Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre princípios minimax para uma classe de funcionais semicontínuos inferiormente

por

Ismael Sandro da Silva

sob orientação dos

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

*Este trabalho dispôs de subsídio financeiro da CAPES.

Sobre princípios minimax para uma classe de funcionais semicontínuos inferiormente

por

Ismael Sandro da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas-UEPB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto-UFCG

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho-UFCG

Orientador

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves-UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2019

Agradecimentos

Impreterivelmente, faculto os primeiros agradecimentos aquele que me permite, ainda que aguerridamente, tangenciar alguma certeza: o Deus *YHVH*, a quem, por fé, possibilita-me amenizar o assombro da existência.

Em segundo momento, agradeço à minha família em especial ao meu pai, mãe e irmão, respectivamente, Sandro Luiz da Silva, Rejane Miranda da Silva e Jhonatas Luiz da Silva, responsáveis por meus valores, princípios e formação humana. Pessoas as quais busco representar e honrar, com ímpeto de dignificação, até o fim de minha vida.

Um agradecimento especial que, outrora, não especulava tão cedo fazê-lo: a ela, dona do sorriso que espero ter pra sempre em meus dias, que me possibilitou conhecer-me melhor, Yngrid Mikaella, a minha namorada.

Feita as horas excepcionais, sigo com os agradecimentos aos que tiveram alguma contribuição para a realização deste trabalho. Conto que as quatro estações de Vivaldi, movimentos de outono e inverno que acompanharam a escrita do corrente texto inspirem saudáveis agradecimentos.

Minha gratidão à banca examinadora. Professora Luciana Roze, pela paciência, presteza e disponibilidade. Ao icônico e inspirador pessoal professor Marco Aurélio, que entre tantos "blaus", bleus,..., bluus"- as reticências refletem a mania de matemático ante padrões clarividentes, por vezes nem tão evidentes, He! - me instigou a seguir estudando. Ao Professor Claudianor, o qual me honra por seguirmos estudando e me ensina lições que sobrepujam os teoremas e que tenho como exemplo de que o conhecimento nos torna não só melhores cientistas, mas também pessoas melhores. Ao Professor Daniel Cordeiro de Morais Filho, com quem tive o privilégio de consolidar o quase poético vínculo de amizade para além do diálogo matemático, que entre fungadas e batidas no birô me motivava a ser um conhecedor. Obrigado também pela honra e confiança em me orientar em seu último trabalho de orientação de dissertação em “Matemática pura”.

Para este parágrafo, quase tenho a integridade comprometida. Mas, como justiça é um princípio que permitiu a humanidade chegar até aqui, obrigado Pedro, Wallace e Geovany, amigos de doutorado, pela ajuda com o texto no Latex. Também Geisa pelo dica do pequeno, porém salvador, símbolo \sharp e à Kallyne, colega do curso de Letras, pela revisão do texto.

Neste ponto do texto, urge um parecer: seria impraticável citar agradecimentos explícitos a todos que cooperaram como minha trajetória. Ademais, os movimentos de Vivaldi de outono e inverno, os últimos das Quatro Estações, já estavam encerrados nesta etapa do texto. Apego-me ao estratégico jargão de que, se você está lendo estes agradecimentos, sabe que qualquer omissão é mera casualidade.

Agradeço ao Grupo PET-Matemática - UFCG, que me despertou da postura de disperso acadêmico. Grato por todos que já dividiram espaço comigo nesta projeto. Me curvo à preguiça de registrar todos os nomes. Não obstante, me sinto no dever de citar alguns: Caio, que marcará o resto dos meus dias de estudo por tudo que me ensinou, Luis que me permitiu chegar cedo muitas vezes (Hehehe!!! NPZ), Lucas Siebra, rapaz cearence de grande ca... (ops!) carisma e companheiro em distintas conversas e ao casal, de quem cupido fui, Dani e Lucas. Aos demais, são todos estimados. Transijam! Este parágrafo PETiano já está demasiado grande.

Agradeço ao PRI, Pedro Rosy e Ismael. Grupo de compartilhamento de estudo (compartilhamento aqui não é eufemismo, PRI). Os amigos Pedro e Rosy por me fazerem sentir bem mais esperto do que considero, que entre caretas minhas nas explicações, não que figure eu como instrutor do grupo - Não -, sempre me fizeram sentir mais motivado e sempre acolhido, mesmo quando mero ouvinte nas turmas do mestrado. Claro, sempre só por empatia, sem interesses secundários. Ironias à parte, obrigado PRI, por participar de meu “semi-mestrado”, seja lá o que essa esdrúxula alcunha signifique. Neste parágrafo, meus agradecimentos ao time baiano, Rosy, Geisa e Fá, parte indireta do PRI, pelas conversas e farofas de Banana.

Agradeço, por fim ao conjunto geral da UAMat-UFCG, desde o corpo docente à equipe de funcionários que, desde meu ingresso me receberam bem e contribuíram à consolidação da topofilia da UAMat. Um agradecimento particular ao Renan, que apresentou sua dissertação no mesmo dia que e partilhou os anseios e tensões.

Agora basta, o texto já segue em uma quantidade prima não par de páginas. Obrigado a você que teve a paciência de chegar até o fim destes singelos votos. Por fim, Obrigado.

Dedicatória

A minha família, em especial minha vó paterna, que com um olhar singelo me fazia sentir-se afagado e hoje não está mais conosco, à Matemática e ao PRI.

“Não atentando nós nas coisas que se veem, mas nas que se não veem; porque as que se veem são temporais, e as que se não veem são eternas.”

II aos Coríntios 4: 18.

Resumo

Estudos recentes da Teoria dos Pontos Críticos têm como aspecto principal o desenvolvimento de métodos variacionais para funcionais que não são de classe C^1, estudo que tem implícito a generalização da noção de ponto crítico como sendo um ponto $u \in X$, tal que $I'(u) = 0$, com X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ (vide [8], [7] e [25]). Nosso trabalho é devotado a estudar a generalização de ponto crítico proposta por Szulkin em [25]. Apresentamos a definição de ponto crítico generalizado para funcionais $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, com $I = \Phi + \Psi$, com $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\Psi : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ é um funcional semicontínuo inferiormente, convexo e próprio (não ocorre $\Psi \equiv \infty$); estudamos alguns resultados do tipo minimax para esses funcionais e concluímos com aplicações desses resultados.

Palavras-Chave: métodos variacionais, generalização de ponto crítico, funcional semicontínuo inferiormente, minimax.

Abstract

Recent studies on the Critical Point Theory has as main goal the development of variacional methods for functionals that are not of C^1 class. These studies have implicitly the generalization of the notion of critical point as being a point $u \in X$, such that $I'(u) = 0$, with X a Banach space and $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ (see [8], [7] and [25]). Our work is devoted to study the generalized critical point theory which was proposed by Szulkin in [25]. We present the definition of generalized critical point for a class of functional $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, with $I = \Phi + \Psi$, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ and $\Psi : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ is a convex, proper (do not occur $\Psi \equiv \infty$) and is a lower semicontinuous functional; we also study some minmax type results for those functionals and we finish with aplications of these results.

Keywords: variational method, generalized critical point, lower semicontinuous functional, minmax.

Lista de Figuras

Sumário

Índice de notações

Segue uma lista das principais notações e siglas utilizadas no texto. Os símbolos usuais de operadores são admitidos como conhecidos, tais como os símbolos de inclusão, pertinência, derivação, integração e limite (inferior e superior). Alguns dos símbolos aqui listados também são definidos no textos.

- X' - Dual topológico de um espaço de Banach X;
- $||\cdot||$ - Norma dum espaço normado;
- $B_\varepsilon(u) = \{x;\ ||x-u|| < \varepsilon\}$;
- $\mathrm{int}(B)$ - Interior de um conjunto;
- $\overline{B}$ - Fecho topológico de um conjunto;
- $I^{-1}(B) = \{x \in A; I(x) \in B\}$ para uma função $I : A \longrightarrow C$ e $B \subset C$;
- $I_c = \{x \in X;\ I(u) \leq c\}$ para $I : X \longrightarrow (-\infty.\infty]$;
- K_c - Conjunto dos pontos críticos de um funcional no nível c;
- $[u \leq A] = \{x \in \Omega;\ u(x) \leq A\}$ para $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}$; analogamente defini-se $[u > A]$;
- $|B|$ - Medida de Lebesgue de um *conjunto mensurável*;
- $C(A,B) := \{f : A \longrightarrow B;\ f$ é contínua$\}$; $C(A) := C(A,\mathbb{R})$.
- $C^1(X,\mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R};\ f \in C(X,\mathbb{R})$ e $f' \in C(X,X')\}$.
- $C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f$ e todas as suas derivadas são contínuas$\}$, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;

- $Id|_A$ - Função identidade do conjunto A;
- $o_n(1)$ - Uma sequência convergindo para zero;
- $D.D.P.$ - Desigualdades Diferenciais Parciais;
- $E.D.P.$ - Equações Diferenciais Parciais;
- e.g. - *exempli gratia* (expressão em latim para “por exemplo”);
- i.e. - *id est* (expressão em latim para “isto é”);
- $P.V.E.$ - Princípio Variacional de Ekeland;
- q.t.p. - Em quase todo ponto (no sentido de medida);
- *sci* - Semicontínuo inferiormente.

Introdução

Em seu "approach" mais convencional, o método variacional na Teoria dos Pontos Críticos consiste em determinar a solução de uma Equação Diferencial Parcial ($E.D.P.$) encontrando pontos críticos de um funcional, usualmente denominado funcional energia associado ao problema. Para exemplificar isto, consideremos o *problema de Dirichlet*:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Uma solução fraca de (1) é, por definição, uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \ ([5, \text{Seção } 9.5]). \tag{2}$$

Se $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \int_\Omega fu dx, \tag{3}$$

então, sob condições adequadas a f (e.g. $f \in L^2(\Omega)$), vale $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (veja Proposição D.1) com

$$J'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx - \int_\Omega fv dx, \ \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é um ponto crítico de J, então $J'(u) \equiv 0$. Daí,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx - \int_\Omega fv dx = 0, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

assegurando que u satisfaz (2) e, com isso, fica estabelecido que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (1) se, e somente se, é um ponto crítico de J. Em resumo, para garantir que (1) possui solução (fraca), é suficiente garantir a existência de pontos críticos para J. Textualmente podemos dizer que a sentença em (2) - definição de solução fraca de (1) - é modelada pela identidade variacional

$$J'(u)(v) = 0, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim sendo, poderíamos nos indagar - ainda que numa potencial ingenuidade neófita - sobre a existência de problemas que fossem transliterados numa *desigualdade variacional*. Isso não é tão distante do que já discutimos, se considerarmos o fato de que, por ser $J'(u)$ um funcional linear, a identidade $J'(u) = 0$ equivale a

$$J'(u)(v) \geq 0, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{4}$$

De modo que podemos dizer que as soluções fracas de (1) são também modeladas pela última desigualdade. Resta então o questionamento sobre problemas que sejam expressos por desigualdades variacionais, que não sejam tão artificiais (e.g., quando $v \in K \subsetneq H_0^1(\Omega)$ em (4)), e de uma ferramenta com a qual se poderia abordar tais problemas. Seguindo a abordagem dada ao problema (1), poderíamos nos perguntar sobre uma noção de ponto crítico que fosse traduzida em uma desigualdade. Nessa direção aponta o que podemos chamar de *Nonsmothing Analysis*. Em 1981, **Chang** (veja [8]), iniciou o que podemos intitular de generalização da Teoria dos Pontos Críticos. Neste trabalho, foram desenvolvidos os conceitos de *derivada direcional generalizada* e *gradiente generalizado* (vide [9, Capítulo 2] e [8, Seção 1]), que estendem o conceito de derivada e gradiente para funcionais *localmente lipschitzianos*. Estas noções nos permitem aplicar método variacional a funcionais não necessariamente diferenciáveis.

Fixemos ao longo da introdução X como um espaço de Banach, X' seu dual topológico e $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional localmente lipschitziano. A derivada direcional generalizada ϕ no ponto x na direção v é definida como

$$\phi^0(x,v) = \limsup_{w \to x,\, t \to 0^+} \frac{\phi(w+tv) - \phi(w)}{t}$$

e o gradiente generalizado de ϕ no ponto x por

$$\partial^*\phi(x) = \{f \in X'; \;\; \phi^0(x,v) \geq f(v), \;\; \forall v \in X\}. \tag{5}$$

Sob hipóteses convenientes, quando $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, então $\phi^0(x,v)$ e $\partial^*\phi(x)$ coincidem com a derivada direcional usual de ϕ (e.g., [9, Proposição 2.2.7]). Um ponto $x_0 \in X$ é dito um ponto crítico de ϕ se satisfaz $0 \in \partial^*\phi(x_0)$, i.e.,

$$\phi^0(x_0, v) \geq 0, \;\; \forall v \in X. \tag{6}$$

Com isso, concluímos que garantir a existência de pontos críticos para ϕ implica resolver uma desigualdade. Exemplos explícitos de derivadas direcionais podem ser encontrados em [9, Capítulo 2] e resultados que asseguram a existência de pontos críticos, no sentido descrito em (6) constam em [8, Seção 3].

Neste trabalho estudaremos outra generalização de ponto crítico, proposta por **Szulkin** em [25] para uma classe de funcionais semicontínuos inferiormente. Os funcionais que estudaremos são um tipo de perturbação semicontínua de funcionais de classe C^1, mais precisamente, estenderemos a noção de ponto crítico para funcionais da forma $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, com $I = \Phi + \Psi$, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\Psi : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ é convexo, semicontínuo inferiormente e próprio (não vale $\Psi \equiv \infty$). Um ponto crítico de I satisfaz, por definição,

$$\Phi'(u)(v-u) + \Psi(v) - \Psi(u) \geq 0, \ \ \forall v \in X, \tag{7}$$

com $\Psi(u) < \infty$. Se $\Psi \equiv 0$, então $I = \Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dado $u \in X$ ponto crítico de I, no sentido de (7), temos

$$\Phi'(u)(v-u) \geq 0, \ \ \forall v \in X, \tag{8}$$

assim, fixado $w \in X$, escolhendo $v = w + u$ em (8) obtemos, pela arbitrariedade de w,

$$\Phi'(u)(w) \geq 0 \Rightarrow \Phi'(u) = 0,$$

garantindo que u é um ponto crítico de I no sentido usual. Portanto, a definição de ponto crítico de I dada em (7) generaliza a definição habitual.

O subdiferencial de um funcional convexo Ψ no ponto $u \in X$ é definido como o conjunto

$$\partial\Psi(u) = \{f \in X'; \ \Psi(v) - \Psi(u) \geq f(v-u), \ \forall v \in X\},$$

então dizer que u é um ponto crítico de I significa que $\Psi(u) < \infty$ e $-\Phi'(u) \in \partial\Psi(u)$. Quando $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente lipschitz e convexo, vale que $\partial^*\Psi(u) = \partial\Psi(u)$ (Propriedade I-1 do Capítulo 1), isto motiva a definição de ponto crítico dada a I como uma generalização do caso em que I é localmente lipschitziano ($\Phi \equiv 0$ e Ψ localmente lipschitziano).

A definição de ponto crítico registrada em (7) nos permite resolver inequações em espaços de funções (vide Capítulo 3), que podem ser entendidas como *Desigualdades Diferenciais Parciais* (*D.D.P.*). Como exemplo sejam $\Phi, \Psi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

e

$$\Psi(u) = \int_\Omega |u|dx.$$

Se $I := \Phi + \Psi$, então um ponto crítico u de I resolve a inequação

$$\int_\Omega (|v| - |u|)dx \geq \int_\Omega \nabla u \nabla(v-u)dx, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Se o estimado leitor partilha da visão de que conceitos matemáticos tem uma beleza individual intrínseca, a proposta do trabalho já lhe incita empolgação e se mostra relevante. Não obstante, para ilustrar que o estudo que faremos pode servir como ferramenta para aplicações práticas, mencionamos que existem problemas de Física que se expressam por $D.D.P's$. Em [13] o leitor poderá encontrar um estudo sobre desigualdades em problemas físicos.

Para ilustrar o que foi dito no último parágrafo, apresentamos o problema exposto em [13, p. XVIII].

Problema 1: *Suponha que $u(x,t)$ represente a pressão no ponto x no, instante t, em um fluido contido numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ delimitado por uma membrana, representada por $\partial\Omega$ que é semipermeável, i.e., permite que o fluido penetre em Ω mas evita que ele vaze completamente. Então, u satisfaz*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}(v-u) + \nabla_x u \nabla v + g(v-u) \right) dx \geq 0, \forall v \in H^1(\Omega),$$

onde g é uma função previamente prescita, satisfazendo uma condição de fronteira.

Do mesmo modo que o estudo do gradiente generalizado para funcionais localmente lipschitziano, o estudo de pontos críticos à luz da teoria exposta em [25] permite resolver problemas elípticos nos quais a não-linearidade não é, necessariamente, contínua. Recentemente, em 2018, **Alves** e **de Morais Filho**, em [2], estudaram a existência de solução positiva para uma equação logarítmica de Schröndiger

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\varepsilon x)u = u \log u^2, \ \text{em } \mathbb{R}^N \\ \ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{9}$$

Uma solução fraca (ou solução simplesmente) de (9) é, por definição ([2][Definição 1.1]), uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, que cumpre $u^2 \log u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)|u|^2 dx < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(\varepsilon x) uv) dx = \int_{\mathbb{R}^N} uv \log u^2 dx, \ \ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{10}$$

O funcional energia associado a (9) é dado por (vide Sentença (1.4) em [2])

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)|u|^2 + |u|^2) dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \log u^2 dx. \tag{11}$$

Observamos que a abordagem variacional convencional encontra impasses em ser aplicada ao funcional J_ε, porquanto o funcional $J_\varepsilon \notin C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, uma vez que a expressão $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \log u^2 dx$ não está bem definida, pois pode ocorrer $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \log u^2 dx = \infty$. Ainda assim, podemos escrever $J_\varepsilon = \Phi_\varepsilon + \Psi$, com $\Phi_\varepsilon \in C^1(E, \mathbb{R})$ e Ψ é convexo e semicontínuo, onde

$$E := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N); \ \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)|u|^2 dx < \infty \right\} \ \text{(vide [2, Seção 2])}$$

Podemos então estudar pontos crítico de J_ε no sentido estabelecido em (7), o Lema 2.1 em [2] assegura que um ponto crítico de J_ε é uma solução de (10). Segue-se então que encontrar pontos críticos de J_ε implica em encontrar soluções de (9). Mediante esse fato, os autores de [2], para resolver o problema (9), aplicam a teoria exposta em [25].

Outro exemplo de aplicação do estudo de pontos críticos que faremos é o trabalho desenvolvido por **Mancini** e **Musina**, [21], no qual se estuda um problema de obstáculo com crescimento crítico

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1}, \ \ \Omega - C \\ \quad u \leq \psi, \ \ D \\ \quad u \geq 0 \end{cases} \tag{12}$$

com $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\psi \geq 0$, e C e D são fechados com $C \subset D$ e $D \subset \Omega$ com fronteira suave. A estratégia dos autores é provar a existência de solução para a desigualdade

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v - u) dx \geq \int_\Omega u^{2^*-1}(v - u) dx, \ \ \forall v \in \mathbb{K}_0, \tag{13}$$

onde $\mathbb{K}_0 = \{u \in H_0^1(\Omega); \ u \geq 0, \ u|_D \leq \psi\}$. Com este fim, estuda-se o funcional

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx, \ \ u \in \mathbb{K}_0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \infty, \ \ u \in H_0^1(\Omega) - \mathbb{K}_0. \end{cases}$$

Podemos estudar pontos críticos (no sentido de (7)) para o funcional f, ademais, um ponto crítico de f satisfaz (13) (vide Observação 1.9). Na Seção 2 de [21] prova-se a existência de pontos críticos para f a partir dos resultados de [25] e, na Seção 3 de [21], **Mancini** e **Musina** provam que uma solução de (13) é uma solução fraca de (12). Esta aplicação é de notável relevância, porquanto, é bem conhecido na Teoria do Pontos Críticos, que problemas envolvendo expoente crítico nem sempre possuem solução não-trivial, o que ocorre, e.g., quando consideramos o problema de crescimento crítico com a condição de contorno usual de Dirichlet e Ω domínio estrelado,

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-1}, & \Omega \\ \quad u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

(veja [24, Seção 1, Capítulo III]). Concluímos então que a condição $u \leq \psi$, no problema de obstáculo, é uma condição crucial para a resolução de (12). Fica então ilustrada a aplicabilidade da teoria desenvolvida por **Szulkin** em [25] a problemas relevantes de $E.D.P's$.

Há uma generalização de ponto crítico que concatena o estudo feito em [8] por **Chang** e o feito por **Szulkin** em [25]. Trata-se do estudo de pontos críticos para funcionais da forma $I_1 = \Phi_1 + \Psi_1$, com $\Phi_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziano e $\Psi_1 : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ é semicontínuo inferiormente, convexo e próprio. Neste caso, dizemos que $u \in X$ é ponto crítico de I_1 se satisfaz

$$\Phi_1^0(u, v-u) + \Psi_1(v) - \Psi_1(u) \geq 0, \ \ \forall v \in X.$$

Um estudo sobre a existência de pontos críticos para esta classe de funcionais pode ser encontrado em [7, Seção 2.5.3].

Passemos à descrição do trabalho. Diremos que $I : X \to (-\infty, \infty]$ satisfaz a condição (H_0) para significar que $I = \Phi + \Psi$, com Φ e Ψ na forma descrita anteriormente. Nosso objetivo geral é estabelecer resultados do tipo minimax para funcionais satisfazendo (H_0), i.e., garantir que existem pontos críticos $u \in I^{-1}(\{c\})$ em níveis c da forma

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \sup_{u \in A} I(u),$$

com Γ uma coleção prescrita de subconjuntos de X. Nesse caso, o número c é dito um valor crítico de I.

Comparando com o estudo clássico da Teoria dos Pontos Críticos (quando $I \in C^1(X, \mathbb{R})$), os resultados minimax estão baseados num *Lema de Deformação* (veja o

Teorema 1.17). Este tipo de resultado figura em muitos dos teoremas minimax do caso clássico, a exemplo dos consagrados *Teorema do Passo da Montanha* e *Teorema de Link* (vide Seção 1.4 e [26, Seção 2.3]).

O Capítulo 1 do presente trabalho se dedica a estabelecer uma versão do Lema de Deformação para os funcionais da forma (H_0). Na versão clássica do Lema de Deformação ([10, Teorema 2.1, Capítulo 3]) faz-se necessário a regularidade do funcional para o qual se deseja aplicar o Lema. Um funcional que satisfaça (H_0) é semicontínuo inferiormente, portanto, nem mesmo contínuo precisa ser e isso inviabiliza a reprodução imediata do Lema de Deformação clássico para os funcionais dessa classe. Contudo, **Szulkin**, em [25, Seção 2], apresenta um elegante resultado, que assume o papel de Lema de Deformação para os funcionais da forma (H_0). Em nosso texto, registramos esse resultado como o seguinte teorema:

Teorema 1.23 *(Lema de Deformação):Suponhamos $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$ satisfazendo (H_0) e (PS). Sejam $c \in \mathbb{R}$ e N uma vizinhança de K_c. Dado $\varepsilon_0 > 0$ existe $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tal que para cada subconjunto compacto $A \subset X - N$ satisfazendo*

$$c \leq \sup_{u \in A} I(u) \leq c + \varepsilon$$

é possível determinar $W \subset X$ fechado, com $A \subset \operatorname{int}(W)$, e uma deformação $\alpha \in C([0, s_0] \times W, X)$ satisfazendo

1. $||\alpha_s(u) - u|| \leq s, \forall u \in W$;
2. $I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq 2s, \forall u \in W$;
3. $I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq -2\varepsilon s, \forall u \in W \cap I^{-1}([c - \varepsilon, \infty))$;

ademais, se $W_0 \subset X$ é fechado sem pontos críticos podemos construir α verificando

4. $I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq 0, \forall u \in W \cap W_0$.

Por fim, vale a seguinte estimativa

$$\sup_{u \in A} I(\alpha_s(u)) - \sup_{u \in A} I(u) \leq -2\varepsilon s. \tag{14}$$

As notações indicadas no texto são descritas no Capítulo 1. Além do Lema de Deformação para funcionais que satisfazem (H_0), o Capítulo 1 introduz a linguagem da Teoria dos Pontos Críticos para esta classe de funcionais: discutimos as condições de compacidade do tipo (PS) e apresentamos dois resultados de minimização.

No Capítulo 2 aplicamos o Lema de Deformação para provar alguns resultados do tipo minimax. Os resultados são releituras de teoremas minimax clássicos. Apresentamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha (com e sem a condição (PS)) (Teoremas 2.3 e 2.7) e dois resultados, via *Teoria do Gênero*, que asseguram multiplicidade de pontos críticos. O leitor irá perceber que a demonstração do Teorema do Passo da Montanha é mais laboriosa que à da versão clássica, que é uma aplicação imediata do Lema de Deformação na versão clássica (vide [26][Teorema 2.10]). Isso é ocasionado pela perca de continuidade dos funcionais da forma (H_0).

No Capítulo 3 os teoremas minimax estudados no Capítulo 2 são aplicados para resolver desigualdades variacionais. As aplicações apresentadas estão baseadas no trabalho desenvolvido por **Szulkin**, [25, Seção 5]. São feitas três aplicações principais mais dois corolários. Em um dos corolários assegura-se um resultado de regularidade para uma das desigualdades resolvidas, combinando um resultado de **Brezis** em [6] com uma das aplicações em [25, Seção 5] (veja o Corolário 3.5); no outro é registrado uma versão mais geral, que percebemos ser possível, de uma das desigualdades apresentadas na Seção 5 de [25] (veja o Corolário 3.3).

Além dos capítulos, o trabalho conta com cinco apêndices nos quais fazemos uma exposição sucinta de conceitos e resultados importantes no desenvolvimento dos capítulos. Os títulos de que versam cada apêndice podem ser encontrados no sumário. Estes apêndices tem caráter meramente complementar, de modo que, pressuposta a experiência do leitor, a leitura dos capítulos podem ser feitas de maneira independente. Para corroborar isto, procuramos registrar definições e propriedades fundamentais nos próprios capítulos.

Por fim, seguem algumas observações práticas para leitura do texto:

1ª - Alguns fatos, de caráter mais técnicos, são omitidos ao longo dos capítulos por terem sido reputados como excessiva digressão ao momento de suas menções, tais resultados estarão registrados no Apêndice A;

2ª - Procuramos descrever do modo mais claro possível todos os argumentos, expondo em detalhes os passos feitos, sempre que possível referenciando resultados clássicos.

Excetuam-se, claro, aqueles fatos e propriedades que julgamos ser pré-requisito para a leitura do texto. Estará sendo admitido um conhecimento básico de Análise Funcional e Teoria da Medida, de modo que alguns resultados são utilizados quase tacitamente;

3ª - O símbolo " $\blacksquare$ " indica o fim de demonstrações, enquanto que " $\square$ " a conclusão de exemplos ou de argumentos intermediários nas demonstrações;

4ª - Todas as figuras contidas no texto são de elaboração própria do autor e não valem como argumentos formais lógicos, o papel das ilustrações é apenas auxiliar na interpretação de alguns argumentos.

Esperamos que o texto deste trabalho possa configurar-se como uma referência para alunos de mestrado interessados no estudo de pontos críticos para funcionais semicontínuos, por isso buscamos, ao máximo, diante do que se urge uma dissertação, seguir um padrão cumulativo dos conceitos apresentados, sempre buscando fazer a correlação com o exposto e o estudo clássico da teoria em desenvolvimento. As referências e resultados enunciados nesta introdução que figuram no texto principal serão restabelecidas, assim o leitor não deve estar preocupado em retornar à introdução para conferir tais itens.

Capítulo 1

Funcionais semicontínuos inferiormente e lemas de deformação

Nosso estudo, sumariamente, tem como objetivo principal estabelecer resultados minimax para funcionais do tipo $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, onde X denota um *Espaço de Banach* e $I = \Phi + \Psi$, com $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\Psi : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ semicontínuo inferiormente (sci), convexo e próprio (não ocorre $\Psi \equiv \infty$). Isto posto, surge a necessidade inicial de estabelecer, em linguagem matemática formal, o que seria um Ponto Crítico do funcional I, bem como conceitos relativos a uma abordagem variacional para os funcionais da forma supracitada, tarefa esta que será desenvolvida no capítulo corrente. O estudo a seguir está essencialmente baseado na Teoria apresentada por **Szulkin** em [25], neste momento nos concentramos especificamente nas Seções 1 e 2 de [25], acrescendo alguns comentários e exemplos que pressupõem clarificar os conteúdos discorridos.

Neste capítulo introduziremos conceitos, notações e resultados fundamentais que figurarão durante todo o trabalho, constituindo a linguagem básica utilizada em nosso estudo. Apresentaremos os primeiros elementos que nos permitem considerar a teoria por ser exposta como uma generalização da teoria clássica dos pontos críticos, a saber, a definição de ponto crítico para a classe de funcionais a ser estudada, as condições de compacidade (noção de sequências (PS)) e os Lemas de Deformação.

Um estudo que generaliza a Teoria dos Pontos Críticos foi apresentando por

Chang, em [8], para funcionais *localmente lipschitizianos*, que são, portanto, funcionais ainda contínuos; o estudo que será apresentado é uma generalização de resultados da Teoria dos Pontos Críticos para funcionais que não são necessariamente contínuos e nos possibilita uma via para garantir soluções para inequações variacionais. Isto mostra a relevância e beleza do estudo sobre o qual o leitor está prestes a se debruçar, porquanto tem o perfil de generalizar uma teoria matemática e se mostra como uma ferramenta para garantir soluções de problemas que sejam modelados por inequações variacionais. Problemas da Física que podem ser modelados por inequações podem ser encontrados em **Duvaut**, [13].

Precipuamente, a fim de propiciar fluidez à leitura (para não dizer em tez de desencargo de consciência), iniciamos com uma sucinta discussão sobre funcionais semicontínuos inferiormente.

1.1 Funcionais semicontínuos inferiormente

Excetuando-se menção contrária, ao longo do capítulo, X denotará um espaço de Banach e X' seu dual topológico. O símbolo $||\cdot||$ denotará indistintamente as normas de X e X'.

Definição 1.1 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que o funcional $\Psi : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ é semicontínuo inferiormente (sci) quando, dado $a \in \mathbb{R}$, temos $\Psi^{-1}((a, \infty))$ aberto em X.*

Observação 1.2 1. *A Definição 1.1 pode ser entendida numa perspectiva mais geral, onde X denota um espaço topológico (vide [24, Seção 1, Capítulo 1]). Registramos ainda que a Definição 1.1 e os resultados referentes a funcionais sci que serão apresentados no capítulo também são válidos num sentido mais amplo que o exposto: quando X denotar um espaço métrico completo.*

2. *Afirmar que $\Psi : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ é sci, com X espaço de Banach, equivale a assegurar que para toda sequência (u_n) em X tal que $\lim u_n = u_0 \in X$ tem-se $\liminf \Psi(u_n) \geq \Psi(u_0)$.*

Neste momento cedemos à digressão de justificar o Item 2 da observação anterior: se Ψ é *sci*, então, por definição, escrevendo $a = \Psi(u_0)$ temos $\Psi^{-1}((a - \varepsilon, \infty))$ aberto em X, para $\varepsilon > 0$ arbitrário. Considerando (u_n) em X com $u_n \to u_0$, por propriedade de convergência,concluímos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_n \in \Psi^{-1}((a - \varepsilon, \infty)), \forall n \geq n_0,$$

porquanto $\Psi^{-1}((a - \varepsilon, \infty))$ é aberto contendo u_0. Segue, então

$$\Psi(u_n) \geq a - \varepsilon = \Psi(u_0) - \varepsilon, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \liminf \Psi(u_n) \geq \Psi(u_0) - \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de ε obtemos

$$\liminf \Psi(u_n) \geq \Psi(u_0).$$

Reciprocamente, suponhamos que valha $\liminf \Psi(u_n) \geq u_0$ quando ocorrer $u_n \to u_0$ em X. Mostremos que vale a seguinte proriedade:

Propriedade I-1: Para $u_0 \in X$ fixado, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||x - u_0|| < \delta \Rightarrow \Psi(x) > \Psi(u_0) - \varepsilon,$$

equivalentemente,

$$x \in B_\delta(u_0) \Rightarrow \Psi(x) > \Psi(u_0) - \varepsilon.$$

Suponhamos que Propriedade I-1 não seja válida. Existem, pois, $u_0 \in X$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in B_{1/n}(u_0)$ cumprindo

$$\Psi(u_n) \leq \Psi(u_0) - \varepsilon_0,$$

e assim

$$\liminf \Psi(u_n) \leq \Psi(u_0) - \varepsilon_0 < \Psi(u_0).$$

Como $u_n \to u_0$, vale, por nossa presente admissão, $\liminf \Psi(u_n) \geq u_0$. Uma contradição. Isso atesta a validade da asserção registrada na Observação 1.2.

A Propriedade I-1, por sua vez, implicará a semicontinuidade de Ψ conforme a definição 1.1. Para ver isto, seja $a \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que $\Psi^{-1}((a, \infty))$ é aberto em X. Se $v \in \Psi^{-1}((a, \infty))$, então $b := \Psi(v) > a$. Fixemos $\varepsilon_0 > 0$ tal que $b = \Psi(v) - \varepsilon_0 > a$. Diante da Propriedade I-1, garantimos que existe $\delta > 0$ satisfazendo

$$x \in B_\delta(v) \Rightarrow \Psi(x) \geq b > a,$$

o que nos fornece

$$B_\delta(v) \subset \Psi^{-1}((a,\infty)).$$

com isso, concluímos que v é ponto interior de $\Psi^{-1}((a,\infty))$. Segue então que $\Psi^{-1}(a,\infty)$ é aberto e Ψ é *sci*.

A propriedade indicada na Observação 1.2 faculta-nos um método prático para verificar se um dado funcional é *sci*; nos permite concluir, por exemplo, que a classe dos funcionais semicontínuos inferiormente é maior (no sentido de inclusão) do que a classe dos funcionais diferenciáveis, em verdade mostramos a partir disso que todo funcional contínuo é *sci*. Apresentamos agora alguns exemplos para ilustrar propriedades dos funcionais *sci*.

Exemplo 1.3 *Todo funcional* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *com* Φ *contínuo (logo também funcionais* C^1*) é sci. De fato, se* $u_n \to u_0$ *em* X*, então, por continuidade,* $\liminf \Phi(u_n) = \lim \Phi(u_n) = \Phi(u_0)$. $\square$

Exemplo 1.4 *(Um exemplo de funcional descontínuo que é sci): Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se \ \ x \in (-\infty, 0] \\ 1, & se \ \ x \in (0,\infty). \end{cases}$$

Temos f *descontínua (*f *é descontínua em* 0*), mas sci. Temos três casos.*

1. ***Caso 1***. $a \geq 1$*: nesse caso, temos* $f^{-1}((a,\infty)) = \varnothing$.

2. ***Caso 2***. $a < 0$*: nesse caso,* $f^{-1}((a,\infty)) = \mathbb{R}$.

3. ***Caso 3***. $0 \leq a < 1$*: nesse caso,* $f^{-1}((a,\infty)) = (0,\infty)$.

Em todos os casos, $f^{-1}(a,\infty)$ *é um conjunto aberto e, portanto,* f *é sci.* $\square$

Exemplo 1.5 *Consideremos* $\mathbb{K} \subset X$ *convexo e fechado. Definindo* $\Psi : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$ *dado por*

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0, & se \ \ u \in \mathbb{K} \\ \infty, & se \ \ u \notin \mathbb{K} \end{cases}$$

Temos Ψ sci. Para mostrarmos isso consideramos $u_n \to u_0$ em X. Se $u_0 \in \mathbb{K}$ então, sendo $\Psi \geq 0$,

$$\Psi(u_0) \leq \Psi(u_n) \Rightarrow \Psi(u_0) \leq \liminf \Psi(u_n).$$

Caso contrário, se ocorre $u_0 \notin \mathbb{K}$, então, como estamos supondo $\mathbb{K}$ fechado, $X - \mathbb{K}$ é aberto. Isso acarreta que, por ser $\lim u_n = u_0$, temos $u_n \in X - \mathbb{K}$ para n suficientemente grande. Com isso

$$\Psi(u_n) = \infty, \forall n \geq n_0, \ \ n \in \mathbb{N}$$

de onde concluímos

$$\liminf \Psi(u_n) \geq \Psi(u_0),$$

assegurando o desejado.

***Observação**: Para efeito de menções futuras, o funcional Ψ definido desta forma será cognominado funcional indicador de $\mathbb{K}$.* $\square$

Exemplo 1.6 *Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, par e sci com $F(0) = 0$. Consideremos $X = L^p(\Omega)$. Definamos $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ dada por*

$$I(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega F(u)dx, \ se \ \ u \in D(F) \\ \infty, \ se \ \ u \notin D(F) \end{cases}$$

onde $D(F) := \{\ u \in X; F(u) \in L^1(\Omega)\}$. Mostremos que I é sci. Para tanto, consideremos $u_n \to u_0$ em X e , para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n := \int_\Omega F(u_n)dx.$$

Do fato de ser F convexa, par, com $F(0) = 0$ deduzimos $F \geq 0$. Para concluir isto, lembremos que F ser convexa significa que, para $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrários,

$$F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y), \forall t \in [0,1].$$

Daí, obtemos, sendo F par,

$$F(tx + (1-t)(-x)) \leq tF(x) + (1-t)F(-x) = F(x), \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F((2t-1)x) \leq F(x), \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{R}.$$

Escolhendo $t_0 = 1/2$, concluímos então

$$0 = F(0) = F((2t_0 - 1)x) \leq F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Das propriedades de limite inferior, para alguma subsequência $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$,

$$\lim a_{n_j} = \liminf a_n \in [0, \infty].$$

Como $\lim u_{n_j} = u_0$ em $L^p(\Omega)$, para alguma subsequência (que denotaremos ainda por (u_{n_j})), temos

$$\lim u_{n_j}(x) = u_0(x), \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

por resultados de teoria da medida (vide [5, Teorema 4.9]). Segue, por ser F semicontínua inferiormente, que

$$F(u_0(x)) \leq \liminf F(u_{n_j}(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como $F \geq 0$, do Lema de Fatou([3, Lema 4.8]), segue que

$$I(u_0) = \int_\Omega F(u_0)dx \leq \liminf \int_\Omega F(u_{n_j})dx = \lim a_{n_j} = \liminf \int_\Omega F(u_n)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(u_0) \leq \liminf I(u_n).$$

Concluindo o resultado. $\square$

Observação 1.7 *Para registrar que o conjunto de funções satisfazendo as hipóteses do Exemplo 1.6 é não-vazio considere $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t) = |t|^2$. Por verificação direta, temos F par com $F(0) = 0$. Por fim, F é sci e convexa. Isto segue porque F é duas vezes diferenciável, logo $F \in C(\mathbb{R})$, e assim sci. Vale ainda $F'' \equiv 2 > 0$, acarretando a convexidade de F (vide [17, Teorema 11, Capítulo VIII]).*

Na notação do Exemplo 1.6 , temos

$$I(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx, & \text{se } u \in D(F) \\ \infty, & \text{se } u \notin D(F) \end{cases}$$

nesse caso $D(F) = L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Os Exemplos 1.3 e 1.4 ilustram o fato supracitado de que a classe dos funcionais *sci* contém a classe dos funcionais diferenciáveis, fidedignamente, o Exemplo 1.4

mostra que existem funcionais *sci* que nem mesmo contínuos são. Diante disto, uma generalização de conceitos inerentes à coleção dos funcionais de classe C^1 para os funcionais *sci* - como é o caso de resultados do tipo minimax - constitui efetivamente uma generalização abrangente.

Quanto aos Exemplos 1.5 e 1.6, eles aludem aos modelos que discorreremos em capítulos posteriores, quando forem apresentadas as aplicações dos resultados estudados.

Nosso estudo versa sobre funcionais $I = \Phi + \Psi$, definidos num espaço de Banach X, com $\Phi \in C^1$ e Ψ *sci*, isto implica que I é *sci*, pois se $u_n \to u_0$ em X, então

$$\Phi(u_0) = \lim \Phi(u_n)$$

e

$$\Psi(u_0) \leq \liminf \Psi(u_n)$$

o que nos permite obter, por propriedades de limite inferior,

$$I(u_0) \leq \lim \Phi(u_n) + \liminf \Psi(u_n) \leq \liminf(\Phi(u_n) + \Psi(u_n)) = \liminf I(u_n),$$

mostrando que I é *sci*. Uma primeira dificuldade em se trabalhar com essa classe de funcionais é, portanto, a perca de propriedades relativas à continuidade. Algumas dessas propriedades, contudo, são preservadas, ainda que parcialmente, a exemplo da que registramos a seguir encerrando a seção:

Propriedade I-2: Se $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ é *sci* e $I(u_0) > A$, então existe $r > 0$ tal que $I(u) > A$ para $u \in B_r(u_0)$.

A justificativa da Propriedade I-2 é imediata da Observação 1.2: se, porventura, a Propriedade fosse falsa, existiria $u_n \in B_{1/n}(u_0)$ com $I(u_n) \leq A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, mas isso acarreta $u_n \to u_0$, enquanto que $I(u_0) > A \geq \liminf I(u_n)$, contradizendo o fato de I ser *sci* e mostrando a validade da Propriedade. No caso em que I é contínuo vale o mesmo resultado, *mutatis mutandis*, com $I(u_0) < A$ e, vez de $I(u_0) > A$.

1.2 Definição de ponto crítico e sequências *(PS)*

Nesta seção introduzimos os primeiros conceitos e notações relativos à Teoria dos Pontos Críticos. Iniciamos registrando a seguinte definição:

Definição 1.8 *Consideremos X um espaço de Banach e $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$. Diremos que*

1. *I cumpre a condição (H_0) para indicar que $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é da forma $I = \Phi + \Psi$, com $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\Psi : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ é convexo, sci e próprio (não ocorre $\Psi \equiv \infty$);*

2. *Um ponto $u_0 \in X$ é um ponto crítico de I cumprindo (H_0) se*

$$u_0 \in D(\Psi) := \{\ u \in X; \Psi(u) < \infty\}$$

e

$$\Phi'(u_0)(v - u_0) + \Psi(v) - \Psi(u_0) \geq 0, \forall v \in X. \tag{1.1}$$

Apresentamos a seguir duas observações que nos possibilitam, sob condições específicas, restringir o espaço das funções testes (v na Sentença (1.1)) para verificar que um dado elemento $u_0 \in X$ é ponto crítico de um funcional que cumpre (H_0).

Observação 1.9 1. *A Sentença (1.1) só precisa ser verificada para $v \in D(\Psi)$. De fato, se $v \notin D(\Psi)$, temos $\Psi(v) = \infty$ e a sentença está verificada.*

2. *Se $\mathbb{K} \subset X$ é convexo e fechado e Ψ é seu funcional indicador, como no Exemplo 1.5, então, se $I = \Phi + \Psi$ cumpre (H_0), um ponto $u_0 \in X$ é ponto crítico de I se, e somente se,*

$$\Phi'(u_0)(v - u_0) \geq 0, \forall v \in \mathbb{K}.$$

Isto ocorre por ser $D(\Psi) = \mathbb{K}$ e $\Psi \equiv 0$ em $\mathbb{K}$.

Segue um exemplo, em dimensão finita, no qual mostramos a existência de ponto crítico para um funcional que satisfaz (H_0) a fim de proporcionar um primeiro contato com a Definição 1.8. Outros exemplos ficam reservados ao capítulo em que apresentamos as aplicações, quando resolveremos desigualdades variacionais.

Exemplo 1.10 *Consideremos $X = \mathbb{R}$, $\Phi(t) = At + B$, $\Psi(t) = A|t|$, onde $A, B \in \mathbb{R}$, $A > 0$, e $I : \Phi + \Psi$. Temos $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e Ψ um funcional sci, pois $\Psi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ainda, para qualquer $t, s \in \mathbb{R}$ vale que*

$$|(1 - r)t + rs| \leq (1 - r)|t| + r|s|, \forall r \in [0, 1],$$

mostrando que Ψ *é convexa. Concluímos, então, que* I *satisfaz* (H_0). *Um ponto* t_0 *é um ponto crítico de* I *se, e somente se,*

$$\Phi'(t_0)(s - t_0) + \Psi(s) - \Psi(t_0) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R},$$

o que equivale a

$$A(s - t_0) + A|s| - A|t_0| \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Se $t_0 \leq 0$, *então* $t_0 \leq |t_0| = -t_0$ *e assim*

$$s \geq -|s|, \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(s - t_0) \geq A(-|s| + t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(s - t_0) + A|s| - A|t_0| \geq 0, \forall s \in \mathbb{R},$$

o que prova que t_0 *é ponto crítico de* I. □

Consideremos $I = \Phi + \Psi$ nos moldes da Definição 1.8. Se $\Psi \equiv 0$, então, pelo item 2 dessa definição, um ponto $u \in X$ é ponto crítico de I se

$$\Phi'(u)(v - u) \geq 0, \forall v \in X.$$

Dado $w \in X$, fazendo $v = w + u$, segue que

$$\Phi'(u)(v - u) = \Phi'(u)(w) \geq 0.$$

Como w foi escolhido arbitrariamente, depreendemos $\Phi'(u) \equiv 0$, pois fixado $w \in X$, em vista da última desigualdade, ocorre

$$0 \geq -\Phi'(u)(w) = \Phi'(u)(-w) \geq 0 \Rightarrow \Phi'(u) = 0,$$

mostrando que u é ponto crítico de I no sentido clássico. Assim a definição de ponto crítico dada no Item 2 da Definição 1.8 generaliza a definição do caso usual. Segue também que os exemplos de pontos críticos de funcionais do caso clássico constituem exemplos imediatos de pontos críticos de funcionais da forma (H_0).

Na literatura de estudo da generalização da Teoria dos Pontos Críticos, por vezes intitulada *Nonsmooth Analysis*, (vide [8], [9], [7] e [25]), o conjunto

$$\partial\Psi(u) := \{\ f \in X'; \Psi(v) - \Psi(u) \geq f(v - u), \forall v \in X\}$$

é denominado *subdiferencial de Ψ no ponto u*. Nessa linguagem, dizer que u_0 é um ponto crítico de um funcional I que cumpre (H_0) significa afirmar que $-\Phi'(u_0) \in \partial\Psi(u_0)$. A definição de $\partial\Psi$ é motivada pelo seguinte fato: quando $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional *localmente Lipschitziano*, i. e., para cada $x_0 \in X$, existe $M_0 > 0$ tal que

$$|\phi(v) - \phi(u)| \leq M_0||v - u||, \ \ \forall u, v \in N_0,$$

com N_0 uma vizinhança de x_0, definimos a *derivada direcional generalizada* de ϕ em x na direção de v como

$$\phi^0(x, v) = \limsup_{w \to x,\, t \to 0^+} \frac{\phi(w + tv) - \phi(w)}{t}.$$

O *gradiente generalizado* de ϕ no ponto x é definido como

$$\partial^*\phi(x) = \{f \in X'; \ \ \phi^0(x, v) \geq f(v), \ \ \forall v \in X\}.$$

Os conceitos de derivada direcional generalizada e gradiente generalizado constitui uma extensão do conceito usual de derivada. Sob algumas hipóteses adicionais podemos mostrar que $\phi^0(x, v)$ e $\partial^*\phi(x)$ coincidem com a derivada direcional, $\dfrac{\partial\phi}{\partial v}(x)$, usual de ϕ (vide [9, Proposições 2.2.1 e 2.2.4]). A propriedade relativa a gradientes generalizados que apresentamos a seguir motiva a definição do subdiferencial de um funcional convexo como uma generalização do conceito de gradiente generalizado:

Propriedade I-3: Se $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Lipschitziano e convexo, então

$$\partial^*\phi(u) = \partial\phi(u), \ \ \forall u \in X.$$

A prova da Propriedade I-3 pode ser encontrada em [9, Proposição 2.2.7].

Em resumo, a definição de $\partial\Psi$ pode ser entendida como uma generalização do conceito de derivada direcional usual.

Definição 1.11 *(condição (PS)): Seja $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ satisfazendo (H_0). Diremos que I satisfaz a condição (PS) no nível $c \in \mathbb{R}$ se, para cada sequência (u_n) em X tal $I(u_n) \to c$ e*

$$\Phi'(u_n)(v - u_n) + \Psi(v) - \Psi(u_n) \geq -\varepsilon_n||v - u_n||, \ \ \forall v \in X \tag{1.2}$$

com $\varepsilon_n \to 0$, possui subsequência convergente em X.

Para indicar que uma sequência (u_n) em X cumpre a Sentença (1.2) com $I(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ diremos que (u_n) é uma *sequência* (PS) *no nível* c; quando I satisfizer a condição (PS) para todo nível $c \in \mathbb{R}$ diremos simplesmente que I satisfaz a condição (PS). A proposição seguinte registra uma propriedade interessante relativa às sequências (PS), similar ao que ocorre no caso clássico.

Fixaremos agora algumas notações. Consideremos $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ satisfazendo (H_0) e $c \in \mathbb{R}$, então

i): $I_c := \{\ u \in X; I(u) \leq c\} \ = I^{-1}((-\infty, c]);$
ii): $K_c := \{\ u \in X; u \text{ é ponto crítico de } I \text{ e } I(u) = c\}$

Proposição 1.12 *Suponha que* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty], I = \Phi + \Psi$, *satisfaz as condições* (H_0) *e* (PS). *Se* (u_n) *é uma sequência* (PS) *no nível* c *e possui subsequência convergente para* $u \in X$, *então* $u \in K_c$. *Em particular,* K_c *é compacto.*

Demonstração. Por simplicidade denotaremos a subsequência convergente para u ainda por (u_n). Da condição (H_0) temos Ψ funcional *sci*, segue-se, portanto, $\Psi(u) \leq \liminf \Psi(u_n)$, considerando uma subsequência de (u_n) se necessário podemos, então, admitir que ocorre

$$\Psi(u) \leq \lim \Psi(u_n).$$

Passando ao limite a Sentença (1.2) (definição de sequência (PS)), obtemos

$$\Phi'(u)(v-u) + \Psi(v) - \Psi(u) \geq \Phi'(u)(v-u) + \Psi(v) - \lim \Psi(u_n) \geq 0, \forall v \in X.$$

Com isso u é ponto crítico de I. Ainda da sentença (1.2) temos, fazendo $v = u$,

$$\Phi'(u_n)(u-u_n) + \Psi(u) - \Psi(u_n) \geq -\varepsilon_n||u-u_n||, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $u_n \to u$ obtemos

$$\Psi(u) - \lim \Psi(u_n) \geq 0 \Rightarrow \Psi(u) \geq \lim \Psi(u_n),$$

garantindo que $\lim \Psi(u_n) = \Psi(u)$. Logo, sendo $I(u_n) \to c$,

$$c = \lim I(u_n) = \lim \left(\Phi(u_n) + \Psi(u_n)\right) = \Phi(u) + \Psi(u) = I(u),$$

implicando $u \in K_c$.

A compacidade de K_c segue diretamente do que já foi obtido. De fato, se $u_n \in K_c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $I(u_n) = c$ e (u_n) é uma sequência (PS) com $\varepsilon_n = 0$. Do precipuamente exposto, e por I satisfazer (PS), concluímos que (u_n) possui uma subsequência $u_{n_j} \to u_0 \in K_c$. ■

Da última proposição decorre que a existência de sequências (PS) no nível c para um funcional I, que cumpre a condição (PS), garante que $K_c \neq \varnothing$. Dizemos então que c é um *valor crítico de I*. Esse fenômeno mostra que a noção de sequência (PS) apresentada na Definição 1.11 concorda com o que ocorre no caso clássico, quando $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Efetivamente, nesse caso, uma sequência (PS) é definida com uma sequência (u_n) que satisfaz

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0.$$

Da regularidade de I, se (u_n) possui subsequência convergente para algum u, então $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$ (c é valor crítico). Na próxima seção mostraremos que outra propriedade válida no caso clássico se preserva em nosso estudo: mínimos locais são pontos críticos.

Observação 1.13 *Como no Item 2 da Observação 1.9, a definição de sequências (PS) pode ser reformulada quando consideramos $\mathbb{K} \subset X$ convexo e fechado e Ψ seu funcional indicador. Se $I = \Phi + \Psi$ cumpre (H_0), então, I satisfaz a condição (PS) se, e somente se, cada sequência (u_n) em $\mathbb{K}$ tal que*

$$\Phi'(u_n)(v - u_n) \geq -\varepsilon_n ||v - u_n||, \quad \forall v \in \mathbb{K}, \tag{1.3}$$

possui subsequência convergente. Isso segue notando que, pela definição de Ψ, a sentença em (1.3) equivale à Sentença (1.2) da definição de condição (PS), pois $\Psi \equiv 0$ em $\mathbb{K}$ e $\Psi \equiv \infty$ em $X - \mathbb{K}$.

1.3 Resultados de minimização

Aflora no âmago dos amantes da Teoria dos Pontos Críticos - ou simplesmente interessados em geral - o questionamento sobre a existência de resultados de minimização. Na perspectiva de contemplar tal anseio, seguem dois resultados que apresentam a relação existente entre pontos de mínimo e Pontos Críticos de um funcional que cumpre (H_0). Reiteramos que $u \in X$ é dito um *mínimo local* de I quando $I|_{B_r(u)} \geq I(u)$ para algum $r > 0$.

Proposição 1.14 *Seja $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $I = \Phi + \Psi$, satisfazendo (H_0). Se $u \in X$ é um ponto de mínimo local de I, então u é um ponto crítico de I.*

Demonstração. Suponha u ponto de mínimo local de I. Existe, portanto, $\delta > 0$ tal que, se $v \in B_\delta(u)$, temos $I(v) \geq I(u)$. Se $t \approx 0^+$, fixado $v \in X$, concluímos que $(tv + (1-t)u) \in B_\delta(u)$. De fato, temos, para $t \approx 0^+$,

$$||(tv + (1-t)u) - u|| = t||v - u|| < \delta.$$

Segue da convexidade Ψ que

$$0 \leq I(tv + (1-t)u) - I(u) = (\Phi(tv + (1-t)u) - \Phi(u)) + (\Psi(tv + (1-t)u) - \Psi(u)) \leq$$

$$\leq (\Phi(tv + (1-t)u) - \Phi(u)) + (t\Psi(v) + (1-t)\Psi(u) - \Psi(u)) =$$

$$(\Phi(tv + (1-t)u) - \Phi(u)) + t(\Psi(v) - \Psi(u)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{t}(\Phi(u + t(v-u)) - \Phi(u)) + (\Psi(v) - \Psi(u)).$$

Logo, fazendo $t \to 0$ e $w = v - u$,

$$0 \leq \frac{\partial \Phi}{\partial w}(u) + \Psi(v) - \Psi(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \Phi'(u)(w) + \Psi(v) - \Psi(u) = \Phi'(u)(v-u) + \Psi(v) - \Psi(u),$$

mostrando que u é um ponto crítico de I. ■

Para o próximo resultado utilizaremos o teorema a seguir cuja demonstração consta em [14, Teorema 1] ou [24, Teorema 5.1]:

Teorema 1.15 *(Princípio Variacional de Ekeland): Suponhamos que (Y, d) denote um espaço métrico completo Y com métrica d e que $\varphi : Y \to (-\infty, \infty]$ seja um funcional sci, limitado inferiormente e próprio. Então, dados $\delta, \lambda > 0$, $x \in Y$ tais que*

$$\varphi(x) \leq \inf_{y \in Y} \varphi(y) + \delta$$

existe $z \in Y$ com

1. $\varphi(z) \leq \varphi(x)$ *e* $d(z, x) \leq 1/\lambda$*;*

2. $\varphi(y) - \varphi(z) \geq -\delta\lambda d(y, z)$.

Quando estudamos resultados de minimização para funcionais de classe C^1 o Princípio Variacional de Ekeland ($P.V.E.$) é de extrema relevância, porquanto nos permite associar ao nível $c := \inf\limits_X I$, ao considerarmos $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, uma sequência (PS). Para ver isto, suponha $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ seja limitado inferiormente. Segue do $P.V.E.$ que, para cada $n \in \mathbb{N}$, supondo $\delta_n = 1/n^2$, $\lambda_n = n$ e

$$I(u_n) \leq \inf_X I + \frac{1}{n^2},$$

existe $v_n \in X$ tal que

$$c \leq I(v_n) \leq I(u_n) \leq c + \frac{1}{n^2},$$

e, para $w \in X$,

$$I(v_n + w) - I(v_n) \geq -\frac{1}{n}||(w + v_n) - v_n|| = -\frac{1}{n}||w|| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I(v_n + w) - I(v_n)}{||w||} \leq \frac{1}{n}.$$

Fazendo $w \to 0$ e $n \to \infty$ obtemos

$$I(v_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(v_n) \to 0,$$

mostrando o que afirmamos no início do parágrafo.

O próximo resultado ressalta que o mesmo $P.V.E.$ também permite associar ao nível $c := \inf\limits_X I$ de um funcional que cumpre (H_0) uma sequência (PS), com mais acurácia, nos possibilita provar o resultado seguinte.

Proposição 1.16 *Suponha* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty], I = \Phi + \Psi$, *um funcional que satisfaça* (H_0) *e* (PS) *limitado inferiormente. Então*

$$c := \inf_X I$$

é um valor crítico de I*, isto é,* $K_c \neq \emptyset$*.*

Demonstração. Consideremos (v_n) uma sequência tal que

$$I(v_n) \leq c + \frac{1}{n^2},$$

que existe pela definição de ínfimo. Do *P.V.E.*, fazendo $\lambda_n = n$, existe (u_n) tal que

$$c \leq I(u_n) \leq I(v_n) \leq c + \frac{1}{n^2}$$

e

$$I(v) - I(u_n) \geq -\frac{1}{n}||v - u_n||, \forall v \in X.$$

Temos, diante disso, $I(u_n) \to c$ e, para $t \in (0, 1]$, pela convexidade de Ψ,

$$(\Phi(tv + (1-t)u_n)) - \Phi(u_n)) + (t\Psi(v) + (1-t)\Psi(u_n) - \Psi(u_n)) \geq$$

$$\geq (\Phi(tv + (1-t)u_n)) - \Phi(u_n)) + (\Psi(tv + (1-t)u_n) - \Psi(u_n)) \geq -\frac{1}{n}t||v - u_n||.$$

Dividindo por t a última expressão obtemos

$$\frac{1}{t}(\Phi(tv + (1-t)u_n)) - \Phi(u_n)) + (\Psi(v) - \Psi(u_n)) \geq -\frac{1}{n}||v - u_n||.$$

Fazendo $t \to 0$,

$$\Phi'(u_n)(v - u_n) + \Psi(v) - \Psi(u_n) \geq -\frac{1}{n}||v - u_n||, \forall v \in X.$$

Logo, (u_n) é uma sequência (PS) no nível c. Como I cumpre a condição (PS), existe subsequência (u_{n_j}) de (u_n) convergente. Digamos, $u_{n_j} \to u_0$. Pela Proposição 1.12, temos $u_0 \in K_c$ e c é um valor crítico de I. ■

1.4 Lemas de deformação

Nos resultados do tipo Minimax para funcionais de classe C^1 os denominados *Lemas de Deformação* desempenham papel fundamental. Esses resultados são assim denominados por nos assegurar a existência de uma aplicação $\alpha \in C([0, 1] \times X, X)$ com a propriedade de que pontos de um nível de maior energia de um funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ são associados a ("deformados em") níveis de menor energia - energia aqui, como corriqueiro na Teoria dos Pontos Críticos, refere-se ao valor assumido pelo funcional, por vezes denominado funcional energia. Numa linguagem mais formal, temos $\alpha(1, I_{c+\varepsilon}) \subset I_{c-\varepsilon}$. Clarificadamente, temos o seguinte resultado circunstante em **Costa**, [10, Teorema 2.1, Capítulo 3].

Teorema 1.17 *(Lema de Deformação Clássico - releitura): Suponhamos $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $c, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $A \subset X$, com $\delta, \varepsilon > 0$ tais que*

$$u \in I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap A_{2\delta} \Rightarrow ||I'(u)|| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}.$$

Então, existe $\alpha \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

1. *$\alpha(t,.) \in C(X,X)$ é homeomorfismo para todo $t \in [0,1]$;*

2. *$\alpha(1, I_{c+\varepsilon} \cap A) \subset I_{c-\varepsilon} \cap A_{2\delta}$.*

Observação 1.18 *Considerando $A = X$ no último resultado temos $\alpha(1, I_{c+\varepsilon}) \subset I_{c-\varepsilon}$ no Item 2.*

A importância do Lema de Deformação pode ser evidenciada, por exemplo, na demonstração do *Teorema do Passo da Montanha*, que se configura elegantemente sucinta como consequência do Teorema 1.17 [26, p. 12-13]; outras versões do Lema de Deformação também são utilizadas nas demonstração de resultados minimax que utilizam *Teoria do Gênero* (e.g.,[10, Teorema 3.5] e [22, Teorema 5.14]), ilustrando a importância de resultados do perfil do Teorema 1.17 em resultados minimax. O Lema de Deformação, por sua vez, faz o uso de um conceito conhecido como *Campo Pseudogradiente* ([10, Definição 1, Capítulo 3]) associado a um funcional I de classe C^1 em sua demonstração, fazendo-se crucial, portanto, a hipótese de regularidade do funcional para o qual se deseja aplicar as propriedade advindas de tal resultado. Isto torna ínvio a reprodução desse resultado para a classe dos funcionais que cumprem (H_0).

Essa discussão preliminar soergue uma justificativa sobre a relevância de uma versão alternativa do Lema de Deformação para a classe dos funcionais que satisfazem (H_0), dado que um funcional satisfazendo a condição (H_0) nem mesmo contínuo é necessariamente. Tais aspectos sustentam a imprescindibilidade desta seção, na qual apresentaremos a coleção de resultados que estão para os teoremas do tipo minimax que desejamos provar do mesmo modo que o Lema de Deformação (Teorema 1.17) está para os resultados minimax no caso clássico. O resultado principal dessa seção assegura a existência de uma aplicação $\alpha \in C([0, s_0] \times W, X))$, com $W \subset X$ fechado, tal que, se I satisfaz (H_0) e (PS), então $I(\alpha(s, \cdot))$ cumpre estimativas que nos permitirão provar as versões minimax do tipo Passo da Montanha e da Teoria do Gênero para funcionais *sci* da forma (H_0).

Seguimos agora no propósito de provar o resultado principal da presente seção. Embora esbarremos no dissabor de não obtermos as mesmas propriedades válidas no caso $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, em virtude das implicações mencionadas no parágrafo anterior, o resultado principal da seção será denominado Lema de Deformação. Iniciamos com alguns resultados que nos auxiliam na demonstração do teorema principal.

Proposição 1.19 *Sejam $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$ um funcional que satisfaz (H_0) e (PS), $c \in \mathbb{R}$ e N uma vizinhança de K_c. Para cada $\varepsilon_0 > 0$ existe $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tal que, se $u_0 \notin N$ e $u_0 \in I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, então existe $v_0 \in X$ satisfazendo*

$$\Phi'(u_0)(v_0 - u_0) + \Psi(v_0) - \Psi(u_0) < -3\varepsilon||v_0 - u_0||. \tag{1.4}$$

Demonstração. Se o resultado não é válido, para cada $n \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{n} < \varepsilon_0$ existiria $u_n \in X - N$ tal que

$$c - \frac{1}{n} \leq I(u_n) \leq c + \frac{1}{n}$$

e

$$\Phi'(u_n)(v - u_n) + \Psi(v) - \Psi(u_n) \geq -\frac{3}{n}||v - u_n||, \forall v \in X.$$

Como $1/n < \varepsilon_0$ exceto para uma quantidade finita de índices $n \in \mathbb{N}$, segue-se que $I(u_n) \to c$ e, por I satisfazer (PS), que (u_n) possui subsequência convergente para algum u_0. Pela Proposição 1.10, $u_0 \in K_c$, das propriedades de convergência, ocorre $u_n \in N$ para uma infinidade de índices n, isso contradiz $u_n \notin N$. ■

Corolário 1.20 *Sejam $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, N e ε como na proposição anterior. Então, se $u \in X$ é um ponto crítico de I tal que $u \in I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ então $u \in N$.*

Demonstração. Se $u \notin N$, então estão verificadas todas as hipóteses da proposição anterior e assim existe $v_0 \in X$ tal que (1.4) ocorre e u não seria ponto crítico. ■

Lema 1.21 *Suponhamos que $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, satisfaz (H_0) e (PS). Consideremos $c \in \mathbb{R}$, N e $\varepsilon > 0$ satisfazendo (1.4). Para cada $u_0 \in I_{c+\varepsilon} - N$ existem $v_0 \in X$ e U_0 vizinhança de u_0 tais que*

1. *$\Phi'(u)(v_0 - u) + \Psi(v_0) - \Psi(u) \leq ||v_0 - u||, \forall u \in U_0$;*

2. $\Phi'(u)(v_0 - u) + \Psi(v_0) - \Psi(u) < -3||v_0 - u_0||, \forall u \in U_0 \cap I^{-1}([c-\varepsilon, \infty))$.

Mais ainda, se u_0 é ponto crítico de I podemos escolher $u_0 = v_0$ no Item 1. Caso contrário, podemos escolher $v_0 \notin \overline{U_0}$ de modo que 1 pode ser reformulado do seguiste modo:

$$\Phi'(u_0)(v_0 - u) + \Psi(v_0) - \Psi(u) < -3\delta_0||v_0 - u||, \ \forall u \in U_0, \tag{1.5}$$

para algum $\delta_0 > 0$.

Demonstração. Motivados pelo enunciado, separamos a demonstração em dois casos:
1. *u_0 é ponto crítico de I*:

Pela definição de ponto crítico (veja (1.2)) u_0 satisfaz

$$\Phi'(u_0)(u - u_0) + \Psi(u) - \Psi(u_0) \geq 0, \ \forall u \in X.$$

Segue disso que, para $\delta \approx 0^+$, escrevendo $U_0 = B_\delta(u_0)$, temos

$$\begin{aligned}\Phi'(u)(u_0 - u) + \Psi(u_0) - \Psi(u) &< \Phi'(u)(u_0 - u) - \Phi(u_0)(u_0 - u) = \\ &= (\Phi'(u) - \Phi'(u_0))(u_0 - u) \leq \\ &\leq ||\Phi'(u) - \Phi'(u_0)||||u_0 - u|| \leq \\ &\leq ||u_0 - u||, \ \forall u \in U_0,\end{aligned}$$

pois $||\Phi'(u) - \Phi'(u_0)|| < 1$ se $\delta \approx 0^+$. Isso mostra o Item 1 com $v_0 = u_0$ e $U_0 = B_\delta(u_0)$. Como das hipóteses $u_0 \in I_{c+\varepsilon} - N$, temos $I(u_0) < c - \varepsilon$, do contrário, seria $c - \varepsilon \leq I(u_0) \leq c + \varepsilon$ e concluiríamos, pelo Corolário 1.18, $u_0 \in N$, o que contradiz a hipótese vigente. Se porventura ocorre

$$I(u) < c - \varepsilon, \forall u \in U$$

para alguma vizinhança U de u_0 redefinimos U_0 como $U \cap B_\delta(u_0)$ e o Item 2 não precisa ser verificado porquanto $U_0 \cap I^{-1}([c-\varepsilon, \infty)) = \varnothing$. Admitamos agora que qualquer vizinhança de u_0 possua pontos u tais que $I(u) \geq c - \varepsilon$. Diante disso, temos o seguinte resultado:

Resultado 1: *Existe $A > 0$ tal que $\Psi(u) - \Psi(u_0) \geq A$ para todo u tal que $I(u) \geq c - \varepsilon$ e $||u - u_0|| \approx 0^+$.*

Prova: De fato, se não fosse verdadeira a asserção do Resultado 1, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria $u_n \in B_{1/n}(u_0)$ e $I(u_n) \geq c - \varepsilon$ e $\Psi(u_n) - \Psi(u_0) < 1/n$. Assim, temos $u_n \to u_0$ e $\liminf (\Psi(u_n) - \Psi(u_0)) \leq 0$. Podemos então assumir que, considerando uma subsequência de (u_n) se necessário (e não mais nos preocuparemos em registrar essa sutileza novamente, apenas para evitar inoportuna inconveniência na leitura, a exemplo deste surpreendente aposto),

$$\lim (\Psi(u_n) - \Psi(u_0)) \leq 0 \Rightarrow \lim \Psi(u_n) \leq \Psi(u_0).$$

Como Ψ é *sci*, segue então $\lim \Psi(u_n) \geq \Psi(u_0)$, por conseguinte, $\lim \Psi(u_n) = \Psi(u_0)$. Isso nos fornece, sendo Φ contínua,

$$c - \varepsilon \leq I(u_n) = \Phi(u_n) + \Psi(u_n) \to \Phi(u_0) + \Psi(u_0) = I(u_0) < c - \varepsilon,$$

que é uma contradição. Logo, o resultado é válido. $\square$

Diante do Resultado 1, temos

$$\Phi'(u)(u_0 - u) + \Psi(u_0) - \Psi(u) < ||\Phi'(u)||||(u_0 - u)|| - A \leq$$
$$\leq -3\varepsilon||u_0 - u||, \quad \forall u \in U_0, \quad I(u) \geq c - \varepsilon.$$

A última desigualdade é válida, pois, sendo $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, temos $||\Phi'(u)||$ limitada numa vizinhança de u_0, digamos $||\Phi'(u)|| \leq B$, implicando, se $\delta \approx 0^+$,

$$(||\Phi'(u)|| + 3\varepsilon)||u_0 - u|| \leq (B + 3\varepsilon)\delta \leq A, \forall u \in U_0,$$

concomitantemente,

$$||\Phi'(u)||||u_0 - u|| - A \leq$$
$$\leq -3\varepsilon||u_0 - u||.$$

Isso termina o primeiro caso.

2. u_o *não é ponto crítico de* I:

Não sendo u_0 ponto crítico de I existe $v_0 \in X$ tal que

$$\Phi'(u_0)(v_0 - u_0) + \Psi(v_0) - \Psi(u_0) < 0.$$

Escrevendo $w = tv_0 + (1 - t)u_0$, $0 < t < 1$, segue da convexidade de Ψ,

$$\Phi'(u_0)(w - u_0) + \Psi(w) - \Psi(u_0) \leq$$
$$\leq t(\Phi'(u_0)(v_0 - u_0)) + t(\Psi(v_0) - \Psi(u_0)) =$$

$$= t(\Phi'(u_0)(v_0 - u_0) + \Psi(v_0) - \Psi(u_0)) < 0, \quad 0 < t < 1.$$

Assim, como $||w - u_0|| = t||v_0 - u_0||$, podemos assumir que ocorre $||v_0 - u_0|| \approx 0^+$, basta substituir v_0 por w com $t \approx 0^+$.

Suponhamos $I(u_0) < c - \varepsilon$. Podemos então aplicar o Resultado 1 e concluir que existe $A > 0$ tal que

$$\Psi(u) - \Psi(u_0) > A, \forall u \in U_0, \quad I(u) \geq c - \varepsilon.$$

Se $||v_0 - u_0|| \approx 0^+$ e U_0 é suficientemente pequena (i.e., $\delta \approx 0^+$), então, como $\Psi(v_0) - \Psi(u_0) < -\Phi'(u_0)(v_0 - u_0)$,

$$\Psi(v_0) - \Psi(u) = (\Psi(v_0) - \Psi(u_0)) + (\Psi(u_0) - \Psi(u)) \leq$$
$$\leq ||\Phi'(u_0)||||v_0 - u_0|| - A \leq \frac{1}{2}A - A = -\frac{1}{2}A, \forall u \in U_0.$$

Concluímos, com isso,

$$\Phi'(u)(u_0 - u) + \Psi(u_0) - \Psi(u) < ||\Phi'(u)||||(u_0 - u)|| - \frac{1}{2}A \leq$$
$$\leq -3\varepsilon||u_0 - u||, \quad \forall u \in U_0, \quad I(u) \geq c - \varepsilon,$$

mostrando o Item 2 do Lema.

Como v_0 satisfaz

$$\Phi'(u_0)(v_0 - u_0) + \Psi(v_0) - \Psi(u_0) < 0$$

temos $v_0 \neq u_0$, e podemos então escolher $\delta \approx 0^+$ tal que $v_0 \notin \overline{U_0}$. Temos, para algum $\delta_0 > 0$,

$$\Phi'(u_0)(v_0 - u_0) + \Psi(v_0) - \Psi(u_0) < -\delta_0||v_0 - u_0||.$$

Com isso, pela continuidade de Φ' e por Ψ um funcional *sci* existe $\delta > 0$, $U_0 = B_\delta(u_0)$, satisfazendo

$$\Phi'(u)(v_0 - u) + \Psi(v_0) - \Psi(u) < -\delta_0||v_0 - u||, \forall u \in U_0,$$

doutro modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria $u_n \in B_{1/n}(u_0)$ de tal modo que

$$\Phi'(u_n)(v_0 - u_n) + \Psi(v_0) - \Psi(u_n) \geq -\delta_0||v_0 - u_n||$$

por passagem ao limite,

$$\Phi'(u_0)(v_0 - u_0) + \Psi(v_0) - \Psi(u_0) \geq$$

$$\Phi'(u_0)(v_0 - u_0) + \Psi(v_0) - \lim \Psi(u_n) \geq -\delta_0 ||v_0 - u_0||,$$

uma contradição.

Suponhamos agora que $I(u_0) \geq c - \varepsilon$. Podemos então aplicar a Proposição 1.19 e concluir que existe $v_0 \in X$ tal que

$$\Phi'(u_0)(v_0 - u_0) + \Psi(v_0) - \Psi(u_0) < -3\varepsilon ||v_0 - u_0||.$$

Como feito anteriormente, podemos concluir que para algum $\delta > 0$ a vizinhança U_0 satisfaz

$$\Phi'(u)(v_0 - u) + \Psi(v_0) - \Psi(u) < -3\varepsilon ||v_0 - u||, \forall u \in U_0$$

e temos o resultado com $\delta_0 = 3\varepsilon$.

Rigorosamente, está omitido que se verifica o Item 1 da tese. Isso não se faz necessário, conquanto é consequência imediata de valer

$$\Phi'(u)(v_0 - u) + \Psi(v_0) - \Psi(u) < -\delta_0 ||v_0 - u||, \forall u \in U_0,$$

uma vez que $-\delta_0||v_0 - u|| \leq ||v_0 - u||$.

Está encerrada a demonstração. ■

Apenas para efeito de menção sucinta a posteriori estabelecemos a seguinte definição:

Definição 1.22 *Dizemos que uma coleção de aplicações*

$$\alpha_s(\cdot) := \alpha(s, \cdot) : W \subset X \longrightarrow X, 0 \leq s \leq s_0,$$

para algum $s_0 > 0$, é uma deformação se $\alpha \in C([0, s_0] \times W, X)$ com $\alpha_0 \equiv Id_W$, onde Id_W denota a aplicação identidade em W.

Apresentamos agora o resultado principal da seção.

Teorema 1.23 *(Lema de Deformação): Suponhamos $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$ e $c \in \mathbb{R}$, N como no lema anterior. Dado $\varepsilon_0 > 0$ existe $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tal que para cada subconjunto compacto $A \subset X - N$ satisfazendo*

$$c \leq \sup_{u \in A} I(u) \leq c + \varepsilon$$

é possível obter $W \subset X$ fechado, com $A \subset \operatorname{int}(W)$, e uma deformação $\alpha \in C([0, s_0] \times W, X)$ satisfazendo

1. $||\alpha_s(u) - u|| \leq s, \ \ \forall u \in W$;

2. $I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq 2s, \ \ \forall u \in W$;

3. $I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq -2\varepsilon s, \ \ \forall u \in W \cap I^{-1}([c-\varepsilon, \infty))$;

ademais, se $W_0 \subset X$ é fechado sem pontos críticos podemos construir α verificando

4. $I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq 0, \ \ \forall u \in W \cap W_0$.

Por fim, vale a seguinte estimativa

$$\sup_{u \in A} I(\alpha_s(u)) - \sup_{u \in A} I(u) \leq -2\varepsilon s. \tag{1.6}$$

Demonstração. Ao longo desta demonstração denotaremos por K o conjunto dos pontos críticos de I. Consideremos $W_0 \subset X$ fechado tal que $W_0 \cap K = \varnothing$ e fixemos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ como no lema anterior. Dado $u_0 \in A$ temos

$$I(u_0) \leq \sup_{u \in A} I(u) \leq c + \varepsilon,$$

o que acarreta $u_0 \in I_{c+\varepsilon} - N$, uma vez que $A \subset X - N$. Podemos aplicar então o Lema 1.21 e considerar U_0 vizinhança de u_0 satisfazendo a tese do lema. O conjunto U_0 pode também ser escolhido satisfazendo a seguinte propriedade: se $u_0 \in K$, então podemos admitir que $U_0 \cap W_0 = \varnothing$, pois, se o contrário ocorresse, sendo $X - W_0$ aberto e $u_0 \in X - W_0$, para algum $r' > 0$, vale $B_r'(u_0) \subset X - W_0$. Outrossim, existe $r'' > 0$ com $B_{r''}(u_0) \subset U_0$, sendo $r := \min\{r', r''\}$, temos $B_r(u_0) \subset U_j \cap (X - W_0)$ e, então, redefinimos $U_0 = B_r(u_0)$. Esse procedimento pode ser aplicado a cada ponto $u \in A$ e obtemos, portanto, uma cobertura de A da forma $(U_j)_{j \in J}$ onde U_j é vizinhança de $u_j \in A$ satisfazendo o Lema 1.21. Da compacidade de A podemos considerar uma subcobertura finita $(U_j)_{1 \leq j \leq n_0}$. Ainda no Lema 1.21 é assegurado a existência de um v_0 relativo a U_0 cumprindo os itens dispostos na tese, vamos então, para cada $j \in J$, considerar que u_j, v_j e U_j conforme, respectivamente, u_0, v_0 e U_0 no Lema 1.21.

Podemos ainda admitir que se $u_i \in K$, então $d(u_i, U_j) > 0$, para $j \neq i$ (d denota a função distância). De fato, se não for esse o caso, se $u_i \in U_j$, para algum $j \neq i$, consideramos $V_i \subset U_i \cap U_j$ um fechado contendo u_i de modo que $u_j \notin V_i$. Substituímos, em nossa cobertura, U_j por $U_j - V_i$ (veja a Figura 1.1). Essa construção preserva a propriedade de cobertura porque a parte V_i retirada de U_j está contida em U_i.

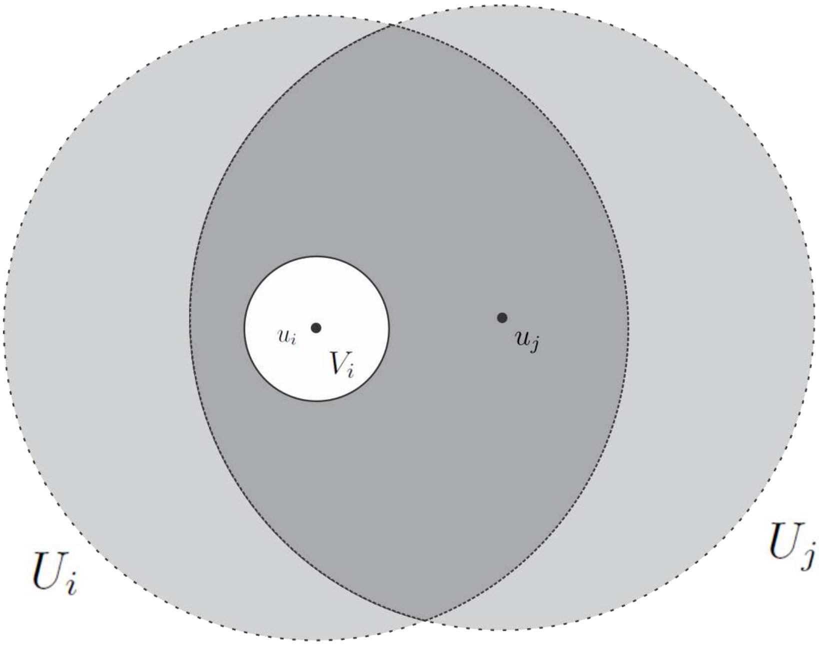

Figura 1.1: rearranjo da cobertura $(U_j)_{j\in J}$.

Para cada $i \in J$, definamos

$$\beta_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \beta_i(u) = d(u, X - U_i).$$

Vale o seguinte resultado:

Resultado 1: *A função* β_i *satisfaz* *:

1. $\beta_i \in C(X, \mathbb{R})$;

2. $\beta_i(u) > 0$, *para* $u \in U_i$, *e* $\beta_i(u) = 0$, *caso contrário.*

A prova do Resultado 1 consta em Apêndice A (Proposição A. 1).

Diante do Resultado 1, definamos

$$\sigma_i(u) = \beta_i(u)/(\sum_{j=1}^{n_0} \beta_j(u)), \ \ \forall u \in U := \bigcup_j U_j.$$

Temos $0 \leq \sigma_i \leq 1$ e σ_i contínua, por ser $\beta_i \geq 0$ contínua. Vamos definir nossa deformação α por caso. Definimos

$$\alpha_s(u) = \begin{cases} u + s(u_i - u)/||u - u_i||, & 0 \leq s < ||u - u_i||; \\ u_i, & s \geq ||u - u_i||, \end{cases} \tag{1.7}$$

*A função β_i poderia ser substituída por qualquer função contínua satisfazendo os itens 1 e 2 listados.

para $u \in U_i - (\bigcup_{j \neq i} U_j)$, $u_i \in A \cap K$. Para os demais pontos $u \in U$, definimos

$$\alpha_s(u) = u + s \sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u)(v_j - u)/||v_j - u||. \tag{1.8}$$

A expressão (1.8) está bem definida, porquanto no Lema 1.21, quando $u_j \notin K$, podemos escolher $v_j \notin U_j$, assim $||v_j - u|| \neq 0$, para $u \in U_j$. Ademais, quando $u \in U_i - (\bigcup_{j \neq i} U_j)$, $u \neq u_i$ e $s \leq ||u - u_i||$, as Sentenças (1.7) e (1.8) coincidem. De fato, nesse caso, temos $\sigma_i(u) = 1$ e $\sigma_j(u) = 0$, $j \neq i$, assim

$$u + s \sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u)(v_j - u)/||v_j - u|| = u + \sigma_i(u)(v_i - u)/||v_i - u|| =$$

$$= u + s(u_i - u)/||u_i - u||,$$

pois $v_i = u_i$ quando $u_i \in K$. Isso auxiliará na demonstração de que $\alpha \in C([0, s_0] \times U, X)$ (Proposição A.2). Notemos que $\alpha_0 = Id_U$ e se α é como em (1.7)

$$||\alpha_s(u) - u|| = ||s \frac{(u_i - u)}{||u_i - u||}|| = s.$$

Se α é dada por (1.8), então

$$\begin{aligned} ||\alpha_s(u) - u|| &= ||s(\sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u)(v_j - u)/||v_j - u||)|| \leq \\ &\leq s \sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u)||(v_j - u)/||v_j - u||)|| = \\ &= s(\sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u)) = s, \end{aligned}$$

pois $\sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u) = 1$. Está então mostrado o Item 1 do teorema em qualquer caso. Mostraremos os demais itens considerando as duas possibilidades para α.

1. *α é dada por (1.8)*:

Podemos considerar que, sucintamente, $\alpha_s(u) = u + sw$. Segue então que

$$I(\alpha_s(u)) = I(u + sw) = \Phi(u + sw) + \Psi(u + sw).$$

Sendo $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, podemos escrever

$$\Phi(u + sw) = \Phi(u) + s\Phi'(u)(w) + r(s),$$

onde r satisfaz $\lim_{s\to 0}(r(s)/s||w||) = 0$, o que nos fornece

$$I(\alpha_s(u)) = \Phi(u) + s\Phi'(u)(w) + r(s) + \Psi(u + sw),$$

Vale ainda que, pelo Teorema do Valor Médio ([17, Teorema 7, CapítuloVIII]), aplicado à função $\varphi(t) := \Phi(u + tw)$, $0 \leq t \leq s$, concluímos

$$r(s) + s\Phi'(u)(w) = \Phi(u)(u + sw) - \Phi(u) = \Phi'(u + t_0 w)(w)(s - 0),$$

para algum $t_0 \in [0, s]$. Assim,

$$r(s) = s(\Phi'(u + t_0 w) - \Phi'(u))(w) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r(s)| \leq s \sup_{0\leq t\leq s} ||\Phi'(u + tw) - \Phi'(u)||||w||.$$

Consideremos $\delta > 0$ tal que

$$3\delta \leq \max_{i\in J}\{1, \varepsilon, \delta_i\}, \tag{1.9}$$

com δ_j satisfazendo para U_j e v_j

$$\Phi'(u_j)(v_j - u) + \Psi(v_j) - \Psi(u) < -3\delta_j||v_j - u||, \ \ \forall u \in U_j,$$

como no Lema 1.21. Temos, então, o seguinte resultado:

Resultado 2: *Existem $W \subset X$ fechado contendo A e $s_0 > 0$ tais que:*

$$|r(s)| \leq s \sup_{0\leq t\leq s} ||\Phi'(u + tw) - \Phi'(u)|| \leq s\delta, \ \ \forall s \leq s_0,$$

para $u \in W$ e $w \in X$, com $||w|| = 1$.

Prova: Para justificarmos a validade do resultado raciocinamos do seguinte modo: por continuidade, para cada $u \in A$ existe $\delta_u > 0$ tal que

$$||\Phi'(v) - \Phi'(u)|| < \delta/2, \forall v \in B_{\delta_u}(u).$$

Se $||w|| = 1$, então $||(u + tw) - u|| = t||w|| = t$. Com isso, se $t \approx 0^+$ então $u + tw \in B_{\delta_u}(u)$. Ora, como A é, por hipótese, compacto, existem $u_1, ..., u_m \in A$ tais que $A \subset \bigcup_{1\leq i\leq m} B_{\delta_{u_i}}(u_i)$. Podemos escolher $u_1, ..., u_m$ de modo que se ratifique

$$A \cap B_{\delta_{u_i}}(u_i) \neq \varnothing, \forall i \in \{1, ...m\},$$

pois excluindo os índices i com $A \cap B_{\delta_{u_i}}(u_i) = \varnothing$ em $(B_{\delta_{u_i}}(u_i))_{1\leq i\leq m}$ temos ainda $A \subset \bigcup_{1\leq i\leq m} B_{\delta_{u_i}}(u_i)$. Logo, definindo $W = \bigcup_{1\leq i\leq m} \overline{B_{\delta_{u_i}}}(u_i)$ temos W fechado, $A \subset W$ e, dado $u \in W$, se $u \in B_{\delta_{u_i}}(u_i)$, então, supondo $t \leq \delta_{u_i}$, segue que

$$||\Phi'(u+tw) - \Phi'(u)|| \leq ||\Phi'(u+tw) - \Phi'(u_i)|| + ||\Phi'(u_i) - \Phi'(u)|| \leq$$
$$\leq 2\delta/2 = \delta.$$

Então escolhendo $0 < s_0 = \min_{1\leq i\leq m} \delta_{u_i}$ concluímos o resultado. $\square$

Seguimos com a demonstração. No caso em que α é dado por (1.8), temos $v_j \notin U_j$ e, assim, para $u \in U_j$ arbitrário, $||v_j - u|| \geq d(v_j, U_j) > 0$. Depreendemos desse fato e de $\sum_{i=1}^{n_0} \sigma_i = 1$ que

$$\sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u)||v_j - u||^{-1} \leq M,$$

para algum $M \geq \max_{1\leq j\leq n_0} d(v_j, U_j)^{-1}$. Isso nos permite assegurar que, para algum $s_1 > 0$ tem-se que $0 \leq s\sum_{j=1}^{n_0}\sigma_j(u)||v_j - u||^{-1} \leq sM \leq 1$, desde que $0 \leq s \leq s_1$. Com isso, escrevendo (1.8) como

$$\alpha_s(u) = (1 - s\sum_{j=1}^{n_0}\sigma_j(u)||v_j - u||^{-1})u + (s\sum_{j=1}^{n_0}\sigma_j(u)||v_j - u||^{-1})v_j,$$

da convexidade de Ψ concluímos que, para $u \in W$, $s \leq \min\{s_0, s_1\}$,

$$I(\alpha_s(u)) = \Phi(u) + s\Phi'(w) + \Psi(u+sw) + r(s) \leq$$
$$\leq \Phi(u) + s(\sum_{j=1}^{n_0}\sigma_j(u)||v_j - u||^{-1})\Phi'(u)(v_j - u) +$$
$$+(1 - s\sum_{j=1}^{n_0}\sigma_j(u)||v_j - u||^{-1})\Psi(u) +$$
$$+s\sum_{j=1}^{n_0}\sigma_j(u)||v_j - u||^{-1})\Psi(v_j) + \delta s =$$
$$= I(u) + \delta s + s\sum_{j=1}^{n_0}\sigma_j(u)||v_j - u||^{-1}(\Phi'(u)(v_j - u) + \Psi(v_j) - \Psi(u)).$$

Pelo Item 1 do Lema 1.21, temos $\Phi'(u)(v_j - u) + \Psi(v_j) - \Psi(u) \leq ||v_j - u||$, para $u \in U_j$ acarretando então que

$$s\sum_{j=1}^{n_0}\sigma_j(u)||v_j - u||^{-1}(\Phi'(u)(v_j - u) + \Psi(v_j) - \Psi(u)) \leq s\sum_{j=1}^{n_0}\sigma_j(u) = s,$$

e assim, se $s \approx 0^+$,

$$I(\alpha_s(u)) \leq I(u) + \delta s + s, \forall u \in W.$$

Segue que

$$I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq (1+\delta)s \leq 2s,$$

dado que δ foi escolhido menor do que 1 ($3\delta \leq 1$). Isso mostra o Item 2.

Como feito acima, considerando a desigualdade

$$I(\alpha_s(u)) \leq I(u) + \delta s + s\sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u)||v_j - u||^{-1}(\Phi'(u)(v_j - u) + \Psi(v_j) - \Psi(u)),$$

pelo Lema 1.21, Item 2, concluímos

$$I(\alpha_s(u)) \leq I(u) - 3\varepsilon s + \delta s, \forall u \in W \cap I^{-1}([c-\varepsilon, \infty))$$

e isso implicará no Item 3. Uma vez que a admissão em vigor é $3\delta \geq \varepsilon$, temos $\varepsilon - \delta > 0$, assim $(-3\varepsilon + \delta)s \leq -2\varepsilon s$, pois, para $s \geq 0$,

$$s(-2\varepsilon - (-3\varepsilon + \delta)) = s(\varepsilon - \delta) \geq 0.$$

Diante disso, para $u \in W \cap I^{-1}([c-\varepsilon, \infty))$, obtemos

$$I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq (-3\varepsilon + \delta)s \leq -2\varepsilon s,$$

mostrando o Item 3. Para Item 4 consideramos que se $u \in W \cap W_0$ então $u \in U_j$ apenas quando $u_j \notin K$, logo é válida a estimativa (1.5) do Lema 1.21 e então concluímos, pelo mesmo procedimento dos itens anteriores,

$$I(\alpha_s(u)) \leq I(u) - \delta_j s + \delta s,$$

como da escolha de δ temos $-3\delta \geq \delta_j$ para qualquer $j \in J$, obtemos

$$I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq -3\delta s + \delta s \leq 0, \forall u \in W \cap W_0. \tag{1.10}$$

2. *α é dada por (1.7)*:

Escrevendo, para $s < ||u_i - u||$,

$$\alpha_s(u) = (1 - s||u_i - u)||^{-1})u + (s||u_i - u||^{-1})u_i,$$

temos $s||u_i - u||^{-1} < 1$ e podemos, portanto, repetir o argumento do caso anterior concluindo

$$I(\alpha_s(u)) \leq I(u) + \delta s + s, \forall u \in W$$

e

$$I(\alpha_s(u)) \leq I(u) - 3\varepsilon s + \delta s, \forall u \in W \cap I^{-1}([c-\varepsilon, \infty)),$$

implicando a validade dos itens 2 e 3 da tese. Se $s \geq s' := ||u_i - u||$ temos $\alpha_s(u) = \alpha_{s'}(u) = u_i = (1-1)u + 1u_i$, daí, se $u \neq u_i$, podemos escrever $s'/||u_i - u|| = 1$, então

$$\alpha_s(u) = (1 - s'||u_i - u)||^{-1})u + (s'||u_i - u||^{-1})u_i,$$

o que nos permite repetir as manipulações feitas e concluir que

$$\begin{aligned} I(\alpha_s(u)) &\leq I(u) + \delta s' + s' \leq \\ &\leq I(u) + \delta s + s \leq \\ &\leq I(u) + 2s, \forall u \in W, \end{aligned}$$

pois mesmo quando $u = u_i$ vale $I(\alpha_s(u)) = I(u_i) = I(u)$, verificando a última desigualdade e o Item 2.

A prova do Item 3 segue de valer $I(\alpha_s(u)) = I(u_i) < c - \varepsilon$, para $s > s' = ||u_i - u||$. Se não fora esse caso, se $I(u_i) \geq c - \varepsilon$, obteríamos uma contradição: estamos sob a condição $u_i \in A \cap K$ e das hipóteses estipuladas, $I(u_i) \leq c + \varepsilon$, com isso u_i cumpriria as hipóteses do Corolário 1.20 implicando que $u_i \in N$ e isso contradiz $A \subset X - N$. É possível então escrever, para algum $\varepsilon' > 0$,

$$I(\alpha_s(u)) = I(u_i) = (c - \varepsilon) - \varepsilon'.$$

Então, se $I(u) \geq c - \varepsilon$ e $s \approx 0^+$, obtemos, novamente pela imposição feita a δ,

$$\begin{aligned} I(\alpha_s(u)) - I(u) &\leq I(u_i) - (c - \varepsilon) \leq \\ &\leq (c - \varepsilon) - \varepsilon' - (c - \varepsilon) = \\ &= -\varepsilon' \leq (-3\varepsilon + \delta)s \leq -2\varepsilon s, \end{aligned}$$

Está provado o Item 3.

O Item 4 não precisa ser arguido, porquanto, nesse caso, α está definida em U_i com $u_i \in K$, logo não existe $u \in U_i \cap W_0 = \varnothing$.

O resultado abaixo encerra a demonstração:

Resultado 3: *Os itens 2 e 3 garantem a validade de*

$$\sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) - \sup_{u\in A} I(u) \leq -2\varepsilon s, \quad s \approx 0^+$$

Prova: Se $\sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) \leq c - \varepsilon/2$, então se $s \leq 1/4$ temos o resultado. De fato, das hipóteses $\sup_{u\in A} I(u) \geq c$, então

$$\sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) - \sup_{u\in A} I(u) \leq -2\varepsilon s \leq c - \varepsilon/2 - c = -\varepsilon/2 \leq -2\varepsilon s.$$

Suponhamos agora que $\sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) > c - \varepsilon/2$. Definindo

$$B = \{u \in A; I(u) > c - \varepsilon\}$$

temos $\sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) = \sup_{u\in B} I(\alpha_s(u))$. Para assegurarmos isso consideramos primeiro que $\sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) \geq \sup_{u\in B} I(\alpha_s(u))$, por ser $B \subset A$. Basta agora mostrarmos que, dado $\varepsilon' > 0$, existe $u \in B$ tal que $I(\alpha_s(u)) > \sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) - \varepsilon'$. É suficiente mostrar isso para ε' com

$$\sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) - \varepsilon' > c - \varepsilon/2.$$

Pela definição de supremo, podemos assegurar que existe $u \in A$ tal que

$$I(\alpha_s(u)) > \sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) - \varepsilon' > c - \varepsilon/2.$$

Pelo Item 2, temos $I(u) \geq I(\alpha_s(u)) - 2s$, se $s \leq \varepsilon/4$, obtemos

$$I(u) \geq I(\alpha_s(u)) - 2s > c - \varepsilon/2 - 2s \geq c - \varepsilon,$$

mostrando que $u \in B$ como desejávamos. Segue então, pelo Item 3,

$$\begin{aligned}\sup_{u\in A} I(\alpha_s(u)) - \sup_{u\in A} I(u) &\leq \sup_{u\in B} I(\alpha_s(u)) - \sup_{u\in B} I(u) \leq \\ &\leq \sup_{u\in B}(I(\alpha_s(u)) - I(u)) \leq -2\varepsilon s,\end{aligned}$$

utilizando a propriedade de supremo

$$\sup_{u\in B} I(\alpha_s(u)) - \sup_{u\in B} I(u) \leq \sup_{u\in B}(I(\alpha_s(u)) - I(u)). \quad \square$$

Escolhendo $0 < \overline{s} \approx 0^+$ de modo a cumprir todas as estimativas feitas nas arguições anteriores, encerramos a demonstração com α_s definida em W para $s \in [0, \overline{s}]$.

■

A Observação seguinte é um escólio do teorema acima e nos será útil na prova do próximo resultado

Observação 1.24 *Diante das hipóteses fixadas no Teorema 1.23, escolhendo* δ *como em (1.9), a deformação* α *satisfaz*

1. $I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq s + \delta s, \forall u \in W;$

2. $I(\alpha_s(u)) - I(u) \leq -3\varepsilon s + \delta s, \forall u \in W \cap I^{-1}([c-\varepsilon, \infty)).$

Essas estimativas seguem diretamente da argumentação explicitada na demonstração do Teorema 1.23 e são o que viabilizam a obtenção dos Itens 2 e 3 do teorema.

Encerramos a seção com o corolário a seguir que é um caso particular do teorema anterior, no qual I é um tipo específico de funcional par. Isto nos permitirá aplicar o Lema de Deformação para obtermos resultados de multiplicidade de Pontos Críticos via Teoria do Gênero, como veremos em capítulos posteriores.

Em caráter de revisão, registramos antes do corolário os conceitos a seguir:
1º - *Um subconjunto* $Y \subset X$ *é dito simétrico quando*

$$-x \in Y, \ \ \forall x \in Y.$$

2º - *Sejam* $Y \subset X$ *um conjunto simétrico e* Z *um Espaço Vetorial arbitrário, dizemos que uma aplicação* $T : Y \longrightarrow Z$ *é par quando*

$$T(x) = T(-x), \ \ \forall x \in Y$$

e ímpar quando

$$-T(x) = T(-x),, \ \ \forall x \in Y.$$

Corolário 1.25 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.23, suponhamos que* Φ *e* Ψ *são pares e que* A *é simétrico, então a deformação* α *pode ser construída de tal modo que* α_s *é ímpar.*

Demonstração. Consideremos $\alpha_s : W \longrightarrow X$, como no Lema de Deformação. Sendo A simétrico, consideraremos W também simétrico (isto é possível por ser W uma vizinhança de A). Definimos então

$$\eta_s(u) = \frac{1}{2}(\alpha_s(u) - \alpha_s(-u)).$$

Temos

$$\eta_s(-u) = \frac{1}{2}(\alpha_s(-u) - \alpha_s(u)) = -\eta_s(u)$$

e, com isso, η_s é ímpar. Se mostrarmos que a aplicação η_s cumpre os itens 1, 2, 3 e 4 do Teorema 1.23 poderíamos considerar η como a deformação do teorema e isto encerra a prova do Corolário.

A Sentença (1.6) é consequência dos itens 2 e 3, conforme garante o Resultado 3 na demonstração do teorema anterior. Mostremos que se verificam tais itens. Vale que

$$\begin{aligned}||\eta_s(u) - u|| = ||\frac{1}{2}(\alpha_s(u) - \alpha_s(-u)) - u|| &= \\ = ||(\frac{1}{2}\alpha_s(u) - \frac{1}{2}u) - (\frac{1}{2}\alpha_s(-u) + \frac{1}{2}u)|| &\leq \\ \leq \frac{1}{2}||\alpha_s(u) - u|| + \frac{1}{2}||\alpha_s(-u) - (-u)|| &\leq \\ \leq \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s = s, \forall u \in W&,\end{aligned}$$

mostrando o Item 1.

Escrevendo $\alpha_s(u) = u + h_s(u)$ obtemos $\eta_s(u) = u + (h_s(u) - h_s(-u))/2$ e, pela diferenciabilidade de Φ,

$$I(\alpha_s(u)) = \Phi(u) + \Phi'(u)(h_s(u)) + \Psi(u + h_s(u)) + r_1(s), \tag{1.11}$$

do mesmo modo que

$$\begin{aligned}I(\eta_s(u)) = \Phi(u) + \frac{1}{2}\Phi'(u)(h_s(u) - h_s(-u)) + r_2(s) + \\ + \Psi(\frac{1}{2}(u + h_s(u)) + \frac{1}{2}(u - h_s(-u))),\end{aligned} \tag{1.12}$$

com $|r_i(s)| \leq \delta s$, $i \in \{1, 2\}$, para $s \approx 0^+$ e δ como em (1.9). Como Φ e Ψ foram supostos pares e Ψ é convexa, segue que Φ' é ímpar e, por conseguinte,

$$\begin{aligned}I(\eta_s(u)) \leq \frac{1}{2}(\Phi(u) + \Phi'(u)(h_s(u)) + \Psi(u + h_s(u))) + \\ + \frac{1}{2}(\Phi(-u) + \Phi'(-u)(h_s(-u)) + \Psi(h_s(-u) - u)) + \delta s,\end{aligned}$$

que nos fornece então, por (1.11),

$$\begin{aligned}I(\eta_s(u)) \leq \frac{1}{2}(I(\alpha_s(u)) - r_1(s)) + \frac{1}{2}(I(\alpha_s(u)) - r_1(s)) + \delta s &\leq \\ \leq \frac{1}{2}I(\alpha_s(u)) + \frac{1}{2}I(\alpha_s(-u)) + 2\delta s.&\end{aligned} \tag{1.13}$$

Logo, pelos itens 1 e 2 da Observação 1.24 e por ser $I = \Phi + \Psi$ par, concluímos

$$\begin{aligned} I(\eta_s(u)) &\leq \frac{1}{2}(I(u) + s + \delta s) + \frac{1}{2}(I(-u) + s + \delta s) + 2\delta s \\ &= I(u) + s + 3\delta s \leq I(u) + 2s, \forall u \in W, \end{aligned}$$

pois δ é tal que $3\delta \leq 1$, também, para $u \in W \cap I^{-1}([c - \varepsilon, \infty))$,

$$I(\eta_s(u)) \leq I(u) - 3\varepsilon s + 3\delta s \leq I(u) - 2\varepsilon s.$$

A última desigualdade se ratifica, porquanto

$$(-2\varepsilon s - (-3\varepsilon + 3\delta)s)) = (\varepsilon - 3\delta)s \geq 0,$$

diante de δ cumprir $3\delta \leq \varepsilon$ e, então, $-2\varepsilon s \geq -3\varepsilon s + 3\delta s$. Para verificar o Item 4, basta repetirmos as estimativas feita no teorema anterior, bastando só considerar o caso em que α é dada por (1.8), nesse caso, por (1.10),

$$I(\alpha_s(u)) \leq I(u) - 2\delta s, \forall u \in W \cap W_0,$$

por (1.13), seguindo o raciocínio dos itens anteriores,

$$I(\eta_s(u)) \leq I(u) - 2\delta s + 2\delta s \leq I(u), \forall u \in W \cap W_0,$$

implicando o Item 4. Está encerrada a demonstração. ■

Capítulo 2

Teoremas minimax

Este capítulo, sem surpresas antitéticas ao título, será dedicado as provas de teoremas do tipo minimax para a classe funcionais $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ que satisfazem (H_0) e (PS); serão apresentados resultados do tipo Passo da Montanha e da Teoria do Gênero. Ao longo do Capítulo preservaremos as notações fixadas no Capítulo 1, no qual X denota um espaço de Banach com norma e X' seu dual topológico, ambos com norma $||\cdot||$.

Em sentido lato, na Teoria dos Pontos Críticos, um resultado do tipo Minimax assegura que valores da forma

$$c = \inf_{A\in\Gamma} \sup_{u\in A} I(u)$$

são valores críticos do funcional I, onde Γ denota uma coleção particular de subconjuntos de X. Resultados desse tipo permeiam a teoria clássica de pontos críticos para funcionais de classe C^1, a exemplo dos Teoremas do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, do *Ponto de Sela* e de *Linking* de Rabinowitz ([26, Teoremas 2.10, 2.11 e 2.12]). O argumento utilizado na prova desses resultados, conforme se pode atestar em [26], baseia-sa no Lema de Deformação na sua versão clássica (Teorema 1.17). Ilustrativamente, consideremos o seguinte resultado

Teorema 2.1 *(Teorema do Passo da Montanha - Ambrosetti Rabinowitz): Suponhamos que $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ seja um funcional de classe C^1 que satisfaz a condição (PS). Se existem $r > 0$ e um elemento $e \in X$ tais que*

1. $a := \inf_{||u||=r} I(u) > I(0) \geq I(e)$;

2. $||e|| > r$ *e* $I(e) \leq a$.

Então, o número

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)),$$

com

$$\Gamma = \{f \in C([0,1], X); f(0) = 0, \quad f(1) = e\},$$

é um valor crítico de I*.*

A prova deste teorema consta em [26, Teorema 2.10]. Recordemos, para vetar eventuais confusões, que quando $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ a condição (PS) significa que as sequências (u_n) com $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ possuem subsequência convergente.

A ideia da demonstração consiste em raciocinar por contradição. Ao supor que c, conforme descrito no teorema, não é valor crítico de I podemos aplicar o Teorema 1.17 e concluir que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma deformação α tal que $\alpha(1, I_{c+\varepsilon}) \subset I_{c-\varepsilon}$ e $\alpha(1, u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$ (vide [10, Teorema 2.2, Capítulo 3]). Fixemos ε satisfazendo $c - 2\varepsilon > I(0), I(e)$, isso é possível porque as condições 1 e 2 indicadas no Teorema 2.1 asseguram que $c \geq a > I(0), I(e)$. Pela definição de ínfimo, existe $\eta \in \Gamma$ tal que

$$\sup_{t\in[0,1]} I(\eta(t)) \leq c + \varepsilon.$$

Segue que $\eta(t) \in I_{c+\varepsilon}$. Definindo $\beta(t) = \alpha(1, \eta(t))$ temos $\beta \in \Gamma$ e a propriedade $\alpha(1, I_{c+\varepsilon}) \subset I_{c-\varepsilon}$ nos fornece $\beta(t) \in I_{c-\varepsilon}$. Nós concluímos assim

$$c \leq \sup_{t\in[0,1]} I(\beta(t)) \leq c - \varepsilon,$$

uma contradição.

O argumento que acabamos de expor não pode ser reproduzido para os funcionais que cumprem (H_0), uma vez que a propriedade $\alpha(1, I_{c+\varepsilon}) \subset I_{c-\varepsilon}$ não é satisfeita pela deformação α, dada no Teorema 1.23. Ademais, está implícito nos argumentos a regularidade de I, necessária até mesmo para a obtenção da deformação.

Dentre os resultados que serão apresentados neste capítulo está um análogo do Teorema 2.1, o argumento de contradição que será utilizado é combinação do *P.V.E.* (Teorema 1.15) e da Sentença (1.6) do Lema de Deformação. Em linhas gerais, a estrutura de tal argumento é a seguinte: considere Z um espaço topológico e que

$\mathcal{B}(Z,X)$ denote o conjunto das funções contínuas e limitadas de Z no espaço de Banach X. Definimos em $\mathcal{B}(Z,X)$ a métrica

$$d(f,g) = \sup_{z\in Z} ||f(z) - g(z)||. \tag{2.1}$$

Temos $(\mathcal{B}(Z,X),d)$ um espaço métrico completo, a ideia para mostrar isso é análoga ao feito para que o espaço das funções contínuas, $(C([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_{\max})$, é um espaço de Banach, (ver, e.g., [4, Exemplos 1.1.2 e 1.1.2]). Vale o seguinte resultado:

Proposição 2.2 *Se* $I : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$ *é um funcional sci, então o funcional* $\varphi : \mathcal{B}(Z,X) \longrightarrow (-\infty,\infty]$ *dado por*

$$\varphi(f) = \sup_{z\in Z} I(f(z))$$

é sci.

Demonstração. Suponha que $f_n \to f_0$ em $(\mathcal{B}(Z,X),d)$. Como para cada $z \in Z$ tem-se

$$||f_n(z) - f_0(z)|| \leq \sup_{z\in Z} ||f_n(z) - f_0(z)|| = d(f_n,f_0),$$

concluímos que $f_n(z) \to f_0(z)$ e, com isso,

$$I(f_0(z)) \leq \liminf I(f_n(z)) \leq \liminf \sup_{z\in Z} I(f_n(z)) =: B.$$

Segue então,

$$\varphi(f_0) = \sup_{z\in Z} I(f_0(z)) \leq B = \liminf \sup_{z\in Z} I(f_n(z)) = \liminf \varphi(f_n),$$

encerrando a demonstração. ■

Voltando à explanação do argumento, consideremos Γ a coleção conforme definida no Teorema 2.1. Admitamos, por um momento, que $(\alpha_s \circ f) \in \Gamma$ para qualquer $f \in \Gamma$. Podemos escolher, pela definição de ínfimo, $f \in \Gamma$ satisfazendo

$$\sup_{t\in[0,1]} I(f(t)) < c + \varepsilon.$$

A última proposição viabiliza aplicar o *P.V.E.* ao funcional

$$\varphi(h) = \sup_{t\in[0,1]} I(h(t)), \;\; h \in \Gamma,$$

aplicando-o então com $\delta = \varepsilon$ e $\lambda = 1$, sendo $g = (\alpha_s \circ f)$, obtemos $d(f, g) \leq s$ e

$$\varphi(g) - \varphi(f) \geq -\varepsilon d(f, g) \geq \varepsilon s.$$

Pelo Lema de Deformação, aplicado com $A = f([0, 1])$, a Sentença (1.6) assegura-nos que

$$-2\varepsilon s \geq \sup_{t\in[0,1]} I(\alpha_s(f(t))) - \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)) = \varphi(g) - \varphi(f) \geq -\varepsilon s,$$

um absurdo e, portanto, devemos concluir que c, dado no Teorema 2.1, é um valor crítico de I. Ora, ocorre que as propriedades de α_s asseguradas no Lema de Deformação não garantem $(\alpha_s \circ f) \in \Gamma$, a estratégia será definir uma coleção Γ_1 com a propriedade $(\alpha_s \circ f) \in \Gamma_1$ tal que

$$c_1 = \inf_{f\in\Gamma_1} \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)) = c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)) =: c$$

e repetir a argumentação anterior com Γ_1 em vez de Γ. As passagens omitidas serão feitas em detalhes ao demonstramos a versão Teorema do Passo da Montanha para a classe dos funcionais da forma (H_0).

A escolha de incorrer na prolixidade de expor o argumento do último parágrafo se justifica à medida em que a discussão desse argumento expõe a diferença da abordagem feita no caso clássico, ao passo que destaca a ideia central do argumento feito nos resultados expostos no presente capítulo. Os resultados da Teoria do Gênero recaem numa similar contradição.

2.1 Teoremas do tipo passo da montanha

Iniciamos com a versão do Teorema do Passo da Montanha para os funcionais da forma (H_0).

Teorema 2.3 *(Passo da Montanha): Suponhamos que o funcional* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$*,* $I = \Phi + \Psi$*, satisfaça as condições* (H_0) *e* (PS)*. Se existem* $r > 0$ *e um elemento* $e \in X$ *tais que*

1. $a := \inf_{||u||=r} I(u) > I(0) = 0$*;*
2. $||e|| > r$ *e* $I(e) \leq 0 = I(0)$*.*

Então, o número

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)),$$

com

$$\Gamma = \{f \in C([0,1],X); f(0) = 0, \quad f(1) = e\},$$

é um valor crítico de I.

Demonstração. Iniciamos a prova registrando que $c \geq a > 0$. De fato, seja $f \in \Gamma$. A função definida por

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \ &\longmapsto g(t) = ||f(t)|| \end{aligned}$$

é contínua. Como $g(0) = ||f(0)|| = ||0|| = 0 < r$ e $g(1) = ||f(1)|| = ||e|| > r$, pelo teorema do Valor Intermediário, existe t_0 tal que $||f(t_0)|| = g(t_0) = r$. Com isso, vale que

$$\sup_{t\in[0,1]} I(f(t)) \geq I(f(t_0)) \geq a$$

e, pela arbitrariedade de f,

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)) \geq a.$$

Suponhamos então que c não é valor crítico de I, isto é, $K_c = \varnothing$. Podemos então considerar no Lema de Deformação (Teorema 1.23) $N = \varnothing$, $\varepsilon_0 = c$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ satisfazendo as propriedades descritas no Lema. Fixemos algumas notações: W_0, W_e denotam, respectivamente, as componentes conexa por caminho contendo 0 e e em $I_{c-\varepsilon/4}$ *. As componentes W_0 e W_e devem ser disjuntas, porquanto, do contrário, existiria $f_0 \in C([0,1], I_{c-\varepsilon/4})$, com $f_0(0) = 0$ e $f_0(1) = e$. Assim, $I(f_0(t)) \leq c - \varepsilon/4$ para todo $t \in [0,1]$ e $f_0 \in \Gamma$. Concluiríamos então

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)) \leq \sup_{t\in[0,1]} I(f_0(t)) \leq c - \varepsilon/4,$$

o que é um absurdo. Fica, portanto, mostrado que as componentes W_0 e W_e são distintas. Definamos a agora a seguinte coleção:

$$\Gamma_1 = \{f \in C([0,1],X); f(0) \in W_0 \cap I_{c-\varepsilon/2} \text{ e } f(1) \in W_e \cap I_{c-\varepsilon/2}\}.$$

*A decomposição de um conjunto em componentes conexas por caminho segue um processo análogo a de decompô-lo em componentes conexas [18, p. 96].

A respeito dessa coleção, valem os resultados que seguem.

Resultado 1: $\Gamma \subset \Gamma_1$.

Prova: Se $f \in \Gamma$, então $f(0) = 0$ e $f(1) = e$. Como, pelo Item 2 das hipóteses, $I(e) \leq I(0) = 0 < c - \varepsilon/2$, temos $f(0) \in W_0 \cap I_{c-\varepsilon/2}$ e $f(1) \in W_e \cap I_{c-\varepsilon/2}$. Logo, $\Gamma \subset \Gamma_1$. $\square$.

Resultado 2: *Vale a igualdade.*

$$c_1 = \inf_{f \in \Gamma_1} \sup_{t \in [0,1]} I(f(t)) = \inf_{f \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(f(t)) = c.$$

Prova: Pelo Resultado 1 temos $\Gamma \subset \Gamma_1$, consequentemente, $c_1 \leq c$. Suponha que $c_1 < c$. Pela definição de ínfimo obtemos $f \in \Gamma_1$ tal que $\sup\limits_{t \in [0,1]} I(f(t)) < c$. Como, pela definição de Γ_1, vale $f(0) \in W_0$ e $f(1) \in W_e$, existem g_1, $g_2 \in C([0,1], I_{c-\varepsilon/4})$ com

$$\begin{cases} g_1(0) = 0; \\ g_1(1) = f(0). \end{cases}$$

Também

$$\begin{cases} g_2(0) = f(1); \\ g_2(1) = e. \end{cases}$$

Isso nos permite definir $g \in C([0,1], X)$ com $g(0) = 0$, $g(1) = e$ satisfazendo $\sup\limits_{t \in [0,1]} I(g(t)) < c$, contradizendo a definição de c (para uma ilustração, veja Figura 2.1). Mostremos que existe tal função g. Consideremos bijeções crescentes e contínuas $h_1 : [0, 1/3] \to [0, 1]$, $h_2 : [1/3, 2/3] \to [0, 1]$ e $h_3 : [2/3, 1] \to [0, 1]$ †. Daí, definimos $g : [0, 1] \longrightarrow X$ por

$$g(t) = \begin{cases} g_1(h_1(t)), \text{ se } 0 \leq t \leq 1/3; \\ f(h_2(t)), \text{ se } 1/3 \leq t \leq 2/3; \\ g_2(h_3(t)), \text{ se } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como as funções f, g_i e h_j, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$ são todas contínuas, também por

$$f(h_2(1/3)) = f(0) = g_1(h_1(1/3))$$

e

$$g_2(h_3(2/3)) = g_2(0) = f(1) = f(h_2(2/3)),$$

†Defina h_1 função afim com $h_1(0) = 0$ e $h_1(1/3) = 1$. Analogamente construímos h_2 e h_3.

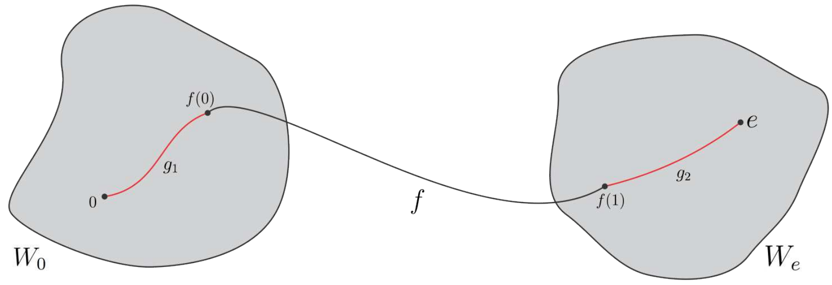

Figura 2.1: construção da função g.

temos g bem definida e contínua. Ainda, como $I(g_i(t)) \leq c - \varepsilon/4$ e $\sup\limits_{t\in[0,1]} I(f(t)) < c$, então

$$\sup_{t\in[0,1]} I(g(t)) < c,$$

conforme desejado. □

Resultado 3: Γ_1 *é um subespaço métrico completo de* $C([0,1], X)$.

Prova: Suponha que (f_n) em $C([0,1], X)$ satisfaz $f_n \to f$ conforme a métrica definida em (2.1). Então, para cada $t \in [0,1]$, temos $f_n(t) \to f(t)$ e, por ser I um funcional *sci*, $I(f(t)) \leq \liminf I(f_n(t))$. Em particular, se $u_n := f_n(0)$ e $u = f(0)$, temos $u_n \to u$ em X e

$$I(u) \leq \liminf I(u_n) \leq c - \varepsilon/2,$$

por ser $f_n(0) \leq c - \varepsilon/2$, uma vez que $f_n \in \Gamma_1$. Decorre então $u \in I_{c-\varepsilon/2}$.

Como Φ é uma função contínua, se definimos

$$\delta'_n = \sup_{t\in[0,1]} |\Phi(tu_n + (1-t)u) - \Phi(u)|,$$

então $\delta'_n \to 0$. Para assegurar isto, considere dado $\varepsilon' > 0$. Da continuidade de Φ existe $\delta' > 0$ tal que

$$|\Phi(v) - \Phi(u)| < \varepsilon', \forall v \in B_{\delta'}(u),$$

desde que $u_n \to u$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ vale

$$||u_n - u|| < \delta', n \geq n_0,$$

isso acarreta

$$\begin{aligned} ||(tu_n + (1-t)u) - u|| = t||u_n - u|| \leq \\ \leq ||u_n - u|| \ < \delta', \forall t \in [0,1], n \geq n_0, \end{aligned}$$

e, concomitantemente,

$$\delta'_n = \sup_{t\in[0,1]} |\Phi(tu_n + (1-t)u) - \Phi(u)| \le \varepsilon', n \ge n_0,$$

mostrando que $\delta'_n \to 0$. Se $\delta''_n = |\Phi(u_n) - \Phi(u)|$, então, também pela continuidade de Φ, temos $\delta''_n \to 0$. Escrevendo, pois, $\delta_n = \max\{\delta'_n, \delta''_n\}$ vale $\delta_n \to 0$ e

$$\Phi(tu_n + (1-t)) - \Phi(u) \le |\Phi(tu_n + (1-t)u) - \Phi(u)| \le \delta_n,$$

que, por sua vez acarreta,

$$\Phi(tu_n + (1-t)u) \le \Phi(u) + \delta_n \le \Phi(u) + \delta_n + (\delta_n + t(\Phi(u_n) - \Phi(u))),$$

porquanto

$$\begin{aligned}\delta_n + t(\Phi(u_n) - \Phi(u)) &\ge |\Phi(u_n) - \Phi(u)| + t(\Phi(u_n) - \Phi(u)) \ge \\ &\ge t|\Phi(u_n) - \Phi(u)| + t(\Phi(u_n) - \Phi(u)) \ge 0, \forall t \in [0,1].\end{aligned}$$

Dos argumentos expostos até então concluímos

$$\Phi(tu_n + (1-t)u) \le t\Phi(u_n) + (1-t)\Phi(u) + 2\delta_n$$

e, por ser Ψ uma função convexa, vale que

$$\Psi(tu_n + (1-)u) \le t\Psi(u_n) + (1-t)\Psi(u), \forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Concluímos, por fim,

$$\begin{aligned}I(tu_n + (1-t)u) &= \Phi(tu_n + (1-t)u) + \Psi(tu_n + (1-t)u) \le \\ &\le t\Phi(u_n) + (1-t)\Phi(u) + t\Psi(u_n) + (1-t)\Psi(u) + 2\delta_n = \\ &= tI(u_n) + (1-t)I(u) + 2\delta_n,\end{aligned}$$

como $I(u_n) \le c - \varepsilon/2$ e $I(u) \le c - \varepsilon/2$, e $\delta_n \to 0$ obtemos, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$

$$I(tu_n + (1-t)u) \le c - \varepsilon/2 + 2\delta_n \le c - \varepsilon/4, n \ge n_0.$$

(Basta escolher n_0 com $\delta_n \le \varepsilon/8$ para $n \ge n_0$). Diante desse fato, concluímos que

$$g(t) = tu_n + (1-t)u, n \ge n_0,$$

é um caminho em $I_{c-\varepsilon/4}$ com $g(0) = u$ e $g(1) = u_n$. Assim, u pertence a mesma componente conexa por caminho de u_n, ou seja, $u \in W_0$. Como já foi mostrado que

$u \in I_{c-\varepsilon/2}$, temos $u \in W_0 \cap I_{c-\varepsilon/2}$. Sendo $v_n = f_n(1)$ e $v = f(1)$, por um argumento análogo deduzimos que $v \in W_e \cap I_{c-\varepsilon/2}$ e então $f \in \Gamma_1$, mostrando que Γ_1 é completo. $\square$

Sendo Γ_1 um espaço métrico completo o funcional

$$\varphi(f) = \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)), \quad f \in \Gamma_1$$

é *sci* e limitado inferiormente por c. Pelo *P.V.E.*, podemos fixar $f \in \Gamma_1$ tal que

$$\varphi(f) \leq c + \varepsilon$$

e

$$\varphi(g) - \varphi(f) \geq -\varepsilon d(f, g).$$

(Aqui escolhemos $\delta = \varepsilon$ e $\lambda = 1$ no *P.V.E.*). Definindo $A = f([0, 1])$, temos A compacto, por ser a imagem de um compacto por uma função contínua, $A \subset X - N = X - \varnothing = X$ e

$$c \leq \sup_{u\in A} I(u) = \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)) \leq c + \varepsilon.$$

Podemos então aplicar o Lema de Deformação e obter α_s conforme o Lema. Se $g := (\alpha_s \circ f)$, então $g \in \Gamma_1$, $0 \leq s \leq s_0$, desde que $s_0 \approx 0^+$. Mostremos que $I(g(0))$, $I(g(1)) \leq c - \varepsilon/2$. Temos as seguintes possibilidades:

1. $I(f(0)) > c - \varepsilon$.

Pelo Item 3 do Lema de Deformação, temos

$$I(g(0)) - I(f(0)) = I(\alpha_s(f(0))) - I(f(0)) \leq -2\varepsilon s \leq 0$$

e assim

$$I(g(0)) \leq I(f(0)) \leq c - \varepsilon/2 \leq c - \varepsilon/4,$$

pois $f(0) \in I_{c-\varepsilon/2}$.

2. $I(f(0)) \leq c - \varepsilon$.

Nesse caso, pelo Item 2 do Lema,

$$I(g(0)) = I(\alpha_s(f(0))) \leq I(f(0)) + 2s \leq c - \varepsilon + 2s \leq c - \varepsilon/2,$$

para $s \leq 1/4$.

Em todo caso $I(g(0)) \in I_{c-\varepsilon/2}$. O mesmo argumento se aplica a $I(g(1))$. Resta concluir $g(0) \in W_0$ e $g(1) \in W_e$. Como α_s é contínua e $I(g(0)) \leq c - \varepsilon/2 \leq c - \varepsilon/4$, então $g(0) = \alpha_s(f(0))$ pertence a mesma componente conexa por caminho de $f(0)$ em $I_{c-\varepsilon/4}$ ($h(s) = \alpha_s(f(0))$ pode ser escolhido como o caminho que atesta tal propriedade), isto é, $g(0) \in W_0$. Similarmente, concluímos que $g(1) \in W_e$. Logo, pelo *P.V.E.* e pela Sentença (1.6) no Lema de Deformação

$$-2\varepsilon s \geq \varphi(g) - \varphi(f) \geq -\varepsilon s,$$

o que é um absurdo. Esta contradição foi obtida sob a admissão $K_c = \varnothing$, logo, ocorre $K_c \neq \varnothing$ e c é um valor crítico de I. ■

Observação 2.4 *1. O número c dado no Teorema do Passo da Montanha é referido por nível do Passo da Montanha.*

2. No Teorema 2.3 a propriedade $I(0) = 0$ é admitida apenas por simplicidade, de modo que os itens 1 e 2 podem ser modificados para
1. $a := \inf\limits_{||u||=r} I(u) > I(0)$;
2. $||e|| > r$ *e* $I(e) \leq I(0)$.

Para garantirmos a validade do Item 2 da Observação precedente consideramos $B := I(0)$ e o funcional $J(u) = I(u) - B = (\Phi(u) - B) + \Psi(u)$. O funcional J satisfaz (H_0), pois $\Phi_1 = (\Phi - B) \in C^1(X, \mathbb{R})$ e Ψ é *sci*, convexo e próprio. Além disso, se $u \in X$ é um ponto crítico de J então

$$\Phi_1'(u)(v-u) + \Psi(v) - \Psi(u) \geq 0, \forall v \in X,$$

Sendo $\Phi_1' = \Phi'$,

$$\Phi'(u)(v-u) + \Psi(v) - \Psi(u) \geq 0, \forall v \in X,$$

e então u é um ponto crítico de I. Se I verifica os itens 1 e 2 na versão da presente Observação, então J satisfaz

3. $a := \inf\limits_{||u||=r} J(u) > J(0) = 0$;
4. $||e|| > r$ e $J(e) \leq 0 = J(0)$.

Se o funcional I satisfaz a condição (PS), o funcional J também a satisfaz, porquanto a condição $J(u_n) \to c'$ equivale a $I(u_n) \to c' + B$. Logo, se (u_n) é uma sequência (PS) no nível c' para o funcional J é uma sequência no nível $c' + B$ para I, assim (u_n) deve possuir uma subsequência convergente, por satisfazer I a condição (PS). Isso mostra que J satisfaz a condição (PS). Aplicando o Teorema do Passo da Montanha ao funcional J concluímos que

$$c' = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} J(f(t))$$

é um valor crítico de J e, portanto,

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)) = c' + B$$

é um valor crítico de I.

Apresentamos a seguir dois corolários do Teorema do Passo da Montanha.

Corolário 2.5 *Suponhamos que o funcional* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, *satisfaça as condições* (H_0) *e* (PS). *Se* 0 *é um mínimo local de* I *e* $v \in X - \{0\}$ *satisfaz* $I(v) \leq I(0)$, *então* I *tem um ponto crítico* $u \in X - \{0, v\}$.

Demonstração. Podemos supor que $I(0) = 0$, caso não se verifique isto definimos $J = I - I(0)$ e, conforme a justificativa do Item 2 da Observação 2.4, os pontos críticos de J são também pontos críticos de I e basta seguirmos a demonstração com J, que verifica $J(0) = 0$. Caso existam $r, a > 0$ tal que

$$I(u) \geq a > 0 = I(0), \forall u \in \partial B_r(0)$$

e $||v|| > r$ estão verificadas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha e existiria $u \in K_c$, onde c é o nível do Passo da montanha. Obtemos u ponto crítico de I e $u \in X - \{0, v\}$, pois

$$I(u) = c \geq a > 0 = I(0) \geq I(v).$$

Consideramos agora o caso em que não existem $a, r > 0$ verificando as hipóteses do Passo da Montanha. Fixemos então $0 < r' < r < ||v||$ tal que $I \geq 0$ em $B_r(0)$, basta escolher r de modo que $I(0) = 0$ é mínimo em $\overline{B}_r(0)$. Vale então que

$$\inf_{u\in\partial B_{r'}(0)} I(u) = 0,$$

porquanto a negação da identidade acima acarreta, em virtude de valer $I \geq 0$ em $\partial B_{r'}(0)$, que para algum $a > 0$,

$$I(u) \geq a > 0 = I(0), \forall \in \partial B_{r'}(0),$$

contraditando a admissão em vigência. Como I é *sci* com $\min_{u \in B_r(0)} I(u) = 0$ podemos aplicar o *P.V.E.* a $I|_{B_r(0)}$, escolhendo $\delta_n = 1/n^2$ e $\lambda_n = n$, para obtermos $v_n \in \partial B_{r'}(0)$ e $u_n \in \overline{B}_r(0)$ tal que

$$0 \leq I(u_n) \leq I(v_n) \leq 0 + \frac{1}{n^2}, \quad ||u_n - v_n|| \leq \frac{1}{n}$$

e

$$I(v) - I(u_n) \geq -\frac{1}{n}||v - u_n||, \forall v \in \overline{B}_r(0).$$

Vale a seguinte implicação

$$||u_n|| - ||v_n|| \leq ||u_n - v_n|| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow ||u_n|| \leq ||v_n|| + \frac{1}{n},$$

com isso, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, como $||v_n|| = r' < r$,

$$||u_n|| \leq ||v_n|| + \frac{1}{n} < r, n \geq n_0,$$

Concluímos então que $u_n \in B_r(0)$ para $n \geq n_0$. Fixemos $n \geq n_0$ e escrevamos, para $v \in X$, $w = tv + (1-t)u_n$. Fazendo $t \to 0$ temos $w \to u_n$ e então $||w|| \to ||u_n||$. Assim para algum $t_n \in (0,1)$,

$$w \in \overline{B}_r(0), t \in (0, t_n).$$

Das estimativas obtidas do *P.V.E.* para $I|_{B_r(0)}$ obtemos

$$0 \leq I(u_n) \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow I(u_n) \to 0$$

e que para $t \in (0, t_n)$

$$-\frac{1}{n}||w - u_n|| \leq I(w) - I(u_n).$$

Utilizando $I = \Phi + \Psi$ e a convexidade Ψ concluímos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n}t||v - u_n|| &\leq I(tv + (1-t)u_n) - I(u_n) \leq \\ &\leq (\Phi(tv + (1-t)u_n) - \Phi(u_n)) + t(\Psi(v) - \Psi(u_n)), \end{aligned}$$

dividindo os membros da última desigualdade por t e fazendo $t \to 0$ concluímos então

$$\Phi'(u_n)(v - u_n) + \Psi(v) - \Psi(u_n) \geq -\frac{1}{n}||v - u_n||.$$

Pela arbitrariedade de n e v podemos concluir que (u_n) (precisamente $(u_n)_{n \geq n_0}$), é uma sequência (PS) no nível 0. Como I satisfaz a condição (PS), existe então (u_{n_j})

subsequência de (u_n) com $u_{n_j} \to u$. Pela Proposição 1.12 u é um ponto crítico de I, resta concluir que $u \in X - \{0, v\}$. Consideramos que (u_n) foi obtida satisfazendo $||u_n - v_n|| \leq 1/n$ com $||v_n|| = r'$. Segue que

$$||v_{n_j}|| - ||u_{n_j}|| \leq \frac{1}{n_j} \Rightarrow ||v_{n_j}|| \leq ||u_{n_j}|| + \frac{1}{n_j},$$

das propriedades de limite,

$$r' \leq ||u||.$$

Como também vale $||u_{n_j}|| \leq ||v_{n_j}|| + 1/n_j$ temos

$$||u|| \leq r'$$

e, por conseguinte,

$$0 < r' = ||u|| \leq r < ||v||,$$

mostrando $u \neq 0$ e $u \neq v$. ■

Corolário 2.6 *Suponhamos que o funcional* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, *satisfaça as condições* (H_0) *e* (PS). *Se* I *tem dois pontos de mínimo locais, então* I *possui ao menos três Pontos Críticos.*

Demonstração. Sejam u_0 e u_1 os dois mínimos locais da hipótese. Suponhamos, sem prejuízo em generalidade, $I(u_1) \leq I(u_0)$. Como u_0 é um mínimo local de I então é ponto crítico. O resultado segue então imediatamente do Corolário anterior com u_0 no lugar de 0 e u_1 no lugar de e. De fato, consideremos que $I(u_0) = 0$, se assim não for substituímos I po $J = I - I(u_0)$ cujos os Pontos Críticos são também Pontos Críticos de I. Analogamente à demonstração do Corolário anterior, consideramos dois casos: primeiro que existem existam $a, r > 0$, $||u_0|| < r < ||u_1||$, tal que

$$I(u) \geq a > 0 = I(u_0), \forall u \in \partial B_r(u_0).$$

Nesse caso podemos repetir a demonstração do passo da montanha e concluir que

$$c = \inf_{f \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(f(t)),$$

com

$$\Gamma = \{f \in C([0,1], X); f(0) = u_0, \quad f(1) = u_1\},$$

é um valor crítico de I. Existe então u ponto crítico de I com

$$I(u) = c \geq a > 0 = I(u_0) \geq I(u_1),$$

mostrando que $u \in X - \{u_0, u_1\}$ e que I possui ao menso três ponto críticos. Se não existem $a, r > 0$ conforme o primeiro caso, o argumento é o mesmo dado no Corolário anterior. ■

Em **Willem**, [26, Teorema 1.15], está registrada uma versão do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz (Teorema 2.1) na qual não se assume a condição (PS) para o funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Não se pode concluir, nesse caso, que o nível do Passo da Montanha é um valor crítico de I, não obstante, o resultado assegura que ao nível do Passo da Montanha está sempre associado uma sequência (PS). No caso dos funcionais que satisfazem (H_0), **Szulkin**, [25], não registra uma versão do Teorema 2.3 sem a condição (PS), isso foi feito por **Alves** e **de Morais Filho** em [2, Teorema 3.1].

Na introdução do capítulo descrevemos as etapas do argumento de contradição que nos viabilizou demonstrar a versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais que satisfazem as condições (H_0) e (PS) [‡]. Uma leitura mais atenciosa do argumento exposto (segue a sugestão implícita a fazê-la) mostra que a condição (PS) não foi utilizada diretamente na contradição obtida, se fazendo necessária somente para assegurar a aplicabilidade do Teorema 1.23, o Lema de Deformação para os funcionais da forma (H_0). O Teorema 1.23 é consequência das estimativas obtidas no Lema 1.21, este último que é consequência da Sentença (1.4) na Proposição 1.19, segundo a qual a condição (PS) implica que, para cada $\varepsilon_0 > 0$ existem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_o)$ e $v_o \in X$ tais que

$$\Phi'(u)(v_0 - u) + \Psi(v_0) - \Psi(u) < -3\varepsilon||v_0 - u||,$$

para $u \notin N$ cumprindo $c - \varepsilon \leq I(u) \leq c + \varepsilon$, onde N denota uma vizinhança de K_c. Mediante o exposto, concluímos que a condição (PS) foi utilizada para garantir a validade da Sentença (1.4), que por sua vez implica subsequentemente o Lema 1.21, o Teorema 1.23 e a contradição indicada na introdução obtida na demonstração do Teorema 2.3. Isso é o que foi observado por **Alves** e **de Morais Filho** culminando no resultado que apresentamos agora:

[‡] O argumento também foi exposto em detalhes na demonstração do Teorema 2.3.

Teorema 2.7 *(Passo da Montanha sem a condição (PS)): Suponhamos que o funcional* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, *satisfaça* (H_0). *Se existem* $r > 0$ *e um elemento* $e \in X$ *tais que*

1. $a := \inf_{||u||=r} I(u) > I(0) = 0$;

2. $||e|| > r$ *e* $I(e) \leq 0 = I(0)$.

Então, definindo

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)),$$

com

$$\Gamma = \{f \in C([0,1], X); f(0) = 0, \quad f(1) = e\},$$

concluímos que existe $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para cada* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *existe* $u_\varepsilon \in I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ *satisfazendo*

$$\Phi'(u_\varepsilon)(v - u_\varepsilon) + \Psi(v) - \Psi(u_\varepsilon) \geq -3\varepsilon||v - u_\varepsilon||, \forall v \in X.$$

Demonstração. A prova do teorema segue da discussão imediatamente anterior ao seu enunciado: suponha que a tese não seja válida. Dado $\varepsilon_0 > 0$ deve então existir $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tal que para $u \in I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ existe $v_0 \in X$ satisfazendo

$$\Phi'(u)(v_0 - u) + \Psi(v_0) - \Psi(u) < -3\varepsilon||v_0 - u||,$$

que é a tese da Proposição 1.19 e portanto implica a contradição obtida na demonstração do Teorema 2.3 (Teorema do Passo da Montanha). ■

Corolário 2.8 *Suponhamos que o funcional* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, *satisfaça as condições* (H_0) *e* (PS) *e verifique as hipóteses do teorema anterior. Existe então um sequência* (PS) *associada ao nível do Passo da Montanha*

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(f(t)).$$

Demonstração. No teorema anterior, escolhendo $\varepsilon_n = 1/n$ temos, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \in (0, \varepsilon_0)$, para $n \geq n_0$. Para cada $n \geq n_0$ existe u_n tal que

$$\Phi'(u_n)(v - u_n) + \Psi(v) - \Psi(u_n) \geq -3\frac{1}{n}||v - u_n||, \forall v \in X$$

com $c - 1/n \leq I(u_n) \leq c + 1/n$. Assim $I(u_n) \to c$ e (u_n) é uma sequência (PS) no nível c. ■

Na Seção 3 de [25] são ainda registrados mais dois resultados tipo Passo da Montanha que apresentaremos a seguir.

Teorema 2.9 *(Passo da Montanha Generalizado): Suponhamos que o funcional* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, *satisfaça as condições* (H_0) *e* (PS). *Seja* $X = X_1 \oplus X_2$ *com* $\dim X_1 < \infty$. *Se*

1. *Existem* $a, r > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_r(0) \cap X_2} \geq a$;

2. *Existem* $R > r$ *e* $e_0 \in X_2$, $||e_0|| = 1$, *tais que* $I|_{\partial B} \leq 0$, *onde* $B = B_R(0) \oplus \{te_0; 0 \leq t \leq R\}$.

Então, o número

$$c = \inf_{f \in \Gamma} \sup_{u \in B} I(u),$$

com

$$\Gamma = \{f \in C(B, X); f|_{\partial B} \equiv Id_{\partial B}\},$$

é um valor crítico de I.

A prova deste resultado segue um processo análogo ao do Teorema 2.3. A propriedade $f|_{\partial B} \equiv Id_{\partial B}$ que caracteriza os elementos de Γ nos permite, via argumentos do grau topológico de Brower [§], concluir que $c \geq a > 0$ (vide [22, Teorema 4.1]). Supomos então que c não é valor crítico de I e aplicamos o Lema de Deformação escolhendo $\varepsilon \in (0, c)$, obtendo a deformação α_s. Definimos então a coleção

$$\Gamma_1 = \{f \in C(B, X);\ f|_{\partial B} \approx Id_{\partial B} \text{ em } I_{c-\varepsilon/4}, \quad (I \circ f)|_{\partial B} \leq c - \varepsilon/2\}.$$

Mostramos que Γ_1 é subespaço métrico completo de $C(B, X)$, com $\Gamma \subset \Gamma_1$, satisfazendo

$$c_1 = \inf_{f \in \Gamma_1} \sup_{u \in B} I(u) = \inf_{f \in \Gamma} \sup_{u \in B} I(u) = c.$$

A coleção Γ_1 cumpre ainda $\alpha_s \circ f \in \Gamma_1$ para $f \in \Gamma_1$ e $s \approx 0^+$, procedendo de modo similar ao feito no Teorema do Passo da Montanha, obtemos uma contradição utilizando concatenadamente o *P.V.E.* e a Sentença (1.6) do Lema de Deformação.

[§]Para um estudo das propriedades do grau topológico de Brower indicamos [11, Capítulo 1].

Teorema 2.10 *(Ponto de Sela): Suponhamos que o funcional* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, *satisfaça as condições* (H_0) *e* (PS). *Seja* $X = X_1 \oplus X_2$ *com* $\dim X_1 < \infty$. *Se*

1. *Existem* $r > 0$ *e* $a \in \mathbb{R}$ *tais que* $I|_{\partial B_r(0) \cap X_1} \leq a$;

2. *Existe* $a' > a$ *tal que* $I|_{X_2} \geq a'$.

Então, o número

$$c = \inf_{f \in \Gamma} \sup_{u \in B} I(u),$$

com $B = B_r(0) \cap X_1$ *e*

$$\Gamma = \{f \in C(B, X); f|_{\partial B} \equiv Id_{\partial B}\},$$

é um valor crítico de I.

A prova deste último teorema segue uma ideia similar à do anterior. A omissão das demonstrações dos Teoremas 2.9 e 2.10 se deve ao fato de que, no capítulo referente às aplicações, não apresentaremos aplicações destes resultados, não nos sendo então crucial estudá-los em inteireza de detalhes; corroborando a agilidade da leitura e, como é natural pressupor, a amenização do labor inerente a um trabalho como o aqui desenvolvido.

2.2 Resultados minimax via Teoria do Gênero

Esta seção se dedica aos resultados minimax utilizando a Teoria do Gênero, que nos fornece resultados de multiplicidade de pontos críticos. Uma discussão sucinta, com menções às referências bibliográficas que apresentam um estudo da Teoria, constará em Apêndice B. O conteúdo a ser exposto tem como diretriz a Seção 4 de [25], desenvolvido por **Szulkin**.

Não é difícil concordar com o incômodo da leitura de uma seção que não registre os elementos mínimos para a compreensão do que se pretende expor. A fim de não culminar no infortúnio de uma forçosa leitura, com trânsito entre apêndices e capítulo, apresentamos a definição do gênero de um conjunto e um resumo das propriedades utilizadas nos resultados arrolados.

Considere Σ a coleção de todos os subconjuntos de $X - \{0\}$ que são fechados e simétricos. Definimos o Gênero de um conjunto $A \in \Sigma$ como segue.

Definição 2.11 *Seja $A \in \Sigma$, Definimos*

1. *$A \neq \varnothing$ tem gênero $n \in \mathbb{N}$, se n é o menor inteiro positivo tal que existe $f \in C(A, \mathbb{R}^n - \{0\})$ ímpar. Denotamos $\gamma(A) = n$;*

2. *se $A \neq \varnothing$ e não existem $n \in \mathbb{N}$ e f como no item anterior dizemos então que A tem gênero infinito, $\gamma(A) = \infty$;*

3. *se $A = \varnothing$, então $\gamma(A) := 0$.*

Listamos agora as principais propriedades relativas ao gênero de um conjunto: Fixemos $A, B \in \Sigma$, valem:

(G_1): Se existe $f : A \longrightarrow B$ contínua e ímpar, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
(G_2): Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
(G_3): $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.
(G_4): Se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{A - B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.
(G_5): Se A é homeomorfo a S^{n-1}, onde $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ denota a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$, então $\gamma(A) = n$.
(G_6): Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e simétrico, com $0 \in \Omega$, então $\gamma(\partial\Omega) = n$.
(G_7): Se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe $\delta_0 > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$ para $\delta \in (0, \delta_0)$, onde $N_\delta(A) := \{u \in X; d(u, A) \leq \delta\}$.

As referências para a prova das propriedades consta no Apêndice B. Denotemos por $\mathcal{C}$ a coleção de todos os subconjuntos não-vazios, fechados e limitados de X. Definimos em $\mathcal{C}$ a métrica, denominada métrica de Hausdorff,

$$d_1(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}. \tag{2.2}$$

O par $(\mathcal{C}, d_1)$ constitui um espaço métrico completo (vide [20, p. 279]). Denotando agora por $\Gamma \subset \mathcal{C}$ a coleção dos subconjuntos não-vazios, compactos e simétricos de X, temos (Γ, d_1) um subespaço métrico completo (Proposição A.3). Definindo então

$$\Gamma_j := \overline{\{A \in \Gamma; 0 \notin A, \gamma(A) \geq j\}}^{d_1} \tag{2.3}$$

concluímos que (Γ_j, d_1) é um espaço métrico completo, por ser Γ_j um subespaço fechado de Γ, que, por sua vez, é completo. Antes de enunciarmos os teoremas principais da seção apresentamos alguns resultado auxiliares.

Proposição 2.12 *Se $A_n \to A$ em $(\mathcal{C}, d_1)$, então para cada $u \in A$ existe uma sequência (u_n), com $u_n \in A_n$, tal que $u_n \to u$ em X.*

Demonstração. Seja $u \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, da definição de distância, existe $u_n \in A_n$ tal que

$$||u_n - u|| < d(u, A_n) + \frac{1}{n}.$$

Com isso, pela definição de d_1 em (2.2),

$$||u_n - u|| < d(u, A_n) + \frac{1}{n} \leq \sup_{a \in A} d(a, A_n) + \frac{1}{n} \leq d_1(A, A_n) + \frac{1}{n}.$$

Como, por hipótese, $A_n \to A$, então $d_1(A, A_n) \to 0$ e $||u_n - u|| \to 0$, isto é, $u_n \to u$. ■

Corolário 2.13 *Suponhamos $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ um funcional sci. Então o funcional $\varphi : \Gamma_j \longrightarrow (-\infty, \infty]$ definido por*

$$\varphi(A) = \sup_{u \in A} I(u),$$

é um funcional sci.

Demonstração. Suponha que $A_n \to A$ em Γ_j. Dado $u \in A$, segue da proposição anterior que existe (u_n) com $u_n \in A_n$ e $u_n \to u$. Do fato de I ser *sci* segue então que

$$I(u) \leq \liminf I(u_n) \leq \liminf \sup_{u \in A_n} I(u) = \liminf \varphi(A_n),$$

das propriedades de supremo,

$$\varphi(A) = \sup_{u \in A} I(u) \leq \liminf \varphi(A_n),$$

mostrando que φ é *sci*. ■

Antes da proposição seguinte estabelecemos a notação:

$$N_\delta(B) = \{u \in X;\ d(u, B) \leq \delta\},$$

onde B denota um subconjunto arbitrário de X.

Proposição 2.14 *Se $A \in \Gamma_j$ e $0 \notin A$, então $\gamma(A) \geq j$.*

Demonstração. Suponha $A \in \Gamma_j$. Existe então $A_n \in \Gamma$ com $\gamma(A_n) \geq j$ e $A_n \to A$ em (Γ, d_1). Disso e da definição de d_1 em (2.2), dado $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com

$$\sup_{u \in An} d(u, A) \leq d_1(A, A_n) \leq \delta, n \geq n_0,$$

dado então $u \in A_n$ temos

$$d(u, A) \leq \sup_{u \in An} d(u, A) \leq \delta, n \geq n_0,$$

o que garante que $A_n \subset N_\delta(A)$, para $n \geq n_0$. Como $A \in \Gamma_j \subset \Gamma$ temos A compacto, assim, pela propriedade (G_7), existe $\delta_0 > 0$ tal que $\gamma(A) = \gamma(N_\delta(A))$, $\delta \in (0, \delta_0)$. Escrevendo $\delta = \delta_0/2$, para algum n_1 ocorre $A_{n_1} \subset N_\delta(A)$ e, por (G_2), obtemos

$$\gamma(A) = \gamma(N_\delta(A)) \geq \gamma(A_{n_0}) \geq j.$$

■

Apresentamos o primeiro resultado que assegura multiplicidade de Pontos Críticos.

Teorema 2.15 *Suponhamos que o funcional $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, satisfaça as condições (H_0) e (PS) e que $I(0) = 0$ com Φ, Ψ pares. Se o número*

$$c_j = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A} I(u)$$

satisfaz $c_j \in (-\infty, 0)$, $j \in \{1, ..., k\}$, então I tem, ao menos, k pares de Pontos Críticos.

Demonstração. Dado $j \in \{1, ..., k\}$ podemos escrever $c := c_j = c_{j+p}$ para algum $p \geq 0$ natural (no caso mais simples $p = 0$ e $c_j \neq c_i$, quando $j < i$, $i \in \{1, ..., k\}$). Temos $0 \notin K_c$, pois, das hipóteses, $c_j < 0 = I(0)$ para $j \in \{1, ..., k\}$ arbitrário. Ainda, K_c é simétrico, porquanto sendo Φ, Ψ par, temos I par e então, se $u \in K_c$, vale que

$$I(-u) = I(u) = c,$$

também, sendo Φ' ímpar, por ser Φ par, e u ponto crítico de I,

$$\Phi'(-u)(v - (-u)) + \Psi(v) - \Psi(-u) = \Phi'(u)(-v - u) + \Psi(-v) - \Psi(u) \geq 0, \forall v \in X,$$

mostrando que $-u \in K_c$ e, concomitantemente, que K_c é simétrico. Concluímos então que $K_c \in \Sigma$ e podemos calcular $\gamma(K_c)$. Nosso objetivo é assegurar que $\gamma(K_c) \geq p + 1$, isso implicará no resultado desejado. Suponhamos, por contradição, que valha $\gamma(K_c) < p$, isto é, $\gamma(K_c) \leq p$. Sendo K_c compacto (Proposição 1.12), por (G_7), nós podemos escolher $\delta' > 0$ tal que $\gamma(N_{2\delta'}(K_c)) = \gamma(K_c)$. Definamos $\varphi : \Gamma_j \longrightarrow (-\infty, \infty]$ por

$$\varphi(A) = \sup_{u \in A} I(u),$$

pelo Corolário 2.13 φ é *sci* e limitado inferiormente por $c = c_j \in (-\infty, 0)$.

Definamos agora $N = N_{\delta'}(K_c)$ e $\varepsilon_0 = \min\{1, \delta', -c\}$. Aplicamos então o Lema de Deformação e escolhemos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ conforme o Lema. Pela definição de $c = c_j = ... = c_{j+p}$, podemos escolher $A_1 \in \Gamma_{j+p}$ satisfazendo

$$c \leq \sup_{u \in A_1} I(u) \leq c + \varepsilon^2 \leq c + \varepsilon < 0.$$

(As duas últimas desigualdades se justificam por ser $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \leq 1$ e $\varepsilon_0 \leq -c$, assim $\varepsilon^2 < \varepsilon$ e $c+\varepsilon < c-c = 0$). Com isso, $0 \notin A_1$ e, pela Proposição 2.14, concluímos que $\gamma(A_1) \geq j+p$. Sendo $A_2 := (\overline{A_1 - N_{2\delta'}(K_c)}) \subset A_1$ temos, por propriedade supremo

$$\sup_{u \in A_2} I(u) \leq \sup_{u \in A_1} I(u) \leq c + \varepsilon^2$$

e, por (G_4), como nossa hipótese de contradição garante $\gamma(N_{2\delta'}(K_c)) = \gamma(K_c) \leq p$,

$$\gamma(A_2) \geq (j+p) - p = j.$$

Isso então nos garante que $A_2 \in \Gamma_j$ e $\varphi(A_2) \leq c + \varepsilon^2 \leq c + \varepsilon$. Aplicando o *P.V.E.* a φ com $\delta = \varepsilon^2$ e $\lambda = 1/\varepsilon$, concluímos que existe $A \in \Gamma_j$ com

$$c \leq \varphi(A) \leq \varphi(A_2) \leq c + \varepsilon, \quad d_1(A, A_2) \leq \varepsilon$$

e

$$\varphi(B) - \varphi(A) \geq -\varepsilon d_1(B, A), \forall B \in \Gamma_j.$$

Como $\varepsilon < \varepsilon_0 \leq \delta'$, temos $\varepsilon + \varepsilon' = \delta'$, para algum $\varepsilon' > 0$. Dado $u \in A$, por ser A_2 compacto como elemento de Γ_j, existe $u_2 \in A_2$ tal que $d(u, A_2) = ||u_2 - u||$, para ver isto considere (u_n) em A_2 com

$$||u_n - u|| \to d(u, A_2),$$

o que é possível por ser $d(u, A_2) = \inf_{v \in A_2} ||v - u||$, daí, a compacidade de A_2 implica que (u_n) possui subsequência (u_{n_j}) convergente para algum $u_2 \in A_2$ e, então,

$$||u_2 - u|| = \lim ||u_{n_j} - u|| = d(u, A_2).$$

Ante ao exposto, segue-se que, dados $u \in A$ e $v \in K_c$,

$$||u - v|| \geq ||u_2 - v||| - ||u - u_2||,$$

sendo $A_2 = \overline{A_1 - N_{2\delta'}(K_c))}$, temos

$$||u - v|| \geq 2\delta' - \varepsilon = \delta' + \varepsilon' > \delta',$$

pela arbitrariedade de $v \in K_c$, concluímos que $d(u, K_c) > \delta'$ para $u \in A$ qualquer e então $A \cap N = A \cap N_{\delta'}(K_c) = \varnothing$, isto é, $A \subset (X - N) = X - N_{\delta'}(K_c)$, mostrando que A satisfaz as hipóteses do Lema de Deformação (Teorema 1.23) com $N = N_{\delta'}(K_c)$. Pelo Corlário 1.25, sendo $I = \Phi + \Psi$ com Φ e Ψ pares, podemos considerar uma deformação cumprindo os itens do Teorema 1.23, $\alpha_s : A \longrightarrow X$, com α_s ímpar. Definindo $B = \alpha_s(A)$ temos B compacto (como imagem de um compacto por uma aplicação contínua) e simétrico. De fato, seja $v = \alpha_s(u) \in B$, assim $-v = \alpha_s(-u)$, por ser A simétrico e α_s ímpar. Se $s \approx 0^+$, pelo Item 2 do Lema de Deformação,

$$I(\alpha_s(u)) \leq I(u) + 2s \leq (c + \varepsilon) + 2s < 0, \forall u \in A,$$

assim, por $I(0) = 0$, temos $0 \notin B$ e $B \in \Gamma$, analogamente

$$\sup_{u \in A} I(u) = \varphi(A) \leq c + \varepsilon < 0$$

e concluímos que $0 \notin A$, pela Proposição 2.14, $\gamma(A) \geq j$, por (G_1), obtemos $\gamma(B) \geq \gamma(A) \geq j$. Isso acarreta que $B \in \Gamma_j$ e, dado $v = \alpha_s(u) \in B$, pelo Item 1 do Lema de Deformação, $||\alpha_s(u) - u|| \leq s$, acarretando, pela definição de distância

$$d(v, A) \leq ||\alpha_s(u) - u|| \leq s$$

e, do mesmo modo,

$$d(u, B) \leq ||\alpha_s(u) - u|| \leq s,$$

segue-se, portanto,

$$d_1(B, A) = \max\{\sup_{u \in A} d(u, B), \sup_{v \in B} d(v, A)\} \leq s.$$

Das estimativas obtidas pelo *P.V.E.* e pela Sentença (1.6) no Lema de Deformação obtemos

$$-2\varepsilon s \geq \sup_{u \in A} I(\alpha_s(u)) - \sup_{u \in A} I(u) \geq$$

$$\geq \varphi(B) - \varphi(A) \geq -\varepsilon s,$$

que é uma contradição. Devemos então concluir que $\gamma(K_c) \geq p+1$. Mostremos que isso implica no resultado.

Sendo $\gamma(K_c) \geq p+1$, em particular, $\gamma(K_c) \geq 1$ e, da arbitrariedade de j, vale $\gamma(K_{c_j}) \geq 1$, $j \in \{1, ..., k\}$. Diante disto, temos $K_{c_j} \neq \varnothing$, pois $K_{c_j} = \varnothing$ implica $\gamma(K_{c_j}) = 0$. Como K_{c_j} é simétrico não-vazio, pelo menos dois elementos, u_j e $-u_j$, pertencem a K_{c_j}. Se $c_j \neq c_i$ para $i \neq j$, então $u_j \neq u_i$, para $i \neq j$, pois

$$I(u_i) = c_i \neq c_j = I(u_j),$$

assim I possui ao menos k pares de pontos críticos, $(u_j, -u_j)_{1 \leq j \leq k}$, as condições $c_j < 0$ e $I(0) = 0$ acarretam $u_j \neq 0$. Caso $c = c_j = c_{j+p}$ para algum $p > 0$, então $\gamma(K_{c_j}) > 1$ e K_c é infinito (Proposição B.3) e I tem uma infinidade de pontos críticos. ■

Observação 2.16 *Se $I = \Phi + \Psi$ satisfaz (H_0), com Φ, Ψ par, então Φ' é ímpar e então $-\Phi'(0) = \Phi'(-0) = \Phi'(0)$, assim $\Phi'(0) \equiv 0$. Vale também que $\Psi(0)$ é um mínimo de Ψ (vide Exemplo 1.6). Assim,*

$$\Phi'(0)(v-0) + \Psi(v) - \Psi(0) = \Psi(v) - \Psi(0) \geq 0, \ \ \forall v \in X,$$

mostrando que 0 é um ponto crítico de I. Fica então registrado que o Teorema 2.15 assegura a existência de Pontos Críticos além do não-trivial para I.

Antes de enunciar o próximo resultado faz-se necessário recordarmos o conceito de funções homotópicas:

1º- *Sejam $B \in X$ e $f, g \in C(B, X)$. Uma aplicação $h \in C([0,1] \times B, X)$ tal que $h(0, \cdot) \equiv f$ e $h(1, \cdot) \equiv g$ é dita uma homotopia das funções f e g.*

2º- *Duas funções $f, g \in C(B, X)$ são ditas homotópicas se existe um homotopia de f e g; escrevemos $f \approx g$ para indicar que f e g são homotópicas*

A noção de funções homotópicas pode ser entendida num aspecto mais amplo, quando B e X denotam espaços topológicos arbitrários (vide Subseção A.2.1 do Apêndice A). Para o sentido que empregaremos aqui é suficiente considerar $B \in X$, com X espaço de Banach.

Observação 2.17 *A relação "$\approx$"é de equivalência.*

As propriedades e uma discussão sucinta sobre funções homotópicas consta no Apêndice A.

Teorema 2.18 *Suponhamos que o funcional* $I : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, *satisfaça as condições* (H_0) *e* (PS) *e que* $I(0) = 0$ *com* Φ, Ψ *pares. Suponhamos que existam* X_1 *e* X_2 *subespaços fechados de* X *com* $X = X_1 \oplus X_0$, $\dim X_0 < \infty$ *e* $\dim X_0 < \dim X_2 < \infty$. *Se*

1. *existem* $a, r > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_r(0) \cap X_1} \geq a$;

2. $I(u) \to -\infty$ *se* $||u|| \to \infty$, $u \in X_2$,

então I *possui, ao menos,* $k = \dim X_2 - \dim X_0$ *pares distintos de pontos críticos.*

Demonstração. Iremos supor que I não possui pontos críticos em I_{-b}, para algum $b > 0$. Se isso não ocorresse, então para cada $b > 0$ existira u_b ponto crítico de I e isso nos fornece um infinidade de Pontos Críticos para I, basta considerar $u_1 \in I_{-1}$ ponto crítico de I; definimos $b_2 = -I(u_1) + 1 > 0$ e consideramos então $u_2 \in I_{-b_2}$ ponto crítico de I, temos $u_2 \neq u_1$ por ser

$$I(u_2) = -b_2 = I(u_1) - 1 < I(u_1).$$

Indutivamente, definimos $b_n = -I(u_{n-1}) + 1$ e obtemos u_n ponto crítico de I. Pela construção feita temos

$$I(u_{n+1}) < I(u_n), \forall n \in \mathbb{N},$$

mostrando que $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ é conjunto de infinitos pontos críticos de I.

Fixemos $R > r$ tal que, sendo $B := \overline{B}_R(0) \cap X_2$, temos $I|_{\partial B} \leq -b$, o que é possível em virtude do Item 2 das hipóteses registradas. Escrevamos agora $k = m - n > 0$, onde $m := \dim X_2$ e $n := \dim X_0$ e definamos, para $j \in \{1, ..., m\}$,

$$\mathcal{H} = \{f \in C(B, X); f \text{ é ímpar}, \ f|_{\partial B} \approx Id_{\partial B} \text{ em } I_{-b} \text{ por homotopia ímpar}\}, \qquad (2.4)$$

$$\Lambda'_j = \{f(B - V); f \in \mathcal{H}, V \subset B \text{ aberto em } B, V \cap \partial B = \varnothing, \gamma(Y) \leq m - j, Y \subset V, Y \in \Sigma\} \qquad (2.5)$$

com $V \subset B$ simétrico e, por fim,

$$\Lambda_j = \{A \subset X; A \in \Gamma \text{ e se } A \subset U, \text{ com } U \text{ aberto, existe } A_0 \in \Lambda'_j, A_0 \subset U\}. \qquad (2.6)$$

Recordemos que Γ denota a coleção dos Compactos, simétricos, não-vazios de X. Temos $Id_B \in \mathcal{H}$, pois Id_B é contínua, ímpar, $Id_{\partial B} \approx Id_{\partial B}$ e, por construção, $Id_{\partial B}(\partial B) = \partial B \subset I_{-b}$. Seja $j \in \{1, ..., m\}$, escolhendo $V = \varnothing$ em (2.5) temos

$$B = Id_B(B - \varnothing) = Id_B(B - V),$$

ainda $V = \varnothing \subset B$ é aberto e se $Y \subset V$ temos $Y = \varnothing$, com isso, $\gamma(Y) = 0 \leq m - j$, consequentemente, $B \in \Lambda_j'$. Disso segue também que, como B é compacto, que $B \in \Lambda_j$, basta considerarmos $A = A_0 = B$ em (2.6). Está então posto que $\mathcal{H}$, Λ_j', $\Lambda_j \neq \varnothing$.

Ainda, temos Λ_j fechado de Γ, isto é assegurado no resultado abaixo:

Resultado 1: (Λ_j, d_1) *é um espaço métrico completo.*

Prova: De fato, consideremos que $A_n \to A$ conforme d_1, com $A_n \in \Lambda_j$. Como Γ é completo, temos $A \in \Gamma$ e A é compacto e simétrico. Consideremos U aberto de X com $A \subset U$. Existe $\delta_0 > 0$ tal que $N_{\delta_0}(A) \subset U$, caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria $u_n \in X - U$ com $u_n \in N_{1/n}(A)$, isto é, $d(u_n, A) \leq 1/n$. Por ser A compacto, existe v_n tal que $||u_n - v_n|| = d(u_n, A)$ (análogo ao feito com A_2 no Teorema 2.15). Segue-se então que

$$||u_n - v_n|| \leq \frac{1}{n},$$

novamente pela compacidade de A, uma subsequência (v_{n_i}) converge para $v_0 \in A$, decorre que

$$||u_{n_i} - v_0|| \leq ||u_{n_i} - v_{n_i}|| + ||v_{n_i} - v_0|| \leq \frac{1}{n_i} + ||v_{n_i} - v_0||,$$

isto mostra que $u_{n_i} \to v_0$, como $X - U$ é fechado e $u_{n_i} \in X - U$ concluímos que $v_0 \in A \cap (X - U)$, o que contradiz $A \subset U$. Então ocorre $N_{\delta_0}(A) \subset U$ para algum $\delta_0 > 0$. De $A_n \to A$ obtemos, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$A_n \subset N_{\delta_0}(A) \subset U, \forall n \geq n_0 \,\P.$$

Como $A_n \in \Lambda_j$ e $A_n \subset U$, pela definição de Λ_j, existe $A_0 \in \Lambda_j'$ com $A_0 \subset U$. $\square$

Definimos agora o número

$$c_j = \inf_{A \in \Lambda_j} \sup_{u \in A} I(u) \tag{2.7}$$

¶Isso foi feito na demonstração da Proposição 2.15.

Antecedendo a conclusão do teorema apresentaremos dois resultados técnicos necessários à demonstração:

Resultado 2: *Se $n+1 \leq j \leq m$, então $c_j \geq a$.*

Prova: Suponhamos, por contradição, que $c_j < a$. Pela definição de c_j, existe $A \in \Lambda_j$ com $\sup\limits_{u \in A} I(u) < a$, daí $A \cap \partial B_r(0) \cap X_1 = \varnothing$, em virtude da hipótese $I|_{\partial B_r(0)} \geq a$. Isso mostra então que $A \subset X - (\partial B_r(0) \cap X_1)$, ora $X - (\partial B_r(0) \cap X_1)$ é aberto como complementar do fechado $\partial B_r(0) \cap X_1$. Da definição de Λ_j, existe $A_0 = f(B - V) \in \Lambda'_j \subset X - (\partial B_r(0) \cap X_1)$, de modo que, por ser V simétrico, podemos obter $Y \subset V$ com $Y \in \Sigma$, $\gamma(Y) \leq m - j$ e satisfazendo $f(\overline{B - Y}) \subset X - (\partial B_r(0) \cap X_1)$, i.e.,

$$f(\overline{B - Y}) \cap (\partial B_r(0) \cap X_1) = \varnothing. \tag{2.8}$$

(o cojunto Y pode ser obtido por homotetia de ∂V, veja a Figura 2.2).

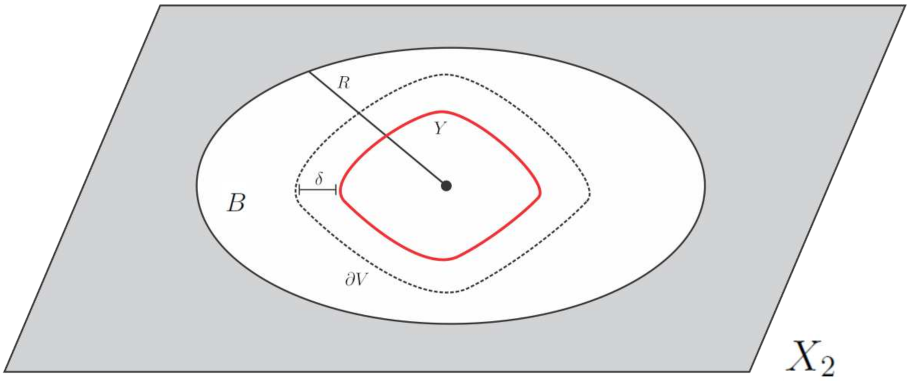

Figura 2.2: representação do conjunto Y.

Consideremos $h \in \mathcal{H}$ a homotopia ímpar entre $f|_{\partial B}$ e $Id_{\partial B}$ em I_{-b}, digamos com $h(0, \cdot) \equiv f|_{\partial B}$ e $h(1, \cdot) \equiv Id_{\partial B}$, definamos $Y_1 = (1/2)Y$ e para cada $(s, y) \in [0, R] \times \partial B$,

$$f_1(s, y) = \begin{cases} f(2s, y), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}R; \\ h(2s/R - 1, y), & \frac{1}{2}R \leq s \leq R. \end{cases}$$

Podemos identificar cada ponto $u \in B$ com um par $(s, y) \in [0, R] \times \partial B$ (coordenadas polares de u: $(s, y) \mapsto sy$). Vale que

$$f_1(\overline{B - Y_1}) \cap (\partial B_r(0) \cap X_1) = \varnothing. \tag{2.9}$$

Dois casos: se $s < R/2$, ocorre $f_1(s,y) = f(2s,y)$, uma vez que $(s,y) \in Y_1$ quando $(2s,y) \in Y$, então, se $(s,y) \in \overline{B - Y_1}$, temos $(s,y) \notin Y_1$, $(2s,y) \notin Y$ e, por (2.8),

$$f_1(s,y) = f(2s,y) \in f(\overline{B - Y}) \subset X - (\partial B_r(0) \cap X_1).$$

Se for $s \geq R/2$, então $f_1(s,y) = h(2s/R - 1, y) \in I_{-b}$ e não existe $(s,y) \in \overline{B - Y}$ com $f_1(s,y) \in (\partial B_r(0) \cap X_1)$, pois, do Item 1 das hipóteses, teríamos $-b \geq f_1(y,s) \geq a > 0$, um absurdo, pois $-b < 0$.

Consideremos W a componente conexa $f_1^{-1}(B_r(0))$ contendo a origem, sendo f_1 ímpar temos $f_1(0) = 0 \in B_r(0)$ e então W é não-vazio. Vamos agora pontuar alguns fatos concernentes ao conjunto W.

1ª - Como f_1 é contínua, então o conjunto $f_1^{-1}(B_r(0))$ é um conjunto aberto em B (i. e., $f_1^{-1}(B_r(0)) = U \cap B$ para algum U aberto de X_2). Assim, as componentes conexas de $f_1^{-1}(B_r(0))$ são conjuntos abertos. Particularmente, temos W aberto de B. Suponhamos $W = U' \cap B$, com U' aberto em X_2;

2º - Se $x \in \partial B = \partial B_R(0)$, então $||x|| = R > r$ e, $f_1(x) = h(1,x) = Id_{\partial B}(x) = x \notin B_r(0)$. Segue-se, portanto, que $W \subset B_R(0) \cap X_2$ e, consequentemente, que $W = U' \cap (B_R(0) \cap X_2)$ é um aberto limitado de X_2;

3º - Como f_1 é ímpar (por serem f e h) temos W simétrico, pela propriedade (G_6), concluímos que $\gamma(\partial W) = m$ [||].

Denotemos $C = f_1^{-1}(\partial B_r(0))$. Mostremos que $\partial W \subset C$ e $\gamma(C) \geq m$. Seja $x \in \partial W$, Se $||f_1(x)|| > r$, por continuidade, temos $||f_1(u)|| > r$ para $u \in B_x := X_2 \cap B_{\delta_x}(x)$, algum $\delta_x > 0$. Ora, sendo $x \in \partial W$ existe $y \in W \cap B_x$ mas isso implica pela definição de W que $r < ||f_1(y)|| < r$, uma contradição. Se for $||f_1(x)|| < r$ concluímos que $x \in \partial W \cap W$, o que não pode ocorrer por ser W aberto. A única possibilidade é então $||f_1(x)|| = r$ e $x \in C$, mostrando que $\partial W \subset C$. Novamente por ser f_1 ímpar, temos C simétrico. Como $0 \in W$ e $W \cap C = \varnothing$, vale $0 \notin C$ e assim $C \in \Sigma$, de (G_2) com $\gamma(C) \geq \gamma(\partial W) = m$ [**]. Vamos ao argumento final do Resultado 2.

Sendo $Y_1 = (1/2)Y$, aplicando (G_1) para $f \in C(Y, Y_1)$ e $g \in C(Y_1, Y)$ dadas por

[||] Aqui estamos considerando a identificação $X_2 \cong \mathbb{R}^m$ (veja Observação B.5.)

[**] Vale $\gamma(C) \leq m$, basta considerar $g; C \longrightarrow \partial B_1(0) \cap X_2$ dada por $g(x) = x/||x||$, que é contínua e ímpar, e aplicar (G_1) e (G_5). Logo, $\gamma(C) = m$.

$f(y) = (1/2)y$ e $g(y_1) = 2y_1$, temos $\gamma(Y_1) = \gamma(Y) \leq m - j$, daí,

$$\gamma(\overline{C - Y_1}) \geq \gamma(C) - \gamma(Y_1) \geq m - (m - j) = j.$$

Sendo $X = X_1 \oplus X_0$, com $\dim X_0 < \infty$ e X_1 fechado, está bem definida P_0, a projeção de X em X_0 ([5, Teorema 2.10]). Por construção, temos $f_1(\overline{B - Y_1}) \cap (\partial B_r(0) \cap X_1) = \varnothing$ e $f_1(\overline{C - Y_1}) \subset \partial B_r(0)$, segue então que, definindo

$$Z := P_0(f_1(\overline{C - Y_1}))$$

temos Z simétrico, pois f_1 e P_0 são ímpares (P_0 é linear e então ímpar). A propriedade $f_1(\overline{B - Y_1}) \cap (\partial B_r(0) \cap X_1) = \varnothing$ garante $f_1(\overline{C - Y_1}) \cap X_1 = \varnothing$ e assim, dado $x \in f_1(\overline{C - Y_1})$, escrevendo $x = x_1 + x_0$, com $x_1 \in X_1$ e $x_0 \in X_0$, temos sempre $x_0 \neq 0$, daí $0 \notin P_0(f_1(\overline{C - Y_1}) = Z$. Por fim, da continuidade $(P_0 \circ f_1)$, temos Z fechado como imagem de $\overline{C - Y_1}$, que é um compacto de B. Asim $Z \in \Sigma$ e, por (G_1), $\gamma(Z) \geq \gamma(\overline{C - Y_1}) \geq j$. Ora, sendo $Z \subset X_0$ com $\dim X_0 = n$, temos $\gamma(Z) \leq n < j$ (mesmo argumento usado na nota $\gamma(C) \leq m$). Essa contradição garante a afirmação do resultado 2. $\square$

Resultado 3: Λ_j *satisfaz as seguintes propriedades*:

1. $\Lambda_{j+1} \subset \Lambda_j$, $\forall j \in \{1, ..., m\}$;

2. *Se* $A \in \Lambda_j$, $W \subset X$ *é fechado e simétrico com* $A \subset \mathrm{int}(W)$ *e* $\alpha : W \longrightarrow X$ *é contínua, ímpar com* $\alpha|_{W \cap I_{-b}} \approx Id_{W \cap I_{-b}}$ *por uma homotopia ímpar, então* $\alpha(A) \in \Lambda_j$*;*

3. Se $Z \in \Sigma$ *é compacto com* $\gamma(Z) \leq p$ *e* $I|_Z > -b$*, então, para* $\delta \approx 0^+$*, temos* $A - \mathrm{int}(N_\delta(Z)) \in \Lambda_j$*, sempre que* $A \in \Lambda_{j+p}$*.*

Prova: 1): Suponhamos $A \in \Lambda_{j+1}$ e U aberto com $A \subset U$. Pela definição de Λ_{j+1}, existe $A_0 = f(B - V) \in \Lambda'_{j+1}$ com $A_0 \subset U$. Agora, pela definição de Λ'_{j+1}, para cada $Y \subset V$ com $Y \in \Sigma$, temos $\gamma(Y) \leq m - (j + 1) < m - j$ e então $A_0 \in \Lambda'_j$ com $A_0 \subset U$, Pela arbitrariedade de U, temos $A \in \Lambda_j$, logo, $\Lambda_{j+1} \subset \Lambda_j$ ††.

2): Sejam $A \in \Lambda_j$ e $\alpha(A) \subset U$ com U aberto. Como α é contínua e A compacto, temos

††Mostramos na argumentação que também vale $\Lambda'_{j+1} \cap \Lambda'_j$.

$\alpha(A)$ compacto, também, por α ser ímpar e A simétrico, temos $\alpha(A)$ simétrico. Resta agora exibir $A_0' \in \Lambda_j'$ satisfazendo $A_0' \subset U$. Considere W_1 aberto com $A \subset W_1 \subset W$ e $\alpha(W_1) \subset U$. Para construir W_1 procedemos ao seguinte modo: dado $u \in A$ existe $\delta_u > 0$ com $B_{\delta_u}(\alpha(u)) \subset U$. Como α é contínua, a aplicação $h_u : W \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h_u(v) := ||\alpha(v) - \alpha(u)||,$$

é também contínua. Como vale

$$||\alpha(u) - \alpha(u)|| = 0 < \delta_u,$$

pela continuidade de h_u, podemos escolher $\delta_u' > 0$ com $B_{\delta_u'}(u) \subset W$ de modo que

$$h_u(v) < \delta_u, \ \ \forall v \in B_{\delta_u'}(u)$$

equivalentemente,

$$||\alpha(v) - \alpha(u)|| < \delta_u \Rightarrow \alpha(v) \in B_{\delta_u}(\alpha(u)) \subset U, \ \ \forall v \in B_{\delta_u'}(u).$$

Considerando, para cada $u \in A$, o número δ_u' construído conforme procedimento anterior, basta definirmos

$$W_1 = \bigcup_{u \in A} B_{\delta_u'}(u).$$

Da hipótese $A \in \Lambda_j$ decorre que existe $A_0 = f(B - V) \in \Lambda_j'$ com f ímpar, $V \cap \partial B = \varnothing$ e $f(B - V) \subset W_1$. Consideramos então uma extensão de α a uma aplicação contínua e ímpar

$$\overline{\alpha} : f(B) \cup W \longrightarrow X,$$

(notemos que $f(B)$ é simétrico, pois a f obtida no argumento é ímpar). Conforme construímos e por ser $f \in \mathcal{H}$ vale que $f(\partial B) \subset f(B - V) \subset W$ e $f(\partial B) \subset I_{-b}$, daí, $f(\partial B) \subset W \cap I_{-b}$ e então a aplicação:

$$h(t, x) = t(\overline{\alpha} \circ f)(x) + (1 - t)f(x), t \in [0, 1], x \in B,$$

define uma homotopia ímpar entre $f|_{\partial B}$ e $(\overline{\alpha} \circ f)|_{\partial B}$ em I_{-b}, assim

$$(\overline{\alpha} \circ f)|_{\partial B} \approx f|_{\partial B} \approx Id_{\partial B},$$

em I_{-b} e $(\overline{\alpha} \circ f) \in C(B, X)$ é ímpar. Com isso temos $(\overline{\alpha} \circ f) \in \mathcal{H}$, assim, denotando $A'_0 = (\overline{\alpha} \circ f)(B - V)$, temos $A'_0 \in \Lambda'_j$ e

$$A'_0 = (\overline{\alpha}(f(B - V)) = \alpha(f(B - V)) \subset \alpha(A_0) \subset \alpha(W_1) \subset U.$$

3): Pela propriedade (G_7), podemos escolher $\delta_0 > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(Z)) = \gamma(Z)$, para $\delta \in (0, \delta_0)$. Fixemos $\delta \in (0, \delta_0)$ e definamos $Z_0 = N_\delta(Z)$. Consideremos $A - \operatorname{int}(Z_0) \in U$, com U aberto. Temos $A - \operatorname{int}(Z_0) = A \cap ((\operatorname{int}(Z_0))^C)$, onde $(\operatorname{int}(Z_0))^C = (X - \operatorname{int}(Z_0))$. Assim, $A - \operatorname{int}(Z_0)$ é um compacto, pois é fechado como intersecção de fechados e está contido no compacto A. Precisamos então mostrar que existe $A_0 \in \Lambda'_j$ satisfazendo $A_0 \subset U$. Seja $U_0 := U \cup \operatorname{int}(Z_0)$, temos então $A \subset U_0$. Por hipótese $A \in \Lambda_{j+p}$, existe, portanto, $A'_0 = f(B - V) \in \Lambda'_{j+p}$ com $A'_0 \subset U_0$. Segue que

$$A'_0 - \operatorname{int}(Z_0) = f(B - V) - \operatorname{int}(Z_0) = f(B - (V \cup f^{-1}(\operatorname{int}(Z_0)))). \tag{2.10}$$

Vamos mostrar que $A_0 := A'_0 - \operatorname{int}(Z_0) \in \Lambda'_j$, disso seguirá o resultado, uma vez que $A'_0 \subset U_0$ e assim

$$A_0 = A'_0 - \operatorname{int}(Z_0) \subset U_0 - \operatorname{int}(Z_0) \subset U.$$

Devemos mostrar que $V \cup f^{-1}(\operatorname{int}(Z_0))$ satisfaz

i): $V \cup f^{-1}(\operatorname{int}(Z_0))$ é aberto em B e simétrico;

ii): $V \cup f^{-1}(\operatorname{int}(Z_0)) \cap \partial B = \varnothing$;

iii): Para cada $Y \subset V \cup f^{-1}(\operatorname{int}(Z_0))$ tal que $Y \in \Sigma$ tem-se $\gamma(Y) \leq m - j$.

Estamos supondo $I|_Z > -b$ com Z conjunto compacto, podemos escolher $\delta > 0$ cumprindo $I|_{\operatorname{int}(Z_0)} > -b$. De fato, temos Z contido em $I^{-1}((-b, \infty))$, que é um conjunto aberto como consequência de ser I um funcional *sci*, logo, para algum $\delta > 0$ temos $\operatorname{int}(N_\delta(Z)) \subset N_\delta(Z) \subset I^{-1}((-b, \infty))$. Disso se segue que $f^{-1}(\operatorname{int} Z_0) \cap \partial B = \varnothing$, porquanto e $f \in \mathcal{H}$ implica $I|_{f(\partial B)} \leq -b$. Lembrando que $f(B - V) = A_0 \in \Lambda'_{j+p}$, pela definição de Λ'_{j+p}, podemos concluir que o conjunto $V \cup f^{-1}(\operatorname{int} Z_0)$ é aberto em B como união de abertos, simétrico pela simetria de V e por ser f ímpar e cumpre a relação $(V \cup f^{-1}(\operatorname{int} Z_0)) \cap \partial B = \varnothing$, uma vez que $V \cap \partial B = \varnothing$. Estão mostrados os itens *i)* e *ii)*. Suponha $Y \subset V \cup f^{-1}(\operatorname{int}(Z_0))$ com $Y \in \Sigma$. Podemos definir Y_1, $Y_2 \in \Sigma$ com $Y_1 \subset V$ e $Y_2 \subset f^{-1}(\operatorname{int}(Z_0))$ e $Y = Y_1 \cup Y_2$. Definimos

$$Y_1 = \{y \in Y; d(y, B - V) \geq d(y, B - f^{-1}(\operatorname{int} Z_0))\}$$

e

$$Y_2 = \{y \in Y; d(y, B - V) \leq d(y, B - f^{-1}(\text{int}\, Z_0)\}.$$

Para cada $y \in Y$ uma das desigualdades que definem os conjuntos Y_1, Y_2 ocorrem, assim $Y = Y_1 \cup Y_2$. Agora, seja $y \in Y_1 \subset Y$, como $Y \subset V \cup f^{-1}(\text{int}(Z_0))$ deve ocorrer $y \in V$ ou $y \in f^{-1}(\text{int}(Z_0))$. Se $y \notin V$, i. e., $y \in B - V$, então $y \in f^{-1}(\text{int}(Z_0))$ e assim, como $f^{-1}(\text{int}(Z_0))$ é aberto,

$$d(y, B - V) = 0 < d(y, B - f^{-1}(\text{int}(Z_0))),$$

isso contradiz $y \in Y_1$, portanto, $y \in V$ e $Y_1 \subset V$. Pelo Resultado 1 da demonstração do Teorema 1.23, as aplicações $\beta_1(y) = d(y, B - V)$ e $\beta_2(y) = d(y, B - f^{-1}(\text{int}(Z_0)))$ são contínuas. Podemos escrever

$$Y_1 = (\beta_1 - \beta_2)^{-1}([0, \infty)),$$

mostrando que Y_1 é fechado como imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua. De $Y_1 \subset Y \in \Sigma$ concluímos que $Y_1 \in \Sigma$. Analogamente, mostramos $Y_2 \subset f^{-1}(\text{int}(Z_0))$ e $Y_2 \in \Sigma$. Das relações $A'_0 = f(B - V) \in \Lambda'_{j+p}$ e $Y_1 \subset V$, temos $\gamma(Y_1) \leq m - (j + p)$; de $Y_2 \subset f^{-1}(\text{int}(Z_0))$ temos $f : Y_2 \longrightarrow Z_0$ contínua e ímpar, pela propriedades (G_1), $\gamma(Y_2) \leq \gamma(Z_0) \leq p$. Por (G_3) concluímos

$$\gamma(Y) \leq \gamma(Y_1) + \gamma(Y_2) \leq m - (j + p) + p = m - j.$$

Está mostrado *iii)*. $\square$.

De posse dos Resultados 2 e 3, passamos à conclusão da demonstração: pelo Item *i)* do Resultado 3, das propriedades de ínfimo,

$$c_1 \leq ... \leq c_m,$$

pelo Resultado 2,

$$a \leq c_{n+1} \leq ... \leq c_m.$$

Consideremos $j \in \{n + 1, ..., m\}$ e suponhamos $c_j = c_{j+p} = c$ para algum $p \geq 0$. Vamos mostrar que $\gamma(K_c) \geq p + 1$, analogamente ao Teorema 2.15 isso fornece o resultado (reveja a conclusão do Teorema 2.3). A hipótese $I(0) = 0$, o fato de I ser par junto a propriedade $a \leq c_j$, $j \in \{n + 1, ..., m\}$, acarretam que K_c é simétrico e $0 \notin K_c$, também K_c já foi mostrado compacto quando I satisfaz a condição (PS), assim $K_c \in \Sigma$. Suponhamos agora $\gamma(K_c) \leq p$, fixemos $\delta' > 0$ de modo que $\gamma(N_{2\delta'}(K_c)) = \gamma(K_c)$ e denotemos $N_{\delta'}(K_c) = N$ e $\varepsilon_0 = \min\{1, \delta'\}$. Consideramos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ dado pelo Lema de Deformação, definimos em Λ_j o funcional

$$\varphi(A) = \sup_{u \in A} I(u),$$

e escolhemos $A_1 \in \Lambda_{j+p} \subset \Lambda_j$ tal que

$$\varphi(A_1) = \sup_{u \in A_1} I(u) \leq c + \varepsilon^2 < c + \varepsilon.$$

Seja $A_2 = A_1 - \text{int}(N_{\delta'}(K_c)$, pelo Item *iii)* do Resultado 3 temos para $\delta' \approx 0^+$ temos $A_2 \in \Lambda_j$, ainda, por ser $A_2 \subset A_1$,

$$\varphi(A_2) \leq \varphi(A_1) \leq c + \varepsilon^2.$$

Agora aplicamos o *P.V.E.* a φ (o que é possível por ser Λ_j completo) com $\delta = \varepsilon^2$ e $\lambda = 1/\varepsilon$ para obter $A \in \Lambda_j$ tal que

$$c \leq \varphi(A) \leq c + \varepsilon^2, \quad d_1(A, A_2) \leq \varepsilon$$

e

$$\varphi(B) - \varphi(A) \geq -\varepsilon d_1(B, A), \forall B \in \Lambda_j.$$

Como $\varepsilon < \varepsilon_0 \leq \delta'$ e $d_1(A, A_2) \leq \varepsilon$, é válido que $A \cap N_{\delta'}(K_c) = \varnothing$ (análogo ao feito no Teorema 2.15 para A e A_2). Isso assegura que cumpre as hipóteses do Lema de Deformação e existe, portanto, uma deformação $\alpha_s : W \longrightarrow X$ com $A \subset \text{int}(W)$ e, pelo Corolário 1.25, podemos considerar ímpar. Consideremos $B := \alpha_s(A)$, como I é *sci* o conjunto I_{-b} é fechado ($I_{-b} = X - I^{-1}((-b, \infty))$), por nossa admissão inicial, I_{-b} não possui Pontos Críticos, aplicando o Item 4 do Lema de Deformação (Teorema 1.23), temos

$$I(\alpha_s(u)) \leq I(u) \leq -b, \forall u \in W \cap I_{-b}.$$

Isso mostra que α_s cumpre as hipóteses do Item *ii)* do Resultado 3, com isso deduzimos que $B = \alpha_s(A) \in \Lambda_j$. Ainda, pelo Item 1 do Lema de Deformação,

$$||\alpha_s(u) - u|| \leq s, \forall u \in W,$$

pela definição de d_1 em (2.2) temos $d_1(B, A) \leq s$. Logo, combinando a Sentença (1.6) e a estimativa do *P.V.E.* obtemos

$$-2\varepsilon s \geq \varphi(B) - \varphi(A) \geq -\varepsilon d_1(B, A) \geq -\varepsilon s,$$

uma contradição e então $\gamma(K_c) \geq p + 1$, concluindo a demonstração. ■

Apresentamos agora uma observação para encerrar o capítulo que é, em verdade, um Corolário imediato do teorema precedente:

Observação 2.19 *Nas condições do teorema anterior, se para cada $k \in \mathbb{N}$ existe X_2 subespaço de X de dimensão k tal que*

$$I(u) \to -\infty, \quad ||u|| \to \infty,$$

então I possui uma infinidade de Pontos Críticos. Basta aplicar o teorema recursivamente, para cada $k > \dim X_0$.

Capítulo 3

Aplicações dos teoremas minimax

Este é o capítulo no qual exemplificamos a utilidade dos resultados obtidos nos Capítulos 1 e 2, evidenciando a relevância destes resultados para além de sua beleza intrínseca e ilustrando a abordagem variacional para problemas que recaem na obtenção de pontos críticos de funcionais da forma (H_0). As aplicações aqui apresentadas figuram na Seção final de [25]. Como exemplo de outras aplicações da teoria exposta até aqui indicamos os trablhos de **Alves** e **de Morais Filho**, [2], **Mancini** e **Musina** [21], e **Squassina** e **Szulkin**, [23]. Nestes trabalhos os resultados que estudamos são utilizados para resolver problemas elípticos. No primeiro, é apresentada uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS), [2, Teorema 3.1], como registrada na Seção 2.1 do Capítulo 2; no segundo é aplicado o Lema de Deformação para se obter um ponto crítico do tipo Ponto de Sela, [21, p. 338] e, no último, obtém-se multiplicidade de soluções utilizando os resultados da Teoria do Gênero da Seção 2.2, [23, Teorema 1.1].

De modo geral, os exemplos que apresentaremos aqui consistem de inequações variacionais cuja resolução pode ser transliterada em se determinar um ponto crítico de um funcional $I = \Phi + \Psi$ satisfazendo (H_0), na linguagem de subdiferenciais *, os exemplos consistem em determinar $u \in D(\Psi)$ com

$$-\Phi'(u) \in \partial\Psi(u).$$

O pré-requisito implícito no capítulo é, além do conhecimento das ferramentas da Análise Funcional, uma noção introdutória dos *espaços* $L^p(\Omega)$ e dos *espaços de Sobolev*

*Vide Seção 1.2.

$W^{1,p}(\Omega)$ (um estudo desses espaços pode ser encontrado em [1], [3], [5] e [15]). Um resumo das principais propriedades de espaços de Sobolev aqui utilizadas constam no Apêndice C. No sentido de atribuir mais independência ao capítulo e não tornar tácita todas as noções pressupostas estabelecemos a seguir algumas notações: ao longo do capítulo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um aberto limitado com fronteira suave, registramos então:

i): O espaço $L^p(\Omega)$ é definido como o conjunto das *funções mensuráveis a Lebesgue* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\int |u|^p dx < \infty.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p}. \tag{3.1}$$

ii): O espaço $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ é definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

onde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a derivada fraca de u (vide Observação C.3 no Apêndice C). Temos $H^1(\Omega)$ um *espaço de Hilbert* com produto interno dado por

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx$$

e norma

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Ainda, o subespaço $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega);\ u|_{\partial\Omega} \equiv 0\}$ † é um espaço de Hilbert. Em $H_0^1(\Omega)$ consideramos como produto interno usual

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

que induz a norma (equivalente à definida em (3.2))

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u| dx \right)^{1/2}. \tag{3.3}$$

No que segue, as normas em $L^p(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ e ${H_0}^1(\Omega)$ serão denotadas conforme as notações estabelecidas em (3.1), (3.2) e (3.3), de modo que $||\cdot||$ indistintamente as

†A identidade $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ é entendida no sentido do *traço* [15, Seção 5.5].

normas de $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Fixamos ainda a notação

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2}, & N \geq 3 \\ \infty, & N \leq 2 \end{cases} \tag{3.4}$$

que é o expoente crítico de Sobolev em $H^1(\Omega)$, i. e., $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ compactamente para $p \in (1, 2^*)$ (vide Teorema C.5). Por fim, economicamente, denotamos para $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(x)dx.$$

Antes de apresentar as aplicações registramos uma propriedade do espaço $H^1(\Omega)$ (concomitantemente $H_0^1(\Omega)$) e uma propriedade de espaços de Hilbert que nos serão, reiteradamente, útil em argumentos posteriores:

Propriedade III-1: Seja $p \in (1, 2^*)$. Se (u_n) é uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$ (respectivamente $H_0^1(\Omega)$), então existem $u_0 \in H^1(\Omega)$ (respectivamente $u_0 \in H_0^1(\Omega)$), uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) e $a \in \mathbb{R}$ tais que

i): $u_{n_j} \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\Omega)$ (respectivamente em $H_0^1(\Omega)$);

ii): $u_{n_j} \to u_0$ em $L^p(\Omega)$;

iii): $||u_{n_j}|| \to a$;

iv): $u_{n_j}(x) \to u_0(x)$, q.t.p. em Ω.

A prova da validade da Propriedade III-1 é assegurada pela reflexividade de $H_0^1(\Omega)$ e da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, os detalhes estão registrados no Apêndice C (Proposição C.11).

Propriedade III-2: Se H é um espaço de Hilbert e $u_n \rightharpoonup u_0$ com $||u_n|| \to ||u_0||$, então $u_n \to u_0$.

A Propriedade III-2 é válida de modo mais geral, quando H é *uniformemente convexo* (vide [5, Proposição 3.32]), como espaços de Hilbert são também uniformemente convexos, vale o resultado indicado na Propriedade III-2.

As aplicações apresentadas serão enunciadas na forma de proposição, a fim da preservarmos o padrão dos capítulos anteriores e para efeito de citação.

3.1 Aplicação do Teorema do Passo da Montanha

A aplicação apresentada nessa seção é a resolução de uma desigualdade variacional no convexo $\mathbb{K} = \{u \in H_0^1(\Omega);\ u \geq 0,\ \text{q.t.p. em } \Omega\}$. Inicialmente, apresentamos um resultado auxiliar que é consequência imediata das imersões de Sobolev.

Proposição 3.1 *O conjunto* $\mathbb{K} = \{u \in H_0^1(\Omega);\ u \geq 0,\ \textit{q.t.p. em } \Omega\}$ *é um subconjunto convexo e fechado em* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Dados $u, v \in \mathbb{K}$ e $t \in [0,1]$ temos

$$tu + (1-t)v \geq 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e então $tu + (1-t)v \in \mathbb{K}$, mostrando que $\mathbb{K}$ é convexo. Se (u_n) é um sequência em $\mathbb{K}$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, então, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ e, por consequência, por resultados de teoria da medida (vide [5, Teorema 4.9]),

$$0 \leq \lim u_{n_j}(x) = u(x), \text{ q.t.p. em} \Omega,$$

para alguma subsequência (u_{n_j}) de (u_n), mostrando que $u \in \mathbb{K}$. Logo, $\mathbb{K}$ é fechado. ■

Segue agora resultado principal dessa seção.

Proposição 3.2 *Consideremos* $\mathbb{K} = \{u \in H_0^1(\Omega);\ u \geq 0,\ \textit{q.t.p. em } \Omega\}$. *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in (1, 2^* - 1)$ *e* $g \in L^2(\Omega)$ *com* $g < 0$ *q.t.p. em* Ω, *então a desigualdade variacional*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) - \lambda \int_\Omega u(v-u) - \int_\Omega u^p (v-u) \geq \int_\Omega g(v-u), \ \forall v \in \mathbb{K} \tag{3.5}$$

possui uma solução não-trivial $u \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Seja $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$, com

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} - \int_\Omega gu$$

e

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0, \text{ se } & u \in \mathbb{K} \\ \infty, \text{ se } & u \notin \mathbb{K}. \end{cases}$$

Como $p \in (1, 2^* - 1)$ temos $\Phi \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ (Proposições D.1 e D.3) com

$$\Phi'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega uv - \int_\Omega |u|^{p-1}uv - \int_\Omega gv, \ \ v \in H_0^1(\Omega)$$

Temos Ψ convexo, pois dados $u, v \in \mathbb{K}$, como $\mathbb{K}$ foi mostrado convexo temos

$$\Psi(tu + (1-t)v) = 0 = t\Psi(u) + (1-t)\Psi(v)$$

e, se $u \notin \mathbb{K}$ ou $v \notin \mathbb{K}$, então

$$\Psi(tu + (1-t)v) \leq \infty = t\Psi(u) + (1-t)\Psi(v).$$

Ainda, como $\mathbb{K}$ é fechado em $H_0^1(\Omega)$ (Proposição 3.1), o Exemplo 1.5 assegura que Ψ é *sci*. Assim, I satisfaz (H_0), pelo Item 2 da Observação 1.9, temos $u \in H_0^1(\Omega)$ um ponto crítico de I se, e somente se, $u \in \mathbb{K}$ e

$$\Phi'(u)(v-u) \geq 0, \ \forall v \in \mathbb{K},$$

isso equivale a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(v-u) - \lambda \int_\Omega u(v-u) - \int_\Omega u^p(v-u) - \int_\Omega g(v-u) \geq 0, \ \forall v \in \mathbb{K}$$

e com isso depreendemos que u é solução de (3.5) se, e somente se, é um ponto crítico de I. No intento de provar a proposição corrente iremos mostrar que I possui um ponto crítico via Teorema do Passo da Montanha (Teorema 2.3). Isto será feito em duas etapas.

1ª etapa: *I satisfaz a condição (PS).*

Suponhamos (u_n) uma sequência (PS). Pela Observação 1.13, Sentença (1.3), podemos considerar $u_n \in \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\Phi'(u_n)(v-u_n) \geq -\varepsilon_n ||v-u_n||, \ \forall v \in \mathbb{K}, \tag{3.6}$$

com $\varepsilon_n \to 0$ e $\Phi(u_n) \to c \in \mathbb{R}$. Fixando $A \in ((p+1)^{-1}, 1/2)$ e $v_n := 2u_n \in \mathbb{K}$, temos $\Phi'(u_n)(u_n) \geq -\varepsilon_n ||u_n||$ e então, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$-A\Phi'(u_n)(u_n) \leq A\varepsilon_n ||u_n|| \leq ||u_n||, \ n \geq n_0,$$

assim como, de $\Phi(u_n) \to c$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ com

$$\Phi(u_n) \leq c+1, \ n \geq n_1.$$

Segue que para $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ vale

$$\begin{aligned} c + 1 + ||u_n|| \geq \Phi(u_n) - A\Phi'(u_n)(u_n) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - A\right) ||u_n||^2 + \lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega |u_n|^2 + \\ &+ \left(A - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega |u_n|^p + 1 + (A-1)\int_\Omega g u_n =: \\ &=: \left(\frac{1}{2} - A\right) ||u_n||^2 + I_n, \end{aligned}$$

onde

$$I_n := \lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega |u_n|^2 + + \left(A - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega |u_n|^p + 1 + (A-1)\int_\Omega g u_n.$$

Mostremos que (I_n) é limitada inferiormente. Primeiramente, como $A < 1$, $u_n \geq 0$ e $g < 0$ temos $(A-1)\int_\Omega g u_n \geq 0$, do que segue

$$I_n \geq \lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega |u_n|^2 + \left(A - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega |u_n|^{p+1} =: J_n,$$

basta então mostramos que (J_n) é limitada inferiormente. Fixemos $R > 0$, temos

$$\begin{aligned} J_n = \lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)\int_{[u_n \leq R]} |u_n|^2 + \left(A - \frac{1}{p+1}\right)\int_{[u_n \leq R]} |u_n| + \\ + \lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)\int_{[u_n > R]} |u_n|^2 + \left(A - \frac{1}{p+1}\right)\int_{[u_n > R]} |u_n|^{p+1} =: \\ =: J_n^1 + J_n^2 \end{aligned}$$

com

$$\begin{cases} J_n^1 := \lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)\displaystyle\int_{[u_n \leq R]} |u_n|^2 + \left(A - \frac{1}{p+1}\right)\int_{[u_n \leq R]} |u_n|, \ \ \forall n \in \mathbb{N}; \\ \\ J_n^2 := \lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)\displaystyle\int_{[u_n > R]} |u_n|^2 + \left(A - \frac{1}{p+1}\right)\int_{[u_n > R]} |u_n|^{p+1}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ora, (J_n^1) satisfaz

$$\begin{aligned} |J_n^1| \leq |\lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)|\int_{[u_n \leq R]} |u_n|^2 + |\left(A - \frac{1}{p+1}\right)|\int_{[u_n \leq R]} |u_n|^{p+1} \leq \\ \leq \lambda|\left(A - \frac{1}{2}\right)||\Omega|R^2 + |\left(A - \frac{1}{p+1}\right)||\Omega|R^{p+1} := B \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_n^1 \geq -B, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para (J_n^2) fazemos

$$J_n^2 = \lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)\int_{[u_n>R]} |u_n|^2 + \left(A - \frac{1}{p+1}\right)\int_{[u_n>R]} |u_n|^{p+1} =$$
$$= \int_{[u_n>R]} \left(\lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)|u_n|^2 + \left(A - \frac{1}{p+1}\right)|u_n|^{p+1}\right),$$

definindo $h(t) = \lambda(A - \frac{1}{2})t^2 + (A - \frac{1}{p+1})t^{p+1}$, como $(A - 1/(p+1)) > 0$ e $p + 1 > 2$, temos $h(t) \to \infty$, com isso existe $R > 0$ satisfazendo $h(t) > 0$ para $t > R$. Segue-se, portanto, que para tal R vale

$$J_n^2 = \int_{[u_n>R]} \left(\lambda\left(A - \frac{1}{2}\right)|u_n|^2 + \left(A - \frac{1}{p+1}\right)|u_n|^{p+1}\right) = \int_{[u_n>R]} h(u_n) \geq 0.$$

Concluímos então

$$I_n \geq J_n = J_n^1 + J_n^2 \geq -B, \forall n \in \mathbb{N},$$

consequentemente,

$$(c+1) + ||u_n|| \geq \left(\frac{1}{2} - A\right)||u_n||^2 - B,$$

isso implica que (u_n) é limitada, caso contrário, se existisse (u_{n_j}) uma subsequência ilimitada de (u_n), como

$$\frac{-B}{||u_{n_j}||} + \left(\frac{1}{2} - A\right) \leq \frac{1}{||u_{n_j}||} + \frac{c+1}{||u_{n_j}||},$$

fazendo $j \to \infty$,

$$\left(\frac{1}{2} - A\right) \leq 0,$$

obtemos uma contradição, pois $(1/2 - A) > 0$. Está posto que (u_n) é limitada, pela Propriedade III-1, podemos considerar uma subsequência, ainda denota por (u_n), $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $a \in \mathbb{R}$ com

i): $u_n \rightharpoonup u_0$;

ii): $||u_n|| \to a$;

iii): $u_n \to u_0$, em $L^{p+1}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ [‡];

iv): $u_n \to u_0(x)$, q.t.p. em Ω.

Como $\mathbb{K}$ é convexo fechado, o Item *i)* assegura que $u_0 \in \mathbb{K}$ ([4, Teorema 6.2.11]), iremos provar que ocorre $\lim u_n = u_0$. Agora, definimos para $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\Phi_1(u) = \Phi(u) - \frac{1}{2}||u||^2 = -\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} - \int_\Omega gu,$$

[‡]Eventualmente, para tal propriedade precisamos passar a subsequências mais de um vez, estamos preservando a notação (u_n).

temos $\Phi_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\begin{aligned}\Phi_1'(u)(v) &= -\lambda \int_\Omega uv - \int_\Omega |u|^{p-1}uv - \int_\Omega gv = \\ &= \Phi'(u)(v) - (u,v), \ \ v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

Vamos mostrar o seguinte resultado:

Resultado 1: $\Phi_1'(u_n) \to \Phi_1'(u_0)$ em $(H_0^1(\Omega))'$.

Prova: Inicialmente, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, $||v|| = 1$, utilizando o fato de que $u_0 \geq 0$ por ser $u_0 \in \mathbb{K}$,

$$\Phi_1'(u_n)(v) - \Phi_1'(u_0)(v) = -\lambda \int_\Omega (u_n - u_0)v - \int_\Omega (u_n^p - u^p)v,$$

daí,

$$|(\Phi_1'(u_n) - \Phi_1'(u_0))(v)| \leq |\lambda| \int_\Omega |u_n - u_0||v| + \int_\Omega |u_n^p - u^p||v|.$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, temos u_n, $u_0 \in L^{p+1}(\Omega)$ e assim u_n^p, $u_0^p \in L^{(p+1)/p}(\Omega)$. Visto que

$$\frac{1}{(p+1)/p} + \frac{1}{p+1} = 1$$

e $v \in L^{p+1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, temos pela *desigualdade Hölder* ([5, Teorema 4.6]),

$$|(\Phi_1'(u_n) - \Phi_1'(u_0))(v)| \leq |\lambda| ||u_n - u_0||_2 ||v||_2 + ||u_n^p - u^p||_{\frac{p+1}{p}} ||v||_{p+1},$$

ainda, das imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, existem C_1, $C_2 > 0$ com

$$||v||_2 \leq C_1 \ \text{ e } \ ||v||_{p+1} \leq C_2 ||v||,$$

acarretando que

$$\begin{aligned}|(\Phi_1'(u_n) - \Phi_1'(u_0))(v)| &\leq |\lambda| C_1 ||u_n - u_0||_2 ||v|| + C_2 ||u_n^p - u^p||_{\frac{p+1}{p}} ||v|| \leq \\ &\leq |\lambda| C_1 ||u_n - u_0||_2 + C_2 ||u_n^p - u^p||_{\frac{p+1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Por *iii)*, sabemos que $||u_n - u_0||_2 \to 0$ e $||u_n - u_0||_{p+1} \to 0$. Utilizaremos isso para mostrar que $||u_n^p - u_0^p||_{\frac{p+1}{p}} \to 0$.

Fixemos (u_{n_j}) subsequência de (u_n), vale ainda que $||u_{n_j} - u_0||_{p+1} \to 0$, assim como, de *(iv)*, $\lim u_{n_j}(x) = u_0(x)$ q.t.p. em Ω. Podemos então escolher uma subsequência, que denotaremos por (u_{n_j}), tal que, existe $h \in L^{p+1}(\Omega)$ com $|u_{n_j}(x)| \leq h(x)$. (Vide [5, Teorema 4.9]). Segue-se disso

$$|u_{n_j}^p(x) - u_o^p(x)| \leq |u_{n_j}(x)|^p + |u_0(x)|^p \leq (h(x)^p + u_0^p(x)) \in L^{(p+1)/p}(\Omega), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$\lim |u^p_{n_j}(x) - u^p_o(x)|^{\frac{p+1}{p}} = 0, \text{ q.t.p. em}\Omega,$$

pelo *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue* ([3, Teorema 5.6]), concluímos $||u^p_{n_j} - u^p_0||_{\frac{p+1}{p}} \to 0$. O argumento exposto no parágrafo corrente foi: dada uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n), existe (v_k) subsequência de (u_{n_j}) com $||v^p_k - u^p_0||_{\frac{p+1}{p}} \to 0$, isto prova que, em verdade, $||u^p_n - u^p_0||_{\frac{p+1}{p}} \to 0$.

Voltando ao Resultado 1, por (3.7), dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ cumprindo

$$|\Phi_1'(u_n) - \Phi_1'(u_0)| \leq |\lambda| C_1 ||u_n - u_0||_2 + C_2 ||u^p_n - u^p||_{\frac{p+1}{p}} < \varepsilon, \ n \geq n_0,$$

por consequência

$$||\Phi_1'(u_n) - \Phi_1'(u_0)|| = \sup_{||v||=1} |\Phi_1'(u_n) - \Phi_1'(u_0)| \leq \varepsilon.$$

Logo, $\Phi_1'(u_n) \to \Phi_1'(u_0)$. $\square$

Podemos agora concluir a 1ª etapa. Considerando $v = u_0$ em (3.7) obtemos

$$(u_n, u_0 - u_n) + \Phi_1'(u_n)(u_0 - u_n) = \Phi'(u_n)(u_0 - u_n) \geq -\varepsilon_n ||u_0 - u_n||.$$

Fazendo $n \to \infty$, utilizando *i)* e *ii)*, por ser $||u_0 - u_n||$ limitada e $\varepsilon_n \to 0$, obtemos

$$||u_0||^2 - a^2 = \lim(u_n, u_0) - \lim(u_n, u_n) + \Phi_1'(u_0)(0) \geq 0,$$

de onde concluímos $a = \lim ||u_n|| \leq ||u_0||$. Como $u_n \rightharpoonup u_0$, a Propriedade III-2 asseguram que $\lim u_n = u_0 \in \mathbb{K}$.

Vamos agora mostrar que I satisfaz a geometria do Passo da Montanha (Teorema 2.3).

2ª etapa: *I satisfaz os Itens 1 e 2 do Teorema 2.3.*

1. *Verificação de 1*:

Raciocinamos por contradição. Suponhamos então que não existam $a, r > 0$ tais que $\inf\limits_{u \in \partial B_r(0)} I(u) \geq a > I(0) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $u_n \in \partial B_{1/n}(0)$ e

$$\frac{I(u_n)}{||u_n||^2} \leq \frac{1}{n},$$

se assim não fosse, para algum n_0 teríamos $I(u)/||u||^2 > 1/n_0$ para todo $u \in \partial B_{1/n_0}(0)$, o que implica

$$I(u) > ||u||^2 \frac{1}{n_0} = \frac{1}{n_0^3}, \ \forall u \in \partial B_{1/n_0}(0)$$

e então

$$\inf_{u\in\partial B_{1/n_0}(0)} I(u) \geq \frac{1}{n_0} > 0,$$

mas isso é exatamente o que estamos negando. Como $I = \Phi + \Psi$, temos $u_n \in \mathbb{K}$, do contrário, $I(u_n) = \infty$. Temos assim

$$\frac{\Phi(u_n)}{||u_n||^2} = \frac{I(u_n)}{||u_n||^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Definimos então $v_n = u_n/||u_n||$. Como (v_n) é limitada, analogamente ao feito na etapa anterior, podemos considerar que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $v_n \to v_0$ em $L^2(\Omega)$, ainda, da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, temos $(||v_n||_{p+1})$ limitada. Pela definição de Φ temos

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(u_n)}{||u_n||^2} &= \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}||u_n||^{-2}\int_\Omega |u_n|^2 - \frac{||u_n||^{-2}}{p+1}\int_\Omega |u_n|^{p+1} - ||u_n||^{-2}\int_\Omega gu_n = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_n|^2 - \frac{||u_n||^{p-1}}{p+1}\int_\Omega |v_n|^{p+1} - ||u_n||^{-1}\int_\Omega gv_n \leq \frac{1}{n}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Temos duas possibilidades: se $v_0 = 0$, então

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_n|^2 \to 0.$$

também,

$$\frac{||u_n||^{p-1}}{p+1}\int_\Omega |v_n|^{p+1} \to 0,$$

pois $||u_n|| \to 0$ e $(||v_n||_{p+1})$ é limitada. Como $g < 0$ por hipótese e $v_n \geq 0$, temos

$$-||u_n||^{-1}\int_\Omega gv_n \geq 0,$$

utilizando estes fatos em (3.8) obtemos

$$\frac{\Phi(u_n)}{||u_n||^2} \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_n|^2 - \frac{||u_n||^{p-1}}{p+1}\int_\Omega |v_n|^{p+1}$$

e então

$$\liminf \frac{\Phi(u_n)}{||u_n||^2} \geq 1/2,$$

mas a desigualdade $\Phi(u_n)/||u_n||^2 \leq 1/n$ acarreta $\liminf \Phi(u_n)/||u_n||^2 \leq 0$. Isso é uma contradição.

Agora, se $v_0 \neq 0$, como $v_n \rightharpoonup v_0$, com v_n em $\mathbb{K}$, que é convexo e fechado, temos $v_0 \geq 0$. De $g < 0$ e $v_n \to v_0$ em $L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega gv_n \to \int_\Omega gv_0 < 0,$$

pelo que concluímos

$$-||u_n||^{-1}\int_\Omega g v_n \to \infty$$

e, junto aos fatos

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_n|^2 \to \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_0|^2$$

e

$$\frac{||u_n||^{p-1}}{p+1}\int_\Omega |v_n|^{p+1} \to 0,$$

obtemos

$$\liminf \frac{\Phi(u_n)}{||u_n||^2} = \infty,$$

que novamente é uma contradição com $\Phi(u_n)/||u_n||^2 \leq 1/n$. Está, portanto, verificado o Item 1 do Teorema 2.3.

2. *Verificação de 2*:

Para verificar o Item 2 devemos provar que existe $e \in H_0^1(\Omega)$ tal que $||e|| > r$ e $I(0) \geq I(e)$. Ora, fixando $u \in \mathbb{K} - 0$, temos

$$\Phi(tu) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}t^2\int_\Omega |u|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} - t\int_\Omega gu, \quad t > 0$$

Como $p+1 > 2$, fazendo $t \to \infty$, temos $\Phi(tu) \to -\infty$, basta então escolher $e = t_0 u$ com t_0 suficientemente grande. Está, portanto, verificado os itens do Teorema do Passo da Montanha. Logo, existe $u \in K_c \cap \mathbb{K}$, onde c é o nível do Passo da Montanha. Na demonstração do Teorema 2.3 é provado também que $c \geq a > I(0)$, isso assegura que $u \neq 0$. ■

Façamos um síntese da relação entre as hipóteses da Proposição 3.2 e o espaço $H_0^1(\Omega)$:

1º - A hipótese $p \in (1, 2^*-1)$ é crucial para garantir compacidade na imersão $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$. Isto se fez necessário para se assegurar que I satisfaz a condição (PS). O fato $p+1 > 2$ também é utilizado nas estimativas para se garantir a limitação das sequências (PS).

2º - As hipóteses $g \in L^2(\Omega)$ e $g < 0$ foram necessárias para se assegurar a limitação das sequências (PS) e na verificação da geometria do Passo da Montanha para o funcional I, o aspecto crucial, além do sinal de g, é o fato de g pertencer ao espaço $L^q(\Omega)$ conjugado ao das funções $H_0^1(\Omega)$ [§].

[§]Lembre que dois expoentes p e q são ditos conjugados quando $1/p + 1/q = 1$.

Em adição aos pontos supracitados, foi também de fundamental importância o fato de que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo [¶] e, no argumento final da primeira etapa, o de que $H_0^1(\Omega)$ é uniformemente convexo, não sendo em verdade imprescindível que $H_0^1(\Omega)$ seja um espaço de Hilbert. Diante destes aspectos, percebemos a possibilidade de enunciar uma versão mais geral da desigualdade (3.5), fazê-mo-lo em forma de corolário. Antes de enunciar o corolário, registramos a validade da imersão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, $s \in [1, p^*)$, onde $p^* = pN/(N-p)$ (vide Teorema C.5).

Corolário 3.3 *Consideremos* $\mathbb{K} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ u \geq 0,\ q.t.p.\ em\ \Omega\}$, $p > 1$. *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in (p-1, p^*-1)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $g < 0$ *q.t.p. em* Ω, $1/p + 1/q = 1$, *então a desigualdade variacional*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(v-u) - \lambda \int_\Omega u^{p-1}(v-u) - \int_\Omega u^r(v-u) \geq \int_\Omega g(v-u),\ \forall v \in \mathbb{K}$$

possui uma solução não-trivial $u \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Consideremos o funcional $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p - \frac{1}{r+1}\int_\Omega |u|^{r+1} - \int_\Omega gu,\ \ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Diante das hipóteses fixadas, temos $\Phi \in C^1(W_0^{1,p}, \mathbb{R})$ (veja Exemplo D.6)) com

$$\Phi'(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega u^{p-1}v - \int_\Omega u^r v - \int_\Omega gv,\ \ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Diante da hipótese feita a r, vale a imersão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$, podemos então reproduzir o argumento feito na Proposição 3.1 e concluir que $\mathbb{K}$ é fechado, seja então Ψ o funcional indicador de $\mathbb{K}$, segue que $I = \Phi + \Psi$ satisfaz (H_0). Como na Proposição 3.2, temos $u \in \mathbb{K}$ é solução de

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(v-u) - \lambda \int_\Omega u^p(v-u) - \int_\Omega u^r(v-u) \geq \int_\Omega g(v-u),\ \forall v \in \mathbb{K},$$

se, somente se, u é ponto crítico de I. Reproduzindo *ipsis litteris* os passos feitos na primeira etapa da Proposição 3.2., podemos concluir que as sequências (PS) do funcional I são limitadas, porquanto essa propriedade depende somente da hipótese $p \in (1, 2^*-1)$, substituída, em nosso caso, por $r \in (p-1, p^*-1)$.

[¶]Isso é utilizado na prova da Propriedade III-1.

Como $p > 1$, então $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, vale um resultado similar à Propriedade III-1, substituindo-se $H_0^1(\Omega)$ por $W_0^{1,p}(\Omega)$ e 2^* por p^*. Assim, dada (u_n) uma sequência (PS), temos (u_n) limitada e podemos, então, supor que existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com

i): $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

ii): $u_n \to u_0$ em $L^p(\Omega)$, $L^r(\Omega)$.

Isso nos permite concluir, definindo

$$\Phi_1(u) = \Phi(u) - \frac{1}{p}||u||_{1,p}^p = -\frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p - \frac{1}{r+1}\int_\Omega |u|^{r+1} - \int_\Omega gu$$

e repetindo os argumentos do Resultado 1 da demonstração do Teorema 3.2, que $\Phi_1'(u_n) \to \Phi_1'(u_0)$. Uma sequência (PS) satisfaz

$$\Phi'(u_n)(v - u_n) \geq -\varepsilon_n||v - u_n||, \ \ \forall v \in \mathbb{K},$$

com $\varepsilon_n \to 0$. Fazendo $v = u_0$ ($u_0 \in \mathbb{K}$, em virtude de *i)*), temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_0 - u_n) + \Phi_1'(u_n)(u_0 - u_n) \geq -\varepsilon_n||u_0 - u_n||,$$

que equivale,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u_0) \leq \varepsilon_n||u_0 - u_n|| + \Phi_1'(u_n)(u_n - u_0).$$

Nesse ponto, no caso do Teorema 3.2, a convexidade uniforme de $H_0^1(\Omega)$ nos fornecia o resultado. Não podemos aplicar esse argumento aqui, tendo em vista que $W_0^{1,p}(\Omega)$ não é necessariamente uniformemente convexo. Para concluirmos utilizaremos a *desigualdade de Tartar* ([12, Lema 4.4, Capítulo I]), segundo a qual, para x, $y \in \mathbb{R}^N$, $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y)_{\mathbb{R}^N} \geq \begin{cases} C|x - y|^p, & \text{se } p \geq 2; \\ C\dfrac{|x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

onde $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^N}$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^N$ e $C = C_p > 0$. Vamos então analisar separadamente cada caso.

1. $p \geq 2$.

A sequência (u_n) foi mostrada cumprindo

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u_0) \leq \varepsilon_n||u_0 - u_n|| + \Phi_1'(u_n)(u_n - u_0),$$

aplicando a desigualdade de Tartar com $x = \nabla u_n$ e $y = \nabla u_0$, obtemos

$$C \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_0|^p + \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla(u_n - u_0) \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla(u_n - u_0) \leq$$
$$\leq \varepsilon_n ||u_0 - u_n|| + \Phi_1'(u_n)(u_n - u_0),$$

que, por sua vez, implica

$$C \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_0|^p \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla(u_n - u_0) + \varepsilon_n ||u_0 - u_n|| + \Phi_1'(u_n)(u_n - u_0).$$

Diante disto, se mostrarmos que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla(u_n - u_0) + \varepsilon_n ||u_0 - u_n|| + \Phi_1'(u_n)(u_n - u_0) = o_n(1)$$

concluímos que

$$C \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_0|^p \to 0,$$

mostrando que $u_n \to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nós vamos argumentar em verdade que

(a): $\varepsilon_n ||u_0 - u_n|| \to 0$;

(b): $\Phi_1'(u_n)(u_n - u_0) \to 0$;

(c): $\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla(u_n - u_0) \to 0$.

Prova de (a):

Ora, $(||u_0 - u_n||)$ é limitada, então, como $\varepsilon_n \to 0$, concluímos $\varepsilon_n ||u_0 - u_n|| \to 0$. Isso prova *(a)*. $\square$

Prova de (b):

Pela definição de Φ_1,

$$\Phi_1'(u_n)(v) = -\lambda \int_\Omega |u_n|^{p-1} v - \int_\Omega |u_n|^r v, \;\; v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

temos, pela desigualdade de Hölder e por *ii)*

$$|\Phi_1'(u_n)(u_n - u_0)| \leq |\lambda| \, ||u_n^{p-1}||_{\frac{p}{p-1}} ||u_n - u_0||_p + ||u_n^r||_{\frac{r+1}{r}} ||u_n - u_0||_r.$$

Sendo (u_n) limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, das imersões

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$$

e

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

temos $(||u_n||_p)$ e $(||u_n||_{r+1})$ limitadas, como $||u_n^{p-1}||_{\frac{p}{p-1}} = ||u_n||_p^{p-1}$ e $||u_n^r||_{\frac{r+1}{r}} = ||u_n||_{r+1}^r$, existe $M > 0$ tal que

$$||u_n^{p-1}||_{\frac{p}{p-1}}, \ \ ||u_n^r||_{\frac{r+1}{r}} \leq M,$$

daí, por *ii)*,

$$\begin{aligned}|\Phi_1'(u_n)(u_n - u_0)| &\leq |\lambda| \, ||u_n^{p-1}||_{\frac{p}{p-1}}||u_n - u_0||_p + ||u_n^r||_{\frac{r+1}{r}}||u_n - u_0||_r \leq \\ &\leq |\lambda|M||u_n - u_0||_p + M||u_n - u_0||_{r+1} \to 0.\end{aligned}$$

provando *(b)*. □

Prova de (c):

Consideremos o funcional J_0 dado por

$$J_0(v) = \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla v, \ \ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Temos J_0 linear e, pela desigualdade de Hölder,

$$|J_0(v)| \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-1}|\nabla v| \leq || \, |\nabla u_o|^{p-1} \, ||_{\frac{p}{p-1}} || \, |\nabla v| \, ||_p = B_0||v||_{1,p},$$

com $B_0 := || \, |\nabla u_o|^{p-1} \, ||_{\frac{p}{p-1}}$. Isso assegura que J_0 é um funcional linear contínuo. Como

$$J_0(u_n - u_0) = \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla(u_n - u_0)$$

e, por *i)*, vale $(u_n - u_0) \rightharpoonup 0$, das propriedades de funcionais lineares concluímos ([4, Proposição 7.2.2; Proposição 7.2.8]) concluímos

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla(u_n - u_0) = J_0(u_n - u_0) \to 0,$$

mostrando o Item *(c)*. □

2. $1 < p < 2$.

Como no caso anterior, aplicando a desigualdade de Tartar, concluímos que

$$C\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u_0|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{2-p}} \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla(u_n - u_0) + \varepsilon_n||u_0 - u_n|| + \Phi_1'(u_n)(u_n - u_0).$$

Utilizando *(a)*, *(b)* e *(c)*, obtemos

$$C\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u_0|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{2-p}} = o_n(1).$$

Podemos escrever

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_0|^p = \int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u_0|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}}(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2},$$

com

$$\frac{|\nabla u_n - \nabla u_0|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}} \in L^{2/p}(\Omega)$$

e

$$(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2} \in L^{2/(2-p)}(\Omega).$$

Como $2/p$ e $2/(2-p)$ são expoentes conjugados, pela desigualdade Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_0|^p &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u_0|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}} (|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2} \leq \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u_0|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{2-p}}\right)^{p/2} \left(\int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^p\right)^{(2-p)/2}.\end{aligned}$$

Ora, como (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^p \leq B \int_\Omega (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_0|^p)\ ^{\|} \leq M,$$

para algum $M > 0$, daí se segue

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_0|^p &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u_0|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{2-p}}\right)^{p/2} \left(\int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^p\right)^{(2-p)/2} \leq \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u_0|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{2-p}}\right)^{p/2} M^{(2-p)/2} = o_n(1),\end{aligned}$$

mostrando que $u_n \to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, portanto, que I satisfaz a condição (PS).

A verificação de que I cumpre as Hipóteses do Teorema do Passo da Montanha é análogo ao feito na segunda etapa da demonstração da Proposição 3.2, pois isso depende somente das imersões compactas $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$ (vide Teorema C.5). ■

3.2 1ª Aplicação da Teoria do Gênero

Um autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ é um número λ que satisfaz, para algum $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

‖Nessa passagem utilizamos a desigualdade $(|a| + |b|)^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$ (ver a prova do Teorema 4.7 em [5]).

no sentido fraco, i. e.,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega \lambda u \phi, \ \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Um resultado clássico relativo aos espaços de Sobolev assegura que o conjunto dos autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ é uma sequência (λ_k) tal que $\lambda_k \to \infty$ com

$$0 < \lambda_k < \lambda_{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

(Veja a Observação C.8). Nesta e na próxima seção λ_k denota o k-ésimo autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, correspondente ao autovetor e_k; o conjunto $\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ pode ser suposto um sistema ortonormal, i.e., suporemos $\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo

$$(e_k, e_j) = \begin{cases} -0, & k \neq j; \\ 1, & k = j. \end{cases}$$

Segue agora o resultado central desta seção, que é uma aplicação do Teorema 2.18.

Proposição 3.4 *Consideremos* $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow (-\infty, \infty]$, $I = \Phi + \Psi$ *dado por*

$$\Phi(u) = -\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2, \quad \Psi(u) = \frac{1}{2}||u||^2 + \int_\Omega |\nabla u|. \tag{3.9}$$

Se $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, *então* I *possui, pelo menos,* k *pares distintos de pontos críticos.*

Demonstração. Temos $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (Proposição D.3) com

$$\Phi'(u)(v) = -\lambda \int_\Omega uv, \ v \in H_0^1(\Omega),$$

ademais, como $L^2(\Omega) \hookrightarrow Ł^1(\Omega)$, por ser $|\Omega| < \infty$, e a função $v = |\nabla u| \in L^2(\Omega)$, temos Ψ contínuo com $\Psi < \infty$, assim, Ψ é um funcional *sci*. Por fim, como a função $F(t) = |t|^2$ é convexa (veja a Observação 1.7) temos, para $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \Psi(tu + (1-t)v) = & \frac{1}{2}\int_\Omega |t\nabla u + (1-t)\nabla v)|^2 + \int_\Omega |t\nabla u + (1-t)\nabla v)| \leq \\ & \leq t\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + (1-t)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + t\int_\Omega |\nabla u| + (1-t)\int_\Omega |\nabla v| = \\ & = t\Psi(u) + (1-t)\Psi(v), \ \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Isso mostra que I satisfaz a condição (H_0). Vamos mostrar o resultado garantindo que I satisfaz as hipóteses do Teorema 2.18. Provaremos, inicialmente que satisfaz a condição (PS).

1ª etapa: *I satisfaz a condição (PS).*

Seja (u_n) uma sequência (PS), digamos

$$\Phi'(u_n)(v-u_n)+\Psi(v)-\Psi(u_n)\geq -\varepsilon_n||v-u_n||,\ \ \forall v\in H_0^1(\Omega), \tag{3.10}$$

com $\varepsilon_n\to 0$ e $I(u_n)\to c\in\mathbb{R}$, devemos mostrar que (u_n) possui subsequência convergente. Mostremos que (u_n) é limitada. Suponhamos que (u_n) fosse ilimitada e denotemos ainda por (u_n) uma subsequência com $||u_n||\to\infty$, assim $u_n\neq 0$ para todo n suficientemente grande e podemos então definir $v_n=u_n/||u_n||$. Sendo v_n limitada, pela Propriedade III-1, podemos assumir que existe $v_0\in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n\rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $v_n\to v_0$ em $L^2(\Omega)$. Notemos que

$$\frac{I(u_n)}{||u_n||^2}=\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_n|^2+||u_n||^{-1}\int_\Omega|\nabla v_n|.$$

Consideremos que fosse $v_0=0$. Nesse caso, temos

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|v_n|^2\to 0.$$

Também, da imersão $L^2(\Omega)\hookrightarrow \mathrm{L}^1(\Omega)$ e por ser $||v_n||=1$, para alguma constante $C>0$ temos

$$\int_\Omega|\nabla v_n|\leq C\Big(\int_\Omega|\nabla v_n|^2\Big)^{1/2}\leq C,$$

de $||u_n||\to\infty$

$$||u_n||^{-1}\int_\Omega|\nabla v_n|\to 0.$$

Segue-se então que

$$\frac{I(u_n)}{||u_n||^2}=\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|v_n|^2+||u_n||^{-1}\int_\Omega|\nabla v_n|\to\frac{1}{2},$$

por outro lado, como $I(u_n)\to c\in\mathbb{R}$ e $||u_n||\to\infty$,

$$\frac{I(u_n)}{||u_n||^2}\to 0,$$

uma contradição. Agora, seja $v_0\neq 0$. Substituindo $v=u_n+\phi$ em (3.10), com $\phi\in H_0^1(\Omega)$ arbitrária, obtemos

$$-\lambda\int_\Omega u_n\phi+\frac{1}{2}(||u_n+\phi||^2-||u_n||^2)+\int_\Omega(|\nabla(u_n+\phi)|-|\nabla u_n|)\geq-\varepsilon_n||\phi||,$$

utilizando que

$$\begin{aligned}||u_n+\phi||^2-||u_n||^2 &= (u_n+\phi,u_n+\phi)-(u_n,u_n)= \\ &= (u_n,u_n)+2(u_n,\phi)+(\phi,\phi)-(u_n,u_n)= \\ &= 2(u_n,\phi)+||\phi||^2,\end{aligned}$$

segue que

$$-\lambda\int_\Omega u_n\phi+\frac{1}{2}||\phi||^2+(u_n,\phi)+\int_\Omega(|\nabla(u_n+\phi)|-|\nabla u_n|)\geq-\varepsilon_n||\phi||$$

dividindo por (u_n),

$$-\lambda\int_\Omega v_n\phi+||u_n||^{-1}\frac{1}{2}||\phi||^2+(v_n,\phi)+||u_n||^{-1}\int_\Omega(|\nabla(u_n+\phi)|-|\nabla u_n|)\geq-||u_n||^{-1}\varepsilon_n||\phi|| \tag{3.11}$$

.

Vamos analisar separadamente cada termo da última desigualdade. Como estamos supondo $||u_n||\to\infty$, então $||u_n||^{-1}\to 0$ e

$$-\,||u_n||^{-1}\varepsilon_n||\phi||,\ ||u_n||^{-1}\frac{1}{2}||\phi||^2\to 0. \tag{3.12}$$

Agora, notamos o seguinte:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega(|\nabla(u_n+\phi)|-|\nabla u_n|\right| &\leq \int_\Omega ||\nabla(u_n+\phi)|-|\nabla u_n||\leq \\ &\leq \int_\Omega(|\nabla(u_n+\phi)-\nabla u_n|= \\ &= \int_\Omega|\nabla\phi|,\end{aligned}$$

daí,

$$||u_n||^{-1}\left|\int_\Omega(|\nabla(u_n+\phi)|-|\nabla u_n|\right|\leq||u_n||^{-1}\int_\Omega|\nabla\phi|\to 0,$$

em particular,

$$||u_n||^{-1}\int_\Omega(|\nabla(u_n+\phi)|-|\nabla u_n|)\to 0. \tag{3.13}$$

Usando (3.12) e (3.13), considerando que $v_n\rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $v_n\to v_0$ em $L^2(\Omega)$, em (3.11) obtemos

$$-\lambda\int_\Omega v_0\phi+(v_0,\phi)\geq 0,\ \ \forall\phi\in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega\nabla v_0\nabla\phi-\lambda\int_\Omega v_0\phi\geq 0,\ \ \forall\phi\in H_0^1(\Omega).$$

Isso é uma contradição pelo seguinte fato: definindo

$$f(\phi) = \int_\Omega \nabla v_0 \nabla \phi - \lambda \int_\Omega v_0 \phi = (v_0, \phi) - \lambda (v_0, \phi)_2,$$

com

$$(v_0, \phi)_2 := \int_\Omega v_0 \phi$$

o produto interno usual em $L^2(\Omega)$, temos f um funcional linear em $H_0^1(\Omega)$ com $f(\phi) \geq 0$, para ϕ arbitrário. Por propriedade de linearidade, isso acarreta que $f \equiv 0$, i.e.,

$$\int_\Omega \nabla v_0 \nabla \phi = \lambda \int_\Omega v_0 \phi,$$

o que nos faz concluir que λ é um autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, isso é um absurdo, porquanto nossa hipótese em vigor é $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$ e λ não pode ser um autovalor **. Esta contradição nos faz concluir que (u_n) é limitada.

Dado que (u_n) é limitada, pela Propriedade III-1, podemos assumir que existe $a \in \mathbb{R}$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ com

i): $u_n \rightharpoonup u_0$;

ii): $u_n \to u_0$, em $L^2(\Omega)$;

iii): $||u_n|| \to a$.

Fazendo $v = u_0$ em (3.10), decorre que

$$-\lambda \int_\Omega u_n(u_0 - u_n) + \frac{1}{2}(||u_0||^2 - ||u_n||^2) + \int_\Omega (|\nabla u_0| - |\nabla u_n|) \geq -\varepsilon_n ||u_0 - u_n||. \quad (3.14)$$

O funcional dado por

$$\Psi_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|, \ \ u \in H_0^1(\Omega),$$

é convexo e contínuo. Logo, por resultados de Análise funcional ([5, Corolário 3.9]), o fato de $u_n \rightharpoonup u_0$ implica que

$$\Psi_1(u_0) \leq \liminf \Psi_1(u_n),$$

equivalentemente,

$$\int_\Omega |\nabla u_0| \leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_n|. \quad (3.15)$$

Reescrevendo (3.14) temos

$$\liminf \left(-\lambda \int_\Omega u_n(u_0 - u_n) + \frac{1}{2}(||u_0||^2 - ||u_n||^2) + \int_\Omega |\nabla u_0| \right) \geq$$

**Na introdução da seção consta uma justificativa para este fato

$$\geq \liminf \left(-\varepsilon_n ||u_0 - u_n|| + \int_\Omega |\nabla u_n| \right),$$

considerando que $u_n \to u_0$ e (u_n) é limitada temos

$$-\lambda \int_\Omega u_n(u_0 - u_n), \quad -\varepsilon_n ||u_0 - u_n|| \to 0,$$

assim, por propriedades de limite inferior e por (3.15), segue-se

$$\lim \frac{1}{2}(||u_0||^2 - ||u_n||^2) + \int_\Omega |\nabla u_0| \geq \int_\Omega |\nabla u_0|,$$

implicando

$$\lim \frac{1}{2}(||u_0||^2 - ||u_n||^2) \geq 0,$$

por *iii)* concluímos $||u_0|| \geq a = \lim ||u_n||$ e isso, junto *i)*, garante que $u_n \to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, pela Propriedade III-2.

2ª etapa: *I satisfaz os Itens 1 e 2 do Teorema 2.18.*

Inicialmente, notemos que Φ e Psi, como definidos em (3.9), são pares e

$$I(0) = \Phi(0) + \Psi(0) = -\frac{\lambda}{2} \int_\Omega |0|^2 + \frac{1}{2}||0||^2 + \int_\Omega |\nabla 0| = 0.$$

1. *Verificação de 1.*

Devemos mostrar, na notação do Teorema 2.18, que existem X_1 um subespaço fechado de $H_0^1(\Omega)$ de codimensão finita e $r, a > 0$ satisfazendo

$$\inf_{u \in \partial B_r(0) \cap X_1} I(u) \geq a.$$

Isso será feito com $X_1 = H_0^1(\Omega)$ e, nesse caso, $X_0 = \{0\}$. Supondo que tais r, a não existem, então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in \partial B_{1/n}(0)$ e $I(u_n)/||u_n||^2 \leq 1/n$. Definamos $v_n = u_n/||u_n||$. Temos

$$\frac{I(u_n)}{||u_n||^2} = \frac{1}{2} + ||u_n||^{-1} \int_\Omega |\nabla v_n| - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |v_n|^2.$$

Como (v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ podemos assumir, mais uma vez pela Propriedade III-1, que existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ com $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $v_n \to v_0$ em $L^2(\Omega)$. Se $v_0 = 0$, então

$$\frac{\lambda}{2} \int_\Omega |v_n|^2 \to 0$$

e assim

$$\frac{I(u_n)}{||u_n||^2} = \frac{1}{2} + ||u_n||^{-1} \int_\Omega |\nabla v_n| - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |v_n|^2 \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |v_n|^2,$$

acarretando que

$$\liminf \frac{I(u_n)}{||u_n||^2} = \liminf \left(\frac{1}{2} + -\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_n|^2\right) \Rightarrow \liminf \frac{I(u_n)}{||u_n||^2} = \frac{1}{2}.$$

Mas (u_n) foi escolhida tal que $I(u_n)/||u_n||^2 \leq 1/n$, pelo que concluímos

$$\liminf \frac{I(u_n)}{||u_n||^2} \leq 0,$$

culminando numa contradição. Se for $v_0 \neq 0$, temos

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_n|^2 \to \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_0|^2.$$

Por (3.15), para alguma subsequência (v_{n_j}) vale a manipulação

$$0 < \int_\Omega |\nabla v_0| \leq \liminf \int_\Omega |\nabla v_n| = \lim \int_\Omega |\nabla v_{n_j}|,$$

sendo $||u_n|| = 1/n \to 0$ é válido que

$$||u_{n_j}||^{-1}\int_\Omega |\nabla v_{n_j}| \to \infty,$$

que nos garante

$$\liminf \frac{I(u_{n_j})}{||u_{n_j}||^2} = \liminf \left(\frac{1}{2} + ||u_{n_j}||^{-1}\int_\Omega |\nabla v_{n_j}| - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_{n_j}|^2\right) = \infty,$$

o que novamente contradita $I(u_n)/||u_n||^2 \leq 1/n$. Está portanto verificado o Item 1.

2. *Verificação de 2.*

Definamos $X_2 := \langle e_1, ..., e_k\rangle = \{\sum_{j=1}^{n} a_j e_j;\ a_j \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$. Como os vetores são autovetores ortonormais de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ satisfazem

$$1 = \int_\Omega \nabla e_j \nabla e_j = \lambda_j \int_\Omega e_j e_j,\ \ \forall j \in \{1, ..., k\},$$

particularmente,

$$\int_\Omega |e_j|^2 = \lambda_j^{-1},\ \forall j \in \{1, ..., k\}.$$

Ainda, vale para $j \neq i$,

$$\lambda_j \int_\Omega e_j e_i = \int_\Omega \nabla e_j \nabla e_i = (e_j, e_i) = 0,$$

mostrando que $\{e_1, ...e_k\}$ é um conjunto ortogonal em $L^2(\Omega)$.

Seja $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j e_j \in X_2$, temos

$$I(u) = -\frac{\lambda}{2}\left|\left|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right|\right|_2^2 + \frac{1}{2}\left|\left|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right|\right|^2 + \int_\Omega |\nabla(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j)|. \tag{3.16}$$

Por ortogonalidade, podemos escrever

$$\frac{1}{2}\left|\left|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right|\right|^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} ||a_j e_j||^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2$$

e

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right|\right|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} ||a_j e_j||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \lambda_j^{-1},$$

decorre disso e (3.16) que

$$\begin{aligned} I(u) &= -\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \lambda_j^{-1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + \int_\Omega |\nabla(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j)| = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(1 - \lambda\lambda_j^{-1})a_j^2 + \int_\Omega |\nabla(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j)|, \end{aligned}$$

considerando que $\lambda_k^{-1} < \lambda_j^{-1}$, $j < k$, e que, pela imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, existe $C > 0$ com

$$\int_\Omega |v| \leq C\left(\int_\Omega |v|^2\right)^{1/2}, \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(1 - \lambda\lambda_j^{-1})a_j^2 + \int_\Omega |\nabla(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(1 - \lambda\lambda_k^{-1})\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + C\left(\int_\Omega |\nabla(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j)|^2\right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \lambda\lambda_k^{-1})||u||^2 + C||u||, \ \forall u \in X_2. \end{aligned}$$

Com $(1/2)(1 - \lambda\lambda_k^{-1}) < 0$, em virtude da hipótese $\lambda_k < \lambda$, então $||u|| \to \infty$ em X_2 acarreta $I(u) \to -\infty$. Logo, está verificado o Item 2 e, pelo Teorema 2.18, o funcional I possui ao menos k pares distintos de pontos críticos. ■

O último teorema garante multiplicidade de solução para a inequação:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2\right) + \displaystyle\int_\Omega |\nabla v| - \int_\Omega |\nabla u| \geq \lambda \int_\Omega u(v - u), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega); \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

esta desigualdade também pode ser expressa na linguagem de subdiferencial como

$$\begin{cases} \lambda u \in \partial\Psi(u); \\ \quad u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} {}^{\dagger\dagger}$$

O corolário a seguir pode ser entendido como um resultado de regularidade para a desigualdade anterior; o resultado que apresentaremos é consequência dum resultado devido a **Brezis** em [6] combinado com a última proposição.

Corolário 3.5 *Se $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, então existem ao menos k patres distintos de pontos críticos não-triviais para a desigualdade*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (-\Delta u)(v-u) + \int_\Omega |\nabla v| - \int_\Omega |\nabla u| \geq \lambda \int_\Omega u(v-u), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega); \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.17}$$

Demonstração. Consideremos o funcional Ψ definido em (3.9). Estendemos Ψ a $L^2(\Omega)$ do seguinte modo:

$$\overline{\Psi}(u) = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|, \ \ \text{se}\, u \in H_0^1(\Omega); \\ \infty, \ \ \text{se } u \notin H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Temos então $\overline{\Psi}|_{H_0^1(\Omega)} \equiv \Psi < \infty$. Como $\overline{\Psi} \geq 0$, aplicando o Lema de Fatou, repetindo as ideias do Exemplo 1.6, concluímos que $\overline{\Psi}$ e *sci*. Sendo Ψ convexo, concluímos que $\overline{\Psi}$ é também convexo. De fato, se $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e $t \in [0,1]$, então a relação

$$\overline{\Psi}(tu + (1-t)v) \leq t\overline{\Psi}(u) + (1-t)\overline{\Psi}(v)$$

é uma consequência da convexidade de Ψ. Se for $u \notin H_0^1(\Omega)$ ou $v \notin H_0^1(\Omega)$, então

$$\overline{\Psi}(tu + (1-t)v) \leq \infty = t\overline{\Psi}(u) + (1-t)\overline{\Psi}(v),$$

mostrando que $\overline{\Psi}$ é convexo. Diante das propriedades de $\overline{\Psi}$, se Φ é como no proposição anterior (Sentença (3.9)), então o funcional $J(u) = \Phi(u) + \overline{\Psi}(u)$, para $u \in L^2(\Omega)$ satisfaz (H_0) [‡‡].

O resultado de **Brezis**, [6, Teorema 15, p. 118], assegura que:

[††] A notação λu identifica a aplicação $f(v) = (\lambda u, v)_2$.

[‡‡] Note que Φ em (3.9) está bem definida em $L^2(\Omega)$.

Resultado (Brezis): *$f \in \partial\overline{\Psi}(u)$ se, e somente se, $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e satisfaz*

$$\int_\Omega (-\Delta u)(v-u) + \int_\Omega |\nabla v| - \int_\Omega |\nabla u| \geq \int_\Omega f(v-u), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ora, $f \in \partial\overline{\Psi}(u)$ significa que

$$\overline{\Psi}(v) - \overline{\Psi}(u) \geq \int_\Omega f(v-u), \ \ \forall v \in L^2(\Omega),$$

como $D(\overline{\Psi}) = H_0^1(\Omega)$, pela Observação 1.9, isto equivale a

$$\overline{\Psi}(v) - \overline{\Psi}(u) \geq \int_\Omega f(v-u), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dado que $\overline{\Psi}|_{H_0^1(\Omega)} \equiv \Psi$, concluímos que $f \in \partial\overline{\Psi}(u)$ se, e somente se,

$$\Psi(v) - \Psi(u) \geq \int_\Omega f(v-u), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, fazendo $f = \lambda u$, para $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\lambda u \in \partial\overline{\Psi}(u) \Leftrightarrow \lambda u \in \partial\Psi(u).$$

Fica então posto, pelo Resultado do Brezis, que uma solução de $\lambda u \in \partial\Psi(u)$ é solução de (3.17). Pela Proposição 3.4 o problema

$$\begin{cases} \lambda u \in \partial\Psi(u); \\ \ \ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

possui ao menos k distintos pares de soluções não-triviais. O resultado está, portanto, assegurado. ■

3.3 2ª Aplicação da Teoria do Gênero

Nesta seção apresentaremos uma aplicação do Teorema 2.15 que figura como resultado final do capítulo. Registraremos, primeiramente, as hipóteses gerais sobre os tipos de não-linearidades com as quais trabalharemos em esta seção.

Consideremos $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ e $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando as seguintes hipóteses:

(F_1): F é *sci*, par e convexa com $F(0) = 0$;

(g_1): $G \in C^1(\mathbb{R})$ é par com $G(0) = 0$;

(g_2): $G'(t) = g(t)$ com $|g(t)| \leq C_1 + C_2|t|^p$ e $p \in [1, 2^* - 1)$. Diante dessas hipóteses, definindo

$$\Phi(u) = -\int_\Omega G(u), \;\; u \in H_0^1(\Omega).$$

temos, pela Proposição D.3, $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega))$ com

$$\Phi'(u)(v) = -\int_\Omega g(u)v, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Também, definindo

$$\Psi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega F(u), \;\; \text{se } F(u) \in L^1(\Omega); \\ \infty, \;\; \text{se } F(u) \notin L^1(\Omega), \end{cases}$$

temos, seguindo as mesmas ideias do Exemplo 1.6, Ψ um funcional *sci* e, pela convexidade de F (hipótese (F_1)), fazendo um argumento análogo ao feito para $\overline{\Psi}$ no Corolário 3.5, concluímos que Ψ é convexo. Segue então que $I = \Phi + \Psi$ satisfaz (H_0), nesse caso $D(\Psi) = \{u \in H_0^1(\Omega);\; F(u) \in L^1(\Omega)\}$. Apresentamos agora nosso resultado principal.

Proposição 3.6 *Seja $I = \Phi + \Psi$ o funcional definido no último parágrafo. Assumindo (F_1), $(g_1) - (g_2)$, se*

$$\liminf_{|t| \to \infty} \frac{F(t) - G(t)}{t^2} > -\frac{\lambda_1}{2} \tag{3.18}$$

e

$$\liminf_{t \to 0} \frac{F(t) - G(t)}{t^2} < -\frac{\lambda_k}{2}, \tag{3.19}$$

então I possui ao menos k pares de pontos críticos não-triviais.

Antecedendo a prova da proposição, apresentamos exemplos de funções não-triviais F e G, cumprindo as hipóteses (F_1), $(g_1) - (g_2)$ e as estimativas (3.18) e (3.19).

Exemplo 3.7 ***1º)*** *Sejam $F, G : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dadas por $F(t) = |t|^4$ e $G(t) = C|t|^2$, onde $C > 0$ a ser escolhida adequadamente. Temos F, G pares com $F(0) = G(0) = 0$. Ainda, temos F função sci, por ser contínua, contínua, e convexa por ser $F''(t) = 12|t|^2 \geq 0$. Então (F_1) é satisfeita. Sendo $g(t) := G'(t) = 2Ct$ também se verificam $(g_1) - (g_2)$, com $C_1 = 0$, $C_2 = 2C$ e $p = 1$. Resta verificar (3.18) e (3.19). Como*

$$\frac{F(t) - G(t)}{t^2} = \frac{|t|^4 - C|t|^2}{t^2} = |t|^2 - C, \; t \neq 0,$$

vale que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)-G(t)}{t^2} = \infty,$$

o que mostra (3.18). Se $|t| \approx 0^+$, *então* $|t|^2 - C < -C/2$, *daí*

$$\frac{F(t)-G(t)}{t^2} < -\frac{C}{2} \Rightarrow \liminf_{t\to 0} \frac{F(t)-G(t)}{t^2} \leq -\frac{C}{2}$$

e (3.19) é satisfeita escolhendo $-C < -\lambda_k$.

2º) *Mais geralmente, as hipóteses são verificadas quando definimos* $F(t) = |t|^{2s}$, $s \geq 2$, *e* $G(t) = C|t|^q$, $q \in [2, 2^*)$, $C > 0$ *adequado, basta repetir um processo análogo ao feito no primeiro exemplo.*

Passamos à prova da proposição.

Demonstração. Seguindo o padrão das proposições apresentadas no presente capítulo, a prova será feita em duas etapas.

1ª etapa: *I satisfaz a condição* (PS). Por propriedades de limite inferior, dado $\varepsilon > 0$, podemos fixar $R > 0$ tal que

$$\frac{F(t)-G(t)}{t^2} \geq (-\frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon) = \frac{-\lambda_1 + 2\varepsilon}{2}, \quad \forall |t| > R. \tag{3.20}$$

Para estimativas futuras, vamos fixar ε tal que $-\lambda_1 + 2\varepsilon < 0$. Para $u \in D(\Psi)$ podemos escrever

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 + \int_{|u|>R} (F(u) - G(u)) + \int_{|u|\leq R} (F(u) - G(u)). \tag{3.21}$$

Vamos mostrar que $\int_{|u|\leq R}(F(u) - G(u))$ é limitado. Por (g_2), temos $|G(t)| \leq C_1|t| + C_2|t|^{p+1}$, daí

$$\int_{|u|\leq R} |G(u)| \leq \int_{|u|\leq R} C_1|u| + C_2|u|^{p+1} \leq |\Omega|(C_1 R + C_2 R^{p+1}) := A. \tag{3.22}$$

Por (F_1) temos F convexa com $F(0) = 0$, se $t \in [0, R]$ podemos escrever

$$t = sR + (1-s)0,$$

para algum $s \in [0, 1]$, disso decorre

$$|F(t)| \leq s|F(R)| + (1-s)|F(0)| = s|F(R)| \leq |F(R)|. \tag{3.23}$$

De (3.22) e (3.23) segue que

$$\left| \int_{|u|\leq R} (F(u) - G(u)) \right| \leq \int_{|u|\leq R} |F(u)| + \int_{|u|\leq R} |G(u)| \leq |\Omega||F(R)| + A =: B,$$

daí

$$\int_{[u_n \leq R]} (F(u) - G(u)) \geq -B,$$

substituindo esta desigualdade em (3.21), deduzimos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 + \int_{|u|>R} (F(u) - G(u)) - B;$$

por (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 + (\frac{-\lambda_1 + 2\varepsilon}{2}) \int_{|u|\leq R} u^2 - B = \\ &= \frac{1}{2}\left(||u||^2 + (-\lambda_1 + 2\varepsilon) \int_{|u|\leq R} u^2\right) - B. \end{aligned}$$

Pela *desigualdade de Poincaré* (Proposição C.9):

$$\int_\Omega |u|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{\lambda_1}||u||^2, \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

concluímos assim

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\left(||u||^2 + (-\lambda_1 + 2\varepsilon) \int_{|u|\leq R} u^2\right) - B \geq \\ &\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})||u||^2 - B, \end{aligned}$$

onde $\lambda := \lambda_1 - 2\varepsilon > 0$, tendo em vista a escolha de ε. Segue-se portanto que $(1/2)(1 - \lambda\lambda_1^{-1}) > 0$ e $I(u) \to \infty$, se $||u|| \to \infty$, mostrando que I é coercivo.

Suponhamos agora (u_n) uma sequência (PS), então $I(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ e

$$\Phi'(u_n)(v - u_n) + \frac{1}{2}(||v|| - ||u_n||) + \int_\Omega (F(v) - F(u_n)) \geq -\varepsilon_n||v - u_n||, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.24}$$

onde $\varepsilon_n \to 0$. A sequência (u_n) é limitada, do contrário existira (u_{n_j}) subsequência ilimitada de (u_n), daí, pelo coercividade de I valeria $I(u_{n_j}) \to \infty$, contradizendo $I(u_n) \to c$. Diante disto, podemos supor, pela Propriedade III-1, que existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $a \in \mathbb{R}$ com

i): $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$;

ii): $u_n \to u_0$ em $L^{p+1}(\Omega)$;

iii): $||u_n|| \to a$.

Podemos ainda incluir um quarto item a lista de propriedades de (u_n), que é

iv): $\Phi'(u_n) \to \Phi'(u_0)$.

(O Item *iv)* pode ser provado analogamente ao feito no Resultado 1 da demonstração da Proposição 3.2, considerando o crescimento da função g suposto em (g_2)).

Conforme feito no Exemplo 1.6, a hipótese (F_1) assegura que $F \geq 0$, pelo Item *ii)* $u_n \to u_0$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e então, para uma subsequência (preservando a notação u_n),

$$\lim u_n(x) = u_0(x), , \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

(vide [5, Teorema 4.9]) pelo Lema de Fatou ([3, Lema 4.8]), e pela semicontinuidade de F, obtemos

$$\int_\Omega F(u_0) \leq \int_\Omega \liminf F(u_n) \leq \liminf \int_\Omega F(u_n),$$

aplicando esta relação em (3.24), pelos Itens *i)* - *iv)* deduzimos

$$0 + \lim \frac{1}{2}(||u_0||^2 - ||u_n||^2) + \int_\Omega F(u_0) \geq 0 + \int_\Omega F(u_0),$$

de onde concluímos que $||u_0|| \geq a = \lim ||u_n||$ o que, junto a *i)*, implica $u_n \to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, novamente pela Propriedade III-2.

2ª etapa: *I satisfaz as hipóteses do Teorema 2.15*

Como F e G foram supostas pares, temos I par e, da condição $F(0) = G(0) = 0$, admitida nas hipóteses, temos

$$I(0) = -\int_\Omega G(0) + \frac{1}{2}||0||^2 + \int_\Omega F(0) = 0,$$

com isto nos resta provar que, sendo

$$c_j = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A} I(u),$$

ocorre $-\infty < c_j < 0$, $j \in \{1, ..., k\}$, com Γ_j definido como no Teorema 2.15. No sentido de mostrar isso, temos um primeiro resultado:

Resultado 1: *I é limitado inferiormente.*

Prova: Na primeira etapa da prova mostramos que I é coercivo, sendo assim, existe $R > 0$ com $I(u) \geq 1$ para $||u|| > R$, basta então provar que $I|_{B_R(0)}$ é limitado inferiormente. Suponhamos não ser esse o caso. Para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos obter $u_n \in B_R(0)$ com $I(u_n) < -n$. Ora, como (u_n) é limitada, podemos supor, por ser $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, como um espaço de Hilbert, que $u_n \rightharpoonup u_0$, para algum $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Por motivo análogo ao que se dá com Φ' em *iv)*, vale que $\Phi(u_n) \to \Phi(u_0)$. Como $\Psi \geq 0$, concluímos que

$$\Phi(u_n) \leq \Phi(u_n) + \Psi(u_n) = I(u_n) < -n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, fazendo $n \to \infty$, sendo $\Phi(u_0) \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < \Phi(u_0) \leq -\infty.$$

Esta contradição garante a validade do Resultado 1. $\square$

Do resultado se segue imediatamente que $-\infty < c_j$. Para mostrar que $c_j < 0$ definimos

$$A = \{u \in \langle e_1, ..., e_j\rangle; \ \ ||u|| = \rho\},$$

onde $\langle e_1, ..., e_j\rangle$ denota o espaço gerado pelos autovetores $e_1, ..., e_k$. Se for $u = \sum_{i=1}^{j} a_i e_i$, pela ortonormalidade dos $\{e_1, ..., e_j\}$, temos para $u \in A$

$$\rho^2 = ||u||^2 = ||\sum_{i=1}^{j} a_i e_i||^2 = \sum_{i=1}^{j} a_i^2.$$

O conjunto $\langle e_1, ..., e_j\rangle$, pela propriedade (G_5) da Seção 2.2, temos $\gamma(A) = j$ e então, da definição de Γ_j em (2.3), $A \in \Gamma_j$.

Para a conclusão da prova nas lançaremos mão de um fato clássico sobre as autofunções (e_i) e sobre o espaço $\langle e_1, ..., e_j\rangle$: as funções $e_1, ..., e_j$ são todas contínuas em $\overline{\Omega}$ e limitadas (vide Proposição C.10), sendo assim qualquer função $u = \sum_{i=1}^{j} a_i e_i \in A$ é contínua e limitada. Agora, como $\langle e_1, ..., e_j\rangle$ é um espaço de dimensão finita, quaisquer duas normas são equivalentes. Vamos denotar por $|| \cdot ||_\infty$ a norma do espaço $L^\infty(\Omega)$. Existe, portanto, $C > 0$ tal que

$$||u||_\infty \leq C||u||, \ \ \forall u \in \langle e_1, ..., e_j\rangle.$$

Mediante o exposto, por (3.19), dado existe $r > 0$ tal que

$$\frac{F(t) - G(t)}{t^2} \leq -\frac{\lambda_k}{2} - \varepsilon = \frac{-\lambda_k - 2\varepsilon}{2}, \quad |t| \leq r,$$

definindo $\lambda = \lambda_k + 2\varepsilon > \lambda_k$ podemos escrever

$$\frac{F(t) - G(t)}{t^2} \leq \frac{-\lambda}{t^2}, \ \ |t| \leq r. \tag{3.25}$$

Fixando $\rho \approx 0^+$ de modo que, para $u \in A$ valha $||u||_\infty \leq C\rho \leq r$, obtemos de (3.25), para $u \in A$

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 + \int_\Omega (F(u) - G(u)) \leq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2,$$

considerando que cada e_i satisfaz

$$\int_\Omega e_i^2 = \lambda_i^{-1}\int_\Omega |\nabla e_i|^2 = \lambda_i^{-1},$$

segue que, para $u \in A$,

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) a_i^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)||u||^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\rho^2 < 0, \end{aligned}$$

Logo,

$$c_j = \inf_{B\in\Gamma_j}\sup_{u\in B} I(u) \leq \sup_{u\in A} I(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\rho^2 < 0.$$

A proposição está provada. ∎

Apêndice A

Resultados técnicos

Para efeito de completeza do trabalho, registraremos neste apêndice alguns fatos omitidos ao longo dos capítulos por terem sidos reputados como prolixos ao momento. A ordem dos resultados aqui listados segue a ordem de aparição no texto, por fim, ressaltamos que algumas notações dos enunciados podem não ter seu significado explicitado, conquanto o presente apêndice tem a leitura dos capítulos pressupostas.

A.1 Resultados referentes ao Capítulo 1

No Capítulo 1 os resultados omitidos, todos concentram-se na demonstração do Teorema 1.23.

Proposição A.1 *Definindo*

$$\begin{aligned} \beta_i : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \beta_i(u) = d(u, X - U_i), \end{aligned}$$

então

1. $\beta_i \in C(X, \mathbb{R})$;

2. $\beta_i(u) > 0$, *para* $u \in U_i$, *e* $\beta_i(u) = 0$, *caso contrário.*

Demonstração. Para o Item 1, considere $u_n \to u_0$. Dado $\varepsilon' > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||u_n - u_0|| < \varepsilon'/2, \forall n \geq n_0.$$

Por definição de distância, temos $d(u_0, X - U_i) := \inf_{v \in (X - U_i)} ||v - u_0||$. Existe, então $v \in X - U_i$ tal que

$$||u_0 - v|| + d(u_0, X - U_i) + \varepsilon'/2.$$

Segue então que, para $n \geq n_0$,

$$d(u_n, X - U_i) \leq ||u_n - v|| \leq ||u_n - u_0|| + ||u_0 - v|| \leq d(u_0, X - U_i) + \varepsilon', \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d(u_n, X - U_i) - d(u_0, X - U_i)) < \varepsilon', \forall n \geq n_0.$$

Analogamente, para cada u_n, podemos escolher $v_n \in X - U_i$ tal que

$$||u_n - v_n|| < d(u_n, X - U_i) + 1/n.$$

Escolhendo n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon'$ obtemos

$$d(u_0, X - U_i) \leq ||u_0 - v_n|| \leq ||u_0 - u_n|| + ||u_n - v_n|| \leq d(u_n, X - U_i) + 1/n + \varepsilon'/2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d(u_0, X - U_i) - d(u_n, X - U_i)) < \varepsilon', \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$|d(u_n, X - U_i) - d(u_0, X - U_i)| < \varepsilon', \forall n \geq n_0,$$

garantindo que $d(u_n, X - U_i) \to d(u_0, X - U_i)$ e o Item 1 está mostrado.

Para o Item 2, segue que, das propriedades de distância, $d(u, X - U_i) = 0$ para $u \in X - U_i$ e, se $u \in U_i$, existe $\delta_0 > 0$, tal que $B_{\delta_0}(u) \subset U_i$. Assim, se $v \in X - U_i$ temos $||v - u|| \geq \delta_0 > 0$, o que nos garante $\beta_i(u) = d(u, X - U_i) \geq \delta_0$. ■

Proposição A.2 *A aplicação α definida por (1.7) e (1.8) é contínua.*

Demonstração. As expressões de α em (1.7) e (1.8) são dadas respectivamente por

$$\alpha_s(u) = \begin{cases} u + s\dfrac{(u_i - u)}{||u - u_i||}, & 0 \leq s < ||u - u_i||; \\ \\ u_i, & s \geq ||u - u_i||, \end{cases} \tag{1.7}$$

(Quando $u \in U_i - (\bigcup_{j \neq i} U_j)$, $u_i \in A \cap K$) e

$$\alpha_s(u) = u + s \sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u) \frac{(v_j - u)}{||v_j - u||}, \tag{1.8}$$

caso contrário.

Conforme mostrado no Teorema 1.23, quando há intersecção nos domínios de definição de α, então as expressões (1.7) e (1.8) são coincidentes. Ademais, lembremos que, no caso de (1.8) v_j, no Lema 1.21, é escolhido com $v_j \notin U_j$, segue-se então que $\varepsilon_j := d(v_j, U_j) > 0$. Logo, $||v_j - u|| \geq \varepsilon_j > 0$ para $u \in U_j$. Das propriedades de limite, se $(s_n, u_n) \to (s, u)$, no domínio em que α é dado por (1.8), temos

$$\alpha_{s_n}(u_n) = \left(u_n + s_n \sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u_n) \frac{(v_j - u_n)}{||v_j - u_n||} \right) \to \left(u + s \sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(u) \frac{(v_j - u)}{||v_j - u||} \right) = \alpha_s(u),$$

mostrando a continuidade de α nesse caso.

Resta o caso α dado por (1.7). Suponhamos $(s_n, u_n) \to (s, u)$ no domínio de definição de α dada por (1.7). Vamos considerar dois casos.

1. $s < ||u - u_i||$.

Das propriedades de limite, como $\lim s_n = s < ||u - u_i|| = \lim ||u_n - u_i||$ ocorre

$$s_n < ||u_n - u_i||, \;\; n \geq n_0,$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Daí, para $n \geq n_0$,

$$\alpha_{s_n}(u_n) = \left(u_n + s \frac{(u_i - u)}{||u - u_i||} \right) \to \left(u + s \frac{(u_i - u)}{||u - u_i||} \right) = \alpha_s(u),$$

2. $s \geq ||u - u_i||$.

Temos 2 possibilidades:

1ª - $s_n < ||u_n - u_i||$, para infinitos índices n;

2ª - $\exists\; n_0 \in \mathbb{N};\; s_n < ||u_n - u_i||, \; n \geq n_0$;

Para a primeira possibilidade temos

$$\alpha_{s_n}(u_n) = \left(u_n + s \frac{(u_i - u)}{||u - u_i||} \right) \to \left(u + s \frac{(u_i - u)}{||u - u_i||} \right) = u + (u_i - u) = u_i = \alpha_s(u).$$

No segundo caso, como estamos assumindo que $s \geq ||u - u_i||$

$$\alpha_{s_n}(u_n) = u_i = \alpha_s(u), \forall n \geq n_0,$$

assim $\lim \alpha_{s_n}(u_n) = \alpha_s(u)$. Mostramos que, em todo caso, quando $(s_n, u_n) \to (s, u)$, vale $\alpha_{s_{n_j}}(u_{n_j}) \to \alpha_s(u)$ para alguma subsequência de $(\alpha_{s_n}(u_n))$. Acabamos de provar o seguinte: Quando $(s_n, u_n) \to (s, u)$, cada subsequência de $(\alpha_{s_n}(u_n))$ possui subsequência convergente para $(\alpha_s(u))$. Fica então provado que

$$(s_n, u_n) \to (s, u) \Rightarrow \alpha_{s_n}(u_n) \to \alpha_s(u).$$

Está provada a continuidade α. ■

A.2 Resultados referentes ao Capítulo 2

Na Seção 2.2 foi omitida a prova da afirmação de que (Γ, d_1) é um espaço métrico completo. Este fato é de fundamental importância, porquanto nos permite aplicar o *P.V.E.* nos resultados mostrados na seção. Diante disto, a prova da completeza de Γ é de relevância ao estudo realizado, inserimos-no-la aqui.

Proposição A.3 (Γ, d_1) *é um espaço métrico completo (a métrica d_1 conforme definida em (2.2)).*

Demonstração. Consideremos que $A_n \to A$, com $A_n \in \Gamma$. Temos $A \neq \varnothing$, pois $A \in \mathcal{C}$, uma vez que (A_n) é um sequência em $\Gamma \subset \mathcal{C}$ e $(\mathcal{C}, d_1)$ é completo. Resta mostrar duas coisas: que A é simétrico e que A é compacto, faremos isso separadamente.

1ª etapa: *A é simétrico.*

Basta mostrar que $A = -A$. Como $A_n \in \Gamma$, então $A_n = -A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que, se $-A_n \to -A$, então $A_n = -A_n \to -A$, implicando que $A = -A$ por unicidade de limite. Suponhamos $a \in A$ e $a^{(n)} \in A_n$, vale que

$$||a - a^{(n)}|| = ||a^{(n)} - a|| = || - (-a^{(n)}) - a||,$$

daí,

$$\sup_{a \in A} \inf_{a^{(n)} \in A_n} ||a - a^{(n)}|| = \sup_{-a \in -A} \inf_{-a^{(n)} \in -A_n} || - (-a^{(n)}) - a||,$$

isto significa que

$$d_1(A_n, A) = d_1(-A_n, -A), \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $d_1(-A_n, -A) \to 0$, ou seja, $-A_n \to -A$ e, assim, $A = -A$.

2ª etapa: *A é compacto.*

Um subconjunto de um espaço métrico é compacto se, e somente se, é fechado e totalmente limitado (vide [19, Proposição 7, Capítulo 8]). Como $A \in \mathcal{C}$, então A é fechado. Relembremos que um subconjunto Y dum espaço métrico é totalmente limitado quando, dado $\varepsilon > 0$, existem $a_1, ..., a_n \in Y$ com

$$Y \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_\varepsilon(a_i)\,^*.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Definamos

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon/2}(a).$$

De $A_n \to A$ temos, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$d_1(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; n \geq n_0. \tag{A.1}$$

Dado então $a_n \in A_n$, segue-se, pela definição de d_1 e por (A.1),

$$d(a^{(n)}, A) \leq d_1(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; n \geq n_0.$$

Como A é compacto, existe $a_0 \in A$ com $||a^{(n)} - a_0|| = d(a^{(n)}, A) < \varepsilon/2\,^\dagger$. Assim, temos

$$a^{(n)} \in B_{\varepsilon/2}(a_0) \subset U,$$

pela arbitrariedade de $a^{(n)}$,

$$A_n \subset U, \;\; n \geq n_0. \tag{A.2}$$

Considerando $n = n_0$ em (A.2), pela compacidade A_{n_0}, existem $a_1, ..., a_m \in A$ tais que

$$A_{n_0} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} B_{\varepsilon/2}(a_i). \tag{A.3}$$

Se $a \in A$, analogamente ao feito para $a^{(n)}$, utilizando (A.1), concluímos que existe $u_0 \in A_{n_0}$ com

$$||a - u_0|| < \varepsilon/2.$$

Por (A.3), existe $i_0 \in \{1, ..., m\}$ com $u_0 \in B_{\varepsilon/2}(a_{i_0})$, com isso, obtemos

$$||a - a_{i_0}|| \leq ||a - u_0|| + ||u_0 - a_{i_0}|| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mostrando que

$$A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} B_\varepsilon(a_i).$$

Isso prova o que desejamos. ■

*Isto equivale a existirem $X_1, ..., X_n$ com diâmetro menor que ε e $Y \subset \cup_{1 \leq i \leq n} X_i$, [19].

†Isso já foi feito várias vezes no texto, e. g., Resultado 1, na demonstração do Teorema 2.18.

A.2.1 Funções homotópicas

Esta seção registra as noções homotópicas requeridas na Seção 2.2. Apresentamos somente a definição e um resultado que utilizamos em nosso texto. Para um estudo mais completo, indicamos [20].

Definição A.4 *Sejam Y e Z espaços topológicos e $f, g \in C(Y, Z)$. Uma aplicação $h \in C([0,1] \times Y, Z)$ tal que $h(0,\cdot) \equiv f$ e $h(1,\cdot) \equiv g$ é dita uma homotopia das funções f e g.*

Observação A.5 *As funções f e g nas condições da definição anterior são ditas homotópicas e h uma homotopia entre f e g. Denotamos $f \approx g$ para indicar que f e g são funções homotópicas.*

Proposição A.6 *A relação "$\approx$" definida da Observação A.5 é de equivalência.*

Demonstração. [20, Lema 1.1, Capítulo 8] ■

Apêndice B

Teoria do Gênero

Vamos fazer uma sucinta exposição sobre os conceitos e propriedades da Teoria do Gênero que utilizamos em nosso texto. Os resultados que apresentaremos podem ser encontrados em [22].

B.1 Definição e propriedades do gênero

Seja X um espaço de Banach real, denotemos por $\Sigma = \Sigma(X)$ a coleção de todos os subconjuntos A de $X - \{0\}$ que são fechados e simétricos com respeito a origem (i.e, se $x \in A$ então $-x \in A$)

Definição B.1 *Seja $A \in \Sigma$, Definimos*

1. *$A \neq \varnothing$ tem gênero $n \in \mathbb{N}$, se n é o menor inteiro positivo tal que existe $f \in C(A, \mathbb{R}^n - \{0\})$ ímpar. Denotamos $\gamma(A) = n$;*

2. *se $A \neq \varnothing$ e não existem $n \in \mathbb{N}$ e f como no item anterior dizemos então que tem Gênero infinito, $\gamma(A) = \infty$;*

3. *se $A = \varnothing$, então $\gamma(A) := 0$.*

Exemplo B.2 *Se $B \subset E$ é fechado e $B \cap (-B) = \emptyset$, tomando $A = B \cup (-B)$, temos que $\gamma(A) = 1$. De fato, observe que, $A \in \Sigma$, pois $A \subset X - \{0\}$ é fechado e simétrico em X. Além disso, definindo a aplicação $f : A \to \mathbb{R} - \{0\}$ por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ -1, & x \in -B \end{cases}$$

temos f contínua e ímpar. Portanto, $\gamma(A) = 1$. Em particular, se B é finito, $B \subset X - \{0\}$, temos $\gamma(A) = 1$.

Proposição B.3 *Se $A \in \Sigma$ e $\gamma(A) > 1$, então A é infinito.*

Demonstração. Se A for finito, definimos f como no Exemplo B.2 e daí seria $\gamma(A) = 1$, o que contradiz a hipótese. ∎

Proposição B.4 *Suponhamos que $A, B \in \Sigma$, então*

1. *Se existe $f : A \longrightarrow B$ contínua e ímpar, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*

2. *Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*

3. *$\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.*

4. *Se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{A - B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.*

5. *Se A é homeomorfo a S^{n-1}, onde $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ denota a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$, então $\gamma(A) = n$.*

6. *Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e simétrico, com $0 \in \Omega$, então $\gamma(\partial\Omega) = n$.*

7. *Se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe $\delta_0 > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$ para $\delta \in (0, \delta_0)$, onde $N_\delta(A) := \{u \in X; d(u, A) \leq \delta\}$.*

Demonstração. [22, §5] ∎

Observação B.5 *Podemos substituir $\mathbb{R}^n$ por um espaço vetorial real de dimensão n qualquer. De fato, se E é uma espaço de dimensão n, fixamos $\{u_1, ..., u_n\}$ base de E e definimos*

$$\begin{aligned} T\ : E &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ v = \sum_{i=1}^{n} u_i &\longmapsto T(v) = (a_i, ..., a_n). \end{aligned}$$

Temos T um homeomorfismo ímpar, assim, a cada aplicação $f \in C(A, \mathbb{R}^k - \{0\})$ ímpar, com $A \in \Sigma(\mathbb{R}^n)$ corresponde uma aplicação ímpar $\overline{f} \in C(B, \mathbb{R} - \{0\})$, definida por $\overline{f} = (f \circ T)$, $B = T^{-1}(A) \in \Sigma(E)$.

Apêndice C

Espaços de Sobolev

Neste apêndice discorremos em brevidade sobre os espaços de Sobolev, ressaltando as principais propriedades que utilizamos no texto. Iniciamos com a definição do espaços de Sobolev. Os conceitos e resultados discutidos aqui são baseados em [1], [5] e [15].

Definição C.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \;\; \textit{tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \;\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\; \forall\, i = 1, 2, ..., N \end{array} \right\}.$$

Observação C.2 *A identidade*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

significa que as funções g_i são as derivadas parciais fracas de u. Quando ocorre que $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ as funções g_i coincidem com as derivadas parciais de u no sentido usual, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ([5, p. 264]). Isto nos permite entender o conceito de derivada fraca como um generalização do sentido usual de derivada.

Estabelecemos como norma nos espaços $W^{1,p}(\Omega)$

$$||u||_{1,p} = ||u||_p + \sum_{i=1}^N \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_p.$$

No caso especial $p = 2$ denotamos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

e definimos o produto interno

$$(u,v) = \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx \right)^{1/2}$$

com a norma induzida por $(\cdot,\cdot)$

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Os espaços $(W^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_{1,p})$ e $(H^1(\Omega), ||\cdot||)$ são, respectivamente, um espaço de Banach e de Hilbert.

Por fim, para $p \in [0,\infty)$ definimos o subespaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ como

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{1,p}}.$$

Os espaços $(W_0^{1,p}(\Omega), ||\cdot||_{1,p})$ são espaços de Banach ([5, p. 287]). No caso de $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$, temos $H_0^1(\Omega)$ espaço de Hilbert como produto interno

$$(u,v) = \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v \right)$$

e norma

$$||u|| = (u,v) = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2}.$$

(Vide [5, Proposição 9.19]).

Observação C.3 *Os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ podem ser caracterizados por*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ \ u|_{\partial\Omega} \equiv 0\},$$

onde a identidade $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ é dada no sentido do traço. O operador traço em $W^{1,p}(\Omega)$ é um operador linear contínuo

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

$$T(u) = u|_{\partial\Omega},\ \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Estabelecemos então a notação $T(u) = u|_{\partial\Omega}$. Assim, dizer que $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ no sentido do traço significa que $u \in \ker T$. Podemos então escrever

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \ker T.$$

Um estudo sobre o operador traço, que discorra sobre os fatos registrados nessa observação, pode ser encontrado em [15, Seção 5.5].

Observação C.4 *Os espaços $W^{1,p}(\Omega)$ podem ainda ser generalizados. Se $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, definimos*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega),\ i \in \{1, ..., N\} \right\}$$

. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$||u||_{m,p} := \sum_{0 \leq \alpha \leq m} ||D^\alpha u||_p,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$, e

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha| u}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_N.$$

C.1 Teoremas de Imersões

Nesta seção apresentamos os resultados de imersões dos espaços de Sobolev que foram utilizados no trabalho.

Teorema C.5 *(Imersões contínuas): Seja Ω um domínio regular, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, as imersões abaixo são contínuas.*

1. *Se $m < \dfrac{N}{p}$:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)\ ,\ q \in \left[p, \frac{Np}{N - mp}\right];$$

2. *Se $m = \dfrac{N}{p}$:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)\ ,\ \textit{para}\ \ q \in [p, +\infty)\ \ \textit{se}\ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0;$$

3. *Se $m > \dfrac{N}{p}$:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega);$$

4. *Se $m - 1 < \dfrac{N}{p} < m$:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)\ ,\ \alpha \in \left(0, m - \frac{N}{p}\right).$$

onde $C_B^j(\Omega)$ é o subespaço de $C^j(\Omega)$ formado pelas funções que juntamente com suas derivadas até a ordem j são limitadas em Ω.

Demonstração. [1][Teorema 5.4] ■

Como consequência podemos listar as seguintes imersões:

i): Se $N \geq 3$, é contínua a seguinte imersão

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)\ ,\ \forall\ s \in [2, 2^*]\ \text{ ,onde } 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

Consequentemente

$$H_0^1(\Omega) \overset{Cont.}{\hookrightarrow} L^s(\Omega)\ ,\ \forall\ s \in [2, 2^*].$$

ii): Se $|\Omega| < \infty$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)\ ,\ \forall\ s \in [1, 2^*]\ \text{ ,onde } 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

e

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)\ ,\ \forall\ s \in [2, 2^*]\ \text{ ,onde } 2^* = \frac{2N}{N-2},$$

pois, quando $|\Omega| < \infty$ e $r < s$ temos $L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ (vide [3][p. 62] e [5][p. 118]).

Teorema C.6 *(Imersões de Rellich–Kondrachov): Sejam Ω um domínio regular e limitado, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então as seguintes imersões são compactas*

1. *Se $m < \dfrac{N}{p}$:*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)\ ,\ q \in [1, p^*)\ ;$$

2. *Se $m = \dfrac{N}{p}$:*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)\ ,\ \textit{para}\ \ q \in [1, +\infty)\ \ \textit{se}\ \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0;$$

3. *Se $m > \dfrac{N}{p}$:*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega);$$

4. *Se $m - 1 < \dfrac{N}{p} < m$;*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)\ ,\ \alpha \in \left(0, m - \frac{N}{p}\right).$$

Demonstração. ([1][Teorema 6.2]) ■

Em particular, valem as seguintes imersões compactas:

i): Sejam $N \geq 3$ e Ω é limitado, temos

$$H^1(\Omega) \overset{Comp.}{\hookrightarrow} L^s(\Omega) \ , \ \forall \ s \in [1, 2^*) \, ;$$

se $N = 1$ ou $N = 2$, então

$$H^1(\Omega) \overset{Comp.}{\hookrightarrow} L^s(\Omega) \ , \ \forall \ s \in [1, +\infty),$$

por conseguinte

$$H_0^1(\Omega) \overset{Comp.}{\hookrightarrow} L^s(\Omega) \ , \ \forall \ s \in [1, 2^*) \, ;$$

se $N = 1$ ou $N = 2$, então

$$H_0^1(\Omega) \overset{Comp.}{\hookrightarrow} L^s(\Omega) \ , \ \forall \ s \in [1, +\infty).$$

C.2 Alguns resultados sobre espaços de Sobolev

Listamos aqui alguns resultados dos espaços de Sobolev que nos foram úteis durante o desenvolvimento dos capítulos.

Proposição C.7 *(desigualdade de Poincaré): Se $p \in [1, \infty)$ e Ω é limitado (basta limitado em uma direção), então existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que*

$$||u||_p \leq C|| \, |\nabla u| \, ||_p, \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular $|| \, |\nabla u| \, ||_p$ define uma norma $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a usual.

Demonstração. [5, Corolário 9.19]. ■

Observação C.8 *Dizemos que λ é um autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ quando existe solução fraca não nula de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \ \Omega \\ \ \ u|_{\partial\Omega} = 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Isto significa que u satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega \lambda u \phi, \ \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

A função é dita uma autofunção do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. *O conjunto dos autovalores de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ *é uma sequência crescente* (λ_k),

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

e $\lambda_k \to \infty$. *(vide [5, Seção 9.8] e [16, Teorema 8.5.1]).*

Enunciamos a seguir duas proposições relativas às autofunções e autovalores do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Proposição C.9 *(Desigualdade Poincaré em* $H_0^1(\Omega)$*): Considerando* $H_0^1(\Omega)$ *na Proposição C.7, vale*

$$||u||_2 \leq \frac{1}{\lambda_1} || \, |\nabla u| \, ||_2, \ \ \forall u \in H_0^1(\omega),$$

onde λ_1 *denota o primeiro autovalor do operador* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Demonstração. Veja [24, p.15] e [16, Seção 8.5]. ■

Proposição C.10 *As autofunções* (e_k) *do operador* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ *são de classe* $C^\infty(\Omega)$ *e* $e_k \in L^\infty(\Omega)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Se* Ω *tem fronteira suave, então* $e_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Veja [5, Teorema 9.31] e [5, Observação 29, Capítulo 9]. ■

Encerramos com a seguinte proposição.

Proposição C.11 *Seja* $r \in (1, p^*)$, *se* (u_n) *é uma sequência limitada em* $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *(respectivamente* $W_0^{1,p}(\Omega)$*), então existem* $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ *(respectivamente* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$*), uma subsequência* (u_{n_j}) *de* (u_n) *e* $a \in \mathbb{R}$ *tais que*

i): $u_{n_j} \rightharpoonup u_0$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$ *(respectivamente em* $W_0^{1,p}(\Omega)$*);*

ii): $u_{n_j} \to u_0$ *em* $L^p(\Omega)$*;*

iii): $||u_{n_j}||_{1,p} \to a$*;*

iv): $u_{n_j}(x) \to u_0(x)$, *q.t.p. em* Ω.

Demonstração. Suponha que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. Como $p > 1$, então $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo ([5, Proposição 9.1]). Logo, existem (u_{n_j}) subsequência de (u_n) e $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ com

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_0, \text{ em } W^{1,p}(\Omega).$$

Das imersões de Rellich-Kondrachov, vale a imersão compacta

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Vale então que

$$u_{n_j} \to u_0, \quad \text{em } L^r(\Omega).$$

Por propriedades dos espaços $L^r(\Omega)$, deve existir subsequência de (u_{n_j}) (para a qual mantemos a notação (u_{n_j})) com

$$u_{n_j}(x) \to u_0(x), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

(Vide [5, Teorema 4.9]). Por fim, como (u_n) é limitada por hipótese, a sequência de números reais $(||u_{n_j}||_{1,p})$ é limitada. Por Bolzano-Weistrass, podemos considerar que

$$||u_{n_j}||_{1,p} \to a,$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Estão mostrados os itens *i) - iv)*. ■

Apêndice D

Diferenciabilidade de funcionais

Apresentaremos agora alguns resultados abstratos que nos permitem calcular derivadas de funcionais. Os resultados aqui expostos justificam as expressões das derivadas utilizadas no Capítulo 3.

D.1 Cálculo de derivadas

Proposição D.1 *Seja $(H, (\cdot,\cdot))$ um espaço de Hilbert, com $\|\cdot\|$ sendo a norma associada ao produto interno $(\cdot,\cdot)$. Então, o funcional*

$$\begin{array}{rccc} F: & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & F(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2, \end{array}$$

pertence a $C^1(H,\mathbb{R})$ com

$$F'(u)v = (u,v), \quad \forall u, v \in H.$$

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que $\dfrac{\partial F(u)}{\partial v}$ existe para todo $u, v \in H$. Para $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, observe que:

$$\begin{aligned} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\|u+tv\|^2 - \|u\|^2}{t}\right] \\ &= (u,v) + \frac{t}{2}\|v\|^2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = (u,v),$$

mostrando que,

$$\frac{\partial F(u)}{\partial v} = (u, v).$$

Agora, mostraremos que $\dfrac{\partial F(u)}{\partial(\cdot)}$ corresponde a $F'(u)$. Devemos então provar que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{F(u+v) - F(u) - (u,v)}{\|v\|} = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{F(u+v) - F(u) - (u,v)}{\|v\|} &= \frac{\frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\| - (u,v)}{\|v\|} \\ &= \frac{1}{2}\|v\|^2, \end{aligned}$$

segue-se que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{F(u+v) - F(u) - (u,v)}{\|v\|} = 0$$

e, assim, concluímos que F é Fréchet diferenciável com

$$F'(u)(v) = (u, v).$$

Mostraremos agora que F é $C^1(H, \mathbb{R})$. Considere $u_n \to u \quad \text{em} \quad H$. Temos, para $||v|| = 1$,

$$\begin{aligned} |F'(u_n)(v) - F'(u)(v)| &= |(u_n, v) - (u, v)| \\ &= |(u_n - u, v)| \\ &\leq \|u_n - u\| \cdot \|v\| \\ \Rightarrow \sup_{\|v\|\leq 1} |F'(u_n)(v) - F'(u)(v)| &\leq \|u_n - u\| \end{aligned}$$

consequentemente

$$\|F'(u_n) - F'(u)\|_{H'} \to 0 \quad \text{quand} \quad u_n \to u \quad \text{em} \quad H,$$

Assegurando a continuidade de F' e, concomitantemente, que $F \in C^1(H, \mathbb{R})$. ■

Na última proposição, nossa candidata a derivada no ponto foi a aplicação

$$\frac{\partial F(u)}{\partial(\cdot)} : H \longrightarrow \mathbb{R},$$

que a cada $v \in H$ associa $\dfrac{\partial F(u)}{\partial v}$. Isso ocorre devido a uma propriedade geral, que enunciamos a seguir e nos auxiliará no próximo resultado.

Lema D.2 *(Método prático para cálculo de derivadas): Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço normado e* $I : X \to \mathbb{R}$ *um funcional verificando:*

1. $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} : X \to \mathbb{R}$ *existe para todo* $u \in X$.

2. $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} \in X'$ *para todo* $u \in X$.

3. *Se* $u_n \to u$ *em* X, *então*

$$\frac{\partial I(u_n)}{\partial(\cdot)} \to \frac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)}, \quad em \quad X'.$$

Então $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *com*

$$I'(u)v = \frac{\partial I(u)}{\partial v}, \quad \forall v \in X.$$

Demonstração. [26, Proposição 1.3]. ■

Proposição D.3 *Suponhamos que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado e* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua verificando:*

$$|f(x,t)| \leq A + B|t|^p, \quad \textit{uniformemente em } x \tag{D.1}$$

com $p \in (0, 2^* - 1]$ *se* $N \geq 3$ *e* $p \in (0, \infty)$ *se* $N = 1, 2$. *Definamos*

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$$

e

$$I(u) = \int_\Omega F(x,u)dx,$$

então $I \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ *com*

$$I'(u)(v) = \int_\Omega f(x,u)v dx, \;\; v \in H^1(\Omega).$$

Demonstração. Seguindo O Lema E.2, faremos a prova seguindo três etapas.

1ª etapa: $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} : X \to \mathbb{R}$ *existe para todo* $u \in H^1(\Omega)$.

Pela definição de derivada direcional, devemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(u)}{\partial v} &= \lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \left[\frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t}\right] dx. \end{aligned}$$

Defina

$$h_t(x) = \frac{F(x, u+tv) - F(x,u)}{t}, \ \ t \neq 0.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta = \theta(x) \in [u(x), u(x) + tv(x)]$ ou $\theta \in [u(x) + tv(x), u(x)]$ tal que

$$h_t(x) = f(x,\theta)v(x).$$

Vale que,

$$\begin{aligned} |h_t(x)| &\leq |f(x,\theta)| \cdot |v(x)| \\ &\leq (A_1 + B_1|\theta|^p)|v(x)|, \end{aligned}$$

como,

$$|\theta| \leq 2|u(x)| + |v(x)|, \quad t \in [0,1],$$

daí,

$$|\theta|^p \leq A_3|u|^p|v| + A_4|v|^{p+1\,*}.$$

Segue-se que

$$|h_t(x)| \leq A_2|v(x)| + A_3|u|^p|v| + A_4|v|^{p+1} \in L^1(\Omega),$$

porquanto $|v| \in L^{p+1}(\Omega)$ pela imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$. Pela continuidade de f temos

$$h_t(x) \to f(x, u(x))v(x), \quad \text{quando} \quad t \to 0,$$

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega h_t(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx, \quad \text{quando} \quad t \to 0,$$

e então

$$\frac{\partial I(u)}{\partial v} = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx. \tag{D.2}$$

Está provado o Item 1 do Lema D.2.

2ª etapa: $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} \in (H^1(\Omega))', \ \ \forall u \in H^1(\Omega).$

Pela primeira etapa, para cada $u \in H^1(\Omega)$,temos

$$\frac{\partial I(u)}{\partial v} = \int_\Omega f(x,u)vdx$$

*Aqui utilizamos a desigualdade $(|a| + |b|)^p \leq C(|a|^p + |b|^p)$, veja a prova do Teorema 4.7 em [5] e assim $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)}$ é linear. Além disso, para $v \in H^1(\Omega)$ com $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial I(u)}{\partial v}\right| &\leq \int_\Omega |f(x,u)| \cdot |v| dx \\ &\leq \int_\Omega (A_1 + B_1|u|^p)\,|v| dx \\ &\leq A_1 \int_\Omega |v| dx + B_1 \int_\Omega |u|^p |v| dx, \end{aligned}$$

acarretando

$$\left|\frac{\partial I(u)}{\partial v}\right| \leq A_1 \|v\|_{L^1(\Omega)} + B_1 \|u\|_{\frac{p+1}{p}} \|v\|_{p+1}.$$

Usando as imersões contínuas,

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega),$$

existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|v\|_1 \leq C_1 \|v\|, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

e

$$\|v\|_{p+1} \leq C_2 \|v\|, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

implicando que, se $||v|| = 1$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial I(u)}{\partial v}\right| &\leq \left(A_1 C_1 + B_1 A_3 \|u\|_{\frac{p+1}{p}}\right) \|v\| \Rightarrow \\ \Rightarrow \left|\frac{\partial I(u)}{\partial v}\right| &\leq A_1 C_1 + B_1 A_3 \|u\|_{\frac{p+1}{p}}, \end{aligned}$$

mostrando que $\dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} \in (H^1(\Omega))'$.

3ª etapa: *Se $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$, então $\dfrac{\partial I(u_n)}{\partial(\cdot)} \to \dfrac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)}$, em $(H^1(\Omega))'$.*

Pela desigualdade Hölder,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial I(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial I(u)}{\partial v}\right| &\leq \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)| \cdot |v| dx \leq \\ &\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{\frac{p+1}{p}} \|v\|_p \Rightarrow, \end{aligned}$$

nos fornecendo

$$\left|\frac{\partial I(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial I(u)}{\partial v}\right| \leq C_2 \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{\frac{p+1}{p}}. \tag{D.3}$$

Por hipótese

$$|f(t)| \leq A + B|t|^p,$$

assim, utilizando um argumento análogo ao do Resultado 1 da demonstração da Proposição 3.2, concluímos que

$$f(x,u_n) \to f(x,u) \quad \text{em} \quad L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega). \tag{D.4}$$

De (D.3) e (D.4) segue que

$$\sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)}\leq 1}\left|\frac{\partial I(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial I(u)}{\partial v}\right| \to 0 \Leftrightarrow \left\|\frac{\partial I(u_n)}{\partial(\cdot)} - \frac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)}\right\| \to 0.$$

Pelo Lema E.1, concluímos que $I \in C^1(H^1(\Omega),\mathbb{R})$, com

$$I'(u)(v) = \int_\Omega f(x,u)v dx, \ \ \forall v \in H^1(\Omega),$$

■

Corolário D.4 *Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado. Supondo $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com $f(x,u) := F'(x,u) \in (\mathbb{R}^N)'$, para $u \in \mathbb{R}^N$, tal que*

$$|f(x,u)(v)| \leq A + B|v|^p$$

com $p \in (0, 2^* - 1]$ e definindo

$$I(u) = \int_\Omega F(x,\nabla u)dx$$

temos $I \in C^1(H^1(\Omega),\mathbb{R})$ com

$$I'(u)(v) = \int_\Omega f(x,\nabla u)(\nabla v)dx, \ \ v \in H^1(\Omega)$$

.

Demonstração. Basta notar que todos os argumentos da proposição anterior podem ser reproduzidos, porquanto dependem somente do crescimento de $f(x,u)(\cdot)$ e das imersões de Sobolev. ■

Observação D.5 *1. A Proposição D.3 e o Corlário D.4 anterior vale com $H_0^1(\Omega)$ no lugar de $H^1(\Omega)$, porquanto os argumentos dependem do crescimento da f e da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, a qual vale para $H_0^1(\Omega)$.*

2. *Por motivo análogo ao item anterior, substituindo* $H^1(\Omega)$ *por* $W^{1,p}(\Omega)$ *(idem para* $W_0^{1,p}(\Omega)$*) e supondo*

$$|f(t)| \leq A + B|t|^r,$$

com $r \in (0, p^* - 1]$, *concluímos que* $I \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ *(ou* $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$*) com*

$$I'(u)(v) = \int_\Omega f(x,u)v dx.$$

Exemplo D.6 *Consideremos* $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Pela Proposição D.1 temos $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ *com*

$$I'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \ \ v \in H_0^1(\Omega).$$

$\square$

Exemplo D.7 *Definamos* $I : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \in (0, p^* - 1]$,

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{r+1}\int_\Omega |u|^{r+1} dx.$$

As funções $F(v) = |v|^p$, $v \in \mathbb{R}N$ *e* $G(t) = \dfrac{1}{r+1}|t|^{r+1}$ *satisfazem as hipóteses do corolário. Temos*

$$F'(w)(v) = p|w|^{p-2}(w,v), \ \ w,\, v \in \mathbb{R}^N$$

e

$$G'(t) = |t|^{r-1}t.$$

Segue-se então,

$$I'(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega |u|^{r-1} u v dx, \ \ v \in W^{1,p}(\Omega).$$

$\square$.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*. London: Academic Press, INC, 1975

[2] ALVES, C. O.; de MORAIS FILHO, D. C. *Existence and concentration of positive solutions for a Schrödinger logarithmic equation*. Zeitschrift für Angewendte Mathmatik und Physik, 69, 144-165, outubro de 2018.

[3] BARTLE, Robert G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, New York: John Wiley & Sons, INC. 1995.

[4] BOTELHO, G.;PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos da Análise Funcional*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[5] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2010.

[6] BREZIS, H. *Monotonicity Methods in Hilbert Spaces Applications to Nonlinear Partial Differential Eqautions*. Contributions to Nonlinear Functional Analysis. E. Zarantenello ed. Academic Press. New York, 101-156, maio de 1971.

[7] CARL, S.; LE, V. K.; MONTREANU, D. *Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities: Comparison Principles and Applications*. New York: Springer, 2007.

[8] CHANG, K. C. *Variational Methods for Non-Differentiable Functionals an Their Applications to Partial Differential Equation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 80, 102-129, 1981.

[9] CLARK, F. H. *Optimization Nonsmooth Analysis*. Classics in applied mathematics, Vol. 5. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990.

[10] COSTA, D. G. *An Invitation Variational Methods in Differential Equations*. Boston: Birkhäuser, 2007.

[11] DEIMLING, K. *Nonlinear Functional Analysis*, Dover edition, Berlin: Springer, 1985.

[12] DiBENEDETTO, E. *Degenerate Parabolic Equations*. New York: Springer-Verlag, 1993.

[13] DUVAUT, G.; LIONS, J. L. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Berlin: Springer, 1976.

[14] EKELAND, I. *Nonconvex Mimnimization Problems*. Bull. American Mathematical Society, 443-474, 1979.

[15] EVANS, L. C. *Partial Differencial Equations*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 19. USA: American Mathematical Society, 2002.

[16] JOST, J. *Partial Differential Equation*. Graduate Texts in Mathematics, 214. New York: Springer Verlag, 2002.

[17] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA,2006.

[18] LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[19] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[20] MANKRES, J. R. *Topology: A First Course*. Vol. 2. New Jersey: Prentice-Hall, 1975.

[21] MANCINI, G.; MUSINA, R. *Hole and Obstacles*. Annales de l'I. H., section C, tome 5, nº 4, 323-345, 1988.

[22] RABINOWITZ, P. *Some Aspects of Critical Point Theory*. MRC Thec. Rep. # 2465. Madison: novembro de 1983.

[23] SQUASSINA, M; Szulkin, A. *Multiple solution to logarithmic Schrödinger equations with periodic potential*. Cal. Var. Partial Differ. Equ. 54, 585-597, 2015.

[24] STRUWE, M., *Variational Methods - Applications to Nonlinear Partial Diferential Equations and Hamiltonian Systems.* 4th ed. Springer, , 2008.

[25] SZULKIN, A. *Minmax principles for lower semicontinuous functions and appliications to nonlinear boundary value problems.* Annales de l'I. H., section C, tome 3, nº 2, 77-109, 1986.

[26] WILLEM, M., *Minimax Theorem*, Birkhauser, 1996.