situações cotidianas e/ou de cunho teórico.

> É uma metodologia que se volta para o desenvolvimento do pensamento criativo e criador. Nesse sentido, a partir destas reflexões, pode-se inferir que a metodologia de resolução de problemas incentiva a aprendizagem prazerosa e significativa, despertando o interesse em resolver desafios e, quando trabalhada em conjunto, pode fortalecer o trabalho em equipe e a vida em sociedade, respeitando os diferentes modos de pensar matematicamente, uma vez que não há um único método, uma receita para chegar à solução. (PARAÌBA, 2018, p. 285)

Sua importância se dá pelo fato de que, por meio desta, o aluno atingirá, cada vez mais, certo protagonismo em sua aprendizagem.

Sobre sua importância, Dante (2002) discorre: "A resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da instrução matemática desde o Papiro de Rhind". Tal papiro trata-se de um dos documentos mais antigos que apresenta situações problemas que foram estudados nas escolas dos antigos egípcios e demonstram que a resolução de problemas já tratava-se de uma ferramenta metodológica no processo de ensino e aprendizagem da matemática desde os primórdios da educação. Como mostrado na imagem abaixo:

Figura 1: Papiro de Rhind mostrando alguns dos problemas egípcios da época.



Fonte: http://matematicosdemogi.blogspot.com/

Dentre os vários problemas apresentados neste papiro, um dos mais famosos é o de número 79, O inventário de uma Casa. Nele, tem-se a seguinte descrição:

“Há 7 casas, em cada casa temos 7 gatos, cada gato mata 7 ratos, cada rato comeu 7 grãos de cevada, cada grão teria produzido 7 sementes de cevada. Qual a soma das coisas enumeradas?” (FERNÁNDEZ, p. 14).

Solução por potências de base 7:

Uma forma de solucionar é por meio da soma das primeiras cinco potências de base 7 e expoente x, onde $1 \leq x \leq 5$. Assim, temos:

Quadro 1: Descrição da quantidade de cada item

Item	Potência	Quantidade
Casas	7^1	7
Gatos	7^2	49
Ratos	7^3	343
Grãos	7^4	2.401
Hekate de cevada	7^5	16.807
Total		**19.607**

Fonte: dados da pesquisadora

Porém, o método descrito no papiro denota um passo a passo diferente:

O princípio é a multiplicação entre 7 e 2.801. Decompondo o número 7 na forma (1 + 2 + 4), o escriba, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, fez:

$$2.801 \text{ x } 1 = 2.801$$

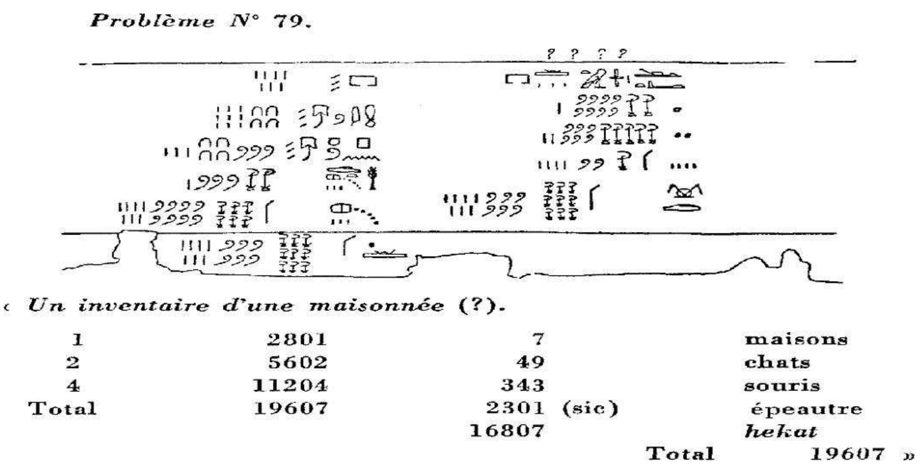
$$2.801 \text{ x } 2 = 5.602$$

$$2.801 \text{ x } 4 = 11.204. \text{ Então,}$$

$$2.801 + 5.602 + 11.204 = 19.607.$$

Como está escrito no recorte do papiro, abaixo:

Figura 2: Solução do problema 79 do papiro de Rhind



Disponível em: www.matematicaparafilosofos.pt/

Na descrição da resolução feita pelo escriba, podemos perceber que ele se utiliza também da ideia de soma duplicada, que pode ser um dos motivos pelos quais ele decompôs o

7. Vemos, com isso, que um problema pode ser resolvido de maneiras diferentes e pode ser utilizado para aplicações de diferentes conceitos matemáticos. Tal possibilidade pode contribuir para a desconstrução da ideia de que há apenas uma forma correta de resolução de um problema matemático e dá espaço para a criatividade no desenvolver do pensar matemático.

3.1 EVOLUÇÃO DA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Como vimos, as situações problemas permeiam o estudo da matemática desde os primórdios da educação. E, apesar de, por algum tempo, algumas situações do cotidiano não pudessem ser analisadas matematicamente, com o avançar das descobertas de novos conceitos matemáticos a cada período, mais e mais essas limitações foram sendo superadas.

Porém, Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam que apesar de os antigos apresentarem situações problemas em suas didáticas, a Resolução de Problema, como metodologia de ensino passou a ser analisada com mais atenção, apenas, a partir do século XX. Sendo o *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics os the 1980*, a primeira documentação publicada trazendo recomendações para o ensino da Matemática com enfoque na Resolução de Problemas para os anos 80.

Em um diálogo sobre o assunto, tomando as escolas americanas como referência, Lambdim e Walcott (2007) apontam que o ensino da Matemática pode ser separado em seis fases, desde o século XX até aos dias de hoje: Exercício e prática; Aritmética significativa; Matemática Moderna; Volta às bases; Resolução de problemas; Padrões e responsabilidade.

Na primeira fase, que perdurou entre os anos de 1920 a 1930, o ensino da matemática era pautado na ideia da rotina de cálculos e memorização de algoritmos. Objetivando assim a facilidade com cálculos por meio de exaustivos exercícios e práticas de cálculo. Nessa fase, a teoria do coneccionismo e associacionismo foram muito influentes.

Na fase da Aritmética significativa (1920 - 1950), a matemática nas escolas era fortemente influenciada pelas teorias da Gestalt. Buscava a compreensão de ideias e habilidades aritméticas e, mesmo que de forma limitada, buscava fazer aplicações dos conceitos matemáticos com situações do cotidiano. Para isso, dava-se grande ênfase nas relações matemáticas e nas atividades orientadas.

Na fase da Matemática Moderna (1960 - 1970), as teorias do desenvolvimento e sociocultural defendidas por Piaget e Brunner, por exemplo, orientava que o ensino da matemática acontecesse de forma que os discentes compreendessem cada estrutura deste componente.

Na década de 1980, o período da Volta às Bases foi caracterizado pelo retorno das ideias da aprendizagem por meio de prática e repetição de exercícios realçando uma aprendizagem mais tecnicista e mecanizada.

Entretanto, ainda na década de 80, as teorias do construtivismo, a psicologia cognitiva e teoria experimental defendidas por Vygotsky contribuíram para a implementação massiva da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem. Aqui se iniciava a percepção da necessidade de haver uma maior interligação entre conceitos matemáticos e situações do cotidiano.

E, na década de 1990, deu-se início à fase dos Padrões e responsabilidade. Que trazia um duelo entre a Psicologia cognitiva, teoria sociocultural vs renova ênfase na psicologia experimental (NCBL). Onde houve uma maior preocupação com a alfabetização matemática dos indivíduos, bem como a elaboração e atualização dos currículos para a obtenção desse ideal.

Tais fases demonstram períodos em específico que a Educação Matemática enfrentou. E, cada um deles, permitiram um progresso, uma inovação, um crescimento. E, apesar de se tratar de um quadro idealizado a partir da Educação Matemática Americana, as autoras defendem que, algumas fases, foram vivenciadas na Educação Matemática em outros países.

Na Europa, já próximo dos anos 2000, a Associação de Professores de Matemática – APM indica que a perspectiva de Resolução de Problemas deveria se tornar um dos principais objetivos do ensino da Matemática afirmando:

> A resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática em todos os níveis escolares (...) entende-se aqui a resolução de problemas num sentido mais amplo em que se considera essencial o trabalho à volta de situações de problemas envolvendo processos e atividades como experimentar, conjecturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar. (AOM, 1998, p. 32)

A partir de então, começava-se a acreditar que o estudo da Matemática poderia e seria, consideravelmente, favorecido por esse método de ensino e aprendizagem. Pois permitiria aos alunos descobrir a essência da Matemática e, assim, adquirir interesse pela disciplina, como também usufruir de suas ferramentas para aperfeiçoamento, crescimento e manutenção de uma boa qualidade de vida, de uma boa visão de mundo e de contribuição com a sociedade em que estivesse inserido.

Para Lester e B. D'Ambrósio (1988, pg. 11), "A principal razão para se estudar Matemática é para aprender como resolver problemas." E justificam: [pois] "a capacidade de efetuar uma operação sem conhecimento de quando usar essa habilidade não tem valor." De fato, talvez um dos principais motivos para que haja tamanha dificuldade de os alunos enxergarem uma aplicabilidade do pensar matematicamente em situações do seu cotidiano, seja porque, em sua aprendizagem, ele não tenha tido a oportunidade de desenvolver tais habilidades.

Porém, essa, como qualquer outra perspectiva de aprendizagem não será eficaz por si só. Há a necessidade de saber utilizá-la de forma eficaz. Beatriz D'Ambrózio (1988) define que uma tarefa só será tida como um problema para determinado aluno (ou grupo) se: o aluno estiver motivado para encontrar uma solução (pelo próprio querer ou por precisão); não souber, imediatamente, como solucionar o problema; precisar se dedicar para encontrar a solução.

A autora descreve que, diante dessas percepções, o professor tem um trabalho fundamental no planejamento escolha dos problemas que irá propor aos seus alunos. Pois, o que pode ser um problema para um grupo de alunos, pode não ser para outro caso não esteja alinhado com esses três princípios.

Já George Polya (1995) um dos principais pensadores e reformadores desse tema, considerado por muitos como o pai da Resolução de Problemas, participou ativamente da construção de roteiros e esquemas que possibilitasse ao professor, um passo a passo de como aplicar tal metodologia em sala de aula. O autor defendia que há quatro passos necessários para que o aluno possa desenvolver e atingir a solução de um problema matemático:

- Compreender o problema (CP): o que é necessário para resolvê-lo? Quais suas variáveis e incógnitas?
- Designar um plano (DP): Esse problema é conhecido? Como as variáveis estão correlacionadas? Quais as estratégias devemos usar para sua resolução?
- Executar o plano (EP): é possível executar cada passo da execução? É possível demonstrar que o plano está correto?
- Retrospecto do problema (RP): é possível verificar o resultado do problema?

Tal roteiro se mostrou eficaz na resolução de situações-problemas em sala de aula. Porém, mesmo que implicitamente, ele enxerga a Resolução de Problemas apenas como um instrumento de avaliação final que julgará se os conceitos e procedimentos matemáticos foram bem absolvidos ou não.

Schroeder e Lestes (1989), descrevem três modos de utilizar Resolução de Problemas que possibilitam que professor amplie essa metodologia para outros objetivos. Segundo eles, o docente pode “(1) ensinar *sobre* resolução de problemas; (2) ensinar matemática *para* resolver problemas; e (3) ensinar matemática *através* da resolução de problemas.”

Tais colocações foram fundamentais para a fase da educação matemática da época. Porém, hoje, diante das várias aplicabilidades dessa metodologia, talvez essas ideias não sejam suficientes para abarcar tal perspectiva.

Andrade (1998, p. 99) aponta a necessidade de se pensar além da expressão “resolução de problemas”. Ele afirma:

> “a avaliação que se faz do trabalho dos alunos, em Resolução de Problemas, deve ser feita, realmente, a partir do que eles fizeram e fazem (o certo ou o errado) com seus significados, indicando assim o ponto de partida do caminho que o professor deve percorrer com eles. [...] a melhoria do trabalho dos alunos é decorrência desse caminhar conjunto, e, nessa perspectiva, a resolução de problemas deve ser assumida como uma atividade multicontextual.”

Ou seja, no processo de construção da resolução do problema, a figura do professor como mediador é imprescindível para a significação dos contextos envolvidos. Pois, ele será o elo que partirá dos conhecimentos prévios dos alunos até a construção de novos conceitos não se apegando à catalogação de respostas entre certas ou erradas. Mas, por meio de questionamentos e discussões, levará os discentes à construção de novos saberes de maneira global.

O autor também defende que o trabalho na proposição de problemas não acaba quando o aluno o resolve, mas, que é de suma importância que logo depois haja um diálogo apontando os pontos de vistas utilizados tanto pelos alunos quanto pelo professor no processo de resolução. Assim, os significados poderão ser melhor compreendidos e a aprendizagem será eficaz.

Sob essa perspectiva, estaremos abordando a Resolução de Problemas como ponto de partida para a conceituação de novos conhecimentos matemáticos no que tange às definições introdutórias da Trigonometria para alunos dos anos finais do ensino fundamental.

4. BREVE HISTÓRICO E IMPORTÂNCIA DOS CONCEITOS DA TRIGONOMETRIA

Estipular datas ou único responsável por criarem a Trigonometria não é o mais indicado. Na verdade, tais conceitos são resultado de milênios e conta com a participação de muitos povos.

> O termo trigonometria deriva das palavras gregas que significa “triângulo” e “medir”. Assim, foi chamado porque, em seus primórdios, estava envolvida principalmente com o problema de “solução de triângulo”. Entenda-se por isso o problema da determinação de todos os lados e ângulos de um triângulo quando só alguns deles são conhecidos. (P. Abbot, 2004, p. 11).

Um dos primeiros de que se tem conhecimento que desenvolveram e se utilizaram dos pensamentos rudimentares da Trigonometria são os egípcios. O Papiro de Rhind, já citado acima, apresenta um problema (o problema 56) que demonstra uma aplicação prática de noções de semelhança de triângulos e da cotangente de um ângulo.

Os babilônicos, por sua vez, costumavam utilizar relações trigonométricas para estudos na astronomia e cálculos de distâncias muito grandes. Também foram os responsáveis pela divisão da circunferência em 360°, além de construírem um calendário e uma tábua de eclipses lunares.

No Oriente, a relações estudadas a partir dos triângulos retângulos eram aplicadas em cálculos de distâncias, comprimentos e profundidades. Na Era Cristã, o matemático indiano Aribata (476-550), foi o autor da definição do seno como uma relação entre um ângulo e a metade de uma corda. Ideia que precedeu a definição do cosseno.

Isaac Newton e James Stirling foram grandes contribuintes no ramo da trigonometria desenvolvendo a fórmula da interpolação geral Newton-Stirling para funções trigonométricas. Leonhard Euler e Gauss, no século XVIII e XIX, participaram e contribuíram com grandes avanços nessa área determinando um tratamento analítico das funções trigonométricas na Europa e aperfeiçoando suas aplicações no aspecto de triangulações topográficas e geodésicas, respectivamente.

Tais contribuições são de suma importância até aos dias de hoje. No mundo moderno em que vivemos, estes conceitos são muito utilizados em cálculos de distâncias inatingíveis como a altura de um avião no ar, na programação e órbita de satélites, nas coordenadas do Sistema de Posicionamento Global – GPS, na triangulação de redes celulares, por exemplo. A partir daí, percebe-se que o estudo da Trigonometria se torna indispensável para os indivíduos da atual sociedade, pois ela dá significado e possibilidade para a resolução de inúmeros problemas de seu cotidiano.

4.1 O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NOS ANOS FINAIS SEGUNDO AS PROPOSTAS CURRICULARES

A educação no Brasil tem enfrentado constantes e lentas transformações ao longo do tempo. Com isso, somente a partir do século XX, especificamente a partir do ano de 1920, é que a educação das escolas de ensino básico do País foram alvo de grandes transformações nas orientações de ensino.

Em 1996, a Lei de Diretrizes e Bases – LDB organizou e estipulou cada detalhe sobre direitos e deveres que deveriam reger a educação no Brasil. Trazendo, assim, grandes avanços no nosso sistema educacional. A partir de então, documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN e as Bases Nacionais Comum Curriculares – BNCC foram organizados para apontar quais competências e conteúdos deveriam ocupar lugar nos currículos das escolas básicas do Brasil.

Os Parâmetros Curriculares estão em vigência desde o ano de publicação – 1998- porém, desde 2018 com a implantação da BNCC, têm perdido sua influência no que tange a regência dos currículos nas escolas brasileiras. Entretanto, não podemos deixar de falar sobre ele, pois apresentaram orientações sobre cada nível de ensino por mais de 20 anos na educação do País. Tais parâmetros organizam os conteúdos de Matemática em blocos:

> 1° Números e Operação – que envolve os campos da Aritmética e Álgebra;
>
> 2° Espaço e Forma – Envolve todo o campo da Geometria;
>
> 3° Grandezas e Medidas – Tenta correlacionar cada campo de conhecimento matemático (Aritmética, Álgebra, Geometria e etc);
>
> 4° Tratamento da informação – Comportando os conceitos sobre Estatística, Probabilidade e Combinatória. (BRASIL, 1998)

Em se tratando dos PCN para os anos finais, percebemos que alguns conteúdos importantes não foram contemplados como obrigatórios para essa fase, como por exemplo, os conceitos sobre Trigonometria. Essa ideia se solidifica no fato de que até mesmo os exames de avaliação do rendimento escolar destinados às turmas de 9° ano, não apresentaram tais conceitos em sua matriz (Prova Brasil, a exemplo). Ou seja, segundo o documento, até mesmo a parte introdutória deste conteúdo seria destinado ao Ensino Médio, desde à 1° série.

O mesmo aconteceu com a BNCC. Neste, os conteúdos de Matemática foram organizados em áreas de conhecimento (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). O documento, que entrou em vigência desde 2018, traz reflexões sobre objetivos e métodos de aprendizagem, bem como as competências, habilidades e os conteúdos que devem ser explorados em cada ano desde os anos iniciais do ensino fundamental até ao Ensino Médio a nível nacional. Para os anos finais do ensino fundamental, na área da Geometria, foram destacados os conceitos como Semelhanças de Polígonos, Relação entre ângulos formados pela intersecção de retas transversais e paralelas, Distância entre pontos no plano cartesiano, Relações métricas no triângulo retângulo (entre outros). Neste documento, fica implícita a obrigatoriedade da introdução de conceitos trigonométricos para turmas do 9° ano do ensino fundamental.

Apesar do documento não trazer explicitamente os conceitos da Trigonometria para alunos dos anos finais do ensino fundamental, podemos notar a preocupação em estabelecer os conteúdos supracitados nos currículos escolares, a fim de garantir uma base sólida a respeito da Geometria que, de forma direta ou indireta, contribuirão para uma melhor aprendizagem dos alunos ao eles se depararem com a Trigonometria logo após, no Ensino Médio.

Somente nas Propostas Curriculares da Paraíba (PCP) é que podemos perceber uma indicação direta relacionada ao ensino da Trigonometria para alunos dos anos finais, em especial do 9° ano. Este documento, elaborado pelas comissões de ensino do estado e colaboradores de cada área de conhecimento, trata-se de diretrizes e orientações curriculares que norteiam o ensino nas escolas paraibanas (apesar de ser comum cada município apresentar suas próprias orientações, o que não é o objeto de estudo desde trabalho).

Assim como na BNCC, as PCP organizam os conceitos matemáticos em eixos temáticos (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) e objetivam garantir nove direitos de aprendizagem da Matemática para o Ensino Fundamental.

Na área da Geometria, especificamente para o 9° ano, além dos conteúdos já orientados pela BNCC, nota-se as primeiras indicações do ensino da Trigonometria, ainda que como conteúdo complementar. A indicação é para que sejam trabalhados os conceitos introdutórios das relações trigonométricas básicas especialmente das relações de seno, cosseno, e tangente de ângulos dos triângulos retângulos.

Figura 3. Tabela de habilidades e conteúdos orientados pela PCP para turmas de 9° ano do Ensino fundamental

UNIDADE TEMÁTICA: GEOMETRIA	
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM/HABILIDADES	**CONTEÚDOS**
Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. (EF09MA10)	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal
Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica. (EF09MA11)	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo
Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. (EF09MA12)	Semelhança de triângulos
Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA13) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. (EF09MA14)	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras. Retas paralelas cortadas por transversais.
Resolver e elaborar problemas de aplicações do seno, cosseno e tangente em situações cotidianas.	Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Fonte: Documento de Propostas Curriculares da Paraíba, p. 283.

Isso é vantajoso para o ensino da Trigonometria, bem como para uma melhor aprendizagem dos alunos. Pois, lhes permitirá ter uma ideia inicial e desenvolver uma familiaridade com o conteúdo a ponto de entender seu significado, sua aplicabilidade, sua importância para situações do cotidiano matemático, em outras áreas do conhecimento e até mesmo do seu dia a dia antes de ter que se aprofundar em tais conceitos ao chegar no ensino médio.

Onde o estudo da Trigonometria será pautado pelo desejo de se desenvolver duas habilidades:

> (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
>
> (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
>
> (BRASIL, 2018, p.536).

Logo, conseguimos compreender que para o ensino da Trigonometria é importante ser introduzido ainda no ensino fundamental como recomenda a BNCC, de forma indireta, e as Propostas Curriculares da Paraíba para que no ensino médio o processo de ensino e aprendizagem consiga prosseguir sem maiores dificuldades nestes conteúdos.

4.2 A FORMAÇÃO INICIAL DOS DOCENTES E A TRIGONOMETRIA

Tão importante quanto ter este conteúdo nos currículos dos anos finais do Ensino Fundamental é entender como tais conceitos são abordados no processo de formação dos professores em seu período de graduação, tendo em vista que estes atuarão diretamente nas salas de aula e terão forte influência na aprendizagem de seus alunos.

Walle (2009, p. 19) afirma que "[...]é você, o professor, que dará forma à matemática que você ensina às crianças. As suas convicções sobre o que significa *saber* e *fazer* matemática [...] terão um impacto significativo sobre como você aborda o ensino da matemática." Mostrando que o professor tem um papel muito importante no processo de ensino e aprendizagem dos alunos e na forma a qual vai ser ensinado.

Moreira (2012) também escreveu:

> "Continuamos a formar (mal ou bem) o professor de matemática nos cursos de licenciatura; esses licenciados, eventualmente, vão trabalhar nas escolas, [...] participando da (boa ou má) formação escolar em matemática que essas instituições proporcionam aos seus alunos, alguns dos quais chegam aos cursos universitários de licenciatura em matemática e (bem ou mal) acabam se formando e retornando à educação básica como professores de matemática [...]" (MOREIRA, 2012, p.12).

Diante da realidade do ensino e aprendizagem dos alunos de nível básico, é fácil descrever o perfil de muitos aspirantes a professores em seus respectivos cursos de licenciatura. Não é à toa que o número de reprovação e evasão dos cursos da área das exatas ainda possui um número expressivo. Em sua pesquisa aplicada na Universidade Federal de Campina Grande, Cirne (2019) afirma:

> Ao concluir esse estudo, verificamos que o fracasso acadêmico da UFCG no campus de Campina Grande ocorre majoritariamente entre os cursos de Ciências Exatas e de Engenharia, tanto na Taxa Média de Evasão (TME), como na Taxa Média de Reprovação (TMR), essa última bem maior que os outros cursos, como os de Ciências Humanas e de Ciências da Saúde. (CIRNE, 2019, p.)

O autor também aponta que as disciplinas iniciais dos cursos de licenciatura, na UFCG, na maioria das vezes, são as principais causas de evasão e/ou reprovação dos discentes das licenciaturas de exatas. E, mesmo com a implementação e abrangência de Programas de Auxílio Estudantil, por exemplo, "4 cursos reprovaram mais [...] são eles: Eng. de Materiais, C. da Computação, Matemática e Meteorologia, aumentando a sua taxa de reprovação ao longo da série histórica depois dos anos 2008, 2009, 2010, a depender do curso." Tais dados são apenas do campus de Campina Grande, porém, podem ser facilmente percebidos em outros campus ou em outras universidades.

Também buscando respostas para a número elevado de evasão dos cursos de exatas, agora na Universidade de Brasília, Souza (2016) defende que a evasão desses cursos está intimamente ligada a reprovações nas disciplinas de Cálculo 1, Cálculo 2 e Introdução a Álgebra Linear, disciplinas que possuem em sua proposta curricular uma grande aplicabilidade de conceitos trigonométricos.

Claro que existem vários fatores que podem influenciar esse fim. Entre elas, questões econômicas dos alunos, dificuldades de locomoção e, até mesmo, falta de apoio necessário para sua permanência no curso. Porém, um forte fator é a defasagem na bagagem de conhecimentos dos discentes referente aos conceitos de nível básico. Dificuldades na linguagem matemática, na compreensão das definições e abrangência de funções e, principalmente da familiaridade com conceitos trigonométricos como: caracterização do círculo trigonométrico, transformação de suas unidades de medida (graus e radianos), as razões trigonométricas, funções trigonométricas, manipulação e plotagem dos gráficos de funções trigonométricas, bem como, a compreensão e aplicação das identidades trigonométricas tem se tornado empecilhos na formação de vários graduandos.

Segundo Nacarato e Santos (2004) e Gomes (2013), um percentual expressivo dos ingressantes em curso de Ensino Superior da área das ciências exatas inicia o curso sem o devido conhecimento sobre os tópicos elementares de Geometria Euclidiana. Ainda apontam que isso implicará diretamente na aprendizagem de novos conceitos, principalmente em relação aos da trigonometria, bem como na sua desenvoltura em sala de aula futuramente, caso isso não seja revertido.

Falando especificamente do curso de Licenciatura em Matemática, Galvão, Souza e Miashiro (2016) e Nabie (2018) ressaltam que os acadêmicos apresentam certa resistência quando se deparam com a necessidade de aplicar ou aprofundar os conceitos trigonométricos pelo fato de não terem conseguido, na educação básica, desenvolver habilidades suficientes para a compreensão eficaz de tais concepções.

> Apesar das exigências curriculares indicarem a pertinência do estudo da Trigonometria, a literatura da área de Educação Matemática e Ensino de Ciências e Matemática sinaliza que grande parte dos licenciandos demonstram dificuldades conceituais, procedentes da etapa de escolarização, em Geometria e Trigonometria. Em alguns casos, tais objeções perduram ao longo

> do curso, afetam o desempenho acadêmico e estimulam uma atuação profissional sem domínio teórico-metodológico e rodeada de lacunas que não foram suprimidas na academia (SOUSA, 2022, p. 18)

Diante disso, há a necessidade de intervir e reverter essa situação. Para tanto, os currículos das Instituições de Ensino Superior (IES), pautados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) devem oferecer toda e qualquer experiência que possa atingir esse alvo.

Tais Diretrizes, que vêm tendo constantes atualizações (sendo a última em 2019), determinam que as universidades, por meio de seus Núcleos Docentes Estruturantes (NDE) revejam a formação inicial de professores, permitindo-lhes que estes sejam, cada vez mais, preparados por meio de novos procedimentos de aprendizagem, novos formatos avaliativos, a criação de disciplinas de apoio que objetivam um aperfeiçoamento na compreensão e aprendizagem dos discentes em relação aos temas supracitados, por exemplo, a fim de alicerçar sua prática docente e a torne efetiva, suprindo, assim, as necessidades de aprendizagem e de seu futuro ambiente de trabalho.

5. METODOLOGIA

A estrutura desse trabalho leva em conta os princípios e enfoques da pesquisa qualitativa. Tal metodologia foi escolhida por tratar-se de uma abordagem onde se objetiva um papel ativo e pensante do indivíduo, como defende Minayo (2010, p. 18). Nela, a valorização dos processos de construção e a interligação entre teoria e prática são pontos imprescindíveis para que todo o processo atinja uma melhor significação dos resultados almejados.

> “A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, como um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo dos significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitues, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operação de variáveis (MINAYO, 2009, p. 21-22).

Além disso, a metodologia permite uma avaliação contínua e criteriosa dos dados levantados e, assim, uma melhor interpretação da situação que envolve os sujeitos.

Sendo assim, o presente trabalho busca descobrir de que forma a perspectiva de Resolução de Problemas contribui para o ensino e aprendizagem da Matemática das relações trigonométricas no triângulo retângulo em turmas de 9° ano do ensino fundamental?

Para tanto, pretendemos mostrar a perspectiva de Resolução de Problemas como meio facilitador no ensino e aprendizagem da Matemática.

- Apresentar um breve histórico do processo de evolução da perspectiva de Resolução de Problemas no ensino da Matemática nas propostas norteadoras dos currículos das escolas básicas no Brasil;
- Apresentar como a metodologia de Resolução de Problemas pode ser usada como ponto de partida para a introdução do ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Assim, escolhemos alunos de uma turma de 9° ano de uma escola privada de ensino fundamental da cidade de Nova Floresta-PB como sujeitos dessa pesquisa. No total, esta pesquisa foi aplicada com 11 alunos que compõem a turma da referida escola.

Para essa abordagem, utilizamos três momentos. No primeiro, foi-lhes disponibilizado um problema no qual eles fariam uma aplicação do teorema de Pitágoras para solucioná-lo. Logo depois, foi proposta uma adaptação deste problema para introduzir os conceitos iniciais das razões trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente no triângulo retângulo. E, por fim, houve uma aplicação prática de tais conceitos.

As atividades executadas com a turma supracitada discorreram em um período de 10h/a (hora/aulas) de 45 minutos cada. Vale salientar que os alunos já haviam estudado os conceitos de Semelhança de Triângulos e das Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

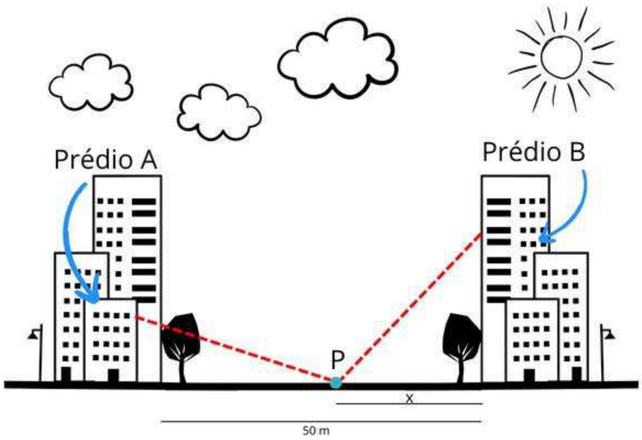
6. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES REALIZADAS UTILIZANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A princípio, os alunos foram separados em três grupos. Dois deles com quatro alunos e um com três. O grupo 1 preferiu ser chamado de “Os Emos Rosa”(ER), o grupo 2 de “Os Cuca Quente”(CQ) e o grupo 3 de “Quarteto Mágico”(QM).

Posteriormente, os três grupos foram direcionados a uma praça onde cada um deles escolheu o melhor lugar para se abrigarem e, logo em seguida, lhes foi disponibilizado o problema 1 para o qual eles deveriam buscar uma solução. O problema consistia em:

> “**(CEFET-MG):** Duas crianças, cada uma em um prédio diferente, brincam com canetas lasers nas janelas de seus apartamentos, apontando para um ponto na quadra situada entre os prédios. A criança do prédio **A** está a uma altura de 10 m, e a do prédio **B**, a uma altura de 20 m do chão. A distância entre os prédios é de 50 m. Em um determinado momento, os lasers das crianças atingem, simultaneamente, um ponto P do pátio equidistante das crianças, tal como na ilustração abaixo:”

Figura 4. Esquematização do problema 1



Fonte: Elaboração da autora

Para o problema proposto, teríamos a seguinte solução:

Por meio do teorema de Pitágoras, obtemos as seguintes equações:

$$(1)\ d^2 = 10^2 + (50-x)^2 \quad \text{e} \quad (2)\ d^2 = 20^2 + x^2$$

Como o problema afirma que os comprimentos dos lasers são iguais, podemos fazer:

$$10^2 + (50-x)^2 = 20^2 + x^2$$

Daí,

$$100 + 2\,500 - 100x + x^2 = 400 + x^2$$

$$100 + 2\,500 - 100x = 400$$

$$2\,600 - 100x = 400$$

$$2\,600 - 400 = 100x$$

$$2\,200 = 100x$$

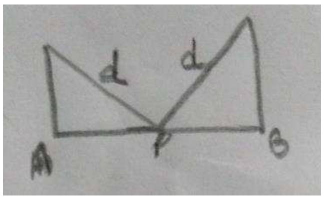
$$2\,200/100 = x$$

$$22 = x \qquad \square$$

Após a disponibilização do problema, os alunos foram orientados a ler e buscar interpretá-lo de forma eficiente. Buscando identificar, no texto, elementos que lhes fossem conhecidos. “Joana, dá para notar que é algo relacionado aos triângulos retângulos” – disse um integrante do grupo (ER).

Os outros dois grupos tiveram a mesma percepção, posteriormente. Então foi-lhes perguntado: “Como vocês chegaram a essa conclusão?” Ao que responderam: ”os prédios estão posicionados de forma perpendicular ao solo e em relação ao ponto P, o que dá pra formar um triângulo retângulo se considerar a posição das crianças, a base do prédio e o ponto P no pátio.”.

Figura 5. Descrição do grupo Emos Rosa sobre as posições destacadas acima

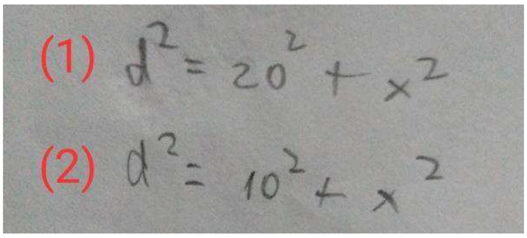


Fonte: Autoria da pesquisadora

Os Grupos Emos Rosa e Cuca Quente destacaram que deveriam aplicar uma das Relações Métricas no Triângulo Retângulo para encontrar o valor requerido na questão. Já o grupo Quarteto Mágico, demorou um pouco mais para apresentar alguma estratégia.

Aos outros grupos, foi lhes questionado qual relação métrica seria a mais eficiente, já que tiveram essa ideia. Entretanto, eles não conseguiram identificar uma relação que fosse a mais adequada. Nesse momento, a fim de fazê-los refletir sobre suas percepções, foi-lhes questionado: “Quantos triângulos temos na situação?” ao que responderam: “Dois”. E em seguida: “Esses dois triângulos têm algo em comum?” Os Cuca Quente responderam: “O ponto P”. Entretanto, eles acabaram se equivocando e acreditando que o ponto P seria o ponto médio da distância entre os dois prédios. E, como essa distância era de 50m, eles acreditaram que $\overline{PB}$ seria igual a 25m. E, assim, eles encontraram duas equações que poderiam determinar a medida de x. que foram:

Figura 6. Primeiras equações encontradas pelos Cuca Quente



Fonte: Autoria da pesquisadora

Entretanto, essas não se tratavam das equações que correspondiam verdadeiramente à situação, pois P não é o ponto médio da distância dos prédios. Seguir com essa ideia chegaria a uma solução irreal do problema. Daí iniciou-se o processo de fazê-los compreender e alinhar todas as informações do texto para pudessem interpretá-lo, de fato, e, assim, pudessem construir uma solução satisfatória para o problema.

Essa afirmação pode ter se dado pelo fato de, no enunciado do problema, ser dito:

"Em um determinado momento, os lasers das crianças atingem, simultaneamente, um ponto P do pátio <u>equidistante das crianças</u>,"

Entretanto, a expressão "equidistante" refere-se ao comprimento do laser. E não ao seguimento formado pelo ponto P e os prédios.

Somente depois de algum tempo é que os três grupos conseguiram identificar essa diferença. E, assim, entender que deveriam aplicar o teorema de Pitágoras. Logo depois surgiu outra dificuldade. Ao perceberem que não poderiam tomar o ponto P como ponto médio, eles sentiram muita dificuldade em determinar uma expressão que representasse os catetos dos triângulos encontrados. Nesse momento, o Quarteto Mágico começou a se desestimular por sentirem uma maior dificuldade.

Então lhes foi orientado que lessem novamente o problema e buscassem informações que pudessem ajuda-los a identificar as medidas dos triângulos. Depois disso, foi-lhes perguntado: "qual a hipotenusa dos dois triângulos?" ao que disseram: "o comprimento dos lasers ("d" que é igual para os dois)." E as alturas dos triângulos? (cateto que representava a altura onde as crianças estavam posicionadas em relação ao solo)" Ao que apontaram: "no triangulo 1, é 10m. E no 2 é 20m.". Para a distância entre os prédios e o ponto P, foi-lhes perguntado: "Como podemos determinar esses comprimentos?" eles disseram: "a gente só sabe que a distância total entre os prédios é 50m. E a distância entre P e o prédio B é x. Não tem como determinar a distância entre o prédio A e o ponto P." Então foi utilizado o próprio argumento deles para fazerem perceber que estavam próximos da resposta. Foi-lhes dito: "O total das distâncias dos prédios é de 50m. Suponham que x = 10m. Quanto mediria o restante?” Eles responderam:”40m!”. Então, um dos integrantes do grupo perguntou com tom de afirmação: ”Quer dizer que a expressão que representa o cateto AC é ‘50 – x’?”. -“Isso mesmo”.

Os três grupos apresentaram a mesma dificuldade em relacionar esses comprimentos. Porém, quando foram orientados com argumentos semelhantes aos destinados ao grupo QM, todos chegaram às mesmas conclusões.

Figura 7. Descrição das equações que o Quarteto Mágico encontrou.

$$d^2=20^2+x^2 \text{ e } d^2=60^2+(50-x)^2$$

Fonte: Autoria da pesquisadora

Assim que todos conseguiram chegar nesse ponto, atingir o resultado final foi mais prático.

Vale salientar que a maior preocupação não era que os alunos acertassem a resposta independente de qualquer coisa. Mas, que eles compreendessem de forma eficaz o problema e pudessem fazer a aplicação do teorema de forma que isso fizesse sentido para eles e não, somente, reproduzissem regras e definições pré-estabelecidas. E como defende Andrade (1998), como já mencionado, o processo entre a entrega do problema e a resposta, certa ou errada, disponibiliza um processo que pode ser rico em conhecimento, desde que se utilize dessa oportunidade para construir algo significativo.

Logo após a conclusão dessa primeira etapa, os alunos foram direcionados para a segunda parte. Nela, foram feitas algumas mudanças no problema acima a fim de se iniciar a introdução das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Feitas as devidas adaptações, o problema se estendeu da seguinte maneira:

“Agora, imagine que a criança do prédio B tenha subido alguns andares do prédio e continue a atingir o ponto P no pátio entre os dois prédios com o laser. Sabendo que ao atingir o ponto P, o laser forma um ângulo de 60°, a que altura a criança está em relação ao solo?”

Ao problema ser entregue aos alunos, eles foram orientados a lê-lo e identificar quais as diferenças que podiam perceber em relação ao problema proposto anteriormente. Eles destacaram que a medida da hipotenusa e o cateto que é a altura do triângulo em relação ao solo teriam suas, respectivas, medidas alteradas. O que poderia implicar no impedimento de se utilizar o teorema de Pitágoras novamente.

Diante disso, eles foram desafiados a procurarem uma estratégia que pudesse os levar à solução do problema. Alguns alunos se sentiram inseguros de o fazer, no entretanto, começaram a pensar em algo.

Então, foi perguntado quais os elementos utilizados nessa questão que poderiam ser úteis. E eles apontaram que a medida de PB = 22 e $\hat{p} = 60°$, mesmo que de forma inconsciente quanto a veracidade dessa informação.

A partir daí, foi-lhes chamado a atenção para a possível relação que poderia surgir entre essas informações. Apesar de eles estarem familiarizados com a ideia de correlacionar apenas os lados do triângulo, nesse caso poderíamos utilizar uma relação que envolvesse também os seus ângulos, em específico, $\hat{p} = 60°$. Nesse momento, alguns membros do grupo sentiram uma certa dificuldade de interpretar isso. Entretanto, essa foi a oportunidade necessária para fazermos a análise de como encontrar o cateto oposto (CO) e o cateto adjacente (CA) para quaisquer ângulos internos a triângulos retânculos.

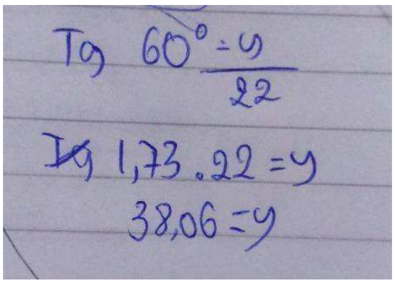
Assim, pôde se introduzir a noção do seno, cosseno e tangente desse ângulo. Que, por meio da semelhança de triângulos, pode ser definida por:

$$\text{Sen } \alpha° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \quad ; \text{Cos } \alpha° = \frac{cateto\ adjascente}{hipotenusa} \quad ; \text{Tg } \alpha° = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjascente}.$$

Depois de construirmos a ideia conceitual de tudo isso, eles perceberam que uma dessas razões poderia determinar a medida objetivada.

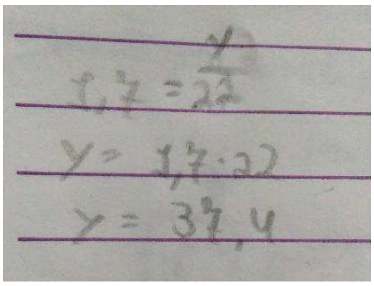
Dois dos grupos apontaram que a razão certa seria a tangente. E assim fizeram:

Figura 8. Grupo Quarteto fantástico



Fonte: autoria da pesquisadora

Figura 9. Grupo Emos Rosa



Fonte: autoria da pesquisadora

Tais resoluções têm o mesmo princípio, foi utilizada a tangente de 60°. No caso dos Emos Rosa, eles fizeram um arredondamento que fez com que seu resultado fosse um pouco divergente do resultado do Quarteto Fantástico. Nesse caso, as duas respostas podem ser consideradas do ponto de vista metodológico. Ambos reconheceram a razão que poderia lhes dar a reposta correta para o problema. A única diferença é que o Emos Rosa utilizou um arredondamento para o valor da tangente de 60° com o objetivo de facilitar os cálculos. Do ponto de vista do rigor numérico, essa atitude ocasionou uma discrepância de 0,66m. O que, na vida real, poderia causar algum problema, a depender da situação.

Os Cuca Quente escolheram a utilizaram o cosseno, entretanto, não conseguiram chegar a um resultado pertinente em decorrência de tempo de aula ter se esgotado.

O terceiro momento da intervenção objetivou uma aplicação prática de tais conceitos.

Previamente, foi-lhes solicitado que conseguissem instrumentos de medição (trenas métricas) e o aplicativo AngleMeter. Com este aplicativo, é possível determinar ângulos a partir de dois seguimentos de mesma origem que podem se mover pela tela do smarthphone conforme seja necessário.

Os alunos foram instruídos quanto ao uso do aplicativo e lhes foi orientado que cada grupo escolhesse um objeto cuja altura fosse desconhecida e eles pudessem calcular por meio de uma das razões trigonométricas estudadas.

Os Emos Rosa escolheram a altura de um corredor da escola, os Cuca Quente a altura que uma viga que ficava ao lado da secretária estava em relação ao chão e o Quarteto Mágico escolheu calcular a altura da porta da cantina.

Inicialmente, eles deveriam tirar fotos dos lugares que escolheram e logo depois teriam que formar um triângulo retângulo na qual sua altura fosse representada pela altura do objeto ou lugar que eles haviam escolhido.

Figura 10. Integrantes do Quarteto Mágico tirando a foto do local escolhido

Fonte: autoria da pesquisadora

Nesse processo, os alunos foram orientados a posicionarem os celulares o mais perpendicular possivel para evitar erros tão expressivos no momento de calcular.

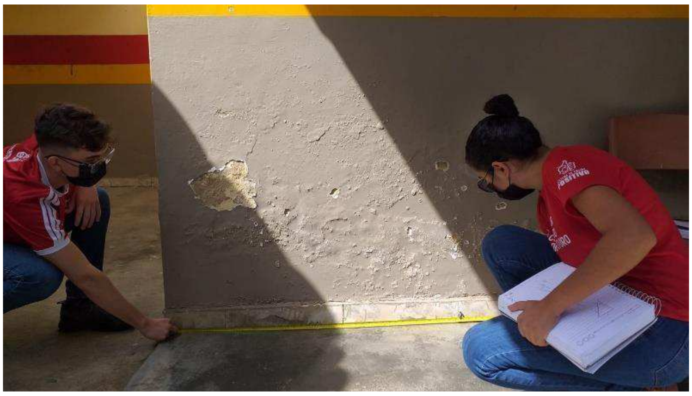
Figura 11. Triângulo formado no AngleMeter

Fonte: Interface do AngleMeter

Feito isso, eles deveriam decidir qual razão trigonométrica lhes permitiria calcular as alturas almejadas. Ao decidirem, precisariam descobrir as dimensões do triângulo que contribuiriam para essa descoberta.

Os três grupos chegaram ao consenso de que a tangente seria a ideal. Porém, deveriam descobrir a medida do cateto da base de cada triângulo e isso seria feito com a trena métrica. Como mostra a imagem abaixo:

Figura 12. Metragem da base do triângulo formado



Fonte: autoria da pesquisadora

Nesse momento, precisei auxiliar posicionando a fita métrica pois no chão haviam alguns ganchos que poderiam alterar a metragem do comprimento estudado.

A partir daí, os alunos puderam aplicar o conceito da tangente do ângulo dado e puderam descobrir as alturas de seus objetos de estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das experiências trocadas em sala com essa pesquisa, verificou-se a eficácia dessa metodologia de ensino. O processo de aprendizagem foi muito mais significativo do que com aulas meramente teóricas e tradicionais onde apenas o professor é o protagonista. Nela, os discentes tornam-se formadores do seu conhecimento e puderam participar do processo de construção de conceitos de forma bem mais ativa. E, apesar de haver os momentos em que se fosse necessário alguma explicação mais técnica e conceitual onde se precisasse apontar ou recordar algumas definições, a participação dos alunos foi constante por um tempo muito mais duradouro em relação a aulas meramente expositivas.

Sob a perspectiva da Resolução de Problemas, os alunos puderam desenvolver seu senso crítico e racional ao se deparar com respostas que não faziam sentido para o problema e retomar ao caminho que pudesse lhes oferecer um final promissor, com as orientações do professor. E, não só objetivando o fim, mas aproveitando o processo de busca de estratégias para identificar e sanar possíveis dúvidas e dificuldades que possuíssem, puderam perceber o verdadeiro sentido de se fazer matemática.

No entanto, alguns pontos podem se tornar empecilhos na prática dessa metodologia. Um deles é que, se o aluno não se sentir motivado a resolver o problema, ele não assumirá o papel de protagonismo nessa prática e a aula pode voltar a se tornar desinteressante.

Outro aspecto que pode não contribui muito para que essa prática seja aplicada de forma constante, é que ela demanda mais tempo que o normal para ser concluída. E, com o padrão de tempo que, normalmente, é disponibilizado para as aulas e a demanda de conteúdos a serem estudados por currículo, talvez este não seja suficiente para se iniciar e findar o processo de forma proveitosa sempre.

Apesar disso, essa metodologia se mostrou eficaz no processo de ensino e aprendizagem na aplicação dessa pesquisa. Pois, para que ela seja eficiente, tanto o professor, quanto os alunos precisam sair da zona de conforto e construírem juntos uma aprendizagem significativa. O professor, no processo de planejamento e instigação dos alunos na hora da prática. E o aluno, ao assumir e reconhecer a necessidade dele interagir como um ser pensante e ativo em todo o processo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, S. Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 1998.

BAGGIO, Sandra B. (Et. Al) Psicopedagogia da aprendizagem. Rev. psicopedag. vol.23 no.72 São Paulo 2006.

BORBA, M de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasil no Pisa 2018 [recurso eletrônico]. – Brasília : Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, pg. 144, 2020. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/relatorio_brasil_no_pisa_2018.pdf (Acessado em 08 de junho de 2022)

DEVLIN, Keith, O Gene da Matemática: A evolução do pensamento matemático: O que é a matemática. Rio de Janeiro: Record, 2006.

95% dos alunos saem do ensin–o médio sem conhecimento adequado em matemática**. Exame.**. 2021**.** Disponível em: https://exame.com/brasil/95-dos-alunos-saem-do-ensino-medio-sem-conhecimento-adequado-em-matematica/ (Acesso em 08 de junho de 2022)

LESTER JR, Frank K.; D'AMBROSIO, Beatriz Silva. Tipos de problemas para a instrução Matemática no primeiro grau. Bolema-Boletim de Educação Matemática, v. 3, n. 4, p. 33-40, 1988.Acessado em: 04/042022.

MOREIRA, P. C. et al. Quem quer ser professor de matemática?. Zetetiké, São Paulo, v. 20, n. 37, p. 11-32, 2012.

PARAÍBA. Secretaria de Educação e Cultura. Proposta Curricular d Estado da Paraíba / Governo do Estado da Paraíba. Secretaria de Educação e Cultura. Gerência Executiva da Educação Infantil e Ensino Fundamental. – João Pessoa: SEC/Grafset, 2018. Pg. 285.

PARAÍBA. Secretaria de Educação e Cultura. Proposta Curricular d Estado da Paraíba / Governo do Estado da Paraíba. Secretaria de Educação e Cultura. Gerência Executiva da Educação Infantil e Ensino Fundamental. – João Pessoa: SEC/Grafset, 2018. Pg. 283.

POLYA, George. (1995). A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2° reimpressão. Rio de Janeiro.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema-Mathematics Education Bulletin**, p. 73-98, 2011.

PINTO, Márcia. F e Sheiner Thorsten. Sobre processos de apresendizagem da Matemática e suas Funções Epistemológica, conceitual e cognitiva.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). New Directions for Elementary School Mathematics. Reston: NCTM, 1989. p.31 - 42.

STANIC, G. M., & Kilpatrick, J. (1989). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In R. I. Charles, & E. A. Silver (Eds.), The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM/Lawerance Erlbaum Associates.

ANEXOS

UNIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE - UFCG

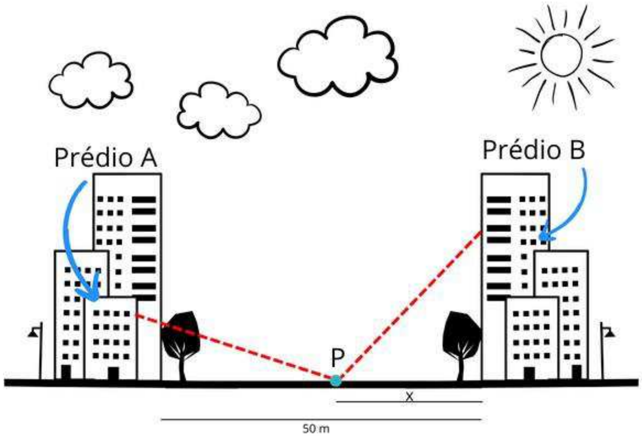
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA - UAFM

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

"**(CEFET-MG):** Duas crianças, cada uma em um prédio diferente, brincam com canetas lasers nas janelas de seus apartamentos, apontando para um ponto na quadra situada entre os prédios. A criança do prédio **A** está a uma altura de 10 m, e a do prédio **B**, a uma altura de 20 m do chão. A distância entre os prédios é de 50 m. Em um determinado momento, os lasers das crianças atingem, simultaneamente, um ponto P do pátio equidistante das crianças, tal como na ilustração abaixo:"

Figura 4. Esquematização do problema 1



a) Qual o comprimento do laser?

b) Agora, imagine que a criança do prédio B tenha subido alguns andares do prédio e continue a atingir o ponto P no pátio entre os dois prédios com o laser. Sabendo que ao atingir o ponto P, o laser forma um ângulo de 60°, a que altura a criança está em relação ao solo