UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ WILLIAM SOUZA DA SILVA

Introdução a Topologia Geral

CUITÉ - PB

2022

JOSÉ WILLIAM SOUZA DA SILVA

Introdução a Topologia Geral

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Martins Barros

CUITÉ - PB

2022

S586i Silva, José William Souza da.

Introdução a topologia geral. / José William Souza da Silva. - Cuité, 2022.

67 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2022.
"Orientação: Prof. Dr. Luciano Martins Barros".
Referências.

1. Topologia. 2. Topologia geral. 3. Espaços tópicos. 4. Espaços métricos. 5.Funções contínuas. 6. Conjuntos compactos. 7. Conjunto conexo. I. Barros, Luciano Martins. II. Título.

CDU 515.1(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

JOSÉ WILLIAM SOUZA DA SILVA

Introdução a Topologia Geral

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Luciano Martins Barros - UFCG

(Orientador)

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Prof. Ma. Maria de Jesus Rodrigues da Silva - UFCG

(Membro da Banca)

Glageane da Silva Souza

Prof. Drª. Glageane da Silva Souza - UFCG

(Membro da Banca)

CUITÉ - PB

2022

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo introdutório sobre Topologia Geral. Baseamos em uma pesquisa bibliográfica, onde utilizamos como livro texto [2]. A escolha para desenvolver esta pesquisa se deu através do interesse em compreender conceitos matemáticos envolvidos neste área. Estudamos vários conceitos importantes, tais como os Espaços Métricos, Funções Contínuas, Conjuntos Compactos e Conjuntos Conexos. Por fim estudamos os espaços topológicos que é objeto principal deste trabalho.

Palavras-chave: Espaços Métricos, Funções Contínuas, Conjuntos Compactos, Conjunto Conexo, Espaço Topológico.

ABSTRACT

In this work we carry out an introductory study on General Topology. We based on a bibliographical research, where we used [2] as a textbook. The choice to develop this research was based on the interest in understanding mathematical concepts involved in this area. We study several important concepts, such as Metric Spaces, Continuous Functions, Compact Sets and Connected Sets. Finally, we study the topological spaces that are the main object of this work.

Keywords: Metric Spaces, Continuous Functions, Compact Sets, Connected Set, Topological Space.

Dedicatória

A minha mãe Joanice, minha vó Rita e minha irmã Yasmin.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e a minha família, minha mãe Joanice, minha avó Rita, minha irmã Yasmin e a minha namorada Hyana por sempre acreditarem em mim, e me motivarem a ser melhor a cada dia.

Durante está caminhada no curso tive o privilégio de conhecer diversas pessoas e amigos que sempre me incentivaram, ajudaram e acreditaram em mim, mesmo quando eu mesmo não acreditei. Em especial agradeço a, Anderson, Leandro, Samara, Filipe, Loandson, Marcos Sérgio, André entre outros, pelos momentos de alegria e descontração.

Aos professores da Unidade Acadêmica de Física e Matemática da UFCG - CES. Em especial ao professor Luciano Barros por toda a sua dedicação, esforço, paciência, compreensão e por ser muito mais que apenas um professor, um amigo, o qual pude receber conselhos, desabafar, receber forças nas horas de desanimo, por todo apoio e empenho nessa orientação.

As professoras Glageane Souza e Maria de Jesus por terem aceitado o convite de participar da banaca examinadora deste trabalho e por toda paciência e compreensão.

Ao CAPES e a UFCG pela concessão de bolsas com as quais consegui me manter e continuar com os meus estudos. Sendo assim, agradeço a todos que contribuíram e me apoiaram de maneira direta ou indireta, o meu muito obrigado.

"E tudo quanto pedirdes em oração, crendo, recebereis!"

(Mateus 21:22)

Sumário

Introdução 1

1 Espaços Métricos **3**

1.1 Noções de Métrica 3

1.2 Métricas Equivalentes 6

1.3 Bolas e esferas 12

1.4 Conjuntos Limitados 15

1.5 Sequências em Espaços Métricos 16

1.6 Limite de sequências 17

1.7 Sequências em espaços vetoriais normados 19

1.8 Conjuntos Abertos 20

1.9 Conjuntos fechados 23

2 Funções Contínuas **28**

2.1 Isometria 29

2.2 Funções Uniformemente Contínuas 33

3 Conjuntos Compactos e Conexos **35**

3.1 Compacidade e Continuidade Uniforme 38

3.2 Continuidade e Compacidade 38

3.3 Conexos 39

3.4 Aplicação 40

3.5 Conexidade por Caminhos 41

4 Topologia 43

4.1 Notas históricas sobre a Topologia 43

4.2 Introdução a Topologia 45

4.3 Topologia das Funções Contínuas 49

4.4 Topologia dos Compactos 49

4.5 Topologia dos Conexos 50

5 Considerações Finais 51

Referências 52

Introdução

A Matemática, bem como seus ramos, encontra-se bastante ampla e desenvolvida. Mas, ainda assim, existem lacunas a serem preenchidas, uma vez que cada resultado gera novos questionamentos. Durante o século XX, muitos dos conceitos básicos da Matemática passaram por evoluções e generalizações notáveis, e áreas de importância fundamental como a Teoria dos Conjuntos, Álgebra Abstrata e Topologia que, conforme [6], tem uma vasta quantidade de aplicações.

Diante deste fato, fica óbvia a importância de ter uma base relevante de "ferramentas"que, neste caso, podem ser: definições, proposições, exemplos, dentre outros. O estudo dos espaços métricos busca obter uma generalização do Cálculo, da Análise ou da Geometria, visando resolver problemas mais amplos. Desta maneira, esses espaços podem ser utilizados com frequência para resolver problemas que estão sendo estudados, como também para abrir novas possibilidades, o que coloca em exposição a sua importância. Assim, podemos observar o quão extenso pode ser o potencial dos espaços métricos.

Por outro lado, um dos grandes resultados sobre os espaços métricos é a Topologia. Que segundo [2] é composta por dois ramos principais: topologia geral ou conjuntista e a topologia algébrica ou combinatória. A topologia geral tem como ferramenta a teoria dos conjuntos, por outro lado, a topologia combinatória usa a álgebra, em particular com a teoria dos grupos. De maneira específica, focaremos na topologia geral ou conjuntista. A importância de se estudar esse tema é que ele tem grande relevância em nossa atualidade pelo fato de mostrar a generalização de alguns conceitos importantes introduzidos nos espaços métricos, tais como os de conjunto aberto, conjunto fechado, funções contínuas conjuntos compactos e conjuntos conexos, entre outros.

O objetivo deste estudo é realizar uma revisão de bibliográfica sobre o tema de Introdução a Topologia, do autor [2]. Nesse contexto, o desenvolvimento de uma revisão da literatura sobre o tema proposto, poderia contribuir com a solução destes problemas, uma vez que as revisões têm a função de possibilitar uma análise sobre um determinado assunto a partir de diferentes perspectivas, auxiliando em sua compreensão [7].

Para essa finalidade, substituiremos a noção de métrica, sobre o qual se apoia toda a construção da teoria dos espaços métricos pelo conceito de topologia que em muitas perspectivas é mais amplo. Para podermos realizar nossos objetivos, serão precisos ferramentas e resultados preliminares, que estão presentes em 4 capítulos.

No Capítulo 1 será composto da definição e exemplos de espaços métricos, bem como os conceitos de bolas e esferas, métricas equivalentes, conjuntos limitados, e sequências em espaços métricos e e topologia em espaço métricos, onde serão expostos os conceitos de limite de sequências, sequências em espaços vetoriais normados, conjuntos abertos e conjuntos fechados. Esses resultados foram baseados em [2], [5] e [6].

No Capítulo 2, tendo como referência [2] e [5] será apresentada as funções contínuas, mais especificamente, definição e exemplos, isometria e funções uniformemente contínuas.

No Capítulo 3, serão exibidos, os conjuntos compactos e conexos, ou seja, definição e exemplos, baseando-se em [2], [5] e [4].

No Capítulo 4 será apresentado uma introdução aos estudos dos espaços topológicos, o qual é objetivo principal do nosso trabalho. As referências utilizadas neste capítulo foram [2] e [3].

Finalmente, encerramos este trabalho fazendo as considerações finais e apresentando as referências.

Capítulo 1

Espaços Métricos

Neste capítulo apresentaremos as noções básicas sobre Espaços Métricos bem como alguns dos principais exemplos de espaço métrico. Os conceitos e resultados apresentados neste capítulo são fundamentais para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho. Para um estudo mais aprofundado ver [5].

1.1 Noções de Métrica

Definição 1.1.1 *Uma métrica em um conjunto não vazio M é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de elementos $x, y, z \in M$ um número real $d(x, y)$, que satisfaz as propriedades:*

(M_1) $d(x, y) \geq 0, \forall\, x, y \in M;$

(M_2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

(M_3) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M;$

(M_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M.$

Chamaremos o par (M, d) de Espaço Métrico.

O número real $d(x, y)$ descrito é chamado de distância de x a y. Chamaremos os elementos do conjunto M de pontos. Assim, poderemos definir o que é um espaço métrico.

Definição 1.1.2 *Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M.*

Vejamos agora alguns dos principais exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.1.3 (A Reta real) *Considere $M = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e a função*

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Vamos verificar se d é uma métrica.
Na prática,

(M_1) $d(x, y) = |x - y| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$*;*

(M_2) *segue que,* $|x - y| = 0$*, então* $x - y = 0$*. Logo,* $x = y$*. Se* $x = y$ *então* $x - y = 0$*. Ou seja,* $|x - y| = 0$

(M_3) *segue que*

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(-1)(y - x)| \\ &= 1.|y - x| \\ &= |y - x|, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(M_4) *temos que*

$$|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

logo,

$$|z - y| = |y - z|,$$

ou seja,

$$|x - y| = |x - z| + |y - z|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Pelas propriedades de valor absoluto as condições de $(M1)$ à $(M4)$ são satisfeitas. Portanto,$(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.1.4 (O Espaço Euclidiano) *Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ definimos a métrica euclidiana como sendo,*

$$d(x, y) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Note que d acima define uma métrica em $\mathbb{R}^n$. *Para termos a certeza mostraremos que vale as quatro propriedades que definem uma métrica. Para este caso as propriedades de* (M_1) *à* (M_3) *são satisfeitas. Verificaremos apenas para a propriedade* (M_4), *para mostrar utilizaremos a desigualdade de* $Cauchy-Schwarz$ *no* $\mathbb{R}^n$ *cujo o enunciado é o seguinte: Se* $x_1,...,x_n$ *e* $y_1,...,y_n$ *são números reais arbitrários, então*

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i)\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Veja que para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ *vale a relação*

$$2ab\leq a^2+b^2,$$

daí, se $a=\sqrt{(x_1)^2+...+(x_n)^2}$ *e* $b=\sqrt{(y_1)^2+...+(y_n)^2}$, *temos que*

$$2.\frac{|x_i|}{a}.\frac{|y_i|}{b}\leq\frac{x_i}{a^2}+\frac{y_i}{b^2}$$

para qualquer i, *com* $1\leq i\leq n$. *Se somarmos em relação ao índice* i, *obtemos*

$$\frac{2}{a.b}.\sum_{i=1}^{n}|x_i.y_i|\leq 1+1,$$

portanto,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i.y_i|\leq a.b=\sqrt{(x_1)^2+...+(x_n)^2}.\sqrt{(y_1)^2+...+(y_n)^2},$$

que é a desigualdade de $Cauchy-Schawarz$.

Desta maneira, tome $x=(x_1,...,x_n),y=(y_1,...,y_n)$, *e* $z=(z_1,...,z_n)$ *pontos de* $\mathbb{R}^n$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i+z_i-y_i)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i)+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)\right]^{\frac{1}{2}}.\left[\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)\right]^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\\
&= \left[\sqrt{\sum_{i=i}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=i}^{n}(z_i-y_i)^2}\right]^2\\
&= [d(x,z)+d(z,y)]^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Logo, podemos concluir que a métrica euclidiana define uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.5 *Sejam* (M, d) *um espaço métrico e* $S \subset M$ *um subconjunto de* M *não vazio. Se considerarmos a função* $d := d\mid_{S\times S}$ *temos que* d *é uma métrica sobre* S *e portanto* (S, d) *é um espaço métrico. Nestas condições, dizemos que* (S, d) *é um subespaço métrico de* (M, d) *e que* $d\mid_{S\times S}$ *é chamada de métrica induzida por* d.

Exemplo 1.1.6 (Métrica "zero-um") *Qualquer conjunto não vazio* M *é um espaço métrico, basta considerar a métrica:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, \ se \ x = y \\ 1, \ se \, x \neq y \end{cases}$$

Note que tem dois casos para mostrar a métrica se $x = y = 0$ *e se* $x \neq y = 1$.

(M_1) $d(x, y) = 0$, *se* $x = y$ *ou* $d(x, y) = 1$, *se* $x \neq y$, $\forall x, y \in M$, *logo,*

$$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M;$$

(M_2) $d(x, y) = 0$, *se* $x = y, \forall x, y \in M$. *E se* $x = y, d(x, y) = 0, \forall x, y \in M$.

(M_3) Para $x = y$, *temos que*

$$d(x, y) = 0 = d(x, y);$$

se $x \neq y$ *segue que*

$$d(x, y) = 1 = d(y, x).$$

(M_4) Se $x = y$, *então*

$$d(y, x) + d(x, y) \geq 0 = d(x, z);$$

Se $x \neq z$ *então* $y \neq x$ *ou* $y \neq z$ *e assim, a desigualdade contínua é válida, pois*

$$d(x, y) + d(y, z) \geq 1 = d(x, z).$$

1.2 Métricas Equivalentes

Definição 1.2.1 *Diremos que* d *é equivalente a* d', *indicamos por* $d \sim d'$, *se para todo* $p \in M$ *e todo* $\varepsilon > 0$, *existir um* $\delta > 0$ *tal que* $B_d(p, \delta) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$. *Isto é,* $d \sim d'$ *se, e somente se, toda bola aberta segundo* d' *contém uma bola aberta de mesmo centro segundo* d.

Proposição 1.2.2 *Sejam d e d' métricas sobre o conjunto M. Se existirem números reais $r, s > 0$ tais que*

$$rd(x,y) \leq d'(x,y) \leq sd(x,y)$$

para quaisquer $x, y \in M$, então $d \sim d'$.

Demonstração: Seja p um ponto de M e consideremos a bola $B_d(p,\varepsilon)$. Mostraremos que

$$B_{d'}(p, r\varepsilon) \subset B_d(p,\varepsilon).$$

Dado $x \in B_{d'}(p, r\varepsilon)$, então $d'(x,p) < r\varepsilon$. Como $rd(x,p) \leq d'(x,p)$, obtemos que $rd(x,p) < r\epsilon$. Daí segue que $d(x,p) < \varepsilon$, assim $x \in B_d(p,\varepsilon)$.
Analisemos a bola $B_{d'}(p,\varepsilon)$ e provemos que

$$B_d\left(p, \frac{\varepsilon}{s}\right) \subset B_{d'}(p,\varepsilon).$$

De fato, dado $x \in B_d\left(p, \frac{\varepsilon}{s}\right)$ então $d(x,p) < \frac{\varepsilon}{s}$, e daí, $sd(x,p) < \varepsilon$. Mas,

$$d'(x,p) \leq sd(x,p),$$

portanto, $d'(x,p) < \varepsilon$ implica $x \in B_{d'}(p,\varepsilon)$.

■

Exemplo 1.2.3 *Vejamos agora as seguintes relações em $\mathbb{R}^n$.*

$$d_m(x,y) \leq d(x,y) \leq d_s(x,y) \leq nd_m(x,y).$$

Inicialmente, verifica-se a desigualdade $d_m(x,y) \leq d(x,y)$, para algum w com $1 \leq w \leq n$,

$$d_m(x,y) = |x_w - y_w|.$$

Mas,

$$|x_w - y_w| = \sqrt{(x_w - y_w)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = d(x,y).$$

Agora vamos verificar que $d(x,y) \leq d_s(x,y)$.
De fato,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + ... + |(x_n - y_n|^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2| + ... + 2|x_{n-1} - y_{n-1}| + |x_n - y_n|^2} \\ &= |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \\ &= d_s(x,y). \end{aligned}$$

Por fim, para provar a desigualdade $d_s(x,y) \leq nd_m(x,y)$ vamos supor que

$$|x_w - y_w| = max|x_i - y_i|, 1 \leq i \leq n,$$

daí,

$$|x_1 - y_1| \leq |x_w - y_w|, ..., |x_n - y_n| \leq |x_w - y_w|.$$

Consequentemente,

$$d_s = |x_1 - y_1| \leq |x_w - y_w| + ... + |x_n - y_n| \leq n|x_w - y_w| = nd_m(x, y).$$

Exemplo 1.2.4 (Espaços vetoriais normados) *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma norma em E é uma aplicação*

$$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

que associa cada vetor $w \in E$ a um número não real negativo $\|w\|$ que satisfaz:

(N_1) $\|w\| = 0 \Leftrightarrow w = 0;$

(N_2) $|\alpha w| = |\alpha|.\|w\|, \forall \alpha \in \mathbb{R};$

(N_3) $\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|\|, \forall u, w \in \mathbb{E}.$

Observação: Seja um espaço métrico vetorial E. Então

$$|\|u\|| - |\|w\|| \leq \|u - w\|, \forall u, w \in E.$$

Vamos mostrar que

$$-\|u - w\| \leq \|u\| - \|w\| \leq \|u - w\|, \forall u, w \in \mathbb{E}.$$

Note que,

$$\|w + u - u\| + \|u\| \leq \|w - u\| + 2\|u\|.$$

Somando-se $(-2u)$ em ambos os lados da inequação, obtemos

$$\begin{aligned} \|w\| - \|u\| &\leq \|w - u\| \\ &= \|(-1)(u - w)\| \\ &= \|(-1)\|.\|(u - w)\| \\ &= \|(u - w)\|. \end{aligned}$$

Isto é, $\|w\| - \|u\| \leq \|u - w\|$.

Multiplicando ambos os termos por (-1) tem-se

$$-\|u-w\| \leq \|u\| - \|w\|.$$

o que satisfaz a desigualdade.

Por outro lado,

$$\|u-w-w\| + \|w\| \leq \|u-w\| + 2\|v\|.$$

Somando $(-2\|w\|)$ em ambos os lados, temos que

$$\|u\| - \|w\| \leq \|u-w\|,$$

o que satisfaz a desigualdade.

Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial E munido de uma norma $\|.\|$, onde a função

$$d : E \times E \mapsto \mathbb{R}$$

$$(u,w) \longmapsto d(u,w) := \|u-w\|$$

é uma métrica em E.

De fato,

(M_1) $d(u,w) = \|u-w\| \geq 0, \forall u, w \in E.$

(M_2) $d(u,w) = \|u-w\| = 0 \Leftrightarrow u - w = 0 \Leftrightarrow u = w.$

(M_3) $d(u,w) = \|u-w\| = |-1|.\|u-w\| = \|(-1)(u-w)\| = \|w-u\| = d(w,u), \forall u, w \in E.$

(M_4) $d(u,w) = \|u-w\| = \|u-v+v-w\| \leq \|u-v\| + \|v-w\| = d(u,w) + d(v,w).$

Portanto,

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w).$$

Dessa forma, d é uma métrica em E.

Exemplo 1.2.5 (Espaço das Funções Limitadas) *Seja $B(W;R)$ o conjunto das funções limitadas de W em $\mathbb{R}$, isto é*

$$B(W;R) := \{f : W \to \mathbb{R}; f \text{ é limitada}\}.$$

Tem-se que $B(W;R)$ é uma espaço vetorial munido das operações de soma e produto por escalar, isto é,

$$(f+g) = f(x) + g(x), \forall f, g \in B(W;R);$$

$$(\alpha f) = \alpha f(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in B(W;R).$$

Neste espaço vetorial a função dada por

$$\|.\| : B(W;R) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \|f\|$$

onde $\|f\| := \sup\{|f(x)|; x \in W\}$ *é uma norma.*
Com isso, percebemos que $\|f\| \in \mathbb{R}$ *está bem definida, pois pelo fato de* f *ser limitada, existe* $\sup\{|f(x)|; x \in W\}$. *E ainda,* $\|f\| \in \mathbb{R}$, *para qualquer* $f \in B(W;R)$.
E também,
$N_1)\|f\| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in W \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in W.$
$N_2)$

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\| &= \sup\{|\alpha . f(x)|; x \in W, \alpha \in \mathbb{R}\} \\
&= \sup\{|\alpha| . |f(x)|; x \in W, \alpha \in \mathbb{R}\} \\
&= |\alpha| \sup\{|f(x)|; x \in W, \alpha \in \mathbb{R}\} \\
&= |\alpha| \|f\|.
\end{aligned}$$

$N_3)$ *Dadas* $f, g \in B(W;R)$, *então para qualquer* $x \in W$,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup\{|f(x)|; x \in W\} + \sup\{|g(x)|; x \in W\}.$$

Como esta soma é constante, ela é um limite superior do conjunto

$$\{|f(x) + g(x)|; x \in W\}$$

e então,

$$\sup\{|f(x) + g(x)|; x \in W\} \leq \sup\{|f(x)|; x \in W\} + \sup\{|g(x)|; x \in W\},$$

ou seja,

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Portanto, $B(W;R)$ *é uma espaço métrico. A métrica induzida pela norma em questão é dada por*

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in W\}$$

para quaisquer $f, g \in B(W;R)$.

Exemplo 1.2.6 (Espaço das funções contínuas em um intervalo fechado) *Representemos por $T([a,b])$ o conjunto das funções contínuas $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ com as operações de soma e produto usuais. Temos que $T([a,b])$ é um espaço vetorial.*
Neste espaço vetorial a função $\|.\|:T([a,b])\to\mathbb{R}$ definida por

$$\|f\| := \int_a^b |f(x)|dx$$

é uma norma em E.
Assim,
N_1) Como a função $|f(x)|$ é continua no intervalo $[a,b]$, além disso, $|f(x)|\geq 0, \forall x \in [a,b]$, se $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, então $|f|$ é identicamente nula, e consequentemente, $f(x)=0$.
Como mostraremos posteriormente

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow f = 0.$$

N_2)

$$\|\alpha f\| = \int_a^b |(\alpha f)(x)|dx = |\alpha| \int_a^b |f(x)|dx = |\alpha|\|f\|.$$

N_3)

$$\|f+g\| = \int_a^b |(f+g)(x)|dx = \int_a^b |(f(x)+g(x))|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx = \|f\|+\|g\|.$$

Portanto,

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f,g \in T([a,b]).$$

Logo, $T([a,b])$ é um espaço métrico vetorial normado, e portanto é um espaço métrico com a métrica induzida da norma dada por

$$d(f,g) := \|f+g\| = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx, \forall f,g \in T([a,b]).$$

Exemplo 1.2.7 (Um subespaço das funções reais limitadas) *Note que $T([a,b])$ pode ser considerado um subespaço vetorial de $B([a,b];\mathbb{R})$, pois toda função contínua definida em um conjunto compacto é limitada.*
Assim, $T([a,b])$ é um espaço métrico com métrica induzida de $B([a,b];\mathbb{R})$, isto é,

$$d(f,g) := \sup|f(x)-g(x)|; x \in [a,b], \forall f,g \in T([a,b]).$$

1.3 Bolas e esferas

Seja M um espaço métrico e p um ponto pertencente a M. Dado um número real $\varepsilon > 0$, definimos:

I) A bola aberta de centro p e raio ε, denotada por $B(p, \varepsilon)$, como o conjunto de pontos de M cuja distância ao ponto p é a menor que ε, ou seja,

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in M; d(x, p) < \varepsilon\}.$$

II) A bola aberta de centro p e raio ε, denotada por $B[p, \varepsilon]$, como o conjunto de pontos de M cuja distância ao ponto p é menor do que ou igual que ε, ou seja,

$$B[p, \varepsilon] = \{x \in M; d(x, p) \leq \varepsilon\}.$$

III A esfera de centro p e raio ε, denotada por $S(p, \varepsilon)$, como o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto p é igual a r, ou seja,

$$S(p, \varepsilon) = \{x \in M; d(x, p) = \varepsilon\}.$$

Observação: $B[p, \varepsilon] = B(p, \varepsilon) \cup S(p, \varepsilon)$, sendo a reunião disjunta. Visto que, quando a métrica d origina-se da norma do espaço vetorial E, podemos descrever:

- $B(p, \varepsilon) = \{x \in E; \|x - p\| < \varepsilon\}$;

- $B[p, \varepsilon] = \{x \in E; \|x - p\| \leq \varepsilon\}$;

- $S(p, \varepsilon) = \{x \in E; \|x - p\| = \varepsilon\}$.

Seja W um subespaço do espaço métrico M. Para cada $p \in W$ e cada $\varepsilon > 0$, seja $B_W(p, \varepsilon)$ a bola aberta de centro p e raio ε, relativamente à métrica induzida em W. Tem-se que

$$B_W(p, \varepsilon) = B(p, \varepsilon) \cap W$$

onde $B(p, \varepsilon)$ é a bola aberta de centro p e raio ε no espaço M. Analogamente, valem

$$B_W[p,\varepsilon] = B[p,\varepsilon] \cap W$$

e

$$S_W(p,\varepsilon) = S(p,\varepsilon) \cap W.$$

Exemplo 1.3.1 (Bolas num espaço M cuja métrica é zero-um) *Temos que com relação a bola aberta, há 2 casos a considerarmos:*

- *Se* $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$B(p,\varepsilon) = \{x \in M; d(x,p) < \varepsilon)\} = \{p\},$$

pois o único ponto cuja distância a p é menor que 1 é o próprio p.

- *Se* $1 < \varepsilon$,

$$B(p,\varepsilon) = \{x \in M; d(x,p) \leq \varepsilon\} = M,$$

porque todos os pontos de M estão a uma distância e p igual a 0 ou igual a 1, e portanto, menor que ε.
Com relação a bola fechada tem-se que

$$B[p,\varepsilon] = \{x \in M; d(x,p) \leq \varepsilon\} = M.$$

Por último,com relação a esfera temos dois casos:

- *Se* $\varepsilon \neq 1, S(p,\varepsilon) = \emptyset$.
- *Se* $\varepsilon = 1, S(p,\varepsilon) = M - \{p\}$.

Exemplo 1.3.2 (Bolas na reta usual) *Na reta temos que:*

- $B(p,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x-p| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}; p-\varepsilon < x < p+\varepsilon\} =]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$.
- $B[p,\varepsilon] = \{x \in \mathbb{R}; |x-p| \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}; p-\varepsilon \leq x \leq p+\varepsilon\} = [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$.
- $S(p,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x-p| = \varepsilon\}$

Proposição 1.3.3 *Dados os pontos $p \neq r$ num espaço métrico M, sejam $q > 0$ e $k > 0$ tais que $q + k \leq d(p,r)$. Então as bolas abertas $B(p,q)$ e $B(r,k)$ são disjuntas.*

Demonstração: Sejam p e r pontos distintos. Deste modo, $d(p,r) > 0$.
Sejam $q > 0$ e $k > 0$ tais que $q + k \leq d(p,r)$. Tomando $q = \dfrac{d(p,r)}{4}$ e $k = \dfrac{d(p,r)}{4}$, queremos mostrar que $B(p,q) \cap B(r,k) = \emptyset$. Vamos supor por absurdo que $B(p,q) \cap B(r,k) \neq \emptyset$.
Seja $x \in B(p,q) \cap B(r,k)$. Então $x \in B(p,q)$ e $x \in B(r,k)$, assim, $d(p,r) < q$ e $d(p,r) < k$.
Logo,

$$d(p,r) \leq d(x,p) + d(x,r) < q + k < \frac{d(p,r)}{4} + \frac{d(p,r)}{4} = \frac{d(p,r)}{2} < d(p,r).$$

Absurdo, portanto, $B(p,q) \cap B(r,k) = \emptyset$.

■

Corolário 1.3.4 *$q+k < d(p,r)$ então as bolas fechadas $B[p,q]$ e $B[r,k]$ são disjuntas.*

Demonstração: Se as bolas fechadas $B[p,q]$ e $B[r,k]$ são disjuntas então $B[p,q] \cap B[r,k] = \emptyset$.
Suponha por absurdo que $B[p,q] \cap B[r,k] \neq \emptyset$. Seja $x \in B[p,q] \cap B[r,k]$. Então $x \in B[p,q]$ e $x \in B[r,k]$, e assim, $d(x,p) \leq q$ e $d(x,r) \leq k$.
Logo,

$$d(p,r) \leq d(x,p) + d(x,r) \leq q + k < d(p,q).$$

O que é um absurdo. Portanto, $B(p,q) \cap B(r,k) = \emptyset$.

■

Definição 1.3.5 (Ponto Isolado de M) *Dado um espaço métrico (M,d). Um ponto $p \in M$ se diz ponto isolado de M se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) = \{p\}$.*

Dizer que um ponto $p \in M$ não é isolado significa afirmar que para todo $\varepsilon > 0$ pode-se encontrar um ponto $x \in A$ de maneira que $0 < d(p,x) < \varepsilon$.

Exemplo 1.3.6 *Seja (M,d) um espaço cuja métrica é a "zero-um". Então todo ponto $p \in M$ é isolado porque, tomando $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon \leq 1$, então $B(p,\varepsilon) = \{p\}$ como já foi visto antes.*

Definição 1.3.7 (Espaço métrico Discreto) *Um espaço métrico M se diz discreto quando todo ponto de M é isolado.*

Um subconjunto $W \subset M$ chama-se discreto quando o subespaço W(métrica induzida) é discreto. Isto é, para todo $x \in W$ existe uma bola aberta $B(x, \varepsilon)$ tal que $W \cap B(x, \varepsilon) = \{x\}$.

1.4 Conjuntos Limitados

Definição 1.4.1 *Seja W um subconjunto não vazio de espaço métrico M se diz limitado quando existe uma constante $a > 0$ tal que $d(x, y) \leq a$ para quaisquer $x, y \in W$. Nestas condições, o menor desses números a será chamado o diâmetro de W. Se*

$$x, y \in W \Rightarrow d(x, y) \leq a,$$

então a é uma cota superior para o conjunto das distâncias $d(x, y)$ entre pontos de W. A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o supremo desse conjunto. Deste modo, podemos definir o diâmetro de um conjunto limitado $W \subset M$ como o número real $diam(W) = \sup d(x, y)$

Observação: Se o conjunto W não é limitado, por definição temos que $diam(W) = \infty$. Ou seja, para todo $a \in \mathbb{R}$, existem $x, y \in W$ tais que $d(x, y) > a$.

Proposição 1.4.2 *Se W é limitado e $X \subset W$ tal que $X\emptyset$ então X também é limitado, valendo $diam(X) \leq diam(W)$.*

Demonstração: Como W é limitado, então existe $a > 0$ de maneira que

$$d(x, y) \leq a, \forall x, y \in W.$$

Dados $x, y \in X$. Como $X \subset W$ então $x, y \in W$. Assim, $d(x, y) \leq a$. Portanto X é limitado. E pelo fato de $X \subset W$, seque que

$$\{d(x, y); x, y \in X\} \subset \{d(x, y); x, y \in W\}.$$

Logo, $diam(X) \leq diam(W)$.

$\blacksquare$

Exemplo 1.4.3 *Num espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, toda bola aberta $B = B(p, \varepsilon)$ tem diâmetro 2ε.*

De fato, sabemos que $diam(B) = 2\varepsilon$. Basta apontarmos que nenhum positivo s, menor que 2ε,pode ser diâmetro de B. Tomemos $y \neq 0$ em E e um número real v de maneira que $s < 2v < 2\varepsilon$. Tomando $x = v\dfrac{y}{\|y\|}$, segue que

$$\|x\| = \|v\frac{y}{\|y\|}\| = \frac{v\|y\|}{\|y\|} = v < \varepsilon.$$

Logo, $p + x$ *e* $p - x$ *pertencem a* B*. Além disto,*

$$d(p + x, p - x) = |(p + x) - (p - x)| = 2|x| = 2v > s,$$

portanto s *não é diâmetro de* B*, como queríamos provar.*

Uma aplicação $f : W \longrightarrow M$, definida num conjunto arbitrário W e tomando valores num espaço métrico M, se diz limitada quando sua imagem $f(x)$ é um subconjunto limitado de M.

Exemplo 1.4.4 *Toda bola* $B(p, \varepsilon)$ *é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede* 2ε*.*
De fato, dados dois pontos $x, y \in B(p, \varepsilon)$ *temos que* $d(x, p) < \varepsilon$ *e* $d(\varepsilon, y) < \varepsilon$*. Pela desigualdade triangular*

$$d(x, y) \leq d(x, \varepsilon) + d(\varepsilon, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Analogamente, para $B[p, \varepsilon]$*. Como*

$$B[p, \varepsilon] = B(p, \varepsilon) \cup S(p, \varepsilon)$$

então $S(p, \varepsilon)$ *também é limitada.*

1.5 Sequências em Espaços Métricos

Definição 1.5.1 *Seja* (M, d) *um espaço métrico métrico. Toda aplicação* $n \to x_n$*, de* $\mathbb{N}$ *em* M *é chamada sequência de elementos de* M *e a notação para se indicar uma tal sequência é* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *ou* (x_n)*.*

Devemos distinguir o conjunto dos termos de uma sequência da sequência propriamente dita. Dada a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cada imagem x_n é chamada de termo da sequência. Dessa forma, o conjunto dos termos dessa sequência é $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, ...\}$.

Seja uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M. Se $\{n_1, n_2, \cdots\} \subset \mathbb{N}$ e $n_1 < n_2 < \cdots$, então a aplicação dada por $n_k \to x_{n_k}$ é indicada por $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots)$ e recebe o nome de subsequência de $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplo 1.5.2 *Considerando a sequência* $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \cdots)$ *de elementos de* $\mathbb{R}$*, então*

$$(1, 1, 1, \cdots) = (x_1, x_4, x_7, \cdots)$$

desde que façamos

$$(1, 2, 3, \cdots).$$

1.6 Limite de sequências

Definição 1.6.1 *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é limite de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de M se, para toda bola $B(p, \varepsilon)$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(p, \varepsilon).$$

Para indicar que p é limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ usa-se a notação $\lim x_n = p$, ou ainda $x_n \to p$. Dizemos assim, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente ou que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p.

Proposição 1.6.2 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de elementos de M converge para $p \in M$ se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Demonstração: Vejamos que

$$x_n \in B(p, \varepsilon) \Leftrightarrow d(x_n, p) < \varepsilon,$$

ou seja, vale a proposição.

■

Observação: Pela definição, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p, então para qualquer índice n_0, a subsequência $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para p.

Exemplo 1.6.3 *Consideramos $\mathbb{R}$ dotado da métrica usual. A sequência $(x_1, x_2, \cdots)$, onde*

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

converge para o ponto 1.
Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $n_0 \in_{\mathbb{R}}$ tal que $\dfrac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. Então para todo $n \leq n_0$, temos

$$d(x_n, 1) = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon.$$

Exemplo 1.6.4 *Seja num espaço métrico M uma sequência estacionária,isto é, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de M tal que $x_n = p$, a partir de um certo índice n_0. Assim,*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, \cdots, x_{n_0}, p, p, p, \cdots).$$

Tais sequências são convergentes para o termo que se repete, ou seja, $(x_1, \cdots, x_{n_0}, p, p, p, \cdots) \to p$*; pois* $x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \cdots = p$*. Então para todo* $\varepsilon > 0$*,*

$$n \geq n_0 + 1 \Rightarrow d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \varepsilon.$$

Em particular as sequências constantes $(p.p, \cdots)$ *convergem para a constante* p*.*

Exemplo 1.6.5 *Seja* (M, d) *um espaço métrico cuja métrico zero-um. Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* M *converge se, e somente se, é estacionária.*
De fato, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estacionária, então converge. Suponhamos que* $\lim x_n = p \in M$*. Tomando* $0 < \varepsilon \leq 1$*, então existe um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de maneira que*

$$x_{n_0}, x_{n_0+1}, \cdots \in B(p, \varepsilon) = \{p\}.$$

Por esse motivo $x_{n_0} = x_{n_0+1} = \cdots = p$*.*

Proposição 1.6.6 *Sejam ded′ métricas equivalentes sobre um conjunto* M*. Então uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de pontos de* M *converge no espaço métrico* (M, d) *para um ponto* $p \in M$ *se, somente se, essa sequência em* (M, d') *converge para o mesmo* p*.*

Demonstração: Por hipótese, $x_n \to p$ no espaço métrico (M, d). Dada uma bola $B_{d'}(p, \varepsilon)$, como $d \sim d'$, existe $\beta > 0$

$$B_d(p, \beta) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $p \in (M, d)$, existe $n_0 \in_{\mathbb{N}}$ de maneira que

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B_d(p, \beta).$$

E portanto,

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B_{d'}(p, \varepsilon).$$

A recíproca é análoga.

■

Proposição 1.6.7 *Se uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de pontos de* M *converge para* $p \in M$*, então toda subsequência de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *também converge para* p*.*

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots)$ uma subsequência da sequência dada e consideremos $\varepsilon > 0$. Por hipótese, $\lim x_n = p$, e assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, p), \varepsilon.$$

Mas, como cada $n_k \in \mathbb{N} e n_1 < n_2 < \cdots$, então existe $n_v > n_0$, e com isso, $n_k \geq n_v$, vale a relação

$$d(x_{n_k}, p) < \varepsilon.$$

■

Definição 1.6.8 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de um espaço métrico M se diz limitada se o conjunto $\{x_n | n = 1, 2, 3, \cdots\}$ dos termos dessa sequência é limitado, isto é, existe $k > 0$ tal que $d(x_r, x_m) < k$, para quaisquer termos x_r e x_m da sequência dada.*

1.7 Sequências em espaços vetoriais normados

No espaço $\mathbb{R}$ tem muito interesse as chamadas sequências monótonas que compreendem os seguintes tipos:

- Crescentes são as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \leq x_{n+1}$, para qualquer índice n. Se $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se diz estritamente crescente.

- Decrescentes são as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para quais se tem $x_{n+1} \leq x_n$, para todo índice n. Quando $x_{n+1} < x_n$, para qualquer $n \geq q$, então a sequência se diz estritamente decrescente.

Exemplo 1.7.1 *A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$ é estritamente decrescente ao passo que $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots)$ é crescente. Por outro lado, $(1, 2, 1, 2, \cdots)$ não é monótona.*

Proposição 1.7.2 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de um espaço vetorial normado E que converge para $p \in E$. Então existe uma bola de centro na origem que contém todos os termos da sequência.*

Demonstração: Tomando $\varepsilon = 1$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, p) = \|x_n - p\| < 1$$

De modo que,

$$\|x_n\| = \|x_n - p + p\| \leq \|x_n - p\| + \|p\|$$

então para todo $n \geq n_0$ tem-se

$$\|x_n\| < 1 + \|p\|.$$

Seja $\beta > max\{\|x\|, \cdots, 1 + \|p\|\}$. Então, para todo índice n

$$d(x_n, 0) = \|x_n - 0\| = \|x_n\| < \beta.$$

■

Definição 1.7.3 *Seja $f = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $g = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de um espaço vetorial normado E. Chama-se soma de f com g a sequência $f + g = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots)$. Se $k = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$, então o produto kf é definido naturalmente do seguinte modo: $kf = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots)$.*

Proposição 1.7.4 *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de espaço vetorial normado E. Se $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$, então $\lim(x_n + y_n) = p + q$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Então, por hipótese, existem índices r e m tais que

$$n \geq r \Rightarrow \|x_n - p\| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n \geq m \Rightarrow \|y_n - q\| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando $t = max\{r, m\}$ temos então:

$$n \geq t \Rightarrow \|(x_n - y_n - (p + q)\| \leq \|x_n - p\| + \|y_n - q\| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

E portanto, $(x_n + y_n) \Rightarrow p + q$.

■

1.8 Conjuntos Abertos

Definição 1.8.1 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto de $A \subset M$ se diz aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$.*

Observação: A partir da definição, se $A \neq \emptyset$ é um conjunto aberto, então A é a união de bolas abertas. Respectivamente, se A é uma união de bolas abertas, A é aberto.

Consideremos que $A = \cup B_i$, onde cada B_i é uma bola aberta. Assim, dado $p \in A$, existe um índice s tal que $p \in B_s$.

Entretanto, por propriedade de bolas abertas, existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset B_s$. Daí,

$$B(p,\delta) \subset A,$$

e isto prova nossa afirmação.

Exemplo 1.8.2 *Toda bola aberta $B(p,\varepsilon)$ num espaço M é um conjunto aberto, pois por propriedade, para todo $q \in B(p,\varepsilon)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(q,\delta) \subset B(p,\varepsilon)$.*

Exemplo 1.8.3 *Se d é a métrica "zero-um"sobre o conjunto M, então todo $A \subset M$ é aberto. Pois, se $A = \emptyset$ é imediato, já se $A \neq \emptyset$, então $A = \cup_{p\in A}\{p\}$. Assim, como cada $\{p\}$ é uma bola aberta (centro p e raio $\varepsilon \leq 1$), então A é aberto.*

Exemplo 1.8.4 *Seja M um espaço métrico e seja N um subespaço de M. Um subconjunto $A \subset N$ é aberto (em relação a N) se, e somente se, $A = L \cap N$, onde L é um subconjunto aberto de M.*
De fato, se A é aberto em (N), então $A = \cup(B_i \cap N)$, onde cada B_i é uma bola aberta em M. Assim,

$$A = (\cup B_i) \cap N = L \cap N,$$

sendo $L = \cup B_i$ um subconjunto aberto do espaço M.
Reciprocamente, dado $p \in L \cap N$, então $p \in L$, desse modo, exste $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subset L$. Com isso,

$$B(p,\varepsilon) \cap N \subset L \cap N.$$

Mas, $B(p,\varepsilon) \cap N$ é uma bola aberta em N, e portanto, $L \cap N$ é um subconjunto aberto do subespaço N.

1. *Notemos que podemos dizer que τ é uma topologia sobre M e que (M,τ) é um espaço topológico.*

2. *Dados $A_1, ..., A_n \subset \tau (n \geq 1)$, então $A_1 \cap ... \cap A_n \subset \tau$.*

3. *A intersecção de uma família de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto.*
   De fato, na família (A_i), onde $A_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[, i = 1, 2, \cdots$ cada A_i é aberto em $\mathbb{R}$(métrica usual). Porém,

   $$\cap A_i = \{0\}$$

   não é aberto pois, não existe nenhum intervalo em $\mathbb{R}$ formado apenas pelo ponto 0.

Proposição 1.8.5 *Seja $\mathcal{D}$ a coleção dos abertos de um espaço métrico (M,d). Então:*

I) $\emptyset, M \in \mathcal{D}$

II) $A, B \in A \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$

III) Se (A_i) *é uma família de conjuntos abertos de* M*, ou seja, se cada* $A_i \in \mathcal{D}$*, então* $\cup A_i \in \mathcal{D}$

Demonstração:

I) $\emptyset$ é aberto, pelo fato de não conter pontos e, portanto, de não pode contrariar a definição dada. Quanto a M, toda bola de centro num ponto $p \in M$ é um subconjunto de M, por definição.

II) Seja $p \in A \cap B$. Então existem $\varepsilon > 0 e \beta > 0$ tais que $\subset A$ e $B(p, \beta) \subset B$. Supondo $\varepsilon \leq \beta$ a propriedade de bolas abertas nos garante que

$$B(p, \varepsilon) \subset B(p, \beta)$$

Por isso $B(p, \varepsilon) \subset A \cap B$.

III) Seja $p \in \cup A_i$. Então existe um índice t tal que $p \in A_t$ e, como A_t é aberto, para um certo $\varepsilon > 0$ vale a relação $B(p, \varepsilon) \subset A_i$. Então $B(p, \varepsilon) \subset A_i$.

■

Proposição 1.8.6 *Sejam* d *e* d' *métricas equivalentes sobre* M*. Se* τ *é a coleção dos conjuntos abertos de* M, d *e* τ' *é a coleção dos conjuntos abertos de* (M, d)*, então* $\tau = \tau'$.

Demonstração: Seja $A \in \tau$ e tomemos $p \in A$. Como $A \in \tau$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(p, \varepsilon) \subset A$. Pelo fato de $d \sim d'$ existe $\beta > 0$ de maneira que $B_{d'}(p, \beta) \subset A$, logo $A \in \tau'$. Com isso, temos que $\tau \subset \tau'$. Analogamente, $\tau = \tau'$.

■

Definição 1.8.7 *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Se* $A \subset M$*, um ponto* $p \in M$*, se diz ponto de interior ao conjunto* A *se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(p, \varepsilon) \subset A$*. O conjunto dos pontos interiores a* A *é chamado interior de* A *e é indicado por* $intA. \subset A$*. Além disso,* $intA$*, então* $intA \subset A$.

Nota: Se todos os pontos de A são interiores, ou seja, se $A = intA$, então A é aberto. Isto é equivalente a: A é aberto se, e somente se, $A = intA$.

Exemplo 1.8.8 *Seja d a métrica "zero-um"sobre um conjunto M. Como todos os subconjuntos de M são abertos, $intA = A$, para todo $A \subset M$.*

Exemplo 1.8.9 *Na reta real $A = [a, b[$ e $B = [a, +\infty[$. Em ambos os casos só o ponto a não é interior: um intervalo $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= B(a, \varepsilon)$ não está contido nem em A e nem em B. Assim, $intA =]a, b[$ e $intB =]a, +\infty[$.*

Definição 1.8.10 *A fronteira de W em M é o conjunto ∂W, formados pelos pontos $p \in M$ tais que toda bola aberta de centro p contém pelo menos um ponto de W e um ponto do complementar $M - W$.*

1.9 Conjuntos fechados

Definição 1.9.1 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz fechado se, e somente se, F^c (complementar) é aberto.*

Exemplo 1.9.2 *Considerando sobre um conjunto $M \neq \emptyset$ a métrica "zero-um", então todo $F \subset M$ é fechado. Isto ocorre pelo fato de F^c ser aberto devido todos os subconjuntos de M serem abertos neste caso.*

Proposição 1.9.3 *Seja T a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico M. Então:*

I) $\emptyset, M \subset T$;

II) $G, F \subset T \Rightarrow G \cup F \subset T$;

III) Se (F_i) é uma família de conjuntos fechados de M, então $\cap F_i \subset T$.

Demonstração:

I) $\emptyset$ e M estão contidos em T porque $\emptyset^c = M$ e $M = \emptyset^c$ estão contidos em τ(coleção de abertos de M);

II) Se G e T são fechados, então G^c e T^c são abertos. E assim, $(G^c \cup T^c)$ é aberto. Ou seja, $G \cup T$ é fechado;

III) Como cada F_i é fechado, então cada F_i^c é aberto e, portanto, $\cup F_i^c = (\cap F_i)^c$ é aberto. Consequentemente, $\cap F_i$ é fechado.

■

Definição 1.9.4 *Seja A um subconjunto de um espaço métrico. Um ponto $p \in M$ se diz aderente ao conjunto A se, para todo $\varepsilon > 0$, vale a relação*

$$B(p,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes de ao conjunto A cham-se fecho de A e é indicado $\overline{A}$. Além disso, $A \subset \overline{A}$.

Exemplo 1.9.5 *Na reta real se* $A = [a, b[$ *e* $A =]a, b[$, *então* $\overline{A} = [a, b]$. *Isto se dá ao fato de* a *e* b *serem pontos aderentes a esse intervalo, pois qualquer bola(ou seja, intervalo aberto) de centro num deles, intercepta o conjunto* A. *No entanto, se* $p < a$ *ou* $p > b$, *então* $p \notin \overline{A}$, *já que no primeiro caso, por exemplo, tomando* $\varepsilon = \dfrac{a-p}{2} < a$ *bola* $B(p,\varepsilon) =]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$ *intercepta* A.

Exemplo 1.9.6 *Ainda na reta real temos:* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
Com efeito, dado $p \in \mathbb{R}$, *todo intervalo* $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$ *contém números racionais, e assim,*

$$]p-\varepsilon, p+\varepsilon[\cap \overline{\mathbb{Q}} \neq \emptyset.$$

Portanto, $p \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Proposição 1.9.7 *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Então para todo* $A \subset M$, *o complementar do fecho de* A *é igual ao interior do complementar de* A.

Demonstração: Temos que p pertence a complementar do fecho de A se, e só se, $p \notin \overline{A}$. Mas, $p \notin \overline{A}$ se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ de maneira que $B(p,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Contudo, isto ocorre se, e somente se, existe $\varepsilon > 0; B(p,\varepsilon) \subset A^c$, o que acontece se, e só se, p pertencer ao interior de A.

■

Corolário 1.9.8 $F \subset M$ *é fechado se, e somente se,* $\overline{F} = F$.

Demonstração: Temos que $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $intA = A$. Desta forma F é fechado se, e somente se, F^c é aberto, o que ocorre se, e só se, o interior do complementar de F for igual ao complementar de F. Mas, isso só é valido se, e somente se, $(\overline{F})^c = F^c$.

■

Proposição 1.9.9 *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Se* $p \in M$ *e* $A \subset M$ *então* $d(p, A) = 0$ *se, e somente se,* $p \in \overline{A}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, como

$$d(p, A) = \inf_{x \in A} d(p, x) = 0$$

existe $a \in A$ de maneira que $0 \leq d(p, a), \varepsilon$.

Daí, $a \in B(p, \varepsilon)$, e por consequência

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Ou seja, $a \in A$.

($\Leftarrow$) Vamos supor que $d(p, A) = \varepsilon > 0$. Mas, por hipótese,

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Isto é, $a \in A$ de maneia que

$$d(a, p) < \varepsilon.$$

Segue então que

$$\varepsilon = d(p, A) < d(a, p) \leq \varepsilon$$

o que é um absurdo.

■

Proposição 1.9.10 *Para todo subconjunto não vazio A de um espaço métrico M vale a igualdade $d(A) = d(\overline{A})$*

Demonstração: Temos que $A \subset \overline{A}$, e assim, $d(A) \leq d(\overline{A})$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, para quaisquer $x, y \in \overline{A}$, existem $a, b \in A$ tais que

$$d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$d(y, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) < \varepsilon + d(A).$$

Portanto,

$$d(\overline{A}) \leq \varepsilon + d(A).$$

Isto é,

$$0 \leq d(\overline{A}) - d(A) \leq \varepsilon,$$

para todo ε. Deste modo, $d(\overline{A}) - d(A) = 0$ ou $d(\overline{A}) = d(A)$.

■

Proposição 1.9.11 *Se A é um subconjunto de um espaço métrico M e se p é um ponto de $\overline{A}$, então existe uma sequência $(x_1, x_2, \cdots)$ de pontos de A tal que $\lim x_n = p$.*

Demonstração: Pelo fato de $p \in A$, cada bola $B\left(p, \dfrac{1}{n}\right)$, onde $(n = 1, 2, \cdots)$ contém pontos de A. A sequência $(x_1, x_2, \cdots)$, onde $x_n \in A \cap B\left(p, \dfrac{1}{n}\right)$, para todo $n \geq 1$, converge para p.

Ora, toda bola $B(p, \varepsilon)$ contém $B\left(p, \dfrac{1}{q}\right)$, desde que $\dfrac{1}{q} < \varepsilon$, e assim, contém $(x_q, x_{q+1}, \cdots)$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos de A, a proposição é valida.

■

Definição 1.9.12 *Dado um espaço métrico (M, d), um subconjunto $A \subset M$ se diz denso em M se $\overline{A} = M$.*

Proposição 1.9.13 *Seja M um espaço métrico. Se $A \subset M$ é denso em M, então $G \cap A \neq \emptyset$, para todo $G \neq \emptyset$ desse espaço.*

Definição 1.9.14 *Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Um ponto $p \in M$ se diz ponto de acumulação de A se, e somente se, pata todo $\varepsilon > 0$, a interseção*

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A$$

é um conjunto infinito. Quer dizer, toda bola de centro P deve conter infinitos pontos de A, distintos do ponto p.

O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado de conjunto derivado de A e se indica por A'.

Exemplo 1.9.15 *No espaço $\mathbb{R}$ usual o único ponto de acumulação de $A = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots\right\}$ é o ponto 0. De fato, uma bola $B(0, \varepsilon) =]-\varepsilon, \varepsilon[$ contém todos os elementos*

$$\frac{1}{q} < \varepsilon \left(\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < q \right).$$

Por outro lado, para qualquer outro ponto $p \in \mathbb{R}$, existem bolas $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$ cuja interseção com A não é infinita. Assim, $\overline{A} = \{0\}$.

Proposição 1.9.16 *Seja M um espaço métrico. Então $f \subset M$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.*

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que exista $p \in F'$ tal que $p \notin F$. Assim, $p \in F^C$ que é aberto . Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(p,\varepsilon) \subset F^c,$$

ou seja,

$$B(p,\varepsilon) \cap F = \emptyset.$$

Porém $p \in F'$ então $(B(p,\varepsilon) - \{p\}) \cap F$ é infinito, e por consequência, $B(p,\varepsilon) \cap F$ é infinito, ou seja, não vazio. O que é um absurdo.

Reciprocamente, seja $p \in F^c$, pelo fato de $F' \subset F$, $F^c \subset (F')^c$, então $p \in (F')^c$. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(B(p,\varepsilon) - \{p\}) \cap F = \emptyset.$$

porém, $p \notin F$, segue então que

$$B(p,\varepsilon) \cap F = \emptyset$$

que equivale a $B(p,\varepsilon) \subset F^c$, o que nos garante que todos os pontos de F^c são interiores, isto é, F^c é aberto. Deste modo, F é fechado.

■

Capítulo 2

Funções Contínuas

As funções contínuas desempenham papel fundamental no nosso trabalho, por este razão dedicaremos este presente capítulo às ideias básicas dessa teoria. Esse estudo, também, pode ser encontrando em [5]

Definição 2.0.1 *Sejam M e N espaços métricos (cujas métricas, por comodidade, indicaremos pelo mesmo símbolo d). Uma função $f : M \to N$ é contínua no $p \in M$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que*

$$d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Dizer que f é continua significa que f é contínua em todos os pontos de M.

Exemplo 2.0.2 *Dada $f : M \to N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$ (chamada de constante de Lipschitz) tal que $d(f(x), f(c)) \leq cd(x,y)$ quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma aplicação lipschitziana. Neste caso, f é contínua (em cada ponto $p \in M$).*
De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$. Então

$$d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) \leq cd(x,p) < c\delta = \varepsilon$$

Se $f, g : M \to \mathbb{R}$ são lipschitzianas, o mesmo ocorre com $f + g$ e kf, onde $k \in \mathbb{R}$. Daí, toda combinação linear $k_1 f_1 + \cdot + k_n f_n$ de funções reais lipschitzianas é lipschitziana.

Para uma função real de variável real f, a condição Lipschitz significa que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c$$

e isto equivale a afirmar que a inclinação de qualquer secante ao gráfico de f é, em valor absoluto, menor do que ou igual a c.

Se uma função real $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, é derivável e $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, então pelo Teorema do Valor Médio, dados $x, y \in I$ quaisquer, existe um ponto z entre x e y, tal que $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ e daí

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

Assim, toda função com derivada limitada num intervalo (o qual pode ser definido) é lipschitziana.

Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se localmente lipschitziana quando cada ponto $p \in M$ é centro de uma bola $B(p, \varepsilon)$ tal que a restrição $f|_B$ é lipschitziana. Uma aplicação lipschitziana é contínua.

2.1 Isometria

Definição 2.1.1 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se uma imersão isométrica quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Neste caso, diz-se também que f preserva a distâncias.*

Definição 2.1.2 *Uma imersão isométrica $f : M \to N$ é sempre injetora, pois $f(x) = f(y) = d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$. Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva. Toda imersão isométrica $f : M \to N$ define uma isometria de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.*

Exemplo 2.1.3 (Contrações Fracas) *Se $f : M \to N$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para qualquer $x, y \in M$, então f é contração fraca. Neste caso, f é lipschitziana(com $c = 1$) e portanto é contínua.*

Exemplo 2.1.4 (Inclusões) *Seja $j : M \to N$, definidas por $j(x) = x, \forall x \in W$, sendo W um subespaço de M, pois para quaisquer $x, y \in W$*

$$d(j(x), j(y)) = d(x, y).$$

Em particular a aplicação idêntica $id_M : M \to N$ é contínua por ser uma imersão isométrica

Exemplo 2.1.5 (Translações) *Num espaço vetorial normado E, definidas para cada $a \in E$ do seguinte modo: $T_a(x) = x + a, \forall x \in E$.*
De fato, para quaisquer $x, y \in E$

$$d(T_a(x), T_a(y)) = \|T_a(x) - T_a(y)\| = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Observemos que uma translação é sempre sobrejetora pois dado $z \in E$, considerando $x = (z - a)$ temos

$$T_a(x) = x + a = z - a + a = z.$$

Logo as translações são isometrias.

Proposição 2.1.6 *A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Ou seja, se $f : M \to N$ é contínua no ponto a e $g : N \to P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \to P$ é contínua no ponto a.*

Demonstração: Seja dado $\varepsilon > 0$. A continuidade de g no ponto $f(a)$ nos permite obter $\alpha > 0$ tal que $y \in N$,

$$d(y, f(a)) < \alpha \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Por outro lado, dado $\alpha > 0$, a continuidade de f no ponto a nos fornece $\delta > 0$ tal que $z \in M$,

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \alpha \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

■

Corolário 2.1.7 *Toda restrição de uma aplicação contínua é contínua.*

Demonstração: Com efeito, $f|_W = f \circ i$, onde $i : W \to M$ é a aplicação de inclusão, $i(x) = x, x \in M$.

■

Proposição 2.1.8 *Uma função $f : M \to N$ é contínua num ponto $p \in M$ se, e somente se, o fato de uma sequência (x_n) de pontos de M convergir para acarretar que $(f(x_n))$ converge para $(f(p))$. Ou seja se, e somente se $x_n \to p$ acarreta em $f(p)$.*

Demonstração:

Primeiramente, seja $B = B(f(p), \varepsilon)$ onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário da continuidade de f vem que existe $\delta > 0$ de maneira que

$$f(B(p, \delta)) \subset B.$$

Mas como $x_n \to p$, existe um índice r tal que, para todo índice $n \geq r$, se tem $X_n \in B(p,\delta)$. Daí, segue que $f(x_n) \in f(B(p,\delta))$, e portanto que $f(x_n) \in B$ para qualquer índice $n \geq r$ o que prova então $f(x_n) \to f(p)$.
Reciprocamente, se f não for contínua em p, existiria $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(B(p,\delta)) \not\subset B(f(p),\varepsilon), \forall \delta > 0.$$

Assim,

$$f(B(p,1)) \not\subset B(f(p),\varepsilon)$$

e para,

$$f(B(p,\frac{1}{2})) \not\subset B(f(p),\varepsilon)$$

$$f(B(p,\frac{1}{3})) \not\subset B(f(p),\varepsilon)\cdots$$

e portanto, para cada $n \geq 1$ existe $x_n \in M$ tal que $x_n \in B(p,\frac{1}{n})$ e $f(x_n) \notin B(f(p),\varepsilon)$. Donde a sequência $(x_1,x_2,\cdots) \to p$ ao passo que $(f(x_1),f(x_2),\cdots) \not\to f(p)$, o que contradiz a hipótese.

■

Proposição 2.1.9 *Para que $f : M \to M_1 \times \cdots \times M_n$ definida por $f(x) = (f_1(x),\cdots,f_n(x)), \forall x \in M$, seja contínua num ponto $p \in M$ é necessário e suficiente que cada umas das funções $f_1,\cdots,f_n$ seja contínua no ponto p.*

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Como $p_i \circ f)(x) = p_i(f_1(x),\cdots,f_n(x)) = f_i(x)$, para qualquer $x \in M$ então $p_i \circ f = f_i(i = 1,2,\cdots,n)$ e como ainda f e cada projeção p_i são contínuas, então f_i também é contínua.
$(\Longleftarrow)$ Dado $\varepsilon > 0$ existe para cada índice $i(i = 1,2,\cdots,n)$ um número δ_i tal que

$$d(x,p) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x),f_i(p)) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Sendo $\delta = min\{\delta_1,\cdots\delta_n\}$, temos que

$$d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f_i(x),f_i(p)) < \frac{\varepsilon}{n}(i = 1,2,\cdots,n) \Rightarrow d(f_1(x),f_1(p) < \varepsilon$$

Logo, f é contínua no ponto p.

$\blacksquare$

Corolário 2.1.10 *Se $f_1 : M_1 \to N_1, \cdots, f_n : M_n \to N_n$ são funções contínuas então*

$$f : \times \cdots \times M_n \to N_1 \times \cdots N_n$$

definida por

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n))$$

também é continua.

Demonstração: Indicando por $p_i : M_1 \times, \cdots, M_n \to M_i$ a projeção de $(i = 1, 2, \cdots, n)$, temos que

$$(f_i \circ p_i)(x_1, \cdots, x_n) = f_i(x_i)$$

e portanto fazendo $(x_1, \cdots, x_n) = x$ então

$$f(x) = ((f_1 \circ p_1)(x), \cdots, (f_n \circ p_n)(x))$$

o que mostrar que as funções $f_i \circ p_i$ são contínuas de f. Sendo estas coordenadas contínuas, já que cada p_i e cada f_i são contínuas, então f é também contínua.

$\blacksquare$

Definição 2.1.11 *Seja $f : A \to B$. para qualquer $E \subset B$, a imagem inversa de E por f, indicada $f^{-1}(E)$, é o subconjunto*

$$f^{-1}(E) = \{x \in A; f(x) \in E\}.$$

Exemplo 2.1.12 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = x^2$ e se $E = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$ então*

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{2} \leq x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

Proposição 2.1.13 *Dada a função $f : M \to N$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) f é contínua

b) Para todo $k \in N$ e todo $\lambda > 0, f^{-1}(B(k, \lambda))$ é um subconjunto aberto

c) Para todo aberto L de espaço $N, f^{-1}(L)$ é um aberto de M

d) Para todo fechado F do espaço $N, f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de M

Demonstração:

a)$\Longrightarrow$ b) Dado $p \in f^{-1}(B(k,\lambda))$, então $f(p) \in B(k,\lambda)$ e portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(p),\varepsilon) \subset B(k,\lambda)$. Mas sendo f contínua existe $\delta > 0$ de maneira que $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\varepsilon) >$ Como porém $B(p,\delta) \subset f^{-1}(f(B(p,\delta)))$, então $B(p,\delta) \subset f^{-1}(B(f(p),\varepsilon)) \subset f^{-1}(B(k,\lambda))$. Assim todo ponto $p \in f^{-1}(B(k,\lambda))$ é ponto de interior e portanto $f^{-1}(B(k,\lambda))$ é aberto.

b)$\Longrightarrow$ c) Se L é aberto em N, então $L = \cup B_i$, onde (B_i) é a família das bolas abertas contidas em L. Daí, $f^{-1}(L) = f^{-1}(\cup B_i) = \cup f^{-1}(B_i)$,e como cada $f^{-1}(B_i)$ é aberto, o mesmo ocorre com $f^{-1}(L)$.

c)$\Longrightarrow$) d) Sendo F fechado em N, então $L = F^c$ é aberto. Daí $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ é aberto em M por hipótese. Onde seu complementar $f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado em M.

d)$\Longrightarrow$ a) Seja p um ponto arbitrário de M. Para $\varepsilon > 0$ qualquer seja $B = B(f(p),\varepsilon)$. Então B^c é fechado em N que não contém $f(p)$ e portanto $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ é fechado de M que não contém p. Logo, $f^{-1}(B)$ é aberto e $p \in f^{-1}(B)$. Tomando então $\delta > 0$ tal que $B_1 = B(p,\delta) \subset f^{-1}(B)$ teremos que:

$$f(B_1) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B$$

e portanto f é contínua em todo ponto $p \in M$.

■

2.2 Funções Uniformemente Contínuas

Seja $f : M \to N$ uma função contínua num ponto $p \in M$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ para todo $x \in B(p,\delta)$. Este δ depende, em geral, não só de ε como também do ponto p. Mas há casos em que pode-se usar o mesmo δ em todos os pontos de M, no seguinte sentido:

Definição 2.2.1 *Se M e N são espaços métricos, uma função $f : M \to N$ se diz uniformemente contínua se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Observação: Toda função uniformemente continua é também continua. Porém, sua reciproca não vale.

Exemplo 2.2.2 *As aplicações lipschitzianas são uniformemente contínuas.*
Com efeito, se $c > 0$ é a constante de Lipschitz de f, então

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \forall x, y \in M.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$ a definição é satisfeita.

Exemplo 2.2.3 *As contrações são uniformemente contínuas.*
De fato, uma aplicação $f : M \to n$ é chamada de contração se existe um número real k, onde $0 \leq k \leq 1$, de maneira que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M.$$

Se $k = 0$, f é constante e portanto é uma contração fraca. Se $k > 0$, então f é lipschitziana. Então as contrações são sempre uniformemente contínuas.

Proposição 2.2.4 *Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ são uniformemente contínuas então $g \circ f : M \to P$ também é uniformemente contínua.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\alpha > 0$ de modo que

$$\forall y_1, y_2 \in N, d(y_1, y_2) < \alpha \Rightarrow d(g(y_1), g(y_2)) < \varepsilon,$$

sendo f também uniformemente contínua então $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x_1, x_2 \in M, d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2) < \alpha.$$

Daí então,

$$d(g(f(x_1), g(f(x_2))) = d((g \circ f)(x_1), (g \circ f)(x_2)) < \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

Conjuntos Compactos e Conexos

Neste capítulo estudaremos os conceitos de conjuntos compactos e conjuntos conexos. Em seguida veremos exemplos e propriedades destes conjuntos. Os Conjuntos Compactos e Conexos são de grande importância na Matemática, pois possibilitaram que resultados clássicos da Análise Matemática, ver [4], ganhassem versões em contexto mais gerais. Para um estudo mais detalhado ver [5].

Definição 3.0.1 *Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto de $K \subset M$ é compacto se, para toda sequência de pontos de (x_n) de pontos de K, existe uma subsequência (x_{n_i}) que converge para um ponto $p \in K$. Um espaço métrico (M, d) se diz compacto se o conjunto M é compacto.*

Exemplo 3.0.2 *Todo espaço métrico finito é compacto.*
Dado $K = \{x_1, \cdots, x_n\}$ e $(y_m) \subset K$. Como K é finito, existe uma subsequência (y_{m_l}) de (y_m), que é constante. Logo, essa subsequência será convergente para um elemento de K.

Proposição 3.0.3 *Seja M um espaço métrico. Se F e K são subconjuntos de M tais que F é fechado, K é compacto e $F \subset K$, então F é compacto.*

Demonstração: Se $(x_1, x_2, \cdots)$ é uma sequência de pontos de F, é também uma sequência de pontos de K e, como K é compacto, existe uma subsequência $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots)$ de (x_i) tal que $\lim x_{i_r} = p \in K$. Para está subsequência são duas as possibilidades:
i) $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\}$ é finito
Neste caso, existem subsequências de (x_{i_r}) que são constantes e, devendo cada uma

delas convergir para p, então seus termos são todos iguais a p e portanto $p \in F$.

ii) A é infinito

Como $p = \lim x_{i_r}$, então para $\varepsilon > 0$, a bola aberta $B = B(p, \varepsilon)$ contém infinitos termos de x_{i_r} e portanto é infinita a interseção $(B - \{p\}) \cap A$. Donde $p \in A'$ e daí $p \in F'$, uma vez que $A \subset F$. Como porém $F' \subset F$(pois F é fechado) então $p \in F$

■

Proposição 3.0.4 *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto, é compacto.*

Demonstração: Seja M um espaço métrico e F um subconjunto fechado, então $F \subset M$. Dada uma sequência (x_n) em F. Como M é compacto, existe uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to x \in M$. Logo, $x \in F'$ e como F é fechado, $x \in F$. Portanto, F é compacto.

■

Proposição 3.0.5 *Todo subconjunto Compacto K, de um espaço métrico M, é fechado.*

Demonstração: Sejam $K \subset M$ um conjunto compacto e $q \in \overline{K}$. Por definição de ponto aderente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe

$$x_n \in B\left(q, \frac{1}{n}\right) \cap K.$$

Logo, $(x_n) \subset K$ e $\lim(x_n) = q$. Como (x_{n_k}) é uma subsequência tal que $\lim x_{n_k} = p \in K$. Mas como a sequência toda converge para q, segue $q = p \in K$. Logo, K é fechado.

■

Proposição 3.0.6 *Sejam M e N espaços métricos, M compacto e $f : M \to N$ contínua. Então $f(M)$ é um subconjunto compacto de N.*

Demonstração: Dada uma sequência $(y_n) \subset f(M)$. Temos que existe $(x_n) \subset M$ tal que $f(x_n) = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como M é compacto, existe (x_{n_k}) e x pertencentes a M, tais quais

$$\lim x_{n_k} = x.$$

Pela continuidade de f, temos que

$$\lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(x) \in f(M).$$

Logo, $f(M)$ é compacto em N.

$\blacksquare$

Corolário 3.0.7 *Todo subconjunto compacto de um espaço métrico M é limitado.*

Demonstração: Seja M um espaço métrico e $K \subset M$ compacto. Suponhamos por absurdo que K seja ilimitado.
Dado $x_0 \in K$ fixo. Como K não é limitado, existe $x_1 \in K$ tal que

$$1 < d(x_1, x_0).$$

Existe ainda $x_2 \in K$ tal que

$$min\{d(x_2, x_1), d(x_2, x_0)\} > 1.$$

De maneira geral, $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, existe $x_n \in K$ tal que

$$min\{d(x_n, x_i); i = 0, 1, \cdots, n-1\} > 1. \tag{3.1}$$

Assim, construímos uma sequência $(x_n) \subset K$, que não admite nenhuma subsequência convergente, uma vez que, por (3.1), $d(x_n, x_m) > 1, \forall n, m \in \mathbb{N}$. Isso, porém, contradiz a compacidade de K.

$\blacksquare$

Observação: A reciproca, porém, é falsa, como mostraremos no example a seguir.

Exemplo 3.0.8 *Seja M um conjunto infinito munido da métrica "zero-um". Note que M é fechado e limitado, pois $d(x, y) \leq 1, \forall x, y \in M$. Porém, M não é compacto. De fato, dada sequência $(x_n) \subset M$ com $x_n \neq x_m, n \neq m$, temos que (x_n) não possui subsequência convergente, já que $d(x_n, x_m) = 1, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$.*

3.1 Compacidade e Continuidade Uniforme

Proposição 3.1.1 *Se o espaço métrico M é compacto, então toda aplicação contínua $f : M \to N$ é uniformemente contínua.*

Demonstração: Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam $\varepsilon > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, pontos de $x_n, y_n \in M$ tais que $d(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$ e $d(f(x_n, f(y_n)) \geq \varepsilon$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de M, que existe $\lim x_n = p \in M$. Então $\lim y_n = p$. A continuidade de f e da distância nos dá

$$\lim d(f(x_n, fy_n) = d(f(p), f(p)) = 0,$$

em contradição com $d(f(x_n, f(y_n)) \geq \varepsilon$ para todo n.

■

3.2 Continuidade e Compacidade

Proposição 3.2.1 *Seja M um espaço métrico, e A um subconjunto de M, então para toda função contínua $f : M \to \mathbb{R}$ existem $a, b \in A$ de maneira que*

$$f(a) = \inf f(A)$$

e

$$f(b) = \sup f(A).$$

Demonstração: Dado que f é contínua, e A um subconjunto compacto, então $f(A)$ também é compacto. Daí, como $f(A)$ é subconjunto de $\mathbb{R}$, $f(A)$ é fechado e limitado. Deste modo ocorre que existem

$$w = \inf f(A)$$

e

$$r = \sup f(A).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existem $y_1, y_2 \in f(A)$ de maneira que

$$w \leq y_1 < w + \varepsilon$$

e

$$r - \varepsilon < y_2 \leq r$$

o que procede que

$$]w - \varepsilon, w + \varepsilon[\cap f(A) \neq \emptyset$$

e

$$]r - \varepsilon, r + \varepsilon[\cap f(A) \neq \emptyset$$

e portanto que $w, r \in f(A)$. Assim como, $f(A) = f(A)$, pois $f(A)$ é fechado, então $w, r \in f(A)$ e dessa maneira existem $a, b \in A$ tais que:

$$f(a) = w = \inf f(A)$$

e

$$f(b) = r = \sup f(A).$$

■

3.3 Conexos

Definição 3.3.1 *Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$, de M como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B. As condições $M = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$, equivalem a dizer que $A = M - B$ e $B = M - A$. Por consequência, numa cisão $M = A \cup B$, os conjuntos A, B são abertos e fechados em M.*

Nota: A cisão $M = A \cup B$ diz -se trivial quando um dos abertos, A ou B é vazio(e portanto o outro é igual a M). Assim, a cisão trivial pode ser denotada como $M = M \cup \emptyset$.

Definição 3.3.2 *Um espaço métrico M chama-se conexo quando a única cisão possível em M é a trivial. Um subconjunto W de um espaço métrico M diz-se conexo quando o subespaço $W \subset M$ é conexo. Quando W admite cisão não-trivial, dizemos que W é desconexo.*

Exemplo 3.3.3 $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *é uma cisão do espaço métrico* $\mathbb{R} - \{0\}$. *Se M é discreto todo subconjunto $A \subset M$ determina uma cisão $M = A \cup (M - A)$. Como ambos os conjuntos são abertos e a sua união é disjunta. Logo $\mathbb{R} - \{0\}$ é uma cisão não-trivial.*

Proposição 3.3.4 *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1) M é conexo;

2) M e $\emptyset$ são únicos subconjuntos de M ao mesmo tempo abertos e fechados;

3) Se $W \subset M$ tem fronteira vazia, então $W = M$ ou $W = \emptyset$.

Demonstração:

1)$\Longrightarrow$ 2) Suponhamos por contradição M conexo. Existe $A \subset M$, $A \neq M$ e $A \neq \emptyset$ com A aberto é fechado, então $M = A \cup (M - A)$ é uma cisão não-trivial de M o que é um absurdo.

2) $\Longrightarrow$ 1) Se M não fosse conexo, existiria uma cisão não-trivial $M = A \cup B$ de M. Assim, A e B seriam abertos e fechados, o que é uma contradição,

2) $\Longrightarrow$ 3) Suponha que exista $A \subset M$, $A \neq \emptyset$ e $A \neq M$ tal que $\partial A = \emptyset$. Então,

- $\partial A \cap A = \emptyset$, o que implica A é aberto.

- $\partial A \subset A$, o que implica que A é fechado, o que é uma contradição.

3) $\Longrightarrow$ 2) Seja $A \subset M$ aberto e fechado em M. Como A é aberto, então $\partial A \cap A = \emptyset$. Como A é fechado, então $\partial A = \emptyset$ e, por hipótese $A = M$ ou $A = \emptyset$.

■

Exemplo 3.3.5 *A reta $\mathbb{R}$ é um espaço conexo.*
Suponhamos por absurdo que exita uma cisão não-trivial $\mathbb{R} = A \cup B$. Tomemos $a \in A$ e $b \in B$, onde vamos supor sem perda de generalidade que $a < b$. Determine $W = \{x \in A; x < b\}$. Como $a \in W$, vemos que não é vazio. E note que b é o limite superior de W, então existe $c = \sup W$, tal que $c \leq b$.
Pela definição de supremo para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in W$ (e portanto $x \in A$) tal que $c - \varepsilon < x \leq c$. Logo $c \in \bar{A}$, e como A é fechado, tem-se$c \in A$. Sendo $b \in B$ segue que $c \neq b$, logo, $c < b$.
Por outro lado, como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < b$ e $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset A$. Logo, os pontos do $(c, c + \varepsilon)$ pertencem a W o que contradiz o fato de $c = \sup W$.

3.4 Aplicação

Teorema 3.4.1 *Seja M um espaço conexo e seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $y_1, y_2 \in f(M)$ e $y_1 < y < y_2$, então existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$.*

Demonstração: Como f contínua, então $f(M) \subset \mathbb{R}$ é conexo. Daí $f(M)$ é um intervalo e portanto $y \in f(M)$. Por isso, existe $x \in M$ de maneira que $y = f(x)$.

$\blacksquare$

Observação: O resultado acima garante que se a função real, definida e contínua num conexo, toma dois valores em $\mathbb{R}$, então essa função assume todos os valores compreendidos entre os dois.

3.5 Conexidade por Caminhos

Um caminho num espaço métrico M é uma aplicação contínua $f : I \to M$, onde $I = [0, 1]$. Os pontos $f(0)$ e $f(1)$ são chamados de ponto inicial e ponto final, respectivamente do caminho.

Num dado espaço M a relação $x \sim y$, sobre pontos de M, definida por $x \sim y \Leftrightarrow \exists$ um caminho $f : I \to M$ tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$ é uma relação de equivalência. De fato:

- $x \sim x$, para todo $x \in M$, pois $f : I \to M$ dada por $f(t) = x, \forall t \in I$, é contínua.

- $x \sim y$, então existe um caminho f de ponto inicial x e ponto final y. Considerando $g : I \to I$ dada por $g(t) = 1 - t$, então $f \circ g : I \to M$ é contínua e $(f \circ g)(0) = f(1) = y$ e $(f \circ g)(1) = f(0) = x$.

- Se $x \sim y$ e $y \sim z$ existem então caminhos f e g em M de maneira que $f(0) = x, f(1) = y$ e $g(0) = y$ e $g(1) = z$. Consideramos $h : [0, 1] \to M$ definida por
  $h(t) = f(2t)$ para $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$
  e $h(t) = g(2t - 1)$ para $\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1$
  Como $f(2t)$ coincide com $g(2t - 1)$ no ponto $t = \dfrac{1}{2}$, então h está bem definida. Além disso, h é contínua. Como $h(0) = f(0) = x$ e $h(1) = g(1) = z$, então h é um caminho de ponto inicial x e ponto final z.

Definição 3.5.1 *Um espaço métrico M é dito conexo por caminhos se para qualquer $a, b \in M$, existir um caminho f em M de maneira que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Em outras palavras, para quaisquer $a, b \in M$, vale a relação $a \sim b$.*

Proposição 3.5.2 *Todo espaço conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração: Dado M conexo por caminhos, e sendo que M é desconexo. Então existe $g : M \to \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Note que $a, b \in M$ são pontos tais que $g(a) = 0$ e $g(b) = 1$. Por hipótese existe um caminho $f : I \to M$ de modo que $f(0) = a$ e $f(1) = 1$. Daí, a aplicação $g \circ f : I \to \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora uma vez que $(g \circ f)(0)g(a) = 0$ e $(g \circ f)(1) = g(b) = 1$, o que é um absurdo pois I é conexo.

■

Observação: Não é válido a recíproca da proposição acima. Como mostraremos no exemplo intuitivo.

Exemplo 3.5.3 *No $\mathbb{R}^2$ conjunto A formado pelo ponto $p = (1, 0)$e por todos os pontos da família*

$$A_n = \{(x, \frac{x^n}{n-1}); 0 \leq x \leq 1\}, n = (2, 3, \cdots)$$

é conexo, mas não é conexo por caminhos: não existe nenhum caminho de ponto inicial p e final $q = (1, 1)$.

Exemplo 3.5.4 *Seja E um espaço vetorial normado:*
Dados $W, J \in E$, o segmento de reta de extremos W e J, é o conjunto $[W, J] = \{(1-t)W + tJ; 0 \leq t \leq 1\}$, onde $[W, J]$ é subconjunto de E, onde $I = [0, 1]$. Um subconjunto $L \subset E$ se denota convexo quando, para quaisquer $W, J \in L$, vale a inclusão $[W, J] \subset L$.
Todo convexo é conexo por caminhos (logo é conexo), porque dados quaisquer $W, J \in L$, a função $f : I \to L$ é dada por $f(t) = \{(1-t)w + tJ\}$ é uma função continua tal que $f(0) = W$ e $f(1) = J$.

Exemplo 3.5.5 *Toda bola num espaço vetorial normado é convexa.*
Seja $B = B(a, r)$ a bola aberta de centro a e raio r no espaço vetorial normado E. Dados $x, y \in B$, obtemos $|x-a| < r$ e $|y-a| < r$. Logo, para todo $t \in [0, 1]$, $|(1-t)x+ty-a| = |(1-t)(x-a) + t(y-a)| \leq (1-t)|x-a| + t|y-a| < (1-t)r + tr = r$. Logo, $x, y \in B \Rightarrow [x, y] \subset B$, e portanto B é convexa.

Capítulo 4

Topologia

4.1 Notas históricas sobre a Topologia

A topologia começou como um ramo da geometria, como um campo de estudos autônomo, de certo não é anterior a meados do século de XIX, mas podem-se encontrar investigações de natureza topológica sobre questões isoladas.

Em 1640, por René Descartes, foi feita uma das descobertas topológicas mais antigas que é a propriedade de uma superfície poliédrica fechada simples traduzido pela relação ($v-a+f=2$), onde v, a, f denotam o número de vértices, arestas e faces, respectivamente da figura. Porém, foi apena em 1752 que essa relação foi provada pela primeira vez por Leonard Euler. No entanto, Leonard Euler em 1736 já havia entrado no campo da topologia dos grafos lineares em sua abordagem do problema das pontes de Konigsberg.

Gauss também deu diversas contribuições a topologia. Das várias demonstrações que deu do teorema fundamental da álgebra, duas eram topológicas. Em 1799, Gauss utilizou técnicas em sua tese de doutorado, onde posteriormente dirigiu sua atenção para a teoria dos nós, onde hoje é um importante ramo da topologia.

O termo topologia foi introduzido por Johann Benedict Listing, em 1847 no artigo "Vorstudien zur Topologie", o primeiro livro dedicado ao assunto. Entretanto Listing já vinha usando tal termo há pelo menos 10 anos, em suas correspondências. Mas, em 1851, de todos os discípulos de Gauss, o que de longe mais contribuiu para a topologia foi Bernhard Riemann que, em sua tese de doutorado, introduziu conceitos topológicos no estudo da teoria das funções de variável complexa.

E por volta de 1865, A. F. Möbius (1790-1868) escreveu um artigo em que as superfícies poliédricas eram consideradas simplesmente como uma coleção de polígonos ligados entre si. Isso introduziu o conceito de 2-complexo em topologia. Em sua abordagem sistemática dos 2 complexos, Möbius foi levado à superfície de uma só face e uma só aresta conhecida hoje como faixa de Möbius.

Em 1873, James Clerk Maxwell (1831-1879) usou a teoria topológica da conectividade no estudo dos campos eletromagnéticos. Outros, como H. Helmholtz (1821-1894) e Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907), se incluem entre os físicos que aplicaram ideias topológicas com êxito.

Henri Poincaré (1854-1912) tem um lugar de destaque entre os primeiros a contribuírem para a topologia. Em 1895 foi publicado o primeiro artigo significativo dedicado inteiramente à topologia, com o título de Analysis situs, é de sua autoria. Foi nele que se introduziu a importante teoria da homologia em dimensão n. Foi também Poincaré quem introduziu os grupos de Betti em topologia. Através dos estudos de Poincaré, a topologia cresceu bastante, como também aumentou a quantidade de matemáticos interessados por esse campo. Nomes importantes para o estudo da topologia foi de O. Veblen (1880-1960), J. W. Alexander (1888-1971), S. Lefschetz (1884-1972), L. E. J. Brouwer (1881-1966) e M. Fréchet (1878-1973).

A noção de figura geométrica como formada de um conjunto finito de partes fundamentais ligadas entre si, do modo enfatizado por Möbius, Riemann e Poincaré, gradualmente deu lugar ao conceito cantoriano de um conjunto arbitrário de pontos, reconhecendo-se que qualquer conjunto de objetos, seja um conjunto de números, de entes algébricos, funções ou objetos matemáticos, pode constituir, em algum sentido, um espaço topológico. As pesquisas orientadas por essa última visão, muito geral, da topologia tornaram-se conhecidas como topologia conjuntiva, ao passo que as investigações mais intimamente ligadas à visão anterior tornaram-se conhecidas como topologia combinatória ou topologia algébrica.

O estudo dos espaços de funções, realizados por matemáticos notáveis como Georg Cantor, Vito Volterra, Cesare Arzelà, Jacques Hadamard, entre outros, culmina com o trabalho de Maurice Fréchet, que introduziu a noção de espaço métrico, muitas de suas características lembrando o R^n. Atualmente os espaços métricos são considerados casos específicos, mas muito importantes, de uma classe mais geral conhecida como espaços topológicos.

A formalização do conceito de espaço topológico é devida a Felix Hausdorff que definiu em 1914 o que hoje é conhecido como espaço de Hausdorff. Como se vê pela própria definição dada abaixo, a topologia moderna se baseia fortemente na teoria dos conjuntos, assim como a maior parte da matemática. O conceito final de espaço topológico é um pouco mais geral que o conceito de espaço de Hausdorff e foi introduzido posteriormente por Kazimierz Kuratowski em 1922.

Durante o século XX passou por generalizações tais e se envolveu com tantos outros ramos da matemática que hoje talvez, numa visão mais adequada, possa ser considerada, ao lado da geometria, da álgebra e da análise, como uma das partes fundamentais da matemática. Para mais detalhes veja, [1]

4.2 Introdução a Topologia

Neste capítulo iniciamos com a definição de Topologia objeto de estudo deste trabalho. Mostraremos algumas propriedades e resultados básicos desta área da matemática. Veremos que os Espaços Topológicos são espaços mais gerai que os Espaços Métricos estudados no Capítulo 1. Para um estudo mais profundo veja [3].

Definição 4.2.1 *Seja E um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathcal{T}$ de conjuntos de E é chamada topologia sobre E se:*

I) $\emptyset$, $E \in \mathcal{T}$;

II) Se $W_1, \cdots, W_n \in \mathcal{T}$ *com* $n \geq 1$, *então* $W_1 \cap \cdots \cap W_n \in \mathcal{T}$;

III) Se (W_i) *é uma família qualquer de conjuntos de* $\mathcal{T}$, *então* $\cup W_i \in \mathcal{T}$.

Nessas condições dizemos que o par $(E, \mathcal{T})$ é um espaço topológico; os membros de $\mathcal{T}$ são chamados conjuntos abertos do espaço e cada elemento de E é designado por ponto.

Exemplo 4.2.2 *Seja (M, d) um espaço métrico. A coleção dos conjuntos abertos desse espaço satisfaz os axiomas da definição de espaço topológico pois*

- $\emptyset$ e M *são abertos;*

- *Se W E H são abertos, $W \cap H$ é aberto;*

- *Se (W_i) é uma família de conjuntos abertos de (M, d), então $\cup W_i$ também é um conjunto aberto desse espaço.*

Exemplo 4.2.3 *Dado $E \neq \emptyset$, a coleção $P(E) = \mathcal{T}$ é obviamente uma topologia sobre E. Essa topologia é chamada topologia discreta sobre E. Note-se que $(E, P(E))$ é metrizável: a coleção dos abertos de (E, d), onde d é a métrica zero-um, é exatamente $P(E)$.*

I) $\emptyset, E \in \mathcal{T}$;

II) Seja $A = \{0, 1\}$ *e* $B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$, *então* $A \cap B \in \mathcal{T}$;

III) $A \cup B \in \mathcal{T}$ *portanto, a coleção dos abertos de (E, d) é exatamente $P(E)$.*

Observação: De fato, $\emptyset$ e E são abertos pois em qualquer espaço métrico, $\emptyset$ e o espaço todo são abertos e, além disso,

- O conjunto $\{0\}$ é igual a bola $B(0, d(0, 1))$;

- O conjunto $\{1\}$ é igual a bola $B(1, d(1, 0))$.

Exemplo 4.2.4 *Para todo $E \neq \emptyset$, a coleção $\{\emptyset, E\} = \mathcal{T}$ é uma topologia a que chamamos de topologia caótica.*

I) $\emptyset, E \in \mathcal{T}$;

II) $\emptyset \cap E = \emptyset \in \mathcal{T}$;

III) $\emptyset \cup E = E \in \mathcal{T}$.

Portanto, segue que a coleção $\{\emptyset, E\} = \mathcal{T}$ é uma topologia.

Exemplo 4.2.5 *Se $E = \{a, b, c, d\}$, a coleção $\{\emptyset, E, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}\} = \mathcal{T}$ satisfaz os axiomas (I), (II) e (III) de imediato.*

Exemplo 4.2.6 *Seja E um conjunto infinito. Verifique que $\{\emptyset\} \cup \{W \subset E; W^c$ é finito$\} = \mathcal{T}$. Esta topologia é chamada de cofinita sobre E.*

I) $\emptyset, E \in \mathcal{T}$;

II) Dados $W_1, W_2, ..., W_n \in \mathcal{T}$, então os conjuntos $W_1^c, W_2^c, ..., W_n^c$ são todos finitos. Assim, pela segunda lei De Morgan

$$\Big(W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n\Big)^c = W_1^c \cup W_2^c \cup ... \cup W_1^c,$$

e consequentemente $\Big(W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n\Big)^c$ *é um conjunto finito.*

Deste modo, tem-se:

$$W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n \in \mathcal{T}$$

III) Seja $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$*. Mostraremos que* $\cup_{i\in\mathbb{N}} W_i \in \mathcal{T}$*. Note que*

$$\Big(\cup_{i\in\mathbb{N}} W_i\Big)^c = \cap_{i\in\mathbb{N}} W_i^c.$$

Como

$$\cap_{i\in\mathbb{N}} W_i^c \subset W_i^c, i \in \mathbb{N}$$

e todos $W_i^c, i \in \mathbb{N}$ *são conjuntos finitos segue que*

$$\Big(\cup_{i\in\mathbb{N}} W_i\Big)^c$$

é um conjunto finito e portanto

$$\cup_{i\in\mathbb{N}} W_i \in \mathcal{T}$$

Exemplo 4.2.7 *Seja* E *um conjunto infinito. A coleção* $\{\emptyset\} \cup \{W \subset E; W^c$ *é enumerável*$\} = \mathcal{T}$ *é uma topologia em* E *(chamada de topologia coenumerável). A demonstração deste resultados segues os mesmos passos da demonstração do exemplo anterior.*

Exemplo 4.2.8 *(Topologia das uniões) Seja* D *uma classe de subconjuntos de um conjunto* $E \neq \emptyset$ *para qual se verifica o seguinte: (a)* $\emptyset, E \in D$*; (b) se* $B_1, B_2 \in D$*, então* $B_1 \cap B_2 \in D$*.*

Nessas condições a coleção de todas as reuniões possíveis de membros de D *é uma topologia sobre* E*.*
De fato, se $\mathcal{T}$ *é essa coleção temos:*

- $\emptyset, E \in \mathcal{T}$ *pois* $\emptyset, E \in D$*;*

- *Sejam* $G, H \in \mathcal{T}$*. Então* $G = \cup B_i$ *e* $\cup B_j$*, onde* (B_i) *e* (B'_j) *são famílias da classe* D*. Daí,*

$$G \cap H = (\cup B_i) \cap (\cup B'j) = \cup_{i,j}(Bi \cap B'_j)$$

  e, como cada $B_i \cap B'_j \in D$*, então* $G \cap H \in \mathcal{T}$*;*

- *Dados* $X, Y \in \mathcal{T}$*. Então* $X = \cup B_i$ *e* $Y = \cup B'j$*, onde* (Bi) *e* (B'_j) *são famílias da classe* D*. Daí,*

$$X \cup Y = (\cup B_i) \cup (\cup B'j) = \cup_{i,j}(Bi \cup B'_j),$$

e, como cada $B_i \cup B'_j \in D$*, então* $X \cup Y \in \mathcal{T}$.

Exemplo 4.2.9 *(Subespaços) Seja* $(E, \mathcal{T})$ *um espaço topológico. Dado* $W \subset E, W \neq \emptyset$*, a coleção* $\mathcal{T}_\mathcal{W} = \{\mathcal{G} \cap \mathcal{W}; \mathcal{G} \in \mathcal{T}\}$ *é uma topologia sobre* W*.*
De fato,

- $\emptyset, W \in \mathcal{T}_\mathcal{W}$.
- *Sejam* $G_1, G_2, \cdots, G_n$ *conjuntos abertos em* W*. Temos que* $G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n \subset W$*. Logo,* $G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n \subset \mathcal{T}_\mathcal{W}$.
- *Seja* $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *uma família qualquer de conjuntos abertos em* W*. Então,* $\cup_{i \in \mathbb{N}} G_i \subset W$*. Assim,* $\cup_{i \in \mathbb{N} G_i} \in \mathcal{T}_\mathcal{W}$.

A qual chamaremos de topologia induzida por $\mathcal{T}$ *sobre* W*. Logo, o par* $(W, \mathcal{T}_\mathcal{W})$ *é um subespaço de* $(E, \mathcal{T})$*.*

Definição 4.2.10 (Ponto interior) *Dado um espaço topológico* $(E, \mathcal{T})$*, o interior de um subconjunto* $A \subset E$*, que se indica por* $intA$*, é a união de todos os abertos contidos em* A*. Assim, podemos afirmar que, dado um ponto* p *do espaço,* $p \in intA$ *se, e somente se, existe* $H \in \mathcal{T}$ *de maneira que* $p \in H \subset A$*. Mais ainda* $A = intA \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$*.*

Definição 4.2.11 (Conjunto fechado) *Seja* $(E, \mathcal{T})$ *um espaço métrico. Dizemos que* $F \subset E$ *é um conjunto fechados se* F^c *é aberto, isto é,* $F^c \in \mathcal{T}$*. É claro por que os fechados do espaço são os complementares abertos.*

Exemplo 4.2.12 *Se em* $\mathbb{R}$ *a topologia considerada por* $\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{T}$*, então a coleção dos fechados desse espaço é* $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, a]; a \in \mathbb{R}\}$*.*

Definição 4.2.13 (Fecho) *Dado um espaço topológico* $(E, \mathcal{T})$*, o fecho de um subconjunto* $A \subset E$ *que se indica por* $\bar{A}$*, é a interseção de todos os fechados que contém* A*. Logo,* $\bar{A}$ *é o "menor"conjunto fechado que contém* A *e ainda:* $A = \bar{A} \Leftrightarrow A$ *fechado.*

Exemplo 4.2.14 *Quando a topologia considerada sobre* $\mathbb{R}$ *é a usual, se* $A =]a, b]$*. Então* $\bar{A} = [a, b]$*. Agora, se a topologia tomada sobre* $\mathbb{R}$ *for* $\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, x[; x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{T}$*. Então* $\bar{A} = [a, +\infty[$ *que é o "menor"fechado que contém* A*.*

Proposição 4.2.15 *Seja* A *um subconjunto de um espaço topológico* $(E, \mathcal{T})$*. Dado* $p \in E$*, então* $p \in \bar{A}$ *se, e somente se,* $G \cap A \neq \emptyset$ *para todo aberto* G *que contém* p*.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos por absurdo, que existe um aberto G tal que $p \in G$ e $G \cap A = \emptyset$. Daí G^c é fechado que contém A e não contém p, o que é um absurdo.
$(\Leftarrow)$ Se $p \notin \bar{A}$, então existe um fechado $F \supset A$ tal que $p \notin F$. Daí, F^c é um aberto que contém p cuja interseção com A é vazia o que contraria a hipótese.

∎

4.3 Topologia das Funções Contínuas

Definição 4.3.1 *Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos arbitrários. Uma função de $f : E_1 \to E_2$ se diz contínua num ponto $p \in E_1$, se dado um aberto G qualquer de E_2, $f(P) \in G$ existe um aberto H de modo que $p \in H$ e $f(H) \in G$. Se f é continua em todos os pontos de E_1, então f se diz, simplesmente contínua.*

Exemplo 4.3.2 *Se a topologia E_2 é caótica ($\tau = \{\emptyset, E_2\}$, então $f : E_1 \to E_2$ é contínua, também não importa qual a topologia considerada em E_1. De fato, se $p \in E_1$, o único aberto em E_2 quem contém $f(p)$ é o próprio E_2 e, tomando $H = E_1$), então $p \in H$ e $f(H) \subset E_2$.*

4.4 Topologia dos Compactos

Em um espaço topológico não se pode contar de um modo geral com as noções métricas, as definições devem girar em torno de abertos. A definição de compacidade segundo Heine-Borel atende a esse requisito.

Definição 4.4.1 *Um subconjunto A de um espaço topológico E se diz compacto se, para toda família (G_i) de abertos tal que $\cup G_i \supset A$ existe uma subfamília finita $(G_{i_1}, \cdots, G_{i_n})$ de maneira que $G_{i_1} \cup, \cdots, \cup G_{i_n} \supset A$. A família (G_i) é a subfamília de $(G_{i_1}, \cdots, G_{i_n})$, nessas condições, são chamadas, respectivamente, recobrimento aberto e subrecobrimento aberto de$A$. O espaço se diz compacto se o conjunto E é compacto.*

Exemplo 4.4.2 *Seja τ a topologia cofinita sobre um conjunto infinito E. Se $(G_i$ é um recobrimento aberto de E, tomemos um membro de $G_0 = E - \{a_1, \cdots, a_n\}$ dessa família. Como $a_1, \cdots, a_n \in E$, exstem $G_1, \cdots, G_n$ nesse recobrimento, de modo que $a_i \in G_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. Logo, $E \subset G_0 \cup G_1 \cup \cdots \cup G_n$ e portanto (E, τ) é compacto.*

Proposição 4.4.3 *Se E é um espaço compacto e $A \subset E$ é fechado, então A é compacto.*

Demontração: Seja (G_i) um recobrimento aberto de A. Então $(G_i \cup A^c)$ é um recobrimento aberto de E que é compacto. Assim, se $(G_i \cup A^c) \cup \cdots \cup (G_{i_n} \cup A^c) \supset E = A \subset A^c$, então $G_{i_1} \cup \cdots, G_{i_n} \supset A$.

■

4.5 Topologia dos Conexos

Como a definição de conexidade vista no Capítulo 3 se apóia em conjuntos abertos unicamente pode ela se reproduzida para espaços topológicos sem mudanças.

Definição 4.5.1 *Uma cisão-não trivial de espaço topológico* (E, τ) *é um par de abertos* G, H *ambos não vazios, tais que* $G \cap H = \emptyset$ *e* $g \cup H = E$. *Isto é,* G *e* H *forman uma partição não-trivial de* E. *Quando existe uma cisão - não trivial de um espaço* E *este se diz desconexo. Um espaço que não é desconexo recebe o nome de espaço conexo.*

Exemplo 4.5.2 *O espaço* $\mathbb{R}$ *dotado da topologia cofinita é conexo por que considerando os abertos* $G = \mathbb{R} - \{a_1, \cdots, a_p\}$ *e* $H = \mathbb{R} - \{b_1, \cdots, b_q\}$, *então* $G \cap H = \mathbb{R} - \{a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q\} \neq \emptyset$.

Exemplo 4.5.3 *Se* E *tem pelo menos dois elementos e consideremos a topologia discreta sobre* E,*então o espaço obtido é desconexo. De fato, para todo* $a \in E$, $G = \{a\}$ *e* $H = E - \{a\}$ *formam uma desconexão de* E.

Capítulo 5

Considerações Finais

A Topologia é uma área da matemática que abrange dois ramos principais, são eles a Topologia Geral e a Topologia Algébrica.

Nosso trabalho foi desenvolvido no ramo da Topologia Geral, analisamos a generalização dos conceitos de conjuntos abertos e fechados, funções contínuas, dentre outros conteúdos, onde substituímos a noção de métrica, na qual se apoia a teoria dos espaços métricos, pelo conceito de topologia.

Desta forma, concluímos que os Espaços Métricos são de suma importância para as pesquisas nos Espaços Topológicos não só pela relação com sua generalidade, mas também pela ligação com as suas características.

Para futuras pesquisas pretende-se estudar os invariantes algébricos, cuja ideia é associar objetos algébricos (número, grupo, espaço vetorial, etc.) a qualquer espaço topológico, de forma que dois espaços homeomórficos sejam associados a duas estruturas isomórficas.

Por fim, esperamos que este trabalho possa auxiliar futuras pesquisas acadêmicas na área topológica, podendo assim ajudar quem desejar aprofundar seus conhecimentos nesta área da matemática.

Referências Bibliográficas

[1] Eves, Howard *Introdução à História da Matemática*, Tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas - SP: Editora da Unicamp, 2011.

[2] DOMINGUES H. H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, Ed. Atual, São Paulo, 1982.

[3] LIMA, Elon Lages. *Elementos de Topologia Geral*, 9a ed., Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[4] LIMA, Elon Lages. *Análise Real Volume 1*, 8a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[5] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos.* Projeto Euclides. IMPA, CNPq. (1977). Livros Técnicos e Científicos, Editora.

[6] Marcon, D., *Espaços Métricos.* vol.01, 2009.

[7] ROTHER, Edna Terezinha. *Revisão sistemática X revisão narrativa.* Acta paulista de enfermagem, v.20, n. 2, p.vvi, 2007.