Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quaselineares envolvendo expoentes variáveis

por

José Lindomberg Possiano Barreiro

Campina Grande - PB
fevereiro/2014

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quaselineares envolvendo expoentes variáveis

por

José Lindomberg Possiano Barreiro

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB
fevereiro/2014

B271e Barreiro, José Lindomberg Possiano.
Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quaselineares envolvendo expoentes variáveis / José Lindomberg Possiano Barreiro.-- Campina Grande, 2014.
159f.
Orientador: Claudianor Oliveira Alves
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN-UFCG
1. Matemática. 2. Problemas quaselineares. 3. Método variacional. 4. p(x)-Laplaciano. 5. Expoentes variáveis.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2014

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves

Prof. Dr. Minbo Yang

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves
Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Fevereiro/2014

*A*os meus pais José e Maria, à minha esposa Patrícia e aos meus filhos Sofia, Igor e Gabriel.

Agradecimentos

A Deus, obrigado, Senhor, por conceder-me esta vitória; por não me abandonar nos momentos de prova. Agradeço-te, não apenas pela conquista, mas também pelos ensinamentos e trilhas que me levaram a vencer.

Em especial, ao meu orientador Prof. Claudianor, pela excelente orientação, paciência, atenção, e valiosos ensinamentos proporcionados durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais por todo o amor, carinho e dedicação.

Aos meus sogros que me apoiaram a todo instante.

Aos meus irmãos, cunhado(a)s, sobrinho(a)s pelo constante incentivo, carinho, respeito e companheirismo.

A minha esposa Patrícia e aos meus queridos filhos Sofia, Igor e Gabriel por todo carinho, incentivo e compreensão em todos os momentos desta jornada, principalmente quando estive ausente.

Aos Profs. José Valdo Abreu Gonçalves, Minbo Yang, Sérgio Herinque Monari Soares e Uberlandio Batista Severo por gentilmente terem aceito o convite para cômpor a banca examinadora.

Aos amigos do doutorado Alciônio, Gabriela, Jamilson, Marcelo e Sibério que proporcionaram boas discussões matemáticas e também momentos de descontração.

A Unidade Acadêmica de Matemática da UFCG, por ter concedido minha liberação para capacitação.

Lista de Notações

$\mathcal{M}(\Omega)$	Espaço de medidas finita
$\lVert\cdot\rVert_{h(x)}$	Norma em $L^{h(x)}(\mathbb{R}^N)$, página 12
$\lVert u\rVert_{L^{h(x)}(\Omega)}$	Norma em $L^{h(x)}(\Omega)$, página 12
$(PS)_c$	Sequência de Palais-Smale no nível c.
$\lvert A\rvert$	Medida de Lebesgue de um conjunto A.
$\Delta_{p(x)}$	$p(x)$-laplaciano, página xiii
$\gamma(Y)$	Gênero do conjunto Y.
$\int f$	Denota $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx$.
$\int_\Omega f$	Denota $\int_\Omega f(x)\,dx$.
$\rightharpoonup$	Convergência fraca.
$\operatorname{supp}\varphi$	Suporte da função φ.
$\to$	Convergência forte.
$A = o_\sigma(1)$	Desde que $A \to 0$ quando $\sigma \to 0$.
$A(h) = o(\lvert h\rvert)$	se $\dfrac{A(h)}{\lvert h\rvert} \to 0$ quando $\lvert h\rvert \to 0$
$A_n = o_n(1)$	Desde que $A_n \to 0$ quando $n \to \infty$.
$B_r(x)$	Bola aberta de centro x e raio r, e por simplicidade, escrevemos $B_r = B_r(0)$.
C e c_i	Denota constantes positivas genéricas, que podem variar de linha a linha.
$C_\lambda, C(\lambda)$	Constante real que depende de λ.
$h'(x) = \frac{h(x)}{h(x)-1}$	Expoente conjugado de $h(x)$.
h_+	Definido por $h_+ = \operatorname{ess\,sup}_\Omega h$, página 11
h_-	Definido por $h_- = \operatorname{ess\,inf}_\Omega h$, página 11
K_c	Conjunto dos pontos críticos no nível c , página 23
$p^*(x)$	Expoente crítico do Sobolev , página 13
$u \ll v$	Desde que $\inf\limits_{x\in\Omega}(v(x) - u(x)) > 0$.
$\blacksquare$	Fim de uma demonstração.
q.t.p.	Quase todo ponto, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula.

Resumo

Neste trabalho, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para Funcionais Pares, Teoria do Gênero, Princípio Variacional de Ekeland e algumas propriedades envolvendo Variedades de Nehari para obtermos existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas quasilineares envolvendo expoentes variáveis

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\} \end{cases}$$

onde Ω é um domínio em $\mathbb{R}^N$, não necessariamente limitado, $\Delta_{p(x)}$ é o operador $p(x)$-Laplaciano dado por

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\big),$$

$p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ e $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo certas condições a serem apresentadas ao longo do trabalho.

Palavras chaves: Problemas Quaselineares, Método Variacional, $p(x)$-Laplaciano, Expoentes Variáveis.

Abstract

In this work, we will use the Mountain Pass Theorem for an even Functional, Genus Theory, Ekeland's variational principle and some properties involving Nehari manifolds to obtain existence and multiplicity of solutions for the following class of quasilinear problems involving variable exponents

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\} \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, not necessarily bounded, $\Delta_{p(x)}$ is the $p(x)$-Laplacian operator given by

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\big),$$

$p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ and $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions satisfying certain conditions, which will specified be later on.

Keywords: Quasilinear Problems, Variational Method, $p(x)$-Laplacian, Variable Exponents.

Índice

Lista de Notações xi

Resumo xiii

Abstract xv

Introdução 1

1 Os espaços $L^{h(x)}(\Omega)$ e $W^{1,h(x)}(\Omega)$ 11

1.1 Resultados básicos e definições . . . 11

1.2 Propriedades do espaço $L^{h(x)}(\Omega)$ . . . 13

1.3 Espaço de Sobolev generalizado e suas propriedades . . . 15

1.3.1 Imersões . . . 16

1.4 Princípio de Concentração-Compacidade . . . 18

2 Multiplicidade de solução via teoria do gênero 21

2.1 Hipóteses . . . 21

2.2 Um teorema abstrato . . . 22

2.3 Lemas técnicos . . . 23

2.4 A condição Palais-Smale . . . 28

2.5 Demonstração do resultado principal . . . 38

3 Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quaselineares com crescimento superlinear envolvendo expoentes variáveis 39

3.1 O caso subcrítico . . . 40

3.1.1 Resultados preliminares . . . 40

3.1.2 Um resultado de compacidade . . . 47

3.1.3 Estimativas envolvendo os níveis minimax . . . 51

3.1.4 A condição Palais-Smale . . . 61

3.1.5 Demonstração do Teorema B 68
3.2 O caso crítico 69
3.2.1 Resultados preliminares 69
3.2.2 Propriedades envolvendo os níveis minimax 76
3.2.3 Relação entre os níveis $\hat{c}_{\infty}$, $c_{\lambda,\xi,k}$ e $c_{0,\xi,k}$ 81
3.2.4 Demonstração do Teorema C 87

4 Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quaselineares com expoentes variáveis e não linearidade do tipo côncavo-convexo 89

4.1 Caso subcrítico 90
4.1.1 Resultados preliminares 90
4.1.2 Um resultado abstrato 99
4.1.3 A condição Palais-Smale 107
4.1.4 Demonstração do Teorema D 109
4.1.5 Estimativas envolvendo os níveis minimax 110
4.1.6 Demonstração do Teorema E 115
4.2 Caso crítico 116
4.2.1 Lemas técnicos 116
4.2.2 Propriedades dos níveis minimax 121
4.2.3 Um resultado de compacidade 122
4.2.4 A condição Palais-Smale 123
4.2.5 Demonstração do Teorema F 124
4.2.6 Estimativas envolvendo os níveis minimax 124
4.2.7 Demonstração do Teorema G 127

A Resultados usados no texto 129

A.1 Desigualdades 129
A.2 Resultados de convergências 129
A.3 Princípio Variacional de Ekeland 131
A.4 Variedade de Nehari 132

Referências Bibliográficas 135

Introdução

Neste trabalho, estudaremos existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas quaselineares envolvendo expoentes variáveis do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\} \end{cases} \tag{P}$$

onde Ω é um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $\Delta_{p(x)}$ é o operador $p(x)$-Laplaciano dado por

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\big).$$

Este operador diferencial é uma generalização natural do operador p-Laplaciano definido por $\Delta_p u = \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\big)$, com $p > 1$ sendo uma constante real. No entanto, em algumas situações o operador $p(x)$-Laplaciano é mais complexo do que o operador p-Laplaciano, devido ao fato de que $\Delta_{p(x)}$ é não homogêneo. Outro fato interessante envolvendo os espaços com expoentes variáveis é que a definição

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}}{\int_\Omega |u|^{p(x)}}$$

resulta em geral $\lambda_1 = 0$, e apenas sob algumas condições especiais sobre $p(x)$ temos $\lambda_1 > 0$ (vide Fan et al. [35]).

Ao longo dessa tese entendemos por uma solução fraca para o problema (P) uma função $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv) = \int_\Omega f(x,u)v, \qquad \text{para todo } \ v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Observamos que as soluções fracas de (P) são precisamente os pontos críticos do funcional

$\mathcal{F}: W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \int_\Omega F(x,u)$$

com $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$.

Nos últimos anos, observamos um interesse crescente no estudo de equações e sistemas de equações com condições de crescimento envolvendo expoentes variáveis . O interesse em estudar tais problemas foi estimulado por suas aplicações em elasticidade (vide Zhikov [84]), fluidos electrorreológicos (vide Acerbi & Mingione [1], Růžička [67]), restauração de imagens (vide Chen et al. [25]), fluxo em meio porosos (vide Antontseva & Shmarevb [14]). Estes problemas físicos foram facilitados pelo desenvolvimento dos espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis. Os espaços de Lebesgue com expoentes variáveis apareceram pela primeira vez na literatura, já em 1931, em um artigo de Orlicz [62].

Nos problemas de restauração de imagem, Y. Chen, S. Levine & R. Rao em [25], propuseram um modelo baseado no $p(x)$-Laplaciano. O modelo proposto consiste em minimizar o funcional

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)} + |u(x) - I(x)|^2\,dx,$$

onde I é a imagem real, u a imagem recuperada e p é uma função variando entre 1 e 2. Nas regiões que existem arestas, a função $p(x)$ tende a 1, enquanto que nas regiões que não há arestas, $p(x)$ assume valores próximos de 2. Com isto, os autores conseguem remover os ruídos da imagem preservando as arestas.

Com relação aos fluidos electrorreológicos, podemos destacar que os mesmos são fluidos viscosos especiais, os quais são caracterizados pela sua capacidade de sofrer alterações significativas nas suas propriedades mecânicas, devido à aplicação de um campo elétrico. Algumas aplicações deste incluem: embreagens, amortecedores e equipamentos de reabilitação, etc., vide, por exemplo, Nikitczuk et al. [61], Simmonds [71], Stanway et al. [73], Wen et al. [76].

Em Růžička [67] e Diening [27], por exemplo, as equações para o movimento de fluido electrorreológico incompressível, homogêneo e isotérmico são dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div} S(v) + [\nabla v]v + \nabla\pi = f + [\nabla E]P \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases}$$

onde $v\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido em ponto do espaço-tempo, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_2)$

é o operador gradiente, $\pi\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}$ é a pressão, $[\nabla v]v$ é dado por

$$[\nabla v]v = \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial v_j} v_j \right)_{i=1,2,3},$$

$f\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ representa uma força externa, $E\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ é o campo elétrico, $P\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ é a polarização elétrica e o tensor stress $S\colon W^{1,1}_{loc} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ é da forma

$$S(v)(x) = \mu(x)\big(1 + |Dv(x)|^2\big)^{\frac{p(x)-2}{2}} Dv(x)$$

com $Dv = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T)$, onde $(\nabla v)^T$ denota a transposta do tensor ∇v.

Problemas variacionais com expoente variável foram investigados inicialmente por Zhikov [84], relacionado com o chamado fenômeno Lavrentiev. Hoje em dia, problemas variacionais e equações diferenciais com expoente variável são intensamente desenvolvidos em todo o mundo por muitos pesquisadores. Referimo-nos aos trabalhos de Acerbi & Mingione [1], Alves [4, 5], Alves & Barreiro [6], Alves & Ferreira [7, 8], Alves & Liu [9], Alves & Souto [10], Antontsev & Shmarev [13], Bonder & Silva [17], Chabrowski & Fu [24], Diening et al. [29], Fan [32], Fan & Han [33], Fan & Zhao [37, 38], Fu [41], Fu & Zhang [42, 43], Kováčik & Răkosnik [52], Diening et al. [28], Mashiyev et al. [57], Samko [68], Fan et al. [34, 39] e Fan & Zhang [36], entre outros.

Este trabalho divide-se em quatro capítulos e um apêndice e estão distribuídos da seguinte forma:

No Capítulo 1, recordaremos algumas definições e resultados envolvendo os espaços $L^{h(x)}(\Omega)$, $W^{1,h(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$.

No Capítulo 2, iremos estudar o problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda \, |u|^{q(x)-2} \, u + f(x,u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f(x,t) = a(x)\,|t|^{p(x)-2}\,t + g(x,t)$ é uma função contínua, $a \in L^\infty(\Omega)$ e $g(x,u)$ é uma perturbação de ordem inferior de $|u|^{q(x)-2}u$ no seguinte sentido: $\lim_{t\to\infty} g(x,t)/|t|^{q(x)-2}t = 0$. Admitiremos que as funções p e q satisfazem

$$1 < p_- \le p(x) \le p_+ < N \quad \text{e} \quad p_+ < q_- \le q(x) \le p^*(x) \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega} \tag{p_1}$$

com

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \bar{\Omega} \colon q(x) = p^*(x) \right\} \text{ é não vazio .} \tag{p_2}$$

Além disso, assumiremos também que

(g_1) g é ímpar com respeito a t, isto é, $g(x,-t) = -g(x,t)$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$;

$$g(x,t) = o\big(|t|^{p(x)-1}\big) \text{ quando } |t| \to 0 \text{ uniformemente em } x;$$
$$g(x,t) = o\big(|t|^{q(x)-1}\big) \text{ quando } |t| \to +\infty \text{ uniformemente em } x.$$

(g_2) $G(x,t) \leq \frac{1}{p_+} g(x,t)t$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e q.t.p. em Ω, onde $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds$.

(H_1) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} - a(x)\,|u|^{p(x)} \right) \geq \alpha \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \,|u|^{p(x)}, \quad \forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega).$$

(H_2) $p(x) = p_+$ para todo $x \in \Gamma = \{x \in \Omega \colon a(x) > 0\}$.

A hipótese (H_2) é uma condição técnica que nos ajudará provar a condição de Palais-Smale para o funcional energia associado ao problema (P_λ).

O problema (P_λ) foi estudado por Zhihui & Xinmin [83] para o caso em que os expoentes são constante, isto é, $p(x) \equiv p$ e $q(x) \equiv q$. Em Silva & Xavier [70], o problema (P_λ) também foi investigado, supondo que a função f verifica as condições:

(A_0) $\sup |f(x,s)| : x \in \Omega, |x| \leq M < +\infty$ para cada $M > 0$;

(A_1) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$ uniformemente q.t.p em Ω.

Em 2010, Bonder & Silva [17] estenderam o Princípio de Concentração-Compacidade de Lions para espaços com expoentes variáveis e provaram a existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\big) = |u|^{q(x)-2}\,u + \lambda(x)|u|^{r(x)-2}u, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado com fronteira suave, $q \leq p^*$ e o conjunto $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Resultados similares foram obtidos por Fu [41].

Usando o Princípio de Concentração-Compacidade, o Teorema do Passo da Montanha para funcionais pares e a teoria do gênero provamos um resultado de multiplicidade de soluções para (P_λ). Mais precisamente, mostramos o seguinte resultado:

Teorema A. *Suponha que a função g satisfaz (g_1) e (g_2), e que (p_1), (p_2), (H_1) e (H_2) são satisfeitos. Então, existe uma sequência $\{\lambda_k\} \subset (0, +\infty)$ com $\lambda_k > \lambda_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que, para $\lambda \in (\lambda_{k+1}, \lambda_k)$, o problema (P_λ) tem pelo menos k pares de soluções não triviais.*

A principal dificuldade em provar o Teorema A está relacionada com o fato de que a não linearidade f tem crescimento crítico, porque neste caso, não é claro que o funcional energia associado ao problema (P_λ) satisfaz a bem conhecida condição (PS), uma vez que a imersão $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$ não é compacta. Para superar esta dificuldade, usamos uma versão do lema de concentração-compacidade de Lions devido a Bonder & Silva [17] para expoentes variáveis (vide Teorema 1.4.4). Gostaríamos de mencionar que o Teorema A melhora o resultado principal encontrado em Zhihui & Xinmin [83], onde os autores consideram apenas o caso em que $p(x)$ é constante, enquanto no nosso trabalho mostramos que o resultado principal encontrado em [83] ainda é válido para um classe maior de funções $p(x)$. Os resultados deste capítulo estão publicados em Alves & Barreiro [6].

No Capítulo 3, vamos trabalhar com dois problemas. Na primeira seção denominada caso subcrítico, consideraremos

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \lambda g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}u + f(k^{-1}x)|u|^{r(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$P_{\lambda,k}$}$$

enquanto que na segunda seção consideramos o problema com crescimento crítico

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \lambda g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}u + f(k^{-1}x)\left(\xi|u|^{r(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u\right), & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{$P_{\lambda,\xi,k}$}$$

onde $p, q, r\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funções Lipschitz contínuas, $\mathbb{Z}^N$-periódicas e satisfazendo

$$1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < q_- \leq q(x) \leq r(x) \ll p^*(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{p_3}$$

Vamos assumir que as funções $f, g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são contínuas, positivas e satisfazem as seguintes condições:

(g_3) $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(k^{-1}x) = 0.$

(f_1) $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = f_\infty$.

(f_2) Existem ℓ pontos $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$ em $\mathbb{Z}^N$ com $a_1 = 0$ tais que

$$1 = f(a_i) = \max_{\mathbb{R}^N} f(x), \text{ para } 1 \leq i \leq \ell.$$

Além disso, vamos supor também que $0 < f_\infty < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

O problema $(P_{\lambda,k})$ tem sido considerado na literatura para o caso onde os expoentes são constantes, por exemplo em: Adachi & Tanaka [2], Cao & Huan-Song [21], Cao & Noussair [22], Hirano [46], Hirano & Shioji [47], Hsu et al. [49], Hu & Tang [50], Jeanjean [51], li Lin [54], Tarantello [75], Wu [81] e Wu [80] e suas referências.

Em Cao & Noussair [22], os autores estudaram a existência e multiplicidade de solução positiva e nodal para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\epsilon x)|u|^{r-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in H^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde ϵ é um parâmetro real positivo, $r \in (2, 2^*)$ e f verifica a condição (f_2). Ao usar métodos variacionais, os autores demonstraram a existência de pelo menos ℓ soluções positivas e ℓ soluções nodais se ϵ é suficientemente pequeno. Posteriormente, Wu [80] considerou o problema com uma perturbação

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(\epsilon x)|u|^{r-2}u + \lambda g(\epsilon x)|u|^{q-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in H^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{P_1}$$

onde λ é um parâmetro positivo $q \in (0, 1)$. Em [80], os autores demonstraram a existência de pelo menos ℓ soluções positivas para (P_1) quando ϵ e λ são suficientemente pequenos.

Em Hsu et al. [49], os autores consideraram a seguinte classe de problemas quaselineares

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(\epsilon x)|u|^{r-2}u + \lambda g(\epsilon x), & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}, \tag{2}$$

com $N \geq 3$ e $2 \leq p < N$. Neste artigo, os autores demonstraram o mesmo tipo de resultados encontrados Cao & Noussair [22] e Wu [80].

Motivado pelos resultados provados em [22], [49] e [80], provamos no presente trabalho a existência de múltiplas soluções para os problemas $(P_{\lambda,k})$ e $(P_{\lambda,\xi,k})$, usando o mesmo tipo de abordagem explorado nos artigos acima. No entanto, uma vez que estamos trabalhando com expoentes variáveis, algumas estimativas que valem para o caso constante não são imediatas para o caso variável e, portanto, uma análise cuidadosa é necessária para obter algumas estimativas. Aqui, por exemplo, fomos capazes de provar nossos resultados, assumindo que alguns expoentes são periódicos e $k \in \mathbb{N}$.

As principais dificuldades em trabalhar com expoente variável crítico residem nos seguintes fatos:

1. Falta de compacidade da imersão $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$;

2. Nenhuma informação sobre a "melhor constante" S da imersão $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$ no sentido que: S é atingido? Se S é atingido, existe alguma família que realiza S?

Os resultados principais deste capítulo são:

Teorema B. *Suponha que* (p_3)*,* (g_3)*,* (f_1) *e* (f_2) *ocorrem. Então, existem* $\Lambda^* > 0$ *e* $k^* \in \mathbb{N}$ *tais que o problema* $(P_{\lambda,k})$ *admite pelo menos* ℓ *soluções para* $0 \leq \lambda < \Lambda^*$ *e* $k \geq k^*$*.*

Teorema C. *Nas condições do Teorema B, existem* $\Lambda^*, \xi^* > 0$ *e* $k^* \in \mathbb{N}$ *tais que o problema* $(P_{\lambda,\xi,k})$ *admite pelo menos* ℓ *soluções para* $0 \leq \lambda < \Lambda^*$*,* $\xi \geq \xi^*$ *e* $k \geq k^*$*.*

No Capítulo 4, consideraremos os problemas $(P_{\lambda,k})$ e $(P_{\lambda,\xi,k})$ com não linearidades do tipo côncavo e convexo, ou seja, vamos supor que as funções p, q e r satisfazem as condições:

$$1 < q_- \leq q(x) \leq q_+ < p_- \leq p(x) \leq p_+ < r_- \leq r(x) \ll p^*(x). \tag{p_4}$$

e

$$\frac{q_+}{p_-} < \frac{r_+ - q_+}{r_+ - p_-} \cdot \frac{r_- - p_+}{r_- - q_-}. \tag{p_5}$$

Vamos supor ainda que

$(\tilde{g}_3)$ $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável não negativa com $g \in L^{\Theta(x)}(\mathbb{R}^N)$ onde $\Theta(x) = \frac{r(x)}{r(x)-q(x)}$.

Problemas semilineares elípticos envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexo em domínio limitado da forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x)|u|^{q-2}u + g(x)|u|^{r-2}u, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{E_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, tem sido estudados por vários pesquisadores. Para $p = 2$ e $h \equiv g \equiv 1$, Ambrosetti et al. [12] provaram que existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a equação (E_λ) admite pelo menos duas soluções positivas para $\lambda \in (0, \lambda_0)$; tem uma solução positiva para $\lambda = \lambda_0$ e não possui solução positiva se $\lambda > \lambda_0$. Em Ambrosetti et al. [11], os autores consideram equações envolvendo o p-laplacino com $1 < q < p < r < p^*$.

Em Hsu & Lin [48], Miotto & Miyagaki [60], Wu [79], foram considerados equações semilineares envolvendo não linearidade côncavo-convexo e funções peso com mudança de sinal, e nestes casos os autores obtiveram resultados de multiplicidade de soluções com respeito ao parâmetro λ via extração de sequência de Palais-Smale na variedade de Nehari.

Problemas envolvendo não linearidades do tipo côncavo e convexo com expoentes variáveis em domínio limitado foram consideradas, por exemplo, em Gasiński & Papageorgiou [44], Mihaălescu [59] e Mashiyev et al. [57], onde foi provado a existência de pelo menos duas soluções. Em $\mathbb{R}^N$ podemos citar por exemplo, Alves & Ferreira [8].

A equação semilinear elíptica

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(x)u^{q-1} + g(x)u^{r-1}, \quad \mathbb{R}^N \\ u > 0, \quad \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{E_λ}$$

onde $1 \leq q < 2 < r < 2^*$, foi considerada por Lin [56], onde o autor investigou o efeito do coeficiente $f(z)$ sobre o número de soluções de (E_λ), e obteve resultados do mesmo tipo dos encontrados em Cao & Noussair [22], Hsu et al. [49] e Wu [80]. Para $q = \lambda = 1$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ supondo que g é não negativa, $\|g\|_\infty$ pequena e tem decaimento exponencial, Zhu [85] mostrou que a equação (E_λ) admite pelo menos duas soluções positivas em $\mathbb{R}^N$. Sem a condição de decaimento exponencial Cao & Huan-Song [21] e Hirano [46] provaram que a equação (E_λ) admite pelo menos duas soluções positivas em $\mathbb{R}^N$.

Provaremos no presente trabalho a existência de múltiplas soluções para os problemas ($P_{\lambda,k}$) e ($P_{\lambda,\xi,k}$) envolvendo não linearidades do tipo côncavo e convexo, usando o mesmo tipo de abordagem explorado nos artigos Cao & Noussair [22], Hsu et al. [49], Wu [80] e Lin [56]. A dificuldade principal encontrada aqui foi obter um resultado similar ao Lema 2.6 de [56], mais precisamente, para cada $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ se $\int g(k^{-1}x)|u|^{q(x)} > 0$, então existem $t^* > 0$ e únicos números positivos $t^+ = t^+(u) < t^* < t^- = t^-(u)$ tais que t^+u e t^-u pertencem a variedade de Nehari associada ao funcional energia do problema ($P_{\lambda,k}$), com energia em t^+u negativa e em t^-u positiva.

Para o caso subcrítico, Seção 4.1, os resultados principais são:

Teorema D. *Sob as condições* $(\tilde{g}_3)$ *e* (f_1)*, existe* $\Lambda_* > 0$ *tal que para* $\lambda \in (0, \Lambda_*)$ *o problema* $(P_{\lambda,k})$ *tem pelo menos uma solução de energia mínima (ground state solution)* u_0 *com energia negativa.*

Teorema E. *Sob as condições* (p_4)*–*(p_5)*,* $(\tilde{g}_3)$ *e* (f_1)*–*(f_2)*, existem números positivos* k_* *e* $\Lambda_* = \Lambda(k_*)$*, tais que o problema* $(P_{\lambda,k})$ *admite pelo menos* $\ell + 1$ *soluções para* $0 < \lambda < \Lambda_*$ *e* $k > k_*$*.*

Resultados análogos foram obtidos para o caso crítico.

Para finalizar, no apêndice, enunciaremos algumas desigualdades que serão utilizadas ao longo do trabalho, por exemplo, a desigualdade de Simon. Também enunciaremos o Lema de Compacidade de Strauss [74], o qual será usado no Capítulo 2 e o Princípio Variacional de Ekeland usados nos Capítulos 3 e 4.

Com o intuito de tornar os capítulos autossuficientes, enunciaremos novamente, em cada capítulo os resultados principais bem como os problemas e as hipóteses consideradas na introdução.

Capítulo 1

Os espaços $L^{h(x)}(\Omega)$ e $W^{1,h(x)}(\Omega)$

Neste capítulo, recordamos algumas definições e resultados envolvendo os espaços $L^{h(x)}(\Omega)$, $W^{1,h(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Referimo-nos a Diening et al. [29], Fan et al. [34], Fan & Zhao [38], Guimarães [45], Kovǎčik & Rǎkosnik [52] para as propriedades fundamentais desses espaços.

No que segue, denotaremos por $L_+^\infty(\Omega)$ o conjunto

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) : \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} u \geq 1 \right\}$$

e assumiremos que $h \in L_+^\infty(\Omega)$.

1.1 Resultados básicos e definições

Para cada $h \in L_+^\infty(\Omega)$, definimos os números h_- e h_+ como sendo

$$h_- = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} h$$

e

$$h_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} h.$$

O espaço de Lebesgue com expoente variável $L^{h(x)}(\Omega)$ é definido por

$$L^{h(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ é mensurável } : \int_\Omega |u(x)|^{h(x)} < +\infty \right\}$$

o qual é munido da norma

$$\|u\|_{L^{h(x)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{h(x)} \leq 1\right\}.$$

Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ denotaremos a norma $\|\cdot\|_{L^{h(x)}(\Omega)}$ simplesmente por $\|\cdot\|_{h(x)}$.

Sobre o espaço $L^{h(x)}(\Omega)$, consideremos a *função modular* $\rho : L^{h(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{h(x)}.$$

Proposição 1.1.1. *Seja $u \in L^{h(x)}(\Omega)$. Então,*

1. *Se $u \neq 0$, $\|u\|_{L^{h(x)}(\Omega)} = \lambda$ se, e somente se, $\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1$.*
2. *$\|u\|_{L^{h(x)}(\Omega)} < 1 \quad (= 1; > 1)$, se, e somente se, $\rho(u) < 1 (= 1; > 1)$.*
3. *Se $\|u\|_{L^{h(x)}(\Omega)} > 1$, $\|u\|^{h_-}_{L^{h(x)}(\Omega)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{h_+}_{L^{h(x)}(\Omega)}$.*
4. *Se $\|u\|_{L^{h(x)}(\Omega)} < 1$, $\|u\|^{h_+}_{L^{h(x)}(\Omega)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{h_-}_{L^{h(x)}(\Omega)}$.*

Nas estimativas, muitas vezes é necessário alternar entre a norma e a função modular. Isto é feito através das seguintes desigualdades:

Corolário 1.1.2. *Para todo $u \in L^{h(x)}(\Omega)$, tem-se*

$$\min\left\{\|u\|^{h_-}_{L^{h(x)}(\Omega)}, \|u\|^{h_+}_{L^{h(x)}(\Omega)}\right\} \leq \int |u|^{h(x)} \leq \max\left\{\|u\|^{h_-}_{L^{h(x)}(\Omega)}, \|u\|^{h_+}_{L^{h(x)}(\Omega)}\right\}.$$

Note que as desigualdades anteriores implicam a equivalência entre convergência em norma e em modular. Mais especificamente,

Corolário 1.1.3. *Seja $\{u_n\} \subset L^{h(x)}(\Omega)$. Então,*

1. *$\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^{h(x)}(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(u_n) = 0$.*
2. *$\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^{h(x)}(\Omega)} = +\infty$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(u_n) = +\infty$.*

No corolário a seguir temos uma caracterização de um conjunto limitado em $L^{h(x)}(\Omega)$ em termos da função modular.

Corolário 1.1.4. *Um subconjunto $\mathcal{B} \subset L^{h(x)}(\Omega)$ é limitado em $L^{h(x)}(\Omega)$ se, e somente se, $\rho(\mathcal{B})$ é limitado em $\mathbb{R}$.*

1.2 Propriedades do espaço $L^{h(x)}(\Omega)$

Nesta seção, faremos uma revisão das principais propriedades dos espaços $L^{h(x)}(\Omega)$.

Proposição 1.2.1. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $L^{h(x)}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^{h(x)}(\Omega)$. Então, existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ e $Q \in L^{h(x)}(\Omega)$ tal que*

i) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.p.t em Ω;

ii) $|u_{n_k}(x)| \leq Q(x)$ q.t.p. em Ω para todo n_k.

Como usual, denotaremos por $h'(x) = \frac{h(x)}{h(x)-1}$ o expoente conjugado de $h(x)$, e definimos

$$h^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Nh(x)}{N - h(x)} & \text{if} \quad h(x) < N \\ +\infty & \text{if} \quad h(x) \geq N. \end{cases}$$

Proposição 1.2.2 (Desigualdade do tipo Hölder)**.** *Sejam $u \in L^{h(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{h'(x)}(\Omega)$. Então, $uv \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \left(\frac{1}{h_-} + \frac{1}{h'_-}\right) \|u\|_{L^{h(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{h'(x)}(\Omega)}.$$

No próximo teorema caracterizaremos o dual do espaço $L^{h(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.2.3 (Representação de Riesz)**.** *Dado $T \in \left(L^{h(x)}(\Omega)\right)^*$ existe um único $v \in L^{h(x)}(\Omega)$ tal que*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi v dx$$

para todo $\varphi \in L^{h(x)}(\Omega)$.

Quando utilizamos a desigualdade de Hölder nos espaços de Lebesgue com expoentes variáveis, muitas vezes precisamos de algumas estimativas envolvendo as normas. O Lema seguinte contém algumas de tais estimativas.

Lema 1.2.4. *Sejam $h, r \in L^\infty_+(\Omega)$ com $h(x) \leq r(x)$ q.t.p. em Ω e $u \in L^{r(x)}(\Omega)$. Então, $|u|^{h(x)} \in L^{\frac{r(x)}{h(x)}}(\Omega)$ e*

$$\left\| |u|^{h(x)} \right\|_{L^{\frac{r(x)}{h(x)}}(\Omega)} \leq \|u\|^{h_+}_{L^{r(x)}(\Omega)} + \|u\|^{h_-}_{L^{r(x)}(\Omega)},$$

ou ainda

$$\left\| |u|^{h(x)} \right\|_{L^{\frac{r(x)}{h(x)}}(\Omega)} \leq \max\left\{ \|u\|^{h_+}_{L^{r(x)}(\Omega)}, \|u\|^{h_-}_{L^{r(x)}(\Omega)} \right\}.$$

Demonstração. Inicialmente suponhamos que $\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \geq 1$. Desde que $h_+ \geq h(x)$ para todo $x \in \Omega$, então

$$\frac{h_+}{h(x)} r(x) \geq r(x),$$

e portanto

$$\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{\frac{h_+ r(x)}{h(x)}} \geq \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{r(x)}.$$

Segue da Proposição 1.1.1 que

$$\int_\Omega \left| \frac{|u|^{h(x)}}{\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{h_+}} \right|^{\frac{r(x)}{h(x)}} dx = \int_\Omega \frac{|u|^{r(x)}}{\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{\frac{h_+ r(x)}{h(x)}}} dx \leq \int_\Omega \left| \frac{|u|}{\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}} \right|^{r(x)} dx = 1,$$

implicando em

$$\left\| |u|^{h(x)} \right\|_{L^{\frac{r(x)}{h(x)}}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{h_+}.$$

De maneira análoga, se $\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq 1$, então

$$\int_\Omega \left| \frac{|u|^{h(x)}}{\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{h_-}} \right|^{\frac{r(x)}{h(x)}} dx = \int_\Omega \frac{|u|^{r(x)}}{\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{\frac{h_- r(x)}{h(x)}}} dx \leq \int_\Omega \left| \frac{|u|}{\|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}} \right|^{r(x)} dx = 1$$

resultando que

$$\left\| |u|^{h(x)} \right\|_{L^{\frac{r(x)}{h(x)}}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{h_-}.$$

Portanto,

$$\left\| |u|^{h(x)} \right\|_{L^{\frac{r(x)}{h(x)}}(\Omega)} \leq \begin{cases} \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{h_+} & \text{se} \quad \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{r(x)} \geq 1 \\ \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{h_-} & \text{se} \quad \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{r(x)} < 1, \end{cases}$$

de onde segue o resultado. ■

Os próximos três resultados são muito importantes para nossos argumentos, e suas demonstrações podem ser encontradas em Alves & Ferreira [8], Ferreira [40] e Fu [41].

Proposição 1.2.5 (Lema Brezis-Lieb, primeira versão). *Seja $\{\eta_n\} \subset L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ com*

$m \in \mathbb{N}$, *verificando*

(i) $\eta_n(x) \to \eta(x)$, *q.t.p. em* Ω;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\eta_n|_{L^{h(x)}(\Omega,\mathbb{R}^m)} < \infty$.

Então, $\eta \in L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *e*

$$\int_\Omega \left(|\eta_n|^{h(x)} - |\eta_n - \eta|^{h(x)} - |\eta|^{h(x)} \right) = o_n(1). \tag{1.1}$$

Proposição 1.2.6 (Lema Brezis-Lieb, segunda versão). *Seja* $\{\eta_n\} \subset L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *com* $m \in \mathbb{N}$, *verificando*

(i) $\eta_n(x) \to \eta(x)$, *q.t.p. em* Ω;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\eta_n|_{L^{h(x)}(\Omega,\mathbb{R}^m)} < \infty$.

Então

$$\eta_n \rightharpoonup \eta \text{ em } L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^m). \tag{1.2}$$

A próxima proposição é um resultado do tipo Brezis-Lieb.

Proposição 1.2.7 (Lema Brezis-Lieb, terceira versão). *Seja* $\{\eta_n\} \subset L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *com* $m \in \mathbb{N}$ *tal que*

(i) $\eta_n(x) \to \eta(x)$, *q.t.p. em* Ω;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\eta_n|_{L^{h(x)}(\Omega,\mathbb{R}^m)} < \infty$.

Então

$$\int_\Omega \left| |\eta_n|^{h(x)-2} \eta_n - |\eta_n - \eta|^{h(x)-2} (\eta_n - \eta) - |\eta|^{h(x)-2} \eta \right|^{h'(x)} = o_n(1). \tag{1.3}$$

1.3 Espaço de Sobolev generalizado e suas propriedades

Nesta seção, estudaremos o espaço de Sobolev generalizado $W^{1,h(x)}(\Omega)$, e apresentaremos suas principais propriedades.

O espaço de Sobolev com expoente variável $W^{1,h(x)}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,h(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{h(x)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{h(x)}(\Omega), j = 1, \dots, N \right\}.$$

Para cada $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u, ou seja

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Em $W^{1,h(x)}(\Omega)$, temos a seguinte norma

$$\|u\|_* = \|u\|_{L^{h(x)}(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^{h(x)}(\Omega)}. \tag{1.4}$$

Se $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$, definimos o gradiente de u, por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Note que podemos escrever o espaço $W^{1,h(x)}(\Omega)$ como sendo

$$W^{1,h(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{h(x)}(\Omega) \colon |\nabla u| \in L^{h(x)}(\Omega) \right\}.$$

Neste caso, é mais conveniente considerarmos sobre o espaço $W^{1,h(x)}(\Omega)$ a norma

$$\|u\|_{W^{1,h(x)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{h(x)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{h(x)}(\Omega)},$$

a qual é equivalente a $\|\cdot\|_*$

Teorema 1.3.1. *$W^{1,h(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável.*

Teorema 1.3.2. *O espaço $W^{1,h(x)}(\Omega)$ é reflexivo, se $h_- > 1$.*

O espaço $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,h(x)}(\Omega)$ com respeito a norma acima.

Teorema 1.3.3. *$W_0^{1,h(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável e reflexivo, se $h_- > 1$.*

1.3.1 Imersões

Temos alguns resultados de imersões que serão bastante úteis nos capítulos subseqüentes. A demonstração de tais resultados podem ser encontradas em Diening et al. [29] e Fan & Zhao [38]

Teorema 1.3.4. *Sejam Ω um domínio com a propriedade do cone, $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz verificando (H_1) e $q \in L_+^\infty(\Omega)$ satisfazendo $h(x) \le q(x) \le h^*(x)$ q.t.p.*

em $\overline{\Omega}$. Então, existe uma imersão contínua

$$W^{1,h(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega).$$

Teorema 1.3.5. *Sejam Ω um domínio limitado com a propriedade do cone, $h \in C(\overline{\Omega})$ verificando (H_1) e q uma função mensurável definida em Ω com $h(x) \leq q(x)$ q.t.p. em $\overline{\Omega}$ e $q \ll h^*$. Então, a imersão*

$$W^{1,h(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

é compacta.

A notação $u \ll v$ é equivalente a dizer que $\inf\limits_{x\in\Omega}(v(x) - u(x)) > 0$.

Como no caso de expoentes constantes, a desigualdade de Poincaré também é verdadeira para expoentes variáveis (ver Diening et al. [29], Fan & Zhao [38]).

Proposição 1.3.6 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja Ω um domínio limitado e $h \in C(\bar{\Omega})$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^{h(x)}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^{h(x)}(\Omega)}.$$

Consequentemente, a função $u \mapsto \|u\| = \|\nabla u\|_{L^{h(x)}(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$ equivalente a norma $\|\cdot\|_{W^{1,h(x)}(\Omega)}$ em $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$.

No espaço $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$, consideraremos a *função modular* $\rho_0 : W_0^{1,h(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho_0(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{h(x)}.$$

Proposição 1.3.7. *Seja $u \in W_0^{1,h(x)}(\Omega)$ e $\{u_n\} \subset W_0^{1,h(x)}(\Omega)$. Então, a mesma conclusão da Proposição 1.1.1 ocorre considerando $\|\cdot\|$ e ρ_0.*

Em $W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N)$, vamos considerar a *função modular* $\rho_1 : W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho_1(u) = \int \left(|\nabla u(x)|^{h(x)} + |u(x)|^{h(x)}\right).$$

Se, definimos

$$\|u\|_1 = \inf\left\{t > 0 : \int \frac{(|\nabla u|^{h(x)} + |u|^{h(x)})}{t^{h(x)}} \leq 1\right\}, \tag{1.5}$$

então $\|\cdot\|_{W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|_1$ são normas equivalentes em $W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 1.3.8. *Seja $v \in W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N)$. Então, a mesma conclusão da Proposição 1.1.1 vale considerando $\|\cdot\|_1$ e ρ_1.*

Corolário 1.3.9. *Para todo $u \in W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N)$, tem-se*

$$\min\left\{\|u\|_1^{h_-}, \|u\|_1^{h_+}\right\} \leq \int \left(|\nabla u|^{h(x)} + |u|^{h(x)}\right) \leq \max\left\{\|u\|_1^{h_-}, \|u\|_1^{h_+}\right\}.$$

1.4 Princípio de Concentração-Compacidade

Nesta seção, iremos enunciar sem demonstrar, o Princípio de Concentração-Compacidade nos espaços $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega)$ onde Ω é aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$. Para isto, usaremos alguns resultados e notações da teoria da medida encontrados em Willem [77, Seção 1.9].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Definimos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{K}(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega\}$$

e

$$\mathcal{BC}(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega) : \varphi \text{ é } \textit{limitada}\}.$$

Assim, $\mathcal{K}(\Omega) \subset \mathcal{BC}(\Omega)$. No espaço $\mathcal{BC}(\Omega)$, podemos considerar a norma

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|.$$

O espaço $C_0(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{K}(\Omega)$ em $\mathcal{BC}(\Omega)$ com relação a norma uniforme.

Definição 1.4.1. *Uma medida finita em Ω é um funcional linear contínuo sobre $C_0(\Omega)$. A norma de uma medida finita μ é definida por*

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{\varphi\in C_0(\Omega)\\ \|\varphi\|_\infty=1}} |\langle\mu,\varphi\rangle|,$$

onde $\langle\mu,\varphi\rangle = \int_\Omega \varphi d\mu$.

Denotaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$ e $\mathcal{M}^+(\Omega)$ o espaço de medidas finita e de medidas finita positiva[1] sobre Ω, respectivamente. Em $\mathcal{M}(\Omega)$, temos duas importantes convergências, definidas a seguir.

[1] Dizemos que $\mu > 0$ se, e somente se, $\langle\mu,\varphi\rangle \geq 0$ para todo $\varphi \in C_0(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$.

Definição 1.4.2. *Uma sequência* $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ *converge forte para* μ *em* $\mathcal{M}(\Omega)$*, e escrevemos*

$$\mu_n \to \mu \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega),$$

se

$$\|\mu_n - \mu\| \to 0.$$

Definição 1.4.3. *Uma sequência* $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ *converge fracamente para* μ *em* $\mathcal{M}(\Omega)$*, e escrevemos*

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega),$$

se

$$\langle \mu_n, \varphi \rangle \to \langle \mu, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

O teorema a seguir é uma versão do *Princípio de Concentração-Compacidade de Lions* devido a Bonder & Silva [17].

Teorema 1.4.4. *Sejam* $q, r \in C(\Omega)$ *tais que*

$$1 < q_- \leq q_+ < N \ \text{ e } \ 1 \leq q(x) \leq r^*(x) \ \text{ em } \Omega$$

onde Ω *um domínio limitado de* $\mathbb{R}^N$ *com fronteira suave. Seja* $\{u_n\}$ *uma sequência fracamente convergente em* $W_0^{1,r(x)}(\Omega)$ *com limite fraco* u*, e tal que*

- $|\nabla u_n|^{r(x)} \rightharpoonup \mu$ *em* $\mathcal{M}(\Omega)$*,*
- $|u_n|^{q(x)} \rightharpoonup \nu$ *em* $\mathcal{M}(\Omega)$*.*

Suponha ainda que $\mathfrak{A} = \{x \in \Omega : q(x) = r^*(x)\}$ *é não vazio. Então, para algum conjunto contável* $\mathfrak{J}$*, tem-se*

$$\nu = |u|^{q(x)} + \sum_{j \in \mathfrak{J}} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \nu_j > 0$$
$$\mu \geq |\nabla u|^{r(x)} + \sum_{j \in \mathfrak{J}} \mu_j \delta_{x_j}, \quad \mu_j > 0$$
$$S \nu_j^{1/r^*(x_j)} \leq \mu_j^{1/r(x_j)} \quad \forall\, j \in \mathfrak{J}$$

onde $\{x_j\}_{j \in \mathfrak{J}} \subset \mathfrak{A}$ *e* S *é a melhor constante na desigualdade Gagliardo-Nirenberg-Sobolev para expoentes variável, a saber*

$$S = \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\|\nabla \phi\|_{L^{r(x)}(\Omega)}}{\|\phi\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}.$$

Para concluir esta seção, lembraremos o Princípio de Concentração-Compacidade de Lions, generalizado em Fu [41], Fu & Zhang [42] e Fu & Zhang [43] para os espaço $W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N)$, possibilitando o estudo de vários problemas em $\mathbb{R}^N$ envolvendo o expoente crítico nos espaços de Sobolev com expoentes variáveis.

Teorema 1.4.5. *Seja $\{u_n\} \subset W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência verificando*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N),$$

$$|\nabla u_n|^{h(x)} + |u_n|^{h(x)} \rightharpoonup \mu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

e

$$|u_n|^{h^*(x)} \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).$$

Se

$$C^* = \sup\left\{ \int |u|^{h^*(x)} : \|u\| \leq 1,\ u \in W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N) \right\},$$

então

$$\begin{aligned} \mu \geq |\nabla u|^{h(x)} + |u|^{h(x)} + \sum_{j\in\mathcal{J}} \mu_j \delta_{x_j}, \\ \nu = |u|^{h^*(x)} + \sum_{j\in\mathcal{J}} \nu_j \delta_{x_j}, \\ \nu_j \leq C^* \mu_j^{\frac{h^*(x_j)}{h(x_j)}}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{J}$ é um conjunto contável, $\{\mu_j\}, \{\nu_j\} \subset [0,\infty)$ e $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^N$.

Capítulo 2

Multiplicidade de solução via teoria do gênero

Neste capítulo, vamos considerar a existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas quaselinear envolvendo expoentes variáveis

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u &= \lambda\,|u|^{q(x)-2}\,u + f(x,u), \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, λ é um parâmetro positivo e $p, q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são funções Lipschitz verificando

$$1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < N \quad \text{e} \quad p_+ < q_- \leq q(x) \leq p^*(x) \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega} \tag{p_1}$$

e

$$\mathcal{A} = \left\{x \in \bar{\Omega} \colon q(x) = p^*(x)\right\} \text{ é não vazio .} \tag{p_2}$$

Agora, vamos estabelecer algumas notações e o resultado principal deste capítulo.

2.1 Hipóteses

Seja $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função da seguinte forma

$$f(x,t) = a(x)\,|t|^{p(x)-2}\,t + g(x,t)$$

com $a \in L^\infty(\Omega)$ e $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando as seguintes condições:

(g_1) g é ímpar com respeito a t, isto é, $g(x,-t) = -g(x,t)$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$;

$$g(x,t) = o\big(|t|^{p(x)-1}\big) \text{ quando } |t| \to 0 \text{ uniformemente em } x;$$
$$g(x,t) = o\big(|t|^{q(x)-1}\big) \text{ quando } |t| \to +\infty \text{ uniformemente em } x.$$

(g_2) $G(x,t) \leq \frac{1}{p_+} g(x,t)t$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e q.t.p. em Ω, onde $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds$.

Além disso, assumiremos também que

(H_1) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \Big(|\nabla u|^{p(x)} - a(x)\,|u|^{p(x)} \Big) \geq \alpha \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \, |u|^{p(x)}.$$

(H_2) $p(x) = p_+$ para todo $x \in \Gamma = \{x \in \Omega \colon a(x) > 0\}$.

O resultado principal deste capítulo é

Teorema A. *Suponha que a função g satisfaz (g_1) e (g_2), e que (p_1), (p_2), (H_1) e (H_2) são satisfeitos. Então, existe uma sequência $\{\lambda_k\} \subset (0,+\infty)$ com $\lambda_k > \lambda_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que, para $\lambda \in (\lambda_{k+1}, \lambda_k)$, o problema (P_λ) tem pelo menos k pares de soluções não triviais.*

2.2 Um teorema abstrato

Quando E é um espaço de Banach e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, dizemos que uma sequência $\{v_n\}$ em E é uma sequência de Palais-Smale para I no nível c, que denotamos por $(PS)_c$, quando $I(v_n) \to c$ e $I'(v_n) \to 0$ em E^* quando $n \to \infty$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c quando toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência convergente em E.

Nesta seção, recordaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais pares, que satisfazem a condição *Palais-Smale* abaixo de um determinado valor, o qual será usado na demonstração do Teorrema A. Detalhes da demonstração podem ser encontrados em de Freitas [26] ou Rabinowitz [65].

Teorema 2.2.1. *Sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita com $E = V \oplus X$, onde V é de dimensão finita e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ um funcional par com $I(0) = 0$ satisfazendo:*

(I_1) *existem constantes $\beta, \sigma > 0$ tais que $I(u) \geq \beta > 0$, para cada $u \in \partial B_\sigma \cap X$;*

(I_2) *existe* $\Upsilon > 0$ *tal que* I *satisfaz a condição* $(PS)_c$*, para* $0 < c < \Upsilon$*;*

(I_3) *para cada subespaço de dimensão finita,* $\widetilde{E} \subset E$ *existe* $R = R(\widetilde{E}) > 0$ *tal que* $I(u) \leq 0$ *para todo* $u \in \widetilde{E} \backslash B_R(0)$*.*

Suponha que $\{e_1, \cdots, e_k\}$ *é uma base para o espaço vetorial* V*. Para* $m \geq k$*, escolha indutivamente* $e_{m+1} \notin E_m := span\{e_1, \cdots, e_m\}$*. Seja* $R_m = R(E_m)$ *e* $D_m = B_{R_m}(0) \cap E_m$*. Defina os seguintes conjuntos*

$$G_m := \{h \in C(D_m, E)\colon h \text{ é impar e } h(u) = u, \forall u \in \partial B_{R_m}(0) \cap E_m\} \tag{2.1}$$

e

$$\Gamma_j := \left\{ h(\overline{D_m \backslash Y})\colon h \in G_m, m \geq j, Y \in \Sigma, \text{ e } \gamma(Y) \leq m - j \right\} \tag{2.2}$$

onde Σ *é a família de conjuntos* $Y \subset E \backslash \{0\}$ *tais que* Y *é fechado em* E *e simétrico com respeito a* 0*, isto é,*

$$\Sigma = \{Y \subset E \backslash \{0\}\colon Y \text{ é fechado em } E \text{ e } Y = -Y\}.$$

e $\gamma(Y)$ *é o gênero de* $Y \in \Sigma$ *(ver Rabinowitz [65, p. 45]). Para cada* $j \in \mathbb{N}$*, defina*

$$c_j = \inf_{K \in \Gamma_j} \max_{u \in K} I(u). \tag{2.3}$$

Então, $0 < \beta \leq c_j \leq c_{j+1}$ *para* $j > k$*, e se* $j > k$ *e* $c_j < \Upsilon$*, temos que* c_j *é um valor crítico para* I*. Além disso, se* $c_j = c_{j+1} = \cdots = c_{j+l} = c < \Upsilon$ *para* $j > k$*, então* $\gamma(K_c) \geq l + 1$ *onde*

$$K_c = \{u \in E\colon I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}.$$

2.3 Lemas técnicos

Associado ao problema (P_λ), temos o funcional energia $J_\lambda : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} - \lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} - \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)} |u|^{p(x)} - \int_\Omega G(x, u).$$

Usando a condição (g_1), mostra-se que $J_\lambda \in C^1\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ com

$$J'_\lambda(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega |u|^{q(x)-2} uv - \int_\Omega a(x) |u|^{p(x)-2} uv - \int_\Omega g(x,u)v,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Tal fato, pode ser visto por exemplo em Guimarães [45] e Chabrowski & Fu [24]. Assim, os pontos críticos do funcional energia J_λ são soluções do problema (P_λ).

Nosso primeiro resultado consiste em mostrar que o funcional J_λ satisfaz a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha para funcionais pares (ver Teorema 2.2.1).

Lema 2.3.1. *Sob as condições (H_1) e (g_1), J_λ satisfaz (I_1).*

Demonstração. Dado $\delta > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} - a(x) |u|^{p(x)}\right) =& \frac{1+\delta}{1+\delta} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} - a(x) |u|^{p(x)}\right) \\
=& \frac{1}{1+\delta} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} - a(x) |u|^{p(x)}\right) \\
&+ \frac{\delta}{1+\delta} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} - \frac{\delta}{1+\delta} \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)} |u|^{p(x)}
\end{aligned}$$

Da condição (H_1),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} - a(x) |u|^{p(x)}\right) \geq& \frac{\alpha}{1+\delta} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} + \frac{\delta}{1+\delta} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \\
&- \frac{\delta}{1+\delta} \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)} |u|^{p(x)} \\
\geq& \frac{\delta}{1+\delta} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} + \frac{1}{1+\delta} \int_\Omega \left(\frac{\alpha}{p_+} - \frac{\delta a(x)}{p_-}\right) |u|^{p(x)}.
\end{aligned}$$

Para δ suficientemente pequeno, desde que $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, podemos supor que

$$\frac{1}{1+\delta} \left(\frac{\alpha}{p_+} - \frac{\delta a(x)}{p_-}\right) \geq \frac{1}{1+\delta} \left(\frac{\alpha}{p_+} - \frac{\delta \|a\|_{L^\infty(\Omega)}}{p_-}\right) = \alpha_0 > 0.$$

Assim, para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} - a(x) |u|^{p(x)}\right) \geq \frac{\delta}{1+\delta} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} + \alpha_0 \int_\Omega |u|^{p(x)}. \tag{2.4}$$

Afirmação 2.3.2. *Dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$|G(x,t)| \leq \frac{\epsilon}{p(x)}\,|t|^{p(x)} + \frac{C_\epsilon}{q(x)}\,|t|^{q(x)} \quad \forall (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Com efeito, da hipótese (g_1), sabemos que $g(x,t) = o\big(|t|^{q(x)-1}\big)$ quando $|t| \to \infty$ uniformemente em x, logo dado $\epsilon > 0$ existe um número $R = R(\epsilon) > 0$ tal que

$$|g(x,t)| \leq \epsilon\,|t|^{q(x)-1}, \qquad \text{para todo } x \in \overline{\Omega} \text{ e } |t| \geq R.$$

Por continuidade, existe $M > 0$ tal que

$$|g(x,t)| \leq M, \qquad \text{para todo } x \in \overline{\Omega} \text{ e } |t| \leq R.$$

Segue das desigualdades acima que

$$|g(x,t)| \leq M + \epsilon|t|^{q(x)-1}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Mais uma vez, segue da condição (g_1), que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, satisfazendo

$$|g(x,t)| \leq \epsilon|t|^{p(x)-1}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\delta, \delta]. \tag{2.7}$$

Podemos supor que $\delta < 1$. Assim, para $|t| \geq \delta$ temos que $|t|^{q(x)-1} \geq \delta^{q_+-1}$, donde

$$\frac{|g(x,t)|}{|t|^{q(x)-1}} \leq \frac{M}{|t|^{q(x)-1}} + \epsilon \leq \frac{M}{|\delta|^{q_+-1}} + \epsilon = C_\epsilon.$$

Daí,

$$|g(x,t)| \leq C_\epsilon|t|^{q(x)-1}, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } |t| \geq \delta. \tag{2.8}$$

Das desigualdades (2.7) e (2.8), resulta

$$|g(x,t)| \leq \epsilon|t|^{p(x)-1} + C_\epsilon|t|^{q(x)-1}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

de onde segue a afirmação.

Usando a definição de J_λ, e combinando (2.4) e (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{\delta}{1+\delta}\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} + \alpha_0\int_\Omega |u|^{p(x)} - \lambda\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)} - \int_\Omega \frac{\epsilon}{p(x)}|u|^{p(x)} \\ &\quad - C_\epsilon\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)} \\ &\geq \frac{\delta}{(1+\delta)p_+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} + \left(\alpha_0 - \frac{\epsilon}{p_-}\right)\int_\Omega |u|^{p(x)} - \frac{1}{q_-}(\lambda + C_\epsilon)\int_\Omega |u|^{q(x)}. \end{aligned}$$

Consequentemente, se ϵ é suficientemente pequeno,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\delta}{(1+\delta)p_+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} - \frac{1}{q_-}(\lambda + C_\epsilon)\int_\Omega |u|^{q(x)}.$$

Se $\|u\| < 1$, segue da Proposição 1.3.7 que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\delta}{(1+\delta)p_+}\|\nabla u\|^{p_+}_{L^{p(x)}(\Omega)} - \frac{(\lambda + C_\epsilon)}{q_-}\int_\Omega |u|^{q(x)}.$$

Usando as imersões de Sobolev, existe $c_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq c_1\|u\|, \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Aplicando a Proposição 1.1.1, ficamos com

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\delta}{(1+\delta)p_+}\|u\|^{p_+} - (\lambda + C_\epsilon)c_2\|u\|^{q_-},$$

isto é

$$J_\lambda(u) \geq c_3\|u\|^{p_+} - c_4\|u\|^{q_-}$$

para constantes positivas c_2, c_3 e c_4. Uma vez que, $p_+ < q_-$, se $\|u\| = \sigma > 0$ é suficientemente pequeno, existe $\beta > 0$ tal que

$$J_\lambda(u) \geq \beta > 0 \quad \text{para todo } u \in \partial B_\sigma(0)$$

finalizando a demonstração. ■

Lema 2.3.3. *Sob as condições (H_1) e (g_1), J_λ satisfaz (I_3).*

Demonstração. Seja $\widetilde{E}$ um subespaço de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ de dimensão finita.

Afirmação 2.3.4. *Dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $M > 0$ verificando*

$$F(x,t) \geq -M - \epsilon|t|^{q(x)}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

De fato, temos que

$$\frac{|f(x,t)|}{|t|^{q(x)-1}} \leq |a(x)|\frac{|t|^{p(x)-1}}{|t|^{q(x)-1}} + \frac{|g(x,t)|}{|t|^{q(x)-1}} \to 0$$

quando $|t| \to +\infty$. Daí, dado $\epsilon > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \epsilon|t|^{q(x)-1}, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } |t| \geq R_0.$$

Como f é contínua, segue que

$$|f(x,t)| \leq M_0 + \epsilon|t|^{q(x)-1}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$$

para alguma constante positiva M_0. Logo,

$$\frac{|F(x,t)|}{|t|^{q(x)}} \leq \frac{M_0}{|t|^{q(x)-1}} + \frac{\epsilon}{q_-} = o(1) \quad \text{com } |t| \to +\infty.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|F(x,t)| \leq \epsilon|t|^{q(x)}, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } |t| \geq R.$$

Por continuidade, existe uma constante $M > 0$ tal que $F(x,t) \geq -M$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $|t| \leq R$. Portanto,

$$F(x,t) \geq -M - \epsilon|t|^{q(x)}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

provando a afirmação.

De (2.9) e da definição do funcional J_λ, temos que

$$J_\lambda(u) \leq \frac{1}{p_-}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} - \frac{\lambda}{q_+}\int_\Omega |u|^{q(x)} + \epsilon\int_\Omega |u|^{q(x)} + M|\Omega|.$$

Agora, fixando $\epsilon = \frac{\lambda}{2q_+}$, concluímos que

$$J_\lambda(u) \leq \frac{1}{p_-}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} - \frac{\lambda}{2q_+}\int_\Omega |u|^{q(x)} + M|\Omega|.$$

Aplicando a Proposição 1.1.1, tem-se

$$J_\lambda(u) \leq \frac{1}{p_-} \max\{\|u\|^{p_-}, \|u\|^{p_+}\} - \frac{\lambda}{2q_+} \min\{\|u\|^{q_-}_{L^{q(x)}(\Omega)}, \|u\|^{q_+}_{L^{q(x)}(\Omega)}\} + M|\Omega|.$$

Como $\dim \widetilde{E} < +\infty$, quaisquer duas normas em $\widetilde{E}$ são equivalentes, e assim existe $c > 0$ tal que

$$J_\lambda(u) \leq \frac{1}{p_-} \max\{\|u\|^{p_-}, \|u\|^{p_+}\} - \frac{\lambda c}{2q_+} \min\{\|u\|^{q_-}, \|u\|^{q_+}\} + M|\Omega|.$$

Desde que $p_+ < q_-$ temos que $\eta(s) = \frac{1}{p_-} s^{p_+} - \frac{\lambda c}{2q_+} s^{q_-} \to -\infty$ quando $s \to +\infty$. Consequentemente, para $R > 0$ suficientemente grande a última desigualdade implica

$$J_\lambda(u) \leq \frac{1}{p_-}\|u\|^{p_+} - \frac{\lambda c}{2q_+}\|u\|^{q_-} + M|\Omega| < 0$$

para todo $u \in \widetilde{E}$ com $\|u\| \geq R$. Donde

$$J_\lambda < 0 \quad \text{sobre } \widetilde{E} \setminus B_R(0),$$

provando o lema. ∎

2.4 A condição Palais-Smale

Nesta seção, estabelecemos uma condição de compacidade para o funcional J_λ. Mostraremos que a condição de Palais-Smale vale abaixo de um certo nível, desde que o parâmetro λ seja menor do que 1.

Lema 2.4.1. *Assuma (H_1), (g_1) e (g_2). Então, toda sequência (PS) para o funcional J_λ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_λ. Então,

$$J_\lambda(u_n) \to c \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) \to 0 \quad \text{quando } n \to +\infty. \tag{2.10}$$

Note que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p_+}J'_\lambda(u_n)u_n = &\int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_+}\right)|\nabla u_n|^{p(x)} + \lambda \int_\Omega \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q(x)}\right)|u_n|^{q(x)} \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p(x)}\right) a(x)\,|u_n|^{p(x)} \\ &- \int_\Omega \left(G(x,u_n) - \frac{1}{p_+}g(x,u_n)u_n\right). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q(x)}\right)|u_n|^{q(x)} = &J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p_+}J'_\lambda(u_n)u_n + \int_\Omega \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p(x)}\right)|\nabla u_n|^{p(x)} \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_+}\right) a(x)\,|u_n|^{p(x)} \\ &+ \int_\Omega \left(G(x,u_n) - \frac{1}{p_+}g(x,u_n)u_n\right). \end{aligned}$$

Na igualdade acima, usando a hipótese (g_2) e (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)|u_n|^{q(x)} &\le \lambda \int_\Omega \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q(x)}\right)|u_n|^{q(x)} \\ &\le c + 1 + \|u_n\| + \|a\|_\infty \int_\Omega \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}\right)|u_n|^{p(x)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

para n suficientemente grande.

Por outro lado, mostra-se sem dificuldades que dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|t|^{p(x)} \le \epsilon\,|t|^{q(x)} + C_\epsilon, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Combinando a última desigualdade com (2.11),

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\int_\Omega |u_n|^{q(x)} \le c + 1 + \|u_n\| + \epsilon\,\|a\|_\infty \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}\right)\int_\Omega |u_n|^{q(x)} \\ + \|a\|_\infty \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}\right) C_\epsilon\,|\Omega|, \end{aligned}$$

o que implica

$$\left[\lambda\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right) - \|a\|_\infty \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}\right)\epsilon\right]\int_\Omega |u_n|^{q(x)} \le c + 1 + \|u_n\| + c_5,$$

onde c_5 é uma constante positiva. Fixando $\epsilon = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\left[\left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}\right)\|a\|_\infty\right]^{-1}$, vem

$$\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\int_\Omega |u_n|^{q(x)} \leq c + 1 + \|u_n\| + c_5,$$

de onde segue que

$$\int_\Omega |u_n|^{q(x)} \leq c_6\left(1 + \|u_n\|\right).$$

Usando a definição de J_λ juntamente com (2.4), obtemos

$$\frac{\delta}{(1+\delta)p_+}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} \leq J_\lambda(u_n) + \lambda\int_\Omega \frac{|u_n|}{q(x)}^{q(x)} + \int_\Omega G(x,u_n).$$

Das condições de crescimento sobre g, dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que $|G(x,t)| \leq \epsilon|t|^{q(x)} + C_\epsilon$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $t \in \mathbb{R}$, assim

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{(1+\delta)p_+}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} &\leq c + o_n(1) + \frac{\lambda}{q_-}\int_\Omega |u_n|^{q(x)} + \epsilon\int_\Omega |u_n|^{q(x)} + C_\epsilon\,|\Omega| \\
&= c + o_n(1) + \left(\frac{\lambda}{q_-} + \epsilon\right)\int_\Omega |u_n|^{q(x)} + C_\epsilon\,|\Omega| \\
&\leq c + o_n(1) + \left(\frac{\lambda}{q_-} + \epsilon\right)c_6\left(1 + \|u_n\|\right) + C_\epsilon\,|\Omega|.
\end{aligned}$$

Portanto, para n suficientemente grande

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} \leq c_7\left(1 + \|u_n\|\right)$$

onde c_7 é uma constante positiva. Se $\|u_n\| > 1$, segue da Proposição 1.3.7 que

$$\|u_n\|^{p_-} \leq c_7\left(1 + \|u_n\|\right).$$

Um vez que $p_- > 1$, a desigualdade acima implica que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. ■

Da reflexividade de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, se $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) para J_λ, então a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Como a imersão de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ é contínua, então $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$. Por outro lado, a imersão de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ em $L^{r(x)}(\Omega)$ é compacta para $1 < r_- \leq r \ll p^*$, consequentemente $u_n \to u$ em $L^{r(x)}(\Omega)$.

Do lema de concentração-compacidade para os espaços de Lebesgue com expoentes variáveis (ver Teorema 1.4.4), existem duas medidas não negativas $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$, um conjunto contável $\mathcal{J}$, pontos $\{x_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ em $\mathcal{A}$ e sequências $\{\mu_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ e $\{\nu_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subset [0,+\infty)$, tais que

$$|\nabla u_n|^{p(x)} \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{j\in\mathcal{J}} \mu_j \delta_{x_j} \text{ em } M(\Omega)$$
$$|u_n|^{q(x)} \rightharpoonup \nu = |u|^{q(x)} + \sum_{j\in\mathcal{J}} \nu_j \delta_{x_j} \text{ em } M(\Omega)$$

e

$$S\nu_j^{\frac{1}{q(x_j)}} \leq \mu_j^{\frac{1}{p(x_j)}} \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Nosso objetivo agora é estabelecer uma estimativa inferior para $\{\nu_i\}$. Para isto, precisaremos provar o seguinte lema técnico.

Lema 2.4.2. *Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo*

$$\phi(x) = 1 \text{ em } B_1(0), \;\; supp\,\phi \subset B_2(0) \text{ e } 0 \leq \phi(x) \leq 1 \;\; \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Então, para $\epsilon > 0$, $z \in \bar{\Omega}$ e $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, vale

$$\int_\Omega |u(x)\nabla\phi_\epsilon(x-z)|^{p(x)} \leq C\left\{\|u\|^{p_+}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(z))} + \|u\|^{p_-}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(z))}\right\}, \tag{2.12}$$

onde $\phi_\epsilon(x) = \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e C é uma constante independente de ϵ e z.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)\nabla\phi_\epsilon(x-z)|^{p(x)} &= \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \left|\frac{1}{\epsilon}\nabla\phi\left(\frac{x-z}{\epsilon}\right)\right|^{p(x)} \\ &= \int_{B_{2\epsilon}(z)} |u(x)|^{p(x)} \left|\frac{1}{\epsilon}\nabla\phi\left(\frac{x-z}{\epsilon}\right)\right|^{p(x)} \\ &\leq c_p \left\| |u|^{p(x)} \right\|_{L^{\frac{p^*(x)}{p(x)}}(B_{2\epsilon}(z))} \left\| \left|\frac{1}{\epsilon}\nabla\phi\left(\frac{\cdot - z}{\epsilon}\right)\right|^{p(x)} \right\|_{L^{\frac{p^*(x)}{p^*(x)-p(x)}}(B_{2\epsilon}(z))}\end{aligned}$$

onde c_p é a constante dada pela desigualdade de Hölder. Fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$\int_{B_{2\epsilon}(z)} \left|\frac{1}{\epsilon}\nabla\phi\left(\frac{x-z}{\epsilon}\right)\right|^{\frac{p(x)p^*(x)}{p^*(x)-p(x)}} = \int_{B_{2\epsilon}(z)} \left|\frac{1}{\epsilon}\nabla\phi\left(\frac{x-z}{\epsilon}\right)\right|^{N} = \int_{B_2(0)} \left|\frac{1}{\epsilon}\nabla\phi(y)\right|^{N} \epsilon^N$$
$$= \int_{B_2(0)} |\nabla\phi(y)|^N .$$

Agora, o resultado segue da Proposição 1.1.1 e do Lema 1.2.4. ■

Lema 2.4.3. *Nas condições do Lema 2.4.1, se $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) para o funcional J_λ e $\{\nu_j\}$ definido na p. 31, então para cada $j \in \mathcal{J}$, tem-se*

$$\nu_j > \frac{S^N}{\lambda^{\frac{N}{p(x_j)}}} \quad ou \quad \nu_j = 0.$$

Demonstração. Antes de tudo, para cada $\epsilon > 0$, fixemos $\phi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ como no Lema 2.4.2. Portanto, $\{\phi_\epsilon(\cdot - x_j)u_n\} \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ para quaisquer $j \in \mathcal{J}$, e por um cálculo direto, temos que $\{\phi_\epsilon(\cdot - x_j)u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim,

$$J'_\lambda(u_n)(\phi_\epsilon(\cdot - x_j)u_n) = o_n(1),$$

ou equivalentemente,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) + \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\epsilon(x-x_j) + o_n(1) =$$
$$+\lambda\int_\Omega |u_n|^{q(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) + \int_\Omega a(x)|u_n|^{p(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) + \int_\Omega g(x,u_n)u_n\phi_\epsilon(x-x_j). \quad (2.13)$$

Para cada $\delta > 0$, aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young, resulta

$$\int_\Omega \left||\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\epsilon(x-x_j)\right| \leq \delta\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} + C_\delta\int_\Omega |u_n\nabla\phi_\epsilon(x-x_j)|^{p(x)}. \quad (2.14)$$

Pelo teorema de convergência dominada de Lebesgue e da limitação de $\{u_n\}$, concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \left||\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\epsilon(x-x_j)\right| \leq \delta C_1 + C_\delta\int_\Omega |u\nabla\phi_\epsilon(x-x_j)|^{p(x)}. \quad (2.15)$$

Aplicando o Lema 2.4.2,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \left||\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\epsilon(x-x_j)\right| \\ \leq \delta C_1 + CC_\delta\left\{\|u\|^{p_+}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))}+\|u\|^{p_-}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))}\right\}. \tag{2.16}$$

Por outro lado, aplicando o Lema de Strauss (ver Lema A.2.1) com $P(x,t)=g(x,t)t$ e $Q(x,t)=|t|^{p(x)}+|t|^{q(x)}$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(x,u_n)u_n\phi_\epsilon(x-x_j)=\int_\Omega g(x,u)u\phi_\epsilon(x-x_j). \tag{2.17}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x)|u_n|^{p(x)}\phi_\epsilon(x-x_j)=\int_\Omega a(x)|u|^{p(x)}\phi_\epsilon(x-x_j). \tag{2.18}$$

Por (2.13), (2.15)–(2.18), segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) \leq{}& \lambda\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{q(x)}\phi_\epsilon(x-x_j)\\ &+\int_\Omega a(x)|u|^{p(x)}\phi_\epsilon(x-x_j)+\int_\Omega g(x,u)u\phi_\epsilon(x-x_j)\\ &+\delta C_1+CC_\delta\left[\|u\|^{p_+}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))}+\|u\|^{p_-}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))}\right],\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde C é uma constante independente de ϵ e j. Como $|\nabla u_n|^{p(x)}\rightharpoonup\mu$ e $|u_n|^{q(x)}\rightharpoonup\nu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u_n|^{p(x)}\phi_\epsilon(x-x_j)&=\int_\Omega\phi_\epsilon(x-x_j)d\mu\\ &\geq\int_{B_\epsilon(x_j)}\phi_\epsilon(x-x_j)d\mu=\int_{B_\epsilon(x_j)}d\mu=\mu(B_\epsilon(x_j))\\ &\geq\mu(\{x_j\})=\mu_j\end{aligned}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|u_n|^{q(x)}\phi_\epsilon(x-x_j)=\int_{B_{2\epsilon}(x_j)}\phi_\epsilon(x-x_j)d\nu\leq\int_{B_{2\epsilon}(x_j)}d\nu=\nu(B_{2\epsilon}(x_j))\leq\nu_j.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mu_j &\leq \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) \\
&\leq \lambda\nu_j + \int_{B_{2\epsilon}(x_j)} a(x)|u|^{p(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) + \int_{B_{2\epsilon}(x_j)} g(x,u)u\phi_\epsilon(x-x_j) \\
&\quad + \delta C_1 + CC_\delta\left[\|u\|^{p_+}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))} + \|u\|^{p_-}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))}\right]. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$, ficamos com

$$\mu_j \leq \lambda\nu_j.$$

Donde,

$$S\nu_j^{\frac{1}{p^*(x_j)}} \leq \mu_j^{\frac{1}{p(x_j)}} \leq (\lambda\nu_j)^{\frac{1}{p(x_j)}},$$

e assim

$$\nu_j \geq \frac{S^N}{\lambda^{\frac{N}{p(x_j)}}} \quad \text{ou} \quad \nu_j = 0.$$

■

Agora, estamos em condições de demonstrar que a condição de Palais-Smale para o funcional J_λ vale abaixo de um certo nível. Precisamente, vamos demonstrar o seguinte lema.

Lema 2.4.4. *Assuma (H_1)–(H_2) e (g_1) – (g_2). Se $\lambda < 1$, então J_λ satisfaz a condição $(PS)_d$ para $d < \lambda^{1-\frac{N}{p_+}}\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right) S^N$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional energia J_λ com $d < \lambda^{1-\frac{N}{p_+}}\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right) S^N$, isto é

$$J_\lambda(u_n) = d + o_n(1) \;\text{ e }\; J'_\lambda(u_n) = o_n(1).$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
d &= \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) \qquad (2.21)\\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p_+} J'_\lambda(u_n)u_n \Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \Big[\int_\Omega \Big(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_+} \Big) |\nabla u_n|^{p(x)} + \lambda \int_\Omega \Big(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p^*(x)} \Big) |u_n|^{q(x)}\\
&\quad + \int_\Omega \Big(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p(x)} \Big) a(x)|u_n|^{p(x)} - \int_\Omega \Big(G(x,u_n) - \frac{1}{p_+} g(x,u_n)u_n \Big) \Big]. \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Segue das condições (H_1) e (H_2), que

$$
d \geq \lambda \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-} \right) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q(x)}. \tag{2.23}
$$

Recordando que

$$
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q(x)} = \int_\Omega |u|^{q(x)} + \sum_{j\in\mathcal{J}} \nu_j \geq \nu_j,
$$

segue que, se $v_j > 0$ para algum $j \in \mathcal{J}$, então

$$
d \geq \lambda \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-} \right) \nu_j \geq \lambda \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-} \right) \frac{S^N}{\lambda^{\frac{N}{p(x_j)}}}.
$$

Assim, para $\lambda < 1$

$$
d \geq \lambda \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-} \right) \left(\frac{S}{\lambda^{\frac{1}{p_+}}} \right)^N = \lambda^{1-\frac{N}{p_+}} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-} \right) S^N, \tag{2.24}
$$

o que é um absurdo. Portanto, devemos ter $\nu_j = 0$ para todo $j \in \mathcal{J}$, implicando

$$
\int_\Omega |u_n|^{q(x)} \to \int_\Omega |u|^{q(x)}. \tag{2.25}
$$

Combinando o limite acima com o Lema 1.2.5, obtemos

$$
\int_\Omega |u_n - u|^{q(x)} \to 0 \quad \text{com } n \to \infty,
$$

logo pela Proposição 1.1.1,

$$
u_n \to u \text{ em } L^{q(x)}(\Omega). \tag{2.26}
$$

Denotemos por $\{P_n\}$ a sequência dada por

$$P_n(x) = \big(|\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\big)\nabla(u_n(x) - u(x)). \tag{2.27}$$

Da definição de P_n, vem

$$\int_\Omega P_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla u - \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla(u_n - u).$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla(u_n - u) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty, \tag{2.28}$$

o que implica

$$\int_\Omega P_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla u + o_n(1).$$

Por outro lado, como $J'_\lambda(u_n)u_n = o_n(1)$ e $J'_\lambda(u_n)u = o_n(1)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega P_n =& o_n(1) + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q(x)} + \int_\Omega a(x)|u|^{p(x)} + \int_\Omega g(x, u_n)u_n \\ & - \lambda \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2}u_n u - \int_\Omega a(x)|u_n|^{p(x)-2}u_n u - \int_\Omega g(x, u_n)u.\end{aligned}$$

Combinando (2.25) com o Lema de Strauss (ver Lema A.2.1), concluímos que

$$\int_\Omega P_n \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Consideremos os seguintes conjuntos

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega \,/\, p(x) \geq 2\} \quad \text{e} \quad \Omega_- = \{x \in \Omega \,/\, 1 < p(x) < 2\}\,.$$

Segue do Lema A.1.2 e da definição de P_n,

$$P_n(x) \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p_+}}{p_+}\,|\nabla u_n - \nabla u|^p & \text{se} \quad p(x) \geq 2 \\ (p_- - 1)\frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p(x)}} & \text{se} \quad 1 < p(x) < 2, \end{cases} \tag{2.29}$$

consequentemente,

$$\int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} = o_n(1). \tag{2.30}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} \leq C \, \|g_n\|_{L^{\frac{2}{p(x)}}(\Omega_-)} \|h_n\|_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(\Omega_-)},$$

onde

$$g_n(x) = \frac{|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^{p(x)}}{(|\nabla u_n(x)| + |\nabla u(x)|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}},$$

$$h_n(x) = (|\nabla u_n(x)| + |\nabla u(x)|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}.$$

e C é uma constante positiva. Por cálculos diretos, $\{\|h_n\|_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(\Omega_-)}\}$ é uma sequência limitada e

$$\int_{\Omega_-} |g_n|^{\frac{2}{p(x)}} \leq C \int_{\Omega_-} P_n(x).$$

Logo,

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.31}$$

De (2.26), (2.30) e (2.31), deduzimos que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. ■

Lema 2.4.5. *Sob as condições* (g_1) *e* (H_1)*, existe uma sequência* $\{M_m\} \subset (0, +\infty)$ *independente de* λ *com* $M_m \leq M_{m+1}$*, tal que para todo* $\lambda > 0$

$$c_m^\lambda = \inf_{K \in \Gamma_m} \max_{u \in K} J_\lambda(u) < M_m. \tag{2.32}$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} c_m^\lambda &= \inf_{K \in \Gamma_m} \max_{u \in K} J_\lambda(u) \\ &= \inf_{K \in \Gamma_m} \max_{u \in K} \left\{ \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} - \int_\Omega \frac{\lambda}{q(x)} |u|^{q(x)} - \int_\Omega F(x,u) \right\} \\ &\leq \inf_{K \in \Gamma_m} \max_{u \in K} \left\{ \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} - \int_\Omega F(x,u) \right\}. \end{aligned}$$

Seja

$$M_m = \inf_{K \in \Gamma_m} \max_{u \in K} \left\{ \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} - \int_\Omega F(x,u) \right\} + 1.$$

Por definição do conjunto Γ_m e por propriedades do ínfimo de um conjunto, segue que

$$M_m \leq M_{m+1}.$$

Desde que $F(x,t) \leq c_1 + c_2|t|^{q(x)}$, concluímos que $M_m < \infty$, provando o resultado. ∎

2.5 Demonstração do resultado principal

Para cada $k \in \mathbb{N}$, escolha λ_k tal que $M_k < \lambda_k^{1-\frac{N}{p_+}} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right) S^N$. Assim, para $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k-1}]$,

$$0 < c_1^\lambda \leq c_2^\lambda \leq \cdots \leq c_k^\lambda < M_k \leq \lambda^{1-\frac{N}{p_+}} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right) S^N.$$

Pelo Teorema 2.2.1, os níveis $c_1^\lambda \leq c_2^\lambda \leq \cdots \leq c_k^\lambda$ são valores críticos do funcional J_λ. Se

$$c_1^\lambda < c_2^\lambda < \cdots < c_k^\lambda,$$

o funcional J_λ tem pelo menos k pontos críticos. Agora, se $c_j^\lambda = c_{j+1}^\lambda$ para algum $j = 1, 2, \cdots, k$, segue do Teorema 2.2.1 que $K_{c_j^\lambda}$ é um conjunto infinito (ver Rabinowitz [65, Cap. 7]). Então, neste caso, o problem (P_λ) tem infinitas soluções. Portanto, em qualquer um dos casos, o problema (P_λ) possui pelo menos k pares de soluções não triviais.

Capítulo 3

Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quaselineares com crescimento superlinear envolvendo expoentes variáveis

Conforme foi dito na introdução, neste capítulo vamos considerar dois problemas variantes de (P), mais especificamente

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \lambda g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}u + f(k^{-1}x)|u|^{r(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{$P_{\lambda,k}$}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \lambda g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}u + f(k^{-1}x)\left(\xi|u|^{r(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u\right), & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{$P_{\lambda,\xi,k}$}$$

onde λ, ξ e k são parâmetros não negativos com $k \in \mathbb{N}$. Para mostrar multiplicidade de soluções para os problemas acima, utilizamos o Princípio Variacional de Ekeland, algumas propriedades envolvendo a variedade de Nehari e o Princípio de Concentração-Compacidade de Lions devido a Fu [41] e Fu & Zhang [42, 43].

Vamos supor que $p, q, r : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções Lipschitz, $\mathbb{Z}^N$-periódicas e satisfazendo

$$1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < q_- \leq q(x) \leq r(x) \ll p^*(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{p_3}$$

Dizemos que uma função mensurável $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{Z}^N$-periódica se

$$h(x+z) = h(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall z \in \mathbb{Z}^N.$$

Neste capítulo e no próximo vamos considerar $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ munido da norma

$$\|u\| = \|u\|_1 = \inf\left\{t > 0 : \int \frac{(|\nabla u|^{h(x)} + |u|^{h(x)})}{t^{h(x)}} \leq 1\right\}.$$

3.1 O caso subcrítico

Para obtermos multiplicidade de soluções para o problema $(P_{\lambda,k})$, vamos assumir que as funções $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são contínuas, positivas e satisfazem as seguintes condições:

(g_3) $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0$.

(f_1) $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = f_\infty$.

(f_2) Existem ℓ pontos $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$ em $\mathbb{Z}^N$ com $a_1 = 0$ tais que

$$1 = f(a_i) = \max_{\mathbb{R}^N} f(x), \text{ para } 1 \leq i \leq \ell.$$

Além disso, vamos supor também que $0 < f_\infty < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

O resultado principal desta seção é:

Teorema B. *Suponha que (p_3), (g_3), (f_1) e (f_2) ocorrem. Então, existem $\Lambda^* > 0$ e $k^* \in \mathbb{N}$ tais que o problema $(P_{\lambda,k})$ admite pelo menos ℓ soluções para $0 \leq \lambda < \Lambda^*$ e $k \geq k^*$.*

3.1.1 Resultados preliminares

Associado ao problema $(P_{\lambda,k})$, temos o funcional energia $J_{\lambda,k} : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_{\lambda,k}(u) = \int \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda \int \frac{g(k^{-1}x)}{q(x)}|u|^{q(x)} - \int \frac{f(k^{-1}x)}{r(x)}|u|^{r(x)}.$$

Temos que $J_{\lambda,k} \in C^1\left(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ com

$$J'_{\lambda,k}(u)v = \int \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv\right) - \lambda \int g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}uv$$
$$- \int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)-2}uv,$$

para todo $u, v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Assim, os pontos críticos do funcional $J_{\lambda,k}$ são soluções do problema ($P_{\lambda,k}$). Como $J_{\lambda,k}$ não é limitado inferiormente sobre $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, consideraremos o funcional $J_{\lambda,k}$ restrito a *variedade de Nehari* $\mathcal{M}_{\lambda,k}$, dada por

$$\mathcal{M}_{\lambda,k} = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \colon J'_{\lambda,k}(u)u = 0\right\}$$

e o nível

$$c_{\lambda,k} = \inf_{u \in \mathcal{M}_{\lambda,k}} J_{\lambda,k}(u).$$

Usando argumentos bem conhecidos, prova-se que $c_{\lambda,k}$ é o nível de passo da montanha do funcional $J_{\lambda,k}$.

Para $f \equiv 1$ e $\lambda = 0$, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = |u|^{r(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{P_∞}$$

Associado ao problema (P_∞), temos o funcional energia $J_\infty : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\infty(u) = \int \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \int \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)},$$

e

$$c_\infty = \inf_{u \in \mathcal{M}_\infty} J_\infty(u),$$

e a variedade de *variedade de Nehari*

$$\mathcal{M}_\infty = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \colon J'_\infty(u)u = 0\right\}.$$

Para $f \equiv f_\infty$ e $\lambda = 0$, fixemos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f_\infty|u|^{r(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{P_{f_∞}}$$

e como acima, denotemos por $J_{f_\infty}, c_{f_\infty}$ e $\mathcal{M}_{f_\infty}$ o funcional energia, o nível o passo da montanha e a variedade de Nehari associados a (P_{f_∞}) respectivamente.

Lema 3.1.1 (Propriedade local). *Dado $\Lambda > 0$, existem constantes positivas β e σ (independentes de k), tais que $J_{\lambda,k}(u) > \beta > 0$ para todo $\lambda \in (0, \Lambda]$ com $\|u\| = \sigma$.*

Demonstração. Da definição de $J_{\lambda,k}$ juntamente com as condições (g_3) e (f_2), resulta

$$J_{\lambda,k}(u) \geq \frac{1}{p_+}\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \frac{\lambda}{q_-}\|g\|_\infty \int |u|^{q(x)} - \frac{1}{r_-}\int |u|^{r(x)}.$$

Se $\|u\| < 1$, pela Proposição 1.3.8 e pelo Teorema 1.3.4,

$$J_{\lambda,k}(u) \geq \frac{1}{p_+}\|u\|^{p_+} - \frac{\lambda}{q_-}\|g\|_\infty c_1\|u\|^{q_-} - \frac{c_2}{r_-}\|u\|^{r_-}$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas. Uma vez que $p_+ < q_- \leq r_-$, fixando $\sigma > 0$ suficientemente pequeno de sorte que

$$\frac{1}{p_+}\sigma^{p_+} - \frac{\Lambda}{q_-}\|g\|_\infty c_1\sigma^{q_-} - \frac{c_2}{r_-}\sigma^{r_-} \geq \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+}.$$

Se $0 < \lambda < \Lambda$,

$$J_{\lambda,k}(u) \geq \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+} = \beta > 0 \quad \text{on } \partial B_\sigma(0),$$

estabelecendo o resultado. ■

O resultado seguinte refere-se ao comportamento de $J_{\lambda,k}$ sobre $\mathcal{M}_{\lambda,k}$.

Lema 3.1.2. *O funcional $J_{\lambda,k}$ é limitado inferiormente e coercivo sobre $\mathcal{M}_{\lambda,k}$.*

Demonstração. Para cada $u \in \mathcal{M}_{\lambda,k}$, tem-se $J'_{\lambda,k}(u)u = 0$. Daí,

$$\lambda \int g(k^{-1}x)|u|^{q(x)} = \int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)}. \tag{3.1}$$

Segue da definição de $J_{\lambda,k}$ juntamente com a última igualdade,

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,k}(u) &\geq \frac{1}{p_+}\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \frac{\lambda}{q_-}\int g(k^{-1}x)|u|^{q(x)} - \frac{1}{r_-}\int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)} \\
&= \frac{1}{p_+}\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \frac{1}{r_-}\int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)} \\
&\quad - \frac{1}{q_-}\left(\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)}\right). \\
&= \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) + \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right)\int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)}
\end{aligned}$$

Por hipótese $p_+ < q_- \leq r_-$, e assim

$$J_{\lambda,k}(u) \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right) \int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right), \quad \text{para todo } u \in \mathcal{M}_{\lambda,k} \tag{3.2}$$

mostrando que $J_{\lambda,k}$ é limitado inferiormente e coercivo em $\mathcal{M}_{\lambda,k}$. ∎

Corolário 3.1.3. *Se $\{u_n\}$ é uma sequência em $\mathcal{M}_{\lambda,k}$ com $J_{\lambda,k}(u_n) \to c_{\lambda,k}$, então $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Da desigualdade (3.2) resulta que

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \leq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)^{-1} J_{\lambda,k}(u_n) \leq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)^{-1} (c_{\lambda,k} + 1)$$

para n suficientemente grande. Aplicando a Proposição 1.3.8 concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. ∎

O próximo lema estabelece que a variedade de Nehari $\mathcal{M}_{\lambda,k}$ tem uma distância positiva da origem.

Lema 3.1.4. *Dado $\Lambda > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\|u\| > \delta, \quad \forall (u, \lambda, k) \in \mathcal{M}_{\lambda,k} \times [0, \Lambda] \times \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Consequentemente, pela Proposição 1.3.8, existe $\eta > 0$ verificando

$$\rho_1(u) \geq \eta, \quad \forall (u, \lambda, k) \in \mathcal{M}_{\lambda,k} \times [0, \Lambda] \times \mathbb{N}.$$

Demonstração. Suponha por contradição que (3.3) não vale. Então, existe $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_{\lambda,k}$ tal que

$$\|u_n\| \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Deste que $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_{\lambda,k}$ e $\|f\|_\infty \leq 1$, por (3.1) obtemos

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \leq \lambda \|g\|_\infty \int |u_n|^{q(x)} + \int |u_n|^{r(x)}.$$

Pelas Proposições 1.3.7 e 1.2.4, obtemos

$$\begin{aligned}\min\left\{\|u_n\|^{p_-},\|u_n\|^{p_+}\right\} &\leq \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)}+|u_n|^{p(x)}\right)\\ &\leq \lambda\|g\|_\infty \max\left\{\|u_n\|_{q(x)}^{q_-},\|u_n\|_{q(x)}^{q_+}\right\}+\max\left\{\|u_n\|_{r(x)}^{r_-},\|u_n\|_{r(x)}^{r_+}\right\}.\end{aligned}$$

Usando as imersões de Sobolev, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$\min\left\{\|u_n\|^{p_-},\|u_n\|^{p_+}\right\} \leq \Lambda\|g\|_\infty c_1 \max\left\{\|u_n\|^{q_-},\|u_n\|^{q_+}\right\}+c_2\max\left\{\|u_n\|^{r_-},\|u_n\|^{r_+}\right\},$$

e portanto, para n suficientemente grande,

$$\|u_n\|^{p_+} \leq \Lambda c_1\|g\|_\infty\|u_n\|^{q_-}+c_2\|u_n\|^{r_-} \leq \left(\Lambda c_1\|g\|_\infty+c_2\right)\|u_n\|^{q_-}$$

ou equivalentemente,

$$\left(\Lambda c_1\|g\|_\infty+c_2\right)^{-1} \leq \|u_n\|^{q_--p_+},$$

de onde obtemos um absurdo, pois $p_+<q_-$, provando o resultado. ∎

Corolário 3.1.5. *Seja $E_{\lambda,k}(u)=J'_{\lambda,k}(u)u$. Então, existe $\eta_0>0$ tal que*

$$E'_{\lambda,k}(u)u<-\eta_0, \quad \forall (u,\lambda,k)\in\mathcal{M}_{\lambda,k}\times[0,\Lambda]\times\mathbb{N}.$$

Demonstração. Note que

$$E'_{\lambda,k}(u)u=\int p(x)\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)-\lambda\int q(x)g(k^{-1}x)|u|^{q(x)}-\int r(x)f(k^{-1}x)|u|^{r(x)}$$

para todo $u\in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Da definição de $\mathcal{M}_{\lambda,k}$,

$$\begin{aligned}E'_{\lambda,k}(u)u &\leq p_+\int\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)-\lambda q_-\int g(k^{-1}x)|u|^{q(x)}-r_-\int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)}\\ &=(p_+-q_-)\int\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)+(q_--r_-)\int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)}.\end{aligned}$$

Desde que $p_+<q_-\leq r_-$ e f é uma função não negativa segue que

$$E'_{\lambda,k}(u)u\leq(p_+-q_-)\int\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right).$$

Aplicando o Lema 3.1.4, concluímos que

$$E'_{\lambda,k}(u) < -(q_- - p_+)\,\eta,$$

finalizando a prova. ∎

Lema 3.1.6. *Se $u \in \mathcal{M}_{\lambda,k}$ é um ponto crítico de $J_{\lambda,k}$ restrito a $\mathcal{M}_{\lambda,k}$, então u é ponto crítico de $J_{\lambda,k}$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{M}_{\lambda,k}$ um ponto crítico de $J_{\lambda,k}$ restrito a variedade $\mathcal{M}_{\lambda,k}$. Então existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'_{\lambda,k}(u) = \tau E'_{\lambda,k}(u).$$

Como $J'_{\lambda,k}(u)u = 0$, temos que $\tau E'_{\lambda,k}(u) = 0$. Pelo Corolário 3.1.5, sabemos que $E'_{\lambda,k}(u)u < 0$, logo devemos ter $\tau = 0$. Portanto,

$$J'_{\lambda,k}(u) = 0,$$

implicando que u é ponto crítico de $J_{\lambda,k}$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. ∎

Teorema 3.1.7. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e $J'_{\lambda,k}(u_n) \to 0$ com $n \to \infty$. Então, para alguma subsequência, $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Além disso, $J'_{\lambda,k}(u) = 0$.*

Demonstração. Seja $R > 0$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\phi \equiv 0 \quad \text{se} \quad |x| \geq 2R, \quad \phi \equiv 1 \quad \text{se} \ |x| \leq R \quad \text{e} \quad 0 \leq \phi(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Usando os mesmos argumente da prova do Lema 2.4.4, considerando a sequência $\{P_n\}$ dada por (2.27), mostra-se que

$$\int_{B_R} P_n = \int_{B_R} \phi P_n \leq \int |\nabla u_n|^{p(x)}\phi - \int |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla u \phi + o_n(1).$$

De $J'_{\lambda,k}(u_n)(\phi u_n) = o_n(1)$ e $J'_{\lambda,k}(u_n)(\phi u) = o_n(1)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_R} P_n \leq o_n(1) &- \int |\nabla u_n|^{p(x)-2}(u_n - u)\nabla u_n \nabla \phi \\ &- \int |u_n|^{p(x)-2}u_n(u-u_n)\phi + \lambda \int g(k^{-1}x)|u_n|^{q(x)-2}u_n(u_n-u)\phi \\ &+ \int f(k^{-1}x)|u_n|^{r(x)-2}u_n(u_n-u)\phi.\end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades triangular e de Cauchy-Schwartz, ficamos com

$$\begin{aligned}\int_{B_R} P_n \leq o_n(1) &+ c_1 \int_{B_{2R}} |\nabla u_n|^{p(x)-1}|u_n - u| \\ &+ \int_{B_{2R}} |u_n|^{p(x)-1}|u_n-u| + \lambda\|g\|_\infty \int_{B_{2R}} |u_n|^{q(x)-1}|u_n-u| \\ &+ \int_{B_{2R}} |u_n|^{r(x)-1}|u_n-u|.\end{aligned}$$

Segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} P_n \leq o_n(1) &+ 2c_1 \left\| |\nabla u_n|^{p(x)-1} \right\|_{L^{p'(x)}B_{2R}} \|u_n - u\|_{L^{p(x)}(B_{2R})} \\ &+ 2\left\| |u_n|^{p(x)-1} \right\|_{L^{p'(x)}(B_{2R})} \|u_n - u\|_{L^{p(x)}(B_{2R})} \\ &+ 2\left\| |u_n|^{q(x)-1} \right\|_{L^{q'(x)}(B_{2R})} \|u_n - u\|_{L^{q(x)}(B_{2R})} \\ &+ 2\left\| |u_n|^{r(x)-1} \right\|_{L^{r'(x)}(B_{2R})} \|u_n - u\|_{L^{r(x)}(B_{2R})}.\end{aligned}$$

Uma vez que a imersão $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{s(x)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ é compacta para toda função mensurável s, satisfazendo $p \leq s \ll p^*$ e $\{u_n\}$ é uma sequência limitada, concluímos que

$$\int_{B_R} P_n \to 0 \quad \text{com } n \to \infty.$$

Considerando os conjuntos

$$B_R^+ = \{x \in B_R \colon p(x) \geq 2\} \qquad \text{e} \quad B_R^- = \{x \in B_R \colon 1 < p(x) < 2\}$$

e procedendo como na prova do Lema 2.4.4 (vide (2.30) e (2.31)), mostra-se que $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ q.t.p. em B_R. Como R é arbitrário, segue que para alguma subsequência

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \qquad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Como $\{|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\}$ é limitada em $(L^{p'(x)}(\mathbb{R}^N))^N$ e $|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \to |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, o Lema de Brezis-Lieb (ver Lema 1.2.6) implica

$$|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \text{ em } (L^{p'(x)}(\mathbb{R}^N))^N.$$

De maneira análoga, temos que

$$|u_n|^{s(x)-2}u_n \rightharpoonup |u|^{s(x)-2}u \text{ em } L^{s'(x)}(\mathbb{R}^N)$$

para toda função mensurável s verificando $p \leq s \leq p^*$. Usando o fato que $J'_{\lambda,k}(u_n)v = o_n(1)$ para todo $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ juntamente com os dois últimos limites, obtemos que $J'_{\lambda,k}(u)v = 0$ para todo $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, finalizando a prova. ■

3.1.2 Um resultado de compacidade

O Teorema a seguir generaliza para os espaços com expoentes variáveis, um resultado de compacidade na variedade de Nehari feito para expoentes constantes devido a Alves [3].

Teorema 3.1.8. *Suponha que a condição (p_3) se verifica e seja $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\infty$ uma sequência com $J_\infty(u_n) \to c_\infty$. Então,*

I. *$u_n \to u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$,*

ou

II. *Existe $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ com $|y_n| \to +\infty$ e $w \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $w_n(x) = u_n(x+y_n) \to w$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e $J_\infty(w) = c_\infty$.*

Demonstração. De maneira similar ao Corolário 3.1.3, tem-se que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada e, da reflexividade de $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, existe $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando o princípio variacional de Ekeland, existe uma sequência $\{w_n\}$ em $\mathcal{M}_\infty$ satisfazendo

$$w_n = u_n + o_n(1), \quad J_\infty(w_n) \to c_\infty$$

e

$$J'_\infty(w_n) - \tau_n E'_\infty(w_n) = o_n(1), \tag{3.4}$$

onde $(\tau_n) \subset \mathbb{R}$ e $E_\infty(w) = J'_\infty(w)w$, para todo $w \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\infty$, segue de (3.4) que

$$\tau_n E'_\infty(w_n)w_n = o_n(1).$$

Usando argumentos do Lema 3.1.5, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|E'_\infty(w_n)w_n| > \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De (3.4) resulta $\tau_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Sendo $\{w_n\}$ uma sequência limitada temos que $\{E'_\infty(w_n)\}$ também é limitada, logo podemos afirmar que

$$J'_\infty(w_n) \to 0 \quad \text{em } (W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N))^*.$$

Assim, podemos supor sem perda de generalidade que

$$J_\infty(u_n) \to c_\infty \quad \text{e} \quad J'_\infty(w_n) \to 0 \quad \text{em } (W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N))^*. \tag{3.5}$$

No que segue, vamos estudar as seguintes possibilidades: $u \neq 0$ ou $u = 0$.

Primeiro Caso: $u \neq 0$.

Similar ao Teorema 3.1.7, mostra-se que u é ponto crítico de J_∞. Aplicando o Lema de Fatou, segue que

$$\begin{aligned}
c_\infty \leq J_\infty(u) &= J_\infty(u) - \frac{1}{q_-}J'_\infty(u)u \\
&= \int \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q_-}\right)\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) + \int \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r(x)}\right)|u|^{r(x)} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left\{\int \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q_-}\right)\left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) + \int \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r(x)}\right)|u_n|^{r(x)}\right\} \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left\{J_\infty(u_n) - \frac{1}{q_-}J'_\infty(u_n)u_n\right\} \\
&= c_\infty.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) = \int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right).$$

Sejam

$$f_n(x) = |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^{p(x)} + |u_n(x) - u(x)|^{p(x)}$$

e

$$g_n(x) = 2^{p_+}\left[|\nabla u_n(x)|^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)} + |u_n(x)|^{p(x)} + |u(x)|^{p(x)}\right]$$

Então, é imediato que $f_n(x) \leq g_n(x)$,

$$f_n(x) \to 0 \quad \text{e} \quad g_n(x) \to g(x) = 2^{p_+ + 1}\left[|\nabla u(x)|^{p(x)} + |u(x)|^{p(x)}\right]$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue (vide Teorema A.2.3), concluímos que $f_n \to 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, de onde segue o resultado.

Segundo Caso: $u = 0$.

Neste caso, afirmamos que existem $R, \tau > 0$ e uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^{p(x)} \geq \tau. \tag{3.6}$$

Se a afirmação é falsa, devemos ter

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^{p(x)} = 0.$$

Assim, por um resultado tipo Lions para expoentes variáveis (ver Lema A.2.2),

$$u_n \to 0 \text{ em } L^{s(x)}(\mathbb{R}^N),$$

para toda função mensurável $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com $p \ll s \ll p^*$.

Como $J'_\infty(u_n)u_n = o_n(1)$, o último limite implica que

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) = o_n(1),$$

ou equivalentemente

$$u_n \to 0 \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

resultando em $c_\infty = 0$, o que é um absurdo. Portanto, a desigualdade (3.6) é verdadeira.

Note que $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, pois caso contrário, existiria uma subsequência de $\{y_n\}$ limitada, a qual denotaremos ainda por $\{y_n\}$. Digamos que $|y_n| \leq M$, assim

$$\int_{B_{R+M}} |u|^{p(x)} = \limsup_{n\to\infty} \int_{B_{R+M}} |u_n|^{p(x)} \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^{p(x)} \geq \tau > 0$$

o que contradiz a hipótese $u = 0$.

Agora, seja $\bar{y}_n \in \mathbb{Z}^N$ tal que

$$\|y_n - \bar{y}_n\| < \sqrt{N}$$

e defina

$$w_n(x) = u_n(x + \bar{y}_n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Então, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação e usando o fato das funções p e r serem $\mathbb{Z}^N$–periódicas, deduzimos que $J_\infty(w_n) = J_\infty(u_n)$. Agora, seja $\psi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, com $\|\psi\| \leq 1$, então

$$|J'_\infty(w_n)\psi| = |J'_\infty(u_n)\psi(\cdot - \bar{y}_n)|$$

implicando

$$\|J'_\infty(w_n)\|_{(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N))^*} \leq \|J'_\infty(u_n)\|_{(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N))^*}.$$

De maneira análoga, temos que

$$|J'_\infty(u_n)\psi| = |J'_\infty(w_n)\psi(\cdot + \bar{y}_n)|$$

e portanto

$$\|J'_\infty(w_n)\|_{(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N))^*} = \|J'_\infty(u_n)\|_{(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N))^*},$$

mostrando que $\{w_n\}$ é uma sequência $(PS)_{c_\infty}$ para J_∞. Se $w \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ denota o limite fraco de $\{w_n\}$, considerando $\widehat{R} = R + \sqrt{N}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_{\widehat{R}}} |w|^{p(x)} &= \limsup_{n\to\infty} \int_{B_{\widehat{R}}} |w_n|^{p(x)} = \limsup_{n\to\infty} \int_{B_{\widehat{R}}} |u_n(x+\bar{y}_n)|^{p(x)} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \int_{B_{\widehat{R}}(\bar{y}_n)} |u_n|^{p(x)} \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^{p(x)} \geq \tau > 0\end{aligned}$$

o que implica $w \neq 0$. Repetindo os mesmo argumentos do primeiro caso para a sequência $\{w_n\}$, deduzimos que $w_n \to w$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, $w \in \mathcal{M}_\infty$ e $J_\infty(w) = c_\infty$.

■

Lema 3.1.9. *Se a função g satisfaz (g_3), então os funcionais $\Psi_1, \Psi_2 : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$*

dados por

$$\Psi_1(u) = \int g(x)|u|^{q(x)} \;\; e \;\; \Psi_2(u) = \int \frac{g(x)}{q(x)}|u|^{q(x)}$$

são fracamente contínuos.

Demonstração. No que segue, faremos a prova apenas para Ψ_1, porque os mesmos argumentos se aplicam a Ψ_2. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Da hipótese (g_3), para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|g(x)| < \epsilon \text{ para } |x| > R.$$

Logo,

$$\int_{|x|>R} g(x)|u|^{q(x)} \leq \epsilon \int_{|x|>R} |u|^{q(x)}.$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, temos que $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Segue das imersões de Sobolev que $\{u_n\}$ também é limitada em $L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)$, e portanto

$$\int_{|x|>R} g(x)|u_n|^{q(x)} \leq \epsilon \int_{|x|>R} |u_n|^{q(x)} \leq \epsilon M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

para alguma constante positiva M. Novamente as imersões de Sobolev implicam

$$u_n \to u \text{ em } L^{q(x)}(B_R). \tag{3.8}$$

De (3.7)-(3.8),

$$\int g(x)|u_n|^{q(x)} \to \int g(x)|u|^{q(x)},$$

o que completa a prova. ■

3.1.3 Estimativas envolvendo os níveis minimax

O principal objetivo desta seção é provar algumas estimativas que envolvem os níveis minimax $c_{\lambda,k}$, $c_{0,k}$ e c_∞.

Primeiramente, recorde as seguintes desigualdades

$$J_{\lambda,k}(u) \leq J_{0,k}(u) \;\text{ e }\; J_\infty(u) \leq J_{0,k}(u) \quad \forall u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

o que implica

$$c_{\lambda,k} \leq c_{0,k} \quad \text{e} \quad c_\infty \leq c_{0,k}. \tag{3.9}$$

Lema 3.1.10. *Os níveis minimax $c_{0,k}$ e c_{f_∞} satisfazem a desigualdade*

$$c_{0,k} < c_{f_\infty}.$$

Consequentemente, $c_\infty < c_{f_\infty}$.

Demonstração. De maneira análoga ao Teorema 3.1.8, existe $V \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ verificando

$$J_{f_\infty}(V) = c_{f_\infty} \quad \text{e} \quad J'_{f_\infty}(V) = 0.$$

Segue do Lema A.4.1 que existe $t > 0$ tal que $tV \in \mathcal{M}_{0,k}$. Assim,

$$c_{0,k} \leq J_{0,k}(tV) = \int \frac{t^{p(x)}}{p(x)} \left(|\nabla V|^{p(x)} + |V|^{p(x)}\right) - \int f(k^{-1}x) \frac{t^{r(x)}}{r(x)} |V|^{r(x)}.$$

Recordando que $0 < f_\infty < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, obtemos

$$c_{0,k} < J_{f_\infty}(tV) \leq \max_{s \geq 0} J_{f_\infty}(sV) = J_{f_\infty}(V) = c_{f_\infty}.$$

Combinando a última desigualdade com (3.9), segue que $c_\infty < c_{f_\infty}$. Finalizando a prova. ■

Proposição 3.1.11. *O nível $c_{0,k}$ é um valor crítico de $J_{0,k}$, isto é, existe $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$J_{0,k}(v) = c_{0,k} \quad e \quad J'_{0,k}(v) = 0.$$

Demonstração. De maneira similar ao Teorema 3.1.8, existe uma sequência u_n em $\mathcal{M}_{0,k}$ com

$$J_{0,k}(u_n) \to c_{0,k} \quad e \quad J'_{0,k}(u_n) \to 0.$$

Como no Corolário 3.1.3, $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, e sendo $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ reflexivo, segue que a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Afirmação 3.1.12. $u \neq 0$.

Suponha por contradição que $u = 0$. Então $u_n \rightharpoonup 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Afirmamos que existem números positivos R e τ e uma sequência $\{y_n\}$ em $\mathbb{R}^N$ (a qual podemos supor em $\mathbb{Z}^N$) tais que a desigualdade (3.6) vale. Caso contrário, pelo Lema A.2.2 segue que $u_n \to 0$ em $L^{r(x)}(\mathbb{R}^N)$. Da definição de $\mathcal{M}_{0,k}$,

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) = o_n(1).$$

Logo, $u_n \to 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ implicando em $c_{0,k} = 0$, o que é um absurdo. Portanto, a desigualdade (3.6) vale.

Segue dos mesmos argumentos do Teorema 3.1.8 que a sequência $\{y_n\}$ é ilimitada. Agora, defina a função $v_n(x) = u_n(x + y_n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Relembrando que $J'_{0,k}(u_n)\phi(\cdot + y_n) = o_n(1)$ para toda $\phi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int \left(|\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n \nabla \phi + |v_n|^{p(x)-2} v_n \phi\right) - \int f(k^{-1}(x + y_n))|v_n|^{r(x)-2} v_n \phi = o_n(1).$$

Adaptando os argumentos usados na demonstração do Teorema 3.1.7 mostra-se que para alguma subsequência

$$\nabla v_n(x) \to \nabla v(x) \quad \text{ e } \quad v_n(x) \to v(x) \quad \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, segue que

$$\int \left(|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v \nabla \phi + |v|^{p(x)-2} v \phi\right) - \int \left(f_\infty |v|^{r(x)-2} + |v|^{p^*(x)-2}\right) v \phi = 0,$$

provando que v é uma solução fraca do problema (P_{f_∞}). Aplicando o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned}
c_{f_\infty} &\le J_{f_\infty}(v) = J_{f_\infty}(v) - \frac{1}{q_-} J'_{f_\infty}(v) \\
&= \int \liminf_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q_-}\right)\left(|\nabla v_n|^{p(x)} + |v_n|^{p(x)}\right) + \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r(x)}\right) \xi f(k^{-1}(x + y_n))|v_n|^{r(x)}\right] \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \int \left[\left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q_-}\right)\left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) + \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r(x)}\right) \xi f(k^{-1}x)|u_n|^{r(x)}\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(J_{0,k}(u_n) - \frac{1}{q_-} J'_{0,k}(u_n) u_n\right) \\
&= c_{0,k}.
\end{aligned}$$

Logo, $c_{f_\infty} \le c_{0,k}$, o que contradiz o Lema 3.1.10. Portanto, $u \neq 0$.

Como $J'_{0,k}(u_n) = o_n(1)$ segue que $J'_{0,k}(u)u = 0$, isto é $u \in \mathcal{M}_{0,k}$. Aplicando novamente o Lema de Fatou, concluímos que

$$c_{0,k} \leq J_{0,k}(u) = J_{0,k}(u) - \frac{1}{q_-}J'_{0,k}(u)u \leq \liminf_{n\to\infty}\left\{J_{0,k}(u_n) - \frac{1}{q_-}J'_{0,k}(u_n)u_n\right\} = c_{0,k},$$

de onde segue que $J_{0,k}(u) = c_{0,k}$. ■

Ao longo desta seção, denotaremos por $U \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ uma solução de energia mínima do problema (P_∞), isto é,

$$J_\infty(U) = c_\infty \quad \text{e} \quad J'_\infty(U) = 0 \ \ (\text{ver Teorema } 3.1.8)\ .$$

Para $1 \leq i \leq \ell$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos a função $U_k^i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$U_k^i(x) = U(x - ka_i). \tag{3.10}$$

O próximo resultado estabelece uma relação importante envolvendo a energia das funções U_k^i com c_∞.

Lema 3.1.13. *Para todo $i \in \{1, ..., \ell\}$, tem-se*

$$\limsup_{k\to+\infty}\left(\sup_{t\geq 0} J_{\lambda,k}(tU_k^i)\right) \leq c_\infty.$$

Demonstração. Como as funções $p, q,$ e r são $\mathbb{Z}^N$-periódicas e $a_i \in \mathbb{Z}^N$, fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,k}(tU_k^i) &= \int \frac{t^{p(x)}}{p(x)}\left(|\nabla U(x-ka_i)|^{p(x)} + |U(x-ka_i)|^{p(x)}\right) - \lambda\int \frac{g(k^{-1}x)}{p(x)}t^{q(x)}\,|U(x-ka_i)|^{q(x)}\\
&\quad - \int f(k^{-1}x)\frac{t^{r(x)}}{r(x)}|U(x-ka_i)|^{r(x)}\\
&= \int \frac{t^{p(x)}}{p(x)}\left(|\nabla U|^{p(x)} + |U|^{p(x)}\right) - \lambda\int g(k^{-1}x+a_i)\frac{t^{q(x)}}{q(x)}\,|U|^{q(x)}\\
&\quad - \int f(k^{-1}x+a_i)\frac{t^{r(x)}}{r(x)}|U|^{r(x)}.
\end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema A.4.1 existe $t_k > 0$ tal que

$$\max_{t\geq 0} J_{\lambda,k}(tU_k^i) = J_{\lambda,k}(t_kU_k^i) \geq \beta, \tag{3.11}$$

onde β foi dado pelo Lema 3.1.1. Note que se $t_k \to 0$ quando $k\to\infty$ então $J_{\lambda,k}(t_kU_k^i) \to 0$

quando $k \to \infty$, o que contradiz (3.11). Por outro lado se $t_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, mostra-se que $J_{\lambda,k}(t_k U_k^i) \to -\infty$ e novamente temos uma contradição com (3.11). Logo, sem perda de generalidade, podemos supor $t_k \to t_0 > 0$ com $k \to \infty$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left(\max_{t\geq 0} J_{\lambda,k}(tU_k^i)\right) &= \int \frac{t_0^{p(x)}}{p(x)}\left(|\nabla U|^{p(x)} + |U|^{p(x)}\right) - \lambda \int g(a_i)\frac{t_0^{q(x)}}{q(x)}|U|^{q(x)} \\
&\quad - \int f(a_i)\frac{t_0^{r(x)}}{r(x)}|U|^{r(x)} \\
&\leq J_\infty(t_0 U) \leq \max_{s\geq 0} J_\infty(sU) = J_\infty(U) = c_\infty.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\limsup_{k\to+\infty}(\sup_{t\geq 0} J_{\lambda,k}(tU_k^i)) \leq c_\infty \quad \text{para } i \in \{1, ..., \ell\},
$$

finalizando a prova do resultado. ∎

No que segue, consideremos números positivos R_0 e r_0 satisfazendo

- $\overline{B_{R_0}(a_i)} \cap \overline{B_{R_0}(a_j)} = \emptyset$ para $i \neq j$ e $i, j \in \{1, ..., \ell\}$
- $\bigcup_{i=1}^{\ell} B_{R_0}(a_i) \subset B_{r_0}(0)$.
- $K_{\frac{R_0}{2}} = \bigcup_{i=1}^{\ell} \overline{B_{\frac{R_0}{2}}(a_i)}$

Definimos a função Baricentro $Q_k : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por

$$
Q_k(u) = \frac{\int \chi(k^{-1}x)|u|^{p_+}}{\int |u|^{p_+}}, \tag{3.12}
$$

onde $\chi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é dado por

$$
\chi(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leq r_0 \\ \frac{r_0}{|x|}x & \text{se } |x| > r_0. \end{cases} \tag{3.13}
$$

Lema 3.1.14. *Existem $\delta_0 > 0$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tais que se $u \in \mathcal{M}_{0,k}$ e $J_{0,k}(u) \leq c_\infty + \delta_0$, então*

$$
Q_k(u) \in K_{\frac{R_0}{2}} \quad \textit{para } k \geq k_1.
$$

Demonstração. Se o lema não vale, existem $\delta_n \to 0$, $k_n \to +\infty$ e $u_n \in \mathcal{M}_{0,k_n}$ satisfazendo

$$
J_{0,k_n}(u_n) \leq c_\infty + \delta_n
$$

e

$$Q_{k_n}(u_n) \notin K_{\frac{R_0}{2}}.$$

Fixando $\zeta_n > 0$ tal que $\zeta_n u_n \in \mathcal{M}_\infty$, temos que

$$c_\infty \leq J_\infty(\zeta_n u_n) \leq J_{0,k_n}(\zeta_n u_n) \leq \max_{t\geq 0} J_{0,k_n}(tu_n) = J_{0,k_n}(u_n) \leq c_\infty + \delta_n.$$

Assim,

$$\{\zeta_n u_n\} \subset \mathcal{M}_\infty \quad \text{e} \quad J_\infty(\zeta_n u_n) \to c_\infty.$$

Aplicando o princípio variacional de Ekeland, podemos supor sem perda de generalidade que $\{\zeta_n u_n\} \subset \mathcal{M}_\infty$ é uma sequência $(PS)_{c_\infty}$ para J_∞ (ver demonstração do Teorema 3.1.8), isto é,

$$J_\infty(\zeta_n u_n) \to c_\infty \quad \text{e} \quad J'_\infty(\zeta_n u_n) \to 0.$$

Aplicando o Teorema 3.1.8, devemos considerar os seguintes casos:

i) $\zeta_n u_n \to U \neq 0$ em $W^{1,,p(x)}(\mathbb{R}^N)$;

ou

ii) Existem $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ com $|y_n| \to +\infty$ tal que $v_n(x) = \zeta_n u(x+y_n)$ converge em $W^{1,,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ para algum $V \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$.

Procedento como no Lema 3.1.13, mostra-se que $\zeta_n \to \zeta_0$ para algum $\zeta_0 > 0$. Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que

$$u_n \to U \quad \text{ou} \quad v_n = u_n(\,\cdot + y_n) \to V \quad \text{em} \quad W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Análise de i).

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue segue que

$$Q_{k_n}(u_n) = \frac{\int \chi({k_n}^{-1}x)|u_n|^{p_+}}{\int |u_n|^{p_+}} \to \frac{\int \chi(0)|U|^{p_+}}{\int |U|^{p_+}} = 0,$$

implicando em $Q_{k_n}(u_n) \in K_{\frac{R_0}{2}}$ para n grande, pois $0 \in K_{\frac{R_0}{2}}$.

Análise de ii).

Aplicando novamente o princípio variacional de Ekeland, podemos supor que $J'_{0,k_n}(u_n) = o_n(1)$. Logo, $J'_{0,k_n}(u_n)\phi(\cdot - y_n) = o_n(1)$ para todo $\phi \in W^{1,,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, e assim

$$o_n(1) = \int \left(|\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n \nabla\phi + |v_n|^{p(x)-2}v_n\phi\right) - \int f({k_n}^{-1}(x+y_n))|v_n|^{r(x)-2}v_n\phi. \quad (3.14)$$

Decorre do último limite que a menos de subsequência,

$$\nabla v_n(x) \to \nabla V(x) \quad \text{e} \quad v_n(x) \to V(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Agora, vamos estudar dois casos:

a) $|{k_n}^{-1}y_n| \to +\infty$

e

b) ${k_n}^{-1}y_n \to y$, para algum $y \in \mathbb{R}^N$.

Se a) vale, segue que

$$\int \left(|\nabla V|^{p(x)-2}\nabla V \nabla \phi + |V|^{p(x)-2}V\phi\right) = \int f_\infty |V|^{r(x)-2}V\phi,$$

mostrando que V é uma solução fraca não trivial do problema (P_{f_∞}). Combinando a condição $f_\infty < 1$ com o Lema de Fatou, obtemos

$$c_{f_\infty} \le J_{f_\infty}(V) = J_{f_\infty}(V) - \frac{1}{q_-}J'_{f_\infty}(V)V \le \liminf_{n\to\infty}\left\{J_\infty(u_n) - \frac{1}{q_-}J'_\infty(u_n)u_n\right\} = c_\infty,$$

ou equivalentemente, $c_{f_\infty} \le c_\infty$, o que contradiz o Lema 3.1.10.

Agora, se ${k_n}^{-1}y_n \to y$ para algum $y \in \mathbb{R}^N$, então V é uma solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f(y)|u|^{r(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{$P_{f(y)}$}$$

Repetindo o argumento anterior, deduzimos que

$$c_{f(y)} \le c_\infty, \tag{3.15}$$

onde $c_{f(y)}$ é o nível do passo da montanha do functional $J_{f(y)}\colon W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_{f(y)}(u) = \int \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \int \frac{f(y)}{r(x)}|u|^{r(x)}.$$

Observe que

$$c_{f(y)} = \inf_{u\in\mathcal{M}_{f(y)}} J_{f(y)}(u)$$

onde

$$\mathcal{M}_{f(y)} = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}\colon J'_{f(y)}(u)u = 0\right\}.$$

Se $f(y) < 1$, um argumento semelhante ao explorado na prova do Lema 3.1.10 mostra que $c_{f(y)} > c_\infty$, contradizendo a desigualdade (3.15). Portanto, $f(y) = 1$ e $y = a_i$ para algum $i = 1, \cdots \ell$. Donde,

$$Q_{k_n}(u_n) = \frac{\int \chi({k_n}^{-1}x)|u_n|^{p_+}}{\int |u_n|^{p_+}} = \frac{\int \chi({k_n}^{-1}x + {k_n}^{-1}y_n)|v_n|^{p_+}}{\int |v_n|^{p_+}}.$$

Na igualdade anterior passando ao limite quando $n \to \infty$, vem

$$\lim_{n\to\infty} Q_{k_n}(u_n) = \frac{\int \chi(y)|V|^{p_+}}{\int |V|^{p_+}} = a_i,$$

o que implica $Q_{k_n}(u_n) \in K_{\frac{R_0}{2}}$ para n suficientemente grande, resultando em uma contradição, pois por hipótese $Q_{k_n}(u_n) \notin K_{\frac{R_0}{2}}$. ■

Lema 3.1.15. *Existe uma constante $R > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_{\lambda,k} = \left\{ u \in \mathcal{M}_{\lambda,k} \colon J_{\lambda,k}(u) < c_\infty + \frac{\delta_0}{2} \right\} \subset B_R,$$

para $k \geq k_1$, isto é, $\mathcal{A}_{\lambda,k}$ é um conjunto limitado, onde k_1 foi dado no Lema 3.1.14. Além disso, R é independente de λ e k.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{M}_{\lambda,k}$ tal que $J_{\lambda,k}(u) < c_\infty + \frac{\delta_0}{2}$ para $k \geq k_1$. Então,

$$\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda \int g(k^{-1}x)|u|^{q(x)} - \int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)} = 0$$

e

$$\int \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda \int \frac{g(k^{-1}x)}{q(x)}|u|^{q(x)} - \int \frac{f(k^{-1}x)}{r(x)}|u|^{r(x)} < c_\infty + \frac{\delta_0}{2}.$$

Combinando as duas últimas expressões, obtemos

$$\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right) \int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) + \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) \int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)} < c_\infty + \frac{\delta_0}{2}.$$

Assim,

$$\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) < (c_\infty + \frac{\delta_0}{2}) \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)^{-1},$$

provando o lema. ■

Lema 3.1.16. *Seja $u \in \mathcal{A}_{\lambda,k}$ e $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{M}_{0,k}$. Então, dado $\Lambda > 0$, existem constantes $C > 0$ e $k_2 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$0 \leq t_u \leq C, \quad \textit{para todo } (u, \lambda, k) \in \mathcal{A}_{\lambda,k} \times [0, \Lambda] \times ([k_2, +\infty) \cap \mathbb{N}).$$

Demonstração. Supondo por contradição que o lema não vale, deve existir $\{u_n\} \subset \mathcal{A}_{\lambda_n,k_n}$ com $\lambda_n \to 0$ e $k_n \to +\infty$ tal que $t_{u_n} u_n \in \mathcal{M}_{0,k_n}$ e $t_{u_n} \to \infty$ com $n \to \infty$. Podemos supor sem perda de generalidade que $t_{u_n} \geq 1$. Como $t_{u_n} u_n \in \mathcal{M}_{0,k_n}$, segue que

$$(t_{u_n})^{p_+} \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \geq f_\infty (t_{u_n})^{r_-} \int |u_n|^{r(x)},$$

ou equivalentemente,

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \geq f_\infty t_{u_n}^{r_- - p_+} \int |u_n|^{r(x)}. \tag{3.16}$$

Afirmação 3.1.17. *Existe $\eta_1 > 0$ tal que*

$$\int |u_n|^{r(x)} > \eta_1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, argumentando por contradição, se $\int |u_n|^{r(x)} \to 0$, por interpolação segue-se que $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)} \to 0$. Desde que $u_n \in \mathcal{M}_{\lambda_n,k_n}$,

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \leq \lambda_n \|g\|_\infty \int |u_n|^{q(x)} + \int |u_n|^{r(x)} = o_n(1),$$

ou ainda,

$$u_n \to 0 \ \text{ em } \ W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

o que contradiz o Lema 3.1.4, provando a afirmação. Portando, da desigualdade (3.16),

$$\rho_1(u_n) = \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \to +\infty,$$

implicando que $\{u_n\}$ é um sequência ilimitada. No entanto, isso é impossível, porque pelo Lema 3.1.15, $\{u_n\}$ é limitada. ■

Lema 3.1.18. *Seja $\delta_0 > 0$ dado pelo Lema 3.1.14 e $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$. Então, existe $\Lambda^* > 0$ tal que*

$$Q_k(u) \in K_{\frac{R_0}{2}}, \quad \forall (u, \lambda, k) \in \mathcal{A}_{\lambda,k} \times [0, \Lambda_*) \times ([k_3, +\infty) \cap \mathbb{N}).$$

Demonstração. Observe que

$$J_{\lambda,k}(u) = J_{0,k}(u) - \lambda \int \frac{g(k^{-1}x)}{q(x)}|u|^{q(x)} \ \ \forall u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

No que segue, seja $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{M}_{0,k}$. Então,

$$\begin{aligned} J_{0,k}(t_u u) &= J_{\lambda,k}(t_u u) + \lambda \int \frac{g(k^{-1}x)}{q(x)}(t_u)^{q(x)}|u|^{q(x)} \\ &\leq \max_{t\geq 0} J_{\lambda,k}(tu) + \lambda \int \frac{g(k^{-1}x)}{q(x)}(t_u)^{q(x)}|u|^{q(x)}, \end{aligned}$$

e pelo Lema 3.1.16,

$$J_{0,k}(t_u u) \leq J_{\lambda,k}(u) + \frac{\lambda}{q_-}\|g\|_\infty C^{q_+} \int |u|^{q(x)}.$$

Um vez que $u \in \mathcal{A}_{\lambda,k}$, obtemos

$$J_{0,k}(t_u u) < c_\infty + \frac{\delta_0}{2} + \lambda c_2 \int |u|^{q(x)}.$$

Usando as imersões de Sobolev juntamente com o Lema 3.1.15,

$$J_{0,k}(t_u u) < c_\infty + \frac{\delta_0}{2} + c_3\lambda \quad \forall u \in \mathcal{A}_{\lambda,k}$$

onde c_3 é uma constante positiva. Fazendo $\Lambda^* := \delta_0/2c_3$ e $\lambda \in [0, \Lambda^*)$, concluímos que

$$t_u u \in \mathcal{M}_{0,k} \quad \text{e} \quad J_{0,k}(t_u u) < c_\infty + \delta_0.$$

Logo, pelo Lema 3.1.14,

$$Q_k(t_u u) \in K_{\frac{R_0}{2}}.$$

Agora, resta observar que

$$Q_k(u) = Q_k(t_u u),$$

para concluir a prova do lema. ■

De agora em diante, usaremos a seguintes notações

- $\theta^i_{\lambda,k} = \{u \in \mathcal{M}_{\lambda,k}; |Q_k(u) - a_i| < R_0\}$,
- $\partial\theta^i_{\lambda,k} = \{u \in \mathcal{M}_{\lambda,k}; |Q_k(u) - a_i| = R_0\}$,

- $\beta^i_{\lambda,k} = \inf_{u \in \theta^i_{\lambda,k}} J_{\lambda,k}(u)$

e

- $\tilde{\beta}^i_{\lambda,k} = \inf_{u \in \partial\theta^i_{\lambda,k}} J_{\lambda,k}(u).$

3.1.4 A condição Palais-Smale

No próximo resultado, mostraremos duas desigualdades. A primeira será usada para mostrar a condição $(PS)_{\beta^i_{\lambda,k}}$ para o funcional $J_{\lambda,k}$. Enquanto, a segunda desigualdade nos ajudará provar a existência de uma sequência $(PS)_{\beta^i_{\lambda,k}}$ em $\theta^i_{\lambda,k}$ para o funcional $J_{\lambda,k}$.

Lema 3.1.19. *Fixando $\varrho = \frac{1}{2}(c_{f_\infty} - c_\infty)$, existe $k^* \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\beta^i_{\lambda,k} < c_\infty + \varrho \ \ e \ \ \beta^i_{\lambda,k} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,k},$$

para todo $\lambda \in [0, \Lambda^*)$, $i \in \{1, \ldots \ell\}$ e $k \geq k^*$.

Demonstração. De fato, desde que $Q_k(U^i_k) \to a_i$ quando $k \to \infty$, então $U^i_k \in \theta^i_{\lambda,k}$ para todo k suficientemente grande. Por outro lado, pelo Lema 3.1.13, $J_{\lambda,k}(U^i_k) < c_\infty + \frac{\delta_0}{4}$ vale também para k grande e $\lambda \in [0, \Lambda^*)$. Dessa forma, existe $k_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta^i_{\lambda,k} < c_\infty + \frac{\delta_0}{4}, \quad \forall \lambda \in [0, \Lambda^*) \ \text{ e } \ k \geq k_4. \tag{3.17}$$

Logo, diminuindo δ_0 se necessário, podemos supor que

$$\beta^i_{\lambda,k} < c_\infty + \varrho, \quad \forall \lambda \in [0, \Lambda^*) \ \text{ e } \ k \geq k_4.$$

Para provar a outra desigualdade, observe que se $\lambda \in [0, \Lambda^*)$ e $k \geq k_3$, segue do Lema 3.1.18 que

$$J_{\lambda,k}(u) \geq c_\infty + \frac{\delta_0}{2} \qquad \text{para todo } u \in \partial\theta^i_{\lambda,k}.$$

Consequentemente,

$$\tilde{\beta}^i_{\lambda,k} \geq c_\infty + \frac{\delta_0}{2}, \quad \text{para} \quad \lambda \in [0, \Lambda^*) \quad \text{e} \quad k \geq k_3. \tag{3.18}$$

Fixando $k^* = \max\{k_3, k_4\}$, e combinando as desigualdades (3.17) e (3.18), vem

$$\beta^i_{\lambda,k} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,k}, \qquad \text{para } \lambda \in [0, \Lambda_*) \ \text{ e } \ k \geq k^*$$

para $\lambda \in [0, \Lambda_*)$ e $k \geq k^*$. ■

O próximo resultado estabelece uma importante relação entre os funcionais $J_{\lambda,k}$ e J_∞.

Lema 3.1.20. *Seja $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $J_{\lambda,k}$ com $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$J_{\lambda,k}(v_n) - J_{0,k}(w_n) - J_{\lambda,k}(v) = o_n(1) \tag{3.19}$$

e

$$\|J'_{\lambda,k}(v_n) - J'_{0,k}(w_n) - J'_{\lambda,k}(v)\| = o_n(1), \tag{3.20}$$

onde $w_n = v_n - v$.

Demonstração. Procedendo como no Teorema 3.1.7, temos as seguintes convergências:

- $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$
- $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$
- $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n \nabla\phi \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v \nabla\phi$,
- $\int_{\mathbb{R}^N} f(k^{-1}x)|v_n|^{r(x)-2}v_n\phi \to \int_{\mathbb{R}^N} f(k^1x)|v|^{r(x)-2}v\phi$,

para todo $\phi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Aplicando o Lema de Brezis-Lieb para expoentes variáveis, ficamos com

$$\begin{aligned} J_{\lambda,k}(v_n) =& o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla w_n|^{p(x)} + |w_n|^{p(x)}\right) + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\right) \\ & - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(k^{-1}x)}{q(x)}|w_n|^{q(x)} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(k^{-1}x)}{q(x)}|v|^{q(x)} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(k^{-1}x)}{r(x)}|w_n|^{r(x)} \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(k^{-1}x)}{r(x)}|v|^{r(x)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$J_{\lambda,k}(v_n) = J_{0,k}(w_n) + J_{\lambda,k}(v) + o_n(1)$$

provando (3.19).

Agora, para provar (3.20), considere $\varphi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\| = 1$. Efetuando alguns cálculos, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[J'_{\lambda,k}(v_n) - J'_{0,k}(w_n) - J'_{\lambda,k}(v)\right]\varphi\right| \leq \\
&\quad \leq \left|\int \left(|\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n - |\nabla w_n|^{p(x)-2}\nabla w_n - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\right)\nabla\varphi\right| \\
&\quad + \left|\int \left(|v_n|^{p(x)-2}v_n - |w_n|^{p(x)-2}w_n - |v|^{p(x)-2}v\right)\varphi\right| \\
&\quad + \lambda\left|\int g(k^{-1}x)\left(|v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\right)\varphi\right| \\
&\quad + \left|\int f(k^{-1}x)\left(|v_n|^{r(x)-2}v_n - |v_n|^{r(x)-2}v_n - |v|^{r(x)-2}v\right)\varphi\right|.
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[J'_{\lambda,k}(v_n) - J'_{0,k}(w_n) - J'_{\lambda,k}(v)\right]\varphi\right| \leq \\
&\quad \leq 2\|\nabla\varphi\|_{p(x)}\||\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n - |\nabla w_n|^{p(x)-2}\nabla w_n - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\|_{p'(x)} \\
&\quad + 2\|\varphi\|_{p(x)}\||v_n|^{p(x)-2}v_n - |w_n|^{p(x)-2}w_n - |v|^{p(x)-2}v\|_{p'(x)} \\
&\quad + 2\xi\|\varphi\|_{r(x)}\||v_n|^{r(x)-2}v_n - |v_n|^{r(x)-2}v_n - |v|^{r(x)-2}v\|_{r(x)} \\
&\quad + \lambda\left|\int g(k^{-1}x)\left(|v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\right)\varphi\right|
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 1.2.7 e a Proposição 1.1.1 segue que os três primeiros termos do lado direito da desigualdade anterior convergem para 0 quando $n \to \infty$. Para concluir a demonstração, resta mostrar que o último termo da desigualdade acima é $o_n(1)$. Note que, aplicando a desigualdade de Hölder

$$
\begin{aligned}
\int g(k^{-1}x)\left|\left(|v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\right)\varphi\right| &= \int g(k^{-1}x)^{\frac{1}{q'(x)}}\Big[|v_n|^{q(x)-2}v_n \\
&\qquad - |v|^{q(x)-2}v\Big]g(k^{-1}x)^{\frac{1}{q(x)}}\varphi \\
&\leq C\|g(k^{-1}x)^{\frac{1}{q'(x)}}\left(|v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\right)\|_{q'(x)}.
\end{aligned}
$$

Observe que $|v_n|^{q(x)} \to |v|^{q(x)}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ com $n \to \infty$. Como

$$
\left||v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\right|^{q'(x)} \leq 2^{q'_+}\left(|v_n|^{q'(x)} + |v|^{q'(x)}\right),
$$

podemos aplicar o Lema de Fatou, e concluir que

$$\begin{aligned}\int 2^{1+q'_+} g(k^{-1}x)|v|^{q(x)} &= \int \liminf_{n\to\infty} g(k^{-1}x)\Big[2^{q'_+}|v_n|^{q(x)} + 2^{q'_+}|v|^{q(x)} \\ &\qquad - \big||v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\big|^{q'(x)}\Big] \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int \Big[2^{q'_+} g(k^{-1}x)|v_n|^{q(x)} + g(k^{-1}x)|v|^{q(x)} \\ &\qquad - g(k^{-1}x)\,\big||v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\big|^{q'(x)}\Big]\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.9, obtemos

$$\begin{aligned}\int 2^{1+q'_+} g(k^{-1}x)|v|^{q(x)} \leq& \int 2^{1+q'_+} g(k^{-1}x)|v|^{q(x)} \\ &- \limsup_{n\to\infty} \int g(k^{-1}x)\,\big||v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\big|^{q'(x)},\end{aligned}$$

o que implica

$$\limsup_{n\to\infty} \int g(k^{-1}x)\,\big||v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\big|^{q'(x)} \leq 0.$$

Por hipótese, a função g é não negativa, e portanto

$$\limsup_{n\to\infty} \int g(k^{-1}x)\,\big||v_n|^{q(x)-2}v_n - |v|^{q(x)-2}v\big|^{q'(x)} = 0,$$

e o teorema está provado. ∎

Lema 3.1.21. *O funcional $J_{\lambda,k}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ para $d \leq c_\infty + \varrho$, onde ϱ é dado no Lema 3.1.19.*

Demonstração. Seja $\{v_n\} \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $J_{\lambda,k}$ com $d \leq c_\infty + \varrho$. Similar ao Corolário 3.1.3, $\{v_n\}$ é um sequência limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, e portanto, para alguma subsequência, ainda denotada por $\{v_n\}$,

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

para algum $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Como $J'_{\lambda,k}(v) = 0$ e $J_{\lambda,k}(v) \geq 0$, segue de (3.19) e (3.20) que $w_n = v_n - v$ é uma sequência $(PS)_{d^*}$ para o funcional $J_{0,k}$ com $d^* = d - J_{\lambda,k}(v) \leq c_\infty + \varrho$.

Afirmação 3.1.22. *Existe $R > 0$ tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |w_n|^{p(x)} = 0.$$

Se a afirmação é verdadeira, então

$$\int |w_n|^{r(x)} \to 0.$$

Por outro lado, por (3.20), sabemos que $J'_{0,k}(w_n) = o_n(1)$, assim

$$\int \left(|\nabla w_n|^{p(x)} + |w_n|^{p(x)}\right) = o_n(1),$$

mostrando que $w_n \to 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, e portanto, $v_n \to v$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração da Afirmação 3.1.22: Se a afirmação não vale, para cada $R > 0$ dado, podemos encontrar $\eta > 0$ e $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ verificando

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |w_n|^{p(x)} \geq \eta > 0.$$

Como $w_n \rightharpoonup 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, segue que $\{y_n\}$ é uma sequência ilimitada. Seja

$$\tilde{w}_n(x) = w_n(x + y_n) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Então, $\{\tilde{w}_n\}$ também é uma sequência $(PS)_{d^*}$ para $J_{0,k}$, e portanto limitada. Logo, existem $\tilde{w} \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e uma subsequência $\{\tilde{w}_n\}$, ainda denotada por $\{\tilde{w}_n\}$, tal que

$$\tilde{w}_n \rightharpoonup \tilde{w} \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Argumentando como na prova do Teorema 3.1.8 (ver p. 50) tem-se que $w \neq 0$. Além disso, desde que $J'_{0,k}(w_n)\phi(\cdot - y_n) = o_n(1)$ para tada $\phi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ mostra-se que $\nabla\tilde{w}_n(x) \to \nabla\tilde{w}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, e portanto

$$\int \left(|\nabla\tilde{w}|^{p(x)-2}\nabla\tilde{w}\nabla\phi + |\tilde{w}|^{p(x)-2}\tilde{w}\phi\right) = \int f_\infty|\tilde{w}|^{r(x)-2}\tilde{w}\phi,$$

de onde segue que $\tilde{w}$ é uma solução fraca do problema (P_{f_∞}). Consequentemente, após alguns cálculos,

$$c_{f_\infty} \leq J_{f_\infty}(\tilde{w}) = J_{f_\infty}(\tilde{w}) - \frac{1}{q_-}J'_{f_\infty}(\tilde{w})\tilde{w} \leq \liminf_{n\to\infty}\left\{J_{0,k}(w_n) - \frac{1}{q_-}J'_{0,k}(w_n)w_n\right\} = d^*$$

implicando $c_{f_\infty} \leq c_\infty + \varrho$, que é um absurdo, porque $\varrho < c_{f_\infty} - c_\infty$. Logo, a Afirmação 3.1.22 é verdadeira. ■

Lema 3.1.23. *Para cada $u \in \theta^i_{\lambda,k}$, existe uma constante $\eta > 0$ e uma função diferenciável $\zeta : B_\eta \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\zeta(0) = 1, \quad \zeta(v)(u - v) \in \theta^i_{\lambda,k}, \quad \forall v \in B_\eta$$

e

$$\zeta'(0)\phi = \frac{E'_{\lambda,k,\xi}(u)\phi}{E'_{\lambda,k}(u)u}, \quad \forall \phi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

onde $E_{\lambda,k}(u) = J'_{\lambda,k}(u)u$.

Demonstração. Seja $\varphi : \mathbb{R} \times W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t, w) = E_{\lambda,k}(t(u - w))$. Então, é fácil ver que

$$D_1\varphi(t, w) = E'_{\lambda,k}(t(u - w))(u - w)$$

e

$$D_2\varphi(t, w)\phi = -E'_{\lambda,k}(t(u - w))\phi, \quad \forall \phi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Decorre do Corolário 3.1.5, que existe $\eta_0 > 0$ tal que $D_1\varphi(1, 0) = E'_{\lambda,k}(u)u < \eta_0$. Como $u \in \mathcal{M}_{\lambda,k}$, então $\varphi(1, 0) = E_{\lambda,k}(u) = J'_{\lambda,k}(u)u = 0$. Aplicando o Teorema da função implícita, segue que existe uma vizinhança aberta $B_\eta \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e uma função diferenciável $\zeta : B_\eta \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\zeta(0) = 1$$

e

$$\varphi(\zeta(w), w) = 0 \quad \text{para todo}\, w \in B_\eta.$$

Derivando formalmente a equação acima, vem

$$D_1\varphi(\zeta(w), w)\zeta'(w)\phi + D_2\varphi(\zeta(w), w)\phi = 0.$$

Logo,

$$\zeta'(0)\phi = \frac{-D_2\varphi(1, 0)\phi}{D_1\varphi(1, 0)} = \frac{E'_{\lambda,k}(u)\phi}{E'_{\lambda,k}(u)u}.$$

Como $u \neq 0$, podemos escolher η suficientemente pequeno de modo que $u \notin B_\eta$. Usando a definição da função φ concluímos que $\zeta(w)(u - w) \in \mathcal{M}_{\lambda,k}$ para toto $w \in B_\eta$. Da continuidade da função Q_k segue que $\zeta(w)(u - w) \in \theta^i_{\lambda,k}$, finalizando a prova do resultado. ■

Lema 3.1.24. *Para cada $1 \leq i \leq \ell$, existe uma sequência $(PS)_{\beta^i_{\lambda,k}}$, $\{u^i_n\} \subset \theta^i_{\lambda,k}$ para o funcional $J_{\lambda,k}$.*

Demonstração. Para cada $1 \leq i \leq \ell$, o Lema 3.1.19 implica

$$\beta^i_{\lambda,k} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,k}, \qquad \text{para todo } k \geq k_0. \tag{3.21}$$

Assim,

$$\beta^i_{\lambda,k} = \inf\left\{J_{\lambda,k}(u)\colon u \in \theta^i_{\lambda,k} \cup \partial\theta^i_{\lambda,k}\right\}, \qquad \text{para todo } k \geq k_0.$$

Seja $\{u^i_n\} \subset \theta^i_{\lambda,k} \cup \partial\theta^i_{\lambda,k}$ uma sequência minimizante para $\beta^i_{\lambda,k}$. Aplicando o princípio variacional de Ekeland, existe uma subsequência de $\{u^i_n\}$ ainda denotada por $\{u^i_n\}$ tal que

$$J_{\lambda,k}(u^i_n) = \beta^i_{\lambda,k} + \frac{1}{n}$$

e

$$J_{\lambda,k}(u^i_n) \leq J_{\lambda,k}(w) + \frac{1}{n}\|w - u^i_n\| \quad \text{para todo } w \in \theta^i_{\lambda,k} \cup \partial\theta^i_{\lambda,k}. \tag{3.22}$$

Usando (3.21), podemos assumir que $u^i_n \in \theta^i_{\lambda,k}$ para n suficientemente grande. Com efeito, se $u^i_n \subset \partial\theta^i_{\lambda,k}$ para um número infinito de termos, então $J_{\lambda,k}(u^i_n) \geq \tilde{\beta}^i_{\lambda,k} > \beta^i_{\lambda,k}$. Absurdo, pois $J_{\lambda,k}(u^i_n) \to \beta^i_{\lambda,k}$.

Pelo Lema 3.1.23, existem $\eta^i_n > 0$ e uma função diferenciável $\zeta^i_n : B_{\eta^i_n} \to \mathbb{R}^+$ com $B_{\eta^i_n} \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\zeta^i_n(0) = 1$ e $\zeta^i_n(v)(u^i_n - v) \in \theta^i_{\lambda,k}$ para todo $v \in B_{\eta^i_n}$. Seja $v_\sigma = \sigma v$ com $\|v\| = 1$ e $0 < \sigma < \eta^i_n$. Então, $v_\sigma \in B_{\eta^i_n}$ e $w^i_{\sigma,n} := \zeta^i_n(v_\sigma)(u^i_n - v_\sigma) \in \theta^i_{\lambda,k}$.

Desde que $J_{\lambda,k}$ é de classe C^1, segue de (3.22) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\|w^i_{\sigma,n} - u^i_n\| \geq{}& J_{\lambda,k}(u^i_n) - J_{\lambda,k}(w^i_{\sigma,n}) \\
&= J'_{\lambda,k}(u^i_n)(u^i_n - w^i_{\sigma,n}) + o(\|u^i_n - w^i_{\sigma,n}\|) \\
&= J'_{\lambda,k}(u^i_n)((1 - \zeta^i_n(v_\sigma))u^i_n + \zeta^i_n(v_\sigma)v_\sigma) + o(\|u^i_n - w^i_{\sigma,n}\|) \\
&= \sigma\zeta^i_n(v_\sigma)J'_{\lambda,k}(u^i_n)v + (1 - \zeta^i_n(v_\sigma))J'_{\lambda,k}(u^i_n)u^i_n + o(\|u^i_n - w^i_{\sigma,n}\|) \\
&= \sigma\zeta^i_n(v_\sigma)J'_{\lambda,k}(u^i_n)v + o(\|u^i_n - w^i_{\sigma,n}\|).
\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
J'_{\lambda,k}(u_n^i)v &\leq \frac{\|w_{\sigma,n}^i - u_n^i\|}{\sigma\zeta_n^i(v_\sigma)}\left(\frac{1}{n} - \frac{o(\|u_n^i - w_{\sigma,n}^i\|)}{\|u_n^i - w_{\sigma,n}^i\|}\right) \\
&= \frac{\|w_{\sigma,n}^i - u_n^i\|}{\sigma\zeta_n^i(v_\sigma)}\left(\frac{1}{n} + o_\sigma(1)\right) \\
&= \frac{\|u_n^i\left(\zeta_n^i(v_\sigma) - \zeta_n^i(0)\right) - \sigma v\zeta_n^i(v_\sigma)\|}{\sigma\zeta_n^i(v_\sigma)}\left(\frac{1}{n} + o_\sigma(1)\right) \\
&\leq \frac{\|u_n^i\||\zeta_n^i(v_\sigma) - \zeta_n^i(0)| + \sigma\|v\|\zeta_n^i(v_\sigma)}{\sigma\zeta_n^i(v_\sigma)}\left(\frac{1}{n} + o_\sigma(1)\right) \\
&= \frac{\|u_n^i\||(\zeta_n^i)'(0)v_\sigma + o(v_\sigma)| + \sigma\|v\|\zeta_n^i(v_\sigma)}{\sigma\zeta_n^i(v_\sigma)}\left(\frac{1}{n} + o_\sigma(1)\right)
\end{aligned}
$$

Passando ao limite quando $\sigma \to 0$, obtemos que

$$J'_{\lambda,k}(u_n^i)v \leq \|v\|\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Consequentemente,

$$\|J'_{\lambda,k}(u_n^i)\| = \sup_{\substack{v\in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\\ \|v\|=1}} J'_{\lambda,k}(u_n^i)v \leq \frac{1}{n}.$$

Portanto, $J'_{\lambda,k}(u_n^i) \to 0$ em $\left(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\right)^*$ quando $n \to \infty$, provando o resultado. ■

3.1.5 Demonstração do Teorema B

Seja $\{u_n^i\} \subset \theta_{\lambda,k}^i$ uma sequência $(PS)_{\beta_{\lambda,k}^i}$ para o funcional $J_{\lambda,k}$ dado pelo Lema 3.1.24. Desde que $\beta_{\lambda,k}^i < c_\infty + \varrho$, pelo Lema 3.1.21 existe u^i tal que $u_n^i \to u^i$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$u^i \in \theta_{\lambda,k}^i, \;\; J_{\lambda,k}(u^i) = \beta_{\lambda,k}^i \;\text{ e }\; J'_{\lambda,k}(u^i) = 0.$$

Agora, podemos inferir que $u^i \neq u^j$ para $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq \ell$. Para ver o por quê, resta observar que

$$Q_k(u^i) \in \overline{B_{R_0}(a_i)} \;\text{ e }\; Q_k(u^j) \in \overline{B_{R_0}(a_j)}.$$

Uma vez que

$$\overline{B_{R_0}(a_i)} \cap \overline{B_{R_0}(a_j)} = \emptyset \;\text{ para }\; i \neq j,$$

segue que $u^i \neq u^j$ para $i \neq j$. Portanto, $J_{\lambda,k}$ tem pelo menos ℓ pontos críticos não-triviais para $\lambda \in [0, \Lambda^*)$ e $k \geq k^*$, provando o teorema.

3.2 O caso crítico

Nesta seção, vamos considerar a multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \lambda g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}u + f(k^{-1}x)\left(\xi|u|^{r(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u\right), & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{$P_{\lambda,\xi,k}$}$$

onde λ, ξ e k são parâmetros não negativos com $k \in \mathbb{N}$, $p, q, r\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções Lipschitz, $\mathbb{Z}^N$-periódicas verificando (p_3), g e f são funções contínuas e positivas satisfazendo as condições (g_3) e (f_1)–(f_2), respectivamente.

Alguns resultados desta seção são iguais ao da seção anterior. Neste caso, remeteremos a demonstração para a Seção 3.1. Os demais resultados necessitam de algumas modificações devido a presença do termo crítico.

O resultado principal desta seção é:

Teorema C. *Suponha que (p_3), (g_3), (f_1) e (f_2) ocorrem. Então, existem $\Lambda^*, \xi^* > 0$ e $k^* \in \mathbb{N}$ tais que o problema $(P_{\lambda,\xi,k})$ admite pelo menos ℓ soluções para $0 \leq \lambda < \Lambda^*$, $\xi \geq \xi^*$ e $k \geq k^*$.*

3.2.1 Resultados preliminares

Seja $J_{\lambda,\xi,k} : W^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema $(P_{\lambda,\xi,k})$ dado por

$$J_{\lambda,\xi,k}(u) = \int \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda \int \frac{g(k^{-1}x)}{q(x)}|u|^{q(x)} \\ - \int f(k^{-1}x)\left(\frac{\xi}{r(x)}|u|^{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)}\right).$$

Mostra-se que $J_{\lambda,\xi,k} \in C^1\left(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ com

$$J'_{\lambda,\xi,k}(u)v = \int \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv\right) - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}uv \\ - \int f(k^{-1}x)\left(\xi|u|^{r(x)-2} + |u|^{p^*(x)-2}\right)uv$$

para quaisquer u e v em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Logo, os pontos críticos de J_λ são soluções do problema $(P_{\lambda,\xi,k})$.

Como funcional energia $J_{\lambda,\xi,k}$ não é limitado inferiormente sobre $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, iremos considerar o funcional $J_{\lambda,\xi,k}$ restrito a variedade de Nehari

$$\mathcal{M}_{\lambda,\xi,k} = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \colon J'_{\lambda,\xi,k}(u)u = 0\right\}.$$

No que segue, iremos considerar

$$c_{\lambda,\xi,k} = \inf_{u \in \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}} J_{\lambda,\xi,k}(u).$$

Se $f \equiv 1$ e $\lambda = 0$, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \xi|u|^{r(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{$\hat{P}_\infty$}$$

Associado ao problema $(\hat{P}_\infty)$, temos o funcional de classe C^1, $\hat{J}_\infty$ definido por

$$\hat{J}_\infty(u) = \int \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \int \left(\frac{\xi}{r(x)}|u|^{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)}\right)$$

para todo $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, e

$$\hat{c}_\infty = \inf_{u \in \hat{\mathcal{M}}_\infty} \hat{J}_\infty(u)$$

onde

$$\hat{\mathcal{M}}_\infty = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \colon \hat{J}'_\infty(u)u = 0\right\}.$$

Para $\lambda = 0$ e $f \equiv f_\infty$, vamos considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f_\infty\left(\xi|u|^{r(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u\right), & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$\hat{P}_{f_\infty}$}$$

o funcional energia associado

$$\hat{J}_{f_\infty}(u) = \int \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \int f_\infty\left(\frac{\xi}{r(x)}|u|^{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)}\right),$$

e

$$\hat{c}_{f_\infty} = \inf_{u \in \hat{\mathcal{M}}_{f_\infty}} \hat{J}_{f_\infty}(u)$$

onde

$$\hat{\mathcal{M}}_{f_\infty} = \left\{ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \colon \hat{J}'_{f_\infty}(u)u = 0 \right\}.$$

Os próximos dois resultados seguem os mesmos argumentos da Seção 3.1, e por isso iremos omitir suas demonstrações.

Lema 3.2.1. *O funcional energia $J_{\lambda,\xi,k}$ é limitado inferiormente e coercivo sobre $\mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}$.*

Corolário 3.2.2. *Se $\{u_n\}$ é uma sequência em $\mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}$ e $J_{\lambda,\xi,k}(u_n) \to c_{\lambda,\xi,k}$, então $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.*

Lema 3.2.3 (Propriedade Local)**.** *Dado $\Lambda > 0$, existem constantes positivas β e σ (dependendo apenas de ξ), tais que $J_{\lambda,\xi,k}(u) \geq \beta > 0$, para todo $\lambda \in (0, \Lambda]$ com $\|u\| = \sigma$.*

Demonstração. Argumentando como no Lema 3.1.1, mostra-se que para $\|u\| < 1$

$$J_{\lambda,\xi,k}(u) \geq \frac{1}{p_+}\|u\|^{p_+} - \frac{\lambda}{q_-}\|g\|_\infty c_1 \|u\|^{q_-} - \xi \frac{c_2}{r_-}\|u\|^{r_-} - \frac{c_3}{p_-^*}\|u\|^{p_-^*}$$

onde c_1, c_2 e c_3 são constantes positivas.

Por hipótese $p_+ < q_- \leq r_- \ll p^*$, então fixando $\sigma > 0$ suficientemente pequeno de sorte que

$$\frac{1}{p_+}\sigma^{p_+} - \frac{\Lambda}{q_-}\|g\|_\infty c_1 \sigma^{q_-} - \xi \frac{c_2}{r_-}\sigma^{r_-} - \frac{c_3}{p_-^*}\sigma^{p_-^*} \geq \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+},$$

se $0 < \lambda < \Lambda$,

$$J_{\lambda,\xi,k}(u) \geq \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+} = \beta > 0 \quad \text{on } \partial B_\sigma(0),$$

estabelecendo o resultado. ■

Lema 3.2.4. *Dado $\Lambda > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\|u\| > \delta, \quad \forall (u, \lambda, k) \in \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k} \times [0, \Lambda] \times \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

Consequentemente, pela Proposição 1.3.8, existe $\eta > 0$ verificando

$$\rho_1(u) \geq \eta, \quad \forall (u, \lambda, k) \in \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k} \times [0, \Lambda] \times \mathbb{N}.$$

Demonstração. Argumentando por contradição, se (3.23) não vale então, existe $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}$ tal que

$$\|u_n\| \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Seguindo os mesmos passos do Lema 3.1.4, obtemos

$$\|u_n\|^{p_+} \leq \Lambda c_1 \|g\|_\infty \|u_n\|^{q_-} + c_2\xi \|u_n\|^{r_-} + c_3\|u_n\|^{p_-^*} \leq (\Lambda c_1\|g\|_\infty + \xi c_2 + c_3)\, \|u_n\|^{q_-}$$

ou ainda

$$(\Lambda c_1 \|g\|_\infty + \xi c_2 + c_3)^{-1} \leq \|u_n\|^{q_- - p_+},$$

de onde obtemos um absurdo. Portando, deve existir um $\delta > 0$ tal que $\|u\| > \delta$ para todo $u \in \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}$. ■

Os lemas a seguir são análogos aos da Seção 3.1.

Lema 3.2.5. *Seja $E_{\lambda,\xi,k}(u) = J'_{\lambda,\xi,k}(u)u$. Dados $\Lambda > 0$, existe $\eta_0 > 0$ tal que*

$$E'_{\lambda,\xi,k}(u)u < \eta_0,$$

para todo $(u, \lambda, k) \in \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k} \times [0, \Lambda] \times \mathbb{N}$.

Lema 3.2.6. *Se $u_0 \in \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}$ é ponto crítico de $J_{\lambda,\xi,k}$ restrito a $\mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}$, então u_0 é ponto crítico de $J_{\lambda,\xi,k}$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.*

O próximo teorema trata da convergência do gradiente. Devido a presença do termo crítico algumas modificações na demonstração são necessárias.

Teorema 3.2.7. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e $J'_{\lambda,\xi,k} \to 0$ em $\left(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\right)^*$ quando $n \to \infty$. Então, $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $J'_{\lambda,\xi,k}(u) = 0$.*

Demonstração. Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, passando a uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, podemos assumir que existem μ e ν em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tais que $|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)} \rightharpoonup \mu$ e $|u_n|^{p^*(x)} \rightharpoonup \nu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Pelo lema de concentração-compacidade de Lions para expoentes variáveis (ver Teorema 1.4.5), existem um conjunto contável $\mathcal{J}$, pontos $\{x_j\}_{\mathcal{J}} \subset \mathbb{R}^N$ e sequências $\{\mu_j\}_{\mathcal{J}}$ e $\{\nu_j\}_{\mathcal{J}}$ em $[0, \infty)$ tais que

$$\mu \geq |\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)} + \sum_{j\in\mathcal{J}} \mu_j \delta_{x_j},$$

$$\nu = |u_n|^{p^*(x)} + \sum_{j\in\mathcal{J}} \nu_j \delta_{x_j},$$

$$\nu_j \leq C^* \mu_j^{p^*(x_j)/p(x_j)}. \tag{3.24}$$

Nosso objetivo inicial é provar que $\mathcal{J}$ é um conjunto finito ou vazio. De fato, para cada $\epsilon > 0$ fixemos $\phi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ como no Lema 2.4.2. Assim, $\{\phi_\epsilon(\cdot - x_j)u_n\} \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência limitada para todo $j \in \mathcal{J}$. Logo, $J'_{\lambda,\xi,k}(u_n)\phi_\epsilon(\cdot - x_j)u_n = o_n(1)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)\phi_\epsilon(x-x_j) + \int |\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\epsilon(x-x_j)\\ = o_n(1) + \lambda\int g(k^{-1}x)|u_n|^{q(x)} + \int f(k^{-1}x)\left(\mu|u_n|^{r(x)} + |u_n|^{p^*(x)}\right).\end{aligned} \tag{3.25}$$

Procedendo como no Lema 2.4.3 para cada $\delta > 0$ temos que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \left||\nabla u_n|^{p(x)-2}u_n\nabla u_n\nabla\phi_\epsilon(x-x_j)\right| \le \delta C + CC_\delta\left\{\|u\|^{p+}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))} + \|u\|^{p-}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))}\right\}. \tag{3.26}$$

Desde que a imersão $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{s(x)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ é compacta para toda função mensurável s, verificando $p \le s \ll p^*$ temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int g(k^{-1}x)|u_n|^{q(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) = \int g(k^{-1}x)|u|^{q(x)}\phi_\epsilon(x-x_j). \tag{3.27}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int f(k^{-1}x)|u_n|^{r(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) = \int f(k^{-1}x)|u|^{r(x)}\phi_\epsilon(x-x_j). \tag{3.28}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ em (3.25) e usando (3.26)–(3.28), obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)\phi_\epsilon(x-x_j) \le{}& \lambda\int g(k^{-1}x)|u|^{q(x)}\phi_\epsilon(x-x_j)\\ &+ \xi\int |u|^{r(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) + \int |u|^{p^*(x)}\phi_\epsilon(x-x_j)\\ &+ \delta C + CC_\delta\left[\|u\|^{p+}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))} + \|u\|^{p-}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))}\right]\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde C é uma constante independente de ϵ e j.

Agora, como $|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)} \rightharpoonup \mu$ e $|u_n|^{p^*(x)} \rightharpoonup \nu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, argumentando como na demonstração do Lema 2.4.3, vide p. 33, tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \ge \mu(B_\epsilon(x_j)) \ge \mu_j \tag{3.30}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int |u_n|^{p^*(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) \leq \nu(B_{2\epsilon}(x_j)) \leq \nu_j. \tag{3.31}$$

As desigualdades (3.29)-(3.31), implicam em

$$\begin{aligned}\mu(x_j) \leq \mu(B_\epsilon(x_j)) &\leq \lim_{n\to\infty}\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)\phi_\epsilon(x-x_j)\\ &\leq \lambda\int_{B_{2\epsilon}(x_j)} g(k^{-1}x)|u|^{q(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) + \xi\int_{B_{2\epsilon}(x_j)}|u|^{r(x)}\phi_\epsilon(x-x_j) + \nu(B_{2\epsilon}(x_j))\\ &\quad + \delta C + CC_\delta\left[\|u\|^{p_+}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))} + \|u\|^{p_-}_{L^{p^*(x)}(B_{2\epsilon}(x_j))}\right].\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$, obtemos

$$\mu(x_j) \leq \nu(x_j).$$

Segue da desigualdade (3.24) que

$$\nu_j \leq C^*\nu_j^{p^*(x_j)/p(x_j)},$$

o que implica

$$\nu_j \leq C^*\nu_j^{p^*(x_j)/p(x_j)}.$$

Se $\nu_j > 0$ para algum $j \in \mathfrak{J}$, então

$$\nu_j \geq \left(\frac{1}{C^*}\right)^{\frac{p(x)}{p^*(x)-p(x)}}.$$

Desde que $\frac{p_-}{p_+^*-p_-} \leq \frac{p(x)}{p^*(x)-p(x)} \leq \frac{p_+}{p_-^*-p_+}$,

$$\nu_j \geq \min\left\{C^{*^{-\frac{p_-}{p_+^*-p_-}}}, C^{*^{-\frac{p_+}{p_-^*-p_+}}}\right\}.$$

Logo, existe uma constante positiva α tal que $\nu \geq \alpha$ com α independente de j. Como ν é finita, concluímos que $\tilde{\mathfrak{J}} := \{j \in \mathfrak{J}\colon v_j > 0\}$ é um conjunto finito ou vazio. Consequentemente, apenas uma das duas possibilidades ocorrem:

(i) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\nu_1, \ldots \nu_m > 0$ (reordenando se necessário);

(ii) $\nu_j = 0$ para todo $j \in \mathfrak{J}$.

Passemos a analisar a primeira possibilidade. Para isto, considere $0 < \epsilon_0 < 1$ suficientemente pequeno de maneira que

$$B_{\epsilon_0}(x_1), B_{\epsilon_0}(x_2), \cdots, B_{\epsilon_0}(x_m) \subset B_{\frac{1}{\epsilon_0}}(0)$$

e

$$B_{\epsilon_0}(x_i) \cap B_{\epsilon_0}(x_j) = \emptyset, \text{ para } i \neq j.$$

Seja ϕ como no Lema 2.4.2, e defina a função $\Psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi_\epsilon(x) = \phi(\epsilon x) - \sum_{j=1}^{m} \phi\left(\frac{x - x_j}{\epsilon}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Observe que para $0 < \epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}$,

$$\Psi_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j) \\ 1 & \text{se} \quad x \in A_\epsilon = B_{\frac{1}{\epsilon}}(0) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_{2\epsilon}(0). \end{cases}$$

Assim,

$$supp\, \Psi_\epsilon \subset \overline{B_{\frac{2}{\epsilon}}(0)} \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{\epsilon}{2}}(0).$$

Logo,

$$\int |u_n|^{p^*(x)} \Psi_\epsilon \to \int |u|^{p^*(x)} \Psi_\epsilon,$$

e portando

$$\int |u_n \Psi_\epsilon - u \Psi_\epsilon|^{p^*(x)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Seja $\{P_n\}$ a sequência dada por (2.27). Como $J'_{\lambda,\xi,k}(u_n)u_n\Psi_\epsilon = o_n(1)$ e $J'_{\lambda,\xi,k}(u_n)u\Psi_\epsilon = o_n(1)$, argumentando como na prova do Teorema 3.1.7, mostra-se que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_\epsilon} P_n(x) = 0.$$

Definindo os conjuntos $A_\epsilon^+ = \{x \in A_\epsilon : p(x) \geq 2\}$ e $A_\epsilon^- = \{x \in A_\epsilon : 1 < p(x) < 2\}$, e procedendo como Lema 2.4.4 tem-se

$$\int_{A_\epsilon^+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{A_\epsilon^-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} \to 0$$

o que implica $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ q.t.p. em A_ϵ.

Agora, observando que

$$\mathbb{R}^N \setminus \{x_1, \dots, x_2\} = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \frac{1}{n}<\frac{\epsilon_0}{2}}} A_{\frac{1}{n}}$$

por um argumento de diagonal,

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Para o segundo caso, consideremos a função $\Psi_\epsilon(x) = \phi(\epsilon x)$ e o conjunto $A_\epsilon = B_{\frac{1}{\epsilon}}$, repetindo os mesmos argumentos do primeiro caso temos que

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Para finalizar a demonstração, note que $\{|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\}$ é limitada em $(L^{p'(x)}(\mathbb{R}^N))^N$ e $|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \to |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, aplicando o Lema de Brezis-Lieb (vide Lema 1.2.6), obtemos

$$|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \text{ em } (L^{p'(x)}(\mathbb{R}^N))^N.$$

De maneira análoga, temos que

$$|u_n|^{s(x)-2}u_n \rightharpoonup |u|^{s(x)-2}u \text{ em } L^{s'(x)}(\mathbb{R}^N)$$

para toda função mensurável s verificando $p \leq s \leq p^*$. Agora, usando o fato que $J'_{\lambda,\xi,k}(u_n)v = o_n(1)$ para todo $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ juntamente com os dois últimos limites, concluímos que $J'_{\lambda,k}(u)v = 0$ para todo $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. ■

3.2.2 Propriedades envolvendo os níveis minimax

Os próximos quatro resultados são devidos a Alves [5]. Para um melhor entendimento do texto, demonstraremos tais resultados.

Lema 3.2.8. *Os níveis $c_{0,\xi,k}$, $\hat{c}_\infty$ e $\hat{c}_{f_\infty}$ tendem a zero quando ξ tende ao infinito, isto é,*

$$\lim_{\xi\to\infty} c_{0,\xi,k} = \lim_{\xi\to\infty} \hat{c}_\infty = \lim_{\xi\to\infty} \hat{c}_{f_\infty} = 0.$$

O limite de $c_{0,\xi,k}$ quando $\xi \to \infty$ é uniforme em k.

Demonstração. Provaremos apenas que

$$\lim_{\xi\to\infty} c_{0,\xi,k} = 0$$

porque os demais casos são análogos. Fixado $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$, existe $t_\xi > 0$ tal que $t_\xi\phi \in \mathcal{M}_{0,\xi,k}$ e

$$J_{0,\xi,k}(t_\xi\phi) = \max_{t\geq 0} J_{0,\xi,k}(t\phi).$$

Desde que $t_\xi\phi \in \mathcal{M}_{0,\xi,k}$ e $0 < f_\infty < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}\int t_\xi^{p(x)}\left(|\nabla\phi|^{p(x)} + |\phi|^{p(x)}\right) &= \xi\int t_\xi^{r(x)} f(k^{-1}x)|\phi|^{r(x)} + \int t_\xi^{p^*} f(k^{-1}x)|\phi|^{p^*(x)}\\ &\geq \xi f_\infty \int t_\xi^{r(x)}|\phi|^{r(x)}.\end{aligned}$$

Afirmação 3.2.9. $t_\xi \to 0$ *quando* $\xi \to \infty$.

Com efeito, suponha que $t_\xi \geq 1$, então

$$t_\xi^{p_+}\int\left(|\nabla\phi|^{p(x)} + |\phi|^{p(x)}\right) \geq \int t_\xi^{p(x)}\left(|\nabla\phi|^{p(x)} + |\phi|^{p(x)}\right) \geq \xi f_\infty t_\xi^{r_-}\int |\phi|^{r(x)}$$

ou equivalentemente,

$$\int\left(|\nabla\phi|^{p(x)} + |\phi|^{p(x)}\right) \geq \xi f_\infty t_\xi^{r_- - p_+}\int |\phi|^{r(x)} \geq \xi f_\infty\int |\phi|^{r(x)}. \tag{3.32}$$

Observe que o lado direito de (3.32) tende ao infinito quando $\xi \to \infty$, enquanto o lado esquerdo é limitado, o que é um absurdo. Logo, $t_\xi < 1$ para ξ suficientemente grande. Consequentemente,

$$t_\xi^{p_-}\int\left(|\nabla\phi|^{p(x)} + |\phi|^{p(x)}\right) \geq \xi f_\infty t_\xi^{r_+}\int |\phi|^{r(x)},$$

implicando em

$$t_\xi \leq \left(\frac{c_1}{\xi c_2}\right)^{1/(r_+ - p_-)}$$

onde $c_1 = \int\left(|\nabla\phi|^{p(x)} + |\phi|^{p(x)}\right)$ e $c_2 = \int|\phi|^{r(x)}$. Lembrando que $p_- < r_+$, concluímos que $t_\xi \to 0$ quando $\xi \to \infty$, provando a afirmação.

Uma vez que,

$$0 \leq c_{0,\xi,k} \leq J_{0,\xi,k}(t_\xi \phi) \leq t_\xi^{p_-} \int \left(|\nabla \phi|^{p(x)} + |\phi|^{p(x)} \right),$$

segue que $c_{0,\xi,k} \to 0$ quando $\xi \to \infty$. ■

No que segue, fixaremos $K > 0$ tal que

$$\|v\|_{p^*(x)} \leq K \|v\|, \quad \forall v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$$

a qual existe pela imersão de Sobolev do espaço $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{p^*(x)}(\mathbb{R}^N)$.

O lema a seguir é uma consequência imediata do Lema 3.2.8.

Corolário 3.2.10. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\xi^* > 0$ tal que*

$$c_{0,\xi,k}, \hat{c}_\infty, \hat{c}_{f_\infty} < \vartheta K^{-1/\vartheta}$$

para todo $\xi \geq \xi^*$, onde $\vartheta = \frac{1}{p_+} - \frac{1}{p_-^*}$.

Lema 3.2.11. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $\hat{\mathcal{M}}_\infty$ com $\hat{J}_\infty(u_n) \to \hat{c}_\infty$ quando $n \to \infty$. Então, existem $\xi^* > 0$ e $n_0 = n_0(\xi) \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\|u_n\|_{L^{p^*(x)}(\mathbb{R}^N)}, \|u_n\| \leq 1$$

para todo $\xi \geq \xi^*$ e $n \geq n_0$.

Demonstração. Segue do Lema 3.2.8 que existe $\xi^* > 0$ (aumentando se necessário) tal que

$$\hat{c}_\infty \leq \frac{1}{4K^{p_+}} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-} \right) \text{ para todo } \xi \geq \xi^*. \tag{3.33}$$

Fixando $\xi > \xi^*$, da igualdade $\hat{J}_\infty(u_n) - \frac{1}{r_-} \hat{J}'_\infty(u_n)u_n = \hat{c}_\infty + o_n(1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-} \right) \int (|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}) &\leq \int \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{r(x)} \right) \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)} \right) \\
&\leq \hat{J}_\infty(u_n) - \frac{1}{r_-} \hat{J}'_\infty(u_n)u_n \\
&= \hat{c}_\infty + o_n(1).
\end{aligned}$$

Da desigualdade (3.33), resulta

$$\limsup_{n\to\infty}\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \leq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)^{-1} \hat{c}_\infty \leq \frac{1}{4K^{p_+}}.$$

Portanto, existe $n_0 = n_0(\xi) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \leq \frac{1}{K^{p_+}}, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Aplicando a Proposição 1.3.8 vem

$$\|u_n\|^{p_+} \leq \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \leq \frac{1}{K^{p_+}},$$

o que implica

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{K} < 1, \text{ para todo } \geq n_0.$$

Lembrando que $\|u_n\|_{L^{p^*(x)}(\mathbb{R}^N)} \leq K\|u_n\|$, segue o resultado. ■

Corolário 3.2.12. *Sob as hipóteses do Lema 3.2.11, existem $\xi^* > 0$ e $n_0 = n_0(\xi) \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\left(\int |u_n|^{p^*(x)}\right)^{1/p^*_-} \leq K\left(\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)\right)^{1/p_+}$$

para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. Combinando Lema 3.2.11 e a Proposição 1.3.8, tem-se

$$\left(\int |u_n|^{p^*(x)}\right)^{1/p^*_-} \leq \|u_n\|_{L^{p^*(x)}(\mathbb{R}^N)} \leq K\|u_n\| \leq K\left(\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)\right)^{1/p_+} \tag{3.34}$$

para todo $n \geq n_0$. ■

Teorema 3.2.13. *Seja $\{u_n\} \subset \hat{\mathcal{M}}_\infty$ com $\hat{J}_\infty(u_n) \to \hat{c}_\infty$. Então,*

I. *$u_n \to u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$,*

ou

II. *Existe $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ tal que $v_n(x) = u_n(x + y_n) \to v$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, verificando*

$$\hat{J}_\infty(v) = \hat{c}_\infty \text{ e } v \in \hat{\mathcal{M}}_\infty.$$

Demonstração. Seguindo as mesmas ideias do Teorema 3.1.8, existe $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\hat{J}_\infty(u_n) \to \hat{c}_\infty \text{ e } \hat{J}'_\infty(u_n) \to 0.$$

Se $u \neq 0$, segue dos mesmos argumentos usados na demonstração do Teorema 3.1.8 que $u_n \to u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Agora, se $u = 0$ afirmamos que existem números positivos R e τ, e uma sequência $\{y_n\}$ em $\mathbb{R}^N$ tais que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} |u_n|^{p(x)} \geq \tau. \tag{3.35}$$

Caso contrário

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^{p(x)} = 0,$$

e pelo Lema A.2.2, temos

$$u_n \to 0 \text{ em } L^{s(x)}(\mathbb{R}^N)$$

para toda função mensurável $s \in C(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $p \ll s \ll p^*$.

Desde que $\hat{J}'_\infty(u_n)u_n = o_n(1)$, segue da convergência acima que

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) = o_n(1) + \int |u_n|^{p^*(x)}.$$

Da limitação de $\{u_n\}$, existe $L > 0$ e uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$, tal que

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \to L \tag{3.36}$$

e assim,

$$\int |u_n|^{p^*(x)} \to L. \tag{3.37}$$

Observe que

$$\hat{c}_\infty + o_n(1) = \hat{J}_\infty(u_n) \geq \frac{1}{p_+} \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) - \frac{1}{p^*_-} \int |u_n|^{p^*(x)}.$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade anterior juntamente com (3.36) e (3.37), obtemos

$$\hat{c}_\infty \geq \frac{1}{p_+}L - \frac{1}{p_-^*}L = \vartheta L. \tag{3.38}$$

Para cada $\xi \geq \xi^*$ fixado, combinando o Corolário 3.2.12 e os limites (3.36) e (3.37), resulta

$$L^{1/p_-^*} \leq K L^{1/p_+}$$

ou seja

$$L \geq \left(\frac{1}{K}\right)^{1/\vartheta}$$

Da desigualdade anterior e de (3.38),

$$\hat{c}_\infty \geq \vartheta\left(\frac{1}{K}\right)^{1/\vartheta}, \quad \text{para todo } \xi \geq \xi^*$$

o que é absurdo com o Corolário 3.2.10. Portanto, a afirmação é verdadeira.

O resultado agora segue usando os mesmo argumentos do Teorema 3.1.8. ■

3.2.3 Relação entre os níveis $\hat{c}_\infty, c_{\lambda,\xi,k}$ e $c_{0,\xi,k}$

Das desigualdades $J_{\lambda,\xi,k}(u) \leq J_{0,\xi,k}(u)$ e $\hat{J}_\infty(u) \leq J_{0,\xi,k}(u)$ para todo $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$,

$$c_{\lambda,\xi,k} \leq c_{0,\xi,k} \quad \text{e} \quad \hat{c}_\infty \leq c_{0,\xi,k} \tag{3.39}$$

Lema 3.2.14. *Os níveis minimax $c_{0,\xi,k}$ e $\hat{c}_{f_\infty}$ satisfazem a desigualdade*

$$c_{0,\xi,k} < \hat{c}_{f_\infty}.$$

Consequentemente, $\hat{c}_\infty < \hat{c}_{f_\infty}$.

Demonstração. Segue as mesmas ideias do Lema 3.1.10. ■

Proposição 3.2.15. *O nível $c_{0,\xi,k}$ é um valor crítico de $J_{0,\xi,k}$, isto é, existe $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$J_{0,\xi,k}(v) = c_{0,\xi,k} \quad e \quad J'_{0,\xi,k}(v) = 0.$$

Demonstração. De maneira similar ao Teorema 3.2.13, existe uma sequência u_n em $\mathcal{M}_{0,\xi,k}$ com

$$J_{0,\xi,k}(u_n) \to c_{0,\xi,k} \quad e \quad J'_{0,\xi,k}(u_n) \to 0.$$

Desde que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, e sendo $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ reflexivo, a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Afirmação 3.2.16. $u \neq 0$.

Suponha por contradição que $u = 0$. Então $u_n \rightharpoonup 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Afirmamos que existem números positivos R e τ e uma sequência $\{y_n\}$ em $\mathbb{R}^N$ (a qual podemos supor em $\mathbb{Z}^N$) tais que a desigualdade (3.35) vale. Caso contrário, pelo Lema A.2.2 segue que $u_n \to 0$ em $L^{r(x)}(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$c_{0,\xi,k} + o_n(1) \geq \frac{1}{p_+} \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) - \frac{1}{p_-^*} \int f(\varepsilon x)|u_n|^{p^*(x)}.$$

Da definição de $\mathcal{M}_{0,\xi,k}$,

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) - \int f(k^{-1}x)|u_n|^{p^*(x)} = o_n(1).$$

Como $\{u_n\}$ é um sequência limitada, existe $L > 0$ de maneira que

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \to L \tag{3.40}$$

e assim,

$$\int f(k^{-1}x)|u_n|^{p^*(x)} \to L. \tag{3.41}$$

Consequentemente,

$$c_{0,\xi,k} \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p_-^*}\right) L = \vartheta L$$

para n suficientemente grande. Como $f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, segue do Corolário 3.2.12 que

$$\left(\int f(k^{-1}x)|u_n|^{p^*(x)}\right)^{1/p_-^*} \leq \left(\int |u_n|^{p^*(x)}\right)^{1/p_-^*} \leq K \left(\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)\right)^{1/p_+}$$

Da desigualdade anterior e dos limites (3.40) e (3.41), obtemos

$$L \geq \left(\frac{1}{K}\right)^{1/\vartheta},$$

consequetemente,

$$c_{0,\xi,k} \geq \vartheta \left(\frac{1}{K}\right)^{1/\vartheta}, \quad \text{para todo } \xi \geq \xi^*$$

o que contradiz o Corolário 3.2.10. Portanto, a desigualdade (3.35) ocorre.

Segue dos mesmos argumentos do Teorema 3.2.13 que a sequência $\{y_n\}$ é ilimitada. Agora, defina a função $v_n(x) = u_n(x + y_n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Relembrando que $J'_{0,\xi,k}(u_n)\phi(\cdot + y_n) = o_n(1)$ para toda $\phi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned} o_n(1) = & \int \left(|\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n \nabla \phi + |v_n|^{p(x)-2} v_n \phi\right) \\ & - \int f(k^{-1}(x+y_n)) \left(\xi |v_n|^{r(x)-2} + |v_n|^{p^*(x)-2}\right) v_n \phi. \end{aligned}$$

Adaptando os argumentos usados na demonstração do Teorema 3.2.7 mostra-se que para alguma subsequência

$$\nabla v_n(x) \to \nabla v(x) \quad \text{e} \quad v_n(x) \to v(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Desta maneira, o limite anterior implica que

$$\int \left(|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v \nabla \phi + |v|^{p(x)-2} v \phi\right) - \int f_\infty \left(\xi |v|^{r(x)-2} + |v|^{p^*(x)-2}\right) v \phi = 0,$$

provando que v é uma solução fraca do problema $(\hat{P}_{f_\infty})$. Aplicando o Lema de Fatou, obtemos

$$\hat{c}_{f_\infty} \leq \hat{J}_{f_\infty}(v) = \hat{J}_{f_\infty}(v) - \frac{1}{q_-}\hat{J}'_{f_\infty}(v) \quad \leq \liminf_{n\to\infty} \left(J_{0,\xi,k}(u_n) - \frac{1}{q_-} J'_{0,\xi,k}(u_n)u_n\right) = c_{0,\xi,k}.$$

Logo, $\hat{c}_{f_\infty} \leq c_{0,\xi,k}$, o que contradiz o Lema 3.2.14. Portanto, $u \neq 0$.

Como $J'_{0,\xi,k}(u_n) = o_n(1)$ segue que $J'_{0,\xi,k}(u)u = 0$, isto é $u \in \mathcal{M}_{0,\xi,k}$. Aplicando novamente o Lema de Fatou, concluímos que

$$c_{0,\xi,k} \leq J_{0,\xi,k}(u) = J_{0,\xi,k}(u) - \frac{1}{q_-} J'_{0,\xi,k}(u)u \leq \liminf_{n\to\infty} \left\{J_{0,\xi,k}(u_n) - \frac{1}{q_-} J'_{0,\xi,k}(u_n)u_n\right\} = c_{0,\xi,k},$$

de onde segue que $J_{0,\xi,k}(u) = c_{0,\xi,k}$. ■

No que segue denotaremos por $\widehat{U} \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ uma solução de energia mínima do problema $(\hat{P}_\infty)$, isto é,

$$\hat{J}_\infty(\widehat{U}) = \hat{c}_\infty \quad \text{e} \quad \hat{J}'_\infty(\widehat{U}) = 0 \ \ (\text{ver Teorema } 3.2.13)\ .$$

Para $1 \leq i \leq \ell$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos a função $\widehat{U}_k^i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$\widehat{U}_k^i(x) = \widehat{U}(x - ka_i).$$

Os próximos resultados são análogos aos das Seção 3.1.

Lema 3.2.17. *Para todo $i \in \{1, ..., \ell\}$, tem-se*

$$\limsup_{k \to +\infty} \big(\sup_{t \geq 0} J_{\lambda,\xi,k}(t\widehat{U}_k^i) \big) \leq \hat{c}_\infty.$$

Lema 3.2.18. *Existem $\delta_0 > 0$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tais que se $u \in \mathcal{M}_{0,\xi,k}$ e $J_{0,\xi,k}(u) \leq \hat{c}_\infty + \delta_0$, então*

$$Q_k(u) \in K_{\frac{R_0}{2}} \quad \textit{para } k \geq k_1.$$

Lema 3.2.19. *Existe uma constante $R > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_{\lambda,\xi,k} = \left\{ u \in \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}; J_{\lambda,\xi,k}(u) < \hat{c}_\infty + \frac{\delta_0}{2} \right\} \subset B_R(0),$$

para $k \geq k_1$, isto é, $\mathcal{A}_{\lambda,\xi,k}$ é um conjunto limitado, onde k_1 foi dado no Lema 3.1.14. Além disso, R é independente de λ, ξ e k.

Lema 3.2.20. *Seja $u \in \mathcal{A}_{\lambda,\xi,k}$ e $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{M}_{0,\xi,k}$. Então, dado $\Lambda > 0$, existem constantes $C > 0$ e $k_2 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$0 \leq t_u \leq C, \qquad \textit{para todo } (u, \lambda, k) \in \mathcal{A}_{\lambda,\xi,k} \times [0, \Lambda] \times ([k_2, +\infty) \cap \mathbb{N}).$$

Lema 3.2.21. *Seja $\delta_0 > 0$ dado pelo Lema 3.1.14 e $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$. Então, existe $\Lambda^* > 0$ tal que*

$$Q_k(u) \in K_{\frac{R_0}{2}}, \quad \forall (u, \lambda, k) \in \mathcal{A}_{\lambda,\xi,k} \times [0, \Lambda_*) \times ([k_3, +\infty) \cap \mathbb{N}).$$

No que segue, denotaremos por

- $\hat{\theta}^i_{\lambda,\xi,k} = \{u \in \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}; |Q_k(u) - a_i| < R_0\}$,

- $\partial\hat{\theta}^i_{\lambda,\xi,k} = \{u \in \mathcal{M}_{\lambda,\xi,k}; |Q_k(u) - a_i| = R_0\}$,

- $\beta^i_{\lambda,\xi,k} = \inf\limits_{u\in\hat{\theta}^i_{\lambda,\xi,k}} J_{\lambda,\xi,k}(u)$

e

- $\tilde{\beta}^i_{\lambda,\xi,k} = \inf\limits_{u\in\partial\hat{\theta}^i_{\lambda,\xi,k}} J_{\lambda,\xi,k}(u)$.

Lema 3.2.22. *Fixando $\varrho < \min\left\{\frac{1}{2}(\hat{c}_{f_\infty} - \hat{c}_\infty), \vartheta - \hat{c}_\infty\right\}$, existe $k^* \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\beta^i_{\lambda,\xi,k} < \hat{c}_\infty + \varrho \ \ e \ \ \beta^i_{\lambda,\xi,k} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,\xi,k},$$

para todo $\lambda \in [0, \Lambda^*)$ e $k \geq k^*$.

Lema 3.2.23. *Seja $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $J_{\lambda,\xi,k}$ com $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$J_{\lambda,\xi,k}(v_n) - J_{0,\xi,k}(w_n) - J_{\lambda,\xi,k}(v) = o_n(1) \tag{3.42}$$

e

$$\|J'_{\lambda,\xi,k}(v_n) - J'_{0,\xi,k}(w_n) - J'_{\lambda,\xi,k}(v)\| = o_n(1), \tag{3.43}$$

onde $w_n = v_n - v$.

O próximo Lema trata da condição $(PS)_d$ para d abaixo de um certo valor. Devido ao termo crítico temos algumas dificuldades técnicas que merecem ser pontuadas.

Lema 3.2.24. *O funcional $J_{\lambda,\xi,k}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ para $d \leq \hat{c}_\infty + \varrho$, onde ϱ é dado no Lema 3.2.22.*

Demonstração. Seja $\{v_n\} \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $J_{\lambda,\xi,k}$ com $d \leq \hat{c}_\infty + \varrho$. Similar ao Corolário 3.1.3, $\{v_n\}$ é uma sequência limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, e portanto, para alguma subsequência, ainda denotada por $\{v_n\}$,

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

para algum $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Deste que $J'_{\lambda,\xi,k}(v) = 0$ e $J_{\lambda,\xi,k}(v) \geq 0$, segue de (3.42) e (3.43) que $w_n = v_n - v$ é uma sequência $(PS)_{\tilde{d}}$ para $J_{0,\xi,k}$ com $\tilde{d} = d - J_{\lambda,\xi,k}(v) \leq \hat{c}_\infty + \varrho$.

Afirmação 3.2.25. *Existe $R > 0$ tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |w_n|^{p(x)} = 0.$$

Suponha por um momento que a afirmação é verdadeira. Então,

$$\int |w_n|^{r(x)} \to 0.$$

Por (3.43) temos que $J'_{0,\xi,k}(w_n)w_n = o_n(1)$, e assim

$$\int \left(|\nabla w_n|^{p(x)} + |w_n|^{p(x)}\right) - \int f(k^{-1}x)|w_n|^{p^*(x)} = o_n(1),$$

Como $\{w_n\}$ é uma sequência limitada, existe $L \geq 0$ tal que a menos de uma subsequência

$$\int |\nabla w_n|^{p(x)} + |w_n|^{p(x)} \to L.$$

Consequentemente,

$$\int f(k^{-1}x)|w_n|^{p^*(x)} \to L.$$

Observe que

$$\begin{aligned} J_{0,\xi,k}(w_n) &= \int \frac{1}{p(x)}(|\nabla w_n|^{p(x)} + |w_n|^{p(x)}) - \int \frac{1}{p^*(x)} f(k^{-1}x)|w_n|^{p^*(x)} + o_n(1) \\ &\geq \frac{1}{p_+}\int (|\nabla w_n|^{p(x)} + |w_n|^{p(x)}) - \frac{1}{p^*_-}\int f(k^{-1}x)|w_n|^{p^*(x)} + o_n(1). \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\tilde{d} := d - J_{\lambda,\xi,k}(v) \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p^*_-}\right) L.$$

Se $L > 0$, então procedendo como na demonstração da Proposição 3.2.15 concluímos que

$$\tilde{d} \geq \vartheta K^{-1/\vartheta},$$

o que é uma contradição com o Corolário 3.2.10.

Demonstração da afirmação 3.2.25: Se a afirmação não é verdadeira, para cada $R > 0$

dado, podemos encontrar $\eta > 0$ e $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ verificando

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |w_n|^{p(x)} \geq \eta > 0.$$

Como $w_n \rightharpoonup 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, argumentando como na prova do Teorema 3.2.13 concluímos que $\{y_n\}$ é uma sequência ilimitada. Seja

$$\tilde{w}_n(x) = w_n(x + y_n) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Então, $\{\tilde{w}_n\}$ também é uma sequência $(PS)_{\tilde{d}}$ para $J_{0,\xi,k}$, e portanto limitada. Logo, existem $\tilde{w} \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e uma subsequência $\{\tilde{w}_n\}$, ainda denotada por $\{\tilde{w}_n\}$, tal que

$$\tilde{w}_n \rightharpoonup \tilde{w} \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Segue das mesmas ideias usadas na demonstração do Teorema 3.2.13 que $\tilde{w} \neq 0$. Além disso, desde que $J'_{0,\xi,k}(w_n)\phi(\cdot - y_n) = o_n(1)$ para todo $\phi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, mostra-se que $\nabla\tilde{w}_n(x) \to \nabla\tilde{w}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, de onde segue que

$$\int \left(|\nabla\tilde{w}|^{p(x)-2}\nabla\tilde{w}\nabla\phi + |\tilde{w}|^{p(x)-2}\tilde{w}\phi\right) = \int f_\infty(\xi|\tilde{w}|^{r(x)-2}\tilde{w} + |\tilde{w}|^{p^*(x)-2}\tilde{w})\phi,$$

para toda $\phi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, isto é, $\tilde{w}$ é uma solução fraca do Problema $(\hat{P}_{f_\infty})$. Consequentemente, após alguns cálculos rotineiros, obtemos

$$\hat{c}_{f_\infty} \leq \hat{J}_{f_\infty}(\tilde{w}) = \hat{J}_{f_\infty}(\tilde{w}) - \frac{1}{q_-}\hat{J}'_{f_\infty}(\tilde{w})\tilde{w} \leq \liminf_{n\to\infty}\left\{J_{0,\xi,k}(w_n) - \frac{1}{q_-}J'_{0,\xi,k}(w_n)w_n\right\} = \tilde{d},$$

implicando que $\hat{c}_{f_\infty} \leq \hat{c}_\infty + \varrho$, que é um absurdo, porque $\varrho < \hat{c}_{f_\infty} - \hat{c}_\infty$. Portanto, a Afirmação 3.2.25 é verdadeira. ■

Lema 3.2.26. *Para cada $1 \leq i \leq \ell$, existe uma sequência $(PS)_{\beta^i_{\lambda,\xi,k}}$, $\{u^i_n\} \subset \theta^i_{\lambda,\xi,k}$ para o funcional $J_{\lambda,\xi,k}$.*

3.2.4 Demonstração do Teorema C

Segue os mesmos passos do Teorema B.

Capítulo 4

Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quaselineares com expoentes variáveis e não linearidade do tipo côncavo-convexo

Recordando o que foi dito na introdução, neste capítulo vamos estudar os problemas ($P_{\lambda,k}$) e ($P_{\lambda,\xi,k}$) com não linearidades do tipo côncavo-convexo, ou seja, vamos considerar

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \lambda g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}u + f(k^{-1}x)|u|^{r(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{$P_{\lambda,k}$}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \lambda g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}u + f(k^{-1}x)(\xi|u|^{r(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u), & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{$P_{\lambda,\xi,k}$}$$

onde λ, ξ e k são parâmetros positivos com $k \in \mathbb{N}$, as funções $p, q, r : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ são Lipschitz, $\mathbb{Z}^N$-periódicas verificando as condições:

$$1 < q_- \le q(x) \le q_+ < p_- \le p(x) \le p_+ < r_- \le r(x) \ll p^*(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{p_4}$$

e

$$\frac{q_+}{p_-} < \frac{r_+ - q_+}{r_+ - p_-} \cdot \frac{r_- - p_+}{r_- - q_-}. \tag{p_5}$$

Afim de mostrar multiplicidade de soluções para os problemas acima, usamos argumentos de Tarantello [75] para dividir a variedade de Nehari em três partes, Princípio de Concentração-Compacidade de Lions devido a Fu [41], Fu & Zhang [42] e Fu & Zhang [43] e o Princípio Variacional de Ekeland.

A condição (p_5) é equivalente a $0 < q < p$ para o caso em que os expoente são constantes. No entanto, para o expoente variável será necessário assumir esta condição técnica, que será utilizada na prova do Lema 4.1.8

4.1 Caso subcrítico

Para provar a multiplicidade de soluções para o problema $(P_{\lambda,k})$, assumimos que as funções f e g satisfazem seguintes condições:

$(\tilde{g}_3)$ $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável não negativa com $g \in L^{\Theta(x)}(\mathbb{R}^N)$ onde $\Theta(x) = \frac{r(x)}{r(x)-q(x)}$.

(f_1) $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função positiva verificando

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = f_\infty$$

e $0 < f_\infty < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

(f_2) Existem ℓ pontos $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$ em $\mathbb{Z}^N$ com $a_1 = 0$, tais que

$$1 = f(a_i) = \max_{\mathbb{R}^N} f(x), \text{ para } 1 \leq i \leq \ell.$$

Os resultados principais desta seção são:

Teorema D. *Sob as condições (p_4)–(p_5), $(\tilde{g}_3)$ e (f_1), existe $\Lambda_* > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \Lambda_*)$ o problema $(P_{\lambda,k})$ tem pelo menos uma solução de energia mínima (ground state solution) u_0 com energia negativa.*

Teorema E. *Assuma (p_4)–(p_5), $(\tilde{g}_3)$ e (f_1)–(f_2). Então, existem números positivos k_* e $\Lambda_* = \Lambda(k_*)$, tais que problema $(P_{\lambda,k})$ admite pelo menos $\ell + 1$ soluções para $0 < \lambda < \Lambda_*$ e $k > k_*$.*

4.1.1 Resultados preliminares

Por conveniência, ao longo deste capítulo, denotaremos por g_k e f_k as seguintes funções

$$g_k(x) = g(k^{-1}x) \quad \text{e} \quad f_k(x) = f(k^{-1}x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Seja $I_{\lambda,k} : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional de classe C^1 associado ao problema $(P_{\lambda,k})$ dado por

$$I_{\lambda,k}(u) = \int \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda \int \frac{g_k(x)}{q(x)}|u|^{q(x)} - \int \frac{f_k(x)}{r(x)}|u|^{r(x)}.$$

com

$$\begin{aligned} I'_{\lambda,k}(u)v = & \int \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv\right) - \lambda \int g_k(x)|u|^{q(x)-2}uv \\ & - \int f_k(x)|u|^{r(x)-2}uv, \end{aligned}$$

para todos u e v em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, os pontos críticos de $I_{\lambda,k}$ são precisamente as soluções (fracas) do problema $(P_{\lambda,k})$.

Uma vez que $I_{\lambda,k}$ não é limitado inferiormente sobre $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, vamos considerar o funcional $I_{\lambda,k}$ restrito a variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda,k}$ definida por

$$\mathcal{N}_{\lambda,k} = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \colon I'_{\lambda,k}(u)u = 0\right\}.$$

Considerando $f \equiv 1$ e $\lambda = 0$, ficamos com o problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = |u|^{r(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \qquad (T_\infty)$$

Associado ao problema (T_∞) temos o funcional de Euler-Lagrange $I_\infty : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\infty(u) = \int \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \int \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)},$$

com o nível do passo da montanha

$$\alpha_\infty = \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u),$$

e a variedade de Nehari

$$\mathcal{N}_\infty = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : I'_\infty(u)u = 0\right\}.$$

Para $f \equiv f_\infty$ e $\lambda = 0$, iremos considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f_\infty |u|^{r(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{T_{f_∞}}$$

e como acima, denotemos por $I_{f_\infty}, \alpha_{f_\infty}$ e $\mathcal{N}_{f_\infty}$ o funcional energia, o nível do passo da montanha, e a variedade de Nehari associada ao problema T_{f_∞} respectivamente.

No que segue, fixaremos um número $K > 1$ tal que

$$\|v\|_{r(x)}, \|v\|_{p^*(x)} \leq K\|v\| \text{ para todo } v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \tag{4.1}$$

o qual existe pelo Teorema 1.3.4.

Lema 4.1.1 (Propriedade Local). *Para cada $k \in \mathbb{N}$, existem constantes positivas $\lambda^* = \lambda^*(k)$, β e σ independentes de k, tais que $I_{\lambda,k}(u) \geq \beta > 0$ para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ com $\|u\| = \sigma$.*

Demonstração. Combinando a definição de $I_{\lambda,k}(u)$ com a desigualdade de Hölder, a imersão de Sobolev e a Proposição 1.2.4, obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,k}(u) &\geq \frac{1}{p_+}\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda\frac{1}{q_-}\int g_k(x)|u|^{q(x)} - \frac{1}{r_-}\int f_k(x)|u|^{r(x)} \\ &\geq \frac{1}{p_+}\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - 2\frac{\lambda}{q_-}\|g_k\|_{\Theta(x)}K^{q_+}\max\{\|u\|^{q_-}, \|u\|^{q_+}\} \\ &\quad - \int \frac{1}{r_-}|u|^{r(x)}. \end{aligned}$$

Se $\|u\| < 1$, segue da Proposição 1.3.8 e do Teorema 1.3.4 que

$$I_{\lambda,k}(u) \geq \frac{1}{p_+}\|u\|^{p_+} - 2\frac{\lambda}{q_-}\|g_k\|_{\Theta(x)}K^{q_+}\|u\|^{q_-} - \frac{K^{r_+}}{r_-}\|u\|^{r_-}.$$

Desde que $p_+ < r_-$, fixando σ suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{1}{p_+}\sigma^{p_+} - \frac{K^{r_+}}{r_-}\sigma^{r_-} \geq \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+},$$

obtemos

$$I_{\lambda,k}(u) \geq \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+} - 2\frac{\lambda}{q_-}\|g_k\|_{\Theta(x)}K^{q_+}\sigma^{q_-},$$

para $\|u\| = \sigma$.

Agora, fixemos $\lambda^* = \lambda^*(k) > 0$ satisfazendo

$$\lambda^* \|g_k\|_{\Theta(x)} < \frac{q_-}{8p_+ K^{q_+}} \sigma^{p_+ - q_-}. \tag{4.2}$$

Se $0 < \lambda < \lambda^*$, então

$$I_{\lambda,k}(u) > \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+} - 2\frac{\lambda^*}{q_-}\|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+}\sigma^{q_-} > \frac{1}{4p_+}\sigma^{p_+} = \beta > 0 \text{ sobre } \partial B_\sigma(0),$$

provando o resultado. ∎

Lema 4.1.2. *O funcional energia $I_{\lambda,k}$ é coercivo e limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}_{\lambda,k}$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}_{\lambda,k}$. Então $I'_{\lambda,k}(u)u = 0$, e portanto,

$$\int f_k(x)|u|^{r(x)} = \int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda \int g_k(x)|u|^{q(x)}. \tag{4.3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,k}(u) &\geq \frac{1}{p_+}\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \frac{\lambda}{q_-}\int g_k(x)|u|^{q(x)} - \frac{1}{r_-}\int f_k(x)|u|^{r(x)} \\ &= \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda\left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right)\int g_k(x)|u|^{r(x)}. \end{aligned}$$

Se $\|u\| > 1$, as Proposições 1.2.4 e 1.3.8 juntamente com a desigualdade de Hölder e o Teorema 1.3.4 resulta

$$\begin{aligned} I_{\lambda,k}(u) &\geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\|u\|^{p_-} - \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) 2\lambda K^{q^+}\|g_k\|_{\Theta(x)}\|u\|^{q_+} \\ &= \|u\|^{q_+}\left\{\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\|u\|^{p_- - q_+} - 2\lambda\left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right)K^{q^+}\|g_k\|_{\Theta(x)}\right\}. \end{aligned}$$

Deste que $q_+ < p_-$, a última desigualdade implica que $I_{\lambda,k}$ é coercivo e limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}_{\lambda,k}$. ∎

No que segue, denotaremos por

$$E_{\lambda,k}(v) = I'_{\lambda,k}(v)v \quad \text{ para todo } v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Usando o funcional $E_{\lambda,k}$, podemos dividir $\mathcal{N}_{\lambda,k}$ em três partes:

$$\mathcal{N}^+_{\lambda,k} = \{v \in \mathcal{N}_{\lambda,k} \colon E'_{\lambda,k}(v)v > 0\},$$

$$\mathcal{N}^0_{\lambda,k} = \{v \in \mathcal{N}_{\lambda,k} \colon E'_{\lambda,k}(v)v = 0\},$$

e

$$\mathcal{N}^-_{\lambda,k} = \{v \in \mathcal{N}_{\lambda,k} \colon E'_{\lambda,k}(v)v < 0\}.$$

Lema 4.1.3. *Se $u_0 \in \mathcal{N}_{\lambda,k}$ é um ponto crítico de $I_{\lambda,k}$ restrito a $\mathcal{N}_{\lambda,k}$ e $u_0 \notin \mathcal{N}^0_{\lambda,k}$, então u_0 é ponto crítico de $I_{\lambda,k}$.*

Demonstração. Segue as mesmas ideias da demonstração do Lema 3.1.6. ■

Lema 4.1.4. *Sob as condições (p_4), ($\tilde{g}_3$) e (f_1), temos que $\mathcal{N}^0_{\lambda,k} = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \lambda < \Lambda_1 = \Lambda_1(k)$, onde*

$$\Lambda_1 = \frac{K^{-q_+}}{2\|g_k\|_{\Theta(x)}} \left(\frac{r_- - p_+}{r_+ - q_-}\right) \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - p_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{p_+ - q_-}{r_- - p_+}}. \tag{4.4}$$

Demonstração. Argumentando por contradição, se o lema não vale, temos que $\mathcal{N}^0_{\lambda,k} \neq \emptyset$ para algum $\lambda_0 \in (0, \Lambda_1)$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo, para $u \in \mathcal{N}^0_{\lambda_0,k}$,

$$\begin{aligned}
0 &= E'_{\lambda_0,k}(u)u \\
&= \int p(x)(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \lambda_0 \int q(x)g_k(x)|u|^{q(x)} - \int r(x)f_k(x)|u|^{r(x)} \\
&\leq p_+ \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \lambda_0 q_- \int g_k(x)|u|^{q(x)} - r_- \int f_k(x)|u|^{r(x)} \\
&= \lambda_0(r_- - q_-) \int g_k(x)|u|^{q(x)} - (r_1 - p_+) \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}).
\end{aligned}$$

Das Proposições 1.3.8 e 1.2.4, da desigualdade de Hölder e das imersões de Sobolev,

$$\min\{\|u\|^{p_-}, \|u\|^{p_+}\} \leq 2\lambda_0 \left(\frac{r_- - q_-}{r_- - p_+}\right) \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \max\{\|u\|^{q_-}, \|u\|^{q_+}\}. \tag{4.5}$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
0 &= E'_{\lambda_0,k}(u)u \\
&\geq p_- \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \lambda_0 q_+ \int g_k(x)|u|^{q(x)} - r_+ \int f_k(x)|u|^{r(x)} \\
&= (p_- - q_+) \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - (r_+ - q_+) \int f_k(x)|u|^{r(x)}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+} \min\{\|u\|^{p_-}, \|u\|^{p_+}\} \leq K^{r_+} \max\{\|u\|^{r_-}, \|u\|^{r_+}\}. \tag{4.6}
$$

Se $\|u\| \geq 1$, segue de (4.5) que

$$
\|u\| \leq \left[2\lambda_0 \left(\frac{r_- - q_-}{r_- - p_+} \right) \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \right]^{\frac{1}{p_- - q_+}}. \tag{4.7}
$$

Por outro lado, de (4.6),

$$
\|u\| \geq \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+} \right) K^{-r_+} \right]^{\frac{1}{r_+ - p_-}}. \tag{4.8}
$$

Combinando (4.7) e (4.8), tem-se

$$
\lambda_0 \geq \frac{K^{-q_+}}{2\|g_k\|_{\Theta(x)}} \left(\frac{r_- - p_+}{r_+ - q_-} \right) \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - p_+} \right) K^{-r_+} \right]^{\frac{p_- - q_+}{r_+ - p_-}}. \tag{4.9}
$$

Desde que

$$
0 < \left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - p_+} \right) K^{-r_+} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{p_+ - q_-}{r_- - p_+} > \frac{p_- - q_+}{r_+ - p_-},
$$

deduzimos que

$$
\lambda_0 \geq \frac{K^{-q_+}}{2\|g_k\|_{\Theta(x)}} \left(\frac{r_- - p_+}{r_+ - q_-} \right) \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - p_+} \right) K^{-r_+} \right]^{\frac{p_+ - q_-}{r_- - p_+}},
$$

o que é uma contradição.

Agora, se $\|u\| < 1$ segue de (4.5),

$$
\|u\| \leq \left[2\lambda_0 \left(\frac{r_- - q_-}{r_- - p_+} \right) \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \right]^{\frac{1}{p_+ - q_-}}. \tag{4.10}
$$

Por (4.6),

$$\|u\| \geq \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{1}{r_- - p_+}}. \tag{4.11}$$

Combinado(4.10) e (4.11), ficamos com

$$\lambda_0 \geq \frac{K^{-q_+}}{2\|g_k\|_{\Theta(x)}} \left(\frac{r_- - p_+}{r_+ - q_-}\right) \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - p_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{p_+ - q_-}{r_- - p_+}},$$

obtendo novamente uma contradição, finalizando a demonstração do resultado. ■

Do Lema 4.1.4, para $0 < \lambda < \Lambda_1$, podemos escrever

$$\mathcal{N}_{\lambda,k} = \mathcal{N}^+_{\lambda,k} \cup \mathcal{N}^-_{\lambda,k}.$$

Assim, podemos considerar os seguintes números:

$$\alpha_{\lambda,k} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,k}} I_{\lambda,k}(u), \quad \alpha^+_{\lambda,k} = \inf_{u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}} I_{\lambda,k}(u) \quad \text{e} \quad \alpha^-_{\lambda,k} = \inf_{u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}} I_{\lambda,k}(u).$$

Lema 4.1.5. *Sob as hipóteses* (p_4)–(p_5), $(\tilde{g}_3)$ *e* (f_1), *se* $0 < \lambda < \Lambda_1$ *então*

$$I_{\lambda,k}(u) < 0, \quad \textit{para todo } u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}.$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}$. Então, da definição de $E'_{\lambda,k}(u)u$,

$$0 < E'_{\lambda,k}(u)u \leq (r_- - q_-)\lambda \int g_k(x)|u|^{q(x)} - (r_- - p_+) \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}),$$

e assim,

$$\lambda \int g_k(x)|u|^{q(x)} > \left(\frac{r_- - p_+}{r_- - q_-}\right) \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}). \tag{4.12}$$

Agora, usando a definição de $I_{\lambda,k}$, obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,k}(u) &\leq \frac{1}{p_-} \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \frac{\lambda}{q_+} \int g_k(x)|u|^{q(x)} - \frac{1}{r_+} \int f_k(x)|u|^{r(x)} \\ &= \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{r_+}\right) \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \lambda \left(\frac{1}{q_+} - \frac{1}{r_+}\right) \int g_k(x)|u|^{q(x)}. \end{aligned}$$

Combinando a última desigualdade com (4.12),

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,k}(u) &\leq \left[\frac{1}{p_-} - \frac{1}{r_+} - \left(\frac{1}{q_+} - \frac{1}{r_+}\right)\left(\frac{r_- - p_+}{r_- - q_-}\right)\right] \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) \\
&= \left[\frac{r_+ - p_-}{p_- r_+} - \left(\frac{r_+ - q_+}{q_+ r_+}\right) \cdot \left(\frac{r_- - p_+}{r_- - q_-}\right)\right] \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) \\
&= \frac{(r_+ - p_-)}{r_+} \left[\frac{1}{p_-} - \frac{1}{q_+} \cdot \left(\frac{r_+ - q_+}{r_+ - p_-}\right) \cdot \left(\frac{r_- - p_+}{r_- - q_-}\right)\right] \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}).
\end{aligned}
$$

O resultado agora segue da hipótese (p_5). ∎

Corolário 4.1.6. *Nas condições do Lema 4.1.5,* $\alpha_{\lambda,k} \leq \alpha^+_{\lambda,k} < 0$.

Demonstração. Consequência imediata das definições de $\alpha_{\lambda,k}$ e $\alpha^+_{\lambda,k}$. ∎

Lema 4.1.7. *Valem as desigualdades:*

(i) $\int g_k(x)|u|^{q(x)} > 0$ *para cada* $u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}$*;*

(ii) $\|u\| < \left[2\left(\frac{r_- - q_-}{r_- - p_+}\right)K^{q_+}\right]^{1/(p_- - q_+)} \max\left\{\left(\lambda\|g_k\|_{\Theta(x)}\right)^{\frac{1}{p_+ - q_-}}, \left(\lambda\|g_k\|_{\Theta(x)}\right)^{\frac{1}{p_- - q_+}}\right\}$ *para cada* $u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}$*;*

(iii) $\|u\| > \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right)K^{-r_+}\right]^{\frac{1}{r_+ - p_-}}$ *para cada* $u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}$.

Demonstração.
(**i**) Segue diretamente de (4.12).
(**ii**) Usando os mesmos argumento do Lema 4.1.4, obtemos

$$\min\{\|u\|^{p_-}, \|u\|^{p_+}\} < 2\lambda\left(\frac{r_- - q_-}{r_- - p_+}\right)\|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \max\{\|u\|^{q_-}, \|u\|^{q_+}\}.$$

Se $\|u\| < 1$, a desigualdade acima implica que

$$\|u\| \leq \left[2\lambda\left(\frac{r_- - q_-}{r_- - p_+}\right)\|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+}\right]^{\frac{1}{p_+ - q_-}}.$$

Agora, se $\|u\| \geq 1$ então

$$\|u\| \leq \left[2\lambda\left(\frac{r_- - q_-}{r_- - p_+}\right)\|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+}\right]^{\frac{1}{p_- - q_+}},$$

provando (ii).

(iii) Seja $u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}$. De maneira análoga a demonstração do Lema 4.1.4, mostra-se que

$$\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right) \min\{\|u\|^{p_-}, \|u\|^{p_+}\} < K^{r_+} \max\{\|u\|^{r_-}, \|u\|^{r_+}\}.$$

Se $\|u\| < 1$,

$$\|u\| > \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{1}{r_- - p_+}}, \tag{4.13}$$

e para $\|u\| \geq 1$,

$$\|u\| > \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{1}{r_+ - p_-}}. \tag{4.14}$$

Como

$$0 < \frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+} K^{-r_+} < 1 \quad \text{e} \quad r_- - p_+ < r_+ - p_-,$$

segue de (4.13) e (4.14) que (iii) vale. ∎

Lema 4.1.8. *Se $0 < \lambda < \frac{q_-}{p_+}\Lambda_1$, então existe uma constante positiva d_1 dependendo apenas de $p_\pm, q_\pm, r_\pm, K$ e $\|g_k\|_{\Theta(x)}$ tal que $I_{\lambda,k}(u) \geq d_1 > 0$ para cada $u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}$. Então, usando as definições de $I_{\lambda,k}$ e $\mathcal{N}_{\lambda,k}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,k}(u) &\geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \lambda \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) \int g_k(x)|u|^{q(x)} \\
&\geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \min\{\|u\|^{p_-}, \|u\|^{p_+}\} \\
&\quad - 2\lambda \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \max\{\|u\|^{q_-}, \|u\|^{q_+}\}.
\end{aligned}$$

Se $\|u\| < 1$, segue que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,k}(u) &\geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \|u\|^{p_+} - 2\lambda \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \|u\|^{q_-} \\
&= \|u\|^{q_-} \left[\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \|u\|^{p_+ - q_-} - 2\lambda \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+}\right].
\end{aligned}$$

Desde que $p_- - q_+ < p_+ - q_-$, pelo Lema 4.1.7 (iii),

$$I_{\lambda,k}(u) > \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{q_-}{r_+ - p_-}} \left\{ \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{p_- - q_+}{r_+ - p_-}} \right.$$
$$\left. - 2\lambda \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \right\} \equiv d_1.$$

Analogamente, se $\|u\| \geq 1$,

$$I_{\lambda,k}(u) > \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{q_+}{r_+ - p_-}} \left\{ \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \left[\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{p_- - q_+}{r_+ - p_-}} \right.$$
$$\left. - 2\lambda \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \right\} \equiv d_1.$$

Das estimativas acima, o lema segue se $0 < \lambda < \frac{q_-}{p_+}\Lambda_1$.

■

Corolário 4.1.9. *Nas condições do Lema 4.1.8, se* $0 < \lambda < \frac{q_-}{p_+}\Lambda_1$, *então* $\alpha^-_{\lambda,k} \geq d_1 > 0$ *para alguma constante* $d_1 = d_1(p_\pm, q_\pm, r_\pm, K, \|g_k\|_{\Theta(x)})$.

Demonstração. Consequência imediata da definição de $\alpha^-_{\lambda,k}$. ■

4.1.2 Um resultado abstrato

O Lema a seguir é fundamental para provar que dado $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ se $\int g(k^{-1}x)|u|^{q(x)} > 0$, então existem $t^* > 0$ e únicos números positivos $t^+ = t^+(u) < t^* < t^- = t^-(u)$ tais que $t^+u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}$ e $t^-u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}$ (vide Proposição 4.1.11). Tal resultado é importante para provar a existência de uma solução de energia mínima para o problema $(P_{\lambda,k})$.

Lema 4.1.10. *Sejam* $g_i : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *funções contínuas, crescentes e positivas com* $g_i(0) = 0$ *para* $i \in \{1, 2, 3\}$ *verificando as condições*

(i) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{g_3(t)}{g_1(t)} = 0$;

(ii) $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} g_2(t) = +\infty$;

(iii) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{g_1(t) - g_3(t)}{g_2(t)} = 0$;

(iv) a função $\phi = g_1 - g_3$ tem um único ponto de máximo e $\phi(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$.

Suponha ainda que existe $\tilde{t} \in (0, t_{\max})$ com $\phi(t_{\max}) = \max_{t \geq 0} \phi(t)$ tal que $\frac{g_1 - g_3}{g_2}$ é crescente em $(0, \tilde{t})$. Então, existe $\lambda_* > 0$ tal que $\psi = g_1 - \lambda g_2 - g_3$ tem apenas dois zeros não triviais para todo $0 < \lambda < \lambda_*$.

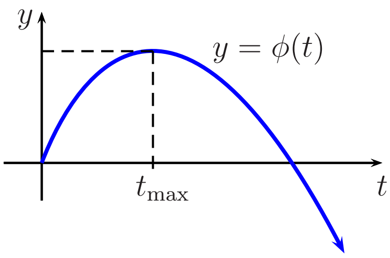

Figura 4.1: Gráfico de ϕ

Demonstração. Segue de (i) que $\phi(t) > 0$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno. Como $\frac{g_1 - g_3}{g_2}$ é positiva e crescente no intervalo $(0, \tilde{t})$, para cada $0 < \lambda < \phi(\tilde{t})$ existe único $t_\lambda \in (0, \tilde{t})$ de maneira que

$$\lambda = \frac{g_1(t_\lambda) - g_3(t_\lambda)}{g_2(t_\lambda)}.$$

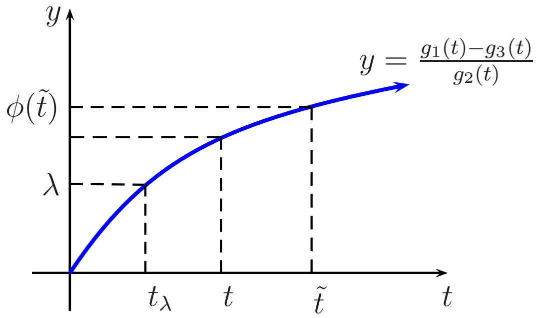

Figura 4.2: Gráfico de $\frac{g_1(t) - g_3(t)}{g_2(t)}$

Uma vez que a função $\frac{g_1 - g_3}{g_2}$ é crescente no intervalo $(0, \tilde{t})$, obtemos

$$\lambda g_2(t) < g_1(t) - g_3(t) \quad \text{para todo } t \in (t_\lambda, \tilde{t}).$$

Agora, fixe $\lambda_* > 0$ de sorte que

$$\lambda g_2(t) < g_1(t) - g_3(t) \quad \text{para todo } t \in (\tilde{t}, t_{\max}) \quad \text{e} \quad \lambda \in (0, \lambda_*).$$

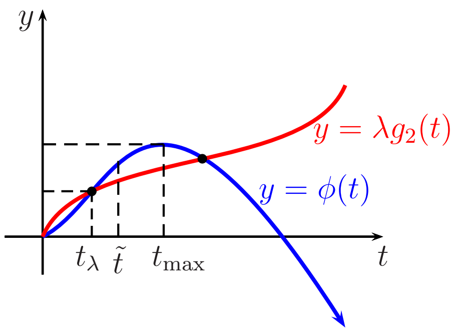

Figura 4.3: Gráficos de ϕ e λg_2

Por hipótese ϕ tem um único ponto de máximo, logo ϕ é decrescente no intervalo $(t_{\max}, \infty)$. Uma vez que g_2 é crescente e $g_2(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$, concluímos que existe um único número $t_1 > t_{\max}$ tal que

$$\lambda g_2(t_1) = \phi(t_1).$$

Portanto, t_λ e t_1 são os únicos zeros não triviais da função ψ para $\lambda \in (0, \lambda^*)$. ■

Com o auxilio do Lema 4.1.10, obtemos o seguinte resultado similar ao caso constante (vide Brown & Wu [18], Fan [32]).

Proposição 4.1.11. *Para cada $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, tem-se*

(i) se $\int g_k(x)|u|^{q(x)} = 0$, então existe um único número positivo $t^- = t^-(u)$ tal que

$$t^- u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k} \quad e \quad I_{\lambda,k}(t^- u) = \sup_{t \geq 0} I_{\lambda,k}(tu);$$

(ii) se $0 < \lambda < \Lambda_1$ e $\int g_k(x)|u|^{q(x)} > 0$, então existem $t^* > 0$ e únicos números positivos $t^+ = t^+(u) < t^* < t^- = t^-(u)$ tais que $t^+ u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}$, $t^- u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}$ e

$$I_{\lambda,k}(t^+ u) = \inf_{0 \leq t \leq t^*} I_{\lambda,k}(tu), \quad I_{\lambda,k}(t^- u) = \sup_{t \geq t^*} I_{\lambda,k}(tu).$$

Demonstração. Observe que $\frac{d}{dt}\big(I_{\lambda,k}(tu)\big) = I'_{\lambda,k}(tu)u$, o que implica

$$t\frac{d}{dt}\big(I_{\lambda,k}(tu)\big) = I'_{\lambda,k}(tu)tu = E_{\lambda,k}(tu).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}\big(I_{\lambda,k}(tu)\big)\right) = E'_{\lambda,k}(tu)u,$$

e assim

$$E'_{\lambda,k}(tu)tu = t\frac{d}{dt}(I_{\lambda,k}(tu)) + t^2\frac{d^2}{dt^2}(I_{\lambda,k}(tu)).$$

Consequentemente, se $t = \bar{t}$ é um ponto crítico de $I_{\lambda,k}(tu)$,

$$E'_{\lambda,k}(\bar{t}u)\bar{t}u = \bar{t}^{\,2}\ \frac{d^2}{dt^2}(I_{\lambda,k}(tu))\bigg|_{t=\bar{t}}. \tag{4.15}$$

Usando (4.15) e as mesmas ideias da prova do Lema A.4.1, obtemos o item (i).

Para provar o item (ii), aplicaremos o Lema 4.1.10 com as funções:

$$g_1(t) = \int t^{p(x)-1}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)});$$
$$g_2(t) = \int t^{q(x)-1} g_k(x)|u|^{q(x)};$$

e

$$g_3(t) = \int t^{r(x)-1} f_k(x)|u|^{r(x)}.$$

sobre o intervalo $[0, +\infty)$. Agora, mostraremos que as funções g_1, g_2 e g_3 satisfazem as condições do Lema 4.1.10. As condições (i)– (iii) do Lema 4.1.10 seguem diretamente da definição das funções g_1, g_2 e g_3. Da igualdade

$$t^2 g_1'(t) = \int (p(x)-1)t^{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})$$

segue que g_1 é uma função crescente em $(0, +\infty)$. Analogamente, as funções g_2 e g_3 são crescentes em $(0, +\infty)$.

Afirmação 4.1.12. *A função $\phi(t) = g_1(t) - g_3(t)$ para $t \geq 0$ possui um único ponto de máximo.*

De fato, para $t \in (0, \infty)$ segue da definição de ϕ que

$$\phi(t) \geq t^{p_+-1}\int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - t^{r_+-1}\int f_k(x)|u|^{r(x)} \geq \frac{1}{2}t^{p_+-1}\int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})$$

para t pequeno. Assim, $\phi(t) > 0$ para t suficientemente pequeno. Por outro lado, se $t > 1$ então

$$\phi(t) \leq t^{p_+-1}\int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - t^{r_--1}\int f_k(x)|u|^{r(x)}.$$

Recordando que $p_+ < r_+$ concluímos que $\phi(t) < 0$ quando $t > 0$ é suficiente grande.

Consequentemente, o valor máximo da função ϕ é atingido em algum ponto $t_u = t(u) > 0$, e portanto

$$\phi'(t_u) = 0$$

o que implica

$$\int (p(x)-1)|t_u|^{p(x)-2}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \int (r(x)-1)|t_u|^{r(x)-2}|u|^{r(x)} = 0. \tag{4.16}$$

Para $s \geq 0$ defina a função

$$w(s) = \phi(st_u).$$

Então,

$$w(1) = \phi(t_u) = \max_{t\geq 0} \phi(t) = \max_{s\geq 0} \phi(st_u), \tag{4.17}$$

donde

$$w'(1) = 0.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} w'(s) &= t_u \phi'(st_u) \\ &= t_u \left[\int (p(x)-1)|st_u|^{p(x)-2}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \int (r(x)-1)|st_u|^{r(x)-2}|u|^{r(x)} \right] \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{s^2 w'(s)}{t_u} = \int (p(x)-1)s^{p(x)}|t_u|^{p(x)-2}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \int (r(x)-1)s^{r(x)}|t_u|^{r(x)-2}|u|^{r(x)}.$$

Para $t > 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{s^2 w'(s)}{t_u} &\leq s^{p_+} \int (p(x)-1)|t_u|^{p(x)-2}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - s^{r_-} \int (r(x)-1)|t_u|^{r(x)-2}|u|^{r(x)} \\ &= (s^{p_+} - s^{r_-}) \int (p(x)-1)|t_u|^{p(x)-2}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}). \end{aligned}$$

Desde que $p_+ < r_-$, concluímos que

$$\frac{s^2 w'(s)}{t_u} < 0$$

o que implica $w'(t) < 0$ para $s > 1$. De maneira análoga temos que $w'(s) > 0$ para $s \in (0,1)$. Portanto, w possui um único ponto de máximo em $s = 1$. Consequentemente, a função ϕ tem um único ponto de máximo em $t = t_u = t_{\max}$. Provando a Afirmação 4.1.12.

Para concluir a verificação das hipóteses do Lema 4.1.10, falta mostrar que a função $\frac{g_1 - g_3}{g_2}$ é crescente em $(0, \tilde{t})$ para algum $\tilde{t} < t_{\max}$. Segue dos mesmos argumentos usados na prova da Afirmação 4.1.12 que a função

$$\tilde{\phi}(t) = \int t^{p(x)-q_+}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \int t^{r(x)-q_+}|u|^{r(x)}$$

tem um único extremo em $t = \tilde{t}_{\max}$, que é um ponto de máximo, e portanto a função $\tilde{\phi}$ é crescente no intervalo $(0, \tilde{t}_{\max})$. Desde que $\tilde{g}_2(t) = \int t^{q(x)-q_+}|u|^{q(x)}$ é decrescente, segue $\frac{g_1 - g_3}{g_2} = \frac{\tilde{\phi}}{\tilde{g}_2}$ é crescente no intervalo $(0, \tilde{t}_{\max})$, finalizando a prova da Afirmação 4.1.12.

Uma vez que as funções g_1, g_2 e g_3 satisfazem as condições do Lema 4.1.10, a função $\psi(t) = g_1(t) - \lambda g_2(t) - g_3(t) = I'_{\lambda,k}(tu)u$ tem apenas dois zeros não triviais, $t^+ < t^-$. Defina a função $\varphi(t) = I_{\lambda,k}(tu)$ sobre $[0, \infty)$. Assim, $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(t)$ é negativo se $t > 0$ é suficientemente pequeno, de onde segue que φ tem um mínimo local em $t = t^+$. Consequentemente,

$$E'_{\lambda,k}(t^+u)t^+u > 0,$$

de onde segue que $t^+u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}$. Como t^+ e t^- são os únicos pontos críticos da função φ, deduzimos que φ tem um máximo global em $t = t^-$. Portanto,

$$E'_{\lambda,k}(t^+u)t^+u < 0.$$

e $t^-u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}$. Usando os Lemas 4.1.5 e 4.1.8, segue que $I_{\lambda,k}(t^+u) < 0$ e $I_{\lambda,k}(t^-u) > 0$. Seja $t_* > 0$ o único zero de φ em (t^+, t^-). Então,

$$I_{\lambda,k}(t^+u) = \inf_{0 \le t \le t_*} I_{\lambda,k}(tu) \qquad \text{e} \qquad I_{\lambda,k}(t^-u) = \max_{t \ge t_*} I_{\lambda,k}(tu),$$

provando o lema. ∎

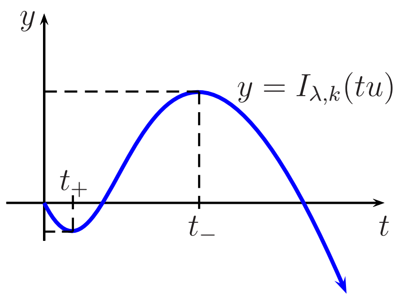

Figura 4.4: Gráfico de $I_{\lambda,k}(tu)$

Lema 4.1.13. *Suponha que g satisfaz $(\tilde{g}_3)$. Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_d$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ para o funcional $I_{\lambda,k}$. Então $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Observe que

$$I_{\lambda,k}(u_n) - \frac{1}{r_-} I'_{\lambda,k}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) + \lambda \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{q_-}\right) \int g_k(x)|u_n|^{q(x)}.$$

Suponha que $\|u_n\| \geq 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, da desigualdade de Hölder e das imersões de Sobolev, obtemos

$$d + 1 + \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \|u_n\|^{p_-} - \lambda \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \|u_n\|^{q_+}.$$

Desde que $1 < q_+ < p_-$, a última desigualdade implica que $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, finalizando a demonstração. ■

Usando as mesma ideias usadas nas demonstrações dos Teoremas 3.1.7 e 3.1.8, demonstra-se os dois resultados seguintes:

Teorema 4.1.14. *Suponha g satisfaz $(\tilde{g}_3)$. Se $\{u_n\}$ é uma sequência em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e $I'_{\lambda,k}(u_n) \to 0$ com $n \to \infty$, então para alguma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $I'_{\lambda,k}(u) = 0$.*

Teorema 4.1.15. *Suponha que (p_4) vale e seja $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\infty$ uma sequência com $I_\infty(u_n) \to \alpha_\infty$, então*

I. *$u_n \to u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$,*

ou

II. *Existem $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ com $|y_n| \to +\infty$ e $w \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $w_n(x) = u_n(x+y_n) \to w$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e $I_\infty(w) = \alpha_\infty$.*

Lema 4.1.16. *Seja $u \in W^{1,(x)}(\mathbb{R}^N$ um ponto crítico não trivial de $I_{\lambda,k}$. Então, existe uma constante $M = M(k) > 0$, a qual é independente de λ, tal que*

$$I_{\lambda,k}(u) \geq -M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+ - q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_- - q_+}}\right).$$

Demonstração. Por hipótese, $I'_{\lambda,k}(u)u = 0$. Argumentando como na prova do Lema 4.1.8, se $\|u\| \geq 1$, então

$$I_{\lambda,k}(u) \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\|u\|^{p_-} - \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) 2\lambda \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \|u\|^{q_+}.$$

Aplicando a desigualdade de Young com $p_1 = \frac{p_-}{q_+}$ e $p_2 = \frac{p_-}{p_- - q_+}$, da desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,k}(u) \geq & \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\|u\|^{p_-} - \epsilon \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right)\|u\|^{p_-} \\ & - \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) C_1(\epsilon) \left(2\lambda \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+}\right)^{\frac{p_-}{p_- - q_+}} \end{aligned}$$

onde $C_1(\epsilon) = \frac{p_- - q_+}{p_-}\left(\frac{q_+}{\epsilon p_-}\right)^{\frac{q_+}{p_- - q_+}}$. Escolhendo $\epsilon = \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right)^{-1}\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)$, deduzimos que

$$I_{\lambda,k}(u) \geq -\left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) C_1(\epsilon) \left(2\lambda \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+}\right)^{\frac{p_-}{p_- - q_+}}.$$

Analogamente, se$\|u\| < 1$, temos

$$I_{\lambda,k}(u) \geq -\left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) C_2(\epsilon) \left(2\lambda \|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+}\right)^{\frac{p_+}{p_+ - q_-}},$$

onde $C_2(\epsilon) = \frac{p_+ - q_-}{p_+}\left(\frac{q_-}{\epsilon p_+}\right)^{\frac{q_-}{p_+ - q_-}}$.

Portanto,

$$I_{\lambda,k}(u) \geq -M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+ - q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_- - q_+}}\right)$$

com

$$M = \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right)(2K^{q_+})^{\frac{p_-}{p_- - p_+}} \max\left\{C_1(\epsilon)\|g_k\|_{\Theta(x)}^{\frac{p_-}{p_- - q_+}}, C_2(\epsilon)\|g_k\|_{\Theta(x)}^{\frac{p_+}{p_+ - q_-}}\right\},$$

finalizando a prova do lema. ■

O próximo resultado é um importante passo para provar a existência de solução, porque ele estabelece o comportamento das sequências (PS) do funcional $I_{\lambda,k}$. Sua demonstração segue os mesmos passos da prova do Lema 3.1.20.

Lema 4.1.17. *Seja $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $I_{\lambda,k}$ com $v_n \rightharpoonup v$ em*

$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. *Então,*

$$I_{\lambda,k}(v_n) - I_{0,k}(w_n) - I_{\lambda,k}(v) = o_n(1) \tag{4.18}$$

e

$$\|I'_{\lambda,k}(v_n) - I'_{0,k}(w_n) - I'_{\lambda,k}(v)\| = o_n(1), \tag{4.19}$$

onde $w_n = v_n - v$.

Lema 4.1.18. *(i) Existe uma sequência* $(PS)_{\alpha_{\lambda,k}}$ *em* $\mathcal{N}_{\lambda,k}$ *para o funcional* $I_{\lambda,k}$*;*

(ii) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha^+_{\lambda,k}}$ *em* $\mathcal{N}^+_{\lambda,k}$ *para o funcional* $I_{\lambda,k}$*;*

(iii) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha^-_{\lambda,k}}$ *em* $\mathcal{N}^-_{\lambda,k}$ *para o funcional* $I_{\lambda,k}$*.*

Demonstração. Segue dos mesmos argumentos usados da demonstração do Lema 3.1.24.
■

4.1.3 A condição Palais-Smale

Lema 4.1.19. *Sob as condições* $(\tilde{g}_3)$ *e* (f_1)*, se* $0 < \lambda < \Lambda_1$*, então o funcional* $I_{\lambda,k}$ *satisfaz a condição* $(PS)_d$ *para*

$$d < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+-q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_--q_+}}\right).$$

Demonstração. Seja $\{v_n\} \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $I_{\lambda,k}$ com $d < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+-q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_--q_+}}\right)$. Pelo Lema 4.1.13, $\{v_n\}$ é um sequência limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, e assim, para alguma subsequência, ainda denotada por $\{v_n\}$,

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

para algum $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $I'_{\lambda,k}(v) = 0$ e $I_{\lambda,k}(v) \geq 0$, de (4.18) e (4.19) segue que $w_n = v_n - v$ é uma sequência $(PS)_{d^*}$ para $I_{0,k}$ com

$$d^* = d - I_{\lambda,k}(v) < \alpha_{f_\infty}. \tag{4.20}$$

Afirmação 4.1.20. *Existe* $R > 0$ *tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |w_n|^{p(x)} = 0.$$

Supondo por um momento que a afirmação é verdadeira, temos que

$$\int |w_n|^{r(x)} \to 0.$$

Por outro lado, de (4.19) sabemos que $I'_{0,k}(w_n)w_n = o_n(1)$, assim

$$\int \left(|\nabla w_n|^{p(x)} + |w_n|^{p(x)}\right) = o_n(1),$$

mostrando que $w_n \to 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Prova da Afirmação 4.1.20: Se a afirmação não é verdadeira, para cada $R > 0$ dado, podemos encontrar $\eta > 0$ e $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ verificando

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |w_n|^{p(x)} \geq \eta > 0.$$

Como $w_n \rightharpoonup 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, segue que $\{y_n\}$ é uma sequência ilimitada. Para

$$\tilde{w}_n = w_n(\cdot + y_n),$$

temos que $\{\tilde{w}_n\}$ também é uma sequência $(PS)_{d^*}$ para o funcional $I_{0,k}$, e portanto, limitada. Logo, existem $\tilde{w} \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e uma subsequência de $\{\tilde{w}_n\}$, ainda denotada por $\{\tilde{w}_n\}$, de modo que

$$\tilde{w}_n \rightharpoonup \tilde{w} \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}.$$

Além disso, como $I'_{0,k}(w_n)\phi(\cdot - y_n) = o_n(1)$ para cada $\phi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, mostra-se que $\nabla\tilde{w}_n(x) \to \nabla\tilde{w}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Consequentemente,

$$\int \left(|\nabla\tilde{w}|^{p(x)-2}\nabla\tilde{w}\nabla\phi + |\tilde{w}|^{p(x)-2}\tilde{w}\phi\right) = \int f_\infty|\tilde{w}|^{r(x)-2}\tilde{w}\phi,$$

de onde segue que $\tilde{w}$ é uma solução fraca do problema (T_{f_∞}). Aplicando o Lema de Fatou, concluímos que

$$\alpha_{f_\infty} \leq I_{f_\infty}(\tilde{w}) = I_{f_\infty}(\tilde{w}) - \frac{1}{r_-}I'_{f_\infty}(\tilde{w})\tilde{w} \leq \liminf_{n\to\infty}\left\{I_{0,k}(w_n) - \frac{1}{r_-}I'_{0,k}(w_n)w_n\right\} = d^*$$

o que contradiz (4.20). Portanto, a Afirmação 4.1.20 é verdadeira. ■

4.1.4 Demonstração do Teorema D

Demonstração. Pelo Lema 4.1.18 (i), existe uma sequência minizante $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_{\lambda,k}$ para $I_{\lambda,k}$ tal que

$$I_{\lambda,k}(u_n) = \alpha_{\lambda,k} + o_n(1) \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,k}(u_n) = o_n(1).$$

Desde que $\alpha_{f_\infty} > 0$, existe $0 < \Lambda_* < \Lambda_1$ de maneira que

$$\alpha_{\lambda,k} < 0 < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+-q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_--q_+}}\right) \quad \text{para todo} \quad 0 < \lambda < \Lambda_*.$$

Segue do Lema 4.1.19 que existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$, e $u_0 \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u_0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Assim, u_0 é solução do problema $(P_{\lambda,k})$ e $I_{\lambda,k}(u_0) = \alpha_{\lambda,k}$. Afirmamos que $u_0 \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}$. Caso contrário, como $\mathcal{N}^0_{\lambda,k} = \emptyset$ para $0 < \lambda < \Lambda_*$, temos que $u_0 \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}$. Agora, vamos verificar que desigualdade abaixo é verdadeira:

$$\int \lambda g_k(x)|u_0|^{q(x)} > 0. \tag{4.21}$$

Com efeito, se $0 = \int \lambda g_k(x)|u_0|^{q(x)}$, então

$$0 = \int \lambda g_k(x)|u_n|^{q(x)} + o_n(1) = \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) - \int f_k(x)|u_n|^{r(x)} + o_n(1).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\alpha_{\lambda,k} + o_n(1) &= I_{\lambda,k}(u_n) \\
&= \int \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) - \lambda\int \frac{g_k(x)}{q(x)}|u_n|^{q(x)} - \int \frac{f_k(x)}{r(x)}|u_n|^{r(x)} \\
&\geq \frac{1}{p_+}\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) - \frac{\lambda}{q_-}\int g_k(x)|u_n|^{r(x)} - \frac{1}{r_-}\int f_k(x)|u_n|^{r(x)} \\
&= \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) + o_n(1)
\end{aligned}$$

o que implica

$$\alpha_{\lambda,k} \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\limsup_{n\in\mathbb{N}}\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \geq 0,$$

resultando em um absurdo, porque $\alpha_{\lambda,k} < 0$, mostrando que (4.21) é verdadeiro.

Da Proposição 4.1.11 (ii), existem números positivos $t^+ < t^- = 1$ tais que $t^+ u_0 \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}$, $t^- u_0 \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}$ e

$$I_{\lambda,k}(t^+ u_0) < I_{\lambda,k}(t^- u_0) = I_{\lambda,k}(u_0) = \alpha_{\lambda,k},$$

o qual contradiz a definição de $\alpha_{\lambda,k}$. Portanto, $u_0 \in \mathcal{N}^+_{\lambda,k}$ e

$$-M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+ - q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_- - q_+}}\right) \leq I_{\lambda,k}(u_0) = \alpha_{\lambda,k} = \alpha^+_{\lambda,k}.$$

A última igualdade segue das definições de $\alpha_{\lambda,k}$ e $\alpha^+_{\lambda,k}$. De fato, já sabemos que $\alpha_{\lambda,k} \leq \alpha^+_{\lambda,k}$. Para a desigualdade contrária, observe que $\alpha^+_{\lambda,k} \leq I_{\lambda,k}(u_0) = \alpha_{\lambda,k}$. ■

4.1.5 Estimativas envolvendo os níveis minimax

Como na Seção 3.1, temos as seguintes desigualdades

$$\alpha_{\lambda,k} \leq \alpha_{0,k} \quad \text{e} \quad \alpha_\infty \leq \alpha_{0,k}.$$

Lema 4.1.21. *Os níveis minimax $\alpha_{0,k}$ e α_{f_∞} satisfazem a desigualdade*

$$\alpha_{0,k} < \alpha_{f_\infty}.$$

Consequentemente, $\alpha_\infty < \alpha_{f_\infty}$.

No que segue, denotemos por $U \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ uma solução de energia mínima do problema (T_{f_∞}), isto é,

$$I_\infty(U) = \alpha_\infty \quad \text{e} \quad I'_\infty(U) = 0.$$

Para $1 \leq i \leq \ell$ e $k \in \mathbb{N}$, consideremos a função U^i_k definida em (3.10).

Lema 4.1.22. *Para todo $i \in \{1, ..., \ell\}$, tem-se*

$$\limsup_{k \to +\infty} \left(\sup_{t \geq 0} I_{\lambda,k}(tU^i_k) \right) \leq \alpha_\infty.$$

Demonstração. Análoga a demonstração do Lema 3.1.13. ■

Lema 4.1.23. *Existem $\delta_0 > 0$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tais que se $u \in \mathcal{N}_{0,k}$ e $I_{0,k}(u) \leq \alpha_\infty + \delta_0$, então*

$$Q_k(u) \in K_{\frac{R_0}{2}} \quad \text{para} \;\; k \geq k_1.$$

Demonstração. Análoga a demonstração do Lema 3.1.14. ∎

Lema 4.1.24. *Dado $\Lambda > 0$, existe uma constante $R > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_{\lambda,k} = \left\{ u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k} \colon I_{\lambda,k}(u) < \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2} \right\} \subset B_R(0),$$

para todo $k \geq k_1$ e $\lambda \in [0, \Lambda]$, isto é, $\mathcal{A}_{\lambda,k}$ é um conjunto limitado, onde k_1 foi dado no Lema 4.1.23. Além disso, R é independente de k.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k} \subset \mathcal{N}_{\lambda,k}$ tal que $I_{\lambda,k}(u) < \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2}$ para $k \geq k_1$. Então,

$$\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda \int g_k(x)|u|^{q(x)} - \int f_k(x)|u|^{r(x)} = 0$$

e

$$\int \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda \int \frac{g_k(x)}{q(x)}|u|^{q(x)} - \int \frac{f_k(x)}{r(x)}|u|^{r(x)} < \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2}.$$

Combinando as duas últimas expressões, concluímos que

$$\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) + \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) \lambda \int g_k(x)|u|^{q(x)} < \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2}.$$

Por cálculos realizados anteriormente, obtemos

$$\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \min\{\|u\|^{p_-}, \|u\|^{p_+}\} - \Lambda \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) 2\|g_k\|_{\Theta(x)} K^{q_+} \max\{\|u\|^{q_-}, \|u\|^{q_+}\}$$
$$< \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2}.$$

Sendo $q_+ < p_-$, segue que existe $R > 0$ tal que

$$\|u\| \leq R \quad \text{para todo } (u, \lambda, k) \in \mathcal{A}_{\lambda,k} \times [0, \Lambda] \times ([k_1, +\infty) \cap \mathbb{N}),$$

finalizando a prova do Lema. ∎

Lema 4.1.25. *Seja $u \in \mathcal{A}_{\lambda,k}$ e $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_{0,k}$. Então, dado $\Lambda = \Lambda(k) > 0$ existem $C > 0$ e $k_2 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$0 < t_u \leq C \quad \forall (u, \lambda, k) \in \mathcal{A}_{\lambda,k} \times [0, \Lambda) \times ([k_2, +\infty) \cap \mathbb{N}).$$

Demonstração. Suponha por contradição que o lema não vale. Então, existe $\{u_n\} \subset \mathcal{A}_{\lambda_n,k_n}$ com $\lambda_n \to 0$ e $k_n \to +\infty$ tais que $t_{u_n}u_n \in \mathcal{N}_{0,k_n}$ e $t_{u_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $t_{u_n} \geq 1$. Desde que $t_{u_n}u_n \in \mathcal{N}_{0,k_n}$ e $0 < f_\infty < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$(t_{u_n})^{p_+} \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \geq f_\infty (t_{u_n})^{r_-} \int |u_n|^{r(x)},$$

ou equivalentemente,

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \geq f_\infty t_{u_n}^{r_- - p_+} \int |u_n|^{r(x)} \tag{4.22}$$

para n suficientemente grande.

Afirmação 4.1.26. *Existe $\eta_1 > 0$ tal que*

$$\int |u_n|^{r(x)} > \eta_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, argumentando por contradição, existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$ tal que

$$\int |u_n|^{r(x)} = o_n(1).$$

Deste que $u_n \in \mathcal{N}^-_{\lambda_n,k_n}$, temos

$$p_- \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) - \lambda q_+ \int g_k(x)|u_n|^{q(x)} - r_+ \int f_k(x)|u_n|^{r(x)} < 0.$$

Como $u_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,k_n}$ segue que

$$(p_- - q_+) \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) - (r_+ - q_+) \int f_k(x)|u_n|^{r(x)} < 0.$$

Pelo Lema 4.1.24, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que $c_1 < \rho_1(u) < c_2$. Assim,

$$\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+} < \frac{\int f_k(x)|u|^{r(x)}}{\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)} < \frac{\int |u_n|^{r(x)}}{c_1} = o_n(1),$$

o que é uma contradição. Logo, a afirmação é verdadeira. Segue da desigualdade (4.22) que

$$\rho_1(u_n) = \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \to +\infty,$$

e portanto $\{u_n\}$ é uma sequência ilimitada. Mas, isto é impossível, porque pelo Lema 4.1.24, $\{u_n\}$ é limitada. ■

Lema 4.1.27. *Seja $\delta_0 > 0$ dado no Lema 4.1.23 e $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$. Então, existe $\Lambda^* = \Lambda^*(k) > 0$ tal que*

$$Q_k(u) \in K_{\frac{R_0}{2}}, \quad \forall (u, \lambda, k) \in \mathcal{A}_{\lambda,k} \times [0, \Lambda^*) \times ([k_3, +\infty) \cap \mathbb{N}).$$

Demonstração. Observe que

$$I_{\lambda,k}(u) = I_{0,k}(u) - \lambda \int \frac{g_k(x)}{q(x)} |u|^{q(x)}, \quad \forall u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Sabemos que existe $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_{0,k}$. Logo,

$$\begin{aligned} I_{0,k}(t_u u) &= I_{\lambda,k}(t_u u) + \lambda \int \frac{g_k(x)}{q(x)} (t_u)^{q(x)} |u|^{q(x)} \\ &\leq \max_{t \geq 0} I_{\lambda,k}(tu) + \lambda \int \frac{g_k(x)}{q(x)} (t_u)^{q(x)} |u|^{q(x)}. \end{aligned}$$

Segue do Lema 4.1.25 e da desigualdade de Hölder,

$$I_{0,k}(t_u u) \leq I_{\lambda,k}(u) + \frac{\lambda}{q_-} C^{q_+} \|g_k\|_{\Theta(x)} \| |u|^{q(x)} \|_{\frac{r(x)}{q(x)}}.$$

Uma vez que $u \in \mathcal{A}_{\lambda,k}$, temos que

$$I_{0,k}(t_u u) < \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2} + \lambda c_2 \|g_k\|_{\Theta(x)} \| |u|^{q(x)} \|_{\frac{r(x)}{q(x)}}.$$

Usando as imersões de Sobolev juntamente com o Lema 4.1.24, resulta

$$I_{0,k}(t_u u) < \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2} + \lambda c_3 \|g_k\|_{\Theta(x)}, \quad \forall u \in \mathcal{A}_{\lambda,k}$$

onde c_3 é uma constante positiva. Fazendo $\Lambda^* := \delta_0 / 2c_3 \|g_k\|_{\Theta(x)}$ e $\lambda \in [0, \Lambda^*)$, concluímos que

$$t_u u \in \mathcal{N}_{0,k} \quad \text{e} \quad I_{0,k}(t_u u) < \alpha_\infty + \delta_0.$$

Assim, pelo Lema 4.1.23,

$$Q_k(t_u u) \in K_{\frac{R_0}{2}}.$$

Agora, basta observar que

$$Q_k(u) = Q_k(t_u u),$$

para concluir a prova do resultado. ■

No que segue denotaremos por

- $\theta^i_{\lambda,k} = \left\{u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}; |Q_k(u) - a_i| < R_0\right\}$,
- $\partial\theta^i_{\lambda,k} = \left\{u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,k}; |Q_k(u) - a_i| = R_0\right\}$,
- $\beta^i_{\lambda,k} = \inf\limits_{u\in\theta^i_{\lambda,k}} I_{\lambda,k}(u)$

e

- $\tilde{\beta}^i_{\lambda,k} = \inf\limits_{u\in\partial\theta^i_{\lambda,k}} I_{\lambda,k}(u)$.

Lema 4.1.28. *Existem* $0 < \Lambda_\sharp < \Lambda^*$ *e* $k \geq k_\sharp$ *tais que*

$$\beta_{\lambda,k} < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+-q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_--q_+}}\right) \quad e \quad \beta_{\lambda,k} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,k}$$

para todo $\lambda \in [0, \Lambda_\sharp)$ *e* $k \geq k_\sharp$.

Demonstração. Segue do Lema 4.1.21 que existem $0 < \Lambda_\sharp < \Lambda^*$ e $0 < \bar{\delta} < \delta_0$ tais que

$$\alpha_\infty + \bar{\delta} < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+-q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_--q_+}}\right) \quad \text{para todo } \lambda \in [0, \Lambda_\sharp).$$

Uma vez que $Q_k(U^i_k) \to a_i$ quando $k \to \infty$, concluímos que $U^i_k \in \theta^i_{\lambda,k}$ para todo k suficientemente grande. Por outro lado, o Lema 4.1.22 implica que $I_{\lambda,k}(U^i_k) < \alpha_\infty + \frac{\bar{\delta}}{2}$ para k suficientemente grande e $\lambda \in [0, \Lambda_\sharp)$. Logo, existe $k_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta^i_{\lambda,k} < \alpha_\infty + \frac{\bar{\delta}}{2} < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+-q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_--q_+}}\right), \quad \forall \lambda \in [0, \Lambda_\sharp) \quad \text{e} \quad k \geq k_4.$$

Para provar a outra desigualdade, observemos que o Lema 4.1.27 implica $I_{\lambda,k}(U^i_k) \geq \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2}$ para todo $u \in \partial\theta^i_{\lambda,k}$, se $\lambda \in [0, \Lambda_\sharp)$ e $k \geq k_3$. Portanto,

$$\tilde{\beta}^i_{\lambda,k} \geq \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2}, \quad \text{para } \lambda \in [0, \Lambda_*) \quad \text{e} \quad k \geq k_3.$$

Fixando $k_\sharp = \max\{k_3, k_4\}$, obtemos

$$\beta^i_{\lambda,k} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,k},$$

para $\lambda \in [0, \Lambda_\sharp)$ e $k \geq k_\sharp$. ■

Lema 4.1.29. *Para cada $1 \leq i \leq \ell$, existe uma sequência $(PS)_{\beta^i_{\lambda,k}}$, $\{u^i_n\} \subset \theta^i_{\lambda,k}$ para o funcional $I_{\lambda,k}$.*

4.1.6 Demonstração do Teorema E

Seja $\{u^i_n\} \subset \theta^i_{\lambda,k}$ uma sequência $(PS)_{\beta^i_{\lambda,k}}$ em $\mathcal{N}^-_{\lambda,k}$ para o funcional $I_{\lambda,k}$ dada pelo Lema 4.1.29. Desde que $\beta^i_{\lambda,k} < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+-q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_--q_+}}\right)$, segue do Lema 4.1.19 que existe u^i tal que $u^i_n \to u^i$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$u^i \in \theta^i_{\lambda,k}, \;\; I_{\lambda,k}(u^i) = \beta^i_{\lambda,k} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,k}(u^i) = 0.$$

Agora, provaremos que $u^i \neq u^j$ para $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq \ell$. Com efeito, basta observar que

$$Q_k(u^i) \in \overline{B_{R_0}(a_i)} \;\text{ e }\; Q_k(u^j) \in \overline{B_{R_0}(a_j)}.$$

Uma vez que

$$\overline{B_{R_0}(a_i)} \cap \overline{B_{R_0}(a_j)} = \emptyset \;\text{ para }\; i \neq j,$$

segue que $u^i \neq u^j$ para $i \neq j$. Consequentemente, $I_{\lambda,k}$ tem pelo menos ℓ pontos críticos em $\mathcal{N}^-_{\lambda,k}$ para $\lambda \in [0, \Lambda_\sharp)$ e $k \geq k_\sharp$. Pelo Teorema D concluímos que o problema $(P_{\lambda,k})$ possui pelo menos $\ell + 1$ soluções para $\lambda \in [0, \Lambda_\sharp)$ e $k \geq k_\sharp$. ■

4.2 Caso crítico

Nesta seção, consideraremos a existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problema com crescimento crítico

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \lambda g(k^{-1}x)|u|^{q(x)-2}u + f(k^{-1}x)(\xi|u|^{r(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u), & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{$T_{\lambda,\xi,k}$}$$

onde λ, ξ e k são parâmetros positivos, $p, q, r : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções Lipschitz, $\mathbb{Z}^N$-periódicas, satisfazendo as condições (p_4) e

$(\tilde{p}_5)$ $\dfrac{q_+}{p_-} < \dfrac{p_+^* - q_+}{p_+^* - p_-} \cdot \dfrac{r_- - p_+}{r_- - q_-}$.

Vamos supor que as funções g e f são como na Seção 4.1. Os resultados principais desta seção são:

Teorema F. *Sob as condições (p_4), $(\tilde{p}_5)$,$(\tilde{g}_3)$ e (f_1), existem números positivos Λ_* e ξ^* tais que o problema $(T_{\lambda,\xi,k})$ tem pelo menos uma solução de energia mínima u_0 para $\lambda \in (0, \Lambda_*)$ e $\xi \geq \xi^*$. Além disso, temos que $u_0 \in \mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k}$ e*

$$I_{\lambda,\xi,k}(u_0) = \alpha_{\lambda,\xi,k} = \alpha^+_{\lambda,\xi,k} \geq -M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+-q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_--q_+}}\right). \tag{4.23}$$

Teorema G. *Suponha que (p_4), $(\tilde{p}_5)$, $(\tilde{g}_3)$ e (f_1)–(f_2) ocorrem. Então, existem números $\xi^* > 0$, $k_* \in \mathbb{N}$ e $\Lambda_* = \Lambda(k_*) > 0$ tais que problema $(T_{\lambda,\xi,k})$ admite pelo menos $\ell + 1$ soluções para $0 < \lambda < \Lambda_*$, $\xi \geq \xi^*$ e $k > k_*$.*

4.2.1 Lemas técnicos

Seja $I_{\lambda,\xi,k} : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema $(T_{\lambda,\xi,k})$ definido por

$$I_{\lambda,\xi,k}(u) = \int \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda\int \frac{g_k(x)}{q(x)}|u|^{q(x)} - \int f_k(x)\left(\frac{\xi}{r(x)}|u|^{r(x)} + \frac{|u|^{p^*(x)}}{p^*(x)}\right).$$

O funcional $I_{\lambda,\xi,k} \in C^1\left(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ com

$$\begin{aligned} I'_{\lambda,\xi,k}(u)v = {} & \int \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv\right) - \lambda\int g_k(x)|u|^{q(x)-2}uv \\ & - \int f_k(x)|u|^{r(x)-2}uv, \end{aligned}$$

para todo $u, v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, os pontos críticos de $I_{\lambda,\xi,k}$ são precisamente as soluções (fracas) do problema ($T_{\lambda,\xi,k}$).

Como $I_{\lambda,\xi,k}$ não é limitado inferiormente sobre $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, iremos considerar o funcional energia $I_{\lambda,\xi,k}$ restrito a variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda,\xi,k}$, dada por

$$\mathcal{N}_{\lambda,\xi,k} = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \colon I'_{\lambda,\xi,k}(u)u = 0\right\}.$$

Para $f \equiv 1$ e $\lambda = 0$, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = \xi|u|^{r(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u, & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{$\hat{T}_\infty$}$$

Associado ao proplema ($\hat{T}_\infty$) temos o funcional de Euler-Lagrange $I_\infty : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\infty(u) = \int \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \int \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)} - \int \frac{1}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)},$$

com o nível do passo da montanha

$$\alpha_\infty = \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u),$$

e a variedade de Nerahi

$$\mathcal{N}_\infty = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : I'_\infty(u)u = 0\right\}.$$

Para $f \equiv f_\infty$ e $\lambda = 0$, iremos considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = f_\infty(\xi|u|^{r(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u), & \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$\hat{T}_{f_\infty}$}$$

e como acima, denotemos por $I_{f_\infty}, \alpha_{f_\infty}$ e $\mathcal{N}_{f_\infty}$ o funcional energia, o nível do passo da montanha, e a variedade de Nehari associada ao problema (P_{f_∞}) respectivamente.

Lema 4.2.1 (Propriedade Local). *Para cada $k \in \mathbb{N}$, existem constantes positivas $\lambda^* = \lambda^*(k, \xi)$, β e σ (dependendo apenas de ξ), tais que $I_{\lambda,\xi,k}(u) \geq \beta > 0$ para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ com $\|u\| = \sigma$.*

Demonstração. Combinando a definição de $I_{\lambda,\xi,k}$ com a desigualdade de Hölder, a imersão de Sobolev e a Proposição 1.2.4,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\xi,k}(u) &\geq \frac{1}{p_+}\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \frac{\lambda}{q_-}\int g_k(x)|u|^{q(x)} - \frac{\xi}{r_-}\int f_k(x)|u|^{r(x)} \\
&\quad - \frac{1}{p^*_-}\int f_k(x)|u|^{p^*(x)} \\
&\geq \frac{1}{p_+}\int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - 2\frac{\lambda}{q_-}\|g_k\|_{\Theta(x)}K^{q_+}\max\{\|u\|^{q_-}, \|u\|^{q_+}\} \\
&\quad - \frac{\xi}{r_-}K^{r_-}\max\{\|u\|^{r_-}, \|u\|^{r_+}\} - \frac{1}{r_-}K^{p^*_-}\max\{\|u\|^{r_-}, \|u\|^{r_+}\}.
\end{aligned}$$

Se $\|u\| < 1$, segue da Proposição 1.3.8 que

$$I_{\lambda,\xi,k}(u) \geq \frac{1}{p_+}\|u\|^{p_+} - 2\frac{\lambda}{q_-}\|g_k\|_{\Theta(x)}K^{q_+}\|u\|^{q_-} - \frac{\xi}{r_-}K^{r_+}\|u\|^{r_-} - \frac{1}{p^*_-}K^{p^*_-}\|u\|^{p^*_-}.$$

Desde que $p_+ < r_- \leq p^*_-$, fixando $\sigma = \sigma(\xi)$ suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{1}{p_+}\sigma^{p_+} - \frac{\xi}{r_-}K^{r_+}\sigma^{r_-} - \frac{1}{p^*_-}K^{p^*_-}\sigma^{p^*_-} \geq \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+}$$

obtemos

$$I_{\lambda,\xi,k}(u) \geq \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+} - 2\frac{\lambda}{q_-}\|g_k\|_{\Theta(x)}K^{q_+}\sigma^{q_-},$$

para $\|u\| = \sigma$.

Agora, fixemos $\lambda^* = \lambda^*(k,\xi) > 0$ satisfazendo

$$\lambda^*\|g_k\|_{\Theta(x)} < \frac{q_-}{8p_+K^{q_+}}\sigma^{p_+-q_-}. \tag{4.24}$$

Então, se $0 < \lambda < \lambda^*$,

$$I_{\lambda,\xi,k}(u) > \frac{1}{2p_+}\sigma^{p_+} - 2\frac{\lambda^*}{q_-}\|g_k\|_{\Theta(x)}K^{q_+}\sigma^{q_-} > \frac{1}{4p_+}\sigma^{p_+} = \beta > 0 \text{ sobre } \partial B_\sigma(0),$$

provando o resultado. ∎

Lema 4.2.2. *O funcional energia $I_{\lambda,\xi,k}$ é coercivo e limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}_{\lambda,\xi,k}$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\xi,k}$. Então $I'_{\lambda,\xi,k}(u)u = 0$, e portanto,

$$\int f_k(x)\left(\xi|u|^{r(x)} + |u|^{p^*(x)}\right) = \int \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) - \lambda\int g_k(x)|u|^{q(x)}. \tag{4.25}$$

Agora, seguindo os mesmos passos do Lema 4.1.2

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,\xi,k}(u) \geq & \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \|u\|^{p_-} - \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) 2\lambda K^{q^+} \|g_k\|_{\Theta(x)} \|u\|^{q_+} \\
= & \|u\|^{q_+} \left\{ \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right) \|u\|^{p_- - q_+} - 2\lambda \left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{r_-}\right) K^{q^+} \|g_k\|_{\Theta(x)} \right\}.
\end{aligned}
$$

Como $q_+ < p_-$, a desigualdade acima implica que $I_{\lambda,\xi,k}$ é coercivo e limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}_{\lambda,\xi,k}$. ■

No que segue, vamos denotar por

$$
E_{\lambda,\xi,k}(v) = I'_{\lambda,\xi,k}(v)v \quad \text{para todo } v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).
$$

Procedendo como na Seção 4.1, vamos dividir $\mathcal{N}_{\lambda,\xi,k}$ em três partes:

$$
\mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k} = \{v \in \mathcal{N}_{\lambda,\xi,k} \colon E'_{\lambda,\xi,k}(v)v > 0\},
$$

$$
\mathcal{N}^0_{\lambda,\xi,k} = \{v \in \mathcal{N}_{\lambda,\xi,k} \colon E'_{\lambda,\xi,k}(v)v = 0\},
$$

e

$$
\mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k} = \{v \in \mathcal{N}_{\lambda,\xi,k} \colon E'_{\lambda,\xi,k}(v)v < 0\}.
$$

A demonstração dos próximos dois lemas segue as mesma linhas dos Lemas 3.1.6 e 4.1.4, respectivamente.

Lema 4.2.3. *Se $u_0 \in \mathcal{N}_{\lambda,\xi,k}$ é um ponto crítico de $I_{\lambda,\xi,k}$ restrito a $\mathcal{N}_{\lambda,\xi,k}$ e $u_0 \notin \mathcal{N}^0_{\lambda,\xi,k}$, então u_0 é ponto crítico de $I_{\lambda,\xi,k}$.*

Lema 4.2.4. *Sob as condições (p_4), $(\tilde{g}_3)$ e (f_2), temos que $\mathcal{N}^0_{\lambda,\xi,k} = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \lambda < \Lambda_1 = \Lambda_1(k,\xi)$, onde*

$$
\Lambda_1 = \frac{K^{-q_+}}{2\|g_k\|_{\Theta(x)}} \left(\frac{r_- - p_+}{r_+ - q_-}\right) \left[\frac{1}{\xi+1} \left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - p_+}\right) K^{-p^*_+}\right]^{\frac{p_+ - q_-}{p^*_- - p_+}}. \tag{4.26}
$$

Do Lema 4.2.4, para $0 < \lambda < \Lambda_1$, podemos escrever

$$
\mathcal{N}_{\lambda,\xi,k} = \mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k} \cup \mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k}.
$$

Assim, podemos considerar os seguintes números:

$$\alpha_{\lambda,\xi,k} = \inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,\xi,k}} I_{\lambda,\xi,k}(u), \quad \alpha^+_{\lambda,\xi,k} = \inf_{u\in\mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k}} I_{\lambda,\xi,k}(u) \quad \text{e} \quad \alpha^-_{\lambda,\xi,k} = \inf_{u\in\mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k}} I_{\lambda,\xi,k}(u).$$

Lema 4.2.5. *Sob as condições* (p_4)*–*$(\tilde{p}_5)$*,* $(\tilde{g}_3)$*,* (f_1) *e , se* $0 < \lambda < \Lambda_1$ *então*

$$I_{\lambda,\xi,k}(u) < 0, \qquad \textit{para todo } u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k}.$$

Demonstração. De maneira análoga ao Lema 4.1.5 para cada $u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k}$, tem-se

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\xi,k}(u) &\leq \left[\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+^*} - \left(\frac{1}{q_+} - \frac{1}{p_+^*}\right)\left(\frac{r_- - p_+}{r_- - q_-}\right)\right] \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) \\ &= \left[\frac{p_+^* - p_-}{p_- p_+^*} - \left(\frac{p_+^* - q_+}{q_+ p_+^*}\right) \cdot \left(\frac{r_- - p_+}{r_- - q_-}\right)\right] \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) \\ &= \frac{(p_+^* - p_-)}{p_+^*} \left[\frac{1}{p_-} - \frac{1}{q_+} \cdot \left(\frac{p_+^* - q_+}{p_+^* - p_-}\right) \cdot \left(\frac{r_- - p_+}{r_- - q_-}\right)\right] \int (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}). \end{aligned}$$

Da condição $(\tilde{p}_5)$, segue que $I_{\lambda,\xi,k}(u) < 0$ para todo $u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k}$, provando o resultado. ■

Corolário 4.2.6. *Sob as hipóteses do Lema 4.2.5,* $\alpha_{\lambda,\xi,k} \leq \alpha^+_{\lambda,\xi,k} < 0$.

Demonstração. Consequência imediata das definições de $\alpha_{\lambda,\xi,k}$ e $\alpha^+_{\lambda,\xi,k}$. ■

Os três lemas seguintes são análogos aos da Seção 4.1.

Lema 4.2.7. *Valem as desigualdades:*

(i) $\int g_k(x)|u|^{q(x)} > 0$ *para cada* $u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k}$*;*

(ii) $\|u\| < \left[2\left(\frac{r_- - q_-}{r_- - p_+}\right) K^{q_+}\right]^{1/(p_- - q_+)} \max\left\{\left(\lambda\|g_k\|_{\Theta(x)}\right)^{\frac{1}{p_+ - q_-}}, \left(\lambda\|g_k\|_{\Theta(x)}\right)^{\frac{1}{p_- - q_+}}\right\}$ *para cada* $u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k}$*;*

(iii) $\|u\| > \left[\frac{1}{\xi+1}\left(\frac{p_- - q_+}{r_+ - q_+}\right) K^{-r_+}\right]^{\frac{1}{r_+ - p_-}}$ *para cada* $u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k}$.

Lema 4.2.8. *Se* $0 < \lambda < \frac{q_-}{p_+}\Lambda_1$*, então existe uma constante positiva* d_1 *dependente de* $p_\pm, q_\pm, r_\pm, K$ *e* $\|g_k\|_{\Theta(x)}$ *tal que* $I_{\lambda,\xi,k}(u) \geq d_1 > 0$ *para cada* $u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k}$.

Lema 4.2.9. *Suponha que* g *satisfaz* $(\tilde{g}_3)$*. Seja* $\{u_n\}$ *uma sequência* $(PS)_d$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *para o funcional* $I_{\lambda,\xi,k}$*. Então* $\{u_n\}$ *é limitada em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$*.*

O teorema a seguir segue as mesmas ideias do Teorema 3.2.7.

Teorema 4.2.10. *Suponha g satisfaz $(\tilde{g}_3)$. Se $\{u_n\}$ é uma sequência em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e $I'_{\lambda,\xi,k}(u_n) \to 0$ com $n \to \infty$, então para alguma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $I'_{\lambda,\xi,k}(u) = 0$.*

Proposição 4.2.11. *Para cada $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, tem-se*

(i) se $\int g_k(x)|u|^{q(x)} = 0$, então existe um único número positivo $t^- = t^-(u)$ tal que

$$t^- u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k} \quad e \quad I_{\lambda,\xi,k}(t^- u) = \sup_{t\geq 0} I_{\lambda,\xi,k}(tu);$$

(ii) se $0 < \lambda < \Lambda_1$ e $\int g_k(x)|u|^{q(x)} > 0$, então existem $t^* > 0$ e únicos números positivos $t^+ = t^+(u) < t^* < t^- = t^-(u)$ tais que $t^+ u \in \mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k}$, $t^- u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k}$ e

$$I_{\lambda,\xi,k}(t^+ u) = \inf_{0\leq t\leq t^*} I_{\lambda,\xi,k}(tu), \quad I_{\lambda,\xi,k}(t^- u) = \sup_{t\geq t^*} I_{\lambda,\xi,k}(tu).$$

Demonstração.

Procedendo como no Lem 4.1.11, se $t = \bar{t}$ é um ponto crítico de $I_{\lambda,\xi,k}(tu)$, então

$$E'_{\lambda,\xi,k}(\bar{t}u)\bar{t}u = \bar{t}^2 \frac{d^2}{dt^2}(I_{\lambda,\xi,k}(tu))\Big|_{t=\bar{t}}. \tag{4.27}$$

Usando (4.27) e as mesmas ideias da prova do Lema A.4.1, obtemos o item (i).

Para provar o item (ii), consideremos no Lema 4.1.10 as funções:

$$g_1(t) = \int t^{p(x)-1}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)});$$
$$g_2(t) = \int t^{q(x)-1} g_k(x)|u|^{q(x)};$$

e

$$g_3(t) = \int f_k(x)\left(t^{r(x)-1}\xi|u|^{r(x)} + t^{p^*(x)-1}|u|^{p^*(x)}\right).$$

sobre o intervalo $[0, +\infty)$, e aplicamos os mesmos argumentos usados no Lema 4.1.11 (ii). ■

4.2.2 Propriedades dos níveis minimax

Lema 4.2.12. *Os níveis $\alpha_{0,\xi,k}, \alpha_\infty$ e α_{f_∞} tendem a zero quando ξ tende ao infinito, isto é,*

$$\lim_{\xi\to\infty} \alpha_{0.\xi.k} = \lim_{\xi\to\infty} \alpha_\infty = \lim_{\xi\to\infty} \alpha_{f_\infty} = 0.$$

Corolário 4.2.13. *Existe* $\xi^* > 0$ *tal que*

$$\alpha_{0,\xi,k}, \alpha_\infty, \alpha_{f_\infty} < \vartheta K^{-1/\vartheta}$$

para todo $\xi \geq \xi^*$, *onde* $\vartheta = \frac{1}{p_+} - \frac{1}{p_-^*}$.

Lema 4.2.14. *Seja* $\{u_n\}$ *uma sequência em* $\mathcal{N}_\infty$ *com* $I_\infty(u_n) \to c_\infty$ *quando* $n \to \infty$. *Então, existem* $\xi^* > 0$ *e* $n_0 = n_0(\xi) \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$\|u_n\|_{L^{p^*(x)}(\mathbb{R}^N)}, \|u_n\| \leq 1$$

para todo $\xi \geq \xi^*$ *e* $n \geq n_0$.

Corolário 4.2.15. *Nas condições do Lema 3.2.11, existem* $\xi^* > 0$ *e* $n_0 = n_0(\xi) \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$\left(\int |u_n|^{p^*(x)}\right)^{1/p_-^*} \leq K \left(\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)\right)^{1/p_+}$$

para todo $n \geq n_0$.

4.2.3 Um resultado de compacidade

Teorema 4.2.16. *Suponha que* (p_4) *vale e seja* $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\infty$ *uma sequência com* $I_\infty(u_n) \to \alpha_\infty$, *então*

I. $u_n \to u$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$,

ou

II. *Existem* $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ *com* $|y_n| \to +\infty$ *e* $w \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $w_n(x) = u_n(x+y_n) \to w$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *e* $I_\infty(w) = \alpha_\infty$.

Lema 4.2.17. *Seja* $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *um ponto crítico não trivial de* $I_{\lambda,\xi,k}$. *Então, existe uma constante* $M = M(k) > 0$, *a qual é independente de* λ, *tal que*

$$I_{\lambda,\xi,k}(u) \geq -M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+-q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_--q_+}}\right).$$

O próximo resultado é um importante passo para provar a existência de solução, porque ele estabelece o comportamento das sequências (PS) do funcional $I_{\lambda,\xi,k}$.

Lema 4.2.18. *Seja $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $I_{\lambda,\xi,k}$ com $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$I_{\lambda,\xi,k}(v_n) - I_{0,k}(w_n) - I_{\lambda,\xi,k}(v) = o_n(1) \tag{4.28}$$

e

$$\|I'_{\lambda,\xi,k}(v_n) - I'_{0,k}(w_n) - I'_{\lambda,\xi,k}(v)\| = o_n(1), \tag{4.29}$$

onde $w_n = v_n - v$.

Lema 4.2.19. *(i) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha_{\lambda,\xi,k}}$ em $\mathcal{N}_{\lambda,\xi,k}$ para o funcional $I_{\lambda,\xi,k}$;*

(ii) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha^+_{\lambda,\xi,k}}$ em $\mathcal{N}^+_{\lambda,\xi,k}$ para o funcional $I_{\lambda,\xi,k}$;

(iii) Existe uma sequência $(PS)_{\alpha^-_{\lambda,\xi,k}}$ em $\mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k}$ para o funcional $I_{\lambda,\xi,k}$.

4.2.4 A condição Palais-Smale

Lema 4.2.20. *Sob as condições $(\tilde{g}_3)$ e (f_1), se $0 < \lambda < \Lambda_1$, então o funcional $I_{\lambda,\xi,k}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ para*

$$d < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+ - q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_- - q_+}}\right).$$

Demonstração. Seja $\{v_n\} \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $I_{\lambda,\xi,k}$ com $d < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+ - q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_- - q_+}}\right)$. Pelo Lema 4.2.9, $\{v_n\}$ é um sequência limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, e assim, para alguma subsequência, ainda denotada por $\{v_n\}$,

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

para algum $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $I'_{\lambda,\xi,k}(v) = 0$ e $I_{\lambda,\xi,k}(v) \geq 0$, de (4.28) e (4.29) segue que $w_n = v_n - v$ é uma sequência $(PS)_{d^*}$ para $I_{0,k}$ com

$$d^* = d - I_{\lambda,\xi,k}(v) < \alpha_{f_\infty}. \tag{4.30}$$

Afirmamos que existe $R > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |w_n|^{p(x)} = 0. \tag{4.31}$$

De fato, supondo que a afirmação não é verdadeira, e argumentando como na prova da Afirmação 3.2.25 obtemos $\alpha_{f_\infty} \leq d^*$, o que é um absurdo. Logo, o limite em (4.31) ocorre.

Consequentemente,

$$\int |w_n|^{r(x)} \to 0.$$

Por outro lado, de (4.29) sabemos que $I'_{0,k}(w_n)w_n = o_n(1)$, assim

$$\int \left(|\nabla w_n|^{p(x)} + |w_n|^{p(x)}\right) - \int f_k(x)|u|^{p^*(x)} = o_n(1),$$

Uma vez que $\{w_n\}$ é uma sequência limitada, existe $L \geq 0$ tal que a menos de subsequência

$$\lim_{n\to\infty} \int \left(|\nabla w_n|^{p(x)} + |w_n|^{p(x)}\right) = L.$$

Donde,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_k(x)|u|^{p^*(x)} = L.$$

Se $L > 0$, usando os mesma ideias da demonstração do Lema 3.2.24, tem-se

$$d^* \geq \vartheta K^{-1/\vartheta} > \alpha_{f_\infty},$$

o que contradiz (4.30). Portanto, $L = 0$, de onde segue que $u_n \to u$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Provando o resultado. ■

4.2.5 Demonstração do Teorema F

Segue as mesmas ideias da prova do Teorema D. ■

4.2.6 Estimativas envolvendo os níveis minimax

Como na Seção 3.1, temos as seguintes desigualdades

$$c_{\lambda,\xi,k} \leq c_{0,k} \quad \text{e} \quad \alpha_\infty \leq c_{0,k}.$$

Lema 4.2.21. *Os níveis minimax $\alpha_{0,k}$ e α_{f_∞} satisfazem a desigualdade*

$$\alpha_{0,k} < \alpha_{f_\infty}.$$

Consequentemente, $\alpha_\infty < \alpha_{f_\infty}$.

No que segue, denotemos por $U \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ uma solução de energia mínima do problema ($\hat{T}_{f_\infty}$), isto é,

$$I_\infty(U) = \alpha_\infty \quad \text{e} \quad I'_\infty(U) = 0.$$

Para $1 \leq i \leq \ell$ e $k \in \mathbb{N}$, consideremos a função $\widehat{U}_k^i$ definida em (3.10).

Lema 4.2.22. *Para todo $i \in \{1, ..., \ell\}$, tem-se*

$$\limsup_{k \to +\infty} \Big(\sup_{t \geq 0} I_{\lambda,\xi,k}(t\widehat{U}_k^i) \Big) \leq \alpha_\infty.$$

Lema 4.2.23. *Existem $\delta_0 > 0$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tais que se $u \in \mathcal{N}_{0,k}$ e $I_{0,k}(u) \leq \alpha_\infty + \delta_0$, então*

$$Q_k(u) \in K_{\frac{R_0}{2}} \quad \textit{para} \;\; k \geq k_1.$$

Lema 4.2.24. *Dado $\Lambda > 0$, existe uma constante $R > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_{\lambda,\xi,k} = \left\{ u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k} \colon I_{\lambda,\xi,k}(u) < \alpha_\infty + \frac{\delta_0}{2} \right\} \subset B_R(0),$$

para todo $k \geq k_1$ e $\lambda \in [0, \Lambda]$, isto é, $\mathcal{A}_{\lambda,\xi,k}$ é um conjunto limitado, onde k_1 foi dado no Lema 4.2.23. Além disso, R é independente de ξ e k.

Lema 4.2.25. *Sejam $u \in \mathcal{A}_{\lambda,\xi,k}$ e $t_u > 0$ tais que $t_u u \in \mathcal{N}_{0,\xi,k}$. Então, dado $\Lambda > 0$, existem $C > 0$ e $k_2 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$0 \leq t_u \leq C, \qquad \textit{para todo } (u, \lambda, k) \in \mathcal{A}_{\lambda,\xi,k} \times [0, \Lambda] \times ([k_2, +\infty) \cap \mathbb{N}).$$

Demonstração. Suponha por contradição que o lema não vale. Então, existe $\{u_n\} \subset \mathcal{A}_{\lambda_n,\xi,k_n}$ com $\lambda_n \to 0$ e $k_n \to +\infty$ tais que $t_{u_n} u_n \in \mathcal{N}_{0,\xi,k_n}$ e $t_{u_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $t_{u_n} \geq 1$. Desde que $t_{u_n} u_n \in \mathcal{N}_{0,\xi,k_n}$ e $0 < f_\infty < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$(t_{u_n})^{p_+} \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)} \right) \geq f_\infty (t_{u_n})^{p^*_-} \int |u_n|^{p^*(x)},$$

ou equivalentemente,

$$\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)} \right) \geq f_\infty t_{u_n}^{p^*_- - p_+} \int |u_n|^{p^*(x)} \tag{4.32}$$

para n suficientemente grande.

Afirmação 4.2.26. *Existe $\eta_1 > 0$ tal que*

$$\int |u_n|^{p^*(x)} > \eta_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, argumentando por contradição, existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$ tal que

$$\int |u_n|^{p^*(x)} = o_n(1).$$

Por interpolação,

$$\int |u_n|^{r(x)} = o_n(1).$$

Desde que $u_n \in \mathcal{N}^-_{\lambda_n,\xi,k_n}$, temos

$$p_- \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) - \lambda q_+ \int g_k(x)|u_n|^{q(x)} - \int f_k(x)\left[\xi r_+|u_n|^{r(x)} + p_+^*|u_n|^{p^*(x)}\right] < 0.$$

Combinando a desigualdade anterior com (4.25),

$$(p_- - q_+)\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) < (r_+ - q_+)\int f_k(x)|u_n|^{r(x)} + (p_+^* - q_+)\int f_k(x)|u_n|^{p^*(x)}.$$

Pelo Lema 4.2.24, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que $c_1 < \rho_1(u) < c_2$. Assim,

$$\frac{p_- - q_+}{p_+^* - q_+} < \frac{\xi\int f_k(x)|u|^{r(x)} + \int f_k(x)|u|^{p^*(x)}}{\int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)} < \frac{\xi\int |u_n|^{r(x)} + \int |u_n|^{p^*(x)}}{c_1} = o_n(1),$$

o que é uma contradição. Logo, a afirmação é verdadeira. Segue da desigualdade (4.32) que

$$\rho_1(u_n) = \int \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right) \to +\infty,$$

e portanto $\{u_n\}$ é uma sequência ilimitada. Mas, isto é impossível, porque pelo Lema 4.2.24, $\{u_n\}$ é limitada. ■

Lema 4.2.27. *Seja $\delta_0 > 0$ dado no Lema 4.2.23 e $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$. Então, existe $\Lambda^* = \Lambda^*(k) > 0$ tal que*

$$Q_k(u) \in K_{\frac{R_0}{2}}, \quad \forall (u,\lambda,k) \in \mathcal{A}_{\lambda,\xi,k} \times [0,\Lambda^*) \times ([k_3,+\infty)\cap\mathbb{N}).$$

No que segue denotaremos por

- $\theta^i_{\lambda,\xi,k} = \left\{u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k};\, |Q_k(u) - a_i| < R_0\right\}$,
- $\partial\theta^i_{\lambda,\xi,k} = \left\{u \in \mathcal{N}^-_{\lambda,\xi,k};\, |Q_k(u) - a_i| = R_0\right\}$,

- $\beta^i_{\lambda,\xi,k} = \inf_{u \in \theta^i_{\lambda,\xi,k}} I_{\lambda,\xi,k}(u)$

e

- $\tilde{\beta}^i_{\lambda,\xi,k} = \inf_{u \in \partial\theta^i_{\lambda,\xi,k}} I_{\lambda,\xi,k}(u).$

Lema 4.2.28. *Existem* $0 < \Lambda_\sharp < \Lambda^*$ *e* $k \geq k_\sharp$ *tais que*

$$\beta_{\lambda,\xi,k} < \alpha_{f_\infty} - M\left(\lambda^{\frac{p_+}{p_+ - q_-}} + \lambda^{\frac{p_-}{p_- - q_+}}\right) \qquad e \qquad \beta_{\lambda,\xi,k} < \tilde{\beta}^i_{\lambda,\xi,k}$$

para todo $\lambda \in [0, \Lambda_\sharp)$ *e* $k \geq k_\sharp$.

Lema 4.2.29. *Para cada* $1 \leq i \leq \ell$, *existe uma sequência* $(PS)_{\beta^i_{\lambda,\xi,k}}$, $\{u^i_n\} \subset \theta^i_{\lambda,\xi,k}$ *para o funcional* $I_{\lambda,\xi,k}$.

4.2.7 Demonstração do Teorema G

Segue as mesmas ideias da demonstração do Teorema E. ∎

Apêndice A

Resultados usados no texto

A.1 Desigualdades

Lema A.1.1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e p e p' expoentes conjugados. Então, vale as seguintes desigualdades:*

1. $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$;

2. *para cada $\epsilon > 0$, temos que*
$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^{p'},$$
onde $C_\epsilon = \frac{1}{p'(\epsilon p)^{p'/p}}$.

A demonstração da desigualdade seguinte pode ser encontrada em Guimarães [45], Peral [63] ou Simon [72]

Lema A.1.2 (Desigualdade de Simon)**.** *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Então, existe uma constante $C = C(p)$ tal que*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y\rangle \geq \begin{cases} C\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se \quad 1 < p < 2 \\ C\,|x-y|^p, & se \quad p \geq 2 \end{cases}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$.

A.2 Resultados de convergências

O próximo resultado é uma versão do Lema de Compacidade de Strauss [74]. A demonstração segue as mesmas ideias de Berestycki & Lions [16], e os detalhes da demonstração podem ser visto em [23].

Lema A.2.1 (Lema de Compacidade de Strauss)**.** *Sejam $P : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N, |t|\leq a} |P(x,t)| < \infty \ e \ \sup_{x\in\mathbb{R}^N, |t|\leq a} |\mathcal{Q}(x,t)| < \infty \ \text{para cada } a > 0.$$

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{P(x,s)}{\mathcal{Q}(x,s)} = 0 \ \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N.$$

Suponhamos que $\{u_n\}$ e v são funções mensuráveis sobre $\mathbb{R}^N$ tais que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{Q}(x, u_n(x))|\, dx < \infty, \tag{A.1}$$

e

$$\lim_n P(x, u_n(x)) = v(x) \qquad q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N. \tag{A.2}$$

Então, para todo conjunto de Borel limitado $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$, temos

$$\lim_n \int_{\mathcal{B}} |P(x, u_n(x)) - v(x)|\, dx = 0.$$

Além disso, se

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{P(x,s)}{\mathcal{Q}(x,s)} = 0 \tag{A.3}$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$, e

$$\lim_{|x|\to\infty} u_n(x) = 0 \tag{A.4}$$

uniformemente em n, então

$$P(x, u_n) \to v \ \text{em } L^1(\mathbb{R}^N).$$

O Lema a seguir é um resultado do tipo Lions para espaços com expoentes variáveis. Sua demonstração pode ser vista em Fan et al. [39, Lema 3.1].

Lema A.2.2. *Suponha que $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua com $1 < p_- \leq p_+ < N$. Se $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^{q(x)} = 0 \tag{A.5}$$

para algum $r > 0$ e alguma função $q \in L^{\infty}_{+}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $p \leq q \ll p^*$, então $u_n \to 0$ em $L^{s(x)}(\mathbb{R}^N)$ para toda função mensurável $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com $p \ll s \ll p^*$.

Para a demonstração do teorema a seguir, vide, por exemplo Royden [66].

Teorema A.2.3 (Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lesbegue)**.** *Sejam $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis e $\{g_n\} \subset L^1(\Omega)$ satisfazendo*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω;*
2. *$g_n(x) \to g(x)$ q.t.p em Ω, com $g \in L^1(\Omega)$*
3. *para cada n, $|f_n(x)| \leq |g_n(x)|$ q.t.p. em Ω;*
4. *$g_n \to g$ em $L^1(\Omega)$.*

Então, $f_n \to f$ em $L^1(\Omega)$.

A.3 Princípio Variacional de Ekeland

Nesta seção, recordamos o Principio Variacional de Ekeland [31]. Detalhes das demonstrações podem ser encontrados em Peral [63] e Willem [77]

Teorema A.3.1 (Primeira versão)**.** *Seja (E, d) um espaço métrico completo com métrica d e seja $J : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente. Suponha que J é limitada inferiormente e defina*

$$c = \inf_{u \in E} J(u).$$

Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in E$ tal que

$$c \leq J(u_\epsilon) \leq c + \epsilon$$

e para todo $u \in E$, $u \neq u_\epsilon$ tem-se

$$J(u) - J(u_\epsilon) + \epsilon d(u, u_\epsilon) > 0.$$

Teorema A.3.2 (Segunda versão)**.** *Sejam E um espaço de Banach e $G \in C^2(E, \mathbb{R})$ tal que $G'(v) \neq 0$, para todo $v \in V = \{v \in E\colon G(v) = 1\}$. Sejam $F \in C^1(E, \mathbb{R})$ limitada inferiormente em V, $v \in V$ e $\epsilon, \delta > 0$. Se*

$$F(v) \leq \inf_{w \in V} F(w) + \epsilon,$$

então existe $u \in V$ tal que

$$F(u) \leq \inf_{w \in V} F(w) + 2\epsilon, \quad \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F'(u) - \lambda G'(u)\| \leq \frac{8\epsilon}{\delta}$$

e

$$\|u - v\| \leq 2\delta.$$

A.4 Variedade de Nehari

Vamos supor as seguintes condições:

(h) $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz contínua com

$$1 < h_- \leq h_+ < N.$$

(f_1) $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

$$|f(x,t) \leq C\big(|t|^{p(x)-1} + |t|^{q(x)-1}\big), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}$$

onde C é uma constante positiva e $q \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ com $p \leq q \ll p^*$.

(f_2) $f(x,t) = o(|t|^{p_+-1})$ com $t \to 0$ uniformemente em x.

(f_3) Existe uma constante positiva $\beta > p_+$ tal que

$$0 < \beta F(x,t) \leq t f(x,t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e } t \neq 0$$

onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$.

(f_4) Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, a função $\frac{f(x,t)}{|t|^{p_+-1}}$ é crescente de t em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Seja $I : W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional de classe C^1 definido por

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}} (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}) - \int_{\mathbb{R}} F(x,u)$$

para todo $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Considere a variedade de Nehari dada por

$$\mathcal{N} = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \colon I'(u)u = 0\right\}.$$

Lema A.4.1. *Sob as condições (h) e (f_1)–(f_4) , para cada $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ existe um único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$. Além disso, o máximo de $I(tu)$ para $t > 0$ é atingido em $t = t_u$.*

Demonstração. Fixado $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ arbitrário, consideremos a função $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = I(tu)$. Note que $\varphi(0) = 0$ e que φ verifica a geometria do passo da montanha, ou seja, $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi(t) < 0$ para $t > 0$ grande. Logo, o máximo de $\varphi(t)$ em $[0, +\infty)$ é atingido em algum ponto $t_u = t(u) > 0$. Donde,

$$\varphi(t_u) = I'(t_u u)u = 0.$$

Fazendo $v = t_u u$, temos que $I'(v)v = 0$, e portanto $v \in \mathcal{N}$.

Agora, iremos provar a unicidade de t_u. Para tal, defina a função $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(t) = I(tv)$. Note que

$$\begin{aligned} \psi(1) = I(v) = \varphi(t_u) &= \max_{t\in[0,+\infty)} \varphi(t) \\ &= \max_{t\in[0,+\infty)} I(tu) = \max_{s\in[0,+\infty)} I(st_u u) = \max_{s\in[0,+\infty)} I(su) = \max_{t\in[0,+\infty)} \psi(t). \end{aligned}$$

Daí,

$$0 = \psi'(1) = I'(v)v$$

ou equivalentemente

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v)v. \tag{A.6}$$

Supondo $t \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} \psi'(t) = I'(tv)v &= \int_{\mathbb{R}^N} t^{p(x)-1}(|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}) - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, tv)v \\ &\leq t^{p_+-1} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}) - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, tv)v \\ &= t^{p_+-1} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x, v)v - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{t^{p_+-1}} f(x, tv)v \right]. \end{aligned}$$

Afirmação A.4.2. $f(x, v)v < \frac{1}{t^{p_+-1}} f(x, tv)v$.

Com efeito, se $v > 0$ então $tv > v$ e por (f_4) vem

$$\frac{f(x, tv)}{|tv|^{p_+-1}} > \frac{f(x, v)}{|v|^{p_+-1}}$$

implicando que

$$\frac{f(x,tv)}{|t|^{p_+-1}}v > f(x,v)v.$$

Por outro lado se $v<0$ então $tv<v$ e por (f_4) segue a afirmação.

Consequentemente, $\psi'(t)>0$ para $t>1$. De maneira análoga concluímos que $\psi'(t)<0$ se $t\in(0,1)$. Isto mostra que o número positivo t_u satisfazendo $\varphi'(t_u)=I'(t_uu)u=0$ é único, finalizando a demonstração do resultado. ■

Referências Bibliográficas

[1] Acerbi, E. & Mingione, G. Regularity results for stationary electro-rheological fluids. *Arch. Ration. Mech. Anal. 164* (2002), 213–259.

[2] Adachi, S. & Tanaka, K. Four positive solutions for the semilinear elliptic equation: $-\Delta u + u = a(x)u^p + f(x)$ in $\mathbb{R}^N$. *Calc. Var. Partial Differential Equations 11* (2000), 63–95.

[3] Alves, C. O. Existence and multiplicity of solution for a class of quasilinear equations. *Adv. Nonlinear Stud. 5*(1) (2005), 73–87.

[4] Alves, C. O. Existence of solution for a degenerate $p(x)$-laplacian equation in $\mathbb{R}^N$. *J. Math. Anal. Appl. 345* (2008), 731–742.

[5] Alves, C. O. Existence of radial solutions for a class of $p(x)$-laplacian equations with critical growth. *Differential Integral Equations 23*(1/2) (2010), 113–123.

[6] Alves, C. O. & Barreiro, J. L. P. Existence and multiplicity of solutions for a $p(x)$-laplacian equation with critical growth. *J. Math. Anal. Appl. 403* (2013), 143–154.

[7] Alves, C. O. & Ferreira, M. C. Nonlinear perturbations of a $p(x)$-laplacian equation with critical growth in $\mathbb{R}^N$. *Math. Nachr.* (2013), 1–20. to appear.

[8] Alves, C. O. & Ferreira, M. C. Existence of solutions for a class of $p(x)$-laplacian equations involving a concave-convex nonlinearity with critical growth in $\mathbb{R}^N$. *To appear in Topol. Methods Nonlinear Anal.* (2014).

[9] Alves, C. O. & Liu, S. On superlinear $p(x)$-laplacian equations in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Anal. 73* (2010), 2566–2579.

[10] Alves, C. O. & Souto, M. A. S. Existence of solutions for a class of problems in $\mathbb{R}^N$ involving $p(x)$-laplacian. *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 66* (2005), 17–32.

[11] Ambrosetti, A., Azorero, J. G. & Peral, I. Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations. *J. Funct. Anal. 137* (1996), 219–242.

[12] Ambrosetti, A.; Brezis, H. & Cerami, G. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *J. Funct. Anal. 122* (1994), 519–543.

[13] Antontsev, S. & Shmarev, S. *Elliptic equations with anisotropic nonlinearity and nonstandard conditions*, Chapter 1, pp. 1–100. Handb. Differ. Equ.: Stationary Partial Differential Equations. Elsevier B.V. 2006.

[14] Antontseva, S. N. & Shmarevb, S. I. A model porous medium equation withv ariable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions. *Nonlinear Anal. 60* (2005), 515 –545.

[15] Azorero, J. P. G.; Alonso, P. & Manfredi, J. J. Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations. *Commun. Contemp.Math. 02*(3) (2000), 385–404.

[16] Berestycki, H. & Lions, P. L. Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state. *Arch. Ration. Mech. Anal. 82*(4) (1983), 313–345.

[17] Bonder, J. F. & Silva, A. Concentration-compactness principle for variable exponent spaces and applications. *Electron. J. Differential Equations 2010*(141) (2010), 1–18.

[18] Brown, K. J. & Wu, T.-F. A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem. *Electron. J. Differential Equations 2007*(69) (2007), 1–9.

[19] Brown, K. J. & Zhang, Y. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function. *J. Differential Equations 193* (2003), 481–499.

[20] Cao, D.-M. Multiple solutions of a semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, C 10*(6) (1993), 593–604.

[21] Cao, D.-M. & Huan-Song, Z. Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 126* (1996), 443–463.

[22] Cao, D.-M. & Noussair, E. S. Multiplicity of positive and nodal solutions for nonlinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13*(5) (1996), 567–588.

[23] Chabrowski, J. *Weak convergence methods for semilinear elliptic equations.* World Scientific 1999.

[24] Chabrowski, J. & Fu, Y. Existence of solutions for $p(x)$-laplacian problems on a bounded domain. *J. Math. Anal. Appl. 306* (2005), 604–618.

[25] Chen, Y.; Levine, S. & Rao, M. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math. 66*(4) (2006), 1383–1406.

[26] de Freitas, L. R. *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares com crescimento crítico exponencial.* Tese, USP–São Carlos, 2010.

[27] Diening, L. *Theoretical and numerical results for electrorheological fluids.* Tese, Albert–Ludwigs–Universität, 2002.

[28] Diening, L.; Hästö, P. & Nekvinda, A. *Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces.* FSDONA04 Proceedings, 2004.

[29] Diening, L.; Hästö, P. & Růžička, M. *Lebesgue an Sobolev Spaces with variable exponents*, Volume 2017 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 2011.

[30] Edmunds, D. E. & Rákosník, J. Sobolev embedding with variable exponent. *Studia Math. 143*(3) (2000), 267–293.

[31] Ekeland, I. On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl. 47* (1974), 324–353.

[32] Fan, X. $p(x)$-laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with periodic data and nonperiodic perturbations. *J. Math. Anal. Appl. 341* (2008), 103–119.

[33] Fan, X. & Han, X. Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-laplacian equations in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Anal. 59* (2004), 173–188.

[34] Fan, X., Shen, J. & Zhao, D. Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$. *J. Math. Anal. Appl. 262*(2) (2001), 749–760.

[35] Fan, X., Zhang, Q. & Zhao, D. Eigenvalues of $p(x)$-laplacian dirichlet problem. *J. Math. Anal. Appl. 302* (2005), 30–317.

[36] Fan, X. & Zhang, Q. H. Existence of solutions for $p(x)$-laplacian Dirichlet problem. *Nonlinear Anal. 52* (2003), 1843–1852.

[37] Fan, X. & Zhao, D. A class of De Giorgi type and Hölder continuity. *Nonlinear Anal. 36*(3) (1999), 295–318.

[38] Fan, X. & Zhao, D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *J. Math. Anal. Appl. 263* (2001), 424–446.

[39] Fan, X.; Zhao, Y. & Zhao, D. Compact embedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. *J. Math. Anal. Appl. 255* (2001), 333–348.

[40] Ferreira, M. C. *Existência de soluções via métodos variacionais para uma classe de problemas quasilineares com expoentes variáveis.* Tese, UAME/CCT/UFCG, 2014.

[41] Fu, Y. The principle of concentration compactness in $L^{p(x)}$ spaces and its application. *Nonlinear Anal. 71*(71) (2009), 1876–1892.

[42] Fu, Y. & Zhang, X. Multiple solutions for a class of $p(x)$-laplacian equations in involving the critical exponent. *Proc. R. Soc. A 466* (2010), 1667–1686.

[43] Fu, Y. & Zhang, X. Solutions of $p(x)$-laplacian equations with critical exponent and perturbations in $\mathbb{R}^N$. *Electron. J. Differential Equations 120*(120) (2011), 1–14.

[44] Gasiński, L. & Papageorgiou, N. S. A pair of positive solutions for the dirichlet $p(z)$-laplacian with concave and convex nonlinearities. *J. Glob. Optim. 56* (2013), 1347–1360.

[45] Guimarães, C. J. Sobre os espaços de lebesgue e sobolev generalizados e aplicações envolvendo o $p(x)$-laplaciano. Dissertação de mestrado, UAME/CCT/UFCG 2006.

[46] Hirano, N. Existence of entire positive solutions for nonhomogeneous elliptic equations. *Nonlinear Anal. 29* (1997), 889–901.

[47] Hirano, N. & Shioji, N. A multiplicity result including sign-changing solutions for a nonlinear problem in $\mathbb{R}^N$. *Adv. Nonlinear Stud. 7* (2007), 513–532.

[48] Hsu, T. & Lin, H. Four positive solutions of semilinear elliptic equation involving concave and convex nonlinearities in $\mathbb{R}^N$. *J. Math. Anal. Appl. 365* (2010), 758–775.

[49] Hsu, T. S.; Lin, Huei-li & Hub, Chung-Che Multiple positive solutions of quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *J. Math. Anal. Appl. 388* (2012), 500–512.

[50] Hu, K. & Tang, C.-L. Existence and multiplicity of positive solutions of semilinear elliptic equations in unbounded domains. *J. Differential Equations 251* (2011), 609–629.

[51] Jeanjean, L. Two positive solutions for nonhomogeneous elliptic equations. *Differential Integral Equations 10*(4) (1997), 609–624.

[52] Kováčik, O. & Rǎkosnik, J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$. *Czechoslovak Math. J. 41*(4) (1991), 592–618.

[53] Kristály, A.; Rǎdulescu, V. D. & Varga, C. *Variational Principles in Mathematical Physics, Geometry, and Economics: Qualitative Analysis of Nonlinear Equations and Unilateral Problems*, Volume 136 of *EncyclopediaMath. Appl.* Cambridge University Press, 2010.

[54] Lin, Huei-li. Multiple positive solutions for semilinear elliptic systems. *J. Math. Anal. Appl. 391* (2012a), 107–118.

[55] Lin, Huei-li. Positive solutions for nonhomogeneous elliptic equations involving critical sobolev exponent. *Nonlinear Anal. 75* (2012b), 2660–2671.

[56] Lin, Huei-li. Multiple positive solutions of semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities in $\mathbb{R}^N$. *Bound. Value Probl. 2012*(24) (2012), 1 –17.

[57] Mashiyev, R. A.; Ogras, S.; Yucedag, Z. & Avci, M. The Nehari manifold approach for Dirichlet problem involving the $p(x)$-laplacian equation. *J. Korean Math. Soc. 47*(4) (2010), 845–860.

[58] Mihaǎlescu, M. & Radulescu, V. A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids. *Proc. R. Soc. A 462* (2006), 2625–2641.

[59] Mihaǎlescu, M. Existence and multiplicity of solutions for an elliptic equation with $p(x)$-growth conditions. *Glasgow Math. J. 48* (2006), 411–418.

[60] Miotto, M. L. & Miyagaki, O. H. Multiple positive solutions for semilinear Dirichlet problems with sign-changing weight function in infinite strip domains. *Nonlinear Anal. 71* (2009), 3434–3447.

[61] Nikitczuk, J.; Weinberg, B.; Canavan, P. & C. Mavroidis. Active knee rehabilitation orthotic device with variable damping characteristics implemented via an electrorheological fluid. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions 15*(6) (2009), 952–960.

[62] Orlicz, W. Über konjugierte exponentenfolgen. *Studia Math. 3* (1931), 200–2011.

[63] Peral, I. *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian.* Trieste: Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, I.C.T.P.I, 1997.

[64] Piat, V. C. & Coscia, A. Hölder continuity of minimizers of functionals with variable growth exponent. *Manuscripta Math. 93*(3) (1997), 283–299.

[65] Rabinowitz, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to diferential equations*, Volume 65. CBMS Reg. Conf. series in math, 1984.

[66] Royden, H. L. *Real Analysis* (2 ed.). The Macmillan Company, 1998.

[67] Růžička, M. *Electrorheological fluids: Modeling and mathematical theory*, Volume 1748 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 2000.

[68] Samko, S. G. On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: maximal and singular operators. *Integral Transforms Spec. Funct. 16*(5-6) (2005), 461–482.

[69] Shang, X. & Wang, Z. Existence of solutions for discontinuous $p(x)$-laplacian problems with critical exponents. *Electron. J. Differential Equations 2012*(25) (2012), 1–12.

[70] Silva, E. A. & Xavier, M. S. Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents. *Ann. I. H. Poincaré 2* (2003), 341–358.

[71] Simmonds, A. J. Electro-rheological valves in a hydraulic circuit. *IEE Proceedings-D 138*(4) (1991), 400–404.

[72] Simon, J. Regularité de la solution d'une equation non linéaire dans $\mathbb{R}^N$. *Lecture Notes in Math. 665* (1978), 205–227.

[73] Stanway, R.; Sprostonz, J. L.; & El-Wahed, A. K. Applications of electro-rheological fluids in vibration control: a survey. *Smart Mater. Struct. 5* (1996), 464–482.

[74] Strauss, W. A. Existence of solitary waves in higher dimensions. *Comm. Math. Phys. 55*(2) (1977), 149–162.

[75] Tarantello, G. On nonhomogeneous elliptic involving critical sobolev exponent. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, C 9*(3) (1992), 281–304.

[76] Wen, W.; Huang, X.; Yang, S.; Lu, K. & Sheng, P. The giant electrorheological effect in suspensions of nanoparticles. *Nat. Mater. 2* (2003), 727–730.

[77] Willem, M. *Minimax Theorems.* Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Boston: Birkhäuser, 1996.

[78] Wu, T. The Nehari manifold for a semilinear elliptic system involving sign-changing weight function. *Nonlinear Anal. 68* (2008a), 1733–1745.

[79] Wu, T. F. On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function. *J. Math. Anal. Appl. 318* (2006), 253–270.

[80] Wu, T. F. Multiplicity of positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 138* (2008b), 647–670.

[81] Wu, T. F. The existence of multiple positive solutions for a semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Anal. 72* (2010), 3412–3421.

[82] Xiping, Z. Nontrivial solution of quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Scientia Sinica (Series A) 31*(10) (1988), 1166–1181.

[83] Zhihui, W. & Xinmin, W. A multiplicity result for quasilinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. *Nonlinear Anal. 18* (1992), 559–567.

[84] Zhikov, V. V. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 29* (1987), 33–66.

[85] Zhu, X. A perturbation result on positive entire solutions of a semilinear elliptic equation. *J. Differential Equations 92*(2) (1991), 163–178.