Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre algumas desigualdades clássicas e espaços de sequências

por

Tony Kleverson Nogueira

João Pessoa - PB
Julho/2018

Sobre algumas desigualdades clássicas e espaços de sequências

por

Tony Kleverson Nogueira †

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

e co-orientação da

Profa. Dra. Maria Pilar Rueda Segado

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Julho/2018

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 19 de julho de 2018

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro - UFU

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo - UEPB

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Julho/2018

Resumo

Este trabalho é dividido em três partes. Na primeira, estudamos o comportamento de constantes que satisfazem desigualdades de Hardy–Littlewood para formas multilineares definidas em espaços de sequências. Inicialmente, apresentamos as constantes ótimas para um tipo particular, chamada desigualdade mista de $\left(\ell_{\frac{p}{p-1}}, \ell_2\right)$-Littlewood. Em seguida, para outras desigualdades, verificamos o que acontece com as constantes quando perturbamos os expoentes ótimos. Na segunda parte, resolvemos de maneira definitiva um problema levantado por Carando, Defant e Sevilla–Peris: dada a desigualdade de Bohnenblust–Hille para polinômios m-homogêneos complexos cujos monômios têm um número de variáveis uniformemente limitado por um inteiro positivo M, mostramos que as constantes ótimas são uniformemente limitadas, independentemente do valor de m. Na terceira parte, estudamos lineabilidade em espaços de sequências. Mostramos que certos subconjuntos de alguns espaços de sequências invariantes contêm, a menos da sequência nula, um subespaço fechado de dimensão infinita.

Palavras-chave: Desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood, polinômios m-homogêneos, espaços de sequências invariantes, espaçabilidade.

Abstract

This work is divided into three parts. In the first, we study the behavior of constants that satisfy Hardy–Littlewood inequalities to multilinear forms defined in sequence spaces. Initially, we present the optimal constants for a particular type, called mixed $\left(\ell_{\frac{p}{p-1}}, \ell_2\right)$-Littlewood inequality. Then, for other inequalities, we see what happens to the constants when we disturb the optimal exponents. In the second part, we solve definitively a problem raised by Carando, Defant and Sevilla–Peris: given the Bohnenblust–Hille inequality for complex m-homogeneous polynomials whose monomials have a number of variables uniformly bounded by a positive integer M, we show that the optimal constants are uniformly bounded, regardless of the value of m. In the third part, we study lineability in sequence spaces. We show that certain subsets of some spaces of invariant sequences contain, except for the null sequence, a closed subspace of infinite dimension.

Keywords: Bohnenblust–Hille and Hardy–Littlewood inequalities, m-homogeneous polynomials, invariant sequence spaces, spaceability.

Agradecimentos

Agradeço,

A Deus, pelo dom da vida e por todas as bençãos alcançadas.

A minha mãe, motivo do meu esforço, por toda a dedicação dada à mim durante esses anos. Agradeço também a toda a minha família.

A Mariana Maia, minha flor, minha inspiração, meu suporte, por ser essa pessoa "maravilinda", e por estar ao meu lado nessa caminhada e nas próximas.

A meu orientador, Daniel Pellegrino, por sua amizade, sua generosidade em compartilhar do seu conhecimento e pela paciência durante todo esse processo.

A minha co-orientadora, Pilar Rueda, que mesmo à distancia foi parte fundamental na minha formação.

Aos professores Vinícius Fávaro, Gustavo Araújo, Jamilson Campos, Uberlandio Severo, Maurício Santos e Joedson Santos por terem aceitado o convite para participar da banca e pelas valiosas contribuições para este trabalho.

A todos os meus amigos que direta ou indiretamente me ajudaram durante o doutorado, em especial a Gérsica, Mylenna, Eudes, Júnior, Mônica, Wanderson, Rafa, Luan, Marcius, Ginaldo, Wanderley, Ronaldo, Will, Vanessa, Lilly, Esteban, Nacib, D. Vanusa e S. Mariano.

A Capes pelo apoio financeiro.

"Tudo o que temos de decidir é o que fazer com o tempo que nos é dado."

Gandalf, O Senhor dos Anéis - A Sociedade do Anel

Dedicatória

À Cleonice Lucas Nogueira, minha mãe.

Sumário

Introdução 1

Notação e terminologia 10

I As desigualdades de Bohnenblust-Hille e Hardy–Littlewood multilineares **14**

1 Constantes ótimas para uma desigualdade tipo Hardy–Littlewood **15**

1.1 A desigualdade de Hardy–Littlewood 15

1.2 A desigualdade mista de $\left(\ell_{\frac{p}{p-1}}, \ell_2\right)$-Littlewood 21

1.2.1 Demonstração do Teorema 1.2.1 22

1.3 Estimativas para $C_{p,\infty}$ 26

2 Expoentes *vs* constantes em desigualdades tipo Hardy-Littlewood **28**

2.1 Expoentes ótimos para desigualdades tipo Hardy-Littlewood 29

2.2 A desigualdade de Hölder para somas mistas 34

2.3 A dependência em n: primeiros resultados 35

2.4 Para desigualdades com repetições nos índices da soma 39

2.4.1 Uma ferramenta tensorial 40

2.4.2 Demonstração do Teorema 2.4.1 41

2.5 Para desigualdades com múltiplos expoentes 47

II A desigualdade de Bohnenblust-Hille polinomial **51**

3 Constantes para um caso especial da desigualdade de Bohnenblust-Hille polinomial complexa **52**

3.1 A desigualdade de Bohnenblust–Hille para polinômios que têm uma quantidade de variáveis uniformemente limitada 54

III Lineabilidade em espaços de sequências **59**

4 Espaçabilidade em espaços de sequências **60**

4.1 Sobre lineabilidade/espaçabilidade 60

4.2 Espaçabilidade em espaços de sequências 61

4.3 Principais resultados 64

4.3.1 Espaçabilidade em espaços de sequências fortemente invariantes 64

4.3.2 O caso "fraco" 68

4.4 Introdução a um conceito mais forte de lineabilidade 73

Apêndices

A Sobre polinômios m-homogêneos **76**

A.1 Maximalidade do coeficiente multinomial central 76

A.2 Equivalência de normas para polinômios m-homogêneos complexos . . . 78

B Sobre operadores multilineares **79**

B.1 Operadores múltiplo somantes 79

B.1.1 Espaços com cotipo finito e funções de Rademacher 80

B.2 Desigualdades auxiliares 80

B.2.1 Desigualdade de Minkowski 80

B.2.2 Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund 81

B.2.3 Desigualdade múltipla de Khinchine 81

Referências **83**

Introdução

Parte 1: As desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood multilineares

Em 1930, J. E. Littlewood, motivado por sua análise do problema de P. J. Daniell, sobre funções de variação limitada, provou em [53] a seguinte desigualdade, conhecida hoje como desigualdade 4/3 de Littlewood: para cada forma bilinear $A : c_0 \times c_0 \to \mathbb{K}$ vale que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |A(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2}\|A\|$$

e o expoente 4/3 é ótimo. Mais recentemente, em [45], foi observado que a forma bilinear $A : c_0 \times c_0 \to \mathbb{R}$ dada por $A(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$ garante que a constante $\sqrt{2}$ também é ótima no caso real. Para escalares complexos, $\sqrt{2}$ pode ser trocado por $2/\sqrt{\pi}$, embora não se saiba se esse valor é ótimo.

Em 1931, Bohnenblust e Hille em [28] estenderam esse resultado ao provar que existe uma constante $C_m^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada forma m-linear $A : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$, vale

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |A(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m^{\mathbb{K}}\|A\|$$

e que, além disso, o expoente $2m/(m + 1)$ é ótimo.

Essa generalização permitiu resolver o problema da convergência absoluta de Bohr (veja [21] e [40]) e, devido a esse potencial de aplicação, tem-se investigado novas generalizações e melhores estimativas para a constante $C_m^{\mathbb{K}}$. Essa busca tem mostrado resultados em várias aplicações para diferentes problemas em Análise Complexa e Harmônica, Teoria dos Números e até mesmo na física moderna. Dentre elas está a aplicação dada por A. Montanaro a Teoria da Informação Quântica (veja [60]). Destacamos aqui uma notável aplicação chamada o *desbalanceamento das luzes.*

Seja A uma grade $n \times n$ de luzes que estão aleatoriamente ligadas ou desligadas. Suponha que cada linha e coluna esteja associada a um interruptor que, ao ser acionado, muda (desliga ou acende) todas as luzes da respectiva linha ou coluna. O problema consiste em acionar os interruptores de modo a maximizar a diferença entre as luzes ligadas e desligadas.

Esse problema foi discutido, por exemplo, por Alon e Spencer em [7] e modelado do seguinte modo: Consideremos a matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = \pm 1, a_{ij} = 1$ se a luz estiver acesa e $a_{ij} = -1$ se estiver desligada. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ os conjuntos de interruptores associados às linhas e colunas, respectivamente. Em [7] foi dada a seguinte estimativa assintótica:

Teorema 0.0.1 *([7, Theorem 2.5.1]) Seja $a_{ij} = \pm 1$, para $1 \leq i, j \leq n$. Então existem $x_i, y_j = \pm 1, 1 \leq i, j \leq n$, tais que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \geq \left(\sqrt{2/\pi} + o(1) \right) n^{3/2},$$

onde o expoente $3/2$ é ótimo.

O resultado acima nos diz que para qualquer configuração inicial, é possível acionar os interruptores de modo que o número de luzes acesas menos o número de luzes apagadas seja, pelo menos, $\left(\sqrt{2/\pi} + o(1) \right) n^{3/2}$.

Em dimensões mais altas, A. Montanaro editou esse problema da seguinte forma (veja [59]): seja $(a_{i_1 \ldots i_m})$ uma grade $n \times \cdots \times n$ de luzes acesas (nesse caso $a_{i_1 \ldots i_m} = 1$) ou apagadas (nesse caso $a_{i_1 \ldots i_m} = -1$). Suponhamos que para cada i_j exista um interruptor que quando acionado ($x_{i_j} = -1$) "comute" todas as luzes nessa linha: ligado para desligado ou desligado para ligado. O objetivo é o mesmo, maximizar a diferença entre as luzes acesas e apagadas.

Como consequência da desigualdade original de Bohnenblust–Hille existem $x_{i_j}^{(k)} = \pm 1, 1 \leq j \leq n$, e $k = 1, \ldots, m$, e uma constante $C_m^{\mathbb{K}} \geq 1$ ($(C_m^{\mathbb{K}})^m = (\sqrt{2})^{m-1}$), tais que

$$\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i_1 \ldots i_m} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)} \geq \frac{1}{(C_m^{\mathbb{K}})^m} n^{\frac{m+1}{2}} \tag{1}$$

e o expoente $\frac{m+1}{2}$ é ótimo. Note que, assim como observado por Montanaro, a melhora de (1) está diretamente ligada à melhora da constante $(C_m^{\mathbb{K}})^m$. Usando as melhores estimativas da constante de Bohnenblust–Hille, recentemente encontradas em [21](2014), podemos afirmar que existem $x_{i_j}^{(k)} = \pm 1, 1 \leq j \leq n$ e $k = 1, \ldots, m$, tais que

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} a_{i_1\ldots i_m} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)} \geq \frac{1}{1.3m^{0.365}} n^{\frac{m+1}{2}},$$

e o expoente $\frac{m+1}{2}$ é ótimo.

Em [11] é apresentada uma variação desse problema ao considerar uma generalização da desigualdade de Bohnenblust–Hille. Essa generalização é devida a G. H. Hardy e J. E. Littlewood ([49], 1934), para formas bilineares definidas em espaços ℓ_p, e mais recentemente a T. Praciano-Pereira ([74], 1981), que apresentou a versão multilinear dessa desigualdade:

Teorema 0.0.2 (Hardy–Littlewood/Praciano-Pereira) *Sejam $m \geq 2$ um inteiro e $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [1, +\infty]^m$ tais que $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$. Existe uma constante $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que, para cada forma m-linear contínua $T : \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m} \to \mathbb{K}$,*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}} \right)^{\frac{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}{2m}} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\| .$$

Além disso, o expoente $\dfrac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}$ é ótimo.

Nos últimos anos, tem crescido o interesse nas estimativas de constantes que satisfazem as desigualdades, multilinear e polinomial, do tipo Hardy–Littlewood (veja [4, 5, 8, 12, 43, 45, 79]). Como já falamos, as principais motivações são potenciais aplicações (veja, por exemplo, [60] para aplicações do caso real de estimativas da desigualdade de Bohnenblust–Hille e [21, 40] para aplicações do caso complexo).

Em [4] foi apresentada a importante generalização da desigualdade de Bohnenblust-Hille:

Teorema 0.0.3 (Albuquerque, Bayart, Pellegrino, Seoane–Sepúlveda [4]) *Sejam $m \geq 1$ e $q_1, \ldots, q_m \in [0, 2]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma constante $C_{q_1,\dots,q_m} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \dots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C_{q_1,\dots,q_m} \|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$.

(ii) $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{m+1}{2}$.

O resultado acima, além de ter sido um grande avanço na teoria multilinear, apresentou novas estimativas para as constantes de Bohnenblust–Hille. Em [4] levantou-se uma questão sobre o comportamento das constantes para um tipo especial de desigualdade de Bohnenblust–Hille, chamada de desigualdade mista de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood, que surge ao fazer $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m)$ igual aos seguintes expoentes ótimos

$$(1, 2, 2, \dots, 2), (2, 1, 2, \dots, 2), \dots, (2, 2, 2, \dots, 1).$$

Essa desigualdade foi ponto chave na demonstração do Teorema 0.0.3.

Em [4, Remark 5.1] foi conjecturado que as constantes de Bohnenblust–Hille com múltiplos expoentes têm crescimento sublinear. No entanto, o principal resultado de [69, 70] mostra que estas constantes não podem ter tal crescimento para escalares reais, pois ficou provada a otimalidade de $2^{\frac{m-1}{2}}$ para a desigualdade mista de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood.

As constantes ótimas das desigualdades anteriores são essencialmente desconhecidas. Trabalhos recentes mostraram que, em geral, essas constantes têm um crescimento sublinear (veja [10, 12, 21], e referências neles contidas). No entanto, um dos poucos casos em que as constantes ótimas são conhecidas para todo valor de m é o caso da desigualdade mista de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood:

Teorema 0.0.4 *([69, Theorem 2.1]) A constante ótima $C_{1,2,\dots,2}$ que satisfaz*

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{1,2,\dots,2} \|T\|, \tag{2}$$

para toda forma m-linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{R}$, é $2^{\frac{m-1}{2}}$.

O resultado acima foi complementado por [70] ao provar que em qualquer uma das configurações da desigualdade mista de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood a constante ótima é $2^{\frac{m-1}{2}}$, isto é, ficou provado que se $C_{1,2,\ldots,2}$ é a constante de (2), então

$$C_{1,2,\ldots,2} = C_{2,1,\ldots,2} = \cdots = C_{2,2,\ldots,1} = 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

No Capítulo 1, assim como no resultado acima, apresentamos a constante ótima de uma desigualdade específica do tipo Hardy–Littlewood, a chamada desigualdade mista de $\left(\ell_{\frac{p}{p-1}}, \ell_2\right)$-Littlewood. Invoquemos agora a generalização da desigualdade de Hardy–Littlewood para expoentes mistos:

Teorema 0.0.5 *([4, Theorem 1.2]) Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo, $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [1, +\infty]^m$ tais que $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$ e $\mathbf{s} := (s_1, \ldots, s_m) \in \left[\left(1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}, 2\right]^m$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) Existe $D^{\mathbb{K}}_{m,\mathbf{s},\mathbf{p}} \geq 1$ satisfazendo

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}\left|A\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\right)\right|^{s_m}\right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}}\cdots\right)^{\frac{s_1}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_1}} \leq D^{\mathbb{K}}_{m,\mathbf{s},\mathbf{p}}\|A\|, \tag{3}$$

para toda aplicação m-linear contínua $A : \ell^n_{p_1} \times \cdots \times \ell^n_{p_m} \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n.
(b) $\dfrac{1}{s_1} + \cdots + \dfrac{1}{s_m} \leq \dfrac{m+1}{2} - \left|\dfrac{1}{\mathbf{p}}\right|$.

Note que, segundo o teorema acima, para $p_1 = p, p_2 = \cdots = p_m = +\infty$, os expoentes

$$s_1 = \frac{p}{p-1}, \quad s_2 = \cdots = s_m = 2 \tag{4}$$

são ótimos. Esses expoentes, na ordem que aparecem ou comutados, dão nome a uma classe de desigualdades chamadas de $\left(\ell_{\frac{p}{p-1}}, \ell_2\right)$-Littlewood. Mostramos que para a configuração dada em (4), a constante

$$D^{\mathbb{R}}_{m,\frac{p}{p-1},2} = \left(2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)^{m-1}$$

é ótima. Esse resultado da presente tese foi publicado em [63]:

- *T. Nogueira, D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino. Optimal constants for a mixed Littlewood type inequality, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat., **111** (2017), 1083–1092.*

As desigualdades consideradas acima somadas a resultados de Aron–Globevnik e Zalduendo (que apresentaremos mais adiante) formam o grupo das desigualdades chamadas, nesse contexto, de clássicas. A otimalidade dos expoentes das somas significa que nenhuma constante independente de n pode ser encontrada, para toda forma m-linear contínua, quando algum expoente menor do que o indicado é considerado.

No Capítulo 2 mostramos que, para certos expoentes menores que os ótimos, o valor da constante que aparece à direita nas desigualdades supracitadas apresentam uma dependência explícita de potências de n. Nesse capítulo exibiremos tal dependência para diferentes tipos de desigualdades clássicas. Esses resultados foram inspirados no trabalho de Araújo e Pellegrino (veja [9]) que primeiro verificaram tal dependência. Além disso, esse trabalho fundamentou a definição de Índice de Somabilidade dada por Maia, Pellegrino e Santos (veja [56]) que, *grosso modo*, mede o quão próximos estão os espaços $\Pi^{mult}_{(p,q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$, dos operadores multilineares múltiplo somantes, e o espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$. A segunda parte do Capítulo 2 foi publicada em [65]:

- *T. Nogueira, P. Rueda. Summability of multilinear forms on classical sequence spaces, Quaest. Math.,* ***40*** *(2017), 803–809.*

Parte 2: A desigualdade de Bohnenblust–Hille polinomial

A desigualdade de Bohnenblust–Hille [28] para polinômios m-homogêneos complexos afirma que existe uma constante $C_m \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \sup_{\|x\|\leq 1} |P(x)|,$$

para todo polinômio m-homogêneo contínuo $P : c_0 \to \mathbb{C}$ da forma

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(P)\mathbf{x}^\alpha.$$

Essa desigualdade é importante em muitos campos da matemática (veja [21, 40] e suas referências). Em 2011, foi provado em [40] que C_m, para escalares complexos, pode ser escolhida com crescimento exponencial. Em 2014, Bayart, Pellegrino e Seoane-Sepúlveda, em [21], apresentaram as melhores estimativas até então conhecidas, que são usadas em importantes aplicações.

Em 2015, Carando, Defant e Sevilla-Peris em [37] mostraram que para uma família particular de polinômios m-homogêneos as constantes C_m, para escalares complexos, podem ser tomadas tendo crescimento polinomial em m. Mais precisamente, eles provaram que, para polinômios cujos monômios tem o número de variáveis diferentes uniformemente limitados por M, existe um tipo de desigualdade de Bohnenblust-Hille com uma constante de crescimento polinomial em m. Em [37, Theorem 2.1] foi provado que

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq 2^{\frac{M}{2}} m^{\frac{M+1}{2}} \|P\|, \tag{5}$$

para todo polinômio m-homogêneo contínuo $P : c_0 \to \mathbb{C}$, sendo enfatizado pelos autores de [37] o crescimento polinomial (em m) das constantes – essa é uma propriedade muito boa tendo em mente que a melhores estimativas conhecidas tem apenas um crescimento sub-exponencial (em m).

No entanto, provamos no Capítulo 3 que, de fato, estas constantes investigadas por Carando, Defant e Sevilla-Peris são uniformemente limitadas por uma constante que não depende de m. Assim, provamos uma desigualdade do tipo Bohnenblust–Hille mais forte, já que não há dependência do grau de homogeneidade nas constantes. Mais precisamente, provamos que quando $m \to \infty$ temos

$$\kappa_M = M^M e^M,$$

onde κ_M é a constante de Bohnenblust–Hille supracitada. Esse resultado da nossa tese foi publicado em [55]:

- *M. Maia, T. Nogueira, D. Pellegrino, The Bohnenblust–Hille inequality for polynomials whose monomials have a uniformly bounded number of variables, Integr. Equ. Oper. Theory.* ***88*** *(2017), 143–149.*

Parte 3: Lineabilidade em espaços de sequências

A Lineabilidade é uma teoria que vem ganhando força em matemática nos últimos anos. O espírito de tal conceito é procurar estruturas lineares em ambientes não-lineares. Mais precisamente, é a busca por subespaços vetoriais dentro de certos subconjuntos, não vazios, de espaços vetoriais que não possuem uma estrutura linear.

A seguir apresentamos as definições formais dos conceitos que usaremos neste trabalho.

Definição 0.0.6 *Um subconjunto A de um espaço vetorial topológico X é dito ser:*

(1) *μ-lineável em X se $A \cup \{0\}$ contiver um subespaço μ-dimensional de X.*

(2) *μ-espaçável em X se $A \cup \{0\}$ contiver um subespaço fechado μ-dimensional de X.*

(3) *Maximal espaçável em X se é $\dim X$-espaçável.*

Ao se iniciar os estudos em Análise Funcional, uma das principais propriedades que se aprende quando é introduzido o conceito de espaços de sequências é: se $p > q$ então $\ell_q \subsetneq \ell_p$. Esse resultado, apesar de simples, é ferramenta recorrente nas produções em Análise Funcional, como se poderá ver na Parte 1 deste trabalho. O fato de ℓ_p conter propriamente ℓ_q, para $p > q$, nos sugere de forma natural uma pergunta:

Quanto o espaço ℓ_p é maior que o espaço ℓ_q?

Talvez motivados por essa pergunta, os autores de [62] provaram que o conjunto

$$M_{p,q} := \ell_p - \ell_q$$

possui, a menos da sequência nula, um subespaço fechado cuja dimensão é a mesma que a cardinalidade de $\mathbb{R}$, ou seja, mostrou-se que $M_{p,q}$ é $\mathfrak{c}$-espaçável. Apesar desse resultado já ser talvez surpreendente, foi provado em [52] que

$$\ell_p - \bigcup_{1 \leq q < p} \ell_q \tag{6}$$

também é espaçável.

Apesar do grande avanço, esse resultado foi generalizado em [32] quando foi considerado um espaço de sequências mais geral no lugar de $\ell_p(X)$, como aparece acima. Uma consequência desse resultado é que (6) vale também para $0 < q < p$.

Dado um espaço de Banach X, os autores de [32] introduziram uma classe de espaços de sequências mais abrangente, com coordenadas em espaços de Banach ou quasi-Banach[1] X, chamados espaços de sequências invariantes. A seguir recordamos tal conceito:

Definição 0.0.7 *([32]) Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

(a) Dado $x \in X^{\mathbb{N}}$, definimos x^0 como segue: se x tem apenas um número finito de coordenadas diferentes de zero, então $x^0 = 0$; caso contrário, $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ onde x_j é a j-ésima coordenada não nula de x.

(b) Um espaço de sequências invariantes sobre X é um espaço de dimensão infinita E Banach ou quasi-Banach de sequências de X que satisfaz as seguintes condições:

(b1) Para $x \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 \neq 0$, $x \in E$ se, e somente se, $x^0 \in E$, e $\|x\| \leq K\|x^0\|$, para alguma constante K dependendo somente de E.

(b2) $\|x_j\| \leq \|x\|$, para cada $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ e cada $j \in \mathbb{N}$.

Em [32] foi provado que se E é um espaço de sequências invariantes sobre um espaço Banach ou quasi-Banach X, para qualquer subconjunto $\Gamma \subset (0, \infty]$, então

$$E - \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X)$$

é vazio ou espaçável.

Em [33] foi considerada uma situação mais geral do que a citada acima: dados espaços de Banach X e Y, uma aplicação $f : X \to Y$, um conjunto $\Gamma \subseteq (0, \infty]$ e um espaço de sequências invariantes E com coordenadas em X, foi investigada a existência de subespaços fechados de dimensão infinita dentro de subconjuntos, unidos com a sequência nula, formados por sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ de E que cumprissem as seguintes condições

$$(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(Y)$$

ou

$$(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q^{\omega}(Y)$$

ou

$$(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(Y).$$

É fácil perceber que se f for a identidade em X temos exatamente os casos considerados em [32]. Em [33, Definition 2.3] foi considerada uma classe mais geral de funções:

[1] $(X, \|\cdot\|)$ é dito quasi-Banach se for completo e $\|\cdot\|$ for uma quasi-norma, i.e, $\|x+y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$, $\|x\| > 0 (x \neq 0)$ e $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para quaisquer $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ e $K > 1$.

Definição 0.0.8 *Uma função $f\colon X \longrightarrow Y$ entre espaços normados é dita ser:*
(a) Não-contrativa, se $f(0) = 0$ e para cada escalar $\alpha \neq 0$ existe uma constante $K(\alpha) > 0$ tal que

$$\|f(\alpha x)\|_Y \geq K(\alpha) \cdot \|f(x)\|_Y, \tag{7}$$

para cada $x \in X$.
(b) Fortemente não-contrativa, se $f(0) = 0$ e para cada escalar $\alpha \neq 0$ existe uma constante $K(\alpha) > 0$ tal que

$$|\varphi(f(\alpha x))| \geq K(\alpha) \cdot |\varphi(f(x))|, \tag{8}$$

para todo $x \in X$ e $\varphi \in Y'$.

O seguinte resultado foi provado por Botelho e Fávaro (veja [33, Theorem 2.5]):

Teorema 0.0.9 *([33]) Sejam X e Y espaços de Banach, E um espaço de sequências invariantes sobre X, $f\colon X \longrightarrow Y$ uma função e $\Gamma \subseteq (0, \infty]$.*
(a) Se f é não-contrativa, então

$$C(E, f, \Gamma) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(Y) \right\},$$
$$C(E, f, 0) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(Y) \right\}$$

são vazios ou espaçáveis em E (i.e., a união do conjunto com $\{0\}$ contém um subespaço fechado de dimensão infinita de E).
(b) Se f é fortemente não-contrativa, então

$$C^w(E, f, \Gamma) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q^w(Y) \right\}$$

é vazio ou espaçável em E.

No Capítulo 4 apresentamos abstrações do resultado acima. Mostramos, entre outros resultados, que os espaços de sequências invariantes usados no Teorema 0.0.9 podem ser substituídos por espaços de sequências invariantes mais gerais. Estes resultados da presente parte da tese foram publicados em [64]:

- *T. Nogueira, D. Pellegrino, On the size of certain subsets of invariant Banach sequence spaces, Linear Algebra Appl.* ***487*** *(2015), 172–183.*

Notação e terminologia

- $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Dado o número real $p \in (1, \infty)$, o conjugado de p será o número $p^* \in (1, \infty)$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Para $p = 1$, definiremos $p^* = \infty$.

- Em geral, $X, Y, E, E_i, F, F_i, \ldots$ denotarão espaço normados. A norma de um espaço X será usualmente denotada por $\|\cdot\|_X$ ou $\|\cdot\|$ caso esteja claro o espaço em questão. A bola unitária fechada $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ do espaço X será denotada por B_X. O dual topológico de X, será denotado por X^*.

- $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ será o espaço de todas as aplicações $m-$lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F. Quando $E_1 = \cdots = E_m = E$, escreveremos apenas $\mathcal{L}(^m E; F)$.

- Dado um espaço de Banach X e $1 \leq p < \infty$, trabalharemos com os seguintes espaços de sequências, que também serão de Banach:

$$
\begin{aligned}
\ell_p(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \\
\ell_p^w(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \varphi \in X^* \right\}, \\
\ell_p^u(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X) : \lim_{n \to \infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0 \right\}, \\
c_0(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \lim_{j \to \infty} x_j = 0 \right\}, \\
c(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \lim_{j \to \infty} x_j \text{ existe} \right\}
\end{aligned}
$$

Em $c_0(X)$ e $c(X)$ definimos a seguinte norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|.$$

Em particular, se $X = \mathbb{K}$ denotaremos, por exemplo, $\ell_p(X) = \ell_p$ e $c_0(X) = c_0$. Se $0 < p < 1$, dizemos que os espaços são p-normados, e ainda mais, p-Banach.

- Denotaremos $X_p := \begin{cases} \ell_p, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ c_0, & \text{se } p = \infty \end{cases}$.

- $\ell_p^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$.

- Para $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty]^m$ denotaremos

$$\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| := \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}.$$

As vezes, para inteiros positivos $n_1, \ldots, n_k$ tais que $n_1 + \cdots + n_k = m$, denotaremos

$$\mathbf{p} := \left(p_1^{(1)}, \overset{n_1 \text{ vezes}}{\ldots}, p_{n_1}^{(1)}, \ldots, p_1^{(k)}, \overset{n_k \text{ vezes}}{\ldots}, p_{n_k}^{(k)}\right) \in [1, \infty]^m$$

a fim de definir r_i dado por $\dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{p_1^{(i)}} + \cdots + \dfrac{1}{p_{n_i}^{(i)}}$, para $i = 1, \ldots, k$.

- Denotaremos $\times_{1\leq i\leq m} X_{p_i} = X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m}$. Por $e_j^{n_j}$ denotaremos a n_j-upla $(e_j, \ldots, e_j)$, onde $n_j \in \mathbb{N}$ e $1 \leq j \leq m$.

- O produto $\otimes_m^{\pi} X_p = X_p \otimes^{\pi} \cdots \otimes^{\pi} X_p$ denota o produto tensorial de X_p por X_p (m vezes) com a norma projetiva π, definida do seguinte modo: se X e Y são espaços de Banach e $u \in X \otimes Y$ é tal que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i,$$

para $x_i \in X$ e $y_i \in Y, i = 1, \ldots, n$, então a norma projetiva de u é definida por

$$\pi(u) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X \|y_i\|_Y\right\}.$$

Denotamos por $\hat{\otimes}_m^{\pi} X_p = X_p \hat{\otimes}^{\pi} \cdots \hat{\otimes}^{\pi} X_p$ o completamento de $\otimes_m^{\pi} X_p$. O tensor $x \otimes \cdots \otimes x$ será denotado por $\otimes_m x$.

- Para $\rho, r_1, \ldots, r_m \in (0, +\infty)$, denotaremos $M_<^{\rho} := \{j \in \{1, \ldots, m\} : r_j < \rho\}$, $M_{\geq}^{\rho} := \{1, \ldots, m\} \setminus M_<^{\rho}$.

- Γ denota a função gama. Precisamente, $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ pode ser definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Destacamos que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- Sejam f e g funções em n. Escrevemos $f(n) = o(g(n))$, quando $n \to \infty$, se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

- Para $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, denotaremos o coeficiente multinomial por

$$\binom{m}{\tau} := \frac{m!}{\tau_1! \ldots \tau_M!}.$$

- Definimos $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$.

- Por $L^2([a, b])$, denotamos o espaço das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ com a norma

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

gerada pelo seguinte produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx.$$

Parte I

As desigualdades de Bohnenblust-Hille e Hardy–Littlewood multilineares

Capítulo 1

Constantes ótimas para uma desigualdade tipo Hardy–Littlewood

Neste capítulo apresentamos as constantes ótimas de um tipo de desigualdade de Hardy–Littlewood para escalares reais, a chamada desigualdade mista de $\left(\ell_{\frac{p}{p-1}}, \ell_2\right)$-Littlewood. Nosso principal resultado foi publicado em [63].

1.1 A desigualdade de Hardy–Littlewood

Em 1930 J. E. Littlewood provou em [53] a seguinte desigualdade, conhecida hoje como desigualdade 4/3 de Littlewood: para cada forma bilinear $A : c_0 \times c_0 \to \mathbb{C}$ vale que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |A(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2}\|A\|$$

e o expoente 4/3 é ótimo. A versão multilinear veio um ano depois por meio do trabalho de Bohnenblust e Hille em [28]. Mais precisamente, foi provado que existe uma constante $C_m^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada forma m-linear contínua $A : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$), vale

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |A(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m^{\mathbb{K}}\|A\|$$

e que, além disso, o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo. No Capítulo 3, nos dedicaremos a uma versão polinomial dessa desigualdade. Essas e outras desigualdades clássicas foram concebidas para espaços sobre o corpo de escalares $\mathbb{C}$, embora fosse natural considerar escalares reais.

A generalização dada por Bohnenblust e Hille permitiu resolver o problema da convergência absoluta de Bohr (veja [40] e [21]) e, devido a esse potencial de aplicação, tem-se investigado novas generalizações e melhores estimativas para a constante $C_m^{\mathbb{K}}$.

As seguintes estimativas para a constante de Bohnenblust–Hille foram encontradas com o passar dos anos:

$$C_m^{\mathbb{K}} \quad \leq \quad \begin{cases} m^{\frac{m+1}{2m}}(\sqrt{2})^{m-1} & [28] \quad (1931) \\ (\sqrt{2})^{m-1} & [51] \quad (1978) \\ 1.3m^{\frac{2-\log 2-\gamma}{2}} < 1.3m^{0,36482} & [21] \quad (2014), \end{cases}$$

onde γ denota a constante de Euler-Mascheroni.

Essa busca tem mostrado resultados em várias aplicações para diferentes problemas em Análise Complexa e Harmônica, teoria dos números e até mesmo na física moderna. Dentre eles destacamos a aplicação dada por A. Montanaro na Teoria de Informação Quântica (veja [60]).

A versão desses resultados para espaços ℓ_p no lugar de c_0 é devida a G. H. Hardy e J. E. Littlewood, no trabalho intitulado: *Bilinear forms bounded in space* $[p,q]$ ([49], 1934). Usando uma notação moderna podemos apresentá-la da seguinte forma:

Teoremas de Hardy–Littlewood para formas bilineares:

(i) [49, Theorems 2 e 4] Se $p, q \geq 2$ são tais que

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1,$$

então existe uma constante $C_{p,q} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} |T(e_j, e_k)|^{\frac{pq}{pq-p-q}} \right)^{\frac{pq-q-p}{pq}} \leq C_{p,q} \|T\|, \tag{1.1}$$

para toda forma bilinear contínua $T : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Além disso, o expoente $\dfrac{pq}{pq-p-q}$ é ótimo.

(ii) [49, Theorems 1 e 4] Se $p, q \geq 2$ são tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2},$$

então existe uma constante $D_{p,q} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} |T(e_j, e_k)|^{\frac{4pq}{3pq-2p-2q}} \right)^{\frac{3pq-2p-2q}{4pq}} \leq D_{p,q} \|T\|, \tag{1.2}$$

para toda forma bilinear contínua $T : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Além disso, o expoente $\dfrac{4pq}{3pq - 2p - 2q}$ é ótimo.

Como usual nesse contexto, quando p e/ou q for igual a infinito, consideramos c_0 no lugar de ℓ_p e/ou ℓ_q. Assim, é fácil perceber que do teorema acima resgatamos o resultado clássico de Littlewood.

Uma versão unificada dos "teoremas" de Hardy e Littlewood afirma que para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ (e $p, q \geq 2$) existe uma constante $K_{p,q} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |T(e_j, e_k)|^2 \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq K_{p,q} \|T\|, \tag{1.3}$$

com $\lambda = \frac{pq}{pq-p-q}$, para toda forma bilinear contínua $T : \ell_p \times \ell_q \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) (veja [68, Theorem 1] e [38] para uma abordagem mais geral; além disso, os expoentes são ótimos). Note que, de fato, (1.3) recupera (1.1) porque para $\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ temos $2 \leq \frac{pq}{pq-p-q}$ e pela inclusão canônica de espaços de sequências, sabemos que (1.3) implica (1.1). Por outro lado, por simetria, sabemos de (1.3) que existe uma constante $K_{q,p} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |A(e_j, e_k)|^2 \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq K_{q,p} \|A\|,$$

e se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$ temos $\lambda = \frac{pq}{pq-p-q} \leq 2$; por um resultado bastante conhecido, às vezes creditado a Minkowski (veja [47, Corollary 5.4.2]), sabemos que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A(e_j, e_k)|^{\lambda} \right)^{\frac{2}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |A(e_j, e_k)|^2 \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq K_{q,p} \|A\|. \tag{1.4}$$

Por (1.3) e (1.4) combinadas com a desigualdade de Hölder para somas mistas ([22], ou Seção 2.2) (ou interpolação no sentido de [4], se preferirmos) e sabendo que

$$\frac{1}{\frac{4pq}{3pq-2p-2q}} = \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{\lambda},$$

recuperamos (1.2).

Mais recentemente foram apresentadas versões multilineares da desigualdade de Hardy–Littlewood: para fixar notação, considere $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, m um inteiro positivo, $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [1, +\infty]^m$ e

$$\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| := \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}.$$

Denotaremos por $X_p := \ell_p$, quando $1 \leq p < \infty$, e $X_\infty := c_0$.

Teorema 1.1.1 (Hardy–Littlewood/Praciano-Pereira [74] (1934 e 1981)) *Seja $\mathbf{p} \in [1, +\infty]^m$ tal que $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$. Existe uma constante $C^{\mathbb{K}}_{m,\mathbf{p}} \geq 1$ tal que, para cada forma m-linear contínua $T : X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m} \to \mathbb{K}$,*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{\frac{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}{2m}} \leq C^{\mathbb{K}}_{m,\mathbf{p}} \|T\|.$$

Além disso, o expoente $\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}$ é ótimo.

Nos últimos anos tem crescido o interesse no estudo da somabilidade de operadores multilineares (veja, por exemplo, [35, 73, 76]) e na estimativa de constantes que satisfazem as desigualdades multilinear e polinomial do tipo Hardy–Littlewood (veja [4, 5, 8, 12, 43, 45, 79]). Como já falamos, as principais motivações são potenciais aplicações (veja, por exemplo, [60] para aplicações do caso real de estimativas da desigualdade de Bohnenblust–Hille e [21, 40] para aplicações do caso complexo).

Fazendo $p_1 = \cdots = p_m = p$ acima, temos as seguintes estimativas dadas em [12]:

$$C^{\mathbb{K}}_{m,p} \leq \begin{cases} (\sqrt{2})^{\frac{2m(m-1)}{p}} (C^{\mathbb{R}}_m)^{\frac{p-2m}{p}}, & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2m(m-1)}{p}} (C^{\mathbb{C}}_m)^{\frac{p-2m}{p}}, & \mathbb{K} = \mathbb{C}, \end{cases}$$

onde $C^{\mathbb{K}}_m$ é a constante de Bohnenblust–Hille. Além disso, em [12] foi provado que se $p \geq m^2$ então $(C^{\mathbb{K}}_{m,p})^{\infty}_{m=1}$ tem crescimento sublinear. Mais recentemente, em [10] (2017), foram apresentadas melhores estimativas quando $p > 2m(m-1)^2$:

$$C^{\mathbb{K}}_{m,p} \leq \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=2}^{m} \Gamma\left(2 - \frac{1}{j}\right)^{\frac{j}{2-2j}}, & \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=2}^{m} 2^{\frac{1}{2j-2}}, & \text{para } 2 \leq m \leq 13 \\ 2^{\frac{446381}{55440} - \frac{m}{2}} \displaystyle\prod_{j=14}^{m} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{j}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2-2j}}, & \text{para } 14 \leq m \end{cases} & \mathbb{K} = \mathbb{R}. \end{cases}$$

O resultado a seguir completa, juntamente com o Teorema 1.1.1, a generalização dos teoremas de Hardy–Littlewood multilineares.

Teorema 1.1.2 (Hardy–Littlewood/Dimant–Sevilla-Peris [43](1934 e 2013)) *Seja* $\mathbf{p} \in [1, +\infty]^m$ *tal que* $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$. *Existe uma constante* $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ *tal que*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}} \right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|, \tag{1.5}$$

para toda forma m-linear contínua $T : X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m} \to \mathbb{K}$. *Além disso, o expoente* $\left(1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}$ *é ótimo.*

As estimativas das constantes que satisfazem (1.5) não serão abordadas nesse trabalho, embora já exista, para certos casos, uma limitação universal para essas constantes (veja [3], [17]).

Uma das generalizações mais abrangentes da desigualdade de Hardy–Littlewood é apresentado no seguinte teorema (veja também [77]):

Teorema 1.1.3 (Albuquerque, Araújo, Núñez-Alarcón, Pellegrino, Rueda [2]) *Sejam* $m \geq 2$ *um inteiro positivo,* $1 \leq k \leq m$ *e* $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ *inteiros positivos tais que* $n_1 + \cdots + n_k = m$. *Se* $q_1, \ldots, q_k \in \left[\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}, 2\right]$ *e* $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$, *então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*a*) *Existe uma constante* $C_k = C(k, \mathbb{K}, p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_k)$ *tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_k=1}^{\infty} |T(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k})|^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C_k \|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m} \to \mathbb{K}$.

(*b*) *Os números* $q_1, \ldots, q_k$ *satisfazem*

$$\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_k} \leq \frac{k+1}{2} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|.$$

Acima, a notação $e_j^{n_j}$ representa a n_j-upla $(e_j, \ldots, e_j)$. Esse resultado será fortemente usado nos próximos capítulos. Fazendo $k = m$ e $p_1 = \cdots = p_m = +\infty$ acima, recuperamos uma generalização da desigualdade de Bohnenblust–Hille que apresentamos a seguir:

Teorema 1.1.4 (Albuquerque, Bayart, Pellegrino, Seoane–Sepúlveda [4]) *Sejam $m \geq 1$ e $q_1, \ldots, q_m \in [0,2]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma constante $C_{q_1,\ldots,q_m} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C_{q_1,\ldots,q_m}\|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$.

(ii) $\dfrac{1}{q_1} + \cdots + \dfrac{1}{q_m} \leq \dfrac{m+1}{2}$.

O resultado acima, além de ter sido um grande avanço na teoria multilinear, apresentou novas estimativas para as constantes de Bohnenblust–Hille. Em [4] levantou-se uma questão sobre o comportamento das constantes para um tipo especial de desigualdade de Bohnenblust–Hille, chamada de desigualdade mista de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood, que surge ao fazer $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m)$ igual aos seguintes expoentes ótimos

$$(1,2,2,\ldots,2), (2,1,2,\ldots,2), \ldots, (2,2,2,\ldots,1).$$

A desigualdade mista de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood foi ponto chave na demonstração do Teorema 1.1.4 (veja [4]). Em [4, Remark 5.1], diante das estimativas recém descobertas, foi considerada a possibilidade das constantes para essas desigualdades terem crescimento sublinear. No entanto, o principal resultado de [69] mostra que estas constantes não podem ter tal crescimento para escalares reais, pois ficou provada a otimalidade de $2^{\frac{m-1}{2}}$ para as desigualdades mistas de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood. Esse é um dos poucos casos em que as constantes ótimas são conhecidas para todo valor de m, como veremos a seguir:

Teorema 1.1.5 (Desigualdade mista de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood, [69]) *A constante ótima $C_{1,2,\ldots,2}$ que satisfaz*

$$\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{\infty}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{1,2,\ldots,2}\|T\|, \tag{1.6}$$

para toda forma m-linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{R}$, é $2^{\frac{m-1}{2}}$.

O resultado acima foi complementado em [70] quando se provou que para qualquer uma das configurações da desigualdade mista de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood a constante ótima será sempre $2^{\frac{m-1}{2}}$, isto é, ficou provado que se $C_{1,2,\ldots,2}$ é a constante de (1.6), então

$$C_{1,2,\ldots,2} = C_{2,1,\ldots,2} = \cdots = C_{2,2,\ldots,1} = 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

A próxima seção apresenta o principal resultado deste capítulo. Assim como no teorema acima, apresentamos a constante ótima de uma desigualdade específica do tipo Hardy–Littlewood.

1.2 A desigualdade mista de $\left(\ell_{\frac{p}{p-1}}, \ell_2\right)$-Littlewood

De agora em diante $p_0 \approx 1.84742$ é o único número real que satisfaz

$$\Gamma\left(\frac{p_0+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{1.7}$$

O próximo resultado fornece as constantes ótimas de um tipo de desigualdade Hardy–Littlewood que engloba (1.6); até onde sabemos, esta é a primeira vez em que uma desigualdade desse tipo, exceto o caso das desigualdades mistas de (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood ([69], [70]), mostra ter constantes ótimas com crescimento exponencial:

Teorema 1.2.1 *Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e $p \geq \frac{p_0}{p_0-1} \approx 2.18006$. A constante ótima $C_{(m),p}$ tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{\infty}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq C_{(m),p}\|T\|, \tag{1.8}$$

é satisfeita, para toda forma m-linear contínua $T : \ell_p \times c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{R}$, é $\left(2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)^{m-1}$.

Observe que a desigualdade do tipo Hardy–Littlewood acima é válida para $p \geq 2$ (veja Teorema 1.1.3). Quando $p = 2$, é simples provar que as constantes ótimas são $C_{(m),p} = 1$. Como consequência dos argumentos da prova do Teorema 1.2.1 observamos que para $2 < p < \frac{p_0}{p_0-1}$ a constante ótima ainda tem crescimento exponencial; então, uma eventual diminuição da ordem do crescimento quando $p \to 2$ não acontece. Além disso, para $2 < p < \frac{p_0}{p_0-1} \approx 2.18006$, a diferença entre as bases nas estimativas exponenciais superior e inferior de $C_{(m),p}$ não é maior que $4 \cdot 10^{-4}$ (veja as Figuras 1.1 e 1.2).

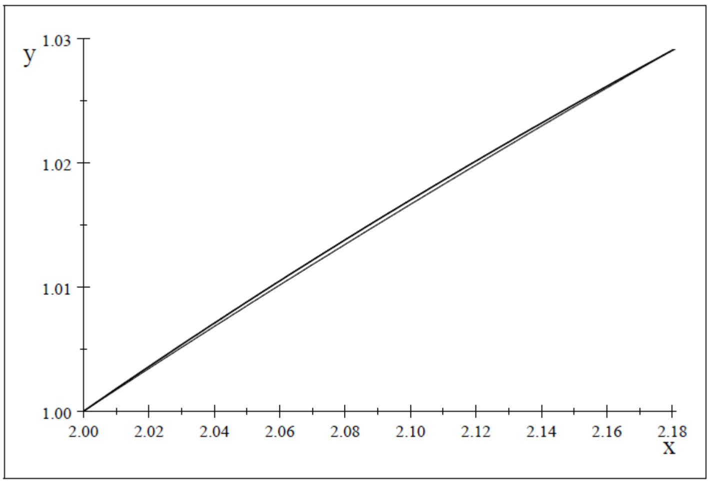

Figura 1.1: Gráficos das funções $A^{-1}_{\frac{x}{x-1}}$ e $2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}$, para $x \in [2, \frac{p_0}{p_0-1}]$

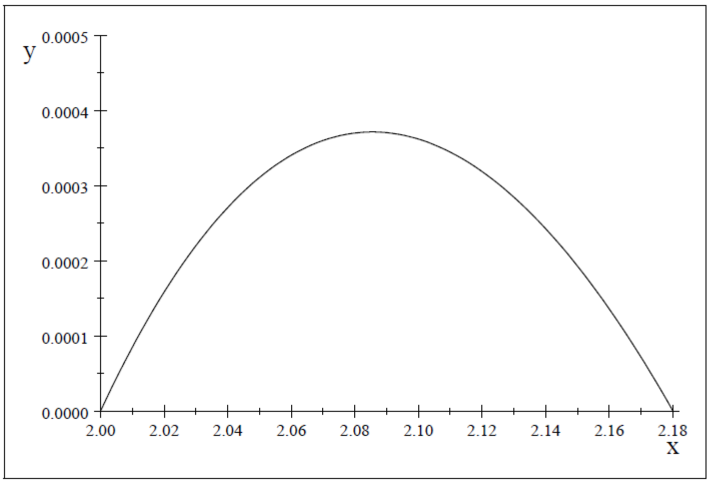

Figura 1.2: Gráfico da função $\left(A^{-1}_{\frac{x}{x-1}} - 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}\right)$, para $x \in [2, \frac{p_0}{p_0-1}]$

Na seção final, também fornecemos estimativas ótimas, superiores e inferiores, para as constantes $C_{p,\infty}$ do caso real de (1.8), mostrando que

$$2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leq C_{p,\infty} \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$$

para todo $p \geq \frac{p_0}{p_0-1} \approx 2.18006$. Este resultado recupera, em particular, a otimalidade da constante $\sqrt{2}$ do caso real da desigualdade 4/3 de Littlewood obtida em [45].

1.2.1 Demonstração do Teorema 1.2.1

A desigualdade de Khinchine (veja [42]) afirma que, para qualquer $0 < q < \infty$, existem constantes positivas A_q, B_q tais que, independentemente da sequência escalar

$(a_j)_{j=1}^n$, tem-se

$$A_q \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n a_j r_j(t) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq B_q \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $r_j, j = 1, \ldots, n$, são as funções de Rademacher:

$$r_j : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad r_j(t) := \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} 2^j \pi t).$$

Para escalares reais, U. Haagerup [48] provou que se p_0 é o número definido em (1.7) então

$$A_q = \sqrt{2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{para } 1.84742 \approx p_0 < q < 2$$

e

$$A_q = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}, \quad \text{para } 1 \leq q \leq p_0 \approx 1.84742.$$

Usaremos este último valor para estimar a nossa constante.

Seja $T : \ell_p \times c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{R}$ uma forma m-linear contínua. Pela desigualdade de Khinchine para múltiplas somas (veja [72] ou apêndice B.1) temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2} \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq (A_{\frac{p}{p-1}}^{-1})^{m-1} \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m}^{\infty} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \right|^{\frac{p}{p-1}} dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (A_{\frac{p}{p-1}}^{-1})^{m-1} \\
&\quad \times \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \sum_{i_1=1}^{\infty} \left| T\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{\infty} r_{i_2}(t_2) e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_m=1}^{\infty} r_{i_m}(t_m) e_{i_m} \right) \right|^{\frac{p}{p-1}} dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq (A_{\frac{p}{p-1}}^{-1})^{m-1} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left\| T\left(\cdot, \sum_{i_2=1}^{\infty} r_{i_2}(t_2) e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_m=1}^{\infty} r_{i_m}(t_m) e_{i_m} \right) \right\|^{\frac{p}{p-1}} dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq (A_{\frac{p}{p-1}}^{-1})^{m-1} \sup_{t_2,\ldots,t_m \in [0,1]} \left\| T\left(\cdot, \sum_{i_2=1}^{\infty} r_{i_2}(t_2) e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_m=1}^{\infty} r_{i_m}(t_m) e_{i_m} \right) \right\| \\
&\leq (A_{\frac{p}{p-1}}^{-1})^{m-1} \|T\| = (2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}})^{m-1} \|T\|,
\end{aligned}$$

sempre que $p \geq \frac{p_0}{p_0 - 1} \approx 2.18006$.

Agora vamos mostrar que $(2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})^{m-1}$ é a melhor constante possível. Sejam as formas

$$T_2 : \ell_p \times c_0 \to \mathbb{R}$$

e

$$T_2^{x_2} : \ell_p \to \mathbb{R}$$

definidas, para $x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots)$, $i = 1, 2$, por

$$T_2(x_1, x_2) = \left(x_2^1 + x_2^2\right) x_1^1 + \left(x_2^1 - x_2^2\right) x_1^2, \tag{1.9}$$

e

$$T_2^{x_2}(x_1) = T_2(x_1, x_2),$$

para cada $x_2 \in c_0$. Observe que

$$\|T_2\| = \sup\left\{\|T_2^{x_2}\| : \|x_2\|_{c_0} = 1\right\}. \tag{1.10}$$

Vamos estimar (1.10). Como $(\ell_p)^* = \ell_{\frac{p}{p-1}}$, segue que

$$\begin{aligned}
\|T_2\| &= \sup\left\{\|T_2^{x_2}\| : \|x_2\|_{c_0} = 1\right\} \qquad (1.11)\\
&= \sup\left\{\sup_{x_1 \in B_{\ell_p}} \left|T_2^{x_2}(x_1)\right| : \|x_2\|_{c_0} = 1\right\}\\
&= \sup\left\{\sup_{x_1 \in B_{\ell_p}} \left|\left(x_2^1 + x_2^2\right) x_1^1 + \left(x_2^1 - x_2^2\right) x_1^2\right| : \|x_2\|_{c_0} = 1\right\}\\
&= \sup\left\{\left\|\left(x_2^1 + x_2^2, x_2^1 - x_2^2, 0, 0, \dots\right)\right\|_{\frac{p}{p-1}} : \|x_2\|_{c_0} = 1\right\}\\
&= \sup\left\{\left(|1+x|^{\frac{p}{p-1}} + |1-x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{\frac{p}{p-1}}} : x \in [-1, 1]\right\} = 2.
\end{aligned}$$

Para verificar a última igualdade, observe primeiro que

$$\sup\left\{\left(|1+x|^1 + |1-x|^1\right)^1 : x \in [-1, 1]\right\} = 2,$$

e pela inclusão $\ell_1 \subset \ell_{\frac{p}{p-1}}$, para $p \in [2, \infty)$, temos $\|\cdot\|_{\frac{p}{p-1}} \leq \|\cdot\|_1$. Portanto, para $p \in [2, \infty)$, temos

$$\begin{aligned}
&\sup\left\{\left(|1+x|^{\frac{p}{p-1}} + |1-x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} : x \in [-1, 1]\right\}\\
&\qquad \leq \sup\left\{\left(|1+x|^1 + |1-x|^1\right)^1 : x \in [-1, 1]\right\}\\
&\qquad = 2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, é óbvio que

$$\sup\left\{\left(|1+x|^{\frac{p}{p-1}}+|1-x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} : x\in[-1,1]\right\} \geq \left(|1+1|^{\frac{p}{p-1}}+|1-1|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = 2.$$

Para mostrar que $\left(2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)^{m-1}$ é a melhor constante possível satisfazendo (1.8), considere

$$\begin{aligned} S_p &: \ell_p \to \ell_p \\ S_p(x_1) &= \left(x_1^2, x_1^3, \dots\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_0 &: c_0 \to c_0 \\ S_0(x_2) &= \left(x_2^2, x_2^3, \dots\right), \end{aligned}$$

as aplicações shift à esquerda (e por S_p^r e S_0^r denote $S_p\circ\cdots\circ S_p$ e $S_0\circ\cdots\circ S_0$ compostas r vezes, respectivamente). Seja $T_2:\ell_p\times c_0\to\mathbb{R}$ como em (1.9) e defina $T_3:\ell_p\times c_0\times c_0\to\mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} T_3(x_1,x_2,x_3) &= \left(x_3^1+x_3^2\right)\left[\left(x_2^1+x_2^2\right)x_1^1+\left(x_2^1-x_2^2\right)x_1^2\right] \\ &\quad + \left(x_3^1-x_3^2\right)\left[\left(x_2^3+x_2^4\right)x_1^3+\left(x_2^3-x_2^4\right)x_1^4\right] \\ &= \left(x_3^1+x_3^2\right)T_2(x_1,x_2)+\left(x_3^1-x_3^2\right)T_2\left(S_p^2(x_1),S_0^2(x_2)\right), \end{aligned}$$

$T_4:\ell_p\times c_0\times c_0\times c_0\to\mathbb{R}$ por

$$T_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(x_4^1+x_4^2\right)T_3(x_1,x_2,x_3)+\left(x_4^1-x_4^2\right)T_3\left(S_p^4(x_1),S_0^4(x_2),S_0^2(x_3)\right).$$

Indutivamente, para todo $m\geq 3$, o operador m-linear $T_m:\ell_p\times c_0\times\cdots\times c_0\to\mathbb{R}$ é definido por

$$\begin{aligned} T_m(x_1,\dots,x_m) =& (x_m^1+x_m^2)T_{m-1}(x_1,\dots,x_{m-1}) \\ &+ (x_m^1-x_m^2)T_{m-1}(S_p^{2^{m-2}}(x_1),S_0^{2^{m-2}}(x_2),S_0^{2^{m-3}}(x_3),\dots,S_0^2(x_{m-1})). \end{aligned}$$

Por indução em $m\geq 2$ devemos mostrar que

$$\|T_m\| = 2^{m-1}.$$

O caso $m = 2$ já está feito em (1.11). Suponhamos que $\|T_{m-1}\| = 2^{(m-1)-1}$. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
|T_m(x_1,\ldots,x_m)| \leq\ & |x_m^1 + x_m^2||T_{m-1}(x_1,\ldots,x_{m-1})| + |x_m^1 - x_m^2| \\
& \times |T_{m-1}(S_p^{2^{m-2}}(x_1), S_0^{2^{m-2}}(x_2), S_0^{2^{m-3}}(x_3)..., S_0^2(x_{m-1}))| \\
\leq\ & 2^{m-2}[|x_m^1 + x_m^2|\|x_1\|_{\ell_p}\cdots\|x_{m-1}\|_{c_0} + |x_m^1 - x_m^2| \\
& \times \|S_p^{2^{m-2}}(x_1)\|_{\ell_p}\|S_0^{2^{m-2}}(x_2)\|_{c_0}\|S_0^{2^{m-3}}(x_3)\|_{c_0}\cdots\|S_0^2(x_{m-1})\|_{c_0}] \\
\leq\ & 2^{m-2}[|x_m^1 + x_m^2| + |x_m^1 - x_m^2|]\|x_1\|_{\ell_p}\cdots\|x_{m-1}\|_{c_0} \\
=\ & 2^{m-1}\|x_1\|_{\ell_p}\cdots\|x_{m-1}\|_{c_0}\max\{|x_m^1|, |x_m^2|\} \\
\leq\ & 2^{m-1}\|x_1\|_{\ell_p}\cdots\|x_m\|_{c_0}.
\end{aligned}$$

Temos assim $\|T_m\| \leq 2^{m-1}$. Agora considere $a_m = e_1 + e_2$ e note que

$$\begin{aligned}
\|T_m\| &\geq \sup\left\{|T_m(x_1,\ldots,x_{m-1},a_m)| : x_1 \in B_{\ell_p}, x_2 \in B_{c_0},\ldots,x_{m-1} \in B_{c_0}\right\} \\
&= 2\|T_{m-1}\| = 2^{m-1}
\end{aligned}$$

e, portanto, $\|T_m\| = 2^{m-1}$.

Como

$$\frac{\left(\sum_{i_1}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m}|T_m(e_{i_1,\ldots,}e_{i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\|T_m\|} = \left(2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)^{m-1},$$

concluímos a prova.

1.3 Estimativas para $C_{p,\infty}$

O mesmo argumento usado na prova do Teorema 1.2.1 mostra que para $2 < p < \frac{p_0}{p_0-1} \approx 2.18006$ as constantes ótimas também têm crescimento exponencial. Curiosamente, para $p = 2$ a situação é bem diferente e as constantes ótimas são iguais a 1. De fato, note que a segunda parte da prova (a prova de otimização) é válida para todo $p \geq 2$. Além disso, a primeira parte da prova nos dá a estimativa $C_{(m),p} \leq \left(A_{\frac{p}{p-1}}^{-1}\right)^{m-1}$. Temos assim, para $2 \leq p < \frac{p_0}{p_0-1} \approx 2.18006$, a seguinte desigualdade

$$\left(2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)^{m-1} \leq C_{(m),p} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2p-1}{2p-2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1-p}{p}}\right)^{m-1}.$$

Para $p \geq 2$, sabemos que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|T(e_j,e_k)|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\,\|T\| \tag{1.12}$$

com $\lambda = \frac{p}{p-1}$, para toda forma bilinear contínua $T : \ell_p \times c_0 \to \mathbb{R}$ (veja, por exemplo, [4, Theorem 1.2 e Remark 5.1]). Ao interpolar (1.12) e o resultado do Teorema 1.2.1 para $m = 2$, no sentido de [4], ou usando a desigualdade de Hölder para somas mistas (veja [22] ou Seção 2.2) obtemos, para $p \geq \frac{p_0}{p_0-1} \approx 2.18006$,

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty}|T(e_j,e_k)|^{\frac{4p}{3p-2}}\right)^{\frac{3p-2}{4p}} \leq \left(\sqrt{2}\,\|T\|\right)^{1/2}\left(2^{\frac{p-2}{2p}}\,\|T\|\right)^{1/2} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\,\|T\|\,.$$

Usando a abordagem da seção anterior, obtemos a seguinte estimativa inferior

$$C_{p,\infty} \geq \frac{\left(\sum\limits_{j,k=1}^{2}|T_2(e_j,e_k)|^{\frac{4p}{3p-2}}\right)^{\frac{3p-2}{4p}}}{\|T_2\|} = \frac{4^{\frac{3p-2}{4p}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

e assim

$$2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leq C_{p,\infty} \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}.$$

Quando $p = \infty$ recuperamos a estimativa ótima da famosa desigualdade 4/3 de Littlewood que pode ser encontrado em [45].

Observação 1.3.1 *Recentemente, D. Núñez-Alarcón e D. Serrano (veja [67]) provaram que a constante ótima* $C_{(m),p} = \left(2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)^{m-1}$ *também é válida para* $p \geq 2$.

Capítulo 2

Expoentes vs constantes em desigualdades tipo Hardy-Littlewood

Para um inteiro $m \geq 2, n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [1, +\infty]^m$, o seguinte problema tem sido investigado desde os anos 30:

Quais os melhores expoentes $s, s_1, \ldots, s_m$ para os quais existem constantes $C^{\mathbb{K}}_{s,\mathbf{p}}$, $C^{\mathbb{K}}_{s_1,\ldots,s_m,\mathbf{p}}$ (ótimas) que satisfazem as seguintes desigualdades

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left| T\left(e_i, \ldots, e_i\right) \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C^{\mathbb{K}}_{s,\mathbf{p}} \|T\| \tag{2.1}$$

ou

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \left| T\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\right) \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C^{\mathbb{K}}_{s,\mathbf{p}} \|T\| \tag{2.2}$$

ou

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{n} \left| T\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\right) \right|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \cdots \right)^{\frac{s_1}{s_2}} \right)^{\frac{1}{s_1}} \leq C^{\mathbb{K}}_{s_1,\ldots,s_m,\mathbf{p}} \|T\|, \tag{2.3}$$

para toda forma m-linear contínua $T : X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m} \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n? Lembre que $X_p = \ell_p$, para $1 \leq p < \infty$, e $X_\infty = c_0$.

Já sabemos, diante do que foi apresentado no capítulo anterior, que as escolhas de $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| := \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}$ influenciam diretamente nos valores dos expoentes $s, s_1, \ldots, s_m$, que por sua vez, influenciam nas escolhas das constantes que compõem as desigualdades (2.1), (2.2) e (2.3). Uma vez apresentados os melhores expoentes $s, s_1, \ldots, s_m$, é óbvio que perturbá-los, no sentido de considerar expoentes menores ou maiores, criará uma dependência em n. Neste capítulo, para algumas desigualdades clássicas, não só exibiremos tal dependência, como, em alguns casos, comprovaremos ser a melhor possível. Parte dos nossos principais resultados foram publicados em [65].

2.1 Expoentes ótimos para desigualdades tipo Hardy-Littlewood

A seguir apresentaremos as respostas até aqui obtidas para a pergunta acima. Como vimos no capítulo anterior, alguns desses resultados foram generalizados anos depois de suas publicações.

- Para desigualdades como em (2.1), temos:

Teorema 2.1.1 (Aron e Globevnik ([15], 1989)) *Para cada forma m-linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |T(e_i, \ldots, e_i)| \leq \|T\| . \tag{2.4}$$

Teorema 2.1.2 (Zalduendo ([81], 1993)) *Seja $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$. Para cada forma m-linear contínua $T : X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m} \to \mathbb{K}$, segue que*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |T(e_i, \ldots, e_i)|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}} \right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq \|T\|. \tag{2.5}$$

- Para desigualdades como em (2.2), temos os seguintes resultados:

Teorema 2.1.3 (Desigualdade de Bohnenblust–Hille ([28], 1931)) *Existe uma constante (ótima) $C^{\mathbb{K}}_{m,\infty} \geq 1$ tal que, para cada forma m–linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$,*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C^{\mathbb{K}}_{m,\infty} \|T\| . \tag{2.6}$$

Além disso, o expoente $\dfrac{2m}{m+1}$ é ótimo.

Teorema 2.1.4 (Hardy–Littlewood/Praciano-Pereira [49, 74] (1934 e 1981)) *Seja* $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$. *Existe uma constante (ótima)* $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ *tal que, para cada forma* m*-linear contínua* $T : X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m} \to \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{\frac{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}{2m}} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|. \qquad (2.7)$$

Além disso, o expoente $\dfrac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}$ *é ótimo.*

Teorema 2.1.5 (Hardy-Littlewood/Dimant-Sevilla-Peris [49, 43](1934/2013)) *Seja* $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$. *Existe uma constante (ótima)* $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ *tal que*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|, \qquad (2.8)$$

para toda forma m*-linear contínua* $T : X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m} \to \mathbb{K}$. *Além disso, o expoente* $\left(1 - \left|\dfrac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}$ *é ótimo.*

- Podemos ainda considerar os casos de múltiplos expoentes como nas somas em (2.3). As próximas desigualdades são extensões dos resultados vistos até aqui.

A desigualdade de Hardy–Littlewood para formas m-lineares em espaços ℓ_p, com expoentes mistos e satisfazendo $\left|\dfrac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \dfrac{1}{2}$, foi provada em [4, Theorem 1.2] (veja também [4, p. 3729] para mais detalhes) e pode ser apresentada da seguinte forma:

Teorema 2.1.6 (Desigualdade de Hardy–Littlewood generalizada [4]) *Sejam* $m \geq 2$ *um inteiro positivo,* $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [1, +\infty]^m$ *tais que* $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$ *e* $\mathbf{s} := (s_1, \ldots, s_m) \in \left[\left(1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}, 2\right]^m$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) Existe $D_{m,\mathbf{s},\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ *satisfazendo*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n} |A(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{s_m}\right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}}\cdots\right)^{\frac{s_1}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_1}} \leq D_{m,\mathbf{s},\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|A\|, \qquad (2.9)$$

para toda aplicação m*-linear* $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo* n.
(b) $\dfrac{1}{s_1} + \cdots + \dfrac{1}{s_m} \leq \dfrac{m+1}{2} - \left|\dfrac{1}{\mathbf{p}}\right|$.

Em [2], esses resultados citados acima foram unificados com sucesso por apenas um resultado, como veremos a seguir.

Sejam $n_1, \ldots, n_k$ inteiros positivos tais que $n_1 + \cdots + n_k = m$. Denote por $\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right)$ a m-upla $(e_{i_1}, \overset{n_1 \text{ vezes}}{\ldots}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, \overset{n_k \text{ vezes}}{\ldots}, e_{i_k})$.

Teorema 2.1.7 (Albuquerque, Araújo, Núñez-Alarcón, Pellegrino, Rueda [2]) *Sejam $m \geq k \geq 1$ e $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ tais que $n_1 + \cdots + n_k = m$. Assuma que*

$$\mathbf{p} := \left(p_1^{(1)}, \overset{n_1 \, vezes}{\ldots}, p_{n_1}^{(1)}, \ldots, p_1^{(k)}, \overset{n_k \, vezes}{\ldots}, p_{n_k}^{(k)}\right) \in [1, \infty]^m$$

é tal que $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$. Seja r_i dado por $\frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_1^{(i)}} + \cdots + \frac{1}{p_{n_i}^{(i)}}$, $i = 1, \ldots, k$.

(a) Se $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$ e $\mathbf{q} := (q_1, \ldots, q_k) \in \left[\left(1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)^{-1}, 2\right]^k$ então, para cada forma m–linear contínua $T : \left(\times_{1 \leq i \leq n_1} X_{p_i^{(1)}}\right) \times \cdots \times \left(\times_{1 \leq i \leq n_k} X_{p_i^{(k)}}\right) \to \mathbb{K}$, existe uma constante $C_{k,(r_1,\ldots,r_k),\mathbf{q}}^{\mathbb{K}}$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\ldots\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}\left|T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right)\right|^{q_k}\right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \ldots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C_{k,(r_1,\ldots,r_k),\mathbf{q}}^{\mathbb{K}} \|T\| \quad (2.10)$$

se, e somente se, $\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| \leq \frac{k+1}{2} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|$. Além disso, os expoentes acima são ótimos.

(b) Se $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$ então, para cada forma m–linear contínua $T : \left(\times_{1 \leq i \leq n_1} X_{p_i^{(1)}}\right) \times \cdots \times \left(\times_{1 \leq i \leq n_k} X_{p_i^{(k)}}\right) \to \mathbb{K}$, existe uma constante $D_{k,(r_1,\ldots,r_k)}^{\mathbb{K}}$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty}\left|T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq D_{k,(r_1,\ldots,r_k)}^{\mathbb{K}} \|T\|. \quad (2.11)$$

Além disso, o expoente é ótimo.

Os resultados que virão a seguir neste capítulo evidenciam o recente protagonismo do teorema acima na teoria de operadores múltiplo somantes. Além disso, no Capítulo 3, ele reaparece como ferramenta primordial quando respondemos, de forma definitiva, a um problema considerado por Carando, Defant e Sevilla-Peris em [37].

Considerando $k = m$ e $p_1 = \cdots = p_m = +\infty$ acima recuperamos a desigualdade de Bohnenblust–Hille generalizada, Teorema 1.1.4 (veja [4]), que foi estendida quando em [77] foram tomados $q_1, \ldots, q_m \in (0, +\infty)$. Foi provado o seguinte:

Teorema 2.1.8 (Santos, Velanga [77]) *Sejam $1 \leq k \leq m, (q_1, \ldots, q_k) \in (0, +\infty)^k$ e $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ inteiros positivos tais que $n_1 + \cdots + n_k = m$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) Existe uma constante $C^{\mathbb{K}}_{k,q_1 \ldots q_k} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{n} \left| T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k} \right) \right|^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq D^{\mathbb{K}}_{k,q_1 \ldots q_k} \|T\|, \tag{2.12}$$

para toda forma m-linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$.
(b)

$$\sum_{j \in A} \frac{1}{q_j} \leq \frac{card(A) + 1}{2}, \quad \textit{para todo } A \subset \{1, \ldots, k\}.$$

Os Teoremas 2.1.1 a 2.1.8 compõem o que chamamos nesse texto de desigualdades clássicas.

Como já foi observado, a otimalidade dos expoentes nessas desigualdades significa que nenhuma constante independente de n pode ser encontrada, para toda forma m-linear contínua, quando algum expoente menor do que o indicado é considerado. Nosso objetivo é mostrar que, para certos expoentes menores que os ótimos, o valor da constante que aparece à direita nas desigualdades supracitadas apresentam uma dependência explícita de potências de n. A seguir, não só exibiremos tal dependência como mostraremos ser a melhor possível, isto é, encontraremos os expoentes ótimos das potências de n.

Uma investigação prévia dessa nova abordagem foi feita em [34, Corollary 5.20]. Contudo, foi em [9] que este assunto foi pela primeira vez fortemente explorado; nele, desigualdades do tipo Hardy-Littlewood foram consideradas e foi este artigo que desencadeou o nosso estudo. O principal resultado de [9] é o seguinte:

Teorema 2.1.9 (Araújo, Pellegrino [9]) *Seja $m \geq 2$ um inteiro positivo.*

(a) Se $(r, p) \in ([1, 2] \times [2, 2m)) \cup ([1, +\infty) \times [2m, +\infty])$, então existe uma constante $D^{\mathbb{K}}_{m,r,p} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1, \ldots, i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq D^{\mathbb{K}}_{m,r,p} n^{\max\{\frac{2mr+2mp-mpr-pr}{2pr}, 0\}} \|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente $\max\{(2mr + 2mp - mpr - pr)/2pr, 0\}$ *é ótimo.*

(b) Se $(r,p) \in [2,+\infty) \times (m,2m]$*, então existe uma constante* $D_{m,r,p}^{\mathbb{K}} \geq 1$ *tal que*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}} n^{\max\{\frac{p+mr-rp}{pr},0\}} \|T\|,$$

para toda forma m*-linear contínua* $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo* n*. Além disso, o expoente* $\max\{(p+mr-rp)/pr, 0\}$ *é ótimo.*

Note que esse teorema recupera a famosa desigualdade de Bohnenblust–Hille ([28]) quando $r = \frac{2m}{m+1}$ e $p = +\infty$. Quando $r = \frac{2mp}{mp+p-2m}$ e $p \geq 2m$, é recuperada a desigualdade de Hardy–Littlewood/Praciano-Pereira ([49, 74]). Para $r = \frac{p}{p-m}$ e $m < p < 2m$ temos a desigualdade de Hardy–Littlewood/Dimant–Sevilla-Peris ([49, 43]).

O Teorema 2.1.9 também fundamentou a definição de Índice de somabilidade introduzido por Maia, Pellegrino e Santos em [56]: *o* $m-$*índice multilinear de* $(p,q)-$*somabilidade do par de espaços de Banach* $(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$ *é definido como*

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1,\ldots,E_m;F) = \inf s_{m,p,q}$$

tal que, para todo $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$*, existe uma constante* $C > 0$ *(não dependendo de* n*) satisfazendo*

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \|T(x_{k_1}^{(1)},\ldots,x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{s_{m,p,q}} \prod_{i=1}^{m} \| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \|_{w,q},$$

para todo inteiro positivo n *e todo* $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$*, com* $1 \leq k_i \leq n$ *e* $1 \leq i \leq m$*.*

Como se pode constatar em [56], esse índice está bem definido, ou seja, sempre existe um valor de $s_{m,p,q}$, finito, para o qual a desigualdade é satisfeita. Além disso, encontraram-se valores “ótimos” de $s_{m,p,q}$ para certos pares de espaços. Veja que o número $s_{m,p,q}$ funciona como um tipo de medida de não somabilidade (veja o apêndice B.1): quando $s_{m,p,q} = 0$ o operador é múltiplo (p,q) -somante e quando $s_{m,p,q}$ não pode ser escolhido como sendo zero, o operador não é múltiplo (p,q)-somante e os valores “ótimos” de $s_{m,p,q}$ podem ser naturalmente identificados como um índice de (não) somabilidade. Assim, uma vez definido o índice para pares de espaços, vemos que em certo sentido ele mede quão distantes estão os espaços $\Pi_{(p,q)}^{mult}(E_1,\ldots,E_m;F)$ e $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$. Quando esses espaços coincidem temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1,\ldots,E_m;F) = 0.$$

Nessa mesma linha de investigação destacamos também os resultados de Galicer, Mansilla e Muro (veja [46]).

Na próxima seção relembramos um resultado folclórico em Análise Funcional, a desigualdade de Hölder. Como veremos mais adiante, ela será responsável por apresentar a maioria dos candidatos a expoentes ótimos das potências de n.

2.2 A desigualdade de Hölder para somas mistas

Várias extensões e generalizações dessa famosa desigualdade surgiram ao longo do tempo. Uma dessas extensões é a desigualdade de Hölder para espaços L_p mistos. Esta desigualdade parece ter sido provada pela primeira vez em 1961, por A. Benedek e R. Panzone [22], embora suas raízes pareçam voltar ao trabalho de W.A.J. Luxemburg [54]. Mais recentemente, essa desigualdade foi redescoberta pela Análise Funcional de maneira mais simplificada através de um resultado interpolativo (veja [4, 5]).

De agora em diante, $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m$ é um índice múltiplo (multi-índice). Para matrizes escalares $a^{(k)} = \left(a_{\mathbf{i}}^{(k)}\right)_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}$, $k = 1, \ldots, N$, consideramos o produto coordenado

$$a^{(1)} \cdot \ldots \cdot a^{(N)} := \left(a_{\mathbf{i}}^{(1)} \cdots a_{\mathbf{i}}^{(N)}\right)_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}.$$

A desigualdade de Hölder para somas mistas é dada da seguinte forma (veja também [1, Theorem 2.49]):

Teorema 2.2.1 (Desigualdade de Hölder para espaços ℓ_p mistos, [54, 22]) *Sejam $r_j, q_j(k) \in (0, +\infty]$, para $j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, N$, tais que*

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{q_j(1)} + \cdots + \frac{1}{q_j(N)}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

e seja $a^{(k)} = \left(a_{\mathbf{i}}^{(k)}\right)_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}$ uma matriz escalar, para todo $k = 1, \ldots, N$. Então

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|a_{\mathbf{i}}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\mathbf{i}}^{(N)}|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq \prod_{k=1}^{N}\left[\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|a_{\mathbf{i}}^{(k)}|^{q_m(k)}\right)^{\frac{q_{m-1}(k)}{q_m(k)}}\cdots\right)^{\frac{q_1(k)}{q_2(k)}}\right)^{\frac{1}{q_1(k)}}\right].$$

Diante dessa generalização, podemos ressaltar que o item (a) do Teorema 2.1.9 é válido para uma situação mais geral: uma vez que a desigualdade de Hölder ainda é válida para expoentes entre 0 e 1, podemos ter $r \in (0,1)$. Também, seguindo as linhas de [9], podemos considerar uma versão com diferentes valores de p. Mais precisamente, o item (a) pode ser lido da seguinte maneira: seja $m \geq 2$ um inteiro positivo e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$. Se $(r, \mathbf{p}) \in (0,2] \times [2,2m)^m \cup (0,+\infty) \times [2m,+\infty]^m$, então existe uma constante $D^{\mathbb{K}}_{m,r,\mathbf{p}} \geq 1$ (não dependendo de n) tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq D^{\mathbb{K}}_{m,r,\mathbf{p}} \cdot n^{\max\left\{\frac{m}{r} - \frac{m+1}{2} + \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|, 0\right\}} \|T\|,$$

para toda forma m-linear $T : \ell^n_{p_1} \times \cdots \times \ell^n_{p_m} \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente $\max\left\{\frac{m}{r} - \frac{m+1}{2} + \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|, 0\right\}$ é ótimo. Nessa situação, como esperado, o expoente vai para $+\infty$ quando $r \to 0$.

2.3 A dependência em n: primeiros resultados

Nossa primeira abordagem nessa linha de estudo foi manipular o expoente na desigualdade de Zalduendo (Teorema 2.1.2). Nesta parte faremos uso da desigualdade de Hölder em uma forma mais simples do que a apresentada acima.

Considerando o caso em que $p_1 = \cdots = p_m = p$ temos ([81, Corollary 1]) que, se $m \geq 2$ é um inteiro positivo e $p > m$, então

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^{\frac{p}{p-m}} \right)^{\frac{p-m}{p}} \leq \|T\|, \tag{2.13}$$

para toda forma m-linear $T : \ell^n_p \times \cdots \times \ell^n_p \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n, e, além disso, o expoente $\frac{p}{p-m}$ é ótimo. Veremos agora o que acontece com o lado direito da desigualdade acima nos casos em que $1 < p \leq m$ e $p > m$ mas com expoentes $s \neq \frac{p}{p-m}$.

A seguir apresentamos nosso primeiro resultado que, exceto no caso $1 < p \leq 2$, é ótimo.

Teorema 2.3.1 *Seja $m \geq 2$ um inteiro positivo.*

(a) Se $s \geq 1$ e $p > m$, então

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^{s} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \|T\| \, n^{\max\left\{\frac{m}{p} + \frac{1}{s} - 1, 0\right\}}, \tag{2.14}$$

para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo* n*. Além disso, o expoente* $\max\left\{\frac{m}{p}+\frac{1}{s}-1, 0\right\}$ *é ótimo.*

(b) Se $s \geq 1$ *e* $2 \leq p \leq m$*, então*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \|T\|,$$

para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo* n*. Além disso, o resultado é ótimo.*

(c) Se $s \geq \frac{2}{m}$ *e* $1 < p < 2$*, então*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \|T\| \, n^{\frac{2ms+2p-spm}{2sp}},$$

para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo* n*.*

Demonstração. (a) Inicialmente, suponha que $s < \frac{p}{p-m}$. Seja x tal que

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p/(p-m)} + \frac{1}{x}.$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^s\right)^{\frac{1}{s}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |1|^x\right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \cdot n^{\frac{1}{x}} \\ &\leq \|T\| \cdot n^{\frac{1}{s}-\frac{p-m}{p}} \\ &= \|T\| \cdot n^{\max\left\{\frac{m}{p}+\frac{1}{s}-1,0\right\}}.\end{aligned}$$

Agora suponha que $s \geq \frac{p}{p-m}$. Da inclusão canônica para espaços ℓ_p e invocando a estimativa de Zalduendo (2.13), temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^s\right)^{\frac{1}{s}} &\leq \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \\ &\leq \|T\| \\ &= \|T\| \cdot n^{\max\left\{\frac{m}{p}+\frac{1}{s}-1,0\right\}}.\end{aligned}$$

Agora provaremos a otimalidade. A otimalidade do caso $s \geq \frac{p}{p-m}$ é óbvia. Precisamos considerar o caso $s < \frac{p}{p-m}$. Tome $A : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ (tomamos a ideia a seguir emprestado de [43]) dada por

$$A(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(1)} \cdots x_j^{(m)}.$$

Da desigualdade de Hölder obtemos

$$\|A\| \leq n^{1-\frac{m}{p}}$$

e então, se a desigualdade (2.14) fosse válida com n^t, teríamos

$$n^{\frac{1}{s}} \leq C n^{1-\frac{m}{p}} n^t$$

e, portanto,

$$t \geq \frac{m}{p} + \frac{1}{s} - 1.$$

(b) Para $p \geq 2$, como ℓ_p tem cotipo p com constante de cotipo igual a 1 (o fato de a constante do cotipo ser 1 pode ser encontrado em [80, Lemma 2.3] ou [71, pág. 29]), sabemos de [30] que toda forma m-linear contínua $T : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \to \mathbb{K}$ é absolutamente $\left(\frac{p}{m}; 1, \ldots, 1\right)$-somante e a norma somante de T coincide com $\|T\|$. Do Teorema de inclusão para operadores multilineares absolutamente somantes (veja [58, Proposition 3.5] ou [71, Proposición 3.3]) essas formas também são absolutamente $(1; p^*, \ldots, p^*)$-somantes e, *a fortiori*, absolutamente $(s; p^*, \ldots, p^*)$-somantes independentemente do $s \geq 1$. Então, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^s\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\quad \leq \|T\| \left(\sup_{\varphi \in B_{(\ell_p^n)^*}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|^{p^*}\right)^{\frac{m}{p^*}} \\
&\quad = \|T\|.
\end{aligned}$$

A otimalidade é imediata, pois não podemos ter nada melhor do que n^0.

(c) Para $1 < p < 2$, como ℓ_p tem cotipo 2 com constante do cotipo igual a 1 (novamente, a informação de que a constante do cotipo é 1 pode ser visto em [80, Lemma 2.3] ou [71, pág. 29]), concluímos de [30] que toda forma m-linear contínua $T : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \to \mathbb{K}$ é absolutamente $\left(\frac{2}{m}; 1, \ldots, 1\right)$-somante e, além disso, a respectiva norma absolutamente somante coincide com a norma do supremo. Do Teorema de inclusão (veja [58, Proposition 3.5] ou [71, Proposición 3.3]) para operadores multilineares absolutamente somantes, essas formas também são absolutamente $\left(s; \frac{2sm}{sm+2}, \ldots, \frac{2sm}{sm+2}\right)$-somantes. Como $p < 2$, é fácil verificar que

$$\frac{2sm}{sm+2} < p^*, \tag{2.15}$$

e usando (2.15) concluímos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, ..., e_j)|^s\right)^{\frac{1}{s}} &\leq \|T\| \left[\left(\sup_{\varphi \in B_{(\ell_p^n)^*}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|^{\frac{2sm}{sm+2}}\right)^{\frac{sm+2}{2sm}}\right]^m \\
&= \|T\| \left(\sum_{j=1}^{n} \left(n^{\frac{-1}{p^*}}\right)^{\frac{2sm}{sm+2}}\right)^{\frac{sm+2}{2s}} \\
&= \|T\| \left(n \cdot \left(n^{\frac{1}{p}-1}\right)^{\frac{2sm}{sm+2}}\right)^{\frac{sm+2}{2s}} \\
&= \|T\| \, n^{\frac{sm+2}{2s} + \frac{m}{p} - m} \\
&= \|T\| \, n^{\frac{spm+2p+2ms-2spm}{2sp}} \\
&= \|T\| \, n^{\frac{2ms+2p-spm}{2sp}}.
\end{aligned}$$

Com isso completamos a prova do resultado. ■

Com uma técnica completamente diferente, baseada no trabalho de A. A. Arias e J. D. Farmer (veja [13]), apresentamos a seguinte generalização do resultado acima.

Teorema 2.3.2 *Sejam m, n inteiros positivos, $p_1, \ldots, p_m \geq 1$ e $s > 0$. Seja $C := C(m, n, p_1, \ldots, p_m, s)$ a melhor constante que satisfaz*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^s\right)^{1/s} \leq C \, \|T\|,$$

para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$. O valor de C é exatamente

$$\begin{cases} (a) \quad n^{1/s} & se \ \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1, \\ (b) \quad n^{\max\left\{\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{s} - 1, 0\right\}} & se \ \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \leq 1. \end{cases}$$

A técnica mencionada acima é a mesma usada na prova do resultado da próxima seção. Por isso, omitiremos, por enquanto, a demonstração do Teorema 2.3.2, mas a retomaremos ao final da próxima seção.

2.4 Para desigualdades com repetições nos índices da soma

Já citado acima, o Teorema 2.1.7 (veja [2]) insere uma abordagem inovadora na teoria de operadores múltiplo somantes ao apresentar uma versão unificada das desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood, por considerar repetições nos índices da soma. Mais precisamente, os índices repetidos foram agrupados e o número de grupos (blocos) determinou, por meio de uma ferramenta tensorial, um novo "grau" de linearidade das aplicações. Esse novo resultado também engloba as desigualdades de Aron–Globevnik e Zalduendo que apresentamos anteriormente.

Fazendo $p_1 = \cdots = p_m = p$, o Teorema 2.1.7 afirma que existe uma constante $M(k, m, p, \mathbb{K}) \geq 1$ tal que, para toda forma m–linear contínua $T : X_p \times \cdots \times X_p \to \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} \left| T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right) \right|^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \leq M(k, m, p, \mathbb{K}) \|T\|, \tag{2.16}$$

onde $\rho = \frac{p}{p-m}$ para $m < p \leq 2m$, e $\rho = \frac{2kp}{kp+p-2m}$ para $p \geq 2m$. Em ambos os casos, o expoente ρ é ótimo.

Nessa seção investigaremos o que acontece com a constante quando consideramos expoentes menores do que os ótimos na desigualdade (2.16).

O resultado principal desta seção é o seguinte:

Teorema 2.4.1 *Sejam m, k inteiros positivos, $m \geq k$, e sejam $n_1, \ldots, n_k$ inteiros positivos tais que $n_1 + \cdots + n_k = m$.*

(a) Se $(r, p) \in (0, \infty) \times [2m, \infty]$, então existe uma constante $D_{m,r,p,k}^{\mathbb{K}} \geq 1$ (não dependendo de n) tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left| T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right) \right|^{r} \right)^{\frac{1}{r}} \leq D_{m,r,p,k}^{\mathbb{K}} \cdot n^{\max\left\{\frac{2kp-kpr-pr+2rm}{2pr}, 0\right\}} \|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : X_p \times \cdots \times X_p \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente

$$\max\left\{\frac{2kp - kpr - pr + 2rm}{2pr}, 0\right\}$$

é ótimo.

(b) Se $(r,p) \in [2,\infty) \times (m,2m]$, então existe uma constante $D^{\mathbb{K}}_{m,r,p,k} \geq 1$ (não dependendo de n) tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left| T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq D^{\mathbb{K}}_{m,r,p,k} \cdot n^{\max\left\{\frac{p-rp+rm}{pr}, 0\right\}} \|T\|,$$

para toda forma m-linear contínua $T : X_p \times \cdots \times X_p \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente

$$\max\left\{ \frac{p-rp+rm}{pr}, 0 \right\}$$

é ótimo.

A seguir, apresentamos a ferramenta tensorial que tomamos emprestado de [2].

2.4.1 Uma ferramenta tensorial

Antes de apresentar a demonstração do principal resultado deste capítulo, precisamos fixar algumas notações.

O produto $\hat{\otimes}^{\pi}_{m} X_p = X_p \hat{\otimes}^{\pi} \cdots \hat{\otimes}^{\pi} X_p$ denota o produto tensorial de X_p com a norma projetiva[2]. O tensor $x \otimes \cdots \otimes x$ será denotado por $\otimes_m x$.

Lembremos que para $k \leq m$, os inteiros positivos $n_1, \ldots, n_k$ são tais que $n_1 + \cdots + n_k = m$. Sendo assim, para cada $j = 1, \ldots, k$, definimos r_j tal que

$$\frac{1}{r_j} = \frac{n_j}{p},$$

e note que

$$\frac{1}{r_j} < 1,$$

se $p > m$.

Seja $D_{r_j} \subset \hat{\otimes}^{\pi}_{n_j} X_p$ o espaço vetorial gerado pelos tensores $\otimes_{n_j} e_i, e_i \in X_p$, e $\overline{D_{r_j}}$ o seu fecho. Considere os seguintes isomorfismos isométricos (veja [13] e [2, Lemma 2.1])

$$u_j : X_{r_j} \to \overline{D_{r_j}}$$

definidos por

$$u_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes_{n_j} e_i,$$

para todo $j = 1, \ldots, k$.

[2]Veja a seção de notação e terminologia

Para qualquer forma m-linear contínua $T : X_p \times \cdots \times X_p \to \mathbb{K}$, considere suas k-linearizações $\widehat{T} : \otimes_{n_1}^{\pi} X_p \times \cdots \times \otimes_{n_k}^{\pi} X_p$, isto é, $\widehat{T}$ é a única forma k-linear tal que

$$\widehat{T}(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_{n_1}^1, \ldots, x_1^k \otimes \cdots \otimes x_{n_k}^k) = T(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, \ldots, x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k),$$

para todos $x_j^i \in X_p$, $1 \leq j \leq n_i$, $1 \leq i \leq k$ (veja [2, Proposition 2.3]), e seja

$$S : X_{r_1} \times \cdots \times X_{r_k} \to \mathbb{K}$$

definida por

$$S(w_1, \ldots, w_k) := \widehat{T}(u_1(w_1), \ldots, u_k(w_k)).$$

Então, diante do que foi apresentado, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left| T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left| \widehat{T}\left(u_1(e_{i_1}), \ldots, u_k(e_{i_k})\right) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left| S\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Além disso, seguindo as linhas da demonstração do principal resultado de [2] temos $\|S\| \leq \|\widehat{T}\|$, e por [2, Proposition 2.3], $\|S\| \leq \|T\|$.

2.4.2 Demonstração do Teorema 2.4.1

Demonstração de (a). Primeiro, suponhamos que $(r,p) \in \left(0, \frac{2kp}{kp+p-2m}\right] \times [2m, \infty]$. Usando a desigualdade de Hölder e o Teorema 2.1.7 (ou (2.16)) temos

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left| T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left| T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right) \right|^{\frac{2kp}{kp+p-2m}} \right)^{\frac{kp+p-2m}{2kp}} \cdot \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} |1|^{\frac{2kpr}{2kp-rkp-rp+2mr}} \right)^{\frac{2kp-rkp-rp+2mr}{2kpr}} \\ &= \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left| T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right) \right|^{\frac{2kp}{kp+p-2m}} \right)^{\frac{kp+p-2m}{2kp}} \cdot \left(n^k\right)^{\frac{2kp-rkp-rp+2mr}{2kpr}} \\ &\leq M(k,m,p,\mathbb{K}) \left\| T \right\| \cdot \left(n^k\right)^{\frac{2kp-rkp-rp+2mr}{2kpr}} \\ &= M(k,m,p,\mathbb{K}) \|T\| \cdot n^{\frac{2kp-rkp-rp+2mr}{2pr}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $(r,p) \in \left[\frac{2kp}{kp+p-2m}, \infty\right] \times [2m, \infty]$, pela inclusão canônica entre espaços de sequências, temos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\left|T\left(e_{i_1}^{n_1},\ldots,e_{i_k}^{n_k}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty}\left|T\left(e_{i_1}^{n_1},\ldots,e_{i_k}^{n_k}\right)\right|^{\frac{2kp}{kp+p-2m}}\right)^{\frac{kp+p-2m}{2kp}}$$
$$\leq M(k,m,p,\mathbb{K})\,\|T\|$$
$$= M(k,m,p,\mathbb{K})\|T\|\cdot n^{\max\left\{\frac{2kp-rkp-rp+2mr}{2pr},0\right\}}$$

e, como esperado, neste caso o expoente $\max\left\{\frac{2kp-rkp-rp+2mr}{2pr},0\right\}$ é ótimo.

Resta provar a otimalidade do expoente no caso $(r,p)\in\left(0,\frac{2kp}{kp+p-2m}\right]\times[2m,\infty]$. Podemos utilizar a técnica usada na demonstração do principal resultado de [2], que neste texto conhecemos como Teorema 2.1.7.

Suponha que $\lambda\geq 0$ é o menor expoente satisfazendo

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\left|T\left(e_{i_1}^{n_1},\ldots,e_{i_k}^{n_k}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq D_{m,r,p,k}^{\mathbb{K}}\cdot n^{\lambda}\,\|T\| \tag{2.18}$$

para toda forma m-linear contínua $T: X_p\times\cdots\times X_p\to\mathbb{K}$. Vamos mostrar que $\lambda=\max\left\{\frac{2mr+2kp-kpr-pr}{2pr},0\right\}$. Seja $A: X_{r_1}\times\cdots\times X_{r_k}\to\mathbb{K}$ uma forma k-linear contínua. Para cada $i=1,\ldots,k$ sabemos que $\overline{D}_{r_i}$ é completo em $\hat{\otimes}_m^{\pi}X_p$, e considere a projeção canônica $d_{r_i}:\hat{\otimes}_m^{\pi}X_p\to\overline{D}_{r_i}$ (para detalhes veja [13]). Definindo a forma m-linear $T_A: X_p\times\cdots\times X_p\to\mathbb{K}$ por

$$\begin{aligned}&T_A(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(k)},\ldots,x_{n_k}^{(k)})\\&\qquad:=A(u_{r_1}^{-1}\circ d_{r_1}(x_1^{(1)}\otimes\cdots\otimes x_{n_1}^{(1)}),\ldots,u_{r_k}^{-1}\circ d_{r_k}(x_1^{(k)}\otimes\cdots\otimes x_{n_k}^{(k)})),\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}T_A(e_{i_1}^{n_1},\ldots,e_{i_k}^{n_k}) &= A(u_{r_1}^{-1}\circ d_{r_1}(\otimes_{n_1}e_{i_1}),\ldots,u_{r_k}^{-1}\circ d_{r_k}(\otimes_{n_k}e_{i_k}))\\&= A(u_{r_1}^{-1}(\otimes_{n_1}e_{i_1}),\ldots,u_{r_k}^{-1}(\otimes_{n_k}e_{i_k}))\\&= A(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Por (2.19) e (2.18) aplicada a T_A, e usando que $\|T_A\|\leq\|A\|$, obtemos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}|A(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})|^r\right)^{\frac{1}{r}}\leq D_{m,r,p,k}^{\mathbb{K}}\cdot n^{\lambda}\,\|A\|\,.$$

Como A é k-linear, e

$$\frac{1}{r_j}=\frac{n_j}{p}\leq\frac{m}{2m}=\frac{1}{2},$$

da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (para detalhes veja [4, Lemma 6.1] ou apêndice B.2.2), existe uma constante $C_k > 0$ tal que

$$n^{\frac{k}{r}} \leq C_k M^{\mathbb{K}}_{k,r,r_1,\ldots,r_k} n^{\lambda} n^{\frac{k+1}{2} - \left(\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_k}\right)}.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos

$$\lambda \geq \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_k} + \frac{2k - kr - r}{2r}.$$

Como $\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_k} = \frac{m}{p}$, temos

$$\lambda \geq \frac{m}{p} + \frac{2k - kr - r}{2r} = \max\left\{\frac{2mr + 2kp - kpr - pr}{2pr}, 0\right\},$$

provando assim a otimalidade do expoente.

Demonstração de (b). Como

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left|T\left(e^{n_1}_{i_1}, \ldots, e^{n_k}_{i_k}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left|T\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

por [9, Theorem 1.1(b)] (ou Teorema 2.1.9(b)) segue que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left|T\left(e^{n_1}_{i_1}, \ldots, e^{n_k}_{i_k}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq D^{\mathbb{K}}_{m,r,p,k} \cdot n^{\max\left\{\frac{p-rp+rm}{pr}, 0\right\}} \|T\|.$$

Vamos provar a otimalidade do expoente. Se

$$\frac{mr + p - pr}{pr} \leq 0$$

a otimalidade do expoente $\max\{(mr + p - pr)/pr, 0\}$ é imediata. Suponha que a desigualdade aconteça para certo expoente $s \geq 0$; então

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \left|T\left(e^{n_1}_{i_1}, \ldots, e^{n_k}_{i_k}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq D^{\mathbb{K}}_{m,r,p,k} \cdot n^{s} \|T\|. \tag{2.20}$$

Como no caso anterior, para cada forma k-linear contínua $A : X_{r_1} \times \cdots \times X_{r_k} \to \mathbb{K}$, com $r_j = \frac{p}{n_j}$, e para todo $j = 1, \ldots, k$, existe uma forma m-linear contínua

$$T_A : X_p \times \cdots \times X_p \to \mathbb{K}$$

tal que

$$T_A(e^{n_1}_{i_1}, \ldots, e^{n_k}_{i_k}) = A(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \tag{2.21}$$

e $\|T_A\| \leq \|A\|$. Por (2.21) e (2.20) aplicada a T_A, obtemos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} |A(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq D_{m,r,p,k}^{\mathbb{K}} \cdot n^s \|T_A\| \leq D_{m,r,p,k}^{\mathbb{K}} \cdot n^s \|A\| . \tag{2.22}$$

Defina a forma k-linear $S : X_{r_1} \times \cdots \times X_{r_k} \to \mathbb{K}$ por

$$S(x^{(1)},\ldots,x^{(k)}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(1)} \cdots x_j^{(k)},$$

e note que pela desigualdade de Hölder temos

$$\|S\| \leq n^{1-\left(\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_k}\right)} = n^{1-\frac{m}{p}}.$$

Portanto, conectando S a (2.22) conseguimos

$$n^{\frac{1}{r}} \leq D_{m,r,p,k}^{\mathbb{K}} n^s n^{1-\frac{m}{p}}$$

e concluímos, facilmente, que

$$s \geq \frac{p - rp + rm}{pr}.$$

■

A fim de estabelecer a notação para a demonstração do Teorema 2.3.2, consideremos r definido por

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \quad \text{se} \quad \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 1$$

e

$$r = 1 \quad \text{se} \quad \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1.$$

Assim como na seção 2.4.1, consideremos $D_r \subset X_{p_1} \hat{\otimes}^{\pi} \cdots \hat{\otimes}^{\pi} X_{p_m}$, o espaço vetorial gerado pelos tensores $\otimes_m e_i$, e $\overline{D_r}$ o seu fecho. Considere o isomorfismo isométrico (veja [13] e [2, Lemma 2.1])

$$u_r : X_r \to \overline{D_r}$$

definido por

$$u_r\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \ \otimes_m e_i.$$

O lema a seguir será fundamental na demonstração do Teorema 2.3.2.

Lema 2.4.2 *Seja* $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ *a seguinte forma diagonal* m*-linear*

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_1^{(j)} \ldots x_m^{(j)}.$$

Então

$$\|A\| \leq \begin{cases} \max_j |a_j| & \text{se } \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1, \\ \max_j |a_j| n^{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)} & \text{se } \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 1. \end{cases} \tag{2.23}$$

Além disso, quando $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1$ *temos a igualdade.*

Demonstração. Se $\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_m} < 1$ então

$$\begin{aligned} |A(x_1, \ldots, x_m)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} a_j x_1^{(j)} \ldots x_m^{(j)} \right| \\ &\leq \left(\max_j |a_j| \right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left| x_1^{(j)} \ldots x_m^{(j)} \right| \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\max_j |a_j| \right) \cdot n^{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}. \end{aligned}$$

Por fim, se $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1$, a igualdade segue observando que $|a_{j_0}| = |A(e_{j_0}, \ldots, e_{j_0})|$.
■

Dada a demonstração do resultado acima, estamos prontos para provar o Teorema 2.3.2. Lembraremos aqui o seu enunciado: sejam m, n inteiros positivos, $p_1, \ldots, p_m \geq 1$ e $s > 0$. Seja $C := C(m, n, p_1, \ldots, p_m, s)$ a melhor constante que satisfaz

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |T(e_j, \ldots, e_j)|^s \right)^{1/s} \leq C \, \|T\|$$

para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$. O valor de C é exatamente

$$\begin{cases} (a) \quad n^{1/s} & \text{se } \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1, \\ (b) \quad n^{\max\left\{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{s}-1, 0\right\}} & \text{se } \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \leq 1. \end{cases}$$

Demonstração do Teorema 2.3.2.
(a) Suponha que $\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_m} \geq 1$, e portanto $r = 1$. Seja $\widehat{T}$ a linearização de T e considere $S : \ell_1 \to \mathbb{K}$ dada por

$$S(x) = \widehat{T}\,(u_r(x)).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n}|T(e_j,\ldots,e_j)|^s\right)^{1/s} &= \left(\sum_{j=1}^{n}|\widehat{T}\,(u_r(e_j))|^s\right)^{1/s}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}|S(e_j)|^s\right)^{1/s}\\
&\leq \left\|(e_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,s}\|S\|\\
&= \sup_{\varphi\in B_{\ell_\infty^n}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(e_j)|^s\right)^{\frac{1}{s}}\|S\|\\
&\leq n^{1/s}\,\|S\|\\
&\leq n^{1/s}\|T\|.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $C \leq n^{\frac{1}{s}}$.

Para provar a otimalidade, considere $A_0 : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ dada por

$$A_0(x^{(1)},\ldots,x^{(m)}) := \sum_{j=1}^{n} x_j^{(1)}\ldots x_j^{(m)}. \tag{2.24}$$

Note que, do Lema 2.4.2 temos $\|A_0\| = 1$. Mas,

$$n^{1/s} = \left(\sum_{j=1}^{n}|A_0(e_j,\ldots,e_j)|^s\right)^{1/s} \leq C\,\|A_0\| = C\cdot 1.$$

(b) Suponha $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 1$. Seja $\widehat{A}$ a linearização de A e considere $S : \ell_r \to \mathbb{K}$ dada por

$$S(x) = \widehat{A}\,(u_r(x)).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n}|A(e_j,\ldots,e_j)|^s\right)^{1/s} &= \left(\sum_{j=1}^{n}|\widehat{A}\,(u_r(e_j))|^s\right)^{1/s}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}|S(e_j)|^s\right)^{1/s}\\
&\leq \left\|(e_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,s}\|S\|\\
&\leq \left\|(e_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,s}\|A\|.
\end{aligned}$$

Note que

$$\left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{w,s} = 1$$

se

$$s \geq r^* = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}$$

e

$$\left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{w,s} = n^{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{s}-1}$$

se

$$s < r^*.$$

Isso mostra que $C \leq 1$ no primeiro caso e $C \leq n^{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{s}-1}$ no segundo caso.

Agora provaremos a otimalidade. O caso $s \geq \frac{1}{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}$ é óbvio, então consideremos $s < \frac{1}{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}$. Seja A_0 como em (2.24). Note que, como $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m} < 1$, do Lema 2.4.2 segue que $\|A_0\| \leq n^{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}$. Sendo assim,

$$n^{1/s} = \left(\sum_{j=1}^{n} |A_0(e_j,\ldots,e_j)|^s\right)^{1/s} \leq C\,\|A_0\| \leq C \cdot n^{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)},$$

o que implica que

$$C \geq n^{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{s}-1} = n^{\max\left\{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{s}-1,0\right\}}$$

e isso completa a prova. ■

2.5 Para desigualdades com múltiplos expoentes

Nessa seção, estamos interessados principalmente no que acontece com (2.9) (e consequentemente com (2.6), (2.7) e (2.8)) quando

$$\frac{1}{s_1}+\cdots+\frac{1}{s_m} > \frac{m+1}{2} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|.$$

Do que afirma o Teorema 2.1.6 é óbvio que as constantes envolvidas ganham dependência em n quando expoentes menores são considerados, como já constatamos nas seções anteriores. Considerar múltiplos expoentes é um passo natural diante do que já foi apresentado. Por isso, mesmo que não componham o corpo desta tese, apresentaremos a seguir alguns resultados que exibem a dependência exata de n quando esses novos expoentes são considerados. Como veremos, a otimalidade não é obtida em todos os casos, como aconteceu até aqui. Esses e outros resultados nesse contexto de múltiplos expoentes podem ser encontrados em [6].

Por questões de clareza fixaremos as seguintes notações: para $\rho, r_1, \ldots, r_m \in (0, +\infty)$, definimos $M_<^\rho := \{j \in \{1, \ldots, m\} : r_j < \rho\}$, $M_\geq^\rho := \{1, \ldots, m\} \setminus M_<^\rho$. Iremos denotar por $|M_<^\rho|$ a cardinalidade $M_<^\rho$. Um caso particular de ρ nos será útil:

$$M_<^{\mathrm{HL}} := M_<^{2m/(m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|)}.$$

Teorema 2.5.1 *Sejam $m \geq 2$ um inteiro, $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [2, +\infty]^m$, e $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_m) \in (0, +\infty)^m$. Existe uma constante $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que para todo inteiro positivo n e para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ vale a seguinte desigualdade*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} n^s \|T\|, \tag{2.25}$$

onde o expoente s é dado por:

(i)

$$s = \sum_{j \in M_<^2} \frac{1}{r_j} + \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| - \frac{1}{2}\left(|M_<^2| + 1\right), \quad \textit{se} \quad \mathbf{p} \in [2, 2m]^m.$$

Quando $M_<^2 = \{1, \ldots, m\}$ o expoente s é ótimo.

(ii)

$$s = \sum_{j \in M_<^{HL}} \frac{1}{r_j} - \frac{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}{2m} \cdot |M_<^{HL}|, \quad \textit{se} \quad \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Quando $M_<^{HL} = \{1, \ldots, m\}$ ou $M_<^{HL} = \emptyset$ o expoente s é ótimo.

Note que, quando $p_1 = \cdots = p_m = 2m$ em (i) e (ii), os conjuntos $M_<^{HL} = M_<^2$ coincidem e os dois expoentes s também.

Observamos no resultado anterior que, no caso $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$, a otimalidade do expoente s é obtida a partir de (2.25) nos casos extremos $M_<^{\mathrm{HL}} = \{1, \ldots, m\}$ ou $M_<^{\mathrm{HL}} = \emptyset$. O próximo resultado mostra que é possível obter a otimalidade nos casos intermediários

$0 < |M_<^{\mathrm{HL}}| < m$ para uma desigualdade similar. O preço que se paga a fim de obter a otimalidade nos casos intermediários é duplo. Primeiro, o resultado é indicado apenas para expoentes $r_1, \ldots, r_m$ no intervalo $[1,2]$ e não para todos $r_1, \ldots, r_m > 0$. Segundo, a constante que aparece em (2.26) depende *a priori* dos expoentes $r_1, \ldots, r_m$. Como se pode constatar na demonstração do Teorema 2.5.1 (veja [6] págs 1580-1584), a constante $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}}$, que vem de (2.25), não depende dos r_i's.

Usando uma abordagem diferente para o caso $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$ no Teorema 2.5.1(ii), obtêm-se uma desigualdade semelhante à (2.25) com expoente s ótimo. Portanto, o seguinte teorema complementa a parte (ii) do Teorema 2.5.1:

Teorema 2.5.2 *Seja $m \geq 2$ um inteiro. Se $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$ e $\mathbf{r} \in [1,2]^m$, então existe uma constante $D_{m,\mathbf{r},\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq D_{m,\mathbf{r},\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \cdot n^{\max\left\{\left|\frac{1}{\mathbf{r}}\right| - \frac{m+1}{2} + \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|, 0\right\}}\|T\|, \tag{2.26}$$

para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente $\max\left\{\left|\frac{1}{\mathbf{r}}\right| - \frac{m+1}{2} + \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|, 0\right\}$ *é ótimo.*

Sempre que $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$ e $1 \leq r_1, \ldots, r_m \leq 2m/(m+1-2|1/\mathbf{p}|)$ podemos aplicar ambos os teoremas, Teorema 2.5.1 (ii) e Teorema 2.5.2. Os expoentes que obtemos em ambos os casos coincidem, pois neste caso $M_<^{HL} = \{1, \ldots, m\}$.

Mas ainda há espaço para aplicar ambos os resultados sempre que $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$ e alguns dos r_j estão entre $2m/(m+1-2|1/\mathbf{p}|)$ e 2. Por um lado, se todos os r_j's são maiores ou iguais a $2m/(m+1-2|1/\mathbf{p}|)$, então $M_<^{HL}$ será vazio e ambos os expoentes s serão iguais a 0 (como esperado). Por outro lado, se alguns dos r_j's são maiores e outros são menores do que $2m/(m+1-2|1/\mathbf{p}|)$, teremos diferentes expoentes, sendo $s := s_{2.5.2}$ do Teorema 2.5.2 menor que o expoente $s := s_{2.5.1}$ do Teorema 2.5.1, e portanto, melhor. De fato, se $r_1, \ldots, r_m \in [1,2]$ são tais que $0 < k := |M_<^{HL}| < m$ então,

$$\sum_{j \in M_{\geq}^{HL}} \frac{1}{r_j} \leq \frac{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}{2m}(m-k) = \left(\frac{m+1}{2} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)\left(1 - \frac{k}{m}\right),$$

e essa desigualdade é equivalente a $s_{2.5.2} \leq s_{2.5.1}$.

Para finalizar este capítulo, respondemos uma questão natural que surge após todos os casos que tratamos: *qual é o comportamento do caso linear ($m = 1$)?* Nessa situação, o resultado é claro: dado um número inteiro positivo n, $p \in [1, +\infty]$ e $r \in (0, +\infty)$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |T(e_i)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq n^{\max\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*}, 0\right\}} \|T\| \tag{2.27}$$

vale para toda forma linear $T : \ell_p^n \to \mathbb{K}$, onde p^* denota o expoente conjugado de p. Além disso, o expoente $\max\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*}, 0\right\}$ é ótimo. Na verdade, quando $r \geq p^*$, (2.27) é óbvio e, quando $r < p^*$, (2.27) segue pela desigualdade de Hölder, e a otimalidade do expoente segue pela inclusão de espaços ℓ_q.

Como se pode ver em [6], a demonstração do Teorema 2.5.1 usa uma generalização da famosa desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (veja [4, 57] ou consulte o apêndice B.2.2). Talvez a falta de otimalidade nos resultados acima ocorra porque não se tem (pelo que sabemos) uma desigualdade do tipo Kahane–Salem–Zygmund para este contexto. Além disso, observada a maneira como se dá a dependência em n é natural questionar, nos casos em que não se têm a otimalidade, se a dependência ótima não aparece por intermédio de outras funções que não sejam da forma $f(n) = n^s$. A otimalidade, ou não, das estimativas dos teoremas anteriores são, na nossa opinião, problemas abertos interessantes.

Parte II

A desigualdade de Bohnenblust-Hille polinomial

Capítulo 3

Constantes para um caso especial da desigualdade de Bohnenblust-Hille polinomial complexa

A desigualdade de Bohnenblust–Hille [28] para polinômios m-homogêneos complexos afirma que existe uma constante $C_m \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \sup_{\|x\|\leq 1} |P(x)|, \tag{3.1}$$

para todo polinômio m-homogêneo contínuo $P : c_0 \to \mathbb{C}$ da forma

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(P)\mathbf{x}^\alpha$$

(esta notação será formalmente definida em breve). Essa desigualdade é importante em muitos campos da matemática (veja [21, 40] e suas referências).

Usando um resultado análogo à fórmula de polarização, Bohnenblust e Hille provaram (3.1) com constantes pouco precisas mas suficientes para os seus propósitos. Em uma releitura moderna, usando uma estimativa devida a L. A. Harris ([50]) para a constante de polarização de ℓ_∞, em [41, §4] (2009) A. Defant e P. Sevilla–Peris apresentaram a seguinte estimativa

$$C_m \leq (\sqrt{2})^{m-1} \frac{m^{\frac{m}{2}}(m+1)^{\frac{m+1}{2}}}{2^m (m!)^{\frac{m+1}{2m}}}.$$

Em 2011, foi provado em [40] que C_m pode ser escolhida com crescimento exponencial, e esse resultado tem importantes aplicações. Mais precisamente, foi encontrada a seguinte estimativa

$$C_m \leq \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \sqrt{m}(\sqrt{2})^{m-1}.$$

Em 2014 as estimativas de [40] foram melhoradas em [21], e foi provado que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma constante $\kappa > 0$ tal que

$$C_m \leq \kappa \left(1 + \varepsilon\right)^m.$$

O resultado acima foi crucial para se obter a solução final de um problema de longa data sobre o crescimento assintótico do raio de Bohr (veja [26, 27, 29]). O valor exato de C_m ainda permanece um mistério. Em [66] foi apresentada a melhor estimativa inferior até então conhecida

$$C_m \geq (1 + 2^{1-m})^{\frac{1}{2m}}.$$

Em 2015, Carando, Defant e Sevilla-Peris em [37] mostraram que, para uma família particular de polinômios m-homogêneos, as constantes C_m podem ser tomadas tendo crescimento polinomial em m. Mais precisamente, eles provaram que, para polinômios cujos monômios tem o número de variáveis diferentes uniformemente limitados por M, existe um tipo de desigualdade de Bohnenblust-Hille com uma constante de crescimento polinomial em m.

A seguir vamos estabelecer algumas notações necessárias, antes de continuarmos. Seja $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e, como usual, definimos $|\alpha| = \sum \alpha_j$; neste caso, denotamos também $\mathbf{x}^\alpha := \prod_j x_j^{\alpha_j}$. Um polinômio m-homogêneo $P : c_0 \to \mathbb{C}$ é denotado por

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(P)\mathbf{x}^\alpha,$$

onde $c_\alpha(P)$ é uma constante para cada α. Relembramos que a norma de P é dada por $\|P\| := \sup_{\|x\|\leq 1} |P(x)|$. Como $|\alpha| = m$, é óbvio que somente um número finito de α_j são não nulos e definimos

$$\binom{m}{\alpha} := \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!},$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são os elementos não nulos de α. Seguindo, em essência, a notação de [37], para inteiros positivos m e $M \leq m$ definimos

$$w(\alpha) = \text{card}\,\{j : \alpha_j \neq 0\}$$

e

$$\Lambda_{M,m} = \{\alpha : |\alpha| = m, \quad w(\alpha) \leq M\}.$$

Em vista da importância da cuidadosa investigação das constantes de Bohnenblust–Hille, em [37, Theorem 2.1] foi provado que

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq 2^{\frac{M}{2}} m^{\frac{M+1}{2}} \|P\|, \tag{3.2}$$

para todo polinômio m-homogêneo contínuo $P : c_0 \to \mathbb{C}$, sendo enfatizado pelos autores o crescimento polinomial (em m) das constantes – essa é uma propriedade muito boa tendo em mente que as melhores estimativas conhecidas tem apenas um crescimento sub-exponencial (em m).

O resultado principal deste capítulo mostra que, na verdade, estas constantes investigadas por Carando, Defant e Sevilla-Peris são uniformemente limitadas por uma constante que não depende de m. Assim, provamos uma desigualdade do tipo Bohnenblust–Hille mais forte, já que não há dependência do grau de homogeneidade nas constantes. Esse resultado foi publicado em [55].

3.1 A desigualdade de Bohnenblust–Hille para polinômios que têm uma quantidade de variáveis uniformemente limitada

Como já falamos, nosso principal resultado mostra que a desigualdade (3.2) perde uma informação significativa: as constantes ótimas são universalmente limitadas independentemente do valor de m. Mais precisamente, provamos o seguinte:

Teorema 3.1.1 *Para todos inteiros positivos m e $M \leq m$, existe uma constante $\kappa_M \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq \kappa_M \|P\|,$$

para todo polinômio m-homogêneo contínuo $P : c_0 \to \mathbb{C}$. Além disso, assintoticamente (quando $m \to \infty$), temos

$$\kappa_M = M^M e^M.$$

Demonstração. Começamos usando o principal resultado de [2], generalizado em [77], que se apoia em um poderoso resultado de Arias e Farmer [13, Theorem 1.3], conforme vimos no Capítulo 2 deste trabalho. Ele afirma que se $1 \leq k \leq m$ e $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ são inteiros positivos tais que $n_1 + \cdots + n_k = m$, então existe uma constante $C_{k,m} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} \left| T\left(e_{i_1}^{n_1}, \ldots, e_{i_k}^{n_k}\right) \right|^{\frac{2k}{k+1}} \right)^{\frac{k+1}{2k}} \leq C_{k,m} \left\| T \right\|, \tag{3.3}$$

para toda forma m–linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{C}$. Além disso, o expoente $\frac{2k}{k+1}$ é ótimo. Em [2] também é provado que

$$C_{k,m} \leq C_k \tag{3.4}$$

para todo $1 \leq k \leq m$ (lembramos que C_k é a constante ótima da desigualdade de Bohnenblust–Hille k-linear). De [21], sabemos que existe uma constante positiva β_1 tal que

$$C_k \leq \beta_1 k^{\frac{1-\gamma}{2}} < \beta_1 k^{0.212} \tag{3.5}$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni.

Seja $\overset{\vee}{P}$ a forma m-linear simétrica associada a P (veja [44, 61]), i.e.,

$$\overset{\vee}{P} : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{C}$$

é a única forma m-linear simétrica tal que

$$P(x) = \overset{\vee}{P}(x, \ldots, x).$$

Seja também

$$\Gamma_m := \left\{ \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_M) \in \{0, \ldots, m\}^M : \tau_1 + \cdots + \tau_M = m \right\}.$$

É fácil verificar que

$$\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2M}{M+1}} \leq \sum_{\tau \in \Gamma_m} \sum_{i_1,\ldots,i_M} \binom{m}{\tau}^{\frac{2M}{M+1}} |\overset{\vee}{P}(e_{i_1}^{\tau_1}, \ldots, e_{i_M}^{\tau_M})|^{\frac{2M}{M+1}}.$$

Um argumento de simetria fornece estimativas ainda melhores, mas, surpreendentemente, essa estimativa aproximada é suficiente para nossos propósitos.

Pela Proposição A.1 (veja apêndice A.1) temos

$$\max_{\tau \in \Gamma_m} \binom{m}{\tau} = \frac{m!}{q!^{M-r}(q+1)!^r}, \tag{3.6}$$

onde q e r são inteiros positivos tais que $m = qM + r$, $0 \leq r < M$.

Como

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k} |\overset{\vee}{P}(e_{i_1}^{\tau_1},\ldots,e_{i_k}^{\tau_k})|^{\frac{2M}{M+1}} \leq \sum_{i_1,\ldots,i_M} |\overset{\vee}{P}(e_{i_1}^{\tau_1},\ldots,e_{i_M}^{\tau_M})|^{\frac{2M}{M+1}}$$

para todo $1 \leq k \leq M$, e

$$\frac{m!}{q!^{M-r}(q+1)!^r} \leq \frac{m!}{\left(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor !\right)^M},$$

de (3.6), temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\ldots,i_M} \binom{m}{\tau}^{\frac{2M}{M+1}} |\overset{\vee}{P}(e_{i_1}^{\tau_1},\ldots,e_{i_M}^{\tau_M})|^{\frac{2M}{M+1}} \\
&\qquad \leq \left(\frac{m!}{\left(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor !\right)^M}\right)^{\frac{2M}{M+1}} \sum_{i_1,\ldots,i_M} |\overset{\vee}{P}(e_{i_1}^{\tau_1},\ldots,e_{i_M}^{\tau_M})|^{\frac{2M}{M+1}} \\
&\qquad \leq \left(\frac{m!}{\left(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor !\right)^M}\right)^{\frac{2M}{M+1}} (C_M \|\overset{\vee}{P}\|)^{\frac{2M}{M+1}},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos (3.3) e (3.4). Note também que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2M}{M+1}} &\leq \sum_{\tau \in \Gamma_m} \left(\frac{m!}{\left(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor !\right)^M}\right)^{\frac{2M}{M+1}} (C_M \|\overset{\vee}{P}\|)^{\frac{2M}{M+1}} \\
&= \binom{m+M-1}{m} \left(\frac{m!}{\left(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor !\right)^M}\right)^{\frac{2M}{M+1}} (C_M \|\overset{\vee}{P}\|)^{\frac{2M}{M+1}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2M}{M+1}}\right)^{\frac{M+1}{2M}} &\leq \binom{m+M-1}{m}^{\frac{M+1}{2M}} \frac{m!}{\left(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor !\right)^M} C_M \|\overset{\vee}{P}\| \\
&\leq \binom{m+M-1}{m}^{\frac{M+1}{2M}} \frac{m!}{\left(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor !\right)^M} C_M e^m \|P\|.
\end{aligned}$$

É sabido que (veja, por exemplo, [36, demonstração de Proposition 4.1])

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|P\|. \tag{3.7}$$

Como

$$\frac{1}{\frac{2m}{m+1}} = \frac{\theta}{\frac{2M}{M+1}} + \frac{1-\theta}{2}$$

com

$$\theta = \frac{M}{m},$$

pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{\alpha\in\Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \qquad (3.8)\\
&\leq \left[\left(\sum_{\alpha\in\Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2M}{M+1}}\right)^{\frac{M+1}{2M}}\right]^{\frac{M}{m}} \left[\left(\sum_{\alpha\in\Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{1-\frac{M}{m}}\\
&\leq \left(\binom{m+M-1}{m}^{\frac{M+1}{2M}} \frac{m!}{\left(\lfloor\frac{m}{M}\rfloor!\right)^M} C_M e^m \|P\|\right)^{\frac{M}{m}} \|P\|^{1-\frac{M}{m}}.
\end{aligned}$$

A fórmula de aproximação de Stirling nos diz que

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{m!}{\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m} = 1,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\left[\frac{m!}{\left(\lfloor\frac{m}{M}\rfloor!\right)^M}\right]^{\frac{M}{m}} &= \lim_{m\to\infty}\left[\frac{\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m}{\left(\sqrt{2\pi\frac{m}{M}}\left(\frac{m}{eM}\right)^{\frac{m}{M}}\right)^M}\right]^{\frac{M}{m}}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\frac{\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m}{\left(\sqrt{2\pi\frac{m}{M}}\right)^M\left(\frac{m}{e}\right)^m\cdot\left(\frac{1}{M}\right)^m}\right]^{\frac{M}{m}}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\frac{\sqrt{2\pi m}}{\left(\sqrt{2\pi\frac{m}{M}}\right)^M\left(\frac{1}{M}\right)^m}\right]^{\frac{M}{m}}\\
&= M^M\left[\frac{\lim\limits_{m\to\infty}(\sqrt{2\pi m})^{\frac{M}{m}}}{\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sqrt{2\pi\frac{m}{M}}\right)^{\frac{M^2}{m}}}\right],
\end{aligned}$$

e como

$$\lim_{m\to\infty}(\sqrt{2\pi m})^{\frac{M}{m}} = \lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2\pi\frac{m}{M}}\right)^{\frac{M^2}{m}} = 1,$$

provamos que

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{m!}{\left(\lfloor\frac{m}{M}\rfloor!\right)^M}\right]^{\frac{M}{m}} = M^M. \qquad (3.9)$$

Por (3.8) e (3.9), concluímos que existe uma constante

$$\zeta_M = \sup_m\left[\frac{m!}{\left(\lfloor\frac{m}{M}\rfloor!\right)^M}\right]^{\frac{M}{m}} < \infty$$

tal que

$$\left(\sum_{\alpha\in\Lambda_{M,m}}|c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \le \binom{m+M-1}{m}^{\frac{M+1}{2m}}\left[\frac{m!}{\left(\lfloor\frac{m}{M}\rfloor!\right)^M}\right]^{\frac{M}{m}} C_M^{\frac{M}{m}} e^M\|P\|$$
$$\le \zeta_M\binom{m+M-1}{m}^{\frac{M+1}{2m}} C_M^{\frac{M}{m}} e^M\|P\|.$$

Relembrando que γ denota a constante de Euler–Mascheroni, pela desigualdade anterior combinada com (3.5), temos

$$\left(\sum_{\alpha\in\Lambda_{M,m}}|c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \le \zeta_M\binom{m+M-1}{m}^{\frac{M+1}{2m}}\left(\beta_1 M^{\frac{1-\gamma}{2}}\right)^{\frac{M}{m}} e^M\|P\|$$
$$\le \kappa_M\|P\|.$$

Fazendo $m\to\infty$, concluímos que

$$\kappa_M = M^M e^M,$$

assintoticamente. Com isso, terminamos a prova. ■

É fácil checar que o resultado acima não acontece para escalares reais. Os exemplos de [36] mostram que não há chance de estender o resultado para esse caso. De fato, se $C_m^{\mathbb{R},M}$ é a constante de Bohnenblust–Hille para polinômios m-homogêneos reais com o número de variáveis limitado por $M=2$, em [36, Theorem 4.2] foi provado que

$$\limsup_m \left(C_m^{\mathbb{R},M}\right)^{\frac{1}{m}} \ge \sqrt[8]{27} \approx 1.5098.$$

Logo, por maior razão, o resultado é válido para qualquer $M\ge 2$. Além disso, seguindo as linhas da prova do teorema acima nos deparamos com a desigualdade (3.7), que não é válida para o caso real.

Parte III

Lineabilidade em espaços de sequências

Capítulo 4

Espaçabilidade em espaços de sequências

Neste capítulo estudamos o conceito de espaçabilidade em espaços de sequências, que vão desde os espaços usuais, $\ell_p(X), \ell_p^w(X)$ e $c_0(X)$, para um espaço de Banach X, até espaços de sequências mais gerais, os chamados espaços de sequências invariantes, que apresentaremos mais adiante.

Inicialmente, relembraremos alguns conceitos de lineabilidade/espaçabilidade, em seguida apresentaremos essa teoria aplicada a certos subconjuntos contidos nos espaços acima citados e, finalmente, apresentaremos os nossos resultados, que podem ser encontrados em [64].

4.1 Sobre lineabilidade/espaçabilidade

A lineabilidade/espaçabilidade é uma teoria que vem ganhando força em matemática nos últimos anos. O espírito de tal conceito é procurar estruturas lineares em ambientes não-lineares. Mais precisamente, é a busca por subespaços vetoriais, de dimensão finita ou infinita, fechados ou não, dentro de certos subconjuntos, não vazios, de espaços vetoriais topológicos que não possuem uma estrutura linear.

Nesse texto focaremos no conceito de espaçabilidade. A seguir apresentamos as definições formais dos conceitos que usaremos.

Definição 4.1.1 *Um subconjunto A de um espaço vetorial topológico X é dito ser:*

(1) *μ-lineável em X se $A \cup \{0\}$ contiver um subespaço μ-dimensional de X.*

(2) *μ-espaçável em X se $A \cup \{0\}$ contiver um subespaço fechado μ-dimensional de X.*

(3) *Maximal espaçável em X se é $\dim X$-espaçável.*

Existem poucos métodos gerais (veja, por exemplo, [23, 24]) para provar a lineabilidade ou espaçabilidade e, normalmente, problemas específicos precisam de argumentos *ad hoc*. Para mais detalhes sobre o assunto nos referimos a [14, 16, 20, 25] e as referências neles contidas.

4.2 Espaçabilidade em espaços de sequências

Dado um espaço de Banach ou quasi-Banach X, em [32] foi introduzida uma nova classe de espaços de sequências mais abrangente, com coordenadas em X, chamados espaços de sequências invariantes. A seguir recordamos tal conceito:

Definição 4.2.1 *([32]) Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

(a) Dado $x \in X^{\mathbb{N}}$, definimos x^0 como segue: se x tem apenas um número finito de coordenadas diferentes de zero, então $x^0 = 0$; caso contrário, $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ onde x_j é a j-ésima coordenada não nula de x.

(b) Um espaço de sequências invariantes sobre X é um espaço de dimensão infinita E Banach ou quasi-Banach de sequências de X que satisfaz as seguintes condições:

(b1) Para $x \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 \neq 0$, $x \in E$ se, e somente se, $x^0 \in E$, e $\|x\| \leq K\|x^0\|$, para alguma constante K dependendo somente de E.

(b2) $\|x_j\| \leq \|x\|$, para cada $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ e cada $j \in \mathbb{N}$.

A noção de espaços de sequências invariantes, como investigamos neste trabalho, foi introduzida em [32] embora pareça ter suas raízes em [19, 31]. A seguir apresentamos alguns exemplos de espaços de sequências invariantes:

Exemplo 4.2.2 *Como mencionado em [32], espaços de sequências usuais são espaços de sequências invariantes. Por exemplo:*

(a) Para cada $0 < p \leq \infty$, *os espaços*

$$\begin{aligned}
\ell_p(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \\
\ell_p^w(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \varphi \in X^* \right\}, \\
\ell_p^u(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X) : \lim_{n \to \infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0 \right\}, \\
c_0(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \lim_{j \to \infty} x_j = 0 \right\}, \\
c(X) &= \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} : \lim_{j \to \infty} x_j \ \textit{existe} \right\}
\end{aligned}$$

são espaços de sequências invariantes sobre X. *Acima e doravante,* X^* *denota o dual topológico de* X, *e em* $c_0(X)$ *e* $c(X)$ *consideramos a seguinte norma*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|.$$

Tais espaços serão Banach quando $1 \leq p < \infty$, *e p-Banach quando* $0 < p < 1$. *Quando* $p = \infty$, *as somas são trocadas por supremos e* $\ell_\infty^w(X) := \ell_\infty(X)$.

(b) Para $0 < p, q < \infty$, *o espaço de Lorentz* $\ell_{p,q}$ *é um espaço de sequências invariantes (sobre* $\mathbb{K}$*). Para maiores detalhes e exemplos veja [32].*

Em [32] foi provado que se E é um espaço de sequências invariantes sobre um espaço Banach ou quasi-Banach X, para qualquer subconjunto $\Gamma \subset (0, \infty]$, então

$$E - \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X)$$

é vazio ou espaçável.

Em [33] foi considerada uma situação mais geral: dados espaços de Banach X e Y, uma aplicação $f : X \to Y$, um conjunto $\Gamma \subseteq (0, \infty]$ e um espaço de sequências invariantes E com coordenadas em X, foi investigada a espaçabilidade em subconjuntos formados por sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ de E que satisfizessem

$$(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(Y)$$

ou

$$(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q^{\omega}(Y)$$

ou

$$(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(Y).$$

É fácil perceber que se f for a identidade em X temos exatamente os casos considerados em [32]. A fim de obter uma extensão dos resultados acima, em [33, Definition 2.3] foi considerada uma classe mais geral de funções:

Definição 4.2.3 ([33]) *Uma função $f\colon X \longrightarrow Y$ entre espaços normados é dita ser:*
(a) Não-contrativa, se $f(0) = 0$ e para cada escalar $\alpha \neq 0$ existe uma constante $K(\alpha) > 0$ tal que

$$\|f(\alpha x)\|_Y \geq K(\alpha) \cdot \|f(x)\|_Y \tag{4.1}$$

para cada $x \in X$.
(b) Fortemente não-contrativa, se $f(0) = 0$ e para cada escalar $\alpha \neq 0$ existe uma constante $K(\alpha) > 0$ tal que

$$|\varphi(f(\alpha x))| \geq K(\alpha) \cdot |\varphi(f(x))|, \tag{4.2}$$

para todo $x \in X$ e $\varphi \in Y^*$.

O seguinte resultado foi provado por Botelho e Fávaro (veja [33, Theorem 2.5]):

Teorema 4.2.4 *Sejam X e Y espaços de Banach, E um espaço de sequências invariantes sobre X, $f\colon X \longrightarrow Y$ uma função e $\Gamma \subseteq (0, \infty]$.*
(a) Se f é não-contrativa, então

$$C(E, f, \Gamma) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(Y) \right\}$$

e

$$C(E, f, 0) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(Y) \right\}$$

são vazios ou espaçáveis em E.
(b) Se f é fortemente não-contrativa, então

$$C^w(E, f, \Gamma) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q^w(Y) \right\}$$

é vazio ou espaçável em E.

Nossos principais resultados são abstrações do resultado acima. Mostramos, entre outros resultados, que os espaços de sequências invariantes usados em [33] podem ser substituídos por espaços de sequências invariantes mais gerais.

A seguinte definição é extensão natural de [33, Definition 2.2]:

Definição 4.2.5 *Sejam X e Y espaços de Banach, Γ um conjunto arbitrário e E um espaço de sequências invariantes sobre X. Se E_l, para cada $l \in \Gamma$, é um espaço de sequências invariantes sobre Y e $f : X \longrightarrow Y$ é uma função qualquer, definimos o conjunto*

$$G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma}) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{l\in\Gamma} E_l \right\}.$$

Na próxima seção damos um passo no sentido de generalizar os resultados citados anteriormente, já que abstraímos, em certo sentido, os resultados de [33].

4.3 Principais resultados

4.3.1 Espaçabilidade em espaços de sequências fortemente invariantes

De agora em diante, um espaço de sequências invariantes E sobre um espaço de Banach X é chamado de espaço de sequências fortemente invariantes quando:

(a) $c_{00}(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0(X) : x_j \neq 0 \text{ para um número finito de índices } j \right\} \subset E$;

(b) $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ se, e somente se, toda subsequência de $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ também pertence a E.

Exemplo 4.3.1 *Se X é um espaço de Banach, então $\ell_q(X), \ell_q^u(X), \ell_q^w(X), c(X), c_0(X)$ são espaços de sequências fortemente invariantes.*

A noção de espaço de sequências fortemente invariantes é bastante natural, mas o seguinte exemplo mostra que existem espaços de sequências invariantes que não são espaços de sequências fortemente invariantes:

Exemplo 4.3.2 *O espaço de Banach*

$$E = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty : x_{2n-1} = x_{2n} \text{ para todo inteiro positivo } n \right\},$$

com a norma do supremo, é um espaço de sequências invariantes mas não é um espaço de sequências fortemente invariantes.

A seguir definimos uma nova classe de funções que será essencial para as demonstrações dos nossos resultados.

Definição 4.3.3 *Sejam X, Y espaços de Banach e E um espaço de sequências invariantes sobre Y. Uma função $f : X \to Y$ tal que $f(0) = 0$ é dita ser compatível com E se para qualquer sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ de elementos de X, temos*

$$(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin E \Rightarrow (f(ax_j))_{j=1}^{\infty} \notin E,$$

independentemente da escolha do escalar $a \neq 0$.

Exemplo 4.3.4 *Toda função não-contrativa $f : X \to Y$ é compatível com $\ell_q(Y)$ e $c_0(Y)$.*

Agora, afirmamos e provamos um dos principais resultados deste capítulo. Mostramos que [33, Theorem 2.5(a)] pode ser formalmente estendido para uma configuração mais geral. A demonstração é uma abstração da demonstração do Teorema 1.4(a) e usa uma técnica às vezes denominada de *vetor mãe*: dados um espaço de Banach X, de dimensão infinita, e um conjunto A, o método consiste em manipular, de maneira conveniente, um único elemento de A, a fim de definir um operador linear injetivo $T : X \to E$ tal que $T(X) \subseteq A \cup \{0\}$. Isso mostra que $A \cup \{0\}$ é $(\dim X)$–lineável. Na demonstração a seguir, tomando $A = G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$, mostraremos também que $\overline{T(X)} \subseteq A \cup \{0\}$, provando assim a espaçabilidade de A.

Teorema 4.3.5 *Sejam X e Y espaços de Banach, Γ um conjunto arbitrário, E um espaço de sequências invariantes sobre X e E_l um espaço de sequências fortemente invariantes sobre Y, para todo l em Γ. Se $f\colon X \longrightarrow Y$ é compatível com E_l, para todo $l \in \Gamma$, então $G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$ é um conjunto vazio ou espaçável.*

Demonstração. Assuma que $G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$ é não vazio e considere $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$. Note que existe uma infinidade de índices j tais que $x_j \neq 0$, porque $f(0) = 0$ e $c_{00}(Y) \subset E_l$ para todo l. Concluímos assim que $x^0 \neq 0$.

Inicialmente mostraremos que

$$x^0 \in G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma}).$$

Seja $U := \bigcup_{l\in\Gamma} E_l$. Sabemos que $(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin U$, e assim $[(f(x_j))_{j=1}^{\infty}]^0 \notin U$, pois E_l, para cada l, é um espaço de sequências invariantes. Denote $x^0 = (x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$, onde x_{j_k} é a k-ésima coordenada não nula de x. Então, devemos mostrar que $(f(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty} \notin U$. Como $f(0) = 0$, segue que

$$[(f(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty}]^0 = [(f(x_j))_{j=1}^{\infty}]^0 \notin U.$$

Consequentemente, $(f(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty} \notin U$ e então $x^0 \in G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$. Como de costume, dividiremos $\mathbb{N}$ como uma união enumerável de subconjuntos infinitos dois a dois disjuntos $(\mathbb{N}_i)_{i=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ e denotaremos $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \dots\}$.

Considere

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_{j_k} \otimes e_{i_k} \in X^{\mathbb{N}},$$

onde

$$x_{j_k} \otimes e_{i_k} := (0, \dots, 0, x_{j_k}, 0, 0, \dots) \in X^{\mathbb{N}},$$

e cada x_{j_k} aparece na i_k-ésima posição.

Observe que $y_i^0 = x^0$; então $0 \neq y_i^0 \in E$ para todo i. Como E é um espaço de sequências invariantes, segue que $y_i \in E$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Note também que o conjunto $\{y_1, y_2, \dots\}$ é linearmente independente. Além disso, $y_i \in G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$. De fato, se $y_i = (y_m^i)_{m=1}^{\infty}$, então

$$[(f(y_m^i))_{m=1}^{\infty}]^0 = [(f(x_j))_{j=1}^{\infty}]^0 \notin E_l$$

para cada $i \in \mathbb{N}$ e $l \in \Gamma$. Seja K a constante da Definição 4.2.1(b1) e considere $\tilde{s} = 1$ se E é um espaço de Banach e $\tilde{s} = s$ se E é um espaço s-Banach, $0 < s < 1$. Para $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_E^{\tilde{s}} &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{s}} \cdot \|y_i\|_E^{\tilde{s}} \leq K^{\tilde{s}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{s}} \cdot \left\|y_i^0\right\|_E^{\tilde{s}} \\ &= K^{\tilde{s}} \cdot \left\|x^0\right\|_E^{\tilde{s}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{s}} = K^{\tilde{s}} \cdot \left\|x^0\right\|_E^{\tilde{s}} \cdot \|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\tilde{s}}^{\tilde{s}} < \infty.\end{aligned}$$

Então $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_E^{\tilde{s}} < \infty$ e, em ambos os casos, concluímos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ converge em E. Assim, o operador

$$T\colon \ell_{\tilde{s}} \longrightarrow E \quad , \quad T\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$$

está bem definido, é linear e injetivo. Nos resta mostrar que $\overline{T\left(\ell_{\tilde{s}}\right)}$ está contido em $G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$.

Lembramos que $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_{j_k} \otimes e_{i_k} \in X^{\mathbb{N}}$ onde x_{j_k} é a k-ésima coordenada não nula de $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$. Devemos mostrar que se $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T\left(\ell_{\tilde{s}}\right)}$ é uma sequência não nula então $(f(z_n))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{l\in\Gamma} E_l$. Existem sequências $\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $z = \lim_{k\to\infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ em E. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} x_{j_p} \otimes e_{i_p} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} a_i^{(k)} x_{j_p} \otimes e_{i_p}.$$

Como $z \neq 0$, seja $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$. Uma vez que $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$, existem únicos $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{m_t} = e_r$. Desse modo, para cada $k \in \mathbb{N}$, a r-ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é o vetor $a_m^{(k)} x_{j_t}$. A condição 4.2.1(b2) da Definição 4.2.1 assegura que convergência em E implica em convergência coordenada a coordenada, então

$$z_r = \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_{j_t} = \left(\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)}\right) x_{j_t}.$$

Segue que $\alpha_m := \lim\limits_{k\to\infty} a_m^{(k)} \neq 0$. Por um lado

$$\alpha_m x_{j_p} = \left(\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)}\right) x_{j_p} = \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_{j_p}$$

para cada $p \in \mathbb{N}$. Por outro lado, para $p, k \in \mathbb{N}$, a m_p-ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é $a_m^{(k)} x_{j_p}$. Assim, a convergência coordenada a coordenada nos dá

$$\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_{j_p} = z_{m_p}.$$

Segue assim que $z_{m_p} = \alpha_m x_{j_p}$ para cada $p \in \mathbb{N}$. Como

$$\left(f(z_{m_p})\right)_{p=1}^{\infty} = \left(f\left(a_m x_{j_p}\right)\right)_{p=1}^{\infty}$$

e $\left(f\left(x_{j_p}\right)\right)_{p=1}^{\infty} \notin E_l$, para todo $l \in \Gamma$, pela Definição 4.3.3, segue que $\left(f(z_{m_p})\right)_{p=1}^{\infty} \notin E_l$, para todo $l \in \Gamma$. Uma vez que $\left(f(z_{m_p})\right)_{p=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $(f(z_n))_{n=1}^{\infty}$ e E_l, para cada $l \in \Gamma$, é um espaço de sequências fortemente invariantes, segue que

$$(f(z_j))_{j=1}^{\infty} \notin E_l,$$

para todo $l \in \Gamma$, e isso completa a prova de que $z \in G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$. ■

Do teorema anterior e dos Exemplos 4.3.1 e 4.3.4 recuperamos o Teorema 4.2.4(a).

O próximo corolário é imediato do Teorema 4.3.5 e mostra que [33, Corollaries 2.7, 2.8 e 2.10] e [32, Theorem 1.3] são todos casos particulares do seguinte resultado geral:

Corolário 4.3.6 *Sejam X e Y espaços de Banach. Seja E um espaço de sequências invariantes sobre X e F um espaço de sequências fortemente invariantes sobre Y. Se $f\colon X \longrightarrow Y$ é compatível com F e o conjunto*

$$A := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin F\right\}$$

é não vazio, então A é espaçável em E.

4.3.2 O caso "fraco"

Nessa seção provamos uma extensão de [33, Theorem 2.5(b)], i.e., uma extensão do Teorema 1.4(b) para espaços de sequências invariantes mais gerais.

Seja F um espaço de sequências invariantes sobre o corpo dos escalares $\mathbb{K}$. Para qualquer espaço de Banach Y definimos

$$F^w(Y) := \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Y^{\mathbb{N}} : (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in F, \text{ para todo } \varphi \in Y^*\}.$$

É interessante observar que, se F é um espaço de sequências invariantes sobre $\mathbb{K}$, então

$$\sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_F < \infty \tag{4.3}$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in F^w(Y)$. De fato, se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in F^w(Y)$ consideramos

$$\begin{aligned} u \quad &: \quad Y^* \to F \\ \varphi \quad &\mapsto \quad (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Uma versão geral do Teorema do Gráfico Fechado para espaços vetoriais topológicos (veja [75, pág. 51]) conclui a prova de que o operador linear u é contínuo. De fato, se

$$\varphi_n \to \varphi_0 \text{ em } Y^* \text{ e } u(\varphi_n) \to (z_j)_{j=1}^{\infty} \text{ em } F$$

devemos mostrar que $(z_j)_{j=1}^{\infty} = u(\varphi_0)$. Como $\varphi_n \to \varphi_0$, temos $\varphi_n(x_j) \to \varphi_0(x_j)$, para todo j. Por outro lado, como $u(\varphi_n) \to (z_j)_{j=1}^{\infty}$ em F, i.e., $(\varphi_n(x_j))_{j=1}^{\infty} \to (z_j)_{j=1}^{\infty}$ em F, temos também $\varphi_n(x_j) \to z_j$, para todo j. Desse modo

$$\varphi_0(x_j) = z_j,$$

para todo j, e portanto

$$(z_j)_{j=1}^{\infty} = u(\varphi_0).$$

O próximo lema, apesar de simples, destaca algumas ferramentas que serão necessárias para a demonstração do principal resultado desta seção.

Lema 4.3.7 *Seja Y um espaço de Banach. Se F é um espaço de sequências invariantes sobre $\mathbb{K}$ e $x \in Y^{\mathbb{N}}$, então*

$$x^0 \in F^w(Y) \Leftrightarrow x \in F^w(Y) \tag{4.4}$$

e, além disso, se F é um espaço de sequências fortemente invariantes, então

$$c_{00}(Y) \subset F^w(Y). \tag{4.5}$$

Demonstração. Se $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ e $x^0 = (x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$, então

$$\begin{aligned} x &\in F^w(Y) \Leftrightarrow (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in F, \text{ para todo } \varphi \in Y^* \\ &\Leftrightarrow \left((\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right)^0 \in F, \text{ para todo } \varphi \in Y^* \\ &\Leftrightarrow \left((\varphi(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty}\right)^0 \in F, \text{ para todo } \varphi \in Y^* \\ &\Leftrightarrow \left((\varphi(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty}\right) \in F, \text{ para todo } \varphi \in Y^* \\ &\Leftrightarrow x^0 = (x_{j_k})_{k=1}^{\infty} \in F^w(Y). \end{aligned}$$

A prova de (4.5) é uma consequência direta do fato de F ser um espaço de sequências fortemente invariantes. ■

Exemplo 4.3.8 *Para $F = \ell_p, c, c_0$, os respectivos $F^w(Y)$ são os conhecidos espaços de sequências invariantes $\ell_p^w(Y), c^w(Y), c_0^w(Y)$.*

Definição 4.3.9 *Sejam X e Y espaços de Banach, e F um espaço de sequências invariantes sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $f : X \to Y$ tal que $f(0) = 0$ é fortemente compatível com $F^w(Y)$ se $\varphi \circ f$ é compatível com F para todo funcional linear contínuo $\varphi : Y \to \mathbb{K}$.*

Exemplo 4.3.10 *Qualquer aplicação fortemente não-contrativa (veja (4.2))* $f: X \to Y$ *é fortemente compatível com* $\ell_q^w(Y)$ *e* $c_0^w(Y)$.

Definição 4.3.11 *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach,* Γ *um conjunto arbitrário e* E *um espaço de sequências invariantes sobre* X. *Se* F_l, *para todo* $l \in \Gamma$, *é um espaço de sequências invariantes sobre* $\mathbb{K}$, *e* $f : X \longrightarrow Y$ *é uma aplicação qualquer, definimos o conjunto*

$$G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma}) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{l\in\Gamma} F_l^w(Y) \right\}.$$

O seguinte teorema é uma generalização formal do Teorema 1.4(b). A demonstração segue as linhas da demonstração do Teorema 4.3.5, mesmo assim a apresentaremos por questão de completude:

Teorema 4.3.12 *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach,* Γ *um conjunto arbitrário,* E *um espaço de sequências invariantes sobre* X *e* F_l *espaço de sequências fortemente invariantes sobre* $\mathbb{K}$ *para todo* $l \in \Gamma$. *Se* $f : X \longrightarrow Y$ *é fortemente compatível com* $F_l^w(Y)$ *para todo* $l \in \Gamma$, *então* $G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma})$ *é vazio ou espaçável.*

Demonstração. Assuma que $G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma})$ é não vazio e considere $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma})$. Como na demonstração anterior, devemos começar mostrando que

$$x^0 \in G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma}).$$

Note que $x_j \neq 0$ para uma infinidade de índices j, visto que $f(0) = 0$, e assim, de (4.5), temos $c_{00}(Y) \subset F_l^w(Y)$.

Denote $U = \bigcup_{l\in\Gamma} F_l^w(Y)$. Sabemos que, para cada l, existe um φ_l tal que

$$(\varphi_l \circ f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin F_l, \tag{4.6}$$

e assim

$$[(\varphi_l \circ f(x_j))_{j=1}^{\infty}]^0 \notin F_l, \tag{4.7}$$

para todo l, visto que F_l, para cada l, é um espaço de sequências invariantes. Denote $x^0 = (x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$, onde x_{j_k} é a k-ésima coordenada não nula de x. Agora, devemos mostrar que

$$(\varphi_l \circ f(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty} \notin F_l \tag{4.8}$$

para todo l. Suponha que

$$(\varphi_{l_0} \circ f(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty} \in F_{l_0} \tag{4.9}$$

para algum l_0. De (4.9), como F_{l_0} é um espaço de sequências invariantes, teríamos $[(\varphi_{l_0} \circ f(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty}]^0 \in F_{l_0}$. Mas, como $\varphi_{l_0}(0) = f(0) = 0$, teríamos de (4.7) que

$$[(\varphi_{l_0} \circ f(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty}]^0 = [(\varphi_{l_0} \circ f(x_j))_{j=1}^{\infty}]^0 \notin F_{l_0}.$$

Como F_{l_0} é um espaço de sequências invariantes teríamos

$$(\varphi_{l_0} \circ f(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty} \notin F_{l_0},$$

o que contraria (4.9). Portanto, temos (4.8), i.e.,

$$(f(x_{j_k}))_{k=1}^{\infty} \notin F_l^w(Y)$$

para todo l, e assim

$$x^0 \in G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma}).$$

Novamente, dividiremos $\mathbb{N}$ como uma união enumerável de subconjuntos infinitos dois a dois disjuntos, $(\mathbb{N}_i)_{i=1}^{\infty}$, de $\mathbb{N}$ e como usual, para todo i, representamos $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \dots\}$. Considere

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_{j_k} \otimes e_{i_k} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Como E é um espaço de sequências invariantes, segue que $y_i \in E$ para todo $i \in \mathbb{N}$. É claro que $\{y_1, y_2, \dots\}$ é linearmente independente e $y_i^0 = x^0$; temos assim $0 \neq y_i^0 \in E$ para todo i. Além disso, $y_i \in G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma})$. De fato, se $y_i = (y_m^i)_{m=1}^{\infty}$, então

$$[(f(y_m^i))_{m=1}^{\infty}]^0 = [(f(x_j))_{j=1}^{\infty}]^0 \notin F_l^w(Y)$$

para cada l. Dessa forma, de (4.4) do Lema 4.3.7, temos

$$(f(y_m^i))_{m=1}^{\infty} \notin F_l^w(Y)$$

para cada $i \in \mathbb{N}$ e $l \in \Gamma$ e então $y_i \in G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma})$.

Seja $\tilde{s} = 1$ se E é um espaço de Banach e $\tilde{s} = s$ se E é um espaço s-Banach, $0 < s < 1$. Procedendo como na prova do Teorema 4.3.5 sabemos que o operador

$$T\colon \ell_{\tilde{s}} \longrightarrow E \quad , \quad T\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$$

está bem definido e é injetivo. Nos resta mostrar que

$$\overline{T\left(\ell_{\tilde{s}}\right)} \subset G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma}),$$

isto é, devemos mostrar que se $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T\left(\ell_{\tilde{s}}\right)}$ é uma sequência não nula, então

$$(f(z_n))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{l\in\Gamma} F_l^w(Y).$$

Sejam $\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}$, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$z = \lim_{k\to\infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$$

em E. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} x_{j_p} \otimes e_{i_p} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} a_i^{(k)} x_{j_p} \otimes e_{i_p}.$$

Fixe $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$. Como $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$, existem (únicos) $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{m_t} = e_r$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, a r-ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é o vetor $a_m^{(k)} x_{j_t}$. Da Definição 4.2.1(b2) sabemos que convergência em E implica em convergência coordenada a coordenada, e assim

$$z_r = \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_{j_t} = \left(\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)}\right) x_{j_t}.$$

Segue que $\alpha_m := \lim\limits_{k\to\infty} a_m^{(k)} \neq 0$ e

$$\alpha_m x_{j_p} = \left(\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)}\right) x_{j_p} = \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_{j_p}$$

para cada $p \in \mathbb{N}$. Além disso, para $p, k \in \mathbb{N}$, a m_p –ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é $a_m^{(k)} x_{j_p}$. Assim, a convergência coordenada nos dá $\lim\limits_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_{j_p} = z_{m_p}$ e, consequentemente,

$$z_{m_p} = \alpha_m x_{j_p}$$

para cada $p \in \mathbb{N}$. Assim sendo

$$\left(\varphi_l \circ f(z_{m_p})\right)_{p=1}^{\infty} = \left(\varphi_l \circ f\left(a_m x_{j_p}\right)\right)_{p=1}^{\infty}. \tag{4.10}$$

Como f é fortemente compatível com $F_l^w(Y)$, para todo l, concluímos que $\varphi_l \circ f$ é compatível com F_l e então, de (4.8), segue que

$$\left(\varphi_l \circ f\left(a_m x_{j_p}\right)\right)_{p=1}^{\infty} \notin F_l. \tag{4.11}$$

Portanto, de (4.10) e (4.11) temos

$$\big(\varphi_l \circ f(z_{m_p})\big)_{p=1}^{\infty} \notin F_l, \tag{4.12}$$

para todo l. Portanto, como $\big(\varphi_l \circ f(z_{m_p})\big)_{p=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $(\varphi_l \circ f(z_n))_{n=1}^{\infty}$ e F_l é um espaço de sequências fortemente invariantes, segue que

$$(\varphi_l \circ f(z_j))_{j=1}^{\infty} \notin F_l,$$

para todo $l \in \Gamma$, e finalmente concluímos que $z \in G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma})$. ■

Sejam X e Y espaços de Banach, E um espaço de sequências invariantes sobre X e $F_l = \ell_l$, com $l \in \Gamma \subset (0, \infty]$. Se $f\colon X \longrightarrow Y$ é fortemente não-contrativa então f é fortemente compatível com $\ell_l^w(Y)$ e do teorema anterior concluímos que $G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma})$ é vazio ou espaçável. Como

$$G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma}) = \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{l\in\Gamma} \ell_l^w(Y)\right\}$$

recuperamos o Teorema 1.4(b).

4.4 Introdução a um conceito mais forte de lineabilidade

É interessante notar que em todos os resultados apresentados neste capítulo (e nas respectivas versões de [18, 33]) os resultados de lineabilidade/espaçabilidade satisfazem uma condição ligeiramente mais forte, no seguinte sentido: dado qualquer ponto x do conjunto $G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$ é provado aqui que existe um espaço vetorial fechado de dimensão infinita V tal que "essencialmente"

$$x \in V \subset G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma}) \cup \{0\}.$$

Isso nos leva à seguinte extensão da noção de lineabilidade que pode ser interessante para investigar em diferentes contextos:

Um subconjunto A de um espaço vetorial W é pontualmente λ-lineável se para qualquer $x \in A$ existe um espaço vetorial λ-dimensional V tal que

$$x \in V \subset A \cup \{0\} \subset W.$$

A mesma definição pode ser adaptada para a noção de espaçabilidade. Não é difícil verificar que, em geral, esses conceitos são estritamente mais fortes do que apenas lineabilidade/espaçabilidade. Por exemplo, seja $W = \ell_2$ e

$$A = (\mathrm{span}\{e_1\}) \cup (\mathrm{span}\{e_2, e_3\}) \cup (\mathrm{span}\{e_4, \ldots, e_6\}) \cup \ldots$$

É claro que A é n-lineável para todo inteiro positivo n, mas A não é pontualmente 2-lineável, pois não existe subespaço de dimensão 2 em A contendo e_1.

Apêndices

Apêndice A

Sobre polinômios m-homogêneos

Neste apêndice, apresentamos conceitos complementares sobre a teoria de polinômios multinomiais.

A.1 Maximalidade do coeficiente multinomial central

Seja

$$\Gamma_m := \left\{ \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_M) \in \{0, \ldots, m\}^M : \tau_1 + \cdots + \tau_M = m \right\}.$$

Definimos o coeficiente multinomial como

$$\binom{m}{\tau} := \frac{m!}{\tau_1! \ldots \tau_M!}.$$

Proposição A.1 *Sejam q e r inteiros positivos tais que $m = qM + r$, $0 \leq r < M$. Então*

$$\max_{\tau \in \Gamma_m} \binom{m}{\tau} = \frac{m!}{q!^{M-r}(q+1)!^r}.$$

Demonstração. (veja [39]) Suponha que $\tau_1 < q$. Como $\tau_1 + \cdots + \tau_M = m$ existe $\tau_k \geq q+1$ para algum $2 \leq k \leq M$. Por simplicidade, façamos $k = 2$. Como

$$\tau_1 + 1 < q + 1 \leq \tau_2,$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{m!}{\tau_1!\cdots\tau_M!} &< \frac{\tau_2}{\tau_1+1}\cdot\frac{m!}{\tau_1!\cdots\tau_M!}\\
&= \frac{m!}{(\tau_1+1)!(\tau_2-1)!\tau_3!\cdots\tau_M!}\\
&= \frac{m!}{\tau_1^{(1)}!\tau_2^{(1)}!\cdots\tau_M^{(1)}!}.
\end{aligned}
$$

Suponha novamente que exista $\tau_j^{(1)} < q$, logo existirá $k \neq j$ tal que $\tau_k^{(1)} \geq q+1$. Fazendo, por simplicidade, $j = 3$ e $k = 4$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{m!}{\tau_1^{(1)}!\tau_2^{(1)}!\cdots\tau_M^{(1)}!} &< \frac{\tau_4^{(1)}}{\tau_3^{(1)}+1}\cdot\frac{m!}{\tau_1^{(1)}!\tau_2^{(1)}!\cdots\tau_M^{(1)}!}\\
&= \frac{m!}{\tau_1^{(1)}!\tau_2^{(1)}!(\tau_3^{(1)}+1)!(\tau_4^{(1)}-1)!\cdots\tau_M^{(1)}!}\\
&= \frac{m!}{\tau_1^{(2)}!\tau_2^{(2)}!\cdots\tau_M^{(2)}!}
\end{aligned}
$$

Perceba que após um número i de passos, todos os $\tau_k^{(i)}$ serão tais que

$$q \leq \tau_k^{(i)}, \quad 1 \leq k \leq M,$$

e ainda teremos $\tau_1^{(i)} + \cdots + \tau_M^{(i)} = m$.

Agora, suponha que $\tau_M^{(i)} > q+1$. Assim, existirá $\tau_l^{(i)} = q$ e, por simplicidade, fazendo $l = 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{m!}{\tau_1^{(i)}!\cdots\tau_M^{(i)}!} &< \frac{\tau_M^{(i)}}{\tau_1^{(i)}+1}\cdot\frac{m!}{\tau_1^{(i)}!\cdots\tau_M^{(i)}!}\\
&= \frac{m!}{(\tau_1^{(i)}+1)!\cdots(\tau_M^{(i)}-1)!}\\
&= \frac{m!}{\tau_1^{(i+1)}!\cdots\tau_M^{(i+1)}!}.
\end{aligned}
$$

Seguindo com esse processo, no máximo $(r-1)$ vezes, encontraremos $\tau' = (\tau_1', \ldots, \tau_M') \in \Gamma_m$ tal que

$$q \leq \tau_k' \leq q+1, \quad 1 \leq k \leq M.$$

Portanto, pela construção acima e sabendo que $m = qM + r$, obtemos a maximalidade quando

$$\tau_1 = \cdots = \tau_r = q+1 \quad \text{e} \quad \tau_{r+1} = \cdots = \tau_M = q.$$

■

A.2 Equivalência de normas para polinômios m-homogêneos complexos

Proposição A.1 *Seja $P : \ell_\infty^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ um polinômio m-homogêneo complexo. Se*

$$\|P\| := \sup\{|P(x)| : \|x\| \le 1\}$$

e

$$|P|_2 := \left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

então $|P|_2 \le \|P\|$. (veja demonstração de [36, Proposition 4.1])

Demonstração. Seja $P(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(P)\mathbf{x}^\alpha$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \ell_\infty^n(\mathbb{C}), |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ e $\mathbf{x}^\alpha := \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$. Defina

$$f(t) = P(e^{it_1}, \ldots, e^{it_n}) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(P)e^{i\alpha t}$$

onde $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ e $\alpha t = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_n t_n$. Observe que se $\|f\|$ denota a norma do sup de f em $[-\pi, \pi]$, pelo Princípio do Módulo Máximo (veja [78, pág. 11]) temos $\|f\| = \|P\|$. Além disso, pela ortogonalidade do sistema $\{e^{ikz} : k \in \mathbb{Z}\}$ em $L^2([-\pi, \pi])$ temos

$$\begin{aligned}
\|P\|^2 = \|f\|^2 &\ge \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(P)e^{i\alpha t} \right|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(P)e^{i\alpha t} \cdot \overline{\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(P)e^{i\alpha t}} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(P)e^{i\alpha t} \cdot \sum_{|\alpha|=m} \overline{c_\alpha(P)e^{i\alpha t}} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^2 dt \\
&= \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^2 \\
&= |P|_2^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $|P|_2 \le \|P\|$. ∎

Apêndice B

Sobre operadores multilineares

O objetivo desse apêndice é apresentar alguns resultados sobre operadores múltiplo somantes.

B.1 Operadores múltiplo somantes

Definição B.1 *Sejam $1 \leq p, q_1, \ldots, q_m < \infty$ e $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços de Banach. Um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ é múltiplo $(p, q_1, \ldots, q_m)-$somante se existe um $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \|T(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{m} \| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k=1}^{n} \|_{w,q_i} \tag{B.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e todos $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, com $k_i = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \ldots, m$.

Proposição B.2 *Sejam $1 \leq q_1, \ldots, q_m \leq p < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$. São equivalentes:*

(i) T é múltiplo $(p, q_1, \ldots, q_m)-$somante;

(ii) $(T(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}))_{k_1,\cdots,k_m=1}^{\infty} \in \ell_p(\mathbb{N}^m; F)$ sempre que $(x_{k_i}^{(i)})_{k_i=1}^{\infty} \in \ell_{q_i,w}(E_i)$.

Denotamos por $\Pi_{p,q_1,\ldots q_m}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$ o conjunto formado por tais operadores. Se $q_1 = \cdots = q_m = q$ ou $p = q_1 = \cdots = q_m$, escrevemos $\Pi_{p,q}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$

ou $\Pi_p^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$, respectivamente, e quando $E_1 = \cdots = E_m$, a notação será $\Pi_{p,q}^{mult}({}^m E; F)$.

Considerando, para nossos objetivos, apenas o espaço $\Pi_{p,q}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$, dos operadores $m-$lineares múltiplo $(p, q)-$somantes de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F, é fácil ver que o ínfimo das constantes C que satisfazem a desigualdade (B.1), define uma norma em $\Pi_{p,q}^{mult}(E_1, \cdots, E_m; F)$, a qual denotamos por $\pi_{p,q}^{mult}(\cdot)$. Além disso, o espaço dos operadores $m-$lineares múltiplo $(p, q)-$somantes de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F munido com a norma $\pi_{p,q}^{mult}(\cdot)$ é um espaço de Banach.

B.1.1 Espaços com cotipo finito e funções de Rademacher

Relembremos que, para $2 \leq q \leq \infty$, um espaço de Banach E *tem cotipo* q se existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para qualquer escolha de um número finito de vetores $x_1, \ldots, x_n$ de E, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde r_k denota a k-ésima função de Rademacher. Mais especificamente, para $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$, $r_k(t) = \operatorname{sign}\left[\operatorname{sen}\left(2^k \pi t\right)\right]$. Quando $q = \infty$ substituímos $\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ por $\max_{k \leq n} \|x_k\|$. É claro que se $q_1 \leq q_2$, então E ter cotipo q_1 implica que E tem cotipo q_2; portanto, denotamos $\inf\{q : E \text{ tem cotipo } q\}$ por $\cot(E)$.

B.2 Desigualdades auxiliares

B.2.1 Desigualdade de Minkowski

A demonstração da seguinte versão da desigualdade de Minkowski pode ser encontrada em [47, Corollary 5.4.2].

Desigualdade de Minkowski: Para quaisquer que sejam $0 < p \leq q < \infty$ e qualquer matriz escalar $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ temos

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

B.2.2 Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund

Recordemos uma generalização da desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund (veja [4, 57]):

Teorema B.1 (Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund) *Sejam $m, n \geq 1$, $(p_1, \ldots, p_m) \in [1, +\infty]^m$ e definamos*

$$\alpha(p) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\,, \text{ se } p \geq 2; \\ 0\,, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então existe uma constante universal C_m (dependendo somente de m) e uma aplicação m-linear $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ da forma

$$A\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}\right) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)}$$

tal que

$$\|A\| \leq C_m \cdot n^{\frac{1}{2} + \alpha(p_1) + \cdots + \alpha(p_m)}.$$

B.2.3 Desigualdade múltipla de Khinchine

Para $0 < p < \infty, Z$ um espaço de Banach, n um inteiro positivo e

$$(z_{i_1, \ldots, i_m})_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{m_1, \ldots, m_n} \subset Z$$

definimos as funções de Rademacher múltiplas por

$$\rho_p(z_{i_1, \ldots, i_m}) = \left(\int \cdots \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{m_1, \ldots, m_n} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) z_{i_1, \ldots, i_m} \right\|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $1 \leq i_1 \leq m_1, \ldots, 1 \leq i_n \leq m_n$.

Desigualdade múltipla de Khinchine [72]: Se $0 < p < \infty$, então

$$\begin{aligned} &(A_p)^m \left(\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{m_1, \ldots, m_n} |a_{i_1 \ldots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int \cdots \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{m_1, \ldots, m_n} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1 \ldots i_m} \right\|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (B_p)^m \left(\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{m_1, \ldots, m_n} |a_{i_1 \ldots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para cada escolha de matrizes de escalares reais $(a_{i_1\ldots i_m})_{i_1,\ldots,i_m=1}^{m_1,\ldots,m_n}$; A_p, B_p são as constantes de Khinchine.

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev spaces, Elsevier, Second Edition, 2003.

[2] N. Albuquerque, G. Araújo, D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, P. Rueda, Bohnenblust–Hille and Hardy–Littlewood inequalities by blocks, arXiv:1409.6769v6 [math.FA].

[3] N. Albuquerque, G. Araújo, M. Maia, T. Nogueira, D. Pellegrino, J. Santos, Optimal Hardy–Littlewood inequalities uniformly bounded by a universal constant, a aparecer em Ann. Math. Blaise Pascal.

[4] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J. Seoane–Sepúlveda, Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust–Hille inequality, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 6, 3726–3740.

[5] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators, Israel J. Math. **211** (2016), 197–220.

[6] N. Albuquerque, T. Nogueira, D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, P. Rueda, Some applications of Hölder inequality for mixed sums, Positivity **21** (2017), no. 4, 1575–1592.

[7] N. Alon, J. Spencer, The Probabilistic Method, Wiley, 1992. (Second Edition, 2000, Third Edition 2008).

[8] G. Araújo, D. Pellegrino, Lower bounds for the constants of the Hardy–Littlewood inequalities, Linear Algebra Appl. **463** (2014), 10–15.

[9] G. Araújo, D. Pellegrino, Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for m–linear forms on ℓ_p spaces with $1 \leq p \leq m$, Arch. Math. **105** (2015), no. 3, 285–295.

[10] G. Araújo, D. Pellegrino, On the constants of the Bohnenblust–Hille and Hardy–Littlewood inequalities, Bull. Braz. Math. Soc. **48** (2017), no.1, 141–169.

[11] G. Araújo, D. Pellegrino, A Gale-Berlekamp permutation-switching problem in higher dimensions, arXiv:1801.09194v1 [math.CO].

[12] G. Araújo, D. Pellegrino, D. D. P. Silva e Silva, On the upper bounds for the constants of the Hardy-Littlewood inequality, J. Funct. Anal. **267** (2014), no. 6, 1878–1888.

[13] A. A. Arias, J. D. Farmer, On the structure of tensor products of l_p-spaces, Pacific J. Math. **175** (1996), no. 1, 13–37.

[14] R. Aron, L. Bernal–Gonzalez, D. Pellegrino, J. Seoane–Sepúlveda, Lineability: the search for linearity in mathematics, 1. ed. Boca Raton: CRC PRESS, 2015. v. 1. 328p.

[15] R. Aron, J. Globevnik, Analytic functions on c_0, Congress on Functional Analysis (Madrid, 1988). Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **2** (1989), suppl., 27–33.

[16] R. Aron, V. I. Gurariy, J. B. Seoane, Lineability and spaceability of sets of functions on $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 3, 795–803

[17] R. Aron, D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, D. Serrano, Optimal exponents for Hardy-Littlewood inequalities for m-linear operators, Linear Algebra Appl. **531** (2017), 399–422.

[18] C. S. Barroso, G. Botelho, V. V. Fávaro, D. Pellegrino, Lineability and spaceability for the weak form of Peano's theorem and vector-valued sequence spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 6, 1913–1923.

[19] C. S. Barroso, G. Botelho, V. V. Fávaro, D. Pellegrino, Lineability and spaceabiliy of sets of functions on $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 1913–1923.

[20] A. Bartoszewicz, M. Bienias, S. Głąb, Lineability, algebrability and strong algebrability of some sets in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ or $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. Traditional and present-day topics in real analysis, 213–232, Faculty of Mathematics and Computer Science. University of Łódź, Łódź, 2013.

[21] F. Bayart, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, The Bohr radius of the n–dimensional polydisk is equivalent to $\sqrt{(\log n)/n}$, Adv. Math. **264** (2014), 726–746.

[22] A. Benedek, R. Panzone, The space L_p, with mixed norm, Duke Math. J. **28** (1961), 301–324.

[23] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno, J. A. Prado-Bassas, The set of space-filling curves: Topological and algebraic structure, Linear Algebra Appl. **467** (2015), 57-74.

[24] L. Bernal-González, M. Ordóñez Cabrera, Lineability criteria with applications, J. Funct. Anal. **226** (2014), 3997–4025.

[25] L. Bernal-González, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepulveda, Linear subsets of nonlinear sets of topological vector spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (2014), 71–130.

[26] H. P. Boas, The football player and the infinite series, Notices Amer. Math. Soc. **44** (1997), no. 11, 1430–1435.

[27] H. P. Boas, D. Khavinson, Bohr's power series theorem in several variables, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 10, 2975–2979.

[28] H. F. Bohnenblust, E. Hille, On the absolute convergence of Dirichlet series, Ann. of Math. (2) **32** (1931), 600–622.

[29] H. Bohr, A theorem concerning power series, Proc. London Math. Soc. (2) **13** (1914), 1–5.

[30] G. Botelho, Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials, Proc. Roy. Irish Acad. **97** (1997), no. 2, 145–153.

[31] G. Botelho, D. Cariello, V. V. Fávaro, D. Pellegrino, Maximal spaceability in sequence spaces, Linear Algebra Appl. **437** (2012), no. 12, 2978–2985.

[32] G. Botelho, D. Diniz, V. V. Fávaro, D. Pellegrino, Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces, Linear Algebra Appl. **434** (2011), 1255–1260.

[33] G. Botelho, V. V. Fávaro, Constructing Banach spaces of vector-valued sequences with special properties, Michigan Math. J. **64** (2015), no 3, 539–554.

[34] G. Botelho, C. Michels, D. Pellegrino, Complex interpolation and summability properties of multilinear operators, Rev. Mat. Univ. Complut. **23** (2010), 139–161.

[35] G. Botelho, J. Santos, A Pietsch domination theorem for (ℓ_p^s, ℓ_p)-summing operators, Arch. Math. (Basel) **104** (2015), 47–52.

[36] J. R. Campos, P. Jiménez-Rodríguez, G. Munoz-Fernández, D. Pellegrino, J. Seoane-Sepúlveda, On the real polynomial Bohnenblust-Hille inequality, Linear Algebra Appl. **465** (2015), 391–400.

[37] D. Carando, A. Defant, P. Sevilla-Peris, The Bohnenblust-Hille inequality combined with an inequality of Helson, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 12, 5233–5238.

[38] W. Cavalcante, D. Núñez-Alarcón, Remarks on an inequality of Hardy and Littlewood, Quaest. Math. **39** (2016), 1101–1113.

[39] D. Chafaï, About the central multinomial coefficient, Libres pensées d'un mathématicien ordinaire, 2015. Disponível em: <http://djalil.chafai.net/blog/2015/08/29/about-the-central-multinomial-coefficient/>. Acesso em: 08 mai. 2018.

[40] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdá, M. Ounaïes, K. Seip, The Bohnenblust-Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive, Ann. of Math. (2), **174** (2011), 485–497.

[41] A. Defant, P. Sevilla–Peris, A new multilinear insight on Littlewood's 4/3-inequality, J. Funct. Anal. **256** (2009), 1642–1664.

[42] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[43] V. Dimant, P. Sevilla–Peris, Summation of coefficients of polynomials on ℓ_p spaces, Publ. Mat. **60** (2016), no. 2, 289–310.

[44] S. Dineen, Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer Monographs in Mathematics, 1999.

[45] D. Diniz, G. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino, J. Seoane-Sepúlveda, Lower bounds for the constants in the Bohnenblust–Hille inequality: the case of real scalars, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 575–580.

[46] D. Galicer, M. Mansilla, S. Muro, The sup-norm vs. the norm of the coefficients: equivalence constants for homogeneous polynomials, Preprint. arXiv:1602.01735v2 [math.FA] 22 Dec 2016.

[47] D. J. H. Garling, Inequalities: a journey into linear analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[48] U. Haagerup, The best constants in the Khinchine inequality, Studia Math. **70** (1982) 231–283.

[49] G. Hardy, J. E. Littlewood, Bilinear forms bounded in space $[p, q]$, Quart. J. Math. **5** (1934), 241–254.

[50] L. A. Harris, Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors, Analyse fonctionnelle et applications (Comptes Rendus Colloq. Analyse, Inst. Mat., Univ. Federal Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1972), Actualites Aci. Indust. 1367, Hermann, Paris, (1975) ,145–163.

[51] S. Kaijser, Some results in the metric theory of tensor products, Studia Math. **63** (1978), 157–170.

[52] D. Kitson, R. M. Timoney, Operator ranges and spaceability, J. Math. Anal. Appl. **378** (2011), 680–686.

[53] J. E. Littlewood, On bounded bilinear forms in an infinite number of variables, Quart. J. Math. **1** (1930), 164–174.

[54] W. A. J. Luxemburg, Banach Function Spaces, Essen, 1955.

[55] M. Maia, T. Nogueira, D. Pellegrino, The Bohnenblust–Hille inequality for polynomials whose monomials have a uniformly bounded number of variables, Integral Equations Operator Theory. **88** (2017), 143–149

[56] M. Maia, D. Pellegrino, J. Santos, An index of summability for pairs of Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. **441** (2016), 702–722.

[57] A. M. Mantero, A. Tonge, The Schur multiplication in tensor algebras, Studia Math. **68** (1980), no. 1, 1–24.

[58] M. C. Matos, On multilinear mappings of nuclear type, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **6** (1993), no. 1, 61–81.

[59] A. Montanaro, Unbalancing lights in higher dimensions, Mathoverflow, 2011. Disponível em: <https://mathoverflow.net/questions/59463/unbalancing-lights-in-higher-dimensions>. Acesso em: 07 mai. 2018.

[60] A. Montanaro, Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory, J. Math. Phys. **53** (2012), no. 12, 122206, 15 pp.

[61] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, Dover Publications, 2010.

[62] G. Muñoz-Fernández, N. Palmberg, D. Puglisi, J. Seoane-Sepúlveda, Lineability in subsets of measure and function spaces, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 2805–2812.

[63] T. Nogueira, D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino. Optimal constants for a mixed Littlewood type inequality, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat., **111** (2017), 1083–1092.

[64] T. Nogueira, D. Pellegrino, On the size of certain subsets of invariant Banach sequence spaces, Linear Algebra Appl. **487** (2015), 172–183.

[65] T. Nogueira, P. Rueda. Summability of multilinear forms on classical sequence spaces, Quaest. Math. **40** (2017), 803–809.

[66] D. Nuñez-Alarcón, A note on the polynomial Bohnenblust-Hille inequality, J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 179–181.

[67] D. Nuñez-Alarcón, D. M. Serrano-Rodríguez, The best constants in the multiple Khintchine inequality, arXiv:1704.01029v4 [math.FA].

[68] B. Osikiewicz, A. Tonge, An interpolation approach to Hardy–Littlewood inequalities for norms of operators on sequence spaces, Linear Algebra Appl. **331** (2001), 1–9.

[69] D. Pellegrino, The optimal constants of the mixed (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood inequality, J. Number Theory **160** (2016), 11–18.

[70] D. Pellegrino, E. Teixeira, Towards sharp Bohnenblust–Hille constants, Commun. Contemp. Math. **20** (2018), 1750029, 33 pp.

[71] D. Pérez-García, Operadores multilineales absolutamente sumantes, Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

[72] D. Popa, Multiple Rademacher means and their applications, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 699–708.

[73] D. Popa, Multiple summing operators on ℓ_p-spaces, Studia Math. **225** (2014), no. 1, 9–28.

[74] T. Praciano-Pereira, On bounded multilinear forms on a class of ℓ_p spaces, J. Math. Anal. Appl. **81** (1981), no. 2, 561–568.

[75] W. Rudin, Functional Analysis. Second Edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. xviii+424 pp.

[76] P. Rueda, E. A. Sánchez-Pérez, Factorization of p-dominated polynomials through L_p-spaces, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 2, 345–353.

[77] J. Santos, T. Velanga, On the Bohnenblust–Hille inequality for multilinear forms, Results Math. **72** (2017), no. 1-2, 239–244.

[78] V. Scheidemann, Introduction to complex analysis in several variables, Birkhäuser Verlang, Basel, 2005.

[79] D. M. Serrano-Rodríguez, Improving the closed formula for subpolynomial constants in the multilinear Bohnenblust–Hille inequalities, Linear Algebra Appl. **438** (2013), 3124–3138.

[80] A. Tonge, Equivalence constants for matrix norms: a problem of Goldberg, Linear Algebra Appl. **306** (2000), 1–13.

[81] I. Zalduendo, An estimate for multilinear forms on ℓ_p spaces. Proc. Roy. Irish Acad. **93** (1993), no. 1, 137–142.