Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

T-Ideais e T-espaços Gerados por Comutadores

por

Thiago Felipe da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

T-Ideais e T-espaços Gerados por Comutadores

por

Thiago Felipe da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG

Prof. Dr. Lucio Centrone - UNICAMP

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2017

Agradecimentos

A Deus, sou grato por definição, uma vez que ele é o responsável não só por essa conquista em minha vida e sim pela existência dela, por esse motivo omitirei seu nome em minha lista de agradecimento.

Existem pessoas na vida que é sempre um motivo de orgulho e de prestígio poder dizer que somos seus amigos, a felicidade de citar os nomes de algumas delas ameniza o sentimento de injustiça das que agora esqueço.

De coração extasiado de felicidade agradeço;

Aos meus pais que me ensinaram, não com palavras e sim com gestos, a enfrentar a vida com equidade e honradez, fazendo da justiça o meu forte brasão.

Aos meus digníssimos irmãos, e em especial à minha amorável irmã Fabiana da Silva.

Ao Meu fiel e cortês amigo Carlos André e família, em especial ao seu nobre irmão Edivan Silva e à vossa equânime mãe Maria José, que fora minha professora no primário.

Ao meu respeitável e inesquecível professor Josenildo da Cunha Lima.

Aos meus autênticos, íntegros e engraçados amigos Ivan Sérgio e Adriano Dantas, muitos foram os bons momentos que vivemos juntos.

A todos os integrantes do grupo Pet-matemática, simplesmente essas pessoas mudaram a minha vida.

Ao meu fidedigno professor, tutor e amigo Daniel Cordeiro de Morais Filho. Nunca esquecerei de seus ensinamentos.

Ao meu professor e orientador do presente trabalho, Antônio Pereira Brandão Júnior, esse antecede sua fama e seu título de doutorado, se não fosse questão de estética o prefixo Dr. viria após o seu nome.

O brado latente sem sentido
O rugido fugaz sem esperança
Traduz a vida sem lembrança
Se nesta não se apinha amigo
(Thiago Felipe)

Obrigado!

Dedicatória

Ao pai Manoel Joaquim da Silva
(*In memoriam*).

Resumo

Nesse trabalho são estudados o T-ideal T^3, gerado pelo comutador triplo, e os T-espaços S^2 e S^3, gerados pelos comutadores duplo e triplo, respectivamente, da álgebra associativa livre unitária $K\langle X\rangle$, onde K é um corpo de característica zero. Nesse estudo são apresentadas relações entre esses espaços e são analisadas as suas interseções com o espaço P_n dos polinômios multilineares de grau n. Também é apresentada uma demonstração de que o T-espaço S^2 não contêm nenhum T-ideal não nulo, através de sua sequência de codimensões, bem como são caracterizados os T-espaços com esta propriedade.

Palavras-chave: T-Espaço, T-Ideal, Álgebra de Grassmann, Codimensões.

Abstract

In this work are study the T-ideal T^3, generated by the triple commutator, and the T-spaces S^2 and S^3, generated by the double and triple commutator respectively, of the free unital associative algebra $K\langle X\rangle$, where K is a field of characteristic zero. In this thesis we show relationships between these spaces and their intersections with the space P_n of the multilinear polynomials of degree n is analyzed. Through the codimensions sequence of the T-space S^2 it is also proved that it does not contain any non-zero T-ideal as well as is characterized the T-spaces with this property.

Keywords: T-Space, T-Ideal, Grassmann Algebra, Codimensions.

Sumário

Introdução

Sendo K um corpo, entende-se por *álgebra sobre* K um K-espaço vetorial A, munido de uma operação bilinear, a qual é chamada de multiplicação. Particularmente, quando esta multiplicação é associativa e possui elemento neutro, dizemos que a álgebra em questão é associativa e unitária. Um importante exemplo é a álgebra $K\langle X\rangle$, conhecida como a *álgebra associativa livre unitária, livremente gerada por* X, onde $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ é um conjunto infinito enumerável de variáveis associativas e não comutativas. Os seus elementos são exatamente os *polinômios*, associativos e não comutativos, sobre X com coeficientes em K.

Um polinômio $f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ é denominado *identidade polinomial* para uma certa álgebra (associativa) A se

$$f(a_1, ..., a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A$, isto é, se $f(x_1, ..., x_n)$ se anula para qualquer substituição de suas variáveis por elementos de A. As álgebras que satisfazem alguma identidade polinomial não nula são chamadas de *álgebras com identidade polinomial*, ou *PI-álgebras*. Essas álgebras destacam-se entre as demais e, por essa razão, são objetos de vastas e frutíferas pesquisas matemáticas. As álgebras comutativas, as de dimensão finita e as nilpotentes, entre outras, são exemplos clássicos de PI-álgebras.

Dentro da PI-teoria (teoria das PI-álgebras), destacamos os conceitos de T-ideal e T-espaço, os quais são fundamentais no presente trabalho. Dizemos que um ideal I de $K\langle X\rangle$ é um *T-ideal* se I é invariante por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$; dizemos que um subespaço V de $K\langle X\rangle$ é um *T-espaço* se V é invariante por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$. Como todo ideal de uma álgebra é um subespaço, observa-se que todo T-ideal de $K\langle X\rangle$ é um T-espaço, e historicamente o conceito de T-ideal surgiu antes do conceito de T-espaço. Sendo A uma álgebra, ao denotarmos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A, é possível mostrar que $T(A)$ é um T-ideal. Ademais, mostra-se também que se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então existe uma álgebra B de modo que $I = T(B)$.

Sendo A uma álgebra associativa com centro não trivial, um polinômio $f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ é dito ser um *polinômio central* para A se $f(x_1, ..., x_n)$ tem termo constante nulo, não é identidade polinomial para A e $f(a_1, ..., a_n) \in Z(A)$ (centro de A) para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A$. Denotando por $C(A)$ o menor T-espaço que contém os elementos $\lambda.1$ ($\lambda \in K$), os polinômios centrais e as identidades polinomiais de A, temos que $C(A)$ é um exemplo de T-espaço muito importante na PI-teoria tal que $T(A) \subseteq C(A)$. Assim, se A é uma PI-álgebra, $C(A)$ é um T-espaço que contém um T-ideal não nulo, propriedade que não é todo T-espaço que satisfaz como veremos no capítulo 3 dessa dissertação. Devido a essas relações de T-ideais com identidades polinomiais e de T-espaço com polinômios centrais, o estudo de T-ideais e T-espaços é um algo de grande importância na PI-teoria.

Na PI-teoria, um dos problemas centrais é a obtenção de uma base para um dado T-ideal, ou equivalentemente, a obtenção de uma base para as identidades polinomiais de uma certa álgebra. Sendo S um subconjunto qualquer de $K\langle X\rangle$, define-se o T-ideal gerado por S como o sendo a interseção de todos os T-ideais de $K\langle X\rangle$ que contêm S. Denotando o T-ideal gerado por S por $\langle S\rangle^T$, entende-se por base das identidades polinomiais de uma álgebra A um conjunto S tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$. Em 1950, W. Specht fez o importante questionamento sobre a existência de base finita para as identidades de uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero (*o Problema de Specht* (base finita)). Em 1987, Kemer, em seu importante trabalho sobre a estrutura dos T-ideais (veja [11] e [12]) deu uma resposta positiva a esse problema em característica zero. No entanto, a questão da *obtenção* de uma base finita para as identidades ainda permenece em aberto para muitas álgebras importantes, e quando se considera a questão para álgebras sobre um corpo de característica positiva, aparecem ainda mais problemas em aberto. Como exemplos de importantes trabalhos de obtenção de bases de identidades polinomiais podemos citar [17], [5], [16] e [13].

Além de sua relação com polinômios centrais, os T-espaços também têm grande importância no estudo de propriedades dos T-ideais, tendo se mostrado como ferramentas bastante eficientes neste sentido. Sendo $S \subseteq K\langle X\rangle$, em analogia com T-ideal gerado, define-se o T-espaço gerado por S como o sendo a interseção de todos os T-espaços de $K\langle X\rangle$ que contêm S. Dizemos que um T-espaço V é *finitamente gerado* quando coincide com o T-espaço gerado por algum de seus subconjuntos finitos. No artigo [9], o leitor interessado pode encontrar um vasto estudo sobre T-espaços.

Consideremos os polinômios $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ (comutador) e $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$ (comutador triplo) na álgebra $K\langle X\rangle$. Consideremos também em $K\langle X\rangle$ o T-espaço gerado por $[x_1, x_2]$, denotado por S^2, o T-espaço gerado por $[x_1, x_2, x_3]$, denotado por S^3, e o T-ideal gerado por

$[x_1, x_2, x_3]$, denotado por T^3. Os dois últimos são chamados, respectivamente, de *T-espaço e T-ideal de Grassmann.* A relação desses espaços com a importantíssima *álgebra de Grassmann* (ou *álgebra exterior*) de dimensão infinita (a qual denotaremos por E) coloca-os lugar de destaque dentro da PI-teoria. Foi mostrado por Krakowski e Regev em [14] que $T(E) = T^3$ no caso do corpo base ter característica zero (observa-se que o mesmo resultado vale para corpo base infinito de característica diferente de 2). Também é um fato conhecido que, em característica zero, tem-se $C(E) = T^3 + S^2$, sendo importante ressaltar que o mesmo não vale em característica positiva (embora ainda se tenha $T^3 + S^2 \subseteq C(E)$), situação em que $C(E)$ não é nem finitamente gerado (para maiores detalhes, veja [3]).

Apesar da ideia de T-espaço ser uma generalização da ideia de T-ideal, há importantes propriedades de T-ideais que não se generalizam para T-espaços quaisquer. Uma dessas propriedades tem a ver com o conceito de *codimensão*, o qual foi introduzido por A. Regev em [18]. Sendo A uma álgebra e n um número natural, definimos a n-ésima codimensão de A, denotada por $c_n(A)$, como sendo

$$c_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}$$

onde P_n denota o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Um importante fato, conhecido com Teorema de Regev-Latyshev, é que se A é uma PI-álgebra qualquer, então a sequência numérica $(c_n(A))_{n\in N}$, chamada de *sequência de codimensões de A*, é exponencialmente limitada, isto é, existe um número real positivo a tal que $c_n(A) \leq a^n$ para todo n natural.

O conceito de codimensão generaliza-se naturalmente para T-espaços. Sendo V um T-espaço de $K\langle X\rangle$, define-se a n-ésima codimensão de V como sendo o numero inteiro

$$c_n(V) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap V}.$$

No entanto, verifica-se que a sequência $(c_n(V))_{n\in N}$ pode não ser exponencialmente limitada. Um importante exemplo disto é o caso $V = S^2$, o qual é de grande importância no presente trabalho, tendo em vista que será usado na caracterização dos T-espaços que não contêm um T-ideal não nulo.

O desenvolvimento do presente trabalho se dará da seguinte forma: o primeiro capítulo será destinado aos conceitos e resultados básicos sobre álgebras, álgebras associativas livres, T-ideais, T-espaços e codimensões que serão importantes no desenvolvimento de todo o texto. No segundo capítulo, objetivamos exibir bases para $S_n^2 = S^2 \cap P_n$, $S_n^3 = S^3 \cap P_n$ e $T_n^3 = T_n^3 \cap P_n$, bem como obter importantes relações entre esses subespaços, como por exemplo,

$S_n^3 = S_n^2 \cap T_n^3$, da qual obtem-se a igualdade $S^3 = S^2 \cap T^3$, e $T_n^3 = S_n^3 \oplus T_{n-1}^3 x_n$. O estudo realizado neste capítulo é baseado no artigo [2]. Por fim, no terceiro capítulo, será estudada a sequência de codimensões do T-espaço S^2 e será demonstrado o fato de que este T-espaço não contem nenhum T-ideal não nulo. Para concluir, apresentaremos, com base na Seção 1.4 do artigo [9], uma caracterização dos T-espaços que não contêm um T-ideal não nulo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns dos principais resultados que servirão como base para o entendimento de outros porvindouros que serão pautados adiante. Acautelamos porém, ao desígnio do enxugamento do presente texto, que seremos coniventes ao admitirmos alguns resultados básicos necessários à compreensão do tema em questão, a exemplos da álgebra linear, teoria de grupos, anéis, corpos e seus correlatos (vide [4], [10] e [7]). Ademais, ficará convencionado que qualquer estrutura algébrica que necessite de uma corpo base, mesmo que de forma implícita, este será um corpo K cuja característica dependerá da situação proposta.

1.1 Álgebras: Definição, Propriedades e Exemplos

Como ponto de partida para o desenvolvimento do proposto no presente trabalho, é, pois, de importância primordial, conceituar o que vem a ser uma álgebra A sobre um determinado corpo K. Com este propósito, vamos à seguinte definição.

Definição 1. *Seja dado A um $K-$espaço vetorial. Diremos que o par $(A, *)$ é uma $K-$álgebra se $* : A \times A \longrightarrow A$ é uma operação tal que:*

1. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
2. $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$
3. $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$. Observemos que "$*$ "é uma operação bilinear.

Como A já comporta operações de adição e produto por escalar por ser um $K-$espaço vetorial, é conveniente nos referirmos a "$*$ "como sendo a operação multiplicação ou produto. Assim sendo, nos convém denotar $a * b$ simplesmente por ab, para quaisquer a e b em A. Também, por simplicidade, é oportuno denotar a $K-$álgebra $(A, *)$ meramente por A, e quando a ela nos referirmos devemos usar a expressão *álgebra* ao invés de *$K-$álgebra* A, ficando assim subentendido que A tem uma estrutura de álgebra sobre o corpo K.

Definição 2. *Seja A uma álgebra.*

1. *Diremos que um conjunto β é uma base para A se β for base de A como espaço vetorial. Definimos a dimensão de A como sendo a dimensão de A como espaço vetorial.*

2. *Para $a_1, ..., a_{n+1} \in A$, definimos, indutivamente $a_1...a_na_{n+1}$ como sendo $(a_1...a_n)a_{n+1}$.*

Definição 3. *Seja A uma álgebra. Então, diremos que A é:*

1. *Associativa se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$, isto é, o produto em A é associativo.*

2. *Comutativa se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$, ou seja, o produto em A é comutativo.*

3. *Unitária (ou com unidade) se existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$, para qualquer $a \in A$, isto é, o produto em A possui elemento neutro. O elemento 1 é referido como sendo* a unidade de A.

Suponha que A possui unidade. Dizemos que $c \in A$ é *inversível* se possui inverso multiplicativo, isto é, existe $c^{-1} \in A$ tal que $cc^{-1} = c^{-1}c = 1$.

Observação 1. *Sendo A uma álgebra unitária, podemos identificar de forma natural o elemento $\lambda 1$ de A por λ, e o conjunto $\{\lambda 1 \mid \lambda \in K\}$ por K, e dessa forma observar que o corpo K está "imerso" na álgebra A. Observemos também que se o corpo em questão tiver característica 2, então $a + a = 2a = 0$ para todo $a \in A$, e assim $a = -a$.*

Elenquemos, doravante, exemplos importantes a título de aclarar as definições acima.

Exemplo 1. *Sendo L uma extensão de um corpo K, é fato conhecido que L é naturalmente um $K-$espaço vetorial. Em verdade, temos que L é uma $K-$álgebra, a qual por sua vez, é associativa, comutativa e com unidade, onde a unidade e a operação produto são exatamente os mesmos de L.*

Exemplo 2. *Seja K um corpo. Consideremos o K-espaço vetorial $K[x_1,...,x_n]$ dos polinômios nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, com coeficientes em K. Não é difícil ver que $K[x_1,...,x_n]$, munido da multiplicação usual de polinômios, é uma álgebra associativa, comutativa e com unidade. Particularmente, no caso $n = 1$, temos a K-álgebra $K[x]$ dos polinômios na variável x com coeficientes em K.*

Exemplo 3. *Seja n um número natural. Não é difícil ver que o espaço vetorial $M_n(K)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em K, munido da operação produto usual de matrizes, é uma $K-$álgebra associativa e unitária de dimensão n^2. Ademais a unidade da álgebra $M_n(K)$ é a matriz $I_{n\times n}$ que contém 1 na diagonal principal e 0(zero) nas demais entradas (matriz identidade).*

De forma generalizada, sendo A uma álgebra sobre um corpo K, facilmente vemos que o conjunto $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A é um $K-$espaço vetorial, e, como instigado, $M_n(A)$ é uma $K-$álgebra cuja operação produto é análoga à operação produto de matrizes com entradas em K. Neste caso, devemos observar que, se A tem unidade, a unidade da álgebra $M_n(A)$ é matriz $I_{n\times n}$ que contém a unidade de A na diagonal principal e 0 nas demais. Além disso, se A for associativa devemos ter que $M_n(A)$ também o será.

Observação 2. *Convém destacar na álgebra $M_n(K)$ do exemplo acima as matrizes E_{ij}, cuja única entrada não nula é 1 ocorrente na $i-$ésima linha e na $j-$ésima coluna, para $1 \leq i, j \leq n$. Destacamos também o produto de duas quaisquer dessas matrizes, o qual é como segue:*

$$E_{ij}E_{lk} = \begin{cases} 0 & ,se \quad l \neq k \\ E_{ik} & ,se \quad l = k \end{cases},$$

onde 0 denota, obviamente, a matriz nula $n \times n$. Ademais, é fácil ver que o conjunto $\beta = \{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base para $M_n(K)$, e assim tem-se que $\dim(M(K)) = n^2$.

Observação 3. *Sejam A um espaço vetorial, β uma base de A e $f : \beta \times \beta \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer. Não é difícil ver que existe uma única aplicação bilinear $F : A \times A \longrightarrow A$ estendendo f. Dessa maneira, para se definir uma estrutura de álgebra em A, basta definir o 'produto' nos elementos de uma base de A.*

Com base na bilinearidade da operação produto, não é difícil averiguar que para uma álgebra A ser associativa, comutativa e/ou unitária, basta que

A satisfaça essas propriedades, respectivamente, em um de seus conjuntos geradores (como espaço vetorial). Presando a estética do texto, enunciaremos essa propriedade na seguinte proposição. Contudo, sua demonstração é simples e será deixada a ofício do leitor.

Proposição 1. *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto gerador de A (como espaço vetorial). Então:*

1. *A é associativa se, e somente se, $(uv)w = u(vw)$ para quaisquer $u, v, w \in S$.*

2. *Para $a \in A$, tem-se $ax = xa$ para todo $x \in A$ se, e somente se, $au = ua$ para todo $u \in S$. Particularmente, A é comutativa se, e somente se, $uv = vu$ para quaisquer $u, v \in S$.*

3. *A possui unidade se, e somente se, existe $1 \in A$ tal que $1u = u1 = u$ para todo $u \in S$.*

Exemplo 4. *Consideremos V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2..., e_n, ...\}$ e $charK \neq 2$. Definimos a* álgebra de Grassmann *(ou* álgebra exterior*) de V, denotada simplesmente por E, como sendo a álgebra associativa e unitária como base*

$$\{1, e_{i_1}...e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k, \ \text{com } k \geq 1\}$$

cujo produto é definido por justaposição com as seguintes relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Destacamos em E os subespaços gerados pelos conjuntos $\{1, e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$ e $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$, e os denotamos, respectivamente, por E_0 e E_1. Sem dificuldades pode-se observar que $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. Também não é difícil, a partir da relação $e_ie_j = -e_je_i$, concluir que $(e_{i_1}...e_{i_m})(e_{j_1}...e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}...e_{j_k})(e_{i_1}...e_{i_m})$ para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$. Assim, pela Proposição 1, obtemos que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$. Ademais, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E_1$.

É importante saber também que a álgebra com base

$$\{e_{i_1}...e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k, \ \text{com } k \geq 1\} \ \textit{(sem o 1)}$$

é chamada de álgebra exterior sem unidade*, e é denotada por E'.*

Exemplo 5. *Seja S um conjunto não vazio. Consideremos o conjunto KS de todas a somas formais do tipo $\sum_{s \in S} \lambda_s s$, onde $\lambda_s \in K$ e $\{s \in S \mid \lambda_s \neq 0\}$ é finito. Dizemos que*

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s = \sum_{s \in S} \gamma_s s$$

em KS se tivermos $\lambda_s = \gamma_s$, para todo $s \in S$. Agora, iremos definir a soma em KS como sendo

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s + \sum_{s \in S} \gamma_s s = \sum_{s \in S} (\lambda_s + \gamma_s) s$$

e o produto por escalar como sendo

$$\gamma \sum_{s \in S} \lambda_s s = \sum_{s \in S} (\gamma \lambda_s) s \quad (\gamma \in K).$$

Não é difícil ver que KS, munido destas operações, é um K-espaço vetorial, chamado de K-espaço vetorial com base S. *Em KS, identificamos o elemento $s_0 \in S$ como sendo o elemento*

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s, \text{ onde } \lambda_s = \begin{cases} 1 & , se \quad s = s_0 \\ 0 & , se \quad s \neq s_0 \end{cases}.$$

Diante disso, temos que $S \subseteq KS$ e que S é, realmente, uma base para KS. Se " $*$ " é uma operação em S, de acordo com a Observação 3, " $*$ " pode ser estendida a uma única operação bilinear em KS, a qual denotaremos também por " $*$ ". Desse modo, temos que $(KS, *)$ tem uma estrutura de K-álgebra, a qual denotamos simplesmente por KS. Segue da Proposição 1 que se a operação " $*$ " é associativa, comutativa e/ou unitária em S, então também o será, respectivamente, na álgebra KS. Um caso particular e muito importante desse tipo de construção é quando usamos um grupo G, ao invés de um simples conjunto S. Nesse caso, adotamos a notação multiplicativa para o grupo G e consideramos, no espaço KG, a operação induzida pela operação de G, e assim obtemos a álgebra KG, chamada de álgebra de grupo. *Observemos ainda que KG é uma álgebra associativa com unidade, pois G o é, e, além disso, KG é comutativa se, e somente se, G é abeliano.*

Definição 4. *Sejam A uma álgebra e B e I subespaços vetoriais de A. Então, dizemos que:*

1. *B é uma* subálgebra *de A se B é multiplicativamente fechado, isto é, se para a e b elementos quaisquer em B, tem-se $ab \in B$.*

2. *I é um ideal à esquerda (respectivamente, à direita) se $ax \in I$ (respectivamente, $xa \in I$) para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$. Se I é ideal à esquerda e à direita simultaneamente, então dizemos que I é um ideal bilateral de A (ou simplesmente ideal de A).*

Observação 4. *Consideremos A uma álgebra e W um subespaço de A. Suponhamos que os conjuntos X e Y gerem, como espaços vetoriais, A e W, respectivamente. Em analogia com a Proposição 1, temos que W é:*

a) Uma subálgebra de A se, e somente se, $x_1x_2 \in W$ para quaisquer $x_1, x_2 \in Y$.

b) Um ideal de A se, e somente se, $yx, xy \in W$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Salientemos que, tal como acontece na teoria de anéis, é de fácil percepção que a interseção de uma família qualquer de subálgebras (respectivamente, de ideais) é ainda uma subálgebra (respectivamente, um ideal). Com base nesse fato, temos bem fundamentada a próxima definição.

Definição 5. *Sejam A uma álgebra unitária e S um subconjunto não vazio de A. Então, definimos:*

1. *A subálgebra de A gerada por S, geralmente denotada por $K\langle S\rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contém $S \cup \{1\}$. Caso a álgebra não tenha unidade tira-se o 1 dessa definição.*

2. *O ideal de A gerado por S como sendo a interseção de todos os ideais de A que contém S.*

Sendo A uma álgebra associativa e unitária, e S um subconjunto não vazio de A, não é difícil mostrar que a subálgebra de A gerada por S coincide precisamente com subespaço de A gerado pelo o conjunto $\{1, s_1...s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. Caso A não tenha unidade, tira-se o 1 desse conjunto. Também sem dificuldades mostra-se que o ideal gerado por S coincide exatamente com o subespaço gerado pelo o conjunto $\{asb \mid s \in S, a, b \in A\}$.

Exemplo 6. Consideremos a álgebra exterior do Exemplo 4. Fixado $n \in \mathbb{N}$, denotemos o subespaço vetorial de E, gerado pelo o conjunto

$$\{1, e_{i_1}...e_{i_k} \mid i_1 < ... < i_k \leq n\}$$

por E_n. Não é difícil ver que E_n é uma subálgebra de E de dimensão 2^n. Como toda subálgebra é por si própria uma álgebra, temos que E_n é a *álgebra exterior do espaço vetorial com base* $\{e_1, ..., e_n\}$. Ademais, é fácil ver que

$$E_n = (E_n \cap E_0) \oplus (E_n \cap E_1).$$

Exemplo 7. ***(Centro de uma álgebra)*** Seja A uma álgebra. O conjunto

$$Z(A) = \{a \in A \mid xa = ax \textit{ para todo } x \in A\}$$

é denominado por *centro de A*. Observemos que $Z(A)$ é um subespaço vetorial de A. No caso particular em que A é associativa mostra-se facilmente que $Z(A)$ é, em verdade, uma subálgebra de A. Não é difícil ver que, para todo $n \in \mathbb{N}$, que $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in K\}$(matrizes escalares). Quanto à álgebra exterior do Exemplo 4, mostra-se que $Z(E) = E_0$.

Abordemos agora, de forma sucinta, *álgebras quocientes* e *homomorfismos de álgebras*. Como veremos adiante, esses dois temas são de suma importância no estudo das PI-álgebras e PI-teoria. Começaremos pois, pelo primeiro evocado.

Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Consideremos o espaço vetorial A/I. Recordemos agora que, em A/I, os elementos são da forma $a + I = \{a + x \mid x \in I\}$, onde $a \in A$, e que as operações de soma e produto por escalar são definidos por

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

e

$$\lambda(a + I) = \lambda a + I,$$

onde $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Os elementos $a + I$ são chamados de classes laterais, e, a partir de agora, denotá-lo-emos, simplesmente, por $\overline{a}$.

Consideremos o produto

$$\begin{array}{rcl} \cdot : A \times A & \longrightarrow & A \\ (\overline{a}, \overline{b}) & \longmapsto & \overline{a}.\overline{b} = \overline{ab} \end{array}$$

Não é difícil ver que o produto, definido acima, em A/I, independe da escolha do representante de cada classe lateral, ficando assim bem definido. Além disso, é de simples compreensão que esse produto é bilinear, e portanto temos, em verdade, que A/I tem uma estrutura de K-álgebra, a qual é denominada por *álgebra quociente de A por I*. Ademais, mostra-se sem dificuldades que se A for associativa, comutativa e/ou unitária, então A/I também o será, respectivamente.

Vamos agora aos *homomorfismos de álgebras*.

Definição 6. *Sejam A e B duas álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\phi : A \longrightarrow B$ é um* homomorfismo de álgebras *se $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$. Caso as álgebras A e B sejam unitárias, será exigido que $\phi(1_A) = 1_B$.*

Dizemos que ϕ é um *mergulho* (ou um *monomorfismo*) se é injetivo, e que é *isomorfismo* se for bijetivo. Nos referimos a ϕ como sendo um *endomorfismo* de uma dada álgebra A se ϕ é um homomorfismo de A em A. Por último, a um endomorfismo bijetivo chamamos de *automorfismo.* Os conjuntos de todos os endomorfismos e automorfismos de uma dada álgebra A, denotamos, respectivamente, por $EndA$ e $AutA$. Na existência de um isomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são *isomorfas* e denotamos por $A \simeq B$.

Consideremos $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. O conjunto

$$Ker\phi = \{a \in A \mid \phi(a) = 0\}$$

é denominado por *núcleo de* ϕ, e, facilmente, mostra-se que este é um ideal de A. O conjunto

$$\operatorname{Im}\phi = \{\phi(a) \mid a \in A\}$$

é chamado de *imagem de* ϕ, e, com igual simplicidade, mostra-se que é uma subálgebra de A. Também, sem complicações, vê-se que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \phi : A/Ker\phi & \longrightarrow & \operatorname{Im}\phi \\ \overline{a} & \longmapsto & \overline{\phi}(\overline{a}) = \phi(a) \end{array}$$

é bem definida, é um homomorfismo de álgebras e é um isomorfismo. Essa última obtenção é conhecida como *Teorema Fundamental dos Homomorfismos.* Mais geralmente, se I é um ideal de A tal que $I \subseteq Ker\phi$, então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \phi : A/I & \longrightarrow & B \\ \overline{a} & \longmapsto & \overline{\phi}(\overline{a}) = \phi(a) \end{array}$$

é bem definida e é um homomorfismo de álgebras.

Exemplo 8. Seja A uma álgebra unitária. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi : K & \longrightarrow & A \\ \lambda & \longmapsto & \psi(\lambda) = \lambda 1_A \end{array}.$$

Temos que ψ é um mergulho de K em A, donde obtemos que K é isomorfo a $\operatorname{Im}\psi = \{\lambda 1_A \mid \lambda \in K\}$, e assim $\operatorname{Im}\psi$ é um corpo. Com esse argumento temos a identificação natural de K com $\{\lambda 1_A \mid \lambda \in K\}$. Recordemos que já tínhamos comentado esse fato na Observação 1.

Exemplo 9. Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \pi : A & \longrightarrow & A/I \\ a & \longmapsto & \pi(a) = \overline{a} = a + I \end{array}$$

que é conhecida como *projeção canônica*, é um homomorfismo sobrejetivo de álgebras.

1.2 Comutadores

Uma ideia bastante recorrente, e nesse trabalho não será diferente, é a de *comutador*, sobre o qual passamos a discorrer. Consideremos A uma álgebra associativa e $a, b \in A$. O *comutador de a por b*, denotado por $[a, b]$, é definido como sendo o elemento $[a, b] = ab - ba$ de A. Mais geralmente, definimos de forma indutiva, para $a_1, ..., a_n \in A$ e $n \geq 2$, *o comutador de comprimento n* como sendo o elemento

$$[a_1, ..., a_{n-1}, a_n] = [[a_1, ..., a_{n-1}], a_n].$$

Elenquemos algumas propriedades de comutadores, advindas diretamente da definição, que serão utilizadas frequentemente ao longo desse texto.

Lema 1. *Seja A uma álgebra associativa. Então, para quaisquer a, b, c, $a_1, ..., a_n \in A$ e $\lambda \in K$, valem:*

1. $[a, b] = -[b, a]$.
2. $ab = ba + [a, b]$.
3. $[\lambda a + b, c] = \lambda[a, c] + [b, c]$ *e* $[a, \lambda b + c] = \lambda[a, b] + [a, c]$.
4. $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$.
5. *Dados $n \geq 2$ e $a_1, ...a_n, b \in A$, temos*
$$[a_1...a_n, b] = \sum_{i=1}^{n} a_1...a_{i-1}[a_i, b]a_{i+1}...a_n.$$
6. $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ (identidade de Jacobi).

Demonstração. Os itens 1 e 2 são imediatos. No tocante à demonstração do item 3, basta notar que

$$\begin{aligned} [\lambda a + b, c] &= (\lambda a + b)c - c(\lambda a + b) = \lambda ac + bc - \lambda ca - cb \\ &= \lambda(ac - ca) + bc - cb = \lambda[a, c] + [b, c]. \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se a segunda identidade. Observemos que essas propriedades revelam que a função comutador é bilinear, o que é algo muito importante do ponto de vista prático. Quanto ao item 4, sendo A associativa, temos que

$$\begin{aligned} [ab, c] &= (ab)c - c(ab) = abc - cab + acb - acb = a(bc - cb) + (ac - ca)b \\ &= a[b, c] + [a, c]b \end{aligned}$$

para quaisquer $a, b, c \in A$. Para demonstrar o 5º item usaremos o processo de indução. Segue do item 4 que a identidade é válida para $n = 2$. Suponhamos, por indução, que a identidade em questão seja válida para um certo $k > 2$. Temos, ainda pelo item 4 e pelo fato de A ser associativa que

$$\begin{aligned}
[a_1 \dots a_k a_{k+1}, b] &= [(a_1 \dots a_k) a_{k+1}, b] = a_1 \dots a_k [a_{k+1}, b] + [a_1 \dots a_k, b] a_{k+1} \\
&\overset{Hip.Ind.}{=} a_1 \dots a_k [a_{k+1}, b] + \sum_{i=1}^{k} a_1 \dots a_{i-1} [a_i, b] a_{i+1} \dots a_k a_{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} a_1 \dots a_{i-1} [a_i, b] a_{i+1} \dots a_k a_{k+1}
\end{aligned}$$

e portanto a identidade também é válida para $k + 1$. Consequentemente, temos o resultado.

No que concerne ao 6º e último item, basta notar que

$$[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = [a, b]c - c[a, b] + [b, c]a - a[b, c] + [c, a]b - b[c, a] =$$

$$= abc - bac - cab + cba + bca - cba - abc + acb + cab - acb - bca + bac = 0.$$

□

Uma álgebra A é dita ser uma *álgebra de Lie* se $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ para quaisquer $a, b, c \in A$. A identidade $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ é chamada de *identidade de Jacobi*.

Considerando uma álgebra associativa A e, em A, o produto definido por

$$\begin{array}{rcl}
[,] : A \times A & \longrightarrow & A \\
(a, b) & \longmapsto & [a, b] = ab - ba
\end{array}$$

não é difícil verificar que esse produto está bem definido e que, munido dele, A é uma álgebra, a qual é denotada por $A^{(-)}$. Observa-se que $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie.

Lema 2. *Sejam x, u, v e w em uma álgebra A associativa. Então:*

(1) $[uxv, w] = [xv, wu] - [xvw, u]$.

(2) $[u, v, w] = [uv, w] + [uw, v] - [u, wv]$.

Demonstração. (1) De fato

$$\begin{aligned}
[xv, wu] - [xvw, u] &= xvwu - wuxv - xvwu + uxvw = -wuxv + uxvw \\
&= [uxv, w].
\end{aligned}$$

(2) Basta notar que

$$\begin{aligned}
[uv,w]+[uw,v]-[u,wv] &= uvw-wuv+uwv-vuw-uwv+wvu \\
&= uvw-wuv-vuw+wvu \\
&= [uv,w]-(-wvu+vuw)=[uv,w]-[vu,w] \\
&= [uv,w]+[-vu,w]=[uv-vu,w]=[[u,v],w] \\
&= [u,v,w]
\end{aligned}$$

□

1.3 Álgebras Associativas Livres e PI-álgebras

Nessa seção estabeleceremos a noção de PI-álgebras e de álgebras associativas livres, objetos que principiam a PI-teoria, e, em razão disso, são essenciais no presente texto. Doravante, quando nos referirmos ao conjunto X, assumiremos que este é da forma $X=\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}$, e aos seus elementos chamaremos de *variáveis*. Uma *palavra* em X é entendida como sendo uma sequência finita $x_{i_1}...x_{i_n}$, onde $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ e $i_j\in\mathbb{N}$. Nesse contexto, diremos que n é o *tamanho* da palavra $x_{i_1}...x_{i_n}$. Se porém, for $n=0$, teremos a palavra vazia a qual será denotada por 1. Além disso, duas palavras $x_{i_1}...x_{i_n}$ e $x_{j_1}...x_{j_m}$ serão ditas iguais se $n=m$ e $i_1=j_1,...,i_n=j_n$.

Sejam K um corpo qualquer e $S(X)$ o conjunto de todas as palavras em X. Consideremos o $K-$espaço vetorial $K\langle X\rangle$ com base $S(X)$ (veja o Exemplo 5). Deveremos nos referir aos elementos de $K\langle X\rangle$ como *polinômios*, os quais têm a forma

$$f=\sum_{m\in S(X)}\alpha_m m, \text{ onde } \alpha_m\in K \text{ e } \{m\in S(X)\mid \alpha_m\neq 0\} \text{ é finito.}$$

Caso os $\alpha_m's$ sejam todos nulos, então diremos que f é o *polinômio nulo*. O coeficiente α_1 será denominado por *termo independente*. Quanto aos termos $\alpha_m m=\alpha_m x_{i_1}...x_{i_n}$, serão chamados de *monômios*, cujo grau é definido como sendo o tamanho n da palavra $x_{i_1}...x_{i_n}$. Aproveitando o ensejo, denotaremos por ∂f ou $\deg f$ o grau de f (não nulo), o qual será definido como sendo o máximo dos graus de seus monômios não nulos. Quando for necessário especificar, deveremos escrever $f(x_{i_1},...,x_{i_n})$ para significar que $x_{i_1},...,x_{i_n}$ são as variáveis que figuram nos monômios não nulos que constituem f, do contrário deveremos escrever apenas f.

Consideremos agora em $S(X)$ a operação de concatenação :

$$(x_{i_1}...x_{i_n})(x_{j_1}...x_{j_m})=x_{i_1}...x_{i_n}x_{j_1}...x_{j_m}.$$

Decorre da Observação 3 que $K\langle X\rangle$, munido da operação bilinear induzida por esta operação, é uma $K-$álgebra, a qual é associativa e possui a palavra vazia como elemento neutro multiplicativo (unidade).

Lema 3. *Consideremos A uma álgebra associativa e unitária, e $h : X \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer, isto é, para cada $x_i \in X$ tem-se que $h(x_i) = a_i$ para algum $a_i \in A$. Então a aplicação linear $\phi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que*

$$\phi(1) = 1_A \qquad e \qquad \phi(x_{i_1}...x_{i_n}) = a_{i_1}...a_{i_n}$$

é o único homomorfismo de álgebras que estende h, ou seja, ϕ_h é o único homomorfismo de álgebra a satisfazer $\phi_h\,|_X = h$

Demonstração. Primeiramente observemos que

$$\begin{aligned}\phi((x_{i_1}...x_{i_n})(x_{j_1}...x_{j_m})) &= \phi(x_{i_1}...x_{i_n}x_{j_1}...x_{j_m}) = a_{i_1}...a_{i_n}a_{j_1}...a_{j_m}\\ &= (a_{i_1}...a_{i_n})(a_{j_1}...a_{j_m}) = \phi(x_{i_1}...x_{i_n})\phi(x_{j_1}...x_{j_m}).\end{aligned}$$

Assim, ao assomar a esta consecução o fato de ϕ_h ser uma transformação linear com domínio no espaço vetorial $K\langle X\rangle$ com base em $S(X)$, obtemos que ϕ_h é um homomorfismo de álgebras. Quanto à unicidade de ϕ_h, se supormos a existência de outro homomorfismo de álgebras que estenda h, então eles irão coincidir na base $S(X)$ de $K\langle X\rangle$ e portanto serão iguais, uma vez que são transformações lineares. □

Observação 5. *Devido ao Lema 3, convém se referir a $K\langle X\rangle$ como* álgebra associativa livre unitária, *livremente gerada por X. Decursivamente, denotemos por $K_0\langle X\rangle$ o subconjunto de $K\langle X\rangle$ formado por todos os polinômios com termo constante nulo. Não é difícil ver que, em verdade, $K_0\langle X\rangle$ é o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ com base $S(X)-\{1\}$, e de forma mais completa temos que $K_0\langle X\rangle$ é uma subálgebra não unitária de $K\langle X\rangle$.*

De enunciado e demonstração semelhante ao Lema 3 temos o seguinte.

Lema 4. *Consideremos A uma álgebra associativa (não necessariamente unitária) e $h : X \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer, isto é, para cada $x_i \in X$ tem-se que $h(x_i) = a_i \in A$. Então existe um único homomorfismo de álgebras $\phi_h : K_0\langle X\rangle \longrightarrow A$ que estende h, isto é, ϕ_h é o único homomorfismo de álgebras a satisfazer $\phi_h\,|_X = h$.*

Diremos então que $K_0\langle X\rangle$ é *a álgebra associativa livre, livremente gerada por X.*

Observação 6. *A partir de agora, quando nos referirmos a uma álgebra A, esta irá significar uma álgebra associativa e unitária, salvo menção explicita em contrário.*

Consideremos A uma álgebra e $K\langle X\rangle$ a álgebra (associativa e unitária) livremente gerada por X. Então ao tomarmos $\phi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ o homomorfismo de álgebras que estende uma aplicação $h : X \longrightarrow A$ (ver Lema 3) e $f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio, observemos que

$$\phi_h(f(x_1, ..., x_n)) \;=\; f(\phi_h(x_1), ..., \phi_h(x_n)) = f(h(x_1), ..., h(x_n)),$$

e assim é oportuno denotar, simplesmente, por $f(a_1, ..., a_n)$ o elemento de A obtido ao substituirmos na variável x_j o elemento a_j (para $1 \leq j \leq n$) no polinômio f, o qual coincide com $\phi_h(f(x_1, ..., x_n))$.

Definição 7. *Sejam A uma álgebra e $f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio. Então, diremos que o polinômio $f(x_1, ..., x_n)$ (ou que a expressão $f(x_1, ..., x_n) = 0$) é uma* identidade polinomial *para A se $f(a_1, ..., a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A$.*

Notemos que se $f \in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial para uma certa álgebra A, então devemos ter $f \in K_0\langle X\rangle$.

Definição 8. *Seja A uma álgebra. Então dizemos que A é uma* PI-álgebra *se A admite alguma identidade polinomial não nula.*

Veremos alguns exemplos de álgebras com identidades polinomiais.

Exemplo 10. Seja A uma álgebra. Então, $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial para A se, e somente se, A é comutativa.

Exemplo 11. O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$, conhecido como *polinômio de Hall*, é uma identidade polinomial para $M_2(K)$. De fato, sejam A e B matrizes em $M_2(K)$. Recordemos que $tr(AB) = tr(BA)$, de modo que $tr[A, B] = 0$. Daí, $[A, B]$ deve ser do tipo

$$[A, B] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

com $a, b, c \in K$. Agora, observemos que

$$[A, B]^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & bc + a^2 \end{pmatrix} = (a^2 + bc)I.$$

Portanto, $[A, B]^2$ é múltipla da identidade, e assim $[A, B]^2 \in Z(M_2(K))$. Logo, $[[A, B]^2, C] = 0$ para qualquer $C \in M_2(K)$. Como A e B também são arbitrárias, auferimos que $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ é, de certo, uma identidade polinomial para $M_2(K)$.

Exemplo 12. O polinômio $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2][x_3, x_4]$ é uma identidade polinomial para a álgebra $U_2(K)$ das matrizes triangulares superiores 2×2 sobre K.

Exemplo 13. O polinômio

$$s_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)}$$

onde S_n denota o grupo simétrico de grau n e $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação σ, é conhecido como *polinômio Standard de grau n.* Em 1950, no artigo [1], foi provado que $s_{2m}(x_1, ..., x_{2m})$ é uma identidade polinomial da álgebra de matrizes $M_m(K)$, onde K é um corpo qualquer. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Amitsur-Levitzki.* Posteriormente, outras provas deste teorema foram dadas por vários autores.

Um fato também conhecido sobre a álgebra $M_m(K)$ é que ela não possui identidade polinomial de grau menor do que $2m$. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [6], capítulo 7.

1.4 T-Ideais e T-Espaços

As ideias de *T-espaço* e *T-ideal* são centrais no presente trabalho. No entanto, nesse primeiro momento, trataremos desse tema de maneira introdutória, apresentado definições e resultados básicos que serão requisitados no próximo capítulo, quando estudaremos de forma minuciosa, os chamados *T-espaço e T-ideal de Grassmann.* Veremos adiante, que o conceito de T-espaço é semelhante ao de *T-ideal*, essência da PI-teoria, não obstante, em um sentido mais geral, de modo que todo T-ideal é um T-espaço. A recíproca dessa sentença, entretanto, não é verdadeira. Sendo A uma álgebra, mostra-se que o conjunto $T(A)$, de todas as identidades polinomiais de A, é um T-ideal, daí a importância dos T-ideais na PI-teoria.

Definição 9. *Diremos que um subespaço V de $K\langle X\rangle$ é um* T-espaço *se V é invariante por todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$, isto é, $\phi(V) \subseteq V$ para todo ϕ endomorfismo de $K\langle X\rangle$. Se, além de subespaço, V é um ideal de $K\langle X\rangle$, então diremos que V é um* T-ideal.

Observação 7. *Seja $f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ e $g_1, ..., g_n \in K\langle X\rangle$ quaisquer. Definindo a aplicação $h : X \longrightarrow K\langle X\rangle$, pondo $h(x_i) = g_i$, e considerando o homomorfismo $\phi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle$ que estende h, temos que ϕ_h é um endomorfismo de $K\langle X\rangle$ e $\phi_h(f(x_1, ..., x_n)) = f(\phi_h(x_1), ..., \phi_h(x_n)) = f(g_1, ..., g_n)$, donde segue que um subespaço V de $K\langle X\rangle$ é um T-espaço se, e somente se*

$f(g_1,...g_n) \in V$ para todo $f(x_1,...x_n) \in V$ e quaisquer $g_1,...,g_n \in K\langle X\rangle$. Como veremos ao longo do presente texto essa propriedade tem grande importância do ponto de vista prático.

Exemplo 14. Sejam A uma álgebra e W um subespaço de A. Consideremos o conjunto

$$V = \{f(x_1,...,x_n) \in K\langle X\rangle \mid f(a_1,...,a_n) \in W \text{ para todo } a_1,...,a_n \in A\}.$$

Segue claramente da Observação 7 que V é um T-espaço.

Exemplo 15. Consideremos a álgebra $M_m(K)$ e o conjunto

$$V = \{f(x_1,...,x_n) \in K\langle X\rangle \mid tr(f(A_1,...,A_n)) = 0, \forall\ A_1,...,A_n \in M_m(K)\}.$$

Desde que tr (aplicação traço) é uma transformação linear, o seu núcleo é um subespaço, e logo, pelo exemplo anterior, V é um T-espaço.

Observação 8. *Sendo $\{V_\lambda\}_\lambda$ uma família de T-espaços de $K\langle X\rangle$, é sabido que $\cap_\lambda V_\lambda$ é um subespaço. Ademais, vemos com simplicidade que se ϕ é um endomorfismo qualquer de $K_0\langle X\rangle$ e $f \in \cap_\lambda V_\lambda$, então $f \in V_\lambda$ para cada λ, e, pelo fato dos $V_{\lambda's}$ serem T-espaços, auferirmos que $\phi(f) \in V_\lambda$ seja qual for o λ, e assim temos que $\phi(f) \in \cap_\lambda V_\lambda$, de forma a obtermos que $\cap_\lambda V_\lambda$ é, em verdade, um T-espaço.*

Em consonância com a Observação 8, é pertinente definir o *T-espaço gerado por um subconjunto S* de $K\langle X\rangle$ como sendo a intersecção de todos os T-espaços de $K\langle X\rangle$ que contêm S. Iremos denotar o T-espaço gerado pelo subconjunto S por $\langle S\rangle^{TE}$. Ademais, quando tivermos um polinômio $f \in \langle S\rangle^{TE}$ devemos usar a seguinte expressão: f *segue* ou f *é consequência* de S.

O que podemos observar diretamente da definição de $\langle S\rangle^{TE}$ é o fato deste ser o menor T-espaço de $K\langle X\rangle$ que contém S. No entanto, do ponto de vista prático, essa afirmação não é de grande relevância, mas de sorte que o resultado apresentado no próximo lema o será.

Lema 5. *Seja S um subconjunto de $K\langle X\rangle$. Então, o T-espaço $\langle S\rangle^{TE}$ coincide precisamente com o subespaço vetorial V de $K\langle X\rangle$ gerado pelo subconjunto*

$$B = \{f(g_1,...,g_n) \mid f \in S,\ g_1,...,g_n \in K\langle X\rangle\}.$$

Demonstração. Sejam $f(x_1, ..., x_n) \in S$ e $g_1, ..., g_n \in K\langle X\rangle$. Sendo $\langle S\rangle^{TE}$ um T-espaço e $S \subseteq \langle S\rangle^{TE}$, segue da Observação 7 que $f(g_1, ..., g_n) \in \langle S\rangle^{TE}$, donde $V \subseteq \langle S\rangle^{TE}$. Reciprocamente, basta notar que V é um T-espaço de $K\langle X\rangle$ e que $S \subseteq B \subseteq V$. Segue daí que $\langle S\rangle^{TE} \subseteq V$. □

Definição 10. *Consideremos A uma álgebra com centro não trivial e $f(x_1, ..., x_n)$ um polinômio em $K\langle X\rangle$. Diremos que $f(x_1, ..., x_n)$ é um* polinômio central *para a álgebra A se:*

1. *$f(a_1, ..., a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A$.*

2. *$f(x_1, ..., x_n)$ não é uma identidade polinomial para A.*

3. *$f(x_1, ..., x_n)$ tem termo constante nulo.*

Denotaremos por $C(A)$ o menor T-espaço que contém os elementos $\lambda.1$ ($\lambda \in K$), os polinômios centrais e as identidades polinomiais de A. Não é difícil ver que

$$C(A) = \{f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle \mid f(a_1, ..., a_n) \in Z(A)\, para\, todo\, a_1, ..., a_n \in A\}.$$

Portanto, segue do Exemplo 14 que $C(A)$ é um T-espaço tal que $T(A) \subseteq C(A)$. Assim, sendo A uma PI-álgebra, o T-espaço $C(A)$ contém um T-ideal não nulo, o que nem sempre é verdadeiro para um T-espaço qualquer como veremos no 3º capítulo.

Recordemos agora que, quando A é uma álgebra associativa então o $Z(A)$ é uma subálgebra de A, isto é, $Z(A)$ é um subespaço fechado à multiplicação. Por esta razão, segue, diretamente da definição, que $C(A)$ é fechado à multiplicação. No entanto, nem todo T-espaço possui essa propriedade, basta observar, usando $x_1 = E_{12} - E_{21}$ e $x_2 = E_{22}$, que no Exemplo 15, $[x_1, x_2]^2 \notin V$. Na seção seguinte, no caso especial do corpo base ser infinito, mostraremos que todo T-espaço "absorve" comutadores.

Entre os exemplos mais importantes de T-espaço estão os T-ideais, os quais passaremos a tratar com a merecida ênfase.

Segue claramente da definição que todo T-ideal é um T-espaço, de modo que todas as propriedades válidas para T-espaços também devem ser válidas para T-ideais. Contudo, para evitar redundâncias, algumas serão omitidas, devendo ficar subtendidas. Pelo grau de importância, enunciaremos os dois resultados seguintes cujas demonstrações são similares às do caso de T-espaço e por isso serão exclusas.

Teorema 1. *Seja I um ideal em $K\langle X\rangle$. Então, I é um T-ideal se, e somente se, $f(g_1, ...g_n) \in I$ para todo $f(x_1, ...x_n) \in I$ e quaisquer $g_1, ..., g_n \in K\langle X\rangle$.*

Observemos que a mesma analogia feita na Observação 8 pode ser feita para T-ideais. Também de modo análogo a T-espaços, definimos o *T-ideal gerado por um subconjunto* S de $K\langle X\rangle$, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a intersecção de todos os T-ideais de $K\langle X\rangle$ que contêm S. Assim como para T-espaços, $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal de $K\langle X\rangle$ que contém S.

Lema 6. *Seja S um subconjunto de $K\langle X\rangle$. Então, o $T-$ideal $\langle S\rangle^T$ coincide precisamente com o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelo subconjunto*

$$\{h_1f(g_1,...,g_n)h_2 \mid f\in S, h_1,h_2,g_1,...,g_n\in K\langle X\rangle\}.$$

Observação 9. *Notemos que de acordo com a lema anterior e o Lema 5, auferimos que se J é um T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por um conjunto S, então J é exatamente o T-espaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto*

$$S_1=\{x_{n+1}f(x_1,...,x_n)x_{x+2}\mid f\in S\}.$$

Nessas condições, uma vez encontrado um conjunto gerador, como T-ideal, para J, automaticamente, encontra-se um conjunto gerador de J como T-espaço.

Seja A uma álgebra. Não é difícil notar que a soma de identidades polinomiais de A é ainda uma identidade polinomial de A, e que o produto de uma identidade polinomial de A por um polinômio qualquer de $K\langle X\rangle$ ou por um escalar qualquer de K é também uma identidade polinomial de A. Diante disso, temos que o conjunto das identidades polinomiais de A é um ideal de $K\langle X\rangle$, o qual é denotado por $T(A)$. Portanto, dizer que A é uma PI-álgebra é equivalente a dizer que o ideal $T(A)$ é diferente $\{0\}$. Como veremos adiante, o ideal $T(A)$ é, em verdade, um T-ideal, o qual tem propriedades que se tornam ferramentas importantes para responder questões, de forma geral, da própria álgebra A. Dissertaremos um pouco sobre o ideal $T(A)$.

Lema 7. *Sejam A_1 e A_2 álgebras e $\phi: A_1\longrightarrow A_2$ um homomorfismo sobrejetivo de álgebras. Então $T(A_1)\subseteq T(A_2)$.*

Demonstração. Sejam $f(x_1,...,x_n)\in T(A_1)$ e $b_1,...,b_n$ elementos arbitrários em A_2. Pela sobrejetividade de ϕ, podemos tomar $a_1,...,a_n\in A_1$ tais que $\phi(a_i)=b_i$. Assim, $f(b_1,...,b_n)=f(\phi(x_1),...,\phi(x_n))=\phi(f(a_1,...,a_n))=0$ e o resultado segue. $\square$

Definição 11. *Sejam A_1 e A_2 álgebras. Dizemos que estas são PI-equivalentes se $T(A_1)=T(A_2)$.*

Observação 10. *Observemos que segue do Lema 7 que duas álgebras quaisquer isomorfas são PI-equivalentes. No entanto, a recíproca deste resultado não é verdadeira, pois, como veremos adiante, duas álgebras comutativas quaisquer (unitárias e com 1 diferente de 0) sobre um corpo infinito são PI-equivalentes. Não obstante, notemos que* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *são* $\mathbb{R}-$*álgebras comutativas não isomorfas, já que possuem dimensões 1 e 2, respectivamente.*

Proposição 2. *Sejam* A *uma álgebra,* B *uma subálgebra e* I *um ideal de* A*. Então, temos:*

1. $T(A) \subseteq T(B)$.
2. $T(A) \subseteq T(A/I)$.

Por sua simplicidade, dispensamos a demonstração da proposição anterior. Em verdade, é profícuo salientar que as inclusões de ambos os itens, podem ser próprias. No tocante ao primeiro item, consideremos o seguinte exemplo: seja K um corpo de ordem p (primo) e F uma extensão de K de ordem p^2. Temos que K e F, vistas como K-álgebras, são associativas, comutativas e unitárias. Com efeito, não é difícil ver que o polinômio $f(x) = x^p - x$ é uma identidade de K, mas não é de F, e portanto $T(F) \subsetneq T(K)$. Agora, tomemos uma PI-álgebra A de modo que $T(A) \neq K_0\langle X\rangle$ e $I = A$, logo $K_0\langle X\rangle = T(A/I)$, e assim também constatamos que a inclusão no segundo item também pode ser próprias.

Teorema 2. *Seja* A *uma álgebra. Então,* $T(A)$ *é a interseção dos núcleos de todos os homomorfismos de álgebras de* $K\langle X\rangle$ *em* A*.*

Demonstração. Efetivamente, tomemos

$$J = \bigcap Ker\phi$$

tal que ϕ é um homomorfismo de $K\langle X\rangle$ em A. Notemos que se $f(x_1, ..., x_n) \in T(A)$ e $\phi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ é um homomorfismo, então $\phi(f(x_1, ..., x_n)) = f(\phi(x_1), ..., \phi(x_n)) = 0$, já que $f(a_1, ..., a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A$, e assim temos que $f(x_1, ..., x_n) \in Ker\phi$. Como ϕ é arbitrário, obtemos que $f(x_1, ..., x_n) \in J$ e portanto $T(A) \subseteq J$. Reciprocamente, seja $f(x_1, ..., x_n) \in J$. Consideremos $a_1, ..., a_n$ quaisquer e $h : X \longrightarrow A$ tal que $h(x_i) = a_i$. Agora, tomando $\phi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ o homomorfismo que estende h, temos $f(x_1, ..., x_n) \in J \subseteq Ker\phi_h$, donde

$$0 = \phi_h(f(x_1, ..., x_n)) = f(\phi_h(x_1), ..., \phi_h(x_n) = f(a_1, ..., a_n).$$

Como $a_1, ..., a_n$ são arbitrários, segue o resultado. □

Proposição 3. *Seja A uma álgebra. Então $T(A)$ é um $T-$ideal de $K\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um $T-$ideal de $K\langle X\rangle$, então existe uma álgebra B de tal modo que $T(B) = I$.*

Demonstração. Sejam $f(x_1, ..., x_n) \in T(A)$ e $\phi \in EndK\langle X\rangle$ fixos, mas arbitrários. Consideremos ψ um homomorfismo de $K\langle X\rangle$ em A também arbitrário. Como $\psi \circ \phi$ também é um homomorfismo de $K\langle X\rangle$ em A, segue que $T(A) \subseteq Ker(\psi \circ \phi)$, e assim $0 = (\psi \circ \phi)(f) = \psi(\phi(f))$, donde, $\phi(f) \in Ker\psi$, e o resultado segue, já que ψ é arbitrário (vide Teorema 2).

Reciprocamente, consideremos a álgebra quociente $B = K\langle X\rangle/I$. Logo, se $f(x_1, ..., x_n) \in I$ e $\overline{g_1}, ..., \overline{g_n} \in B/I$ são elementos quaisquer, temos $f(\overline{g_1}, ..., \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, ..., g_n)} = \overline{0}$. Essa última igualdade segue do Teorema 1. Desse modo, temos que $f(x_1, ..., x_n) \in T(B)$, e portanto $I \subseteq T(B)$. Para a inclusão contrária, usemos a projeção canônica

$$\begin{array}{rcl} \pi : K\langle X\rangle & \longrightarrow & B = K\langle X\rangle/I \\ f & \longmapsto & \pi(f) = \overline{f} \end{array}.$$

Desde que π é um homomorfismo de álgebras, segue do Teorema 2 que $T(B) \subseteq \ker \pi = I$, o que conclui a nossa demonstração. □

É oportuno enfatizar que essa última proposição não pode ser generalizada aos T-espaços. Veremos no capítulo 3 que não pode existir uma álgebra A de modo que $S^2 = C(A)$, onde $S^2 = \langle [x_1, x_2]\rangle^{TE}$.

Observação 11. *As ideias de T-espaços e T-ideais em $K_0\langle X\rangle$ são análogas às que foram apresentadas acima sobre a álgebra não unitária $K\langle X\rangle$, de modo a valer, com os devidos ajustes, as mesmas propriedades que já foram exibidas anteriormente. Dentre estas, temos que se A é uma álgebra associativa (não necessariamente unitária), então $T(A)$ também é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$.*

Seja A uma álgebra. A um subconjunto $S \subseteq T(A)$ tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$ chamaremos de *base das identidades polinomiais de A*. Como enfatizado na introdução, o problema da existência de uma base finita do $T-$ideal $T(A)$ de uma álgebra associativas, quando o corpo tem característica 0 (zero) (que é o caso preponderante no presente trabalho), é conhecido como *problema de Specht*, ao qual Kemer deu uma solução positiva (veja [11] e [12]). Todavia, quanto à descrição de tal base, de modo geral, ainda é um problema em aberto.

1.5 Polinômios Multi-homogêneos e Multilineares

No estudo da PI-teoria, os polinômios multi-homogêneos e multilineares desenvolvem um papel muito importante e, por esta razão, dediquemos essa seção ao estudo desses polinômios. Veremos adiante que, sob certas condições, esses polinômios podem gerar T-ideais e T-espaços.

Definição 12. *Sejam* $m \in K\langle X\rangle$ *um monômio (não nulo),* $f \in K\langle X\rangle$ *um polinômio (não nulo) e* $x_i \in X$ *uma variável. Então, definimos:*

1. *O grau de* m *em* x_i*, denotado por* $\deg_{x_i} m$*, como sendo o número de ocorrências de* x_i *em* m*.*

2. *O grau de* f *em* x_i*, denotado por* $\deg_{x_i} f$*, como sendo o máximo dos graus em* x_i *de seus monômios não nulos.*

Definição 13. *Diremos que um polinômio (não nulo)* $f \in K\langle X\rangle$ *é* homogêneo em x_i *se todos os seus monômios não nulos têm o mesmo grau em* x_i*. Se particularmente tivermos* $\deg_{x_i} f = 1$*, então diremos que* f é linear em x_i.

Definição 14. *Diremos que um polinômio (não nulo)* $f \in K\langle X\rangle$ *é* multi-homogêneo *se* f *for homogêneo em todas as suas variáveis, se em especial tivermos que* f *é linear em cada uma de suas variáveis, então diremos que* f é multilinear.

Observação 12. *Seja* $f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ *um polinômio multi-homogêneo. Então, definimos o* multigrau de f *como sendo a* $n-$*upla* $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ *tal que* $a_j = \deg_{x_j} f$*. Denotando por* $h_{(a_1,...,a_n)}$ *a soma de todos os monômios de* f *com um dado multigrau fixo* $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}_0^n$*, é de fácil percepção que o polinômio* $h_{(a_1,...,a_n)}$ *é multi-homogêneo e que* $f = \sum_{(a_1,...,a_n)\in\mathbb{N}_0^n} h_{(a_1,...,a_n)}$*. Assim, obtemos que* f *pode ser escrito como sendo uma soma de polinômios multi-homogêneos. A cada polinômio* $h_{(a_1,...,a_n)}$ *nos referimos como sendo a* componente multi-homogênea *de* f *de multigrau* $(a_1, ..., a_n)$*. Diante disso, auferimos que* f *é um polinômio multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea.*

Exemplo 16. *O polinômio*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 3x_1x_2x_3 + 4x_2x_1 + x_1x_2x_3x_2 - x_2^2x_1x_3$$

é homogêneo apenas em x_1 *e suas componentes multi-homogêneas são:* $h_{(1,1,0)} = 2x_1x_2 + 4x_2x_1$*,* $h_{(1,1,1)} = -3x_1x_2x_3$ *e* $h_{(1,2,1)} = x_1x_2x_3x_2 - x_2^2x_1x_3$*. Ademais,*

$$f = h(1, 1, 0) + h(1, 1, 1) + h(1, 2, 1).$$

Exemplo 17. *O polinômio de Hall do Exemplo 11 é multi-homogêneo de multigrau* $(2,2,1)$ *pois, ao expandir aquele polinômio, temos*

$f(x_1,x_2,x_3) = [[x_1,x_2]^2,x_3] = x_1x_2x_1x_2x_3 - x_1x_2^2x_1x_3 - x_2{x^2}_1x_2x_3 + x_2x_1x_2x_1x_3 - x_3x_1x_2x_1x_2 + x_3x_1x_2^2x_1 + x_3x_2x_1^2x_2 - x_3x_2x_1x_2x_1$.

Exemplo 18. *O polinômio* $f(x_1,x_2) = [x_1,x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ *é um polinômio multilinear de grau* 2. *Mais geralmente, se* $x_{i_1},...,x_{i_n}$ *são variáveis distintas e* $n \geq 2$, *então o polinômio* $f(x_{i_1},...,x_{i_n}) = [x_{i_1},...,x_{i_n}]$ *é um polinômio multilinear de grau igual ao tamanho do comutador, isto é,* n.

Quando se quer mostrar que um dado polinômio é uma identidade polinomial para uma certa álgebra, geralmente tomamos elementos arbitrários da álgebra em questão e efetuamos os cálculos. Porém, veremos no próximo lema que esse trabalho se reduz aos elementos de uma base, caso o candidato a identidade polinomial seja multilinear.

Lema 8. *Sejam* $f(x_1,...,x_n) \in K\langle X\rangle$ *um polinômio multilinear,* A *uma álgebra e* β *um subconjunto que gera* A *(como espaço vetorial). Então, é uma identidade polinomial para* A *se, e somente se,* $f(u_1,...,u_n) = 0$, *para quaisquer* $u_1,...,u_n \in \beta$.

Demonstração. Sendo $f(x_1,...,x_n)$ é uma identidade polinomial para A, então é claro que $f(u_1,...,u_n) = 0$, para quaisquer $u_1,...,u_n \in \beta$. Reciprocamente, tomemos $a_1,...,a_n$ elementos fixos, mas arbitrários em A. Escrevendo $\beta = \{u_i \mid i \in I\}$, então, para cada $i = 1,...,n$, tem-se $a_i = \sum_{j_i \in I} \lambda_{ij_i} u_{j_i}$ com $\lambda_{ij_i} \in K$ (quase todos nulos). Temos então, pela multilinearidade de f, que

$$\begin{aligned} f(a_1,...,a_n) &= f\big(\sum_{j_1\in I} \lambda_{1j_1}u_{j_1},...,\sum_{j_n\in I}\lambda_{nj_n}u_{j_n}\big) \\ &= \sum_{j_1\in I}...\sum_{j_n\in I}\lambda_{1j_1}...\lambda_{nj_n} f(u_{j_1},...,u_{j_n}) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x_1,...,x_n) \in T(A)$. □

Exemplo 19. Os polinômios

$$f(x_1,x_2,x_3) = [x_1,x_2,x_3] \qquad\qquad e$$

$$g(x_1,...,x_{2k}) = [x_1,x_2]...[x_{2k-1},x_{2k}] - (-1)^{\sigma}[x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)}]...[x_{\sigma(2k-1)},x_{\sigma(2k)}]$$

onde $\sigma \in S_{2k}$, são identidades polinomiais da álgebra exterior E do Exemplo 4. De fato, notemos que

$$\begin{aligned} [e_{i_1}...e_{i_k}, e_{j_1}...e_{j_m}] &= e_{i_1}...e_{i_k}e_{j_1}...e_{j_m} - e_{j_1}...e_{j_m}e_{i_1}...e_{i_k} \\ &= e_{i_1}...e_{i_k}e_{j_1}...e_{j_m} - (-1)^{mk}e_{i_1}...e_{i_k}e_{j_1}...e_{j_m}. \end{aligned}$$

Logo, se m ou k for par temos que $[e_{i_1}...e_{i_k}, e_{j_1}...e_{j_m}] = 0$. Por outro lado, se m e k forem ímpares, então $[e_{i_1}...e_{i_k}, e_{j_1}...e_{j_m}] = 2e_{i_1}...e_{i_k}e_{j_1}...e_{j_m} \in E_0$, já que $m + k$ é par. Nessas condições, como o comutador é bilinear, temos que $[a, b] \in E_0 = Z(E)$ para quaisquer $a, b \in E$, e assim obtemos que $[[a, b], c] = 0$ para quaisquer $a, b, c \in E$, implicando que $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade para a álgebra exterior.

Quanto a g, comecemos por tomar $b_1, ..., b_{2k} \in E_0$ e $c_1, ..., c_{2k} \in E_1$ elementos arbitrários. Notemos que $[b_l, c_i] = 0$ para quaisquer $l, i \in \{1, ..., 2k\}$, e assim auferimos que qualquer substituição em g por elementos do conjunto $\{b_1, ..., b_{2k}, c_1, ..., c_{2k}\}$ que contenha algum b_l numa das entradas de g deve ser nula. Portanto, segue dessa última obtenção, da multilinearidade de g e da bilinearidade do comutador que basta mostrarmos que $g(c_1, ..., c_{2k}) = 0$ para obtermos, segundo o lema anterior, que g é uma identidade polinomial para a álgebra exterior E (lembremos que $E_0 \cup E_1$ gera E como espaço vetorial). De fato, notemos que

$$\begin{aligned} g(c_1, ..., c_{2k}) &= [c_1, c_2]...[c_{2k-1}, c_{2k}] - (-1)^\sigma [c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}]...[c_{\sigma(2k-1)}, c_{\sigma(2k)}] \\ &= 2^k \big(c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k} - (-1)^\sigma c_{\sigma(1)}c_{\sigma(2)}...c_{\sigma(2k-1)}c_{\sigma(2k)}\big) \end{aligned}$$

observando que $c_lc_i = -c_ic_l$ para quaisquer $i, l \in \{1, ..., 2k\}$. Assim, se σ fosse uma transposição então

$$c_{\sigma(1)}c_{\sigma(2)}...c_{\sigma(2k-1)}c_{\sigma(2k)} = -c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k}.$$

Como, para todo efeito, σ é um produto de transposições, temos que se na composição de σ tem uma quantidade par de transposições, então

$$c_{\sigma(1)}c_{\sigma(2)}...c_{\sigma(2k-1)}c_{\sigma(2k)} = c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k}$$

e, sobretudo, σ é par, isto é, $(-1)^\sigma = 1$, e assim

$$2^k \big(c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k} - (-1)^\sigma c_{\sigma(1)}c_{\sigma(2)}...c_{\sigma(2k-1)}c_{\sigma(2k)}\big) = 0.$$

Por outro lado, supondo que na composição de σ apareça uma quantidade ímpar de transposições, então

$$c_{\sigma(1)}c_{\sigma(2)}...c_{\sigma(2k-1)}c_{\sigma(2k)} = -c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k}$$

e, sobretudo, σ é ímpar, ou seja, $(-1)^\sigma = -1$, e assim também temos

$$2^k \big(c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k} - (-1)^\sigma c_{\sigma(1)}c_{\sigma(2)}...c_{\sigma(2k-1)}c_{\sigma(2k)}\big) = 0.$$

E o resultado segue.

Exemplo 20. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A é uma álgebra de dimensão menor do que n. Então o polinômio standard

$$s_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)}$$

é uma identidade polinomial para A. De fato, comecemos por tomar β uma base para A. Então, se $u_1, ..., u_n$ são elementos arbitrários em β, devem existir $i \neq j$ tais que $u_i = u_j$. Agora, consideremos $\theta = (i\ j) \in S_n$. Temos que $S_n = A_n \cup \theta A_n = A_n \cup \{\theta\sigma \mid \sigma \in A_n\}$, onde $A_n = \{\mu \in S_n \mid \mu \text{ é par }\}$. Ajuntando, os dois fatos obtidos, temos que

$$\begin{aligned} s_n(u_1, ..., u_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma u_{\sigma(1)} ... u_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^\sigma u_{\sigma(1)} ... u_{\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^{\theta\sigma} u_{\theta\sigma(1)} ... u_{\theta\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} u_{\sigma(1)} ... u_{\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} u_{\theta\sigma(1)} ... u_{\theta\sigma(n)} = 0 \end{aligned}$$

uma vez que $u_{\theta\sigma(k)} = u_{\sigma(k)}$ para todo k, já que o caso a ser observado é quando $\sigma_(k) = i, j$, mas, neste caso, temos $u_{\theta(j)} = u_i = u_j = u_{\theta(i)}$. Portanto, segue do Lema 8 que o resultado, proclamado como tese, é verdadeiro.

Denotando por P o conjunto de todos os polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$, tem-se claramente que P é um subespaço de vetorial de $K\langle X\rangle$. Além disso, sendo $x_1, ..., x_n \in X$, observemos que o conjunto de todos os polinômios multilineares nessas variáveis é um subespaço vetorial de P o qual denotamos por P_n. Além disso, reparemos que o conjunto

$$\{x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

é uma base para P_n, donde segue que $\dim(P_n) = n!$. Nessas circunstâncias convém escrever um polinômio multilinear nas variáveis $x_1, ..., x_n$ da forma

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)}.$$

O subespaço P_n é basilar no estudo das chamadas *codimensões* e será de fundamental importância nos próximos capítulos. Quando necessário, devemos escrever $P_n(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ para significar o espaço dos polinômios multilineares nas variáveis (distintas) $x_{i_1}, ..., x_{i_n} \in X$, do contrário, escreveremos simplesmente P_n. Ademais, sendo V um subespaço de $K\langle X\rangle$, então devemos escrever

V_n e $V_n(x_{i_1},...,x_{i_n})$ para significar, respectivamente, os subespaços $V \cap P_n$ e $V \cap P_n(x_{i_1},...,x_{i_n})$.

Um fato interessante envolvendo as PI-álgebras e o espaço vetorial P_n é que dada A uma PI-álgebra sobre um corpo qualquer, então $T(A) \cap P_n \neq \{0\}$ para algum $n \geq 2$, em outras palavras, toda PI-álgebra possui uma identidade multilinear não nula, e esse fato segue diretamente como corolário do próximo teorema.

Teorema 3. *Seja K um corpo qualquer e V um T-espaço não nulo de $K\langle X\rangle$. Então, tem-se que V possui algum polinômio multilinear não nulo.*

Demonstração. Ansiando a organização dessa demonstração, a faremos em três passos:

I) Como o primeiro dos passos, consideremos um monômio da forma

$$m(x_1,...,x_k) = m_0 x_1 m_1 x_1 ... m_{n-1} x_1 m_n,$$

onde cada m_i é uma palavra (possivelmente vazia) nas variáveis $x_2,...,x_k$ e $\deg_{x_1} m = n > 1$. Perceba que

$$m^{'}(x_1,...,x_k,x_{k+1}) = m(x_1+x_{k+1},...,x_k) - m(x_{k+1},...,x_k) - m(x_1,...,x_k)$$

é um polinômio não nulo tal que $\deg_{x_1} m^{'} = n-1 = \deg_{x_{k+1}} m^{'}$.

II) Nesse segundo momento, tomemos $f(x_1,...,x_k) \in K\langle X\rangle$ um polinômio, não nulo, tal que $\deg_{x_1} f = n > 1$. Consideremos $f_j(x_1,...,x_k)$ como sendo a soma de todos os monômios de f de grau j em x_1, para cada $0 \leq j \leq n$ (f_j é chamado de *componente homogênea de grau j em x_1 de f*). Observemos que $f = f_0 + f_1 + ... + f_n$ e que cada f_j é um polinômio homogêneo em x_1 de grau j. Perceba que

$$\begin{aligned}
g(x_1,...,x_k,y_1) &= f(x_1+y_1,x_2,...,x_k) - f(y_1,x_2,...,x_k) \\
&- f(x_1,x_2,...,x_k) \\
&= [f_0(x_1+y_1,x_2,...,x_k) + ... + f_n(x_1+y_1,x_2,...,x_k)] \\
&- [f_0(y_1,x_2,...,x_k) + f_n(y_1,x_2,...,x_k)] \\
&- [f_0(x_1,x_2,...,x_k) + ... + f_n(x_1,x_2,...,x_k)] \\
&= [f_0(x_1+y_1,x_2,...,x_k) - f_0(y_1,x_2,...,x_k) \\
&- f_0(x_1,x_2,...,x_k)] + ... + [f_n(x_1+y_1,x_2,...,x_k) \\
&- f_n(y_1,x_2,...,x_k) - f_n(x_1,x_2,...,x_k)]
\end{aligned}$$

Pelo primeiro passo, para os $j > 1$, cada monômio de

$$[f_j(x_1+y_1,x_2,...,x_k) - f_j(y_1,x_2,...,x_k) - f_j(x_1,x_2,...,x_k)]$$

tem grau $j-1$ em x_1 e y_1, e assim cada f_j tem grau $j-1$ em x_1 e y_1. Consequentemente, g tem grau $n-1$ em x_1 e y_1, e assim pela Observação 7, tem-se que $g \in I$. Repetindo esse processo quantas vezes for necessário, obteremos um polinômio linear em x_1 que pertence a I.

III) Por último, seja $f(x_1,..,x_k) \in I$. Usando a Observação 7, basta repetir o processo mostrado nos passos (I) e (II) quantas vezes for necessário em cada variável x_j, tal que $\deg_{x_j} f > 1$, para obter o resultado exaltado como tese.

$\square$

Veremos posteriormente que, quando o corpo em questão tem característica zero, que é o caso imperante no presente trabalho, um $T-$ideal, ou mais geralmente, um T-espaço é, em verdade, gerado pelos seus polinômios multilineares.

Por hora, supondo $charK = 0$, vamos ao fato apreciável a respeito de um polinômio homogêneo qualquer $f(x_1,...,x_n) \in K\langle X\rangle$ em que, através de substituições convenientes, podemos obtê-lo como consequência de polinômios lineares, em um processo de nome sugestivo chamado *linearização*, o qual passamos a descrever.

Seja $f(x_1,...,x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio multi-homogêneo de grau $m \geq 2$ em x_1. Tomemos y_1 e y_2 variáveis distintas de $x_2,...,x_n$ e consideremos o polinômio $h(y_1,y_2,x_2,...,x_n) = f(y_1+y_2,x_2,...,x_n)$. Agora observemos que sendo $h_1(y_1,y_2,x_2,...,x_n)$ a componente homogênea de grau 1 em y_1 do polinômio $h(y_1,y_2,x_2,...,x_n)$, tem-se claramente que $\deg_{y_2} h_1 = m-1$ e que $h_1(y_1,y_2,x_2,...,x_n)$ é multi-homogêneo. Além disso, notemos que $h_1(x_1,x_1,x_2,...,x_n) = mf(x_1,...,x_n)$. Se tivermos, pois, que o grau de $h_1(y_1,y_2,x_2,...,x_n)$ em y_2 é 1, então obtemos um polinômio nas variáveis $y_1,y_2,x_2,...,x_n$ e linear em y_1 e y_2, do qual f pode ser obtido a menos de um múltiplo da unidade do corpo em questão. Se porém, o grau de $h_1(y_1,y_2,x_2,...,x_n)$ em y_2 não for 1, então repitamos o mesmo processo, apresentado anteriormente, quantas vezes o for necessário, até obtermos um polinômio nas variáveis $y_1,y_2,...,y_t,x_2,...,x_n$ (duas a duas distintas) e linear nas variáveis $y_1,y_2,...,y_t$, do qual se pode obter f (a menos de um múltiplo da unidade do corpo em questão). Usando essa mesma técnica nas variáveis $x_2,...,x_n$, de certo, obteremos um polinômio multilinear, do qual podemos obter f (a menos de um múltiplo da unidade do corpo em questão).

Para melhor assimilação desse processo, vamos a um exemplo.

Exemplo 21. *Linearizemos o seguinte polinômio* $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3x_2x_3 + x_1x_2x_3x_1$. Temos,

$$
\begin{aligned}
& h(y_1, y_2, x_2, x_3) = (y_1 + y_2)^3 x_2 x_3 + (y_1 + y_2) x_2 x_3 (y_1 + y_2) \\
= \; & (y_1^3 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2 y_1 + y_1 y_2^2 + y_2 y_1^2 + y_2 y_1 y_2 + y_2^2 y_1 + y_2^3) x_2 x_3 \\
+ \; & y_1 x_2 y_1 x_3 y_1 + y_1 x_2 y_1 x_3 y_2 + y_1 x_2 y_2 x_3 y_1 + y_1 x_2 y_2 x_3 y_2 \\
+ \; & y_2 x_2 y_1 x_3 y_1 + y_2 x_2 y_1 x_3 y_2 + y_2 x_2 y_2 x_3 y_1 + y_2 x_2 y_2 x_3 y_2
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
h_1(y_1, y_2, x_2, x_3) &= (y_1 y_2^2 + y_2 y_1 y_2 + y_2^2 y_1) x_2 x_3 + y_1 x_2 y_2 x_3 y_2 \\
&+ y_2 x_2 y_1 x_3 y_2 + y_2 x_2 y_2 x_3 y_1.
\end{aligned}
$$

Ademais, notemos que

$$
h_1(x_1, x_1, x_2, x_3) = 3(x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_1) = 3f(x_1, x_2, x_3)
$$

Observemos que o polinômio $h_1(y_1, y_2, x_2, x_3)$ é linear em y_1, x_2 e x_3 . Repetindo esse processo, em y_2, obtemos um polinômio multilinear do qual f pode ser obtido (a menos de um múltiplo da unidade do corpo em questão).

Observação 13. *Recordemos do salientado na Observação 12 que todo polinômio pode ser expresso como soma de polinômios multi-homogêneos. Ajuntando esse fato ao processo de linearização, apresentado anteriormente, auferimos que todo polinômio pode ser linearizado.*

Ainda em acrescência à Observação 12, mostraremos na proposição seguinte que se o corpo base for infinito, então qualquer T-espaço de $K\langle X\rangle$ é gerado por seus polinômios multi-homogêneos. Veremos a posteriori que esse fato será de grande ajuda no sentido prático da questão.

Proposição 4. *Seja V um T-espaço de $K\langle X\rangle$ e $f(x_1, ..., x_m)$ um polinômio qualquer em V. Suponha que K é infinito. Então cada componente multi-homogênea de f pertence a V (dizemos então que V é multi-homogêneo). Consequentemente, V é gerado pelos seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração. Seja $n = \deg_{x_1} f$. Para cada $j = 0, 1, .., n$, tomemos f_j como sendo a componente de f de grau j em x_1. Daí, $f = f_0 + f_1 + ... + f_n$. Agora, escolhamos $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ dois a dois distintos em K. Isso é possível, pois K, por hipótese, é infinito. Notemos que, para cada $j = 0, 1, .., n$, temos

$$
g_j = f(\lambda_j x_1, ..., x_m) = f_0 + \lambda_j f_1 + \lambda_j^2 f_2 + ... + \lambda_j^n f_n,
$$

donde

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \cdots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

A primeira das matrizes é conhecida como *matriz de Vandermonde* e é invertível. Portanto, temos

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \cdots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},$$

e assim cada f_j pode ser obtida como combinação linear das $g_i's$. Por outro lado, cada g_i pertence a V, já que é obtida por uma substituição em $f \in V$ e V é um T-espaço. Logo podemos concluir que cada componente f_j pertence a V. Observemos que cada f_j é homogêneo em x_1. Repetindo o mesmo processo, agora na variável x_2 em cada f_j, obtemos que as componentes homogêneas de f_j em x_2 pertencem a V. Seguindo esse esquema, claramente, obteremos que cada componente multi-homogênea de f pertence a V. Ademais, pela Observação 12, f é soma de suas componentes multi-homogêneas, e consequentemente concluímos que V é gerado por seus polinômios multi-homogêneos. □

Observação 14. *Destacamos, na proposição anterior, válida também para T-ideais, a necessidade da infinitude do corpo para legitimidade da tese, também para T-ideais. Porquanto, se tomarmos K um corpo de ordem p e considerarmos K como uma K-álgebra, temos que $f(x) = x^p - x \in T(K)$. No entanto, claramente, tem-se que $x^p, x \notin T(K)$ ($T(K)$ é T-ideal, consequentemente T-espaço).*

Como incitado na Observação 10, veremos agora, à luz da Proposição 4, que todas PI-álgebras comutativas e unitárias sobre um corpo infinito são PI-equivalentes.

Exemplo 22. *Consideremos K um corpo infinito. Supondo que A é uma $K-$álgebra comutativa e unitária qualquer, então $I = \langle [x_1, x_2] \rangle^T = T(A)$.* É fato conhecido que $[x_1, x_2] \in T(A)$, e logo $I \subseteq T(A)$. Observemos agora que $T(A)$ é gerado por seus polinômios multi-homogêneos, já que K é infinito, e assim basta mostrar que todo polinômio multi-homogêneo de $T(A)$ pertence a I, para termos a inclusão contrária. Seja, pois, $f(x_1, ..., x_n) \in T(A)$ um polinômio multi-homogêneo como multigrau $(a_1, ..., a_n)$. Usando a igualdade $x_j x_i = x_i x_j + [x_j, x_i]$ em cada monômio de f, inferimos que

$$f(x_1, ..., x_n) \equiv \lambda x_1^{a_1} ... x_n^{a_n} \pmod{I}.$$

Daí, $f(x_1, ..., x_n) - \lambda x_1^{a_1} ... x_n^{a_n} \in I \subseteq T(A)$. Como $f(x_1, ..., x_n) \in T(A)$, temos que $\lambda x_1^{a_1} ... x_n^{a_n} \in T(A)$. Substituindo cada x_i por 1, obtemos que $\lambda = 0$, e consequentemente $f(x_1, ..., x_n) \in I$. Portanto, o resultado segue.

Consideremos o processo de linearização descrito anteriormente, agora sob a hipótese da característica do corpo em questão ser igual a zero. Então, se regressarmos ao momento em que $h_1(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) = nf(x_1, ..., x_n)$, podemos observar que $f(x_1, ..., x_n) = n^{-1} h_1(x_1, x_1, x_2, ..., x_n)$. Logo podemos concluir que h_1 segue de f e f segue de h_1, isto é, $\langle f \rangle^{TE} = \langle h_1 \rangle^{TE}$. Seguindo aquele processo e usando o fato de $charK = 0$, facilmente concluímos que existe um polinômio multilinear g tal que $\langle f \rangle^{TE} = \langle g \rangle^{TE}$. Essa constatação é a súmula da demonstração do próximo teorema.

Teorema 4. *Seja V um T-espaço de $K\langle X \rangle$, com $charK = 0$. Então V é gerado pelo seus polinômios multilineares.*

Demonstração. De fato, basta notar que K é infinito e pela Proposição 4 tem-se que V é gerado pelos seus polinômios multi-homogêneos. Além disso, em remate, foi frisado anteriormente que, em característica zero, os polinômios multi-homogêneos de V seguem dos polinômios multilineares de V e vice-versa, e portanto temos o resultado. □

Corolário 1. *Suponha $charK = 0$ e sejam V e W T-espaços de $K\langle X \rangle$. Se $V \cap P_n = W \cap P_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $V = W$.*

Como prometido, veremos agora que, quando K é infinito, os T-espaços de $K\langle X \rangle$ são fechados a comutadores, ou melhor, são ideais da álgebra $K\langle X \rangle^{(-)}$.

Teorema 5. *Sejam K um corpo infinito e V um T-espaço de $K\langle X \rangle$. Então, $[f, g] \in V$ para quaisquer $f \in V$ e $g \in K\langle X \rangle$.*

Demonstração. Primeiramente, considere $h(x_1, .., x_n) = z_1 ... z_k$ um monômio e, para cada $i = 1, .., n$, o conjunto $A_i = \{j \in \{1, ..., k\} \mid z_j = x_i\}$. Fixemos $i \in \{1, ..., n\}$ e escrevamos

$$h(x_1, .., x_n) = h_0 x_i h_1 x_i h_2 ... h_{m_i - 1} x_i h_{m_i},$$

onde cada h_l é uma palavra, possivelmente vazia, que independe de x_i. Note que $m_i = \deg_{x_i} h = |A_i|$. Consideremos agora, y_1 uma variável distinta das variáveis $\{x_1, ..., x_n\}$ e $g_i(x_1, ..., x_n, y_1)$ como sendo a componente homogênea de grau 1 em y_1 do polinômio $h(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + y_1, x_{i+1}, ..., x_n)$. Logo,

$$\begin{aligned} g_i(x_1, ..., x_n, y_1) &= \sum_{l=1}^{m_i} h_0 x_i h_1 ... x_i h_{l-1} y_1 h_l x_i ... h_{m_i - 1} x_i h_{m_i} \\ &= \sum_{j \in A_i} z_1 ... z_{j-1} y_1 z_{j+1} ... z_k. \end{aligned}$$

Desde que $A_1 \cup .... \cup A_n = \{1, ..., k\}$ e estes conjuntos são dois a dois disjuntos, auferimos que

$$\begin{aligned} [h(x_1, ..., x_n), x_{n+1}] &= \sum_{j=1}^{k} z_1 ... z_j [z_j, x_{n+1}] z_{j+1} .. z_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in A_i} z_1 ... z_j [x_i, x_{n+1}] z_{j+1} .. z_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, ..., x_n, [x_i, x_{n+1}]). \end{aligned}$$

Agora, de fato, vamos à demonstração do teorema em questão. Com efeito, sendo K infinito, basta supor $f(x_1, ..., x_n)$ multi-homogêneo. Consideremos, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $g_i(x_1, .., x_n, y_1)$ como sendo a componente homogênea de grau 1 em y_1 do polinômio $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + y_1, x_{i+1}, ..., x_n)$. Usando o mesmo processo descrito anteriormente em cada monômio de $f(x_1, ..., x_n)$ e a linearidade do comutador, temos que

$$[f, x_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, .., x_n, [x_i, x_{n+1}]).$$

Como cada $g_i(x_1, .., x_n, [x_i, x_{n+1}]) \in V$, o resultado segue. $\square$

1.6 Polinômios Próprios

Intentando a expansão dos resultados que se debutaram até o presente momento, necessitamos de importantes propriedades obtidas com o estudo dos chamados *polinômios próprios*. Por esta razão, trataremos desses proeminentes polinômios nesta seção.

Comecemos por considerar o conjunto

$$ComX = \{[x_{i_1}, ..., x_{i_n}] \mid n \geq 2,\ x_{i_j} \in X\}.$$

Denotemos por $B(X)$ a subálgebra unitária de $K\langle X\rangle$ gerada por $ComX$. Quanto aos seus polinômios, referir-nos-emos a eles como *polinômios próprios.*

Consideremos o próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], capítulo 4.

Teorema 6. *Seja $f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$. Então existem únicos polinômios $w_a(x_1, ..., x_n) \in B(X)$, com $a = (a_1, .., a_n) \in \mathbb{N}_0^n$, tais que*

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_a x_1^{a_1} ... x_n^{a_n} w_a(x_1, ..., x_n).$$

A demonstração do teorema anterior chega a se confundir com a maneira prática de se resolver um exemplo em particular, bastando apenas usar a segunda e a quarta identidades do Lema 1 quantas vezes o for necessário.

Exemplo 23. *Consideremos o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_3x_1x_2x_1$.* Usando as identidades sugeridas do Lema 1 temos

$$\begin{aligned}
x_3x_1x_2x_1 &= x_1x_2x_1x_3 + [x_3, x_1x_2x_1] \\
&= x_1^2x_2x_3 + x_1[x_2, x_1]x_3 + x_1x_2[x_3, x_1] + [x_3, x_1x_2]x_1 \\
&= x_1^2x_2x_3 + x_1x_3[x_2, x_1] + x_1[x_2, x_1, x_3] + x_1x_2[x_3, x_1] + \\
&+ x_1[x_3, x_2]x_1 + [x_3, x_1]x_2x_1.
\end{aligned}$$

Como

$$x_1[x_3, x_2]x_1 = x_1^2[x_3, x_2] + x_1[x_3, x_2, x_1]$$

e

$$\begin{aligned}
[x_3, x_1]x_2x_1 &= x_2[x_3, x_1]x_1 + [x_3, x_1, x_2]x_1 \\
&= x_2x_1[x_3, x_1] + x_2[x_3, x_1, x_1] + x_1[x_3, x_1, x_2] + [x_3, x_1, x_2, x_1] \\
&= x_1x_2[x_3, x_1] + [x_2, x_1][x_3, x_1] + x_2[x_3, x_1, x_1] + x_1[x_3, x_1, x_2] \\
&+ [x_3, x_1, x_2, x_1]
\end{aligned}$$

inferimos que

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2x_2x_3 + x_1x_3[x_2, x_1] + x_1[x_2, x_1, x_3] + x_1x_2[x_3, x_1] + \\
&+ x_1^2[x_3, x_2] + x_1[x_3, x_2, x_1] + x_1x_2[x_3, x_1] + [x_2, x_1][x_3, x_1] + \\
&+ x_2[x_3, x_1, x_1] + x_1[x_3, x_1, x_2] + [x_3, x_1, x_2, x_1].
\end{aligned}$$

E portanto temos f da forma proposta no teorema anterior.

O fato que faz dos polinômios próprios objeto de grande valência, quanto ao estudo da PI-teoria, é que, na hipótese de infinitude do corpo em questão, os T-ideias são gerados (como T-ideais) por esses polinômios. A demonstração desse fato segue de forma direta do próximo lema.

Lema 9. *Seja I um $T-$ideal de $K\langle X\rangle$, com o corpo K infinito. Suponha que $f(x_1,...,x_n)$ em $K\langle X\rangle$ é um polinômio multi-homogêneo tal que $f(x_1,...,x_n)\in I$. Então cada $w_a(x_1,...,x_n)$ pertence a I ($w_a(x_1,...,x_n)$ como no Teorema 6).*

Demonstração. Sendo $\deg f_{x_1}=m$, temos

$$\begin{aligned} f(x_1+1,x_2,...,x_n) &= \sum_a (x_1+1)^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}w_a(x_1+1,x_2...,x_n) \\ &= \sum_a \left(\sum_{i=0}^{a_1}\binom{a_1}{i}x_1^i\right)x_2^{a_2}...x_n^{a_n}w_a(x_1,...,x_n)\in I \end{aligned}$$

pois $w_a(x_1+1,x_2...,x_n)=w_a(x_1,x_2...,x_n)$, uma vez que w_a é polinômio próprio. Notemos agora, que $a_1+\deg_{x_1}w_a(x_1,...,x_n)=m$ para quaisquer $(a_1,...,a_n)\in\mathbb{N}_0$. Assim, considerando $a_1^{\max}=\max\{a_1\mid a=(a_1,..,a_n)\}$, temos

$$\deg_{x_1}\left(\sum_a x_2^{a_2}...x_n^{a_n}w_a(x_1,...,x_n)\right)_{a_1^{\max}}=m-a_1^{\max}.$$

Observemos, pois, que se $a=(a_1,...,a_n)$ é tal que $a_1<a_1^{\max}$ ou $a_1=a_1^{\max}$ e $i>0$, então

$$\deg_{x_1}\left(x_1^ix_2^{a_2}...x_n^{a_n}w_a(x_1,...,x_n)\right)>m-a_1^{\max}.$$

Portanto,

$$\left(\sum_a x_2^{a_2}...x_n^{a_n}w_a(x_1,...,x_n)\right)_{a_1^{\max}}\in I,$$

já que este polinômio é a componente multi-homogênea de grau $m-a_1^{\max}$ em x_1 do polinômio $f(x_1+1,x_2,...,x_n)\in I$ (ver Proposição 4). Claramente, como I é ideal,

$$\left(\sum_a x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}w_a(x_1,...,x_n)\right)_{a_1^{\max}}\in I$$

donde

$$g(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)-\left(\sum_a x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}w_a(x_1,...,x_n)\right)_{a_1^{\max}}\in I.$$

O polinômio g é da forma

$$g(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_a x_1^{a_1} x_2^2 ... x_n^{a_n} w_a(x_1, ..., x_n) \right)_{a_1 < a_1^{\max}}.$$

Indutivamente, obtém-se que

$$\left(\sum_a x_2^2 ... x_n^{a_n} w_a(x_1, ..., x_n) \right)_{a_1 \ fixado} \in I.$$

Agora, basta repetir o mesmo processo, descrito acima, nas variáveis $x_2, ..., x_n$ para obter que

$$w_a(x_1, ..., x_n) \in I$$

para qualquer $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Corolário 2. *Sejam K infinito e I um T-ideal de $K\langle X \rangle$. Então,*

$$I = \langle I \cap B(X) \rangle^T.$$

Recordemos o Exemplo 19, onde vimos que o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial para a álgebra exterior E do Exemplo 4. Caso o corpo base seja infinito e de característica diferente de 2, veremos a seguir, como primeira aplicação dos polinômios próprios, que o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$, em verdade, forma uma base para as identidades polinomiais da álgebra exterior. No entanto, para tal, precisamos do seguinte lema.

Lema 10. *Sejam f um polinômio qualquer em $K\langle X \rangle$ com $\mathrm{char}K \neq 2$, $C_1...C_n$ $(n \geq 1)$ um produto de comutadores com entradas em $K\langle X \rangle$ e o T-ideal $I = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ de $K\langle X \rangle$. Então,*

(a) $[x_1, x_2][x_2, x_3] \in I$.

(b) $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv -[x_1, x_4][x_3, x_2] \pmod{I}$.

(c) $[C_1...C_n, f] \in I$ *e* $C_1...C_n f \equiv f C_1...C_n \pmod{I}$.

Demonstração. Assuma, por um momento, que (a) seja verdadeira. Então, temos $[x_1, x_2 + x_4][x_2 + x_4, x_3] \in I$. Logo,

$$\begin{aligned}
\underbrace{[x_1, x_2 + x_4][x_2 + x_4, x_3]}_{\in I} &= ([x_1, x_2] + [x_1, x_4])([x_2, x_3] + [x_4, x_3]) \\
&= \underbrace{([x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_1, x_4][x_4, x_3])}_{\in I} + \\
&+ [x_1, x_2][x_4, x_3] + [x_1, x_4][x_2, x_3].
\end{aligned}$$

Daí,

$$[x_1,x_2][x_4,x_3]+[x_1,x_4][x_2,x_3]\in I.$$

Portanto

$$[x_1,x_2][x_3,x_4]\equiv -[x_1,x_4][x_3,x_2] \pmod{I}.$$

Para verificar o item (a), procedemos como segue:

$$\begin{aligned}
\underbrace{[x_1,x_2^2,x_3]}_{\in I} &= [[x_1,x_2^2],x_3]=[x_2[x_1,x_2]+[x_1,x_2]x_2,x_3]\\
&= [x_2[x_1,x_2],x_3]+[[x_1,x_2]x_2,x_3]=x_2[x_1,x_2]x_3-x_3x_2[x_1,x_2]\\
&+ [x_1,x_2]x_2x_3-x_3[x_1,x_2]x_2=x_2[x_1,x_2]x_3-x_2x_3[x_1,x_2]\\
&- [x_3,x_2][x_1,x_2]+[x_1,x_2]x_3x_2+[x_1,x_2][x_2,x_3]-x_3[x_1,x_2]x_2\\
&= \underbrace{x_2[x_1,x_2,x_3]+[x_1,x_2,x_3]x_2}_{\in I}+[x_2,x_3][x_1,x_2]+[x_1,x_2][x_2,x_3]\\
&\equiv [x_1,x_2][x_2,x_3]+\underbrace{[[x_2,x_3],[x_1,x_2]]}_{\in I}+[x_1,x_2][x_2,x_3]\\
&\equiv 2[x_1,x_2][x_2,x_3].
\end{aligned}$$

Obviamente, $'\equiv'$ está denotando a congruência módulo I. Desde que a característica é diferente de 2, obtemos $[x_1,x_2][x_2,x_3]\in I$, e assim temos o item (a).

Quanto ao item (c), claramente temos que se C é um comutador então $[C,f]\in I$. Notemos agora que do quinto item do Lema 1 segue que

$$[C_1...C_n,f] = \sum_{t=1}^{n} C_1...C_{t-1}\underbrace{[C_t,f]}_{\in I}C_{t+1}...C_n. \tag{1.1}$$

Consequentemente, temos

$$[C_1...C_n,f]\in I$$

já que I é ideal. Ademais, como

$$C_1...C_nf=\underbrace{[C_1...C_n,f]}_{\in I}+fC_1...C_n$$

obtemos que $C_1...C_n$ $(n\geq 1)$ é central módulo I. Mais geralmente, segue da bilinearidade do comutador que polinômios próprios são centrais módulo I. □

Sejam f um polinômio qualquer em $K\langle X\rangle$, C um comutador não trivial e $V=\langle [x_1,x_2,x_3]\rangle^{TE}$. Notemos que também temos $[C,f]\in V$, e portanto segue da igualdade $Cf = fC + [C, f]$ que comutadores são centrais módulo V. Contudo, ao observamos (1.1) não é possível afirmar que produtos de comutadores são centrais módulo V, já que não necessariamente V é ideal.

Exemplo 24. *Considere o $T-$ideal $I = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ de $K\langle X \rangle$. Supondo que K é infinito e de característica diferente de 2, mostremos que $I = T(E)$, onde E é a álgebra exterior.* Como visto no Exemplo 19, $[x_1, x_2, x_3] \in T(E)$ e portanto $I \subseteq T(E)$. Para a inclusão contrária, procedemos como segue.

Primeiramente, consideremos $h = c_1...c_s$ com $c_i \in ComX$. Então, se algum c_i tem comprimento maior do que 2, claramente $h \in I$. Além disso, supondo que cada c_i tem comprimento 2 e que h não é multilinear, então usando os itens (a) e (b) do lema anterior e o fato de que comutadores são centrais módulo I, não é difícil ver que h também pertence a I.

Agora, vamos, de fato, à demonstração do exemplo em questão. Seja $f(x_1, ..., x_n) \in T(E)$, sendo K, por hipótese, infinito inferimos que $T(E) = \langle T(E) \cap B(X) \rangle^T$, e assim, podemos supor que f é um polinômio próprio e multi-homogêneo (vide também Proposição 4). Desse modo, f é uma combinação linear de produtos do tipo $c_1...c_n$, onde cada $c_i \in ComX$. Pelo que foi feito anteriormente, podemos assumir que cada c_i tem tamanho 2, e, além disso, usando novamente os itens (a) e (b) do lema anterior e o fato de que comutadores comutam módulo I, podemos assumir que f é multilinear e concluir que

$$f \equiv \lambda[x_1, x_2]...[x_{2n-1}, x_{2n}] \pmod I$$

com $\lambda \in K$. Dessa maneira, temos que $f - \lambda[x_1, x_2]...[x_{2n-1}, x_{2n}] \in I \subseteq T(E)$, donde $\lambda[x_1, x_2]...[x_{2n-1}, x_{2n}] \in T(E)$. Finalmente, fazendo as substituições x_i por e_i, para cada $1 \leq i \leq 2n$, auferimos que

$$2^n \lambda e_1...e_{2n} = \lambda[e_1, e_2]...[e_{2n-1}, e_{2n}] = 0.$$

Como, também por hipótese, temos $CharK \neq 2$, segue que $\lambda = 0$, e consequente $f(x_1, ..., x_n) \in I$. Portanto, temos a inclusão contrária. Logo, $T(E) = I$.

1.7 Codimensões

Nessa seção vamos tratar das sequências de codimensões de T-espaços e de T-ideais, as quais são ferramentas robustas na PI-teoria. No terceiro capítulo, a sequência de codimensões do T-espaço S^2, gerado por $[x_1, x_2]$, será usada para justificar que este espaço não pode conter um T-ideal não nulo.

Definição 15. *Seja V um T-espaço de $K\langle X\rangle$. Definimos a* n-ésima codimensão de V *como sendo o número natural*

$$c_n(V) = \dim \frac{P_n}{V \cap P_n}.$$

A sequência de codimensões *de V é definida como sendo a sequência numérica*

$$(c_n(V))_{n\in\mathbb{N}} = (c_1(V), c_2(V), ..., c_n(V), ...).$$

Sendo A uma álgebra, a n-ésima codimensão do T-ideal (consequentemente T-espaço) $T(A)$ é referida, simplesmente, por *n-ésima codimensão de* A e é denotada por $c_n(A)$.

Segue diretamente da definição que se A é uma álgebra e n é número natural, então

$$c_n(A) = n! - \dim(P_n \cap T(A)) \leq n!,$$

e assim, $\dim(P_n \cap T(A)) \neq 0$ se, e somente se, $c_n(A) < n!$. Supondo $\dim(P_n \cap T(A)) \neq 0$, temos que A possui uma identidade polinomial de grau n. Em outra mão, é sabido que toda PI-álgebra possui uma identidade multilinear não nula. Nessas condições, auferimos que A é uma PI-álgebra se, e somente se, $c_n(A) < n!$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 25. *Seja A uma álgebra comutativa. Então $c_n(A) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.* De fato, por A ser comutativa segue que $[x_i, x_j] \in T(A)$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$, e consequentemente

$$x_{\alpha(1)}...x_{\alpha(n)} \equiv x_1...x_n \pmod{P_n \cap T(A)}$$

para qualquer $\alpha \in S_n$. Desse modo, $\{\overline{x_1...x_n}\}$ gera o espaço quociente $\frac{P_n}{P_n\cap T(A)}$, e assim $c_n(A) = \dim_K \frac{P_n}{P_n\cap T(A)} \leq 1$. Ademais, sendo A unitária, temos que $c_n(A) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que $x_1..., x_n \notin T(A)$ e assim $\overline{x_1...x_n} \neq \overline{0}$ em $\frac{P_n}{P_n\cap T(A)}$.

Exemplo 26. *Consideremos E a álgebra exterior, com o corpo base K de característica zero. Mostraremos, no próximo capítulo, que $c_n(E) = 2^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

O teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [15], apresenta um resultado muito interessante, o qual diz que se a sequência de codimensões de uma PI-álgebra A é limitada, então ela é eventualmente limitada por 1.

Teorema 7. *Seja A uma álgebra. Suponhamos que a sequência $(c_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitada. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c_n(A) \leq 1$ para todo $n \geq n_0$.*

%endproof Exibiremos, a seguir, um dos mais importantes resultados acerca da teoria das codimensões. Este, pois, declara que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra é exponencialmente limitada. A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em [8], capítulo 4, seção 4.2.

Teorema 8. ***(Regev-Latyshev)*** *Se A é uma álgebra que satisfaz alguma identidade polinomial de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De certa forma, a recíproca do Teorema de Regev-Latyshev, como enunciamos na introdução dessa seção, é verdadeira. De fato, suponhamos que A seja uma álgebra tal que $c_n(A) \leq a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde a^n é uma função exponencial de base constante $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Recordemos que a função exponencial cresce de forma mais lenta do que a função fatorial, isto é, $\lim\limits_{n \to \propto} \frac{a^n}{n!} = 0$. Dessa maneira, para n suficientemente grande, temos que $a^n < n!$, donde $c_n(A) < n!$. Portanto, A é uma PI-álgebra. Essa é uma outra maneira, embora sem minúcias, de justificar que uma certa álgebra é ou não uma PI-álgebra, a partir de sua sequência de codimensões.

Capítulo 2

T-Ideal e T-Espaço de Grassmann

Este capítulo será dedicado a alguns dos T-espaços mais interessantes da PI-teoria, em tal grau, a instigar o desenvolvimento da presente dissertação. Em virtude da boa organização do texto, doravante adotemos as seguintes notações: S^3 para indicar o *T-espaço de Grassmann*, gerado pelo comutador $[x_1, x_2, x_3]$; T^3 para denotar o *T-ideal de Grassmann* em $K\langle X\rangle$, gerado pelo o comutador $[x_1, x_2, x_3]$. Dispondo do ensejo, reiteremos que S^2 deverá significar o T-espaço gerado pelo comutador $[x_1, x_2]$ e que sendo V um T-espaço, para cada $n \geq 1$, escreveremos V_n para simbolizar $V \cap P_n$. Temos, pois, como objetivo nas seções vindouras, descrever bases das interseções de P_n com os T-espaços anteriormente citados, bem como, demonstrar as seguintes relações:

$$S^3 \quad = \quad S^2 \cap T^3 \ \text{ e } \ T^3_n = S^3_n \oplus T^3_{n-1}x_n,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

De agora em diante, iremos sempre admitir que o corpo K em questão tem característica zero, salvo menção explícita em contrário.

2.1 Uma Base para S^2_n

Nessa seção, além de demonstrar a relação $(S^2 + T^3)_n = S^2_n + T^3_n$, iremos exibir uma base para S^2_n.

Teorema 9. *Sejam A e B T-espaços em $K\langle X\rangle$. Então $A+B$ é um T-espaço tal que para todo $n \geq 1$ vale*

$$(A + B)_n = A_n + B_n.$$

Demonstração. Claramente, $A_n+B_n=(A\cap P_n)+(B\cap P_n)\subseteq(A+B)\cap P_n=(A+B)_n$. Reciprocamente, suponha $f\in(A+B)_n=(A+B)\cap P_n$. Então $f=g+h$, com $g\in A$, $h\in B$ e $g+h\in P_n$. Sejam g_1 e h_1 as componentes multilineares em $x_1,x_2,...,x_n$ de g e h, respectivamente. Note que

$$(g-g_1)+(h-h_1)=(g+h)-(g_1+h_1)=f-(g_1+h_1)\in P_n$$

Como $(g-g_1)+(h-h_1)$ pertence a P_n e não contém monômio multilinear em $x_1,x_2,...,x_n$, temos que $(g-g_1)+(h-h_1)=0$, isto é, $f=(g_1+h_1)$. Agora, recordemos que quando a característica do corpo em questão é zero, os T-espaços são multi-homogêneos, donde $g_1\in A$ e $h_1\in B$. Segue assim que $f\in A_n+B_n$. $\square$

Corolário 3. *Para cada $n\geq 1$ vale*

$$(S^2+T^3)_n=S^2_n+T^3_n.$$

No próximo teorema, através de artifícios combinatórios, exibiremos uma base para S^2_n.

Teorema 10. *Seja $n\geq 2$. Então, o conjunto de todos os comutadores multilineares do tipo*

$$[x_1x_{i_2}...x_{i_k},x_{i_{k+1}}...x_{i_n}], \tag{2.1}$$

com $\{i_2,...,i_n\}=\{2,...,n\}$ e $1\leq k\leq n-1$, é uma base para S^2_n. Consequentemente, $\dim S^2_n=(n-1)(n-1)!$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que segue do fato do comutador ser bilinear que os elementos

$$[x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k},x_{i_{k+1}}...x_{i_n}],$$

com $\{i_1,i_2,...,i_n\}=\{1,2,...,n\}$ geram o subespaço S^2_n. Agora, usando a igualdade $[x,y]=-[y,x]$, podemos assumir que x_1 aparece em algum lugar da primeira entrada de cada elemento $[x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k},x_{i_{k+1}}...x_{i_n}]$, e assim podemos escrever estes sob a forma $[ux_1v,w]$. Uma vez que o Lema 2 garante a igualdade $[ux_1v,w]=[x_1v,wu]-[x_1vw,u]$, auferimos que $[x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k},x_{i_{k+1}}...x_{i_n}]$ é combinação linear dos elementos da forma (2.1). Consequentemente, S^2_n é gerado pelos elementos da forma (2.1).

Suponhamos agora que

$$\sum\alpha_{I,k}[x_1x_{i_2}...x_{i_k},x_{i_{k+1}}...x_{i_n}]=0,$$

onde $\{i_2, ..., i_n\} = \{2, ..., n\}$, $1 \leq k \leq n-1$ e $I = (i_2, ..., i_n)$ ($(n-1)$-upla). Assim

$$\sum \alpha_{I,k} x_1 x_{i_2} ... x_{i_k} x_{i_{k+1}} ... x_{i_n} = \sum \alpha_{I,k} x_{i_{k+1}} ... x_{i_n} x_1 x_{i_2} ... x_{i_k}.$$

Como $1 \leq k \leq n-1$, a variável x_1 não configura na primeira posição em nenhuma parcela do somatório no segundo membro da identidade anterior, e por igualdade de polinômios segue que

$$\sum \alpha_{I,k} x_{i_{k+1}} ... x_{i_n} x_1 x_{i_2} ... x_{i_k} = 0.$$

Notando que $x_{i_{k+1}} ... x_{i_n} x_1 x_{i_2} ... x_{i_k}$ fica unicamente determinado pela escolha de I e k, temos, para cada parcela do somatório anterior, $\alpha_{I,k} = 0$. Desse modo, os elementos em (2.1) são linearmente independentes e formam uma base para S_n^2.

Por último, como existem exatamente $(n-1)!$ escolhas diferentes para a $n-$upla I e $k \in \{1, ..., n-1\}$, temos que existem precisamente $(n-1)!(n-1)$ elementos da forma (2.1), implicando que $\dim S_n^2 = (n-1)(n-1)!$. $\square$

2.2 Uma Base para T_n^3

Nessa seção, iremos definir os denominados *elementos de Specht* de P_n, os quais serão fundamentais para exibir uma base para T_n^3, bem como mostrar outros resultados declarados no preâmbulo desse capítulo. Para tanto, necessitaremos de alguns resultados da álgebra linear que de agora em diante serão recorrentes. Aproveitaremos o ensejo para listar na seguinte observação (embora sem demonstração) não só os que serão usados nessa seção, mas sim em todo o texto.

Observação 15. *Seja V um espaço vetorial. Valem:*

1. *Se $\dim V$ é finita e β é um subconjunto gerador de V tal que $|\beta| = \dim V$, então β é uma base de V.*

2. *Seja $\beta \subseteq V$ um conjunto linearmente independe. Fixemos $v_0 \in \beta$ e consideremos o conjunto $\gamma = \{v_0 - u \mid u \in \beta, u \neq v_0\} \cup \{v_0\}$. Então, γ é linearmente independe e $\langle \gamma \rangle = \langle \beta \rangle$ (γ é base de $\langle \beta \rangle$). Ademais, se β é base de V, então γ também é base de V.*

3. *Sejam W um subespaço de V e β_1 e β_2 subconjuntos linearmente independentes de V tais que $\beta_1 \cup \beta_2$ gera V, $\langle \beta_1 \rangle \cap W = \{0\}$, $\beta_2 \subseteq W$. Então β_2 é uma base para W.*

4. *Sejam W um subespaço de V e β_1 e β_2 subconjuntos de V tais que β_2 é base de W e $\overline{\beta_1} = \{\overline{v} = v + W \mid v \in \beta_1\}$ é base do espaço quociente V/W. Então $\beta 1 \cap \beta_2 = \varnothing$ e $\beta 1 \cup \beta 2$ é base de V.*

5. *Se* $\dim V$ *é finita e W é um subespaço de V, então* $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$.

Definição 16. *Sejam $n \geq 1$, $J_n = \{1, ..., n\}$ e $\{i_1, ..., i_m\} \subseteq J_n$.*

1. *Dizemos que um monômio $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_m}$ é* regular *se $i_1 < i_2 < ... < i_m$. Um comutador multilinear $[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}]$ ($m \geq 2$) é dito ser* regular *se $i_1 = \min\{i_1, ..., i_m\}$.*

2. *Um produto multilinear $CY \in P_n$, onde $C = C_1...C_s$ ($s \geq 0$) é um produto de comutadores regulares e Y é um monômio regular, é um dito um* produto regular *se os graus dos $C_{i's}$ não aumentam da esquerda para direita e os índices das variáveis iniciais dos comutadores C_i que tiverem o mesmo tamanho aumentam da esquerda para direita.*

3. *Um produto regular CY cujas variáveis tenham índices no conjunto $\{i_1, ..., i_m\}$ será chamado de* subproduto regular *de P_n. Por conveniência, incluímos a possibilidade de CY ser trivial, isto é, $CY = 1$.*

Proposição 5. *Para cada $n \geq 1$, o conjunto de todos os produtos regulares de grau n é uma base para P_n.*

Demonstração. Vide [6], capítulo 4, seção 4.3 □

A base apresentada na proposição acima é chamada de *base de Specht* e seus elementos (produto regulares) são conhecidos por *elementos da base de Specht*. No decorrer do texto, usaremos, por simplicidade, CY ou $C_1...C_sY$ ($s \geq 0$) para denotar um elemento da base de Specht.

Lema 11. *Seja $n \geq 1$ e considere o conjunto de todos os elementos da base de Specht da forma*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}]...[x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]x_{j_1}...x_{j_{n-2k}}, \tag{2.2}$$

onde $0 \leq 2k \leq n$ e

$$i_1 < ... < i_{2k},\ j_1 < ... < j_{n-2k} \text{ e } \{i_1, ..., i_{2k}, j_1, ..., j_{n-2k}\} = J_n \tag{2.3}$$

Afirmamos que as classes laterais desses elementos, com respeito ao subespaço T_n^3, formam uma base para o espaço quociente P_n/T_n^3. Ademais,

$$c_n(T^3) = \dim \frac{P_n}{T_n^3} = 2^{n-1}.$$

Demonstração. Seja $f \in P_n$. Observe que os produtos regulares $C_1...C_sY(s \geq 0)$ formam uma base linear para P_n, e que se algum C_i tem tamanho 3, então teremos $C_1...C_sY \in T_n^3$. Portanto, temos que f pode ser escrito como combinação linear, módulo T_n^3, dos elementos $C_1...C_sY(s \geq 0)$, onde cada C_i tem tamanho 2. Agora, usando o Lema 10, item (b), e a identidade $[x, y] = -[y, x]$ podemos concluir que f, de fato, é uma combinação linear, módulo T_n^3, dos elementos do tipo (2.2).

Para justificar a independência linear dos elementos (2.2), consideremos a álgebra exterior E e observemos que, segundo as condições (2.3), esses elementos são unicamente determinados pela a escolha do conjunto $I = \{i_1, ..., i_{2k}\}$. Logo, supondo

$$g = \sum_I \lambda_I [x_{i_1}, x_{i_2}]...[x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]x_{j_1}...x_{j_{n-2k}} \in T_n^3 \tag{2.4}$$

uma combinação linear dos elementos em (2.2), onde $I = \{i_1, ..., i_{2k}\}$ e $\lambda_I \in K$. Usaremos indução em $|I|$ (cardinalidade de I) para mostrar que os $\lambda_I' s$ são todos iguais a zero. Para tal comecemos por observar que $g \in T(E)$ e que se $a \in E_0$, então $[a, b] = 0$ para qualquer $b \in E$, enquanto que, para $a, b \in E_1$, tem-se que $ab = -ba$, e assim $[a, b] = 2ab$. Fixado k inteiro tal que $0 \leq 2k \leq n$, onsideremos os elementos $a_l = e_{2l-1}e_{2l}$ e $b_t = e_{2n-4k+t}$, para $1 \leq l \leq n-2k$ e $1 \leq t \leq 2k$. Notemos que $a_l \in E_0$ e $b_t \in E_1$.

1. Fazendo as substituições $x_l \longrightarrow a_l$ para $l = 1, ..., n$ $(k = 0)$, temos que o somatório em (2.4), segundo essas substituições, resume-se apenas a $\lambda_\varnothing a_1....a_n = \lambda_\varnothing e_1e_2...e_{n-1}e_{2n}$. Daí, $\lambda_\varnothing = 0$, ou seja, vale qunado $|I| = 0$.

2. Fixados agora $k > 0$ e $I = \{i_1, ..., i_{2k}\}$, suponhamos, por indução, que $\lambda_L = 0$ para todo subconjunto L de J_n de cardinalidade par e menor que $2k$. Tomando as substituições $x_{i_t} \longrightarrow b_t$, para $t = 1, ..., 2k$, e $x_{j_l} \longrightarrow a_l$, para $1 \leq l \leq n-2k$, temos que o somatório em (2.4), segundo essas substituições, resume-se a

   $$\lambda_I[b_1, b_2]...[b_{2k-1}, b_{2k}]a_1...a_{n-2k} = \lambda_I 2^k b_1b_2...b_{2k}a_1...a_{n-2k} = 0.$$

   uma vez que se $H \neq I$ é um subconjunto de J_n de cardinalidade par e maior ou igual a $2k$, então H deve conter algum j_l e daí o termo correspondente deve se anular. Desde que $char K = 0$, tem-se que $2^k b_1b_2...b_{2k}a_1...a_{n-2k} \neq 0$, donde $\lambda_I = 0$.

Temos então a independência linear, módulo T_n^3, dos elementos em (2.2).

Agora, vamos à contagem dos elementos em (2.2). Notemos que os elementos em *(2.2)* ficam determinados pela definição do produto dos comutadores, ou seja, pela escolha do subconjunto $\{i_1, ..., i_{2k}\}$ de $J_n = \{1, ..., n\}$ uma vez que $i_1 < i_2 < ... < i_{2k}$. Então, sendo q a parte inteira de $n/2$, observe que os elementos em *(2.2)* podem ter no máximo q comutadores. Ajuntando essas obtenções, inferimos que o número de elementos da forma *(2.2)* é

$$s_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{2q}$$

que é exatamente o número de subconjuntos de J_n com quantidade par de elementos. Considerando s_1 como sendo a soma dos coeficientes binomiais $\binom{n}{i}$, com $1 \leq i \leq n$ ímpar, temos (pelo Teorema Binomial)

$$2^n = (1+1)^n = s_0 + s_1, \qquad 0 = (1-1)^n = s_0 - s_1.$$

Assim, $s_0 = s_1 = 2^{n-1}$, mostrando que $\dim P_n/T_n^3 = 2^{n-1}$. □

Recordemos que $T^3 = T(E)$ (Exemplo 24). Assim,

$$\dim \frac{P_n}{T_n^3} = \dim \frac{P_n}{T^3 \cap P_n} = \dim \frac{P_n}{T(E) \cap P_n} = c_n(E).$$

Portanto, tal como declarado no Exemplo 26, temos $c_n(E) = 2^{n-1}$.

Definição 17. *Para cada $n \geq 2$ definimos:*

1. *Γ_n como sendo o subespaço de P_n gerado por todos os produtos multilineares de comutadores de tamanho pelo menos 2.*

2. *G_n como sendo o subespaço de P_n gerado por todos os produtos de comutadores que envolvem pelo menos um comutador de tamanho maior ou igual a 3.*

Observemos que os elementos de Γ_n são polinômios próprios multilineares, e que os elementos da forma CY, com Y trivial, pertencem a Γ_n. Esses elementos formam uma base para Γ_n, conhecida como base de Specht de Γ_n (vide [6], capítulo 4, seção 4.3). Ademais, notemos que G_n é subespaço de Γ_n.

Para cada $k \geq 1$, consideremos o elemento

$$u^{(k)}(x_1, ..., x_{2k}) = [x_1, x_2][x_3, x_4]...[x_{2k-1}, x_{2k}] \in \Gamma_{2k}.$$

Agora, para cada k fixo, tomemos todos os elementos que têm a mesma forma e mesmas variáveis de $u^{(k)}$ que sejam elementos da base de Specht, e fixemos uma ordem nesses elementos

$$u_1^{(k)} < u_2^{(k)} < ... < u_t^{(k)} < ...$$

sendo $u_1^{(k)} = u^{(k)}$. Sendo $t = \{1, 2, 3, ...\}$, existe $\alpha_{kt} \in S_{2k}$ tal que $u_t^{(k)} = [x_{\alpha_{kt}(1)}, x_{\alpha_{kt}(2)}][x_{\alpha_{kt}(3)}, x_{\alpha_{kt}(4)}]...[x_{\alpha_{kt}(2k-1)}, x_{\alpha_{kt}(2k)}]$. Definimos agora, para cada $t > 1$, os elementos

$$z_t^{(k)} = u_1^{(k)} - (-1)^{\alpha_{kt}} u_t^{(k)}.$$

Definição 18. *Para cada $n \geq 1$, definimos dois subconjuntos (possivelmente vazios) A_n e B_n de P_n como segue:*

1. *A_n é o conjunto de todos os elementos da base de Specht da forma $C_1...C_sY$ tal que* $\deg C_1 \geq 3$.

2. *B_n é o conjunto de todos os elementos da forma $z_t^{(k)}w$ ($t > 1$), onde $z_t^{(k)} = z_t^{(k)}(x_{i_1}, ..., x_{i_{2k}}) \in \Gamma_{2k}(x_{i_1}, ..., x_{i_{2k}})$, $w = x_{j_1}...x_{j_{n-2k}}$, $i_1 < ... < i_{2k}$, $j_1 < ... < j_{n-2k}$, $\{i_1, ..., i_{2k}, j_1, ..., j_{n-2k}\} = J_n$ e $2 < 2k \leq n$.*

Proposição 6. *Para cada $n \geq 1$, temos que $A_n \cup B_n$ é uma base para T_n^3. Ademais,* $\dim T_n^3 = n! - 2^{n-1}$.

Demonstração. Assuma k variando tal que $2 < 2k \leq n$. Comecemos por considerar β a base de Specht do espaço P_n. Dividiremos essa base em três subconjuntos como segue:

1. O subconjunto de β formado por todos os elementos de Specht $C_1...C_sY$ tal que $\deg C_1 \geq 3$, ou seja, A_n.

2. O subconjunto $B_n^{'}$ de β formado por todos os elementos $u_t^{(k)}w$ com $t > 1$, $u_t^{(k)} = u_t^{(k)}(x_{i_1}, ..., x_{i_{2k}}) \in \Gamma_{2k}(x_{i_1}, ..., x_{i_{2k}})$ e $w = x_{j_1}...x_{j_{n-2k}}$ com $x_{i_1}, ..., x_{i_{2k}}$ e $x_{j_1}, ..., x_{j_{n-2k}}$ como na definição 18.

3. O subconjunto C de β formado por todos os elementos $u^{(k)}w$ ($u^{(k)} = u^{(k)}(x_{i_1}, ..., x_{i_{2k}})$ e w como no item anterior) e o elemento $x_1...x_n$.

Claramente, A_n, $B_n^{'}$ e C são dois a dois disjuntos e $\beta = A_n \cup B_n^{'} \cup C$. Como A_n, B_n e C também são dois a dois disjuntos e, pelo segundo item da Observação 15, os subespaços vetoriais gerados por $B_n \cup C$ e $B_n^{'} \cup C$ são iguais, devemos ter que $A_n \cup B_n \cup C$ é uma base de P_n. Nesse instante, recordemos do Exemplo 19, o qual garante que $z_t^{(k)} \in T^3$ $(t > 1)$, e assim, sendo T^3 um T-ideal, podemos concluir que $z_t^{(k)} w \in T_n^3$. Como, claramente, $A_n \subseteq T_n^3$, temos que $A_n \cup B_n \subseteq T_n^3$.

Agora, recordemos que o conjunto $\overline{C} = \{\overline{c} = c + T_n^3 \mid c \in C\}$ é uma base para o espaço quociente P_n/T_n(vide Lema 11), e consequentemente temos $\langle C \rangle \cap T_n^3 = \{0\}$. Resumidamente, ajuntando todas as obtenções na presente demonstração temos $\langle C \rangle \cap T_n^3 = \{0\}$, $A_n \cup B_n \subseteq T_n^3$ e $C \cup A_n \cup B_n$ é uma base para P_n, donde segue do terceiro item da Observação 15 que $A_n \cup B_n$ é uma base para T_n^3.

Por fim, temos

$$2^{n-1} = \dim \frac{P_n}{T_n^3} = \dim P_n - \dim T_n^3.$$

Em vista disso, temos $\dim T_n^3 = n! - 2^{n-1}$. □

2.3 Uma Base para $S_n^2 + T_n^3$

Nessa seção, exibiremos propriedades interessantes de comutadores, as quais servirão de ferramentas cruciais para exibir uma base para o espaço $S_n^2 + T_n^3$.

Lema 12. *Sejam m e s dois inteiros tais que $m \geq 2$ e $1 \leq s < m$. Então,*

$$[x_1 ... x_s, x_{s+1} ... x_m] \equiv \sum_{t=s+1}^{m} [x_1 ... x_{t-1} x_{t+1} ... x_m, x_t] \pmod{T_m^3}.$$

Demonstração. Usaremos indução em $p = m - s$. Para $p = 1$, nada a fazer, pois $m = s + 1$. Sendo $p \geq 2$, suponhamos, por indução, o resultado válido para todo número natural menor do que p. Segue do Lema 2 que

$$\begin{aligned} \underbrace{[x_1 ... x_s, x_{s+2} ... x_m, x_{s+1}]}_{\in T_m^3} &= [x_1 ... x_s x_{s+1}, x_{s+2} ... x_m] + [x_1 ... x_s x_{s+2} ... x_m, x_{s+1}] \\ &- [x_1 ... x_s, x_{s+1} x_{s+2} ... x_m]. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} [x_1 ... x_s, x_{s+1} x_{s+2} ... x_m] &\equiv [x_1 ... x_s x_{s+1}, x_{s+2} ... x_m] + \\ &+ [x_1 ... x_s x_{s+2} ... x_m, x_{s+1}] \pmod{T_m^3}. \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, temos que

$$[x_1...x_s x_{s+1}, x_{s+2}...x_m] \equiv \sum_{t=s+2}^{m} [x_1...x_{t-1}x_{t+1}...x_m, x_t] \pmod{T_m^3}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}[x_1...x_s, x_{s+1}x_{s+2}...x_m] &\equiv \sum_{t=s+2}^{m} [x_1...x_{t-1}x_{t+1}...x_m, x_t] + \\ &+ [x_1...x_s x_{s+2}...x_m, x_{s+1}] = \\ &= \sum_{t=s+1}^{m} [x_1...x_{t-1}x_{t+1}...x_m, x_t] \pmod{T_m^3}.\end{aligned}$$

E assim, o resultado é válido para p e, consequentemente, para todo número natural. □

Lema 13. *Sejam k, n e s inteiros tais que $n \geq 2$, $0 \leq 2k < n$ e $1 \leq s < n - 2k$. Consideremos uma partição*

$$J_n = \{i_1, ..., i_s\} \cup \{i_{s+1}, ..., i_{n-2k}\} \cup \{j_1, ..., j_{2k}\}$$

tal que $i_1 < ... < i_s$, $i_{s+1} < ... < i_{n-2k}$ e $j_1 < ... < j_{2k}$. Então, módulo T_n^3

$$[x_{i_1}....x_{i_s}, x_{i_{s+1}}...x_{i_{n-2k}}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]$$

é uma combinação linear dos elementos da forma

$$[x_{r_1}, x_{r_2}...x_{r_{n-2q}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}],$$

onde $r_2 < ... < r_{n-2q}$, $r_1 < t_1 < .... < t_{2q}$ e $k \leq q$.

Demonstração. Pelo Lema 12, temos que

$$\begin{aligned}&[x_{i_1}....x_{i_s}, x_{i_{s+1}}...x_{i_{n-2k}}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \equiv \\ \equiv &\left(\sum_{l=s+1}^{n-2k} [x_{i_1}...x_{i_{l-1}}x_{i_{l+1}}...x_{i_{n-2k}}, x_{i_l}]\right)[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \\ = &\sum_{l=s+1}^{n-2k} [x_{i_1}...x_{i_{l-1}}x_{i_{l+1}}...x_{i_{n-2k}}, x_{i_l}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \pmod{T_n^3}.\end{aligned}$$

Agora olhemos para cada parcela

$$[x_{i_1}...x_{i_{l-1}}x_{i_{l+1}}...x_{i_{n-2k}}, x_{i_l}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \tag{2.5}$$

do último somatório. Usando a base de Specht da Proposição 5 juntamente com Lema 11, tem-se que cada monômio $x_{i_1}...x_{i_{l-1}}x_{i_{l+1}}...x_{i_{n-2k}}$ pode ser escrito como combinação linear, módulo T^3, dos elementos $C_1...C_sY(s \geq 0)$, nas variáveis x_{i_1}, ..., $x_{i_{l-1}}$, $x_{i_{l+1}}$, ..., $x_{i_{n-2k}}$, onde $Y = x_{r_2}...x_{r_{(n-2k)-2s}}$, com $\deg C_1...C_s = 2s$, $r_2 < ... < r_{(n-2k)-2s}$ e cada C_i de tamanho 2. Assim, cada elemento em (2.5) é uma combinação linear, módulo T_n^3, de elementos da forma

$$\begin{aligned}[C_1...C_sY, x_{i_l}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] &= C_1...C_s[Y, x_{i_l}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \\ &+ [C_1...C_s, x_{i_l}]Y[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}].\end{aligned}$$

Segue do terceiro item do Lema 10 que

$$[C_1...C_s, x_{i_l}] \in T^3$$

e consequentemente temos

$$[C_1...C_s, x_{i_l}]Y[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \in T_n^3.$$

Portanto

$$\begin{aligned}[C_1...C_sY, x_{i_l}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] &= C_1...C_s[Y, x_{i_l}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \\ &+ [C_1...C_s, x_{i_l}]Y[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \\ &\equiv [Y, x_{i_l}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]C_1...C_s,\end{aligned}$$

onde $' \equiv'$ denota a equivalência módulo T_n^3. Logo,

$$[C_1...C_sY, x_{i_l}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \equiv [Y, x_{i_l}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]C_1...C_s.$$

Por fim, observemos que, tomando $r_1 = i_l$ e $q = k+s$, basta recorrer ao Lema 10 e a identidade $[x, y] = -[y, x]$ para, módulo T_n^3, organizar as variáveis de

$$[x_{r_2}...x_{r_{n-2q}}, x_{r_1}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]C_1...C_s$$

tal como requerido em tese, pois cada C_i tem tamanho 2. Claramente, o resultado geral segue da bilinearidade do comutador. □

Lema 14. *Para cada $n \geq 5$, temos*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4...x_n] \equiv \sum_{m=4}^{n} [x_1, x_2x_4...x_{m-1}x_{m+1}...x_n][x_3, x_m] \pmod{T_n^3}.$$

Demonstração. Consideremos primeiramente $n = 5$ e, por simplicidade, denotemos $u \equiv v \pmod{T_n^3}$ simplesmente por $u \equiv v$. Então, usando o Lema 2 e algumas simples propriedades, mostradas ao longo do texto, temos

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2][x_3, x_4x_5] &= [x_1, x_2](x_4[x_3, x_5] + [x_3, x_4]x_5) \\
&\equiv [x_1, x_2][x_3, x_4]x_5 + [x_1, x_2][x_3, x_5]x_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2][x_3, x_4]x_5 + x_2[x_1, x_5][x_3, x_4] &\equiv [x_1, x_2]x_5[x_3, x_4] + x_2[x_1, x_5][x_3, x_4] \\
&= [x_1, x_2x_5][x_3, x_4],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2][x_3, x_5]x_4 + x_2[x_1, x_4][x_3, x_5] &\equiv [x_1, x_2]x_4[x_3, x_5] + x_2[x_1, x_4][x_3, x_5] \\
&= [x_1, x_2x_4][x_3, x_5].
\end{aligned}$$

Segue do Lema 10 que

$$x_2[x_1, x_5][x_3, x_4] + x_2[x_1, x_4][x_3, x_5] \equiv 0.$$

Diante do exposto, temos

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2][x_3, x_4x_5] &\equiv [x_1, x_2][x_3, x_4]x_5 + [x_1, x_2][x_3, x_5]x_4 \\
&\equiv [x_1, x_2x_5][x_3, x_4] + [x_1, x_2x_4][x_3, x_5], \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

tal como requerido em tese.

Usaremos indução em n. Notemos que o obtido acima mostra que o resultado é válido para $n = 5$. Seja $n > 5$ e suponhamos, por indução, que o resultado seja válido para todo natural maior ou igual a 5 e menor do que n. Assim, pela congruência em (2.6), substituindo x_5 por $x_5...x_n$ (lembre que T^3 é um T-ideal), obtemos que

$$[x_1, x_2][x_3, x_4(x_5...x_n)] \equiv [x_1, x_2x_5..x_n][x_3, x_4] + [x_1, x_2x_4][x_3, x_5...x_n].$$

Aplicando agora a hipótese de indução em $[x_1, x_2][x_3, x_5...x_n]$, obtemos

$$[x_1, x_2][x_3, x_5...x_n] \equiv \sum_{m=5}^{n} [x_1, x_2x_5...x_{m-1}x_{m+1}...x_n][x_3, x_m]$$

e substituindo x_2 por x_2x_4 nesta congruência (T^3 é T-ideal), chegamos a

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2][x_3, x_4(x_5...x_n)] &\equiv [x_1, x_2x_5..x_n][x_3, x_4] + [x_1, x_2x_4][x_3, x_5...x_n] \\
&\equiv [x_1, x_2x_5...x_n][x_3, x_4] \\
&+ \sum_{m=5}^{n} [x_1, x_2x_4x_5...x_{m-1}x_{m+1}...x_n][x_3, x_m] \\
&= \sum_{m=4}^{n} [x_1, x_2x_4...x_{m-1}x_{m+1}...x_n][x_3, x_m]
\end{aligned}$$

concluindo o caso geral. □

Lema 15. *Sejam k e n inteiros tais que $n \geq 2$ e $0 \leq 2k < n$. Consideremos uma partição $J_n = \{i_1, ..., i_{n-2k}\} \cup \{j_1, ..., j_{2k}\}$, onde $1 = i_1 < i_2 < ... < i_{n-2k}$ e $2 = j_1 < j_2 < ... < j_{2k}$. Então,*

$$[x_1, x_{i_2}...x_{i_{n-2k}}][x_2, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]$$

pode ser escrito, módulo T_n^3, como combinação linear dos elementos

$$[x_1, x_2 x_{r_3}...x_{r_{n-2k}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2k-1}}, x_{t_{2k}}],$$

onde $\{r_3, ..., r_{n-2k}\} \cup \{t_1, ..., t_{2k}\} = \{3, ..., n\}$, $r_3 < ... < r_{n-2k}$ e $t_1 < ... < t_{2k}$.

Demonstração. Se $n = 2$ ou $n = 3$, então $k = 0$ e as condições sob os índices tornam o resultado trivial. Também se for $n = 4$ e $k = 0$ temos a mesma trivialidade. Se, porém, for $n = 4$ e $k = 1$, o resultado segue facilmente do segundo item do Lema 10. Suponha agora $n \geq 5$. Recorrendo aos Lemas 10 e 14, segue que

$$\begin{aligned}
[x_1, x_{i_2}...x_{i_{n-2k}}][x_2, x_{j_2}] &= -[x_{i_2}...x_{i_{n-2k}}, x_1][x_2, x_{j_2}] \\
&\equiv [x_1, x_2][x_{j_2}, x_{i_2}...x_{i_{n-2k}}] \\
&\equiv \sum_{m=2}^{n-2k} [x_1, x_2 x_{i_2}...x_{i_{m-1}} x_{i_{m+1}}...x_{i_{n-2k}}][x_{j_2}, x_{i_m}],
\end{aligned}$$

onde as congruências são mod T^3. Logo,

$$\begin{aligned}
&[x_1, x_{i_2}...x_{i_{n-2k}}][x_2, x_{j_2}][x_{j_3}, x_{j_4}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \\
\equiv &\sum_{m=2}^{n-2k} [x_1, x_2 x_{i_2}...x_{i_{m-1}} x_{i_{m+1}}...x_{i_{n-2k}}][x_{j_2}, x_{i_m}][x_{j_3}, x_{j_4}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]
\end{aligned}$$

Escrevendo $r_3 = i_2, ..., r_m = i_{m-1}, r_{m+1} = i_{m+1}, ..., r_{n-2k} = r_{n-2k}$, já se tem $r_3 < ... < r_{n-2k}$. Por fim, recordemos que podemos ordenar os índices de $[x_{j_2}, x_{i_m}][x_{j_3}, x_{j_4}][x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]$, módulo T_n^3, em ordem crescente da esquerda para a direita (Lema 10). Isso feito, denotemos tais índices do menor para o maior por $t_1, ..., t_{2k}$, respectivamente. Portanto, temos o resultado declarado como tese. □

Lema 16. *Sejam k, n e s inteiros tais que $n \geq 2$, $0 \leq 2k < n$ e $1 \leq s < n - 2k$. Considere uma partição $\{s+1, ..., n\} = \{i_{s+1}, ..., i_{n-2k}\} \cup \{j_1, ..., j_{2k}\}$ tal que $i_{s+1} < ... < i_{n-2k}$ e $j_1 < ... < j_{2k}$. Então, o elemento*

$$[x_1...x_s, x_{i_{s+1}}...x_{i_{n-2k}}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \tag{2.7}$$

pode ser escrito , módulo T_n^3, como combinação linear dos elementos da forma

$$[x_1...x_s, x_{s+1}x_{r_{s+2}}...x_{r_{n-2k}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2k-1}}, x_{t_{2k}}], \tag{2.8}$$

onde $\{s+2, ..., n\} = \{r_{s+2}, ..., r_{n-2k}\} \cup \{t_1, ..., t_{2k}\}$, $r_{s+2} < ... < r_{n-2k}$ *e* $t_1 < .... < t_{2k}$.

Demonstração. Se n for igual a 2 ou 3, então $k = 0$, e, por conta da ordenação dos índices, nada temos a fazer. Se tivermos $n = 4$ e $k = 0$, ainda pela ordenação exigida nos índices, temos trivialmente o resultado. No caso em que $n = 4$ e $k = 1$, basta lançar mão do segundo item do Lema 10 para também ver que o resultado é válido.

Suponha agora $n \geq 5$. Notemos que $s + 1 = i_{s+1}$ ou $s + 1 = j_1$. Se, por ventura, for $s + 1 = i_{s+1}$, então nada se tem a fazer. Se tivermos $s + 1 = j_1$, temos duas situações a serem analisadas: a primeira delas é se for $s = 1$ e a segunda é, obviamente, $s \geq 2$. Observemos que a primeira das situações se reduz ao Lema 15, acima demonstrado. Como último dos casos, vamos à situação em que $s \geq 2$, a qual procedemos como segue. Tomemos em (2.7) as avaliações $x_l \longrightarrow 1$, para cada $1 \leq l \leq s-1$, e $x_m \longrightarrow x_{m-s+1}$, para cada $s \leq m \leq n$. De modo a termos o elemento

$$W = [x_1, x_{i_{s+1}-s+1}...x_{i_{(n-2k)}-s+1}][x_2, x_{j_2-s+1}]...[x_{j_{2k-1}-s+1}, x_{j_{2k}-s+1}]$$

uma vez que $j_1 - s + 1 = 2$. Observe que o grau de W é $n - s + 1$.

O Lema 15 assegura que W pode ser escrito, módulo T_n^3, como combinação linear dos elementos da forma

$$[x_1, x_2x_{r_3}...x_{r_{n-s+1-2k}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2k-1}}, x_{t_{2k}}], \tag{2.9}$$

onde $\{r_3, ..., r_{n-s+1-2k}\} \cup \{t_1, ..., t_{2k}\} = \{3, ..., n-s+1\}$ é uma partição com $r_3 < ... < r_{n-s+1-2k}$ e $t_1 < ... < t_{2k}$. Agora, para cada $2 \leq l \leq n-s+1$, consideremos as substituições $x_1 \longrightarrow x_1...x_s$ e $x_l \longrightarrow x_{l+s-1}$ em W. Como T^3 é um T-ideal, o elemento (2.7), obtido a partir de W através dessas substituições, aparece como combinação linear, módulo T_n^3, dos elementos em (2.8), obtidos de (2.9) através das mesmas substituições. E o resultado segue. $\square$

Lema 17. *Para cada $m \geq 3$, temos*

$$[x_1, x_2...x_m] \equiv \sum_{k=2}^{m} [x_1, x_k]x_2...x_{k-1}x_{k+1}...x_m \pmod{T_n^3}.$$

Demonstração. Segue do quinto item do Lema 1 juntamente como o fato de que de que comutadores são centrais módulo T^3. $\square$

Definição 19. *Para cada $n \geq 2$, definimos $\mathcal{C}_n$ como sendo o conjunto formado por todos os elementos da forma*

$$v = [x_1 ... x_s, x_{s+1} x_{i_{s+2}} ... x_{i_{n-2k}} [x_{j_1}, x_{j_2}] ... [x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]]$$

tais que $0 \leq 2k < n$, $1 \leq s < n - 2k$, $\{i_{s+2}, ..., i_{n-2k}\} \cup \{j_1, ..., j_{2k}\} = \{s+2, ..., n\}$, $i_{s+2} < ... < i_{n-2k}$ e $j_1 < ... < j_{2k}$.

Proposição 7. *Para cada $n \geq 2$, o conjunto de todos os elementos da forma $v + T_n^3$, onde $v \in \mathcal{C}_n$, é uma base para o espaço quociente $(S_n^2 + T_n^3)/T_n^3$. Ademais,*

$$\dim((S_n^2 + T_n^3)/T_n^3) = 2^{n-2}.$$

Demonstração. Denotemos por V o subespaço de $(S_n^2 + T_n^3)/T_n^3$ gerado por $\overline{\mathcal{C}_n} = \{\overline{c} = c + T_n^3 \mid c \in \mathcal{C}_n\}$. Como primeiro passo da presente demonstração, mostremos que $V = (S_n^2 + T_n^3)/T_n^3$. É fato conhecido que S_n^2 é gerado pelos elementos da forma $[x_{i_1} ... x_{i_k}, x_{i_{k+1}} ... x_{i_n}]$, com $\{i_1, ..., i_k, i_{k+1}, ..., i_n\} = J_n$. Direcionemos as nossas atenções aos monômios $x_{i_1} ... x_{i_k}$ e $x_{i_{k+1}} ... x_{i_n}$. Recorrendo à Proposição 5 e ao Lema 11 vemos que esses elementos podem ser escritos, módulo $T_k^3(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$ e módulo $T_{n-k}^3(i_{k+1}, ..., i_n)$, respectivamente, como combinações lineares de produtos regulares da forma $C_1 ... C_s Y$ e $C_1^{'} ... C_{s'}^{'} Y^{'}$, onde $\deg(C_1 ... C_s Y) = k$, $\deg(C_1^{'} ... C_{s'}^{'} Y^{'}) = n - k$ e $\deg C_i = \deg C_{j'}^{'} = 2$. Fazendo profícuo uso da bilinearidade dos comutadores, podemos, de forma mais específica, redirecionar nossas atenções às parcelas $[C_1 ... C_s Y, C_1^{'} ... C_{s'}^{'} Y^{'}]$. Notemos que, segundo o terceiro item do Lema 10, temos

$$\begin{aligned}
[C_1 ... C_s Y, C_1' ... C_{s'}' Y'] &= C_1 ... C_s [Y, C_1' ... C_{s'}' Y'] + \underbrace{[C_1 ... C_s, C_1' ... C_{s'}' Y'] Y}_{\in T_n^3} \\
&\equiv C_1 ... C_s [Y, C_1' ... C_{s'}' Y'] = C_1 ... C_s C_1' ... C_{s'}' [Y, Y'] \\
&+ \underbrace{C_1 ... C_s [Y, C_1' ... C_{s'}'] Y'}_{T_n^3} \equiv C_1 ... C_s C_1' ... C_{s'}' [Y, Y'] \\
&\equiv [Y, Y'] C_1 ... C_s C_1' ... C_{s'}' \pmod{T_n^3}.
\end{aligned}$$

Nesse momento, usando novamente o Lema 10, observemos que podemos, módulo T^3, organizar as variáveis do polinômio $C_1 ... C_s C_1^{'} ... C_{s'}^{'}$ de modo a deixar os índices em ordem crescente da esquerda para direita, e consequentemente pôr o polinômio $[Y, Y^{'}] C_1 ... C_s C_1^{'} ... C_{s'}^{'}$ sob as condições do Lema 13, o qual nos dá garantia de podermos escrever este polinômio como combinação linear, módulo T_n^3, dos polinômios da forma

$$[x_{r_1}, x_{r_2}...x_{r_{n-2p}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2p-1}}, x_{t_{2p}}] \tag{2.10}$$

onde $r_2 < ... < r_{n-2p}$ e $r_1 < t_1 < .... < t_{2p}$.

Segundo as condições impostas nos índices dos polinômios da forma (2.10), auferimos que $r_1 = 1$ ou $r_2 = 1$.

Observemos que para $r_1 = 1$ (consequentemente, $r_2 = 2$ ou $t_1 = 2$), temos, pelo Lema 15, que os elementos em (2.10), por sua vez, podem ser escritos como combinação linear, módulo T_n^3, dos elementos

$$[x_1, x_2x_{r_3}...x_{r_{n-2q}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}]$$

onde $\{3, ..., n\} = \{r_3, ..., r_{n-2q}\} \cup \{t_1, ..., t_{2q}\}$, $r_3 < ... < r_{n-2q}$ e $t_1 < ... < t_{2q}$. Agora, desde que

$$\begin{aligned} & [x_1, x_2x_{r_3}...x_{r_{n-2q}}[x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}]] = \qquad (2.11) \\ = \; & \underbrace{x_2x_{r_3}...x_{r_{n-2q}}[x_1,[x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}]]}_{\in T_n^3} + [x_1, x_2x_{r_3}...x_{r_{n-2q}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}] \\ \equiv \; & [x_1, x_2x_{r_3}...x_{r_{n-2q}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}] \pmod{T_n^3}. \end{aligned}$$

os polinômios da forma (2.10) com $r_1 = 1$, módulo T_n^3, pertencem a V.

Se por outro lado tivermos $r_2 = 1$, então cada elemento em (2.10) tem o formato

$$\underbrace{[x_s, x_1...x_{s-1}x_{r_{s+1}}...x_{r_{n-2q}}]}_{w}[x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}], \tag{2.12}$$

onde $s = r_1$. Neste momento, ao recorrermos à segunda identidade do Lema 2, segue que

$$\begin{aligned} w \;\equiv\; & [x_1...x_{s-1}x_s, x_{r_{s+1}}...x_{r_{n-2q}}] \\ - \; & [x_1...x_{s-1}, x_sx_{r_{s+1}}...x_{r_{n-2q}}] \pmod{T^3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & [x_s, x_1...x_{s-1}x_{r_{s+1}}...x_{r_{n-2q}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}] \\ \equiv \; & [x_1...x_{s-1}x_s, x_{r_{s+1}}...x_{r_{n-2q}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}] \\ - \; & [x_1...x_{s-1}, x_sx_{r_{s+1}}...x_{r_{n-2q}}][x_{t_1}, x_{t_2}]...[x_{t_{2q-1}}, x_{t_{2q}}] \pmod{T_n^3}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Lema 16 no primeiro termo do segundo membro da última congruência e, em seguida, usando o mesmo artifício exibido em (2.11) em cada parcela resultante, obtemos claramente que os elementos em (2.12), consequentemente os elementos em (2.10), pertencem a V módulo T_n^3. Pelo que foi feito anteriormente, observemos que cada elemento da forma $[x_{i_1}...x_{i_k}, x_{i_{k+1}}...x_{i_n}]$, módulo T_n^3, pertence a V, e consequentemente temos

$$\frac{S_n^2 + T_n^3}{T_n^3} = V.$$

Mostremos agora a independência linear do conjunto $\overline{\mathcal{C}_n}$. Comecemos por observar que, segundo as condições impostas na Definição 19, os elementos de $\mathcal{C}_n$ dependem apenas de s e do conjunto $J = \{j_1, ..., j_{2k}\}$. Usemos indução em n. Evidentemente para $n = 2$ nada se tem a fazer, pois $\mathcal{C}_2 = \{[x_1, x_2]\}$. Sendo $s > 2$, suponha, pois, em um processo indutivo, que o resultado seja válido para todo natural menor do que n, e imaginemos uma combinação linear tal que

$$\sum_{s,J} \alpha_{s,J}[x_1...x_s, x_{s+1}x_{i_{s+2}}...x_{i_{n-2k}}[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]] \equiv 0 \pmod{T_n^3} \quad (2.13)$$

com $\alpha_{s,J} \in K$. Substituindo em (2.13) x_1 por 1 e x_l por x_{l-1}, para cada $2 \leq l \leq n$, pelo fato de T^3 ser T-ideal temos que

$$\sum_{s,J} \alpha_{s,J}[x_1...x_{s-1}, x_s x_{i_{s+2}-1}...x_{i_{n-2k}-1}[x_{j_1-1}, x_{j_2-1}]...[x_{j_{2k-1}-1}, x_{j_{2k}-1}]] \equiv$$
$$\equiv \quad 0 \pmod{T_{n-1}^3}$$

com $s > 1$ e $J = \{j_1, ..., j_{2k}\}$, pois com essas substituições os termos nos quais tem-se $s = 1$ obviamente se anulam. Quanto aos demais termos, usamos a hipótese de indução para arguir que seus coeficientes são iguais a zero. Dessa maneira, em (2.13) ficamos apenas com os termos nos quais se tem $s = 1$, isto é,

$$\sum_{J} \alpha_{1,J}[x_1, x_2 x_{i_3}...x_{i_{n-2k}}[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]] \equiv 0 \pmod{T_n^3}$$

onde $J = \{j_1, ..., j_{2k}\} \subseteq \{3, ..., n\}$ e $\{i_3, ..., i_{n-2k}\} = \{3, ..., n\} - J$. Logo, valendo-se do Lema 17 e da identidade em (2.11), temos

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv \sum_J \alpha_{1,J}[x_1, x_2x_{i_3}...x_{i_{n-2k}}[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]] \\
&\equiv \sum_J \alpha_{1,J}[x_1, x_2x_{i_3}...x_{i_{n-2k}}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \\
&\equiv \sum_J \alpha_{1,J}\left(\sum_{t=2}^{n-2k}[x_1, x_{i_t}]x_2...x_{i_{t-1}}x_{i_{t+1}}...x_{i_{n-2k}}\right)[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \\
&\equiv \sum_J \alpha_{1,J}[x_1, x_2][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]x_{i_3}...x_{i_{n-2k}} \\
&+ \textstyle\sum_J \sum_{t=3}^{n-2k} \alpha_{1,J}[x_1,x_{i_t}][x_{j_1},x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}},x_{j_{2k}}]x_2x_{i_3}...x_{i_{t-1}}x_{i_{t+1}}...x_{i_{n-2k}} \pmod{T_n^3}.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 10, podemos assumir que $i_t < j_1$, e assim concluir que as parcelas do último polinômio são elementos (módulo T_n^3) distintos da base de Specht de P_n/T_n^3 (vide Lema 11) . Portanto, cada coeficiente $\alpha_{1,J}$ é igual a zero e portanto concluímos que, de fato, $\overline{\mathcal{C}_n}$ é linearmente independente.

Por último, mostremos que

$$\dim((S_n^2 + T_n^3)/T_n^3) = 2^{n-2}.$$

Comecemos essa etapa por afirmar que se v_1 e v_2 são elementos em $\mathcal{C}_n$ tais que $v_1 + T_n^3 = v_2 + T_n^3$, então $v_1 = v_2$. Ora, imaginemos que ao invés disso tivéssemos que $v_1 \neq v_2$, isto é, $0 \neq v_1 - v_2$ em T_n^3. Então, por (2.11) temos

$$
\begin{aligned}
v_1 &= [x_1...x_s, x_{s+1}x_{i_{s+2}}...x_{i_{n-2k}}[x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}]] \\
&\equiv [x_1...x_s, x_{s+1}x_{i_{s+2}}...x_{i_{n-2k}}][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}].
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
v_2 &= [x_1...x_t, x_{t+1}x_{l_{t+2}}...x_{l_{n-2k_1}}[x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}]...[x_{\gamma_{2k_1-1}}, x_{\gamma_{2k_1}}]] \\
&\equiv [x_1...x_t, x_{t+1}x_{l_{t+2}}...x_{l_{n-2k_1}}][x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}]...[x_{\gamma_{2k_1-1}}, x_{\gamma_{2k_1}}],
\end{aligned}
$$

onde os índices em v_1 e v_2 estão sob as condições impostas na Definição 19. Claramente, existem duas situações: $s = t$ e $s \neq t$, digamos $s > t$. Suponhamos a ocorrência da primeira das situações. Como $v_1 \neq v_2$ devem existir, sem perda de generalidade, $s + 2 \leq p \leq n - 2k$ e $1 \leq q \leq 2k_1$ tais que $i_p = \gamma_q$, e assim, fazendo em $v_1 - v_2$ as substituições x_2, ..., $x_s \longrightarrow 1$, $x_{s+1} \longrightarrow x_2$ e $x_{i_{s+2}}$, ..., $x_{i_{n-2k}} \longrightarrow 1$, claramente o resultado pertence a T^3, já que T^3 é um T-ideal. Como $x_{i_p} = x_{\gamma_q}$ foi substituída por 1, temos

$$[x_1, x_2][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \in T^3$$

o que é um absurdo pelo Lema 11. Como última das possibilidades, consideremos a hipótese de ser $s > t$. Então, basta usarmos as substituições $x_1, ..., x_{s-1} \longrightarrow 1$, $x_s \longrightarrow x_1$, $x_{s+1} \longrightarrow x_2$ e $x_{i_{s+2}}, ..., x_{i_{n-2k}} \longrightarrow 1$ em $v_1 - v_2$, para termos também que

$$[x_1, x_2][x_{j_1}, x_{j_2}]...[x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}] \in T^3,$$

o que gera o mesmo absurdo. Dessa forma, devemos ter o afirmado, isto é, $v_1 = v_2$. Diante do exposto, temos, pois, uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $\mathcal{C}_n$ e $\overline{\mathcal{C}_n}$. Optemos assim, por computar o número de elementos de $\mathcal{C}_n$, e, para tal, usemos um processo indutivo em $n \geq 2$. Ora, se $n = 2$, então temos $\mathcal{C}_2 = \{[x_1, x_2]\}$ e assim $|\mathcal{C}_2| = 1 = 2^{2-2}$. Suponhamos, por indução, que para um certo $n \geq 2$ seja verdade que $|\mathcal{C}_n| = 2^{n-2}$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{C}_{n+1}$. Observando detalhadamente a Definição 19 para $\mathcal{C}_{n+1}$, não é difícil notar que os elementos de $\mathcal{C}_{n+1}$, com $s \geq 2$, estão em correspondência biunívoca com os elementos de $\mathcal{C}_n$. Quanto aos elementos de $\mathcal{C}_{n+1}$ tais que $s = 1$, vê-se sem dificuldades que estão em bijeção com os subconjuntos de cardinalidade par de $\{3, ..., n+1\}$. Então, dividindo os elementos de $\mathcal{C}_{n+1}$ segundo os critérios $s = 1$ e $s \geq 2$, e, usando o fato de que $\{3, ..., n+1\}$ tem 2^{n-2} subconjuntos de cardinalidade par, temos

$$|\mathcal{C}_{n+1}| = |\mathcal{C}_n| + 2^{n-2} = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1} = 2^{(n+1)-2}.$$

Isso mostra que o resultado também é válido para $n+1$, e assim, por indução, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$ tal como requerido em tese, o que conclui a nossa demonstração. $\square$

Corolário 4. *Para cada $n \geq 2$, o conjunto de todos os elementos da forma $v + (S_n^2 \cap T_n^3)$, com $v \in \mathcal{C}_n$, é uma base para $S_n^2/(S_n^2 \cap T_n^3)$. Além disso,*

$$\dim \frac{S_n^2}{S_n^2 \cap T_n^3} = 2^{n-2}.$$

Demonstração. Definamos o homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \phi : S_n^2 & \longrightarrow & \frac{S_n^2 + T_n^3}{T_n^3} \\ f & \longmapsto & \phi(f) = \overline{f}. \end{array}$$

É fácil ver que ϕ é uma aplicação bem definida e é um homomorfismo sobrejetivo tal que $Ker\phi = S_n^2 \cap T_n^3$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Homomorfismo, temos

$$\frac{S_n^2}{S_n^2 \cap T_n^3} = \frac{S_n^2}{Ker\phi} \simeq \frac{S_n^2 + T_n^3}{T_n^3}.$$

Daí, pela Proposição 7, $\{c + (S_n^2 \cap T_n^3) \mid c \in \mathcal{C}_n\}$ deve ser uma base de $S_n^2/(S_n^2 \cap T_n^3)$ e

$$\dim \frac{S_n^2}{S_n^2 \cap T_n^3} = \dim \frac{S_n^2 + T_n^3}{T_n^3} = 2^{n-2}.$$

□

Corolário 5. *Para cada $n \geq 2$, temos*

$$\dim(S_n^2 \cap T_n^3) = (n-1)!(n-1) - 2^{n-2}.$$

Demonstração. De fato, pelo corolário anterior temos

$$2^{n-2} = \dim \frac{S_n^2}{S_n^2 \cap T_n^3} = \dim S_n^2 - \dim(S_n^2 \cap T_n^3).$$

e portanto

$$\dim(S_n^2 \cap T_n^3) = (\dim S_n^2) - 2^{n-2} = (n-1)!(n-1) - 2^{n-2}.$$

□

Teorema 11. *Seja $n \geq 2$. Então, A_n, B_n e $\mathcal{C}_n$ são subconjuntos dois a dois disjuntos tais que $A_n \cup B_n \cup \mathcal{C}_n$ é uma base para $S_n^2 + T_n^3$. Além disto,*

$$\dim(S_n^2 + T_n^3) = n! - 2^{n-2}.$$

Demonstração. Basta recordar $\overline{\mathcal{C}_n}$ é base para $(S_n^2 + T_n^3)/T_n^3$ e que $A_n \cup B_n$ é base para T_n^3, e então recorrer ao quarto item da Observação 15 para ver que A_n, B_n e $\mathcal{C}_n$ são subconjuntos dois a dois disjuntos e que $A_n \cup B_n \cup \mathcal{C}_n$ é uma base para $S_n^2 + T_n^3$.

Logo,

$$\begin{aligned} dim(S_n^2 + T_n^3) &= |A_n \cup B_n \cup C_n| = (|A_n + B_n|) + |C_n| = (n! - 2^{n-1}) + 2^{n-2} \\ &= n! - 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Isso ratifica o resultado enunciado em tese.

Uma outra maneira de calcular a dimensão de $S_n^2 + T_n^3$ seria recorrer às Proposição 6 e 7, pois

$$\begin{aligned} \dim(S_n^2 + T_n^3) &= \dim T_n^3 + \dim \frac{S_n^2 + T_n^3}{T_n^3} = \dim T_n^3 + \dim \frac{S_n^2}{S_n^2 \cap T_n^3} \\ &= (n! - 2^{n-1}) + 2^{n-2} = n! - 2^{n-2}. \end{aligned}$$

□

2.4 Uma Base para $S_n^2 \cap T_n^3$

Temos como objetivo principal, nessa seção, exibir uma base para o espaço $S_n^2 \cap T_n^3$, bem como outros importantes resultados que nos levam a tal obtenção. Recordemos que no Corolário 5 já foi mostrado que a dimensão desse espaço é $(n-1)!(n-1) - 2^{n-2}$.

Comecemos por apresentar, no próximo lema, outras bases para os espaços P_n e S_n^2, as quais servirão para demostrarmos a importante relação $P_n = S_n^2 \oplus P_{n-1}x_n$.

Lema 18. *Para cada $n \geq 2$, temos que:*

(a) O conjunto de todos os elementos multilineares da forma

$$CYx_nC^{'}Y^{'} \in P_n,$$

onde CY e $C^{'}Y^{'}$ são produtos regulares, possivelmente triviais, é uma base para P_n.

(b) O conjunto de todos os elementos multilineares da forma

$$[CYx_n, C^{'}Y^{'}] \in P_n, \tag{2.14}$$

onde CY e $C^{'}Y^{'}$ são produtos regulares, com $C^{'}Y^{'}$ não trivial, é uma base para S_n^2.

Demonstração. (a) No sentido de demonstrar a primeira afirmação, comecemos por observar que P_n é gerado pelos monômios da forma $x_{i_1}...x_{i_n}$ (com $\{i_1, ..., i_n\} = J_n$), e que x_n aparece em cada um desses monômios, digamos $x_{i_1}...x_{i_k}x_nx_{i_{k+1}}...x_{i_{n-1}}$ (com $\{i_1, ..., i_{n-1}\} = J_{n-1}$). Em outra mão, segue da Proposição 5 que os produtos regulares das formas CY e $C^{'}Y^{'}$, de respectivos graus k e $n-1-k$, formam bases para P_k e P_{n-1-k}, respectivamente, e assim podemos escrever $x_{i_1}...x_{i_k}x_nx_{i_{k+1}}...x_{i_{n-1}}$ como combinação linear dos elementos da forma $CYx_nC^{'}Y^{'}$, com CY e $C^{'}Y^{'}$ possivelmente triviais, e portanto esses elementos geram P_n. Agora, seja $\deg CY = k \geq 0$. Observemos que existem $\binom{n-1}{k}$ possibilidades de escolhas de $\{i_1, ..., i_k\}$ em J_{n-1} e que $\{i_{k+1}, ..., i_{n-1}\} = J_n - \{i_1, ..., i_k\}$. Então, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que o número total de elementos da forma $CYx_nC^{'}Y^{'}$ é

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (\dim P_k)(\dim P_{n-1-k}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!k!(n-1-k)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= n(n-1)! = n!.\end{aligned}$$

No que segue, os elementos da forma $CYx_nC'Y'$ geram P_n e são em um total de $n! = \dim P_n$. Portanto esses elementos formam uma base para P_n.

(b) No que diz respeito à segunda afirmação, comecemos por considerar V como sendo o subespaço de P_n gerado pelos os elementos em (2.14). Notemos que $V \subseteq S_n^2$. Pelo fato dos elementos $CYx_nC'Y'$ gerarem P_n e pela igualdade

$$CYx_nC'Y' = [CYx_n, C'Y'] + C'Y'CYx_n$$

segue que, em verdade, os elementos da forma $[CYx_n, C'Y']$ com $C'Y'$ não trivial, geram P_n módulo $P_{n-1}x_n$, ou seja,

$$P_n = V + P_{n-1}x_n$$

e assim

$$\dim P_n = \dim V + \dim(P_{n-1}x_n) - \dim(P_{n-1}x_n \cap V) \leq \dim V + \dim(P_{n-1}x_n).$$

Logo, $\dim V \geq n! - (n-1)! = (n-1)!(n-1)$.

Por outro lado

$$(n-1)!(n-1) \leq \dim V \leq \dim S_n^2 = (n-1)!(n-1).$$

Portanto $\dim V = \dim S_n^2$. Logo, $V = S_n^2$. Em suma, os elementos em (2.14) geram S_n^2 e são em um total de $(n-1)!(n-1) = \dim S_n^2$ e assim, pelo primeiro item da Observação 15, esses elementos formam uma base para S_n^2. $\square$

Lema 19. *Para cada $n \geq 2$, temos que*

$$P_n = S_n^2 \oplus P_{n-1}x_n.$$

Demonstração. Segue da demonstração do segundo item do lema anterior que

$$P_n = S_n^2 + P_{n-1}x_n.$$

No tocante à soma ser direta, basta notar que $\dim P_n = \dim S_n^2 + \dim P_{n-1}x_n$, donde $\dim(S_n^2 \cap P_{n-1}x_n) = 0$.

$\square$

Lema 20. *Para cada $n \geq 3$, temos*

$$T_n^3 = (S_n^2 \cap T_n^3) \oplus (P_{n-1}x_n \cap T_n^3).$$

Demonstração. Claramente, $(S_n^2 \cap T_n^3) + (P_{n-1}x_n \cap T_n^3) \subseteq T_n^3$. Agora, observemos do lema anterior temos que

$$(S_n^2 \cap T_n^3) \cap (P_{n-1}x_n \cap T_n^3) \subseteq S_n^2 \cap P_{n-1}x_n = \{0\}.$$

Agora, observemos que pela Proposição 6 temos

$$\begin{aligned} \dim(P_{n-1}x_n \cap T_n^3) &\geq \dim(P_{n-1}x_n \cap T_{n-1}^3 x_n) = \dim T_{n-1}^3 x_n \\ &= \dim T_{n-1}^3 = (n-1)! - 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Em outra mão, o Corolário 5 nos assegura que

$$\dim(S_n^2 \cap T_n^3) = (n-1)!(n-1) - 2^{n-2}$$

e assim

$$\dim((S_n^2 \cap T_n^3) \oplus (P_{n-1}x_n \cap T_n^3)) \geq$$

$$\geq (n-1)!(n-1) - 2^{n-2} + (n-1)! - 2^{n-2} = n! - 2^{n-1} = \dim T_n^3.$$

Diante disto, temos

$$T_n^3 = (S_n^2 \cap T_n^3) \oplus (P_{n-1}x_n \cap T_n^3), \tag{2.15}$$

uma vez que $(S_n^2 \cap T_n^3) \oplus (P_{n-1}x_n \cap T_n^3)$ é um subespaço de mesma dimensão de T_n^3. $\square$

Corolário 6. *Para cada $n \geq 3$, temos*

$$T_{n-1}^3 x_n = P_{n-1}x_n \cap T_n^3.$$

Demonstração. De fato, basta observar que por, um lado, temos $T_{n-1}^3 x_n \subseteq P_{n-1}x_n \cap T_n^3$, e por outro lado, segue de (2.15) que

$$\begin{aligned} \dim(P_{n-1}x_n \cap T_n^3) &= \dim T_n^3 - \dim(S_n^2 \cap T_n^3) \\ &= (n! - 2^{n-1}) - [(n-1)!(n-1) - 2^{n-2}] \\ &= (n-1)! - 2^{n-2} = \dim T_{n-1}^3 = \dim T_{n-1}^3 x_n. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 20. *Seja n um inteiro positivo.*

(i) Para cada $a \in P_n$, definimos $a^{(1)}$ e $a^{(2)}$ como sendo os únicos elementos de S_n^2 e $P_{n-1}x_n$, respectivamente, tais que

$$a = a^{(1)} + a^{(2)}.$$

A boa definição desses elementos é clara, uma vez que temos $P_n = S_n^2 \oplus P_{n-1}x_n$.

(ii) Para cada $n \geq 3$, definimos o subconjunto D_n de $S_n^2 \cap T_n^3$ por

$$D_n = \{d^{(1)} \mid d \in (A_n \cup B_n) - (A_{n-1}x_n \cup B_{n-1}x_n)\}.$$

Observação 16. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Notemos que:*

1. *Pela Proposição 6, $A_{n-1}x_n \cup B_{n-1}x_n$ é uma base de $T_{n-1}^3 x_n$.*

2. *$A_{n-1}x_n \cup B_{n-1}x_n \subseteq A_n \cup B_n$. Como $A_n \cup B_n$ é linearmente independente, sendo $S = (A_n \cup B_n) - (A_{n-1}x_n \cup B_{n-1}x_n)$, tem-se $T_{n-1}^3 x_n \cap \langle S \rangle = \{0\}$.*

3. *Se $a \in T_n^3$. Então, por um lado existem únicos $d_1 \in S_n^2 \cap T_n^3$ e $d_2 \in P_{n-1}x_n \cap T_n^3$ tais que $a = d_1 + d_2$ (vide Lema 20). Por outro lado, de acordo com a definição anterior, existem únicos $a^{(1)} \in S_n^2$ e $a^{(2)} \in P_{n-1}x_n$ de modo que $a = a^{(1)} + a^{(2)}$. Daí, $a^{(1)} = d_1$ e $a^{(2)} = d_2$, e assim $a^{(1)} \in S_n^2 \cap T_n^3$ e $a^{(2)} \in P_{n-1}x_n \cap T_n^3$. Além disso, pelo corolário anterior, auferimos que $a^{(2)} \in T_{n-1}^3 x_n$.*

4. *Se $f, d \in S$ são tais que $f^{(1)} = d^{(1)}$, então $d - f = d^{(2)} - f^{(2)}$, e assim, como $f - d \in \langle S \rangle$ e $d^{(2)} - f^{(2)} \in T_{n-1}^3 x_n$, devemos ter $d - f = 0$, ou seja, $d = f$. Consequentemente, $|D_n| = |S|$.*

5. *Se $a, b \in P_n$ são tais que $a \equiv b \pmod{S_n^3}$, então $a^{(1)} \equiv b^{(1)} \pmod{S_n^3}$. De fato, existe $c \in S_n^3$ tal que $a = b + c$. Ora, observemos que $c = c^{(1)} + c^{(2)} \in S_n^3 \subseteq S_n^2$ para únicos $c^{(1)} \in S_n^2$ e $c^{(2)} \in P_{n-1}x_n$, e assim $c - c^{(1)} = c^{(2)} \in S_n^2 \cap P_{n-1}x_n = \{0\}$, donde $c^{(1)} = c \in S_n^3$. Agora, observemos que $a = a^{(1)} + a^{(2)}$ e $b = b^{(1)} + b^{(2)}$ para únicos $a^{(1)}, b^{(1)} \in S_n^2$ e $a^{(2)}, b^{(2)} \in P_{n-1}x_n$, e portanto $a^{(1)} + a^{(2)} = b^{(1)} + b^{(2)} + c^{(1)}$, donde, por unicidade, $a^{(1)} = b^{(1)} + c^{(1)}$ e assim $a^{(1)} \equiv b^{(1)} \pmod{S_n^3}$.*

Teorema 12. *Para cada $n \geq 3$, o conjunto D_n é uma base para $S_n^2 \cap T_n^3$.*

Demonstração. De fato, consideremos $d_1, ..., d_t$ elementos em

$$S = (A_n \cup B_n) - (A_{n-1}x_n \cup B_{n-1}x_n)$$

tais que $d_1^{(1)}, ..., d_t^{(1)}$ sejam distintos. Nessas condições, $d_1, ..., d_t$ devem ser distintos. Suponhamos escalares $\alpha_i \in K$ tais que

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i d_i^{(1)} = 0.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i d_i = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i d_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{t} \alpha_i d_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i d_i^{(2)} \in T_{n-1}^3 x_n = P_{n-1}x_n \cap T_n^3.$$

Por outro lado, segue diretamente da Observação 16, item 2, que

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i d_i = 0.$$

Ora, como os elementos $d_i's$ são distintos e pertencem a uma base de T_n^3, obtemos que $\alpha_i = 0$ para cada $i = 1, ..., t$. Segue então que D_n é um conjunto linearmente independente. Agora, recorrendo à Observação 16 (itens 1 e 4), à Proposição 6 e ao Corolário 5, temos

$$\begin{aligned} |D_n| &= |A_n \cup B_n| - |A_{n-1}x_n \cup B_{n-1}x_n| \\ &= (n! - 2^{n-1}) - ((n-1)! - 2^{n-2}) \\ &= n! - (n-1)! - 2^{n-1} + 2^{n-2} \\ &= (n-1)!(n-1) - 2^{n-2} \\ &= \dim(S_n^2 \cap T_n^3). \end{aligned}$$

Em suma, temos o subconjunto D_n linearmente independente em $S_n^2 \cap T_n^3$ e com número de elementos igual à dimensão desse espaço vetorial, critério básico para que, em verdade, D_n seja uma base de $S_n^2 \cap T_n^3$. $\square$

2.5 Uma Base para S_n^3

Esta seção ostenta os resultados que relacionam o T-epaço e o T-ideal de Grassmann. O objetivo principal é mostrar que

$$S^3 = S^2 \cap T^3.$$

O próximo lema mostra a relação $S_n^3 = S_n^2 \cap T_n^3$ para $n = 4$.

Lema 21. *Seja Ω o conjunto de todos os comutadores em S_4^3 do tipo:*

(1) $[x_1, x_i, x_j, x_k]$, *com* $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$.

(2) $[x_1x_i, x_j, x_k]$, *com* $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$ *e* $j < k$.

(3) $[x_1x_i, x_k, x_j]$, *com* $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$ *e* $j < k$, *e*

(4) $[x_1, x_2, x_3x_4]$ *e* $[x_1, x_3, x_2x_4]$.

Auferimos que Ω é uma base para $S_4^2 \cap T_4^3$. Consequentemente, $S_4^3 = S_4^2 \cap T_4^3$.

Demonstração. Ao observar que $S_4^3 \subseteq S_4^2 \cap T_4^3$ e que, segundo o Corolário 5, $S_4^2 \cap T_4^3$ tem dimensão $(4-1)!(4-1) - 2^{(4-2)} = 14$, que é exatamente a quantidade dos elementos de Ω, basta-nos mostrar que Ω é linearmente independente para termos o resultado declarado como tese.

Suponhamos, então, a seguinte combinação linear

$$\begin{aligned} & \lambda_1[x_1, x_2, x_3, x_4] + \lambda_2[x_1, x_2, x_4, x_3] + \lambda_3[x_1, x_3, x_2, x_4] + \lambda_4[x_1, x_3, x_4, x_2] \\ + \ & \lambda_5[x_1, x_4, x_2, x_3] + \lambda_6[x_1, x_4, x_3, x_2] + \lambda_7[x_1x_2, x_3, x_4] + \lambda_8[x_1x_3, x_2, x_4] \\ + \ & \lambda_9[x_1x_4, x_2, x_3] + \lambda_{10}[x_1x_2, x_4, x_3] + \lambda_{11}[x_1x_3, x_4, x_2] + \lambda_{12}[x_1x_4, x_3, x_2] \\ + \ & \lambda_{13}[x_1, x_2, x_3x_4] + \lambda_{14}[x_1, x_3, x_2x_4] = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Fazendo as seguintes substituições $x_1 \longrightarrow 1$, $x_2 \longrightarrow 1$, $x_3 \longrightarrow 1$ e $x_4 \longrightarrow 1$, uma de cada vez, no somatório acima, obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_7[x_2, x_3, x_4] + \lambda_8[x_3, x_2, x_4] + \lambda_9[x_4, x_2, x_3] + \lambda_{10}[x_2, x_4, x_3] + \\ \lambda_{11}[x_3, x_4, x_2] + \lambda_{12}[x_4, x_3, x_2] = 0 \\ \lambda_7[x_1, x_3, x_4] + \lambda_{10}[x_1, x_4, x_3] + \lambda_{14}[x_1, x_3, x_4] = 0 \\ \lambda_8[x_1, x_2, x_4] + \lambda_{11}[x_1, x_4, x_2] + \lambda_{13}[x_1, x_2, x_4] = 0 \\ \lambda_9[x_1, x_2, x_3] + \lambda_{12}[x_1, x_3, x_2] + \lambda_{13}[x_1, x_2, x_3] + \lambda_{14}[x_1, x_3, x_2] = 0 \end{array} \right.$$

ou melhor

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_7 - \lambda_8)[x_2, x_3, x_4] + (\lambda_9 - \lambda_{10})[x_4, x_2, x_3] + (\lambda_{11} - \lambda_{12})[x_3, x_4, x_2] = 0 \\ (\lambda_7 + \lambda_{14})[x_1, x_3, x_4] + \lambda_{10}[x_1, x_4, x_3] = 0 \\ (\lambda_8 + \lambda_{13})[x_1, x_2, x_4] + \lambda_{11}[x_1, x_4, x_2] = 0 \\ (\lambda_9 + \lambda_{13})[x_1, x_2, x_3] + (\lambda_{12} + \lambda_{14})[x_1, x_3, x_2] = 0 \end{array} \right.$$

Notemos que os elementos nas três últimas igualdades do sistema anterior são da base de Specht, e portanto linearmente independentes, donde segue que

$$\lambda_{10} = \lambda_{11} = 0, \ \lambda_7 = -\lambda_{14} = \lambda_{12} \text{ e } \lambda_8 = -\lambda_{13} = \lambda_9. \tag{2.17}$$

Portanto

$$(\lambda_{12} - \lambda_9)[x_2, x_3, x_4] + \lambda_9[x_4, x_2, x_3] - \lambda_{12}[x_3, x_4, x_2] = 0.$$

Recordemos que $-[x_3, x_4, x_2] = [x_4, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_4]$ (Identidade de Jacobi, Lema 1) e que $[x_4, x_2, x_3] = -[x_2, x_4, x_3]$, e assim

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_{12} - \lambda_9)[x_2, x_3, x_4] - \lambda_9[x_2, x_4, x_3] - \lambda_{12}[x_2, x_4, x_3] + \lambda_{12}[x_2, x_3, x_4] \\ &= (2\lambda_{12} - \lambda_9)[x_2, x_3, x_4] + (-\lambda_{12} - \lambda_9)[x_2, x_4, x_3]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Sendo $[x_2, x_4, x_3]$ e $[x_2, x_3, x_4]$ elementos da base de Specht, temos que $2\lambda_{12} - \lambda_9 = -\lambda_{12} - \lambda_9 = 0$. Daí, $\lambda_{12} = 0$ e $\lambda_9 = 0$. Logo, voltando a (2.17) temos que $\lambda_7 = ... = \lambda_{14}$. Donde, voltando ao somatório em (2.16), vemos que aquele reduz-se, simplesmente, a

$$\begin{aligned} & \lambda_1[x_1, x_2, x_3, x_4] + \lambda_2[x_1, x_2, x_4, x_3] + \lambda_3[x_1, x_3, x_2, x_4] + \lambda_4[x_1, x_3, x_4, x_2] \\ + \; & \lambda_5[x_1, x_4, x_2, x_3] + \lambda_6[x_1, x_4, x_3, x_2] = 0 \end{aligned}$$

De sorte que os elementos nesse último somatório também são elementos da base de Spetch, e assim também devemos ter $\lambda_1 = ... = \lambda_6 = 0$. Isso conclui a arguição no que se refere ao conjunto Ω ser linearmente independente, e, consequentemente, conclui também a demonstração do lema em questão. $\square$

Lema 22. *Coloquemos*

$$z_2 = [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$$

e

$$z_3 = [x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_1, x_4][x_2, x_3]$$

Então, $z_2, z_3 \in T_4^3$ *e*

$$\begin{aligned} z_2^{(1)} &= -([[x_1, x_2]x_4, x_3] + [[x_1, x_3]x_4, x_2]), \\ z_2^{(2)} &= ([x_1, x_2, x_3] + [x_1, x_3, x_2])x_4, \\ z_3^{(1)} &= -([[x_1, x_2]x_4, x_3] + [x_1, [x_2, x_3]x_4] + [x_1, x_4, [x_2, x_3]]), \\ z_3^{(2)} &= ([x_1, x_2, x_3] + [x_1, [x_2, x_3]])x_4. \end{aligned}$$

Consequentemente, $z_2^{(2)}, z_3^{(2)} \in T_4^3$.

Demonstração. De fato. Primeiramente, notemos que usando a identidade $[a,b] = -[b,a]$ juntamente com o segundo item do Lema 10 na segunda parcela de z_2 e de z_3, temos $z_2, z_3 \in T_4^3$. Agora, acompanhemos os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
z_2 &= [x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_3][x_2,x_4] \\
&= [x_1,x_2]x_3x_4 - [x_1,x_2]x_4x_3 + [x_1,x_3]x_2x_4 - [x_1,x_3]x_4x_2 \\
&= ([x_1,x_2]x_3x_4 + [x_1,x_3]x_2x_4) - ([x_1,x_2]x_4x_3) - ([x_1,x_3]x_4x_2) \\
&= ([x_1,x_2]x_3x_4 + [x_1,x_3]x_2x_4) - ([[x_1,x_2]x_4,x_3] + x_3[x_1,x_2]x_4) \\
&- ([[x_1,x_3]x_4,x_2] + x_2[x_1,x_3]x_4) \\
&= ([x_1,x_2]x_3x_4 + [x_1,x_3]x_2x_4 - x_3[x_1,x_2]x_4 - x_2[x_1,x_3]x_4) \\
&- ([[x_1,x_2]x_4,x_3] + [[x_1,x_3]x_4,x_2]).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
z_2^{(1)} &= -([[x_1,x_2]x_4,x_3] + [[x_1,x_3]x_4,x_2]) \in S_n^2; \\
z_2^{(2)} &= [x_1,x_2]x_3x_4 + [x_1,x_3]x_2x_4 - x_3[x_1,x_2]x_4 - x_2[x_1,x_3]x_4 \\
&= \{([x_1,x_2]x_3 - x_3[x_1,x_2]) + ([x_1,x_3]x_2 - x_2[x_1,x_3])\}x_4 \\
&= ([x_1,x_2,x_3] + [x_1,x_3,x_2])x_4 \in P_3x_4.
\end{aligned}$$

Analogamente, para z_3 temos

$$\begin{aligned}
z_3 &= [x_1,x_2][x_3,x_4] - [x_1,x_4][x_2,x_3] \\
&= [x_1,x_2]x_3x_4 - [x_1,x_2]x_4x_3 - x_1x_4[x_2,x_3] + x_4x_1[x_2,x_3] \\
&= [x_1,x_2]x_3x_4 - ([[x_1,x_2]x_4,x_3] + x_3[x_1,x_2]x_4) \\
&- ([x_1x_4,[x_2,x_3]] + [x_2,x_3]x_1x_4) + ([x_4,x_1[x_2,x_3]] + x_1[x_2,x_3]x_4),
\end{aligned}$$

donde

$$z_3^{(1)} = -[[x_1,x_2]x_4,x_3] - [x_1x_4,[x_2,x_3]] + [x_4,x_1[x_2,x_3]]$$

$$\begin{aligned}
z_3^{(2)} &= [x_1,x_2]x_3x_4 - x_3[x_1,x_2]x_4 - [x_2,x_3]x_1x_4 + x_1[x_2,x_3]x_4 \\
&= \{([x_1,x_2]x_3 - x_3[x_1,x_2]) + (x_1[x_2,x_3] - [x_2,x_3]x_1)\}x_4 \\
&= ([x_1,x_2,x_3] + [x_1,[x_2,x_3]])x_4 \in P_3x_4.
\end{aligned}$$

Por último, trocando u por x_1, v por x_4 e w por $[x_2,x_3]$ no segundo item do Lema 2, temos

$$\begin{aligned}
z_3^{(1)} &= -[[x_1,x_2]x_4,x_3] - [x_1x_4,[x_2,x_3]] + [x_4,x_1[x_2,x_3]] \\
&= -[[x_1,x_2]x_4,x_3] - ([x_1x_4,[x_2,x_3]] - [x_4,x_1[x_2,x_3]]) \\
&= -[[x_1,x_2]x_4,x_3] - ([x_1,x_4,[x_2,x_3]] + [x_1,[x_2,x_3]x_4]).
\end{aligned}$$

E o resultado segue. $\square$

Corolário 7. *Temos as seguintes congruências, módulo S^3, para todo $u, v, w, y \in K\langle X \rangle$.*

(1) $[[u,v]y, w] + [[u,w]y, v] \equiv 0$

(2) $[[u,v]y, w] + [u,[v,w]y] \equiv 0$

(3) $[u,v][w,y] + [u,w][v,y] \equiv ([u,v,w] + [u,w,v])y$

(4) $[u,v][w,y] - [u,y][v,w] \equiv ([u,v,w] + [u,[v,w]])y$

(5) $[u,v,w]y + [u,v,y]w \equiv 0.$

Demonstração. Primeiramente, notemos que de acordo com o Lema 22 os elementos $z_2^{(1)}$ e $z_3^{(1)}$ pertencem a $S_4^2 \cap T_4^3 = S_4^3$, e assim $z_2 \equiv z_2^{(2)} \pmod{S_4^3}$ e $z_3 \equiv z_3^{(2)} \pmod{S_4^3}$. Agora, ao usarmos as substituições $x_1 \longrightarrow u$, $x_2 \longrightarrow v$, $x_3 \longrightarrow w$ e $x_4 \longrightarrow y$ em z_2 e z_3, do mesmo lema e do fato de S^3 ser um T-espaço, obtemos as congruências (1), (2), (3) e (4).

Procedemos de forma diferente em (5). Observemos que

$$\begin{aligned}
[u,v,wy] &= [[u,v],wy] = w[[u,v],y] + [[u,v],w]y = [u,v,w]y + w[u,v,y] \\
&= [u,v,w]y + [u,v,y]w + [w,[u,v,y]] \\
&= [u,v,w]y + [u,v,y]w - [[u,v,y],w] \\
&= [u,v,w]y + [u,v,y]w - [u,v,y,w].
\end{aligned}$$

Daí,

$$[u,v,w]y + [u,v,y]w = [u,v,wy] + [u,v,y,w] \in S^3.$$

Portanto,

$$[u,v,w]y + [u,v,y]w \equiv 0 \pmod{S^3}.$$

$\square$

Lema 23. *Se $a \in T_n^3$, então $a^{(1)} \in S_n^3$.*

Demonstração. Note que o Lema 21 juntamente com terceiro item da Observação 16 garantem a veracidade da tese para $n = 4$. Vamos, pois, ao resultado geral. Primeiramente note que T_n^3 é gerado como espaço vetorial pelo conjunto

$$\{h_1[u,v,w]h_2 \mid u,v,w,h_1,h_2 \in K\langle X \rangle\}$$

onde $h_1uvwh_2 \in P_n$. Agora, observemos que

$$h_1[u,v,w]h_2 = [h_1,[u,v,w]]h_2 + [u,v,w]h_1h_2.$$

Como $[h_1, [u, v, w]] = [[u.v], w, h_1] \in S^3$, devemos ter que $[h_1, [u, v, w]]$ é combinação linear de elementos do tipo $[u_1, u_2, u_3]$, e assim, para mostrar o requerido, basta trabalharmos com os elementos da forma $[u, v, w]y$, onde u, v, w e y são monômios com apenas y, possivelmente trivial.

Ao avaliar as possibilidades sobre em qual dos monômios u, v, w ou y figura x_n, comecemos, pois, por assumir que a primeira delas seja x_n figurar em y. Assim, neste caso, y será da forma rx_ns para algum par de monômios r e s (podendo ocorrer $r = 1$ ou $s = 1$). Isso posto, obtemos

$$a = [u, v, w]rx_ns = [[u, v, w]rx_n, s] + s[u, v, w]rx_n.$$

Desde que $a = a^{(1)} + a^{(2)}$ para únicos $a^{(1)} \in S_n^2$ e $a^{(2)} \in P_{n-1}x_n$, auferimos que

$$a^{(1)} = [[u, v, w]rx_n, s] = [[[u, v], w]rx_n, s].$$

Por conseguinte, ao fazermos uso das substituições $u \longrightarrow [u, v]$, $v \longrightarrow w$, $y \longrightarrow rx_n$ e $w \longrightarrow s$ na segunda identidade do Corolário 7, fica fácil observar que

$$a^{(1)} = [[u, v, w]rx_n, s] \equiv -[[u, v], [w, s]rx_n] = [u, v, [w, s]rx_n] \equiv 0 \pmod{S_n^3}.$$

Portanto, neste caso, $a^{(1)} \in S_n^3$.

Como segundo dos casos, assumamos que x_n figure em w. Assim sendo, ao recorrermos à quinta identidade do Corolário 7, obtemos que

$$[u, v, rx_ns]y \equiv -[u, v, y]rx_ns = [v, u, y]rx_ns \pmod{S_n^3}$$

e assim, laçando mão do quinto item da Observação 16, este reduz-se ao primeiro dos casos.

Como terceiro dos casos, admitamos que x_n figure em u, e neste caso procedemos como segue: ao expandir a identidade (2) do Corolário 7 obtemos

$$\begin{aligned} [[u, v]y, w] + [u, [v, w]y] &= [u, v][y, w] + [[u, v], w]y + [v, w][u, y] + [u, [v, w]]y \\ &= [u, v][y, w] + [[u, v], w]y + [v, w][u, y] - [[v, w], u]y \\ &= [u, v][y, w] + [[u, v], w]y + [v, w][u, y] - [v, w, u]y \\ &\equiv 0 \pmod{S_n^3}. \end{aligned}$$

Dessa última obtenção e do fato de que $[v, u][w, y] \equiv [w, y][v, u] \pmod{S_n^3}$, temos

$$\begin{aligned} [[u, v], w]y &\equiv [v, w, u]y - ([u, v][y, w] + [v, w][u, y]) \\ &\equiv [v, w, u]y - ([w, y][v, u] + [w, v][y, u]) \pmod{S_n^3}. \end{aligned}$$

Desse modo, sendo $a = [[u, v], w]y$, pelo obtido anteriormente seguido da identidade em (3) do Corolário 7, temos que

$$\begin{aligned} a &= [u, v, w]y \equiv [v, w, u]y - ([w, y][v, u] + [w, v][v, u]) \\ &\equiv [v, w, u]y - ([w, y, v] + [w, v, y])u \pmod{S_n^3}, \end{aligned}$$

e assim recaímos nos dois primeiros casos.

Por último, se x_n figurar em v, então ao usarmos a igualdade $[u, v] = -[v, u]$ observamos que este caso reduz-se ao penúltimo, e isso legitima o fomentado como tese. □

O próximo resultado a ser apresentado é a importante relação $S^3 = S^2 \cap T^3$, antes, porém, sendo mostrada a relação $S_n^3 = S_n^2 \cap T_n^3$ para todo $n \geq 3$.

Teorema 13. *Temos que $S^3 = S^2 \cap T^3$.*

Demonstração. Claramente temos que $S^3 \subseteq S^2 \cap T^3$ e daí $S_n^3 \subseteq S_n^2 \cap T_n^3$. Intentando mostrar a inclusão contrária, comecemos por tomar $a \in S_n^2 \cap T_n^3$ com $n \geq 3$. Sabemos que existem únicos $a^{(1)} \in S_n^2$ e $a^{(2)} \in P_{n-1}x_n$ tais que $a = a^{(1)} + a^{(2)}$. Assim, temos que $a^{(2)} = a - a^{(1)} \in S_n^2$, donde $a - a^{(1)} \in S_n^2 \cap P_{n-1}x_n = \{0\}$. Portanto, temos $a = a^{(1)} \in S_n^3$ (vide Lema 23). Desde que $a \in S_n^2 \cap T_n^3$ tenha sido tomado arbitrário, obtemos que $S_n^2 \cap T_n^3 \subseteq S_n^3$. Daí, $S^2 \cap T^3 = S^3$ pois $char K = 0$ (veja o Corolário 1).

□

Observação 17. *Seja $n \geq 3$. No Lema 20 foi mostrado que $T_n^3 = (S_n^2 \cap T_n^3) \oplus (P_{n-1}x_n \cap T_n^3)$, de sorte que no Corolário 6 obtivemos que $P_{n-1}x_n \cap T_n^3 = T_{n-1}^3 x_n$. Pelo resultado anterior, $S_n^3 = S_n^2 \cap T_n^3$. Desse modo, obtemos a importante relação*

$$T_n^3 = S_n^3 \oplus T_{n-1}^3 x_n.$$

Para fechar a discussão no presente capítulo, temos claramente que

$$\begin{aligned} T_n^3 &= S_n^3 \oplus T_{n-1}^3 x_n \\ &= S_n^3 \oplus (S_{n-1}^3 \oplus T_{n-2}^3 x_{n-1}) x_n = \\ &= S_n^3 \oplus S_{n-1}^3 x_n \oplus T_{n-2}^3 x_{n-1} x_n = ... \\ &= S_n^3 \oplus S_{n-1}^3 x_n \oplus ... \oplus S_3^3 x_4 x_5 ... x_n. \end{aligned}$$

Como a soma acima é direta, segue diretamente do Teorema 12 que

$$\bigcup_{m=3}^{n} D_m x_{m+1} x_{m+2} ... x_n$$

é uma base para o espaço T_n^3.

Capítulo 3

T-Espaços que não contêm um T-Ideal não Nulo

Vimos ao longo do texto que os T-ideais são casos particulares de T-espaços, de modo que todo T-ideal não nulo contém um T-espaço não nulo (eventualmente próprio). Uma pergunta que surge de forma natural é se a recíproca dessa assertiva seria verdadeira, ou seja, *será que todo T-espaço não nulo contêm um T-ideal não nulo?* Apesar de termos uma resposta positiva a essa questão no caso do T-espaço $C(A)$, dos polinômios centrais de uma PI-álgebra A (lembremos que $T(A) \subseteq C(A)$), em geral, a resposta é negativa. Veremos adiante que o T-espaço S^2, gerado pelo comutador $[x_1, x_2]$, não pode conter um T-ideal não nulo. Consequentemente, S^2 não pode ser o T-espaço $C(A)$ de nenhuma PI-álgebra A.

Neste capítulo vamos sempre considerar K como sendo um corpo de característica zero.

3.1 Codimensões de S^2

As sequências de codimensões de T-espaços são ferramentas robustas no estudo da PI-teoria. Nessa seção, usaremos a sequência de codimensões de S^2 para justificar que este T-espaço não contém um T-ideal não nulo.

Vimos no capítulo 2 que $\dim S_n^2 = (n-1)!(n-1)$. Desde que

$$c_n(S^2) = \dim \frac{P_n}{S_n^2},$$

auferimos que $c_n(S^2) = n! - (n-1)!(n-1) = (n-1)!$. Adiante, obteremos a sequência de codimensões de S^2 de outra forma, usando as identidades polinomiais da álgebra $M_m(K)$ $(m \geq 2)$. Para tanto, precisamos do seguinte lema.

Lema 24. *Seja A uma matriz em $M_n(K)$ tal que $tr(AX) = 0$ para toda matriz $X \in M_n(K)$. Então $A = 0$.*

Demonstração. De fato, basta recordar que sendo $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $X = (x_{ij})_{n\times n}$ tem-se que AX é a matriz $(c_{ij})_{n\times n}$ definida por

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}x_{tj}.$$

donde

$$tr(AX) = \sum_{i=1} c_{ii} = \sum_{i,t=1}^{n} a_{it}x_{ti}.$$

Assim, ao fazermos $X = E_{kl}$(vide Observação 2), obtemos $x_{ti} = 0$ para todo $t \neq k$ ou $i \neq l$, e daí

$$0 = tr(AX) = tr(AE_{kl}) = a_{lk}$$

para quaisquer $1 \leq l, k \leq n$. Portanto temos o resultado requerido. □

Exemplo 27. *Seja $m \geq 2$. Consideremos a álgebra $M_m(K)$, o T-ideal $I = T(M_m(K))$ e*

$$V = \{f(x_1, ..., x_n) \in K\langle X\rangle \mid tr(f(A_1, ..., A_n)) = 0, \forall\ A_1, ..., A_n \in M_m(K)\}$$

o T-espaço do Exemplo 15. Mostremos que $V = I + S^2$. Recordemos que $tr(AB) = tr(BA)$, e assim $tr[A, B] = 0$ para todo $A, B \in M_m(K)$, donde $[x_1, x_2] \in V$. Portanto $S^2 = \langle [x_1, x_2]\rangle^{TE} \subseteq V$. Como, claramente temos $I \subseteq V$, segue que $I + S^2 \subseteq V$. De forma mais sistemática, vamos à inclusão contrária. Seja $f(x_1, ..., x_n) \in V$. Sendo K de característica zero, tem-se que V é gerado pelos seus polinômios multilineares, e assim podemos considerar f multilinear, isto é,

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)}.$$

Agora, observando a igualdade

$$\begin{aligned} x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(j-1)}x_n x_{\sigma(j+1)}...x_{\sigma(n)} &= (x_{\sigma(j+1)}...x_{\sigma(n)})(x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(j-1)}x_n) \\ &+ \underbrace{[x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(j-1)}x_n, x_{\sigma(j+1)}...x_{\sigma(n)}]}_{\in S^2} \end{aligned}$$

com $n = \sigma(j)$, podemos concluir, usando esse mesmo processo em cada monômio de f, que existe um polinômio multilinear $g(x_1, ..., x_{n-1}) \in K\langle X\rangle$ tal que

$$f(x_1, ..., x_n) \equiv g(x_1, ..., x_{n-1})x_n \pmod{S^2}.$$

Como $S^2 \subseteq I + S^2$, por maior razão, temos

$$f(x_1, ..., x_n) \equiv g(x_1, ..., x_{n-1})x_n \pmod{I + S^2}$$

donde $f(x_1, ..., x_n) - g(x_1, ..., x_{n-1})x_n \in I + S^2 \subseteq V$, e assim temos que $g(x_1, ..., x_{n-1})x_n \in V$. Portanto, $tr(g(A_1, ..., A_{n-1})A_n) = 0$ para quaisquer $A_1, ..., A_{n-1}, A_n \in M_m(K)$. Nessas condições, podemos recorrer ao Lema 24 para concluir que $g(A_1, ..., A_{n-1}) = 0$. Sendo $A_1, ..., A_{n-1}$ arbitrárias, auferimos que $g(x_1, ..., x_{n-1}) \in I$, e como I é T-ideal tem-se

$$g(x_1, ..., x_{n-1})x_n \in I \subseteq I + S^2.$$

Consequentemente, $f(x_1, ..., x_n) \in I + S^2$, donde temos a inclusão contrária.

Teorema 14. *Consideremos o T-espaço S^2. Temos $c_n(S^2) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Consideremos o espaço quociente $P_n/(P_n \cap S^2)$ e as circunstâncias do exemplo anterior. Sendo $f(x_1, ..., x_n) \in P_n$, vimos que existe $g(x_1, ..., x_{n-1}) \in P_{n-1}$ de maneira que

$$f(x_1, ..., x_n) \equiv g(x_1, ..., x_{n-1})x_n \pmod{S^2},$$

ou melhor,

$$f(x_1, ..., x_n) \equiv g(x_1, ..., x_{n-1})x_n \pmod{P_n \cap S^2}.$$

Portanto,

$$\{\overline{g(x_1, ..., x_{n-1})x_n} \mid g(x_1, ..., x_{n-1}) \in P_{n-1}\}$$

é o espaço quociente $P_n/(P_n \cap S^2)$. E assim, segue da definição de soma e produto (concatenação) em $P_n/(P_n \cap S^2)$ que, definindo $m_\sigma = x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n-1)}$ para cada
$\sigma \in S_{n-1}$, devemos ter que $\{\overline{m_\sigma x_n} \mid \sigma \in S_{n-1}\}$ gera o espaço quociente $P_n/(P_n \cap S^2)$, donde

$$\dim(P_n/(P_n \cap S^2)) \leq (n-1)!.$$

Afirmamos que o conjunto $\{\overline{m_\sigma x_n} \mid \sigma \in S_{n-1}\}$ é linearmente independente, e portanto

$$c(S^2) = \dim P_n/P_n \cap S^2 = (n-1)!.$$

De fato, suponhamos que

$$\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \lambda_\sigma \overline{m_\sigma x_n} = \overline{0}$$

com $\lambda_\sigma \in K$. Assim, $\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \lambda_\sigma m_\sigma x_n \in S^2$. Logo, pelo que foi feito no exemplo anterior, temos

$$\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \lambda_\sigma m_\sigma x_n \in I = T(M_m(K)).$$

Por outro lado, para $2m \geq n$, $M_m(K)$ não possui identidade de grau $n-1$ (veja o Exemplo 13), e portanto temos que $\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \lambda_\sigma m_\sigma x_n = 0$. Desde que $\{m_\sigma x_n \mid \sigma \in S_{n-1}\}$ é base para $P_{n-1}x_n$, obtemos que $\lambda_\sigma = 0$ para todo $\sigma \in S_{n-1}$, o que ratifica a afirmação feita. □

Corolário 8. *S^2 não contém um T-ideal não nulo.*

Demonstração. Primeiramente, é fato conhecido que para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

$$\lim_{k \to \propto} \frac{a^k}{(k-1)!} = 0,$$

e daí devemos ter $(k-1)! > a^k$ para k suficientemente grande. Suponhamos agora, por contradição, que I seja um T-ideal não nulo contido em S^2. Então devemos ter $c_n(I) \geq c_n(S^2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos, que por um lado temos $c_n(S^2) = (n-1)!$, enquanto por outro lado, o Teorema de Regev-Latyshev (Teorema 8) garante que a sequência de codimensões de I é no máximo exponencial, ou melhor, que existe um inteiro positivo d tal que $(n-1)! \leq c_n(I) \leq d^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo para n suficientemente grande tal como vimos acima. □

3.2 T-Espaços que não contêm um T-Ideal não Nulo

Nessa seção mostraremos uma caracterização, por meio do T-espaço S^2, dos T-espaços que não contêm um T-ideal não nulo.

Introduziremos agora, algumas novas notações. Sejam f um polinômio multilinear e não nulo e $g \in P_n \backslash \{0\}$. Então,

(i) Denotemos por $vr(f)$ o subconjunto de X formado por todas as variáveis das quais f depende.

(ii) Para cada $k \geq 2$, denotemos por $C_k(g)$ o polinômio obtido a partir de g pelas substituições $x_i \longrightarrow x_{i+1+n(k-2)}$ para cada $i = 1, ..., n$. Assim, $C_2(g) = g(x_2, x_3, ..., x_{n+1})$, $C_3(g) = g(x_{n+2}, x_{n+3}, ..., x_{2n+1})$,..., $C_k(g) = g(x_{2+n(k-2)}, x_{3+n(k-2)}, ..., x_{n+1+n(k-2)})$.

Teorema 15. *Seja V um T-espaço de $K\langle X\rangle$. Então, são equivalentes:*

(i) V contém um T-ideal não nulo.

(ii) $V \nsubseteq S^2$.

Demonstração. Suponhamos a veracidade de (i). Pelo estudo da sequência de codimensões de S^2 feito na seção anterior, vimos que este T-espaço não pode conter um T-ideal não nulo. Como por hipótese V contém um T-ideal não nulo, auferimos que S^2 não pode conter V.

Reciprocamente, suponhamos a veracidade de (ii). Como $charK = 0$, sabemos que V é gerado pelos seus polinômios multilineares, e assim, para algum $n \in \mathbb{N}$, deve existir $f(x_1, ..., x_n) \in V \cap P_n$ tal que $f(x_1, ..., x_n) \notin S^2$. Usando a mesma ideia do Exemplo 27, vemos que existe um polinômio multilinear $g(x_2, ..., x_n)$ em $K\langle X\rangle$ tal que

$$f(x_1, ..., x_n) \equiv x_1 g(x_2, ..., x_n) \pmod{S^2}. \tag{3.1}$$

Desde que $f \notin S^2$, obtemos que g é não nulo. Dessa forma, sendo $F = f(x_1, C_2(f), ..., C_n(f))$ e $G = g(C_2(f), ..., C_n(f))$, devemos ter $G \neq 0$ ($g \neq 0$) e, pelo fato de S^2 ser T-espaço, obtemos a partir de (3.1) que

$$F \equiv x_1 G \pmod{S^2}.$$

Por outro lado, notemos que F é um polinômio multilinear pertencente a V, haja vista que V é T-espaço e $f \in V$. Além disso, F é combinação linear de polinômios da forma

$$C_{i_1}(f)...C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)...C_{i_n}(f),$$

onde $\{i_1, ..., i_{k-1}, i_{k+1}, ..., i_n, 1\} = \{1, ..., n\}$. Desde que V é um T-espaço temos que $C_{i_1}(f) \in V$ e logo, pelo Teorema 5, tem-se que $[C_{i_1}(f), h] \in V$ para quaisquer $h \in K\langle X\rangle$. Diante disso, colocando

$$h = C_{i_2}(f)...C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)...C_{i_n}(f)$$

obtemos, mediante a identidade $ab = ba + [a, b]$, que

$$\begin{aligned} & C_{i_1}(f)C_{i_2}(f)...C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)...C_{i_n}(f) \\ \equiv \;& C_{i_2}(f)...C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)...C_{i_n}(f)C_{i_1}(f) \pmod{V}. \end{aligned}$$

Seguindo com esse mesmo processo, auferimos que

$$\begin{aligned} & C_{i_1}(f)C_{i_2}(f)...C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)...C_{i_n}(f) \\ \equiv\ & x_1C_{i_{k+1}}(f)...C_{i_n}(f)C_{i_1}(f)C_{i_2}(f)...C_{i_{k-1}}(f) \pmod{V}. \end{aligned}$$

Dessa forma, também devemos ter

$$F \equiv x_1G \pmod{V}.$$

Daí, $x_1G \in V$, pois $F \in V$, e assim $G \in V$ (fazendo a substituição $x_1 \longrightarrow 1$). Tomando $x_m \in X - vr(x_1G)$, como V é T-espaço e $x_1 \notin vr(G)$, usando a substituição $x_1 \longrightarrow x_mx_1$ em x_1G, também devemos ter $x_mx_1G \in V$. Observemos agora que por V ser T-espaço segue do Teorema 5 que

$$x_1Gx_m - x_mx_1G = [x_1G, x_m] \in V$$

e assim $x_1Gx_m \in V$. Portanto, desde que $G \neq 0$, auferimos que $\langle G\rangle^T$ é um T-ideal não nulo contido em V.

□

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, American Mathematical Society **1**, 449-463 (1950).

[2] C. Bekh-OChir, D. Riley *On the Grassmann T-space*, World Scientific, Journal of Algebra and Its Applications, **3**, 319–336 (2008).

[3] A. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, E. A. Silva, *The central polynomials for the Grassmann algebra*, Israel Journal Mathematical **179**, 127-144 (2010).

[4] F. U. Coelho, M. L. Lourenço, *Curso de Álgebra Linear*, Editora da Universidade de São Paulo, Vol. 34, 2001.

[5] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic **20 (3)**, 188-194 (1981).

[6] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[7] J. B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra, Sixth Edition*, Addison Wesley, New York, 2000.

[8] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs **122** , 2005.

[9] A. V. Grishin, V. V. Shchigolev, *T-Space and Their Applications*, Journal of Mathematical Sciences, **1**, 1800-1876 (2006).

[10] K. Hofman, R. Kunze, *Álgebra Linear*. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1979.

[11] A. Kemer, *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **25**, 359-374 (1985).

[12] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic **26**, 362-397 (1987).

[13] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$*, Journal Algebra **241**, 410-434 (2001).

[14] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Transactions of the American Mathematical Society **181**, 429-438 (1973).

[15] J. B. Olsson, A. Regev, *An application of representation theory to PI-algebras*, American Mathematical Society **55**, 253-257 (1976).

[16] A. Popov, *Identities of the tensor square of a Grassmann algebra*, Algebra and Logic **21**, 296-316 (1982).

[17] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic **12**, 47-63 (1973).

[18] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel Journal of Mathematics **11**, 131–152 (1972).