

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Sobre Subvariedades Riemannianas Imersas em um Produto Warped

por

Wallace Ferreira Gomes <sup>†</sup>

sob orientação do

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes



# Sobre Subvariedades Riemannianas Imersas em um Produto Warped

por

Wallace Ferreira Gomes

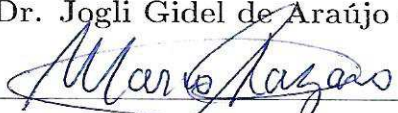
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Jogli Gidel de Araújo - UFRPE

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Marco Antônio Lázaro Velásquez - UFCG

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Julho/2019

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao único, supremo e eterno Deus. Deus este que entrou na historia para fazer a sua soberana vontade, e que age de maneiras que muitas das vezes não entendemos, mas que deve ser glorificado em tudo que vinemos a fazer. Visto isso, como poderia eu não agradecê-lo na primazia deste momento, pois sem ele eu não conseguiria chegar até aqui, visto que são as misericórdias do Pai, a Palavra edificante que vem do Filho e o auxilio constante do Espirito Santo que me tornam, essa pessoa à quem vocês conhecem.

Aos meus pais, Edilma Ferreira e Fábio Gomes, pela educação, incentivo, amor e dedicação para que eu chegasse em mais um degrau. Às minhas irmãs, Vitoria e Renally. Em especial a primeira, que desta vez não seguindo o ocorrido no TCC, não esqueci, e citei primeiramente, e a última, a qual deixo registrado aqui os meus parabéns pela escolha de fazer graduação e mestrado em matemática também.

A Rosilda Silva, minha amada esposa pelo apoio, carinho e incentivo transmitido em muitas palavras, em momentos no qual mesmo sem saber, estava pronunciando palavras com uma função específica: acalmar o meu eu interior desesperado pela pressão do dia a dia. Sem esquecer de meus pequenos Asafe Miguel e João Gabriel, que são uma das razões em eu ter chegado até o fim desta etapa, se não fosse essa família certamente teria desistido nos momentos de pressão.

Aos amigos, Pedro Felype e Roseane Martins, pelo excelente convívio (digamos de passagem pelos estresses também) e momentos de distração nestes dois anos. Aos colegas do mestrado/doutorado Weiller Felipe, Geovane, José Hélio, Renato de Melo, Daniela da Silva, Geisa Gama, Fá, José Lucas, Lucas da Silva, Oliverio Pichardo, Renan Jackson, Lucas Siebra, Ismael Sandro, Caio Anthony e Michele Alessandra (espero não ter esquecido ninguém) pelas altas conversas na sala de estudo, pelo bom convívio e pelos bate-papos no horário do café.

Aos professores Vamdeberg Lopes e Fábio Reis, que além dos ensinamentos transmitidos, sempre me incentivaram (mesmo que eles não saibam disto) e com certeza são os grandes responsáveis por eu estar aqui hoje, por terem sido fontes de investimento no meu crescimento acadêmico aqui na UFCG e na UEPB.

A todos os professores da pós-graduação, em especial a Angelo Roncalli, Marco Aurélio, Alânnio Barbosa e Léo Maques, que foram os professores responsáveis pela ministração dos componentes curriculares oferecidos durante meu período aqui no mestrado e pelas lições de análise e álgebra.

Aos professores Marco Antônio e Henrique Fernandes pelos ensinamentos em geometria/variedades e pela grande participação no meu desenvolvimento como estudante. Em especial ao segundo por me aceitar como orientando, por toda paciência e disposição dedicada a mim. Agradeço muito!

A Unidade Acadêmica de matemática por ter acolhido mais um filho em teu seio. Em especial a Aninha que nós sempre aperreamos atrás de água, café, açúcar, biscoito, e por aí vai.

Aos funcionários que fazem parte deste corpo, a secretária Andrezza, por sempre estar disposta a ajudar na medida do possível.

A CAPES pelo incentivo financeiro.

Ao professor Jogli Gideo por ter aceitado participar da minha banca examinadora.

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta nesta conquista, meus sinceros agradecimentos.

# Dedicatória

*A Deus,  
A minha Esposa e Filhos, e  
Aos meus pais.*

# Epigrafe

*“Não há um único centímetro quadrado, em todos os domínios de nossa existência, sobre os quais Cristo, que é soberano sobre tudo, não clame: ‘É meu!’.”*

*Abraham Kuyper*

# Resumo

Neste trabalho, estudamos resultados de rigidez que garantem que uma subvariedade Riemanniana  $n$ -dimensional imersa em um produto warped do tipo  $I \times_f M^{n+p}$ , onde  $(\log f)'' \geq 0$ , e possuindo função suporte  $\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle$  constante, deve estar contida em um slice do espaço ambiente. Para tal, aplicamos uma versão fraca do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau o qual está diretamente relacionado com o conceito de completude estocástica.

**Palavras chave:** Produto Warped, Variedades Riemannianas Estocasticamente Completas, Slices Totalmente Umbílicos, Princípio do Máximo Fraco de Omori-Yau.



# Abstract

In this work, we study rigidity results which guarantee that an  $n$ -dimensional Riemannian submanifold immersed in a product warped of the type  $I \times_f M^{n+p}$ , where  $(\log f)'' \geq 0$ , and having constant support function  $\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle$ , must be contained in a slice of the ambient space. For this, we apply a weak version of the Omori-Yau's generalized maximum principle which is directly related with the concept of stochastic completeness.

**Keywords:** Warped Product, Stochastically Complete Riemannian Manifolds, Totally Umbilical Slices, Weak Omori-Yau's generalized maximum principle.

# Lista de Figuras

1.1	Representação de sistema de parametrizações de uma Variedade Diferenciável . . . . .	18
2.1	Representação de um Produto Warped . . . . .	36
2.2	Exemplo da Superfície de Revolução em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	47
2.3	Exemplo do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ em Coordenadas Polares . . . . .	48
2.4	Exemplo da folheação do espaço Hiperbólico . . . . .	49
3.1	Esquema da Função Altura . . . . .	56
3.2	Esquema das condições do Teorema 3.5 . . . . .	61
3.3	Esquema após a primeira parte do Teorema 3.5 . . . . .	62

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	12
<b>1 Conceitos Preliminares da Geometria Riemanniana</b>	<b>17</b>
1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	17
1.2 Métricas Riemannianas . . . . .	21
1.3 Conexões . . . . .	23
1.4 Operadores analíticos em Variedades . . . . .	24
1.5 Curvaturas . . . . .	27
1.6 Variedades Riemannianas Completas e Estocasticamente Completas . .	29
1.7 Imersões Isométricas . . . . .	33
<b>2 A Geometria dos produtos Warped</b>	<b>35</b>
2.1 Os Produto Warped . . . . .	35
2.2 Campos Conformes . . . . .	43
2.3 Exemplos de Produto Warped . . . . .	46
2.4 Imersões em Produtos Warped . . . . .	51
<b>3 Resultado de Rigidez e Inexistência</b>	<b>55</b>
3.1 Resultados Auxiliares para o Ambiente $I \times_f M^{n+p}$ . . . . .	55
3.1.1 A Função Altura . . . . .	55
3.1.2 Lemas Auxiliares . . . . .	58
3.2 O Resultado Principal e suas Consequências . . . . .	60

---

3.3 Uma versão estocasticamente completa do Resultado Principal . . . . .	66
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>69</b>

# Introdução

Este trabalho foi construído seguindo o artigo de Araújo, Lima e Velásquez em [8], onde estudamos questões relacionadas as imersões Riemannianas em produtos warped. No entanto este tema tem um aparato histórico percorrendo os anos em sequencia decrescente até meados de 1999, onde identificamos um “início” de trabalhos nesta linha de pesquisa, tal aparato histórico é que gostaríamos de fazer uma diagonal destes resultados, tratando assim nesta breve introdução, como guiza de conhecimento geral para os leitores que não estejam familiarizados com este tipo de ambiente que são denominados produtos warped.

Os campos conformes são objetos importantes que têm sido amplamente usado para entender a geometria das subvariedades imersas em espaços Riemannianos. Neste contexto em 1999, Montiel em [21] estudou a curvatura media constante das hipersuperfícies compactas imersas em produtos warped do tipo  $\mathbb{R} \times_f M^n$  e  $\mathbb{S}^1 \times_f M^n$ . Observando isto, Araújo, Lima e Velásquez, verificaram que esta classe de produtos warped são dotados de um campo vetorial killing conforme dado por  $f\partial_t$ , onde  $\partial_t$  significa o campo de vetores unitários tangente para  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}$ .

Supondo que tais hipersuperfícies sejam gráficos locais em  $M$ , Montiel provou o seguinte teorema:

**Teorema 0.1 (Corolário 7 de [21])** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície compacta orientável imersa em um produto warped do tipo  $\mathbb{R} \times_f P^n$  (e respectivamente em  $\mathbb{S}^1 \times_f P^n$ ), onde  $f$  é uma função positiva em  $\mathbb{R}$  (e respectivamente em  $\mathbb{S}^1$ ) e  $P^n$  uma variedade Riemanniana compacta cujo tensor de Ricci satisfaz*

$$Ric_p \geq (n - 1) \sup(f'^2 - ff'') \langle \cdot, \cdot \rangle_p.$$

*Se  $\Sigma^n$  é localmente o gráfico em  $P^n$  com curvatura média constante, então  $\Sigma^n$  é um slice  $\{s\} \times P^n$  com  $s \in \mathbb{R}$  (e respectivamente com  $s \in \mathbb{S}^1$ ); ou o produto warped tem*

curvatura constante e  $\Sigma^n$  é uma hiperesfera geodésica; ou  $f$  é constante e  $\Sigma^n$  é um produto  $\mathbb{S}^1 \times Q^{n-1}$  imerso em  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times Q^{n-1}$  como  $\gamma \times I_Q$ , onde  $\gamma$  é uma geodésica fechada em  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

Um pouco mais tarde em 2007, esta temática foi abordada em [2] por Alias e Dajczer, onde eles obtiveram resultados para hipersuperfícies completas (não necessariamente compactas) imersas  $\mathbb{R} \times_f M^n$ , como vemos no teorema abaixo:

**Teorema 0.2 (Teorema 2.4 de [2])** *Seja  $f : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_g P^n$  uma hipersuperfície compacta com curvatura média constante  $H$ . Assumindo que  $\mathcal{H}'(t) \geq 0$  e que a função ângulo  $\Theta$  não muda de sinal. Então  $P^n$  é compacta e  $f(\Sigma^n)$  é um slice.*

Posteriormente em 2009, Lima e Caminha em [10], e em 2011 Lima e Aquino em [7], investigaram a geometria de grafos verticais completos com curvatura média constante em um produto warped  $I \times_f M^n$  em condições adequadas sobre os valores da curvatura média e da norma do gradiente da função altura, eles obtiveram teoremas de unicidade relativos a tais gráficos, como vemos nos teoremas abaixo:

**Teorema 0.3 (Teorema 5.1 de [10])** *Seja  $\Sigma$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci globalmente limitada por baixo, e seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  um gráfico vertical  $(n+1)$ -dimensional no espaço hiperbólico, com curvatura média tal que  $0 \leq H \leq 1$ . Se*

$$h \leq -\log(1 + \langle N, \partial_t \rangle),$$

então:

- i.  $H \equiv 1$  em  $\Sigma$
- ii. Se o fecho da imagem do mapa de Gauss Lorentz de  $\psi$  em relação a  $N$  está contido em  $\mathbb{H}^{n+1}$ , então a curvatura escalar  $R$  de  $\Sigma$  é não positiva e globalmente limitada longe do zero.

**Teorema 0.4 (Teorema 3.4 de [7])** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$  um Produto warped que satisfaz a condição de convergência e cuja fibra  $M^n$  possui curvatura seccional não-positiva. Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  um gráfico vertical com curvatura média constante  $H$  e segunda forma fundamental limitada. Suponha que  $\Sigma^n$  está entre dois slices e que*

$$0 \leq H \leq \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f}.$$

Se a função altura  $h$  de  $\Sigma$  satisfaz

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left( \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} - H \right)^\beta,$$

para alguma constante positiva  $\alpha$  e  $\beta$ . Então  $\Sigma^n$  é um slice.

Em 2013, Alias, Impera e Rigoli em [4] caracterizaram as hipersuperfícies com alguma curvatura média constante de ordem mais alta em produtos warped. Sua abordagem foi baseada no uso de uma nova versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau para um operador tipo traço que parece interessante em sua propriedade.

**Teorema 0.5 (Teorema 6.1 de [4])** *Seja  $f : \Sigma^n \rightarrow I \times_{\rho} \mathbb{P}^n$  é uma hipersuperfície compacta a  $k$ -ésima curvatura média  $H_k$  constante, com  $3 \leq k \leq n$ . Supondo que exista um ponto elíptico em  $\Sigma$ . Se  $\mathcal{H}'(t) \geq 0$  e a função ângulo  $\Theta$  não muda de sinal, então  $\mathbb{P}^n$  é necessariamente compacta e  $f(\Sigma^n)$  é um slice.*

Enquanto isso, Dillen et. al. estudaram superfícies angulares constantes imersas em espaços produto do tipo  $\mathbb{R} \times M^n$ , nomeadamente as superfícies para às quais a unidade normal faz um ângulo constante com a direção ao tangente à  $\mathbb{R}$  (verificar por exemplo [13][14][15]). Continuando com este estudo em 2012, Garnica, Palmas e Ruiz-Hernández em [20] demonstraram o seguinte resultado

**Teorema 0.6** *Sejam  $N$  uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa,  $M \subset \mathbb{R} \times N$  uma hipersuperfície imersa cujo campo normal unitário faz um ângulo constante com o campo vetorial tangente à  $\mathbb{R}$ -direção. Se  $M$  tem curvatura média constante, então  $M$  é totalmente geodésica ou é parte de um cilindro com curvatura média constante imerso em  $N$ .*

Em outras palavras, eles mostraram que uma hipersuperfície completa de ângulo constante e curvatura média constante imersas em um produto  $\mathbb{R} \times M^n$ , cuja fibra  $M^n$  tem curvatura de Ricci não-negativa deve ser totalmente geodésica ou fazer parte de um cilindro com curvatura média constante imerso em  $M^n$ . Em seguida Rosenberg, Schulze e Spruck em [27], mostraram que um gráfico mínimo com altura não-negativa funciona em um espaço produto  $\mathbb{R} \times M^n$ , cuja fibra  $M^n$  é completa com curvatura de Ricci não-negativa e curvatura seccional limitada por baixo, deve ser um slice.

Depois, em 2014, Lima, Aquino e Lima Jr. em [6] e novamente Lima, Lima Jr. e Parente em [19] obtiveram algumas outras condições suficientes para assegurar que hipersuperfície completas two-sided em um espaço produto do tipo  $\mathbb{R} \times M^n$ , cuja fibra  $M^n$  tem curvatura seccional limitada por baixo, é um slice do espaço ambiente, desde que sua função angular tenha algum comportamento adequado. No segundo trabalho descrito acima eles provaram o seguinte resultado:

**Teorema 0.7 (Teorema 1 de [19])** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$  uma variedade produto, cuja base  $M^n$  tem curvatura seccional  $K_M$  tal que  $K_M \geq -k$  para algum  $k > 0$ , e seja  $\Psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície completa two-sided com curvatura média constante  $H$  e segunda curvatura média  $H_2$  limitando por baixo. Suponha que a função ângulo  $\Theta$  de  $\Sigma^n$  é limitada pelo zero e sua função altura  $h$  satisfaz uma das condições:*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{(n-1)k} |A|^2$$

para alguma constante  $0 < \alpha < 1$ ; ou

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{n}{(n-1)k} H^2.$$

Então,  $\Sigma^n$  é um slice de  $\overline{M}^{n+1}$ .

Motivado por estes trabalhos que mencionamos anteriormente, os autores de [8], lidaram com subvariedades  $n$ -dimensionais imersas em um produto warped do tipo  $I \times_f M^{n+p}$  cuja função warping  $f$  possui logaritmo convexo. Desta forma provaram o seguinte resultado:

**Teorema 0.8** *Seja  $I \times_f M^{n+p}$  um produto warped tal que  $(\log f)'' \geq 0$ , e seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+p}$  uma subvariedade fechada com campo vetorial curvatura média  $\vec{\mathcal{H}}$  tal que a função suporte  $\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle$  é constante. Então,  $\psi(\Sigma)$  está contida em um slice  $\{\tau\} \times M^{n+p}$ , para alguns  $\tau \in I$ . Além disso, quando  $p = 1$ ,*

$$\phi := \pi_M \circ \psi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$$

é uma hipersuperfície que satisfaz

$$|\vec{\mathcal{H}}|^2 = \frac{\mathcal{H}_\phi^2 + f'(\tau)^2}{f(\tau)^2}.$$

Em [8] os autores também obtiveram uma versão do Teorema 0.8 para o caso não-compacto, e usaram esses resultados para resultados de não-existência. Finalizamos



---

esta introdução descrevendo a sequência de conteúdos do presente trabalho.

No *Capítulo 1*, estudamos e descrevemos os conceitos básicos da Geometria Riemanniana, com adição do conceito de uma variedade ser dita estocasticamente completa, conceito este de fundamental relevância para aplicar o princípio fraco de Omori-Yau.

O *Capítulo 2* é dedicado aos resultados fundamentais das variedades Riemannianas Warped, que são o ambiente onde a subvariedade dos teoremas principais estarão imersas.

No *Capítulo 3*, estudamos o trabalho realizado por Araújo, Lima e Velásquez em [8], referência principal que norteou as diretrizes desta dissertação.

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares da Geometria Riemanniana

Para tornar a leitura do nosso trabalho mais plena, neste capítulo você encontrará a maioria dos conceitos utilizados durante no restante da dissertação que se encontra em suas mãos. Claro que por causa do nosso propósito, omitiremos muitas coisas, no entanto iremos enunciar os resultados e indicar as fontes bibliográficas que poderão ser consultadas para a verificação das devidas demonstrações ou encontrar mais exemplos, pois entendemos que não fazem parte do escopo desta dissertação. Tal atitude é motivada para se ter uma melhor assimilação dos conceitos.

Desta forma, indicamos para auxiliar um maior aproveitamento do Capítulo 1 do trabalho em mãos, as seguintes referências: [16], [18], [12] e [11].

### 1.1 Variedades Diferenciáveis

**Definição 1.1 ( Definição 2.1 do Capítulo 0 em [16] )** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  (ou ainda, uma  $n$ -variedade diferenciável) é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações biunívocas  $\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , de abertos  $\mathcal{U}_\alpha$  em  $M$  tais que:*

i. 
$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) = M;$$

ii. *Para todo par  $\alpha, \beta$  em  $\Lambda$ , com  $\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cap \phi_\beta(\mathcal{U}_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\phi_\alpha^{-1}(W)$  e  $\phi_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha$  e  $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$  são diferenciáveis;*

iii. A família  $\{(\mathcal{U}_\alpha; \phi_\alpha)\}_\alpha$  é máxima relativamente às condições (i.) e (ii.).

Esquemmatizando tem-se:

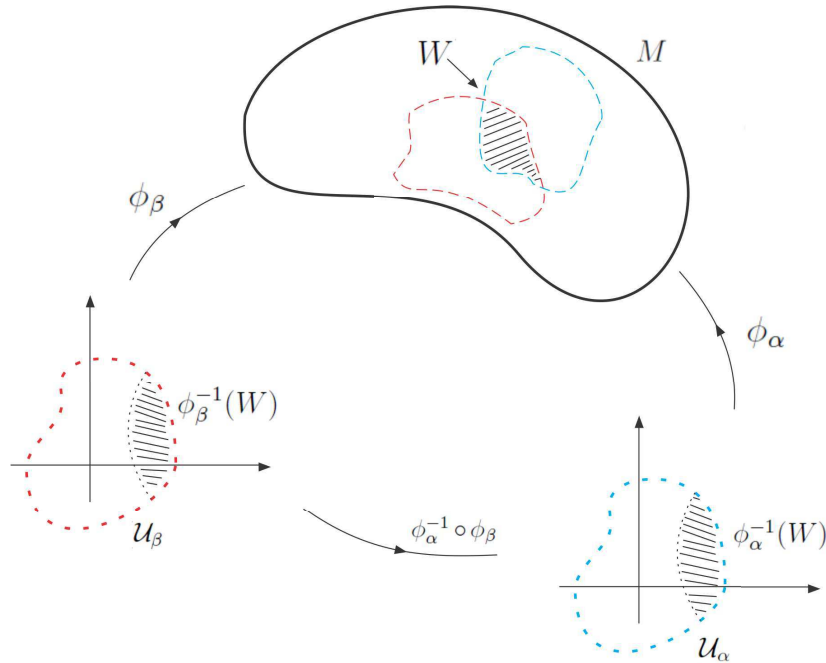


Figura 1.1: Representação de sistema de parametrizações de uma Variedade Diferenciável

Explicitamente, uma variedade diferenciável é uma variedade topológica em que as aplicações de mudanças de coordenadas de um sistema coordenado local para outro, são diferenciáveis. Sendo assim o que definimos como variedade diferenciável é chamado **variedade suave** nos cursos de Variedades Diferenciáveis. Em Geometria Riemanniana, vários conceitos importantes, necessitam de derivadas de várias ordens, portanto costuma-se trabalhar com variedades suaves ( $C^\infty$ ) desde o início e não com variedades diferenciáveis de classe  $C^k$ , para não ter que especificar a todo momento o valor de  $k$  necessário para que certo conceito possa ser definido ou para que certo teorema faça sentido.

Desta forma no que segue utilizamos variedades diferenciáveis de classe ( $C^\infty$ ). O exemplo que segue seria classificado como a variedade suave mais trivial que um estudante de mestrado conhece nos componentes curriculares que ele está estudando no início do curso.

**Exemplo 1** A estrutura diferenciável canônica no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é obtida

tomando tal estrutura de forma a ser diferenciável (máxima em relação à (ii.) na definição 1.1) contendo  $(\mathbb{R}^n, i)$ , onde  $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a aplicação identidade.

Apos definir o ambiente base dos estudos que se segue, definiremos a noção de uma aplicação suave definida em uma variedade suave.

**Definição 1.2 ( Lema 2.1 do Capítulo 2 em [18] )** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional. Uma função  $f : \mathcal{U} \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  sendo  $\mathcal{U}$  um aberto em  $M$ , é suave ou diferenciável de classe  $C^\infty$ , se para cada  $\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ , com  $\phi_\alpha \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ , tivermos*

$$f \circ \phi : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

é de classe  $C^\infty$  e  $W = \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cap \mathcal{U}) \neq \emptyset$ .

**Observação 1.1** *Indicaremos por  $C^\infty(M)$  o anel das funções suaves de  $M$  em  $\mathbb{R}$ .*

Visando o ambiente que será desenvolvido o resultado principal no capítulo 3, o exemplo que segue é a base para poder se definir os chamados produtos warped um pouco mais adiante.

**Exemplo 2** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis, sendo*

$$\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha); \alpha \in M\} \text{ e } \{(\mathcal{U}_\beta, \psi_\beta); \beta \in N\}$$

*estruturas diferenciáveis de  $M$  e  $N$  respectivamente. Considere o produto cartesiano  $M \times N$  e as aplicações*

$$\phi_{\alpha\beta}(p, q) = (\phi_\alpha(p), \psi_\beta(q)), \quad p \in \mathcal{U}_\alpha, \quad q \in \mathcal{U}_\beta.$$

*Desta forma  $\{(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta, \phi_{\alpha\beta}); (\alpha, \beta) \in M \times N\}$  é uma estrutura diferenciável em  $M \times N$ , na qual as projeções  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$  e  $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$  são diferenciáveis. Com esta estrutura diferenciável,  $M \times N$  é chamada a **variedade produto** de  $M$  por  $N$ .*

**Teorema 1.3 ( Teorema 2.10 do Capítulo 0 em [16] )** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável e seja  $p \in M$  tal que  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é um isomorfismo. Então  $f$  é um difeomorfismo local em  $p$ .*

**Definição 1.4 ( Definição 5.1 do Capítulo 0 em [16] )** *Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor  $X(p) \in T_p M$ . Considerando uma parametrização  $\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  escrevemos*

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

**Definição 1.5 ( Lema 5.2 do Capítulo 0 em [16] )** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Então existe um único campo vetorial  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  tal que para todo  $f \in C^\infty(M)$ , temos*

$$Zf = (XY - YX)f = X(Yf) - Y(Xf).$$

*Este campo vetorial  $Z$  é chamado de **colchete de Lie** de  $X$  e  $Y$ , e é normalmente denotado por  $[X, Y] = XY - YX$ .*

**Definição 1.6** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  campos vetoriais,  $p \in M$  e  $\varphi_t$  o fluxo local do campo  $X$  em uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ . A **derivada de Lie** do campo  $Y$  na direção do campo  $X$  em  $p$  é definida por*

$$(\mathfrak{L}_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[d\varphi_{-t}]_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}) - Y_p}{t} = \frac{d}{dt} [d\varphi_{-t}]_{\varphi_t(p)} Y_{\varphi_t(p)} \Big|_{t=0}.$$

**Definição 1.7 ( Definição 20 do Capítulo 1 em [24] )** *Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis,  $\phi \in C^\infty$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $Y \in \mathfrak{X}(N)$ . Dizemos que os campos  $X$  e  $Y$  são  **$\phi$ -relacionados**, se*

$$d\phi_p(X_p) = (Y \circ \phi)(p) = Y(\phi(p)) = Y_{\phi(p)}, \quad \forall p \in M.$$

**Definição 1.8 (Levantamento)** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades e considere a variedade produto  $M \times N$ .*

- (a) *Seja  $f \in C^\infty(M)$ . O **levantamento** de  $f$  à  $M \times N$  é definido por  $\tilde{f} = f \circ \pi \in C^\infty(M \times N)$ .*
- (b) *Se  $v \in T_p M$  e  $q \in N$  então o levantamento de  $v$  à  $(p, q)$  é o único vetor  $\tilde{v} \in T_{(p,q)} M$  tal que  $d\pi(\tilde{v}) = v$ . Como  $\tilde{v} \in T_{(p,q)} M$ ,  $d\sigma(\tilde{v}) = 0$ .*
- (c) *Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , o levantamento de  $X$  à  $M \times N$  é o campo vetorial  $\tilde{X}$  em  $M \times N$  cujo valor em cada ponto  $(p, q) \in M \times N$  é o levantamento de  $X_p$  à  $(p, q)$ . Assim,  $d\pi(\tilde{X}_{(p,q)}) = (X \circ \pi)(p, q) = X_p$  e  $d\sigma(\tilde{X}_{(p,q)}) = 0$ . O sistema de coordenadas produto mostra que  $\tilde{X}$  é suave. Em outras palavras o levantamento de  $X \in \mathfrak{X}(M)$  à  $M \times N$  é o único elemento que de  $\mathfrak{X}(M \times N)$  que é  $\pi$ -relacionado a  $X$  e  $\sigma$ -relacionado ao campo vetorial nulo em  $N$ . E ainda, como  $d\sigma|_{T_{(p,q)} M} = 0$ , o levantamento  $\tilde{X}$  de  $X \in \mathfrak{X}(M)$  a  $M \times N$  é constante em cada fibra  $\{p\} \times N$ .*
- (d) *O conjunto de todos os levantamentos  $\tilde{X}$  de  $x \in \mathfrak{X}(M)$  é denotado por  $\mathfrak{L}(M)$  e tais levantamentos são chamados **horizontais**.*
- (e) *Funções, vetores tangentes e campos de vetores em  $N$  são levantados para  $M \times N$  da mesma forma usando-se a projeção  $\sigma$ . O conjunto de todos os levantamentos  $\tilde{Y}$  de  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  é denotado por  $\mathfrak{L}(N)$ , tais levantamentos são chamados **verticais** e  $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M \times N)$ .*

## 1.2 Métricas Riemannianas

Quando estudamos nos cursos de Geometria Diferencial a geometria intrínseca das Superfícies é necessário um conceito para se ter diferenciabilidade sobre a superfície sem “depende” do ambiente. Desta forma definimos a forma quadrática chamada de **primeira forma fundamental** dada por  $I_p(V) = \langle V, V \rangle_p$ , que se trata de do produto interno do  $\mathbb{R}^3$  induzido sobre cada plano tangente  $T_p\mathcal{S}$  de uma superfície regular  $\mathcal{S}$ . Explicitamente dado um campo vetorial  $V = a_1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + a_2 \frac{\partial \phi}{\partial v}$ , temos

$$I_{(u,v)}(V) = a_1^2 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle + 2a_1 a_2 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle + a_2^2 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle$$

onde  $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular.

Motivado por esse conceito, em Geometria Riemanniana definimos as métricas riemannianas, que nada mais é que a generalização da primeira forma fundamental.

**Definição 1.9 ( Definição 2.1 do Capítulo 1 em [16] )** *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência  $g$  que associa a cada ponto  $p \in M$  uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  bilinear, simétrica, positiva definida no fibrado tangente  $TM$ , que varia diferencialmente no seguinte sentido: Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$  fixos em uma vizinhança  $V$  de  $p \in M$ ,*

$$p \mapsto g_p = \langle X, Y \rangle_p$$

*é diferenciável.*

Esta definição de métrica não depende da escolha do sistema local de coordenadas, ou seja, a diferenciabilidade das funções  $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ . Desta forma as funções  $g_{ij}$  são denominadas coeficientes da métrica Riemanniana.

**Definição 1.10 (Variedade Riemanniana)** *Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma **Variedade Riemanniana**.*

**Exemplo 3** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas e considere  $M \times N$  com a estrutura diferenciável produto. Sejam  $\pi$  e  $\sigma$  as projeções canônicas respectivamente. A aplicação bilinear, simétrica, positiva definida em  $M \times N$  dada por:*

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi(u), d\pi(v) \rangle_p + \langle d\sigma(u), d\sigma(v) \rangle_q,$$

*para todo  $(p, q) \in M \times N$ ,  $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$ . É denominada a **métrica Riemanniana produto** da variedade  $M \times N$ .*

Uma variedade produto munida com a métrica produto é chamada **variedade Riemanniana produto**, que nada mais é que a variedade do Exemplo 2 munida da sua métrica específica.

**Teorema 1.11 ( Proposição 2.10 do Capítulo 1 em [16] )** *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

**Demonstração.** Seja  $\{(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  uma estrutura diferenciável de  $M$  e  $\{f_\alpha\}$  uma partição da unidade de  $M$  subordinada à cobertura  $\{X_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ .

Denotando  $X_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) =: V_\alpha$ , podemos definir para cada  $\alpha \in \Lambda$ , uma métrica Riemanniana induzida pelo sistema de coordenadas. De fato, dado  $p \in M$  e vetores  $v, w \in T_p M$ , podemos escrever na base

$$B_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$$

associada a parametrização  $X_\alpha$ , e usando a forma local dos vetores

$$v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \quad \text{e} \quad w = \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$$

temos que o produto interno

$$\langle v, w \rangle_p^\alpha = \sum_i v^i w^i$$

é uma métrica Riemanniana em  $V_\alpha$  com  $g_{ij}^\alpha = \delta_{ij}$ . Para expandir globalmente em  $M$ , defina

$$\langle v, w \rangle_p = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(p) \langle v, w \rangle_p^\alpha$$

que é uma soma finita pela finitude da partição da unidade, na vizinhança de  $p$ . Basta verificar a positividade pois a simetria decorre de ser campo vetorial.

Ora dado  $k \in T_p M$  não nulo, tem-se

$$g_p(k, k) = \sum_{\alpha} f_\alpha g_\alpha|_p(k, k)$$

que é uma soma não negativa de termos não negativos e pelo menos uma  $f_\alpha$  é 1, e por  $g_\alpha|_p(k, k) > 0$  segue que  $g_p(k, k) > 0$ . ■

**Exemplo 4** *Considere o semiespaço superior de  $\mathbb{R}^n$*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Com a topologia induzida como aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{H}^n$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ , e munido tal espaço com a seguinte aplicação:

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{(x_n)^2},$$

obtemos uma variedade Riemanniana chamada o **espaço hiperbólico**  $n$ -dimensional.

**Definição 1.12 ( Definição 2.12 do Capítulo 1 em [16] )** *Sejam  $(M, g_M)$  e  $(N, g_N)$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é chamado uma **isometria** se*

$$g_M(u, v)_p = g_N(df_p(u), df_p(v))_{f(p)}$$

para todo  $p \in M$ ,  $u, v \in T_p M$ .

### 1.3 Conexões

Ora o nome conexões a priori pode parecer estranho, no entanto este nome tem fundamentação geométrica. Quando estudamos no espaço euclidiano as retas, percebemos que elas são aplicações com aceleração nula. Visto deste ângulo o estudo de geodésicas se torna compatível. Assim seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável  $M$  (não precisa do conceito de métrica, então não é necessário ser uma variedade riemanniana), desta forma não podemos definir

$$\alpha''(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha'(t) - \alpha'(t_0)}{t - t_0}$$

porque  $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$  e  $\alpha'(t_0) \in T_{\alpha(t_0)}M$  vivem em diferentes espaços vetoriais, logo sua diferença não faz sentido.

Portanto a definição vista a seguir, estende à necessidade de definir uma noção de derivação intrínseca para campos vetoriais, e desta forma o nome conexão é decorrente do fato de tender conectar localmente os espaços tangentes de uma variedade diferenciável

**Definição 1.13 ( Definição 2.1 do Capítulo 2 em [16] )** *Uma **conexão afim**  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:



- i.  $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ;
- ii.  $\nabla_X(fY + Z) = f\nabla_X Y + X(f)Y + \nabla_X Z$ .

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ .

**Definição 1.14 ( Corolário 3.3 do Capítulo 2 em [16] )** *Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é **compatível** com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

**Definição 1.15 ( Definição 3.4 do Capítulo 1 em [16] )** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita **simétrica** quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

**Teorema 1.16 ( Teorema 3.6 do Capítulo 1 em [16] )** *Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , com métrica  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$ , denominada **conexão de Levi-Civita** ou **conexão Riemanniana**, tal que:*

- i.  $\nabla$  é simétrica;
- ii.  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana  $g$ .

**Demonstração.** *A Prova do Teorema de Levi-Civita pode ser verificada em [16]. ■*

## 1.4 Operadores analíticos em Variedades

Nesta seção vamos enunciar e provar quando necessário alguns resultados envolvendo o gradiente, o laplaciano de funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em uma variedade.

**Definição 1.17 (Referencial Local Móvel)** *Sejam  $M^n$  uma variedade,  $p \in M$  e  $\mathcal{U}$  uma vizinhança de  $p$  onde é possível definir campos  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$ , de modo que em cada  $q \in \mathcal{U}$ , os vetores  $\{E_i(q)\}$  formam uma base de  $T_q M$ . Diremos, neste caso, que  $\{E_i(q)\}$  é um referencial móvel em  $\mathcal{U}$ . Se o conjunto de campos  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$  são dois a dois ortonormais, isto é, formam uma base ortonormal de  $T_q M$  para cada  $q \in \mathcal{U}$ , então dizemos que  $\{E_i(q)\}$  é um referencial local ortonormal.*

**Definição 1.18 (Gradiente)** Dada  $f \in C^\infty(M)$ , dizemos que o gradiente de  $f$  é o campo vetorial suave  $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ , definido sobre  $M$  por

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

É imediato, a partir da definição acima, que o gradiente de uma função suave é unicamente determinado por 1.18, ou seja, localmente podemos ver que o gradiente é o vetor metricamente equivalente a diferencial de  $f$ . A existência é assegurada pela proposição a seguir.

**Proposição 1.19** Seja  $f \in C^\infty(M)$  e  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal local em uma vizinhança aberta  $U \subset M$ . Então, em  $U$  temos:

$$\nabla f = \sum_{j=1}^n e_j(f)e_j,$$

onde o segundo membro não depende do referencial ortonormal escolhido.

**Demonstração.** Vide [16] ■

**Definição 1.20 (Divergente)** Seja  $X$  um campo vetorial suave em  $M^n$ . A divergência de  $X$  é a função suave em  $M$  dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}(v \mapsto (\nabla_v X)(p)) \end{aligned}$$

onde  $v \in T_p M$  e  $\operatorname{tr}$  denota o traço do operador linear entre chaves.

Dizemos que um referencial ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  em um aberto  $U \subset M$  é dito geodésico em  $p \in U$  se  $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Proposição 1.21** Seja  $X$  um campo diferenciável em  $M^n$  e  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta  $U \subset M$ . Se  $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  em  $U$ , então

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle)$$

Em particular, se o referencial for geodésico em  $p \in U$ , então temos em  $p$  que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n e_i(a_i)$$

*Demonstração.* Vide [16] ■

**Proposição 1.22 (Laplaciano)** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $f \in C^\infty(M)$ . O Laplaciano de  $f$  é a função  $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Quando utilizamos um referencial geodésico em  $p \in U$ , então

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)).$$

*Demonstração.* Vide [16]. ■

**Definição 1.23 (Função Harmônica)** *Sejam  $M$  uma variedade e  $f \in C^\infty(M)$ . A função  $f$  é harmônica quando o Laplaciano de  $f$ , é identicamente nulo, isto é,  $\Delta f = 0$ .*

**Definição 1.24 (Hessiano)** *Seja  $f \in C^\infty(M)$ . O Hessiano de  $f$  em  $p \in M$  é o operador linear  $(\operatorname{Hess}f)_p : T_pM \rightarrow T_pM$ , dado por*

$$(\operatorname{Hess}f)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue da propriedade pontual de um campo diferenciável que o conceito anterior pode ser visto aplicado em campos, ou seja,

$$(\operatorname{Hess}f)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Visto isso, podemos redefinir o laplaciano de  $f$ , como  $\Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess}f)$ . De fato, seja  $U \subset M$  uma vizinhança de  $p$  e  $\{e_i\}_{i=1}^n$ . Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\operatorname{Hess}f)_p &= \langle (\operatorname{Hess}f)_p(e_i), e_i \rangle = \langle (\nabla_{e_i} \nabla f), e_i \rangle_p \\ &= \operatorname{div}(\nabla f)(p) = \Delta f(p). \end{aligned}$$

Lembrando que o Hessiano quando estudamos nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral da matriz Hessiana de uma função  $f$ , podemos deduzir uma forma bilinear simétrica,

$$\begin{aligned} (X, Y) \mapsto \operatorname{Hess}f(X, Y) &= \langle \operatorname{Hess}f(X), Y \rangle = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \\ &= X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f), \end{aligned}$$

é denominada a **forma Hessiana** de  $f$ , que em síntese é a generalização correta em geometria Riemanniana, da definição usual dada no Cálculo Diferencial e Integral para a forma Hessiana de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.25 (Teorema de E. Hopf)** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana orientável compacta e conexa. Seja  $f$  uma função diferenciável em  $M$  com  $\Delta f \geq 0$ . Então  $f \equiv \text{cte}$ . Em particular, as funções harmônicas em  $M$ , isto é, aquelas para as quais  $\Delta f = 0$  são constantes.*

*Demonstração.* Vide [16]. ■

## 1.5 Curvaturas

Em Geometria Diferencial, após a definição da primeira forma fundamental que equivale à métrica riemanniana em Geometria Riemanniana, é necessário a construção de conceitos intrínsecos a superfície, e para isso é construído os conceitos de Curvaturas Gaussiana  $K$  e Média  $H$ .

$$K = \frac{ef - f^2}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{Eg - 2Ff + eG}{EG - F^2}$$

Da mesma forma, quando o Riemann introduziu a noção de métrica em variedades, ele necessitou mostrar que localmente elas não eram localmente isométricas ao espaço euclidiano, e assim introduziu a noção de curvatura que lembraremos abaixo.

**Definição 1.26 ( Definição 2.1 do Capítulo 4 em [16] )** *A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M)$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Observação 1.2** *A curvatura  $R$  é uma aplicação multilinear, e para verificação desta propriedade consultar a proposição 4 do Cap.4 de [16].*

Na presença da métrica e de outro campo vetorial, podemos ver a curvatura  $R$ , como um 4-tensor covariante. No entanto 4-tensores são tão complexos que frequentemente é útil construir tensores mais simples que resumem algumas informações contidas no tensor curvatura. Obviamente, ao simplificar o tensor curvatura estamos perdendo informações, dentre esses tensores mais simples o mais importante é o tensor de Ricci.

**Definição 1.27** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  o tensor de Ricci é definido por*

$$\text{Ric}(X, Y)(p) = \text{tr}\{z \mapsto (R(X, z)Y)(p)\},$$

ou tomando um referencial ortonormal  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  temos

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle.$$

Outro conceito relacionado a curvaturas bastante utilizado e importante para o resultado que o Omori em [23] demonstrou, é o conceito de curvatura seccional que enunciaremos abaixo.

**Definição 1.28** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana e  $\sigma$  um subespaço bi-dimensional de  $T_p M$ . A **curvatura seccional** de  $M$  associada a  $\sigma$  é definida por*

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X \wedge Y|^2} = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

onde  $X, Y \in T_p M$  são quaisquer vetores que formam uma base para  $\sigma$ .

Um fato importante sobre a curvatura seccional  $K(\sigma)$  é que o seu conhecimento para todo  $\sigma$ , determina completamente a curvatura  $R$ , este fato é puramente algébrico, e pode ser visto no Lema abaixo que não demonstraremos, mais que pode ser consultado no Lema 3.3 do Capítulo 3 de [16].

**Lema 1.29** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n \geq 2$ , munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $R : V \times V \times V \rightarrow V$  e  $R' : V \times V \times V \rightarrow V$  aplicações tri-lineares tais que as condições:*

- i.  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- ii.  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle = 0$
- iii.  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle$
- iv.  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle R(X, Y)T, Z \rangle$
- v.  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle$

são satisfeitas. Se  $X, Y$  são dois vetores linearmente independentes, geradores do subespaço bi-dimensional  $\sigma$ . Se para todo  $\sigma \subset V$ ,  $K(\sigma) = K'(\sigma)$ , então  $R = R'$ .

**Demonstração.** A Prova deste Lema pode ser verificada em [16], nos seguintes resultados: **Proposição 2.4**, **Proposição 2.5** e no **Exercício 7** todos do Capítulo 4 em [16]. ■

As variedade Riemannianas de curvatura seccional constante desempenham um papel fundamental no desenvolvimento de muitas linhas de pesquisa da Geometria Riemanniana, pois possuem uma geometria relativamente simples e bem conhecida, servindo como espaços modelos para geometria de comparação.

## 1.6 Variedades Riemannianas Completas e Estocasticamente Completas

Ora nos cursos de Geometria Diferencial, onde nosso objeto de trabalho são as Superfícies Regulares  $\mathcal{S}$ , uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{S}$  é uma geodésica em  $I \subset \mathbb{R}$  se o campo  $\gamma'$  é paralelo ao longo de  $\gamma$ ; isto é,

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0.$$

No caso de variedade diferenciável, a definição é a mesma com as devidas adaptações por causa do objeto de trabalho.

**Definição 1.30 ( Definição 2.1 do Capítulo 3 em [16] )** *Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma **geodésica** em  $t_0 \in I$  se  $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$  no ponto  $t_0$ ; se  $\gamma$  é uma geodésica em  $t$ , para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica.*

Sabemos pela teoria das equações diferenciais ordinárias, existem uma única solução prescrita as condições iniciais de um problema de cauchy. Desta forma temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.31 ( Proposição 2.5 do Capítulo 3 em [16] )** *Dado  $p \in M$ , existe um aberto  $V \subset M$ ,  $p \in V$ , números  $\delta > 0$  e  $\epsilon_1 > 0$  e uma aplicação suave*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \quad \mathcal{U} = \{(q, v) : q \in V, v \in T_q M, |v| \in \epsilon_1\}$$

*tais que a curva  $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$ ;  $t \in (-\delta; \delta)$ , é a única geodésica de  $M$  que no instante  $t = 0$  passa por  $q$  com velocidade  $v$ , para cada  $q \in V$  e cada  $v \in T_q M$  com  $|v| < \epsilon_1$ .*

**Definição 1.32** A aplicação  $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$  dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right),$$

onde  $(q, v) \in \mathcal{U}$ , é chamada a **aplicação exponencial** em  $\mathcal{U}$ .

**Proposição 1.33 ( Proposição 2.9 do Capítulo 3 em [16] )** Para cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{U}_0 \in T_p M$  na qual  $\exp_p$  é um difeomorfismo sobre uma vizinhança  $V_p$  em  $M$ .

Pensando novamente no contexto da Geometria Diferencial, uma superfície regular conexa  $\mathcal{S}$  é denominada completa quando para qualquer  $p \in \mathcal{S}$ , qualquer geodésica parametrizada  $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow \mathcal{S}$ , partindo de  $p = \gamma(0)$ , pode ser estendida em uma geodésica parametrizada  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ . Em variedades segue a mesma definição.

**Definição 1.34 ( Definição 2.2 do Capítulo 7 em [16] )** Uma variedade Riemanniana  $M$  é (**geodesicamente**) **completa** se para todo  $p \in M$ , a aplicação exponencial  $\exp_p$ , está definida para todo  $v \in T_p M$ , isto é, se toda geodésica  $\gamma(t)$  começando em  $p$  está definida para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .

No entanto para melhor clareza do conceito sobre completude da variedade, temos o próximo teorema, que nos dará argumentos validos para visualizar uma variedade diferencial geodesicamente completa como sendo um espaço métrico completo, no sentido que todas as sequencias de cauchy é convergente no mesmo espaço.

**Teorema 1.35 ( Teorema 2.8 do Capítulo 7 em [16] )** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- i.  $\exp_p$  está definida em todo o  $T_p M$ ;
- ii. Os limitados e fechados de  $M$  são compactos;
- iii.  $M$  é completa como espaço métrico;
- iv.  $M$  é geodesicamente completa;
- v. Existe uma sucessão de compactos  $K_n \subset M$ ,  $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$  e  $\cup_n K_n = M$ , tais que  $q_n \notin K_n$  então  $d(p, q_n) \rightarrow \infty$

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

vi.) Para todo  $q \in M$  existe uma geodésica minimizante  $\gamma$  ligando  $p$  à  $q$ .

**Demonstração.** A Prova do Teorema de Hopf-Rinow pode ser verificada em [16]. ■

Em Análise quando se estuda o processo de minimização ou maximização de funcionais, se procura trabalhar com condições suficientes para garantir a existência de uma sequência convergindo para o candidato a máximo ou mínimo, sobre certas condições devidas a geometria do domínio.

Pensando desta forma o Omori em [23], provou que dada uma variedade riemanniana completa com curvatura seccional limitada por baixo, e sendo  $u \in C^2(M)$  uma função suave tal que  $u^* < +\infty$ . Então existe uma sequência de pontos  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  satisfazendo

$$(i.) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}; \quad (ii.) |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}; \quad (iii.) Hess(u)(x_k) < \frac{1}{k} \langle, \rangle \quad (1.1)$$

Um pouco mais tarde o Yau em [29] propôs uma nova versão do resultado citado acima, agora para o caso de uma variedade riemanniana com a curvatura de Ricci limitada por baixo, e substituindo a hipótese (iii.) de (1.1) pelo fato de  $\Delta u(x_k) < \frac{1}{k}$ , com  $k \in \mathbb{N}$ .

**Definição 1.36 (Princípio do Máximo de Omori-Yau)** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa), e função  $u \in C^2(M)$  tal que  $u^* = \sup_M u < +\infty$ . Então existe uma sequência de ponto  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  satisfazendo*

$$(i.) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}; \quad (ii.) |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}; \quad (iii.) \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}$$

Para se poder trabalhar limitação do laplaciano em uma variedade riemanniana não completa, o Pigola, Rigoli e Setti, trabalharam uma equivalência entre o conceito de uma validade ser dita estocasticamente completa e à validade do princípio fraco de Omori-Yau.

Lembremos que a completude estocástica é uma propriedade de um processo estocástico para tempo de vida infinito, ou seja, a probabilidade total da partícula ser encontrada no espaço estado é constantemente igual a 1. Uma condição analítica clássica para expressar a completude estocástica é a seguinte:



**Definição 1.37 ( Definição 2.2 do Capítulo 2 em [5] )** *Uma variedade Riemanniana  $M$  é dita ser **estocasticamente completa** se, para alguns (e, portanto, para qualquer)  $(x, t) \in M \times (0, +\infty)$*

$$\int_{\Sigma} p(x, y, t) dy = 1,$$

onde  $p(x, y, t)$  é o kernel de calor positivo(mínimo) do operador Laplace-Beltrami  $\Delta$ , ou seja, a menor solução fundamental positiva da equação do calor

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta p, \quad \text{em } M$$

nas variáveis  $(x, t)$  (considerando  $y$  fixo), com dados iniciais  $p(\cdot, y, t) \rightarrow \delta_y$ , para  $t \rightarrow 0^+$ , onde  $\delta_y$  é o delta Dirac centrado em  $y$ .

**Exemplo 5** *São exemplos de variedades estocasticamente completas o  $\mathbb{R}^n$ , Ricci solitons (para melhor entendimento verificar a seção 4.1 de [9]) e as Variedades Cartan-Hadamard (para melhor entendimento verificar [26]).*

A condição analítica expressa na Definição 1.37, é equivalente a inúmeras outras, por exemplo uma das mais utilizadas é o teorema enunciado abaixo:

**Teorema 1.38 ( Teorema 2.7 do Capítulo 2 em [5] )** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Então as seguintes propriedades abaixo são equivalentes:*

- i.  $M$  é estocasticamente completa;*
- ii. Para cada  $\lambda > 0$ , a única solução limitada não-negativa  $C^2$  de  $\Delta u \geq \lambda u$  em  $M$  é  $u \equiv 0$ ;*
- iii. Para cada  $\lambda > 0$ , a única solução limitada não-negativa  $C^2$  de  $\Delta u = \lambda u$  em  $M$  é  $u \equiv 0$ ;*
- iv. Para cada  $T > 0$ , a única solução limitada em  $M \times (0, T)$  do problema de cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u \\ u|_{t=0^+} = 0, \text{ no sentido } L^1_{loc}(M) \end{cases}$$

*é  $u \equiv 0$ .*

**Demonstração.** Verificar o Teorema 6.2 de [17]. ■

De acordo o Teorema 11 de [25] ou o Teorema 31 de [26], podemos expressar essa equivalência pelo teorema abaixo, que será o conceito utilizado no próximo capítulo.

**Teorema 1.39** *A variedade Riemanniana  $M^n$  é estocasticamente completa se, e somente se, para cada  $g \in C^2(M)$  satisfazendo  $\sup_M g < \infty$ , existe uma sequência de pontos  $\{p_k\} \subset M^n$  tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(p_k) = \sup_M g \text{ e } \limsup_{k \rightarrow \infty} \Delta g(p_k) \leq 0.$$

## 1.7 Imersões Isométricas

Nesta Seção relembremos as definições e resultados que envolvem as imersões isométricas, onde por causa das propriedades preservadas, haverá alguns abusos de notação. Para melhor entendimento desta Seção indicamos a consulta do Capítulo 1 e 2 de [12].

**Observação 1.3** *Faremos inicialmente algumas convenções que utilizaremos, no decorrer do estudo.*

(i) *Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$  uma imersão isométrica, então para cada  $p \in M$ , existe  $\mathcal{U} \subset M$  vizinhança de  $p$  tal que  $f(\mathcal{U}) \subset \overline{M}$  é uma subvariedade de  $\overline{M}$ . Neste caso faremos as identificações*

$$\mathcal{U} \equiv f(\mathcal{U}) \quad \text{e} \quad v \equiv df_p(v) \in T_{f(p)}\overline{M};$$

(ii) *Para cada  $p \in M$ , o produto interno em  $T_p\overline{M}$  decompõe  $T_p\overline{M}$  na soma direta  $T_p\overline{M} \oplus (T_pM)^\perp$ . Logo, sendo  $v \in T_p\overline{M}$ ,  $v = v^\top + v^\perp$ , onde  $v^\top \in T_pM$  e  $v^\perp \in (T_pM)^\perp$ ;*

(iii) *A conexão de Levi-Civita relativa  $g$  de  $M$ , é dada por*

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top$$

onde  $\overline{X}$  e  $\overline{Y}$  são extensões locais de  $X$  e  $Y$  a  $\overline{M}$ .

**Definição 1.40 (Segunda Forma Fundamental)** *Para cada  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos a **segunda forma fundamental** da imersão  $f$ , como a aplicação  $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$  bilinear, simétrica sendo*

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

que é um campo em  $\overline{M}$  ortogonal a  $M$ .

**Definição 1.41** Para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  definimos

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

a *formula de Gauss* da imersão  $f$ .

**Definição 1.42** Sejam  $(M^n; g)$  uma variedade riemanniana e  $(\bar{M}^{n+p}; \bar{g})$  uma variedade semi-riemanniana. Uma imersão isométrica  $\psi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$  é uma imersão (i.e.,  $\psi$  é uma aplicação suave e sua diferencial é injetiva em todo ponto  $x \in M$ ) que satisfaz  $\psi^* \bar{g} = g$ . Por simplicidade, denotaremos os tensores métricos de  $M$  e  $\bar{M}$  pelo mesmo símbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Diremos que  $\psi(M) \subset \bar{M}$  é uma **hipersuperfície** se  $p = 1$ , i.e., se a codimensão da imersão  $\psi$  for igual a 1.

# Capítulo 2

## A Geometria dos produtos Warped

Neste capítulo, iremos expor a fundamentação teórica básica dos Produtos Warped, como também alguns exemplos em ambiente Riemanniano.

Desta forma para auxiliar o leitor a ter um maior aproveitamento do Capítulo 2 do trabalho em mãos, indicamos algumas referências que são: [11] e [24].

### 2.1 Os Produto Warped

Sejam  $M$  e  $N$  variedades semi-Riemannianas, com  $g_M = \langle, \rangle^M$  e  $g_N = \langle, \rangle^N$  suas respectivas métricas. Consideremos  $\bar{M} = M \times N$  uma variedade produto e sejam  $\pi : \bar{M} \rightarrow M$  e  $\sigma : \bar{M} \rightarrow N$  as projeções canônicas de  $\bar{M}$  sobre  $M$  e  $N$  respectivamente.

Assim a métrica Riemanniana produto  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\bar{M}$  é dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \pi^* \langle \cdot, \cdot \rangle^M + \sigma^* \langle \cdot, \cdot \rangle^N.$$

Com está configuração denotaremos por  $\nabla^M, \nabla^N, \bar{\nabla}$  as conexões Levi-Civita de  $M, N$  e  $\bar{M}$  respectivamente.

**Definição 2.1 ( Definição 33 do Capitulo 7 em [24] )** *Suponhamos  $(M, g_M)$  e  $(N, g_N)$  variedades Semi-Riemannianas, e seja  $f \in C^\infty(M)$  tal que  $f > 0$ . O **produto Warped**  $\bar{M} = M \times_f N$  é a variedade produto  $M \times N$  munida com a métrica*

$$g_f = \pi^*(g_M) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_N),$$

onde chamamos  $f$  de função warping,  $M$  a variedade **base** e  $N$  a variedade **fibra** de  $\bar{M}$ .

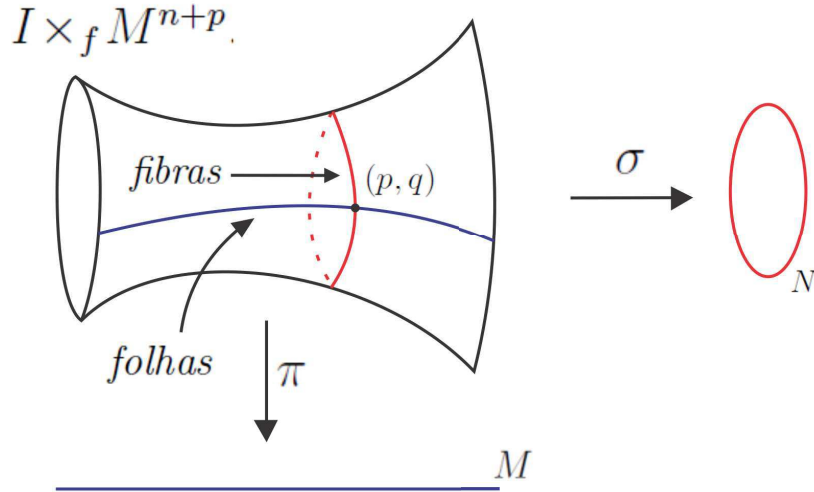


Figura 2.1: Representação de um Produto Warped

Explicitamente, se  $x$  é tangente a  $M \times N$  no ponto  $(p, q)$  então

$$\langle x, x \rangle = \langle d\pi(x), d\pi(x) \rangle_p^M + f^2(p) \langle d\sigma(x), d\sigma(x) \rangle_q^N.$$

Se  $f \equiv 1$ , então  $M \times_f N$  é simplesmente a variedade produto.

**Proposição 2.2** *Seja  $\bar{M}$  um produto warped. Assim como no caso de um produto semi-riemanniano, para cada  $(p, q) \in \bar{M}$ , as fibras  $\{p\} \times N = \pi^{-1}(p)$  e as folhas  $M \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$ , com a métrica induzida de  $g_f$ , são subvariedades semi-riemannianas de  $\bar{M}$ , e a métrica warped em  $\bar{M}$  satisfaz as seguintes condições:*

- i. Para cada  $q \in N$  a aplicação  $\pi|_{M \times \{q\}} =: {}_q\pi$  é uma isometria sobre  $M$ .
- iii. Para cada  $p \in M$  a aplicação  $\sigma|_{\{p\} \times N} =: {}_p\sigma$  é uma homotetia positiva sobre  $N$ , com fator escalar de  $\frac{1}{f(p)}$ .
- iii. Para cada ponto  $(p, q) \in \bar{M}$ , a folha  $\sigma^{-1}(q)$  e a fibra  $\pi^{-1}(p)$  são ortogonais em  $(p, q)$ .

**Demonstração.**

- (i.) Para cada  $q \in N$ , a aplicação  ${}_q\pi$  é um difeomorfismo. Além disso para cada  $k = (p, q) \in M \times \{q\}$  e para cada todos  $u, v \in T_k M \subset T_k(M \times N)$  tem-se

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle d\pi_k(u), d\pi_k(v) \rangle_p^M + f^2(p) \underbrace{\langle d\sigma_k(u), d\sigma_k(v) \rangle_q^N}_{=0} \\ &= \langle d({}_q\pi)_p(u), d({}_q\pi)_p(v) \rangle_p^M \end{aligned}$$

pois  $d({}_q\pi)_p = \pi_k|_{T_k M \times \{q\}}$  e  $d\sigma_k(T_k M) = d\sigma_k((d\sigma_k)^{-1}(\{0\})) = 0$ ,  $\sigma$  é constante na folha  $M \times \{q\}$ , logo induz em  $T_k(M \times \{q\})$  a aplicação linear nula.

(ii.) Para cada  $p \in M$ , a aplicação  ${}_p\sigma$  é um difeomorfismo. Além disso para cada  $r = (p, q) \in \{p\} \times N$  e para cada todos  $w, z \in T_r N \subset T_r(M \times N)$  tem-se

$$\begin{aligned} \langle w, z \rangle &= \underbrace{\langle d\pi_r(w), d\pi_r(z) \rangle_p^M}_{=0} + f^2(p) \langle d\sigma_r(w), d\sigma_r(z) \rangle_q^N \\ &= f^2(p) \langle d({}_p\sigma)_q(w), d({}_p\sigma)_q(z) \rangle_q^N \end{aligned}$$

pois  $d({}_p\sigma)_q = \sigma_r|_{T_r N}$  e  $d\pi_r(T_r N) = d\pi_r((d\pi_r)^{-1}(\{0\})) = 0$ .

(iii.) é consequência imediata da definição do tensor métrico  $g_f$  dada anteriormente.

■

**Definição 2.3** *Os vetores tangentes às folhas são ditos horizontais. Já os vetores tangentes às fibras serão ditos verticais. Desta forma denotaremos por  $\pi$  a projeção ortogonal de  $T_{(p,q)}M$  sobre seu subespaço horizontal  $T_{(p,q)}M \equiv T_{(p,q)}M \times \{q\}$ , e por  $\sigma$  a projeção ortogonal de  $T_{(p,q)}M$  sobre seu subespaço horizontal  $T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}\{p\} \times N$ .*

Dessa forma, pelo item (iii.) da proposição anterior temos,

$$(T_k(\{p\} \times N))^\perp = T_k(M \times \{q\}).$$

Portanto, para campos de vetores verticais  $V, W$  em  $\overline{M}$ , temos a expressão

$$\alpha(V, W) = \overline{\nabla}_V^\perp W$$

onde  $\overline{\nabla}$  denota a conexão de levi-civita de  $\overline{M}$ , fornecendo assim o tensor segunda forma fundamental das fibras.

O espaço dos campos de  $\overline{M} = M \times_f N$  que são levantamentos de campos de  $M$  (respectivamente  $N$ ) será denotado por  $\mathfrak{L}(M)$  (respectivamente  $\mathfrak{L}(N)$ ).

Note que  $\mathfrak{L}(M)$  é um  $C^\infty(\overline{M})$ -módulo, onde  $C^\infty(\overline{M})$  é o anel das funções  $C^\infty(\overline{M})$  que são levantamentos de funções  $C^\infty(M)$ . De modo análogo,  $\mathfrak{L}(N)$  é um  $C^\infty(\overline{M})$ -módulo, em que  $C^\infty(\overline{M})$  é o anel das funções  $C^\infty(\overline{M})$  que são levantamentos de funções  $C^\infty(N)$ .

A relação do produto warped para com a base  $M$  é quase tão simples quanto no caso especial do produto semi-riemanniano; contudo a relação para com a fibra  $N$ , geralmente envolve a função warping  $f$ , o que pode acarretar uma dificuldade maior.

**Lema 2.4 ( Lema 34 do Capítulo 7 em [24] )** *Seja  $h \in C^\infty(M)$ . Então o gradiente do levantamento  $\tilde{h} = h \circ \pi$  em  $\overline{M} = M \times_f N$  é o levantamento para  $\overline{M}$  do gradiente de  $h$  em  $M$ .*

**Demonstração.** Devemos primeiramente mostrar que  $\text{grad } \tilde{h}$  é horizontal e  $\pi$ -relacionado a  $\text{grad } h$  em  $M$ .

De fato, em cada  $(p, q) \in M$ , dado o vetor vertical  $v$ , isto é,  $v \in T_{(p,q)}N$ , então

$$\langle \text{grad } \tilde{h}, v \rangle = v(\tilde{h}) = v(h \circ \pi) = (d\pi(v))(h) = 0$$

pois  $d\pi(v) = 0$ . Portanto  $\text{grad } \tilde{h}$  é horizontal.

Agora, dado um vetor horizontal  $u$ , isto é,  $u \in T_{(p,q)}M$ , então

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } \tilde{h}, u \rangle &= \langle d\pi(\text{grad } \tilde{h}), d\pi(u) \rangle_p^M + f^2(p) \langle d\sigma(\text{grad } \tilde{h}), d\sigma(u) \rangle_q^N \\ &= \langle d\pi(\text{grad } \tilde{h}), d\pi(u) \rangle_p^M \\ &= u(\tilde{h}) = u(h \circ \pi) \\ &= d\pi(u)(h) = \langle \text{grad } h, d\pi(u) \rangle_p^M \end{aligned}$$

como  $d(\pi)_p : T_{(p,q)}M \rightarrow T_pM$  é isomorfismo para todo  $(p, q) \in M$ , então

$$d\pi(\text{grad } \tilde{h}) = \text{grad } h, \quad \forall (p, q) \in M.$$

■

No que segue para não confundir a notação e para simplificá-la escreveremos  $h$  para  $\tilde{h} = h \circ \pi$  e  $\text{grad } h$  para  $\text{grad } \tilde{h} = \text{grad}(h \circ \pi)$ .

**Proposição 2.5 ( Proposição 35 do Capítulo 7 em [24] )** *Seja  $\overline{M} = M \times_f N$  um produto warped. Se  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$  e  $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathfrak{L}(N)$ , então:*

i.  $\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$  é o levantamento de  $\nabla_X^M Y$  em  $M$ ;

ii.  $\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V} = \overline{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{X} = \left( \frac{\tilde{X}(f)}{f} \right) \tilde{V}$ ;

$$iii. \bar{\nabla}_{\tilde{V}}^\perp \tilde{W} = \alpha(\tilde{V}, \tilde{W}) = \left( \frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{\tilde{f}} \right) grad \tilde{f};$$

$$iv. \bar{\nabla}_{\tilde{V}}^\top \tilde{W} \in \mathfrak{L}(N)$$

**Demonstração.**

(i.) Devemos mostrar que  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$  é horizontal e  $\pi$ -relacionado com  $\nabla_X^M Y$  em  $M$ . De fato, dado  $\tilde{V}$  um campo vetorial vertical, isto é,  $\tilde{V} \in \mathfrak{L}(N)$ , então pela formula de koszul tem-se

$$\begin{aligned} 2\langle \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{V} \rangle &= \tilde{Y}\langle \tilde{X}, \tilde{V} \rangle + \tilde{X}\langle \tilde{V}, \tilde{Y} \rangle - \tilde{V}\langle \tilde{Y}, \tilde{X} \rangle - \langle [\tilde{Y}, \tilde{V}], \tilde{X} \rangle - \langle [\tilde{X}, \tilde{V}], \tilde{Y} \rangle - \\ &\quad - \langle [\tilde{Y}, \tilde{X}], \tilde{V} \rangle \\ &= -\tilde{V}\langle \tilde{Y}, \tilde{X} \rangle - \langle [\tilde{Y}, \tilde{X}], \tilde{V} \rangle \end{aligned}$$

Como  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$ , temos que  $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathfrak{L}(M)$  é o levantamento de  $[X, Y]$  em  $M$ . Logo  $\langle [\tilde{Y}, \tilde{X}], \tilde{V} \rangle = 0$ . Agora, pela métrica warped, em cada  $x = (p, q) \in \bar{M}$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Y}, \tilde{X} \rangle(p, q) &= \langle d\pi(\tilde{Y}), d\pi(\tilde{X}) \rangle_p^M + f^2(p) \langle d\sigma(\tilde{Y}), d\sigma(\tilde{X}) \rangle_q^N \\ &= \langle (Y \circ \pi)(p, q), (X \circ \pi)(p, q) \rangle_p^M \\ &= \langle (X, Y)^M \circ \pi \rangle(p, q) \end{aligned}$$

isto é,  $\langle \tilde{Y}, \tilde{X} \rangle = \langle Y, X \rangle^M \circ \pi$ , e daí temos

$$\tilde{V}\langle \tilde{Y}, \tilde{X} \rangle = \tilde{V}(\langle Y, X \rangle^M \circ \pi) = d\pi(\tilde{V})(\langle Y, X \rangle^M) = 0.$$

Assim,  $\langle \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{V} \rangle = 0$ , ou seja,  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$  é horizontal.

Agora, dado  $\tilde{Z} \in \mathfrak{L}(M)$ , temos

$$\tilde{Y}\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle = \tilde{Y}(\langle X, Z \rangle^M \circ \pi) = (d\pi(\tilde{Y})\langle X, Z \rangle^M) \circ \pi = (Y\langle X, Z \rangle^M) \circ \pi$$

Logo obtemos que,

$$\begin{aligned} (2\langle d\pi(\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}), d\pi(\tilde{Z}) \rangle_M) \circ \pi &= 2\langle \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \\ &= \tilde{Y}\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle + \tilde{X}\langle \tilde{Z}, \tilde{Y} \rangle - \tilde{Z}\langle \tilde{Y}, \tilde{X} \rangle - \\ &\quad - \langle [\tilde{Y}, \tilde{Z}], \tilde{X} \rangle - \langle [\tilde{X}, \tilde{Z}], \tilde{Y} \rangle - \langle [\tilde{Y}, \tilde{X}], \tilde{Z} \rangle \\ &= (Y\langle X, Z \rangle^M + X\langle Z, Y \rangle^M - Z\langle Y, X \rangle^M - \\ &\quad - \langle [Y, Z], X \rangle^M - \langle [X, Z], Y \rangle^M - \langle [Y, X], Z \rangle^M) \circ \pi \\ &= (2\langle \nabla_X^M Y, Z \rangle^M) \circ \pi \end{aligned}$$



Como  $\pi|_{M \times \{q\}}$  é uma isometria em cada folha segue o resultado.

(ii.) Como

$$0 = [\tilde{X}, \tilde{V}] = \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V} - \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{X}.$$

Logo,  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V} = \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{X}$ . E os campos  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}$  e  $\bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{X}$  são verticais, pois por (2),

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{X} \langle \tilde{V}, \tilde{Y} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{Y} \rangle + \langle \tilde{V}, \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \rangle \\ &\Rightarrow \langle \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{Y} \rangle = -\langle \tilde{V}, \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \rangle \end{aligned}$$

Agora, dado  $\tilde{W} \in \mathfrak{L}(N)$ , pela formula de koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{W} \rangle &= \tilde{V} \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle + \tilde{X} \langle \tilde{W}, \tilde{V} \rangle - \tilde{W} \langle \tilde{V}, \tilde{X} \rangle - \\ &\quad - \langle [\tilde{V}, \tilde{W}], \tilde{X} \rangle - \langle [\tilde{X}, \tilde{W}], \tilde{V} \rangle - \langle [\tilde{V}, \tilde{X}], \tilde{W} \rangle \\ &= \tilde{X} \langle \tilde{W}, \tilde{V} \rangle \end{aligned} \quad (2.1)$$

Donde pela métrica warped, temos para cada  $(p, q) \in \bar{M}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle(p, q) &= \langle d\pi(\tilde{V}), d\pi(\tilde{W}) \rangle_p^M + f^2(p) \langle d\sigma(\tilde{V}), d\sigma(\tilde{W}) \rangle_q^N \\ &= f^2(p) \langle (V \circ \sigma)(p, q), (W \circ \sigma)(p, q) \rangle_q^N \\ &= \bar{f}^2(p, q) (\langle V, W \rangle^N \circ \sigma)(p, q) \end{aligned}$$

isto é,  $\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle = \bar{f}^2(p, q) (\langle V, W \rangle^N \circ \sigma)$ , e daí

$$\begin{aligned} \tilde{X} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle &= \tilde{X} [\bar{f}^2 (\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle^N \circ \sigma)] \\ &= \tilde{X}(\bar{f}) (\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle^N \circ \sigma) + \bar{f}^2 [\tilde{X} (\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle^N \circ \sigma)] \\ &= 2\tilde{f} \tilde{X}(\bar{f}) (\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle^N \circ \sigma) + \bar{f}^2 [f\sigma(\tilde{X}) (\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle^N)] \\ &= 2\tilde{f} \tilde{X}(\bar{f}) \frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{\bar{f}^2} \\ &= \frac{2(\tilde{X}(\bar{f}))}{\tilde{f}} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

Comparando (2.1) e (2.2), obtemos

$$2\langle \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{W} \rangle = \frac{2(\tilde{X}(\bar{f}))}{\tilde{f}} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle, \quad \forall \tilde{W} \in \mathfrak{L}(N).$$

Portanto,  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V} = \left( \frac{\tilde{X}(\bar{f})}{\tilde{f}} \right) \tilde{V}$ .

(iii.) Sabemos que

$$\bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W} = \bar{\nabla}_{\tilde{V}}^{\top} \tilde{W} + \bar{\nabla}_{\tilde{V}}^{\perp} \tilde{W}$$

em cada  $(p, q) \in \bar{M}$ , e  $\bar{\nabla}_{\tilde{V}}^{\top} \tilde{W} \in \mathfrak{X}(M)$ . Assim,

$$\langle \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}, \tilde{X} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\tilde{V}}^{\top} \tilde{W}, \tilde{X} \rangle, \quad \forall \tilde{X} \in \mathfrak{L}(M).$$

Dai pelo item (2), dado  $\tilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$  em que

$$0 = \tilde{V} \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{X}, \tilde{W} \rangle + \langle \tilde{X}, \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W} \rangle.$$

Logo, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}, \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W} \rangle &= -\langle \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{X}, \tilde{W} \rangle \\ &= -\langle \tilde{W}, \frac{(\tilde{X}(\tilde{f}))}{\tilde{f}} \tilde{V} \rangle \\ &= -\frac{(\tilde{X}(\tilde{f}))}{\tilde{f}} \langle \tilde{W}, \tilde{V} \rangle \\ &= -\frac{\langle \tilde{X}, \text{grad} \tilde{f} \rangle}{\tilde{f}} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \\ &= -\left\langle \tilde{X}, \frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{\tilde{f}} \text{grad} \tilde{f} \right\rangle \end{aligned}$$

ou seja,  $\langle \tilde{X}, \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W} \rangle = \left\langle \tilde{X}, \frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{\tilde{f}} \text{grad} \tilde{f} \right\rangle$ .

Portanto,

$$\bar{\nabla}_{\tilde{V}}^{\top} \tilde{W} = \alpha(\tilde{V}, \tilde{W}) = -\left( \frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{\tilde{f}} \right) \text{grad} \tilde{f}.$$

(iv.) Sabemos que  $\mathcal{V}(\bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}) \in \mathfrak{X}(\bar{M})$  e  $d\pi(\mathcal{V}(\bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W})) = 0 \quad \forall (p, q) \in \bar{M}$ , concluimos que  $\mathcal{V}(\bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W})$  é  $\pi$ -relacionado com o  $0 \in \mathfrak{X}(M)$  (*campo nulo*).

Agora, dado  $\tilde{U} \in \mathfrak{L}(N)$ , como  $\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle = \tilde{f}^2(p, q)(\langle V, W \rangle^N \circ \sigma)$ , temos

$$\begin{aligned} \tilde{W} \langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle &= \tilde{W} [\tilde{f}^2(p, q)(\langle V, U \rangle^N \circ \sigma)] \\ &= \tilde{W}(\tilde{f}^2)(\langle V, U \rangle^N \circ \sigma) + \tilde{f}^2 [\tilde{W}(\langle V, U \rangle^N \circ \sigma)] \\ &= 2\tilde{f}(\tilde{W}(\tilde{f}^2))(\langle V, U \rangle^N \circ \sigma) + \tilde{f} [d\sigma \tilde{W} \langle V, U \rangle^N \circ \sigma] \\ &= 2\tilde{f}(\tilde{W}(f \circ \pi))(\langle V, U \rangle^N \circ \sigma) + \tilde{f}^2 [\tilde{W}(\langle V, U \rangle^N \circ \sigma)] \\ &= 2\tilde{f}(d\pi(\tilde{W})(f))(\langle V, U \rangle^N \circ \sigma) + \tilde{f}^2 [\tilde{W}(\langle V, U \rangle^N \circ \sigma)] \\ &= \tilde{f}^2 [W \langle V, U \rangle^N \circ \sigma] \end{aligned}$$

e dai,

$$\begin{aligned}
2\langle \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}, \tilde{U} \rangle &= 2\langle \mathcal{V}(\bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}), \tilde{U} \rangle \\
&= 2(\tilde{f})^2 (\langle d\sigma(\mathcal{V}(\bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W})), d\sigma(\tilde{U}) \rangle^N \circ \sigma) \\
&= \tilde{W} \langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle + \tilde{V} \langle \tilde{U}, \tilde{W} \rangle - \tilde{U} \langle \tilde{W}, \tilde{V} \rangle - \\
&\quad - \langle [\tilde{W}, \tilde{U}], \tilde{V} \rangle - \langle [\tilde{V}, \tilde{U}], \tilde{W} \rangle - \langle [\tilde{W}, \tilde{V}], \tilde{U} \rangle \\
&= \tilde{f}^2 [(W \langle V, U \rangle^N + V \langle U, W \rangle^N - U \langle W, V \rangle^N - \\
&\quad - \langle [W, U], V \rangle^N - \langle [V, U], W \rangle^N - \langle [W, V], U \rangle^N) \circ \sigma] \\
&= (\tilde{f})^2 [2(\langle {}^N \nabla_V W, U \rangle^N \circ \sigma)] \\
&= 2(\tilde{f})^2 (\langle {}^N \nabla_V W, U \rangle^N \circ \sigma)
\end{aligned}$$

ou seja,  $\mathcal{V}(\bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W})$  é *sigma*-relacionado com  ${}^N \nabla_V W$ .

Portanto  $\mathcal{V}(\bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}) = {}^N \nabla_V \tilde{W} \in \mathfrak{L}(N)$  é a conexão riemanniana em cada fibra  $\{p\} \times N$ , pois  $p\sigma$  é uma homotetia em cada fibra  $\{p\} \times N$ .

■

**Corolário 2.6 ( Corolário 36 do Capítulo 7 em [24] )** *As folhas  $M \times \{q\}$  de um produto warped são totalmente geodésicas e as fibras  $\{p\} \times N$  são totalmente umbílicas.*

**Demonstração.** Dividiremos a prova deste resultado em duas partes.

- (i.) Cada folha  $M \times \{q\}$  é uma isometria sobre  $M$ . Dessa forma, dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  existem e são únicos os levantamentos  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$  de  $X$  e  $Y$  em  $\bar{M}$ , respectivamente. Assim em cada  $(p, q) \in \bar{M}$ , pela proposição anterior item (i.), temos

$$\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \bar{\nabla}_{\tilde{X}}^\top \tilde{Y} + \bar{\nabla}_{\tilde{X}}^\perp \tilde{Y} = \bar{\nabla}_{\tilde{X}}^\top \tilde{Y}$$

implicando,

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - {}^M \nabla_X Y = \bar{\nabla}_{\tilde{X}}^\top \tilde{Y} = \bar{\nabla}_{\tilde{X}}^\top \tilde{Y} = 0$$

nos dá a segunda forma fundamental de cada folha  $M \times \{q\}$ . Portanto, cada folha é totalmente geodésica.

(ii.) Cada fibra  $\{p\} \times N$  é uma homotetia sobre  $N$ . Dessa forma, dados  $V, W \in \mathfrak{X}(N)$  existem e são únicos os levantamentos  $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathfrak{L}(N)$  de  $V$  e  $W$  em  $\overline{M}$ , respectivamente. Assim, como em cada  $(p, q) \in \overline{M}$  temos que

$$\overline{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W} = \overline{\nabla}_{\tilde{V}}^{\top} \tilde{W} + \overline{\nabla}_{\tilde{V}}^{\perp} \tilde{W}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha(V, W) &= \overline{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W} - {}^N \nabla_V W \\ &= \overline{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W} - \mathcal{V}(\overline{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}) \\ &= \mathcal{H}(\overline{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}) \end{aligned}$$

nos dá a segunda forma fundamental de cada fibra. Tendo em vista isso e usando a proposição anterior o item (iii.), temos

$$\alpha(V, W) = \mathcal{H}(\overline{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}) = - \left( \frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{\tilde{f}} \right) \text{grad} \tilde{f}.$$

Logo, cada fibra é totalmente umbílica, pois  $\text{grad} \tilde{f} \in \mathfrak{L}(M)$ , isto é,

$$\text{grad} \tilde{f} \in \mathfrak{X}(N)^{\perp}.$$

■

## 2.2 Campos Conformes

O espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  é uma Variedade Riemanniana completa, simplesmente conexo e que possui curvatura seccional constante nula. Deve-se ressaltar que, o espaço Euclidiano é um Variedade Riemanniano homogênea e constitui um exemplo de variedade de Einstein, ou seja, um espaço Riemanniano cujo tensor de Ricci é múltiplo da sua métrica Riemanniana.

Motivados por isso definimos os campos de vetores ditos conformes.

**Definição 2.7 ( Definição 63 do Capítulo 3 em [24] )** *Um campo de vetores  $X$  em uma variedade Riemanniana  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é conforme, se existir uma função diferenciável  $\psi$  em  $M^n$ , tal que*

$$\mathfrak{L}_X \langle \cdot, \cdot \rangle = 2\psi \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

*Diremos que  $X$  não é trivial se  $\psi$  for não constante.*

O seguinte lema caracteriza um campo conforme:

**Lema 2.8**  $V \in \mathfrak{X}(M)$  é conforme se, e somente se,

$$\langle \bar{\nabla}_X V, Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_Y V \rangle = 2\psi \langle X, Y \rangle$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Demonstração.** Utilizando a regra do produto da derivação tensorial temos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_V \langle X, Y \rangle &= V \langle X, Y \rangle - \langle \mathfrak{L}_V(X), Y \rangle - \langle X, \mathfrak{L}_V(Y) \rangle \\ &= V(\langle X, Y \rangle - \langle [V, X], Y \rangle - \langle X, [V, Y] \rangle) \\ &= \langle \bar{\nabla}_V X, Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_V Y \rangle - \langle \bar{\nabla}_V X, Y \rangle + \\ &\quad + \langle \bar{\nabla}_X V, Y \rangle - \langle X, \bar{\nabla}_V Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_Y V \rangle \\ &= \langle X, \bar{\nabla}_V Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_Y V \rangle \end{aligned}$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . ■

A partir da Definição 2.7, vemos que estes campos de vetores correspondem a uma generalização dos campos de Killing e dos campos homotéticos, já que os campos de Killing são campos conformes com fator conforme nulo, enquanto os campos homotéticos são campos conformes com fator conforme constante, para mais informações sobre esses casos particulares consultar [16].

Os campos de vetores supracitados aparecem na Geometria Riemanniana, principalmente no estudo de imersões sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera e espaço Hiperbólico), nos produtos diretos, produtos-warped, espaços Riemannianos homogêneos, espaços de Einstein e em alguns fluxos geométricos (fluxo de Yamabe e fluxo de Ricci). Estes campos de vetores também estão diretamente relacionados à curvatura escalar do espaço Riemanniano, no qual estão definidos, conforme podemos conferir nos trabalhos de Tashiro em [28] e Obata/Yano em [22].

Num certo sentido, podemos afirmar que os campos conformes generalizam os solitons de Yamabe, que são estruturas geradas por campos conformes particulares, cujo fator conforme (ou fator de conformidade) difere da curvatura escalar por uma constante. Deve-se observar ainda que os campos conformes constituem um caso particular de

quase solitons de Ricci e no espaço Euclidiano, estas estruturas coincidem, visto que o espaço Euclidiano é uma variedade de Einstein.

A seguir iremos relatar alguns exemplos de produtos warped, para isso usaremos do artigo [Unicity of Constant Mean Curvature Hypersurfaces in Some Riemannian Manifolds] o Sebastián Montiel onde procurando descrever explicitamente os campos conformes de um produto warped enuncia a seguinte proposição, que serve como um resultado de classificação dos produtos warped.

**Proposição 2.9 ( Proposição 2 em [21])** *Seja  $M^{n+1}$ ,  $n \geq 1$  uma variedade Riemanniana completa e seja  $X$  um campo conforme não trivial fechado. Então  $X$  tem no máximo dois zero e as seguintes alternativas são as únicas possíveis. Correspondentemente respectivamente nos casos em que  $X$  tem um, dois ou nenhum zero em  $M^{n+1}$ :*

- (a)  $M^{n+1}$  é um espaço Euclidiano com uma métrica rotacionalmente invariável, isto é,  $M^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ . e a métrica expressa em coordenadas polares ( $x = rp$ ) em  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^n$  é ate homotéticas

$$dr^2 + f(r)^2 d\sigma_n^2,$$

onde  $d\sigma_n^2$  é a métrica com curvatura constante na esfera  $\mathbb{S}^n$  e  $f$  é a restrição positiva ao  $\mathbb{R}^+$  de uma função diferenciável ímpar com  $f'(0) = 1$ . Além disso, o campo  $X$  é dado por  $X(r, p) = f(r)p$  para  $r \in \mathbb{R}^+$  e  $p \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . E mais as folhas são as esferas centradas na origem  $r = r_0$ .

- (b)  $M^{n+1}$  é uma esfera com um métrica rotacionalmente invariável isto é,  $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$  e a métrica é expressa em termos das coordenadas polares ( $x = a \cos \theta + p \sin \theta$ ) sobre  $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{a, -a\} = (0, \pi) \times \mathbb{S}^n$  onde  $a \in \mathbb{S}^{n+1}$  é arbitrário e  $\mathbb{S}^n$  é o equador ortogonal em  $a$ , é dado por homotopias, por

$$d\theta^2 + f(\theta)^2 d\sigma_n^2$$

onde  $f$  é a restrição a  $(0, \pi)$  de uma função ímpar  $2\pi$ -periódica com  $f'(0) = 1$ , que não tem zeros em  $(0, \pi)$ . Além disso, o campo  $X$  é  $X(\theta, p) = f(\theta)(a \sin \theta - p \cos \theta)$  para cada  $\theta \in (0, \pi)$  e  $p \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ . Neste caso as folhas são os arcos das pequenas esferas de  $\mathbb{S}^{n+1}$  paralelos ao equador  $\mathbb{S}^n$ .

- (c) A cobertura simplesmente conexa de uma variedade riemanniana  $M^{n+1}$  é um produto warped  $\mathbb{R} \times P^n$ , onde  $P^n$  é uma variedade riemanniana  $n$ -dimensional completa simplesmente conexa e  $f$  é uma função positiva definida em  $\mathbb{R}$ . Mais

ainda, o grupo  $\Gamma$  das isometrias é um subgrupo de  $Iso(\mathbb{R}) \times Iso(P^n)$ . Neste caso, a função  $f$  é invariável por translações e projeções de  $\Gamma$  em  $Iso(\mathbb{R})$  e o campo  $X$  é determinado como projeção de  $f(s)(\partial/\partial s)(s, p)$  para qualquer  $s \in \mathbb{R}$  e  $p \in P^n$ , e as folhas consiste nas projeções dos slices  $\{s\} \times P^n$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Ver [21]. ■

## 2.3 Exemplos de Produto Warped

A seguir veremos alguns exemplos de produtos warped, começando pelos mais triviais por estarem em  $\mathbb{R}^3$ , depois com os outros dois modelos tradicionais de variedades riemannianas com curvatura seccional constante

**Exemplo 6** *As superfícies de revolução são produto warped, tal que as folhas sendo as diferentes posições da curva rotacionada e as fibras os círculos de revolução. De fato, considerando*

$$\alpha(v) = (f(v), 0, g(v)), \quad a < v < b$$

uma curva no plano  $xz$ , com  $f(v) \neq 0$  e  $g(v) > 0$ . Rotacionando a curva  $\alpha$  em relação ao eixo  $z$  obtemos o sistema,

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v) \\ 0 \\ g(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v) \cos u \\ f(v) \sin u \\ g(v) \end{pmatrix}$$

onde  $u \in (0, 2\pi)$ .

Assim, a superfície de revolução  $\mathcal{S}$  obtida tem como parametrização

$$\mathcal{X}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

com  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (a, b)$ .

Como em  $\mathbb{R}^3$  temos  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Em  $\mathcal{S}$  temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d(f(v) \cos u))^2 + (d(f(v) \sin u))^2 + (dg(v))^2 \\ &= (f'(v)dv \cos u - f(v) \sin u du)^2 + (f'(v)dv \sin u + f(v) \cos u du)^2 + (g'(v)dv)^2 \\ &= (f'(v))^2 d^2v \cos^2 u - 2f'(v)f(v) \cos u \sin u dv du + (f(v))^2 \sin^2 u du^2 + \\ &+ (f'(v))^2 d^2v \sin^2 u + 2f'(v)f(v) \cos u \sin u dv du + (f(v))^2 \cos^2 u du^2 + (g'(v))^2 dv^2 \\ &= (f'(v))^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) dv^2 + (f(v))^2 (\sin^2 u + \cos^2 u) du^2 + (g'(v))^2 dv^2 \\ &= \{(f'(v))^2 + (g'(v))^2\} dv^2 + f^2(v) du^2 \end{aligned}$$

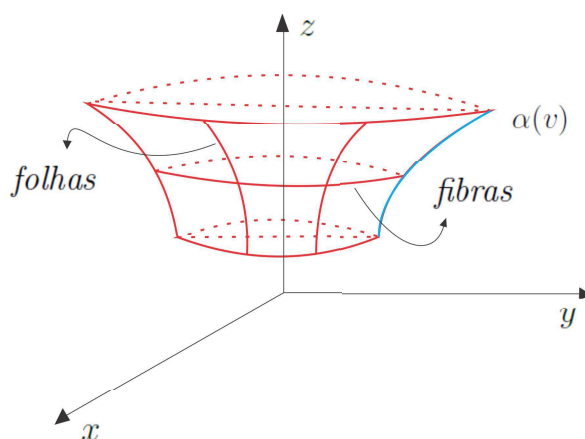


Figura 2.2: Exemplo da Superfície de Revolução em  $\mathbb{R}^3$

Supondo a curva  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja que  $(f'(v))^2 + (g'(v))^2 = 1$ . Assim, a métrica em  $\mathcal{S}$  é dada por

$$ds^2 = dv^2 + f^2(v)du^2.$$

onde  $du^2$  é a métrica em  $\mathbb{S}^1(1)$ . Portanto,  $\mathcal{S} = C \times_f \mathbb{S}^1(1)$ .

**Exemplo 7** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  pode ser visto como produto warped. De fato, consideremos um ponto qualquer  $P = (x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Em coordenadas esféricas temos

$$P = \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



Logo,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
&= (d(r \sin \theta \cos \varphi))^2 + (d(r \sin \theta \sin \varphi))^2 + (d(r \cos \theta))^2 \\
&= (dr \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta d\theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 \\
&\quad + (dr \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta d\theta \sin \varphi + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 \\
&\quad + (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta)^2 \\
&= dr^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\varphi^2 + 2rdr \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi d\theta \\
&\quad - 2rdr \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi d\varphi - 2r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi d\theta d\varphi + dr^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \\
&\quad + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2 + 2rdr \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi d\theta \\
&\quad + 2rdr \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi d\theta d\varphi + dr^2 \cos^2 \theta + \\
&\quad + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 - 2rdr \cos \theta \sin \theta d\theta \\
&= dr^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \\
&\quad r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 2rdr \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\theta + dr^2 \cos^2 \theta + \\
&\quad + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 - 2rdr \cos \theta \sin \theta d\theta \\
&= dr^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + 2rdr \sin \theta \cos \theta d\theta \\
&\quad + dr^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 - 2rdr \cos \theta \sin \theta d\theta \\
&= dr^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r^2 d^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\
&= dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)
\end{aligned}$$

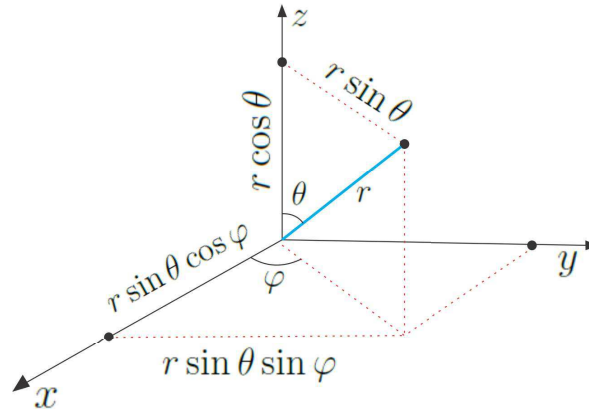


Figura 2.3: Exemplo do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  em Coordenadas Polares

Temos que  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$  pela aplicação

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\
(t, p) &\longmapsto \phi(t, p) = tp
\end{aligned}$$

cuja inversa é dada por

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \\
p &\longmapsto \phi(p) = \left( |p|, \frac{p}{|p|} \right)
\end{aligned}$$

Assim,  $ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2)$  mostra que  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  pode ser identificado com o produto warped  $\mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2$ . Em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , as folhas são os raios que saem da origem e as fibras são as esferas  $\mathbb{S}^2(r)$ ,  $r > 0$ .

Mais em geral, pela Proposição 2.9 podemos concluir que  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é naturalmente isométrico à  $\mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^{n-1}$ .

**Exemplo 8** O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  (ver Exemplo 4) é isométrico aos produtos warped  $\mathbb{R}^+ \times_{\sinh r} \mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{H}^n$ . (para os modelos  $\mathbb{R}^+ \times_{\sinh r} \mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{H}^n$  verificar o exemplo 4.3 de [21]) De fato, faremos o caso  $n=2$  para facilitar nas contas, já uma isometria explícita entre  $\mathbb{H}^{n+1}$  e  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$  pode ser encontrada em [1]).

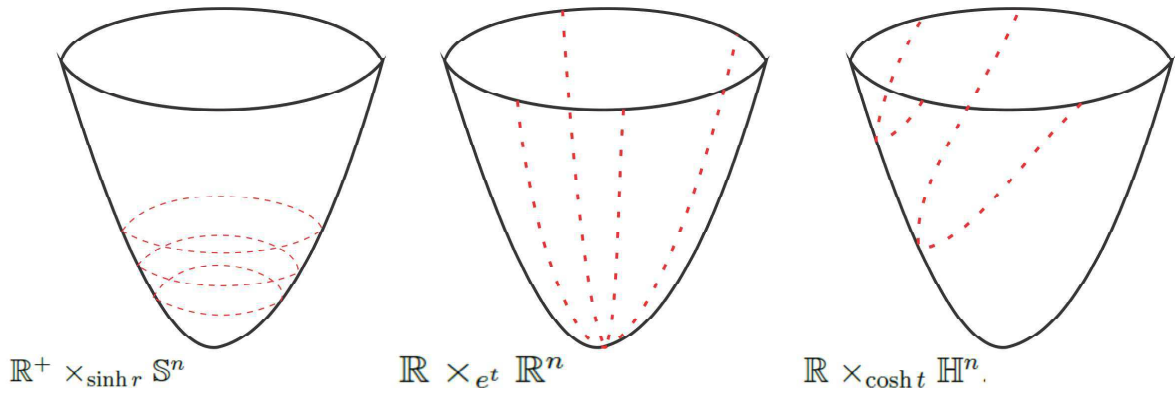


Figura 2.4: Exemplo da folheação do espaço Hiperbólico

Consideremos a métrica  $g_j(x, y, z) = \frac{\delta_{ij}}{z^2}$  em  $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ , e tomemos em  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$  a métrica Riemanniana  $ds^2 = dt^2 + e^{2t}(du^2 + dv^2)$ . Defina a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^3 \\ (t, u, v) &\longmapsto f(t, u, v) = (u, v, e^{-t}) \end{aligned}$$

Temos que  $f$  é diferenciável, por ter funções coordenadas diferenciáveis e, como  $z > 0$ , tem-se que sua inversa é dada por

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{H}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto f^{-1}(x, y, z) = (-\ln(z), x, y) \end{aligned}$$

que também é diferenciável. Assim,  $f$  é um difeomorfismo e podemos introduzir um produto interno em  $\mathbb{H}^3$  fazendo

$$\langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle_{f(p)} = \langle w_1, w_2 \rangle_p$$

o que torna a aplicação  $f$  uma isometria. Por conseguinte transportando base em base, e com isso podemos escrever as seguintes expressões:

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = a_{11} \frac{\partial}{\partial x} + a_{21} \frac{\partial}{\partial y} + a_{31} \frac{\partial}{\partial z} ; df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) = a_{12} \frac{\partial}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y} + a_{32} \frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = a_{13} \frac{\partial}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial}{\partial z}$$

Por outro lado, sabemos que a matriz jacobiana de  $f$  é dada por

$$(df_p) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt} & \frac{df_1}{du} & \frac{df_1}{dv} \\ \frac{df_2}{dt} & \frac{df_2}{du} & \frac{df_2}{dv} \\ \frac{df_3}{dt} & \frac{df_3}{du} & \frac{df_3}{dv} \end{pmatrix}$$

e, portanto

$$(df_p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{-t} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Então, substituindo nas expressões da diferencial de  $f$  temos

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = -e^{-t} \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

De forma análoga, temos

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial x} \quad e \quad df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle_{f(p)} &= \left\langle df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle_{f(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_p = e^{2t} = \frac{1}{z^2} \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{f(p)} &= \left\langle df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right), df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_{f(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_p = e^{2t} = \frac{1}{z^2} \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle_{f(p)} &= \left\langle -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle_{f(p)} = -e^{2t} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_p = e^{2t} = \frac{1}{z^2} \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{f(p)} &= \left\langle df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_{f(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_p = 0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle_{f(p)} &= \left\langle df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_{f(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_p = 0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle_{f(p)} &= \left\langle -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_{f(p)} = -e^{2t} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_p = 0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \end{aligned}$$

Portanto, o espaço  $\mathbb{H}^3$  com a métrica  $g_{ij}$  é isométrico à variedade  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 9** As hipersuperfície  $\mathbb{S}^{n+1}$  a menos de um ponto são isométricas aos produto warped  $(0, \pi) \times_{\sin \theta} \mathbb{S}^n$ . De fato, dado um ponto fixo  $a \in \mathbb{S}^{n+1}$ , e considerando o gradiente da função altura dado pelo campo vetorial

$$X(p) = a - \langle a, p \rangle p, \quad p \in \mathbb{S}^{n+1}$$

que se anula somente nos pontos antipodais  $a$  e  $-a$ . Desta forma tomando  $f(\theta) = \sin \theta$  em (b) da Proposição 2.9, tem-se que as folhas são dadas por hiperesferas umbílicas paralelas ao equador ortogonal a  $a$ .

## 2.4 Imersões em Produtos Warped

Ao longo desta seção, para uma dada variedade Riemanniana  $(n+p)$ -dimensional  $(M^{n+p}, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ , nosso ambiente  $I \times_f M^{n+p}$  é uma variedade produto  $(n+p+1)$ -dimensional, da variedade  $I \times M^{n+p}$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , dotado pela métrica warped Riemanniana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dt^2 + f(t)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_M \quad (2.3)$$

onde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave positiva em  $I$ .

Em outras palavras,  $I \times_f M^{n+p}$  é nada mais que um produto warped riemanniano cuja base riemanniana é  $(I, dt^2)$ , e a fibra riemanniana é  $(M^{n+p}, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$  e  $f$  é a função warping.

Observamos que o campo vetorial dado por

$$K(t, x) = f(t)\partial_t|_{(t,x)}, \quad (t, x) \in I \times_f M^{n+p} \quad (2.4)$$

determina um campo de vetores conforme não nulo em  $\overline{M}$  que também é fechado no sentido de que sua 1-forma equivalente é metricamente fechada.

De fato, para todo  $V \in I \times_f M^{n+p}$ , temos  $V = a\partial_t + V^*$ , onde  $a \in C^\infty(\overline{M})$  e  $V^* \in \mathfrak{X}(M^{n+p})$ , daí

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_V K &= \overline{\nabla}_{(a\partial_t + V^*)} f(t)\partial_t = a\overline{\nabla}_{\partial_t} f(t)\partial_t + \overline{\nabla}_{V^*} f(t)\partial_t \\ &= af(t)\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + a\partial_t(f(t))\partial_t + \overline{\nabla}_{f(t)\partial_t} V^* \\ &= f'(t)a\partial_t + \frac{\partial_t(f(t))}{f(t)}V^* \\ &= f'(t)(a\partial_t + V^*) \\ &= f'(t)V \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $\overline{\nabla}$  denota a conexão Levi-Civita de  $\overline{M} = I \times_f M^{n+p}$ .

Além disso, observe que  $K(t, x) = f(t)\partial_t|_{(t,x)}$  satisfaz o Lema 2.8, pois:

$$\langle \overline{\nabla}_X K, Y \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y K \rangle = \langle f'X, Y \rangle + \langle X, f'Y \rangle = 2f'\langle X, Y \rangle,$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Para cada  $\tau \in I$ , o slice  $M_\tau = \{\tau\} \times M \subset I \times_f M^{n+p}$  é uma hipersuperfície. Na verdade, a métrica induzida em  $M$ , é dada por  $f(\tau)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_M$ , o que significa que  $M_\tau$  é uma cópia homotética de  $M$  com fator de escala  $f(\tau)$ .

A restrição de  $\partial_t$  à  $M_\tau$  nos dá uma orientação para isso. Segue de (2.4) que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_V \partial_t &= \bar{\nabla}_V \left( \frac{1}{f(t)} K \right) = \bar{\nabla}_{(a\partial_t + V^*)} \left( \frac{1}{f(t)} K \right) \\
&= \bar{\nabla}_{a\partial_t} \left( \frac{1}{f(t)} K \right) + \bar{\nabla}_V^* \left( \frac{1}{f(t)} K \right) \\
&= a \bar{\nabla}_{\partial_t} \left( \frac{1}{f(t)} K \right) + \bar{\nabla}_V^* \left( \frac{1}{f(t)} K \right) \\
&= a \frac{1}{f(t)} \bar{\nabla}_{\partial_t} (K) + a \partial_t \left( \frac{1}{f(t)} \right) K + \frac{1}{f(t)} \bar{\nabla}_V^* K + \underbrace{V^* \left( \frac{1}{f(t)} K \right)}_{=0} \quad (2.6) \\
&= -\frac{\partial_t(f(t))}{f(t)^2} + \frac{1}{f(t)} \bar{\nabla}_{a\partial_t + V^*} K \\
&= -\frac{1}{f(t)^2} \langle V, \bar{\nabla} f \rangle K + \frac{1}{f(t)} f'(t) V
\end{aligned}$$

onde  $\bar{\nabla} f$  denota o gradiente em  $I \times_f M^{n+p}$  e  $\bar{f}(t, x) = f(t)$

Observe que o gradiente em  $I \times_f M^{n+p}$  da projeção  $\pi_1(t, x) = t$  é dado por

$$\bar{\nabla} \pi_1 = \partial_t \quad (2.7)$$

De fato, para todo  $X \in I \times_f M^{n+p}$ , temos  $X = a\partial_t + X^*$ , onde  $a \in C^\infty(M)$  e  $X^* \in \mathfrak{X}(M^{n+p})$ , daí

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla} \pi_1, X \rangle &= X(\pi_1) = \langle X, \partial_t \rangle \partial_t(\pi_1) + X^*(\pi_1) \\
&= \langle X, \partial_t \rangle \partial_t(t) \\
&= \langle X, \partial_t \rangle
\end{aligned}$$

Assim escrevendo  $\bar{f} = f \circ \pi$ , obtemos

$$\bar{\nabla} \bar{f} = f'(t) \bar{\nabla} \pi_1 = f'(t) \partial_t$$

e aplicando em (2.6), teremos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_V \partial_t &= -\frac{1}{f(t)^2} \langle V, \bar{\nabla} f \rangle K + \frac{1}{f(t)} f'(t) V \\
&= -\frac{1}{f(t)^2} \langle V, f'(t) \partial_t \rangle K + \frac{1}{f(t)} f'(t) V \\
&= -\frac{f'(t)}{f(t)^2} \langle V, \partial_t \rangle f(t) \partial_t + \frac{1}{f(t)} f'(t) V \\
&= \frac{f'(t)}{f(t)} (V - \langle V, \partial_t \rangle \partial_t)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Em particular,

$$\bar{\nabla}_v \partial_t = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} v,$$

para cada vetor tangente  $v \in T_{(\tau,x)M_\tau}$ . Isso significa que  $M_\tau$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica em  $I \times_f M^{n+p}$ , com o operador forma (em relação à orientação  $\partial_t$ ) é dado por

$$A_\tau v = -\bar{\nabla}_v \partial_t = -\frac{f'(\tau)}{f(\tau)} v,$$

para todo  $v \in T_{(\tau,x)M_\tau}$ .

Portanto,  $\tau \in I \rightarrow M_\tau \subset I \times_f M^{n+p}$  determina uma foliação de  $I \times_f M^{n+p}$  por hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média dada por

$$\mathcal{H}(\tau) = \frac{1}{n+p} \text{tr}(A_\tau) = -\frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \tag{2.9}$$

De fato, consideremos um referencial ortonormal  $e_j$ , temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\tau) &= \frac{1}{n+p} \sum_{j=1}^{n+p} \langle A_{e_j}, e_j \rangle = \frac{1}{n+p} \sum_{j=1}^{n+p} \langle (\bar{\nabla}_{e_j} V)^\top, e_j \rangle \\
&= \frac{1}{n+p} \sum_{j=1}^{n+p} \langle (\bar{\nabla}_{e_j} \partial_t), e_j \rangle = \frac{1}{n+p} \sum_{j=1}^{n+p} \left\langle \left( -\frac{f'(t)}{f(t)} e_j, e_j \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{n+p} \left\langle -\frac{f'(t)}{f(t)} \sum_{j=1}^{n+p} e_j, e_j \right\rangle \\
&= -\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}
\end{aligned}$$

Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade de codimensão  $p+1$  imersa em  $I \times_f M^{n+p}$ . Isto é  $\Sigma^n$  é uma variedade  $n$ -dimensional conexa para o qual existe uma imersão suave

$$\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+p}.$$

Como de costume denotaremos a métrica induzida também por  $\langle, \rangle$ .

Nesta configuração, denotaremos por  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla$  as conexões de Levi-Civita de  $I \times_f M^{n+p}$  e  $\Sigma^n$ , respectivamente. A **fórmula de Gauss** de  $\Sigma$  em  $I \times_f M^{n+p}$  é dada por

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad (2.10)$$

para todo os campos de vetores tangentes  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Lembrando que

$$\alpha : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$$

representa o valor do vetor da **segunda forma fundamental** de  $\Sigma^n$ , que é definido por

$$\alpha(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp, \quad (2.11)$$

onde  $(\bar{\nabla}_X Y)^\perp$  denota a componente normal de  $\bar{\nabla}_X Y$  ao longo de  $\Sigma^n$ . Além disso, a **formula de Weingaten** é dada por

$$\bar{\nabla}_X \eta = -A_\eta X + \bar{\nabla}_X^\perp \eta, \quad (2.12)$$

para cada campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e o campo vetorial  $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ , onde é apenas a componente normal do e indica o operador forma em relação a  $\eta$ , isto é, o operador auto adjunto em  $\mathfrak{X}(\Sigma)$  definido por

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

### O campo vetorial de curvatura média

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{n} \text{tr}(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i),$$

onde  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial ortonormal em  $\Sigma^n$ .

# Capítulo 3

## Resultado de Rigidez e Inexistência

Neste capítulo, estaremos trabalhando os resultado principais motivados pelo estudo das imersões em um produto warped do tipo  $I \times_f M^{n+p}$ . Desta forma é impressionável os conceitos trabalhados na Seção 2.4, do Capítulo 2, deste trabalho.

### 3.1 Resultados Auxiliares para o Ambiente $I \times_f M^{n+p}$

Iniciaremos com alguns resultados que irão nos auxiliar na compreensão dos resultados principais da próxima seção, e visando que o teor do trabalho que propomos, iremos suprir algumas demonstrações nas quais só enunciaremos.

#### 3.1.1 A Função Altura

Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+p}$  uma subvariedade imersa de codimensão  $p + 1$ . A **função altura** de  $\Sigma^n$ , definida por

$$h = (\pi_I) \Big|_{\Sigma^n} : \Sigma^n \rightarrow I,$$

onde

$$\begin{aligned} \pi_I : I \times_f M^{n+p} &\rightarrow I \\ (t, x) &\mapsto \pi_I(t, x) = t \end{aligned}$$

é a aplicação projeção do primeiro fator, isto é,  $h = \pi_I \circ \psi$ .

De (2.7), nós temos que o gradiente de  $\pi_1$  em  $I \times_f M^{n+p}$  é dado por  $\bar{\nabla} \pi_1 = \partial_t$ .



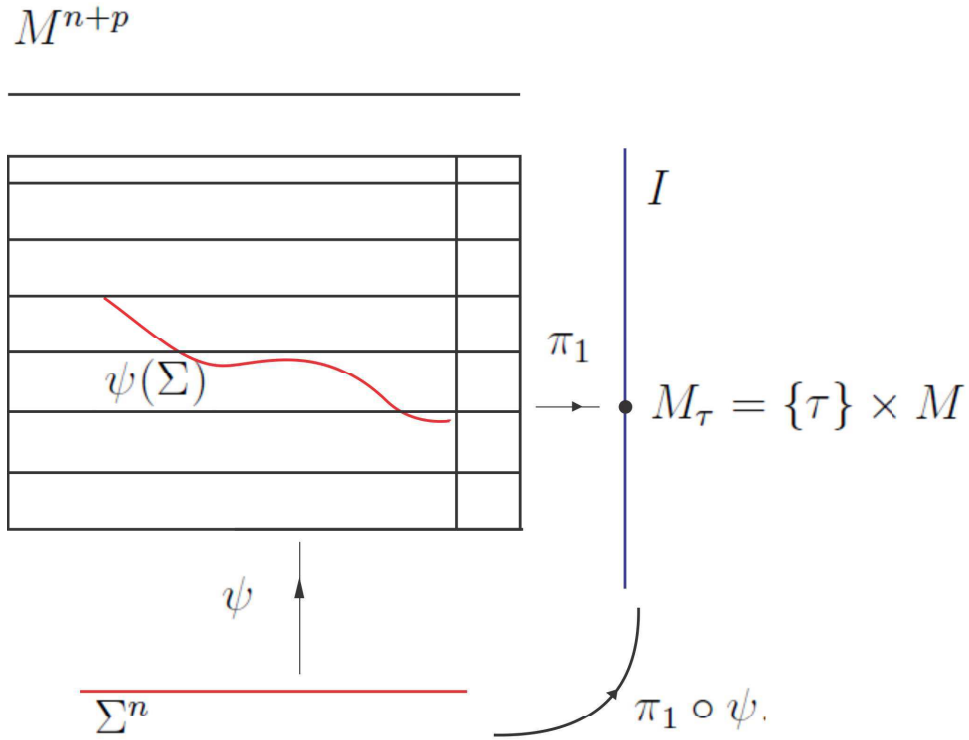


Figura 3.1: Esquema da Função Altura

Então o gradiente de  $h$  é dado por

$$\nabla h = (\bar{\nabla} \pi_1)^\top = \partial_t^\top$$

onde  $\partial_t = \partial_t^\top + \partial_t^\perp$ . Assim  $\partial_t^\top \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e  $\partial_t^\perp \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ , denotam respectivamente a componente tangencial e normal do campo  $\partial_t$  ao longo de  $\Sigma^n$ .

Agora consideremos também a função  $u = g(h)$ , onde  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva arbitrária de  $f$ . Como  $g' = f > 0$ , então  $u = g(h)$  pode ser pensada como uma reparametrização da função altura. Em particular, o gradiente de  $u$  em  $\Sigma^n$  é dado por

$$\nabla u = f(h) \nabla h = f(h) \nabla \partial_t^\top = K^\top, \quad (3.1)$$

onde  $K^\top$  denota a componente tangencial do campo de vetores  $K$  dado em (2.4).

Usando (2.10), (2.12) e levando em consideração que o campo  $K$  pode ser

decomposto como  $K = K^\top + K^\perp$ , obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X K &= \nabla_X K + \alpha(X, K) \\ &= \nabla_X(K^\top + K^\perp) + \alpha(X, (K^\top + K^\perp)) \\ &= \nabla_X K^\top + \nabla_X K^\perp + \alpha(X, K^\top) + \alpha(X, K^\perp) \\ &= \nabla_X K^\top - A_{K^\perp} X + \nabla_X^\perp K^\perp + \alpha(X, K^\top)\end{aligned}$$

para cada  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Consequentemente,

$$(\bar{\nabla}_X K)^\top = \nabla_X K^\top - A_{K^\perp} X \quad \text{e} \quad (\bar{\nabla}_X K)^\perp = \nabla_X^\perp K^\perp + \alpha(X, K^\top). \quad (3.2)$$

Por outro lado, a equação (2.5), implica  $\nabla_X K = f'(h)X$ , e como  $((\bar{\nabla}_X K)^\top)$  é tangente o mesmo não possui componente normal, e consequentemente temos

$$(\bar{\nabla}_X K)^\top = f'(h)X \quad \text{e} \quad (\bar{\nabla}_X K)^\perp = 0. \quad (3.3)$$

Assim, a partir de (3.2) e (3.3), segue que

$$\nabla_X K^\top = f'(h)X + A_{K^\perp} X. \quad (3.4)$$

Portanto, de (3.1) e (3.4), obtemos o hessiano dado por

$$\nabla_X \nabla u = \nabla_X K^\top = f'(h)X + A_{K^\perp} X.$$

Agora para obtermos a expressão para o laplaciano da função  $u$ , fixemos uma base ortonormal  $\{e_j\}_{j=1}^n$  em  $T_q \Sigma$ , e aplicando o traço no hessiano obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j} \nabla u, e_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle f'(h)e_j + A_{K^\perp} e_j, e_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle f'(h)e_j, e_j \rangle + \sum_{j=1}^n \langle A_{K^\perp} e_j, e_j \rangle \\ &= f'(h) \sum_{j=1}^n \langle e_j, e_j \rangle + \sum_{j=1}^n \langle \alpha(e_j, e_j), K^\perp \rangle \\ &= n f'(h) + \langle n \mathcal{H}, K^\perp \rangle + \langle n \mathcal{H}, \nabla u \rangle \\ &= n f'(h) + \langle n \mathcal{H}, K^\top + K^\perp \rangle \\ &= n f'(h) + \langle n \mathcal{H}, f(h) \partial_i \rangle \\ &= n(f'(h) + f(h) \langle \mathcal{H}, \partial_i \rangle)\end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Lemas Auxiliares

Tendo em vista que o valor da curvatura média  $\mathcal{H}(\tau)$  de um slice  $M_\tau$  é dado por  $\mathcal{H}(\tau) = -\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}$ , como uma primeira aplicação que relacione (3.5) com a curvatura média, temos o seguinte resultado:

**Lema 3.1 ( Lema 1 em [8])** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+p}$  uma subvariedade fechada imersa em  $I \times_f M^{n+p}$ . Então*

$$(i) \min_{\Sigma} \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \leq \mathcal{H}(h^*), \text{ onde } h^* = \max_{\Sigma} h;$$

$$(ii) \max_{\Sigma} \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \geq \mathcal{H}(h^*), \text{ onde } h^* = \min_{\Sigma} h;$$

**Demonstração.** Vamos considerar em  $\Sigma^n$  a função  $u = g(h)$ . Como  $\Sigma^n$  é fechada, a função  $u$  atinge seu mínimo e máximo nos pontos  $p_{min}$  e  $p_{max}$ . Desde que  $g' = f > 0$ , concluímos que  $g$  é crescente e, em particular no ponto  $p_{min}$  temos

$$u(p_{min}) = u_* = \min_{\Sigma} u = g(h_*)$$

onde  $h_* = h(p_{min}) = \min_{\Sigma} h$ . Assim aplicando  $p_{min}$  no laplaciano de  $u$  tem-se

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta u(p_{min}) &= n(f'(h_*) + f(h_*) \langle \mathcal{H}, \partial_t \rangle|_{p_{min}}) \\ &= n f(h_*) \left( \frac{f'(h_*)}{f(h_*)} + \langle \mathcal{H}, \partial_t \rangle|_{p_{min}} \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle|_{p_{min}} \geq -\frac{f'(h_*)}{f(h_*)} = \mathcal{H}(h_*)$$

Por conseguinte, aplicando o máximo obtemos

$$\max_{\Sigma} \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \geq \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle|_{p_{min}} \geq \mathcal{H}(h_*)$$

Portanto, obtemos o item (ii). A prova do item (i) segue de forma análoga aplicando o mesmo processo para o ponto  $p_{max}$  e analisando a relação em  $0 \geq \Delta u(p_{max})$ . ■

Relembremos que na Seção 1.6 definimos o conceito de variedades Riemannianas estocasticamente completas, isto fundamentado no Capítulo 3 de [26], onde Pigola, Rigoli e Setti mostraram que a completude estocástica se revela equivalente à validade da forma fraca do princípio do máximo de Omori-Yau, [23],[29].

Este principal pode ser visto nos Teorema 1.1 de [26] ou o Teorema 3.1 de [25], como pode ser expresso abaixo.

**Lema 3.2 ( Lema 2 em [8])** *A variedade Riemanniana  $\Sigma^n$  é estocasticamente completa se, e somente se, para cada  $g \in C^2(\Sigma)$  satisfazendo  $\sup_{\Sigma^n} g \ll +\infty$ , existe uma sequência de pontos  $\{p_k\} \subset \Sigma^n$  tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(p_k) = \sup_{\Sigma} g \text{ e } \limsup_{k \rightarrow \infty} \Delta g(p_k) \leq 0.$$

Agora, estamos prontos para enunciar e demonstrar um resultado que estende o Lema 01, para o caso não-compacto sob a suposição de completude estocástica.

**Lema 3.3 ( Lema 3 em [8])** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+p}$  uma subvariedade estocasticamente completa imersa em  $I \times_f M^{n+p}$ .*

(i) *Se  $\Sigma^n$  está acima de um slice de  $I \times_f M^{n+p}$ , então  $\sup_{\Sigma} \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \geq \mathcal{H}(h_*)$ , onde  $h_* = \inf_{\Sigma} h \in I$ ;*

(ii) *Se  $\Sigma^n$  está abaixo de um slice de  $I \times_f M^{n+p}$ , então  $\inf_{\Sigma} \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \leq \mathcal{H}(h_*)$ , onde  $h_* = \sup_{\Sigma} h \in I$*

**Demonstração.** Suponhamos que  $\Sigma^n$  esteja acima de um slice de  $I \times_f M^{n+p}$ . Vamos inicialmente aplicar o principio do máximo fraco em  $\Sigma^n$  para a função  $u = g(h)$ , que satisfaz  $u_* = \inf_{\Sigma} u = g(h_*) > -\infty$ , onde  $h_* = \inf_{\Sigma} h \geq \tau_* \geq I$ . Assim, pelo Lema 3.2 existe uma sequência de pontos  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\Sigma$  tal que

$$u(p_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad \Delta u(p_k) > -\frac{1}{k}. \quad (3.6)$$

Observe que  $\lim_k h(p_k) = h_*$ , porque  $g$  é estritamente crescente. Então de (3.5) e (3.6), obtemos isso para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} &< \Delta u(p_k) = n[f'(h(p_k)) + f(h(p_k))\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle(p_k)] \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{nk} &< \frac{1}{n}\Delta u(p_k) = f'(h(p_k)) + f(h(p_k))\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle(p_k) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} f(h(p_k))\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle(p_k) &> -\frac{1}{nk} - f'(h(p_k)) \\ \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle(p_k) &> \frac{1}{f(h(p_k))} \left( -\frac{1}{nk} - f'(h(p_k)) \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, por (3.7) temos

$$\sup_{\Sigma} \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \geq \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle(p_k) > \frac{1}{f(h(p_k))} \left( -\frac{1}{nk} - f'(h(p_k)) \right) \quad (3.8)$$

Portanto, desde que

$$\lim_k f(h(p_k)) = f(h_*) \quad \text{e} \quad \lim_k f'(h(p_k)) = f'(h_*),$$

fazendo  $k \rightarrow +\infty$  em (3.8) temos

$$\sup_{\Sigma} \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \geq -\frac{f'(h_*)}{f(h_*)} = \mathcal{H}(h_*)$$

provando (i). A prova do item (ii) segue de forma análoga a partir da condição de  $\Sigma^n$  se encontrar abaixo de um slice de  $I \times_f M^{n+p}$ . ■

Nosso último Lema auxiliar é apenas uma consequência de uma extensão mais geral do Teorema de Liouville devido a Yau em [29].

**Lema 3.4 ( Lema 4 em [8])** *As únicas funções semi-limitadas harmônicas definidas em uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional completa, cuja curvatura de Ricci é não-negativa são a constantes.*

## 3.2 O Resultado Principal e suas Consequências

Nesta seção, obtemos alguns resultados de rigidez para as subvariedades, imersas em um produto warped  $I \times_f M^{n+p}$  cuja função warping tem logaritmo convexo.

**Teorema 3.5 ( Teorema 1 em [8])** *Seja  $I \times_f M^{n+p}$  um produto warped tal que  $(\log f)'' \geq 0$ , e seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+p}$  uma subvariedade fechada com campo vetorial curvatura média  $\vec{\mathcal{H}}$  tal que a função suporte  $\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle$  é constante. Então,  $\psi(\Sigma)$  está contida em um slice  $\{\tau\} \times M^{n+p}$ , para algum  $\tau \in I$ . Além disso, quando  $p = 1$ ,*

$$\phi := \pi_M \circ \psi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$$

é uma hipersuperfície com curvatura média  $\mathcal{H}_\phi$  satisfazendo

$$|\vec{\mathcal{H}}|^2 = \frac{\mathcal{H}_\phi^2 + f'(\tau)^2}{f(\tau)^2}. \quad (3.9)$$

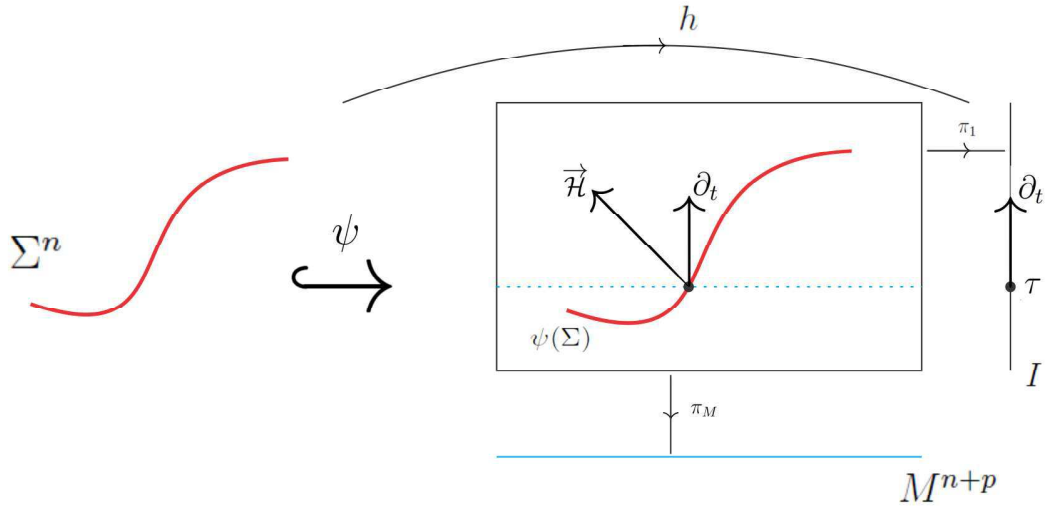


Figura 3.2: Esquema das condições do Teorema 3.5

**Demonstração.** Nas condições do enunciado temos:

Do Lema 01, e usando a convexidade da função logaritmo, ou seja, como  $(-\mathcal{H}(\tau))' = (\log f)'' \geq 0$ , temos

$$\min_{\Sigma} \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \leq \mathcal{H}(h^*) \leq \mathcal{H}(h_*) \leq \max_{\Sigma} \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \quad (3.10)$$

Assim, como por hipótese  $\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle \equiv cte$ , de (3.10) obtemos

$$\mathcal{H}(h^*) = \mathcal{H}(h_*) = \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle = c.t.e. \quad (3.11)$$

Usando mais uma vez que  $(\log f)'' \geq 0$ , segue de (3.11) que  $\mathcal{H}(\tau) = \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle = c.t.e.$  em  $[h_*, h^*]$ , ou seja,  $\mathcal{H}(h) = \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle$  em  $\Sigma^n$ .

Então,  $\mathcal{H}(h) = -\frac{f'(h)}{f(h)} = \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle$  implica  $f'(h) + f(h)\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle = 0$  em  $\Sigma^n$ , que por (3.5) nos permite concluir que  $\Delta u = 0$  em  $\Sigma^n$ . Isto é,  $u$  é uma função harmônica em  $\Sigma^n$ , e como se trata de uma variedade fechada, pelo Teorema de E.Hopf (ver Teorema 1.25),  $u = g(h)$  é constante em  $\Sigma^n$ , e desde que  $g(t)$  é uma função crescente, isto significa que  $h$  é também constante em  $\Sigma^n$ .

Portanto,  $\psi(\Sigma)$  está contida em um slide  $M_\tau$ .

Agora para a segunda parte da demonstração temos a condição  $p = 1$ . Desta forma a projeção  $\phi = \pi_M \circ \psi : \Sigma \rightarrow M^{n+1}$  é uma hipersuperfície imersa na fibra  $M^{n+1}$

para a qual  $\psi(p) = (\tau, \phi(p)) = \phi_\tau(p)$ . Então segue da métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\tau = \phi_\tau^*(\langle \cdot, \cdot \rangle) = f(\tau)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$$

que intrinsecamente  $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle_\tau)$  é homotética para  $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma)$  com fator escalar  $f(\tau)$ .

Nosso objetivo agora é expressar a geometria extrínseca da subvariedade de codimensão dois  $\phi_\tau : \Sigma \rightarrow I \times_f M^{n+1}$  em termos da geometria extrínseca da hipersuperfície  $\phi : \Sigma \rightarrow M^{n+1}$ .

Para calcular a segunda forma fundamental  $\alpha_\tau$  da imersão  $\phi_\tau$ , consideremos  $N$  como o vetor unitário normal a hipersuperfície  $\phi : \Sigma \rightarrow M^{n+1}$ , com  $\langle N, N \rangle = 1$ . Note que,

$$\langle N, N \rangle = f(\tau)^2 \langle N, N \rangle_M = f(\tau)^2 \tag{3.12}$$

Portanto,

$$\eta_\tau(p) = \frac{1}{f(\tau)} N(p), \quad \xi_\tau(p) = \partial_t|_{(\tau, \phi(\tau))}, \quad p \in \Sigma \tag{3.13}$$

define uma lista de campos ortonormal locais, ao longo de  $\phi$ , com

$$\langle \eta_\tau, \eta_\tau \rangle = 1, \quad \langle \eta_\tau, \xi_\tau \rangle = 0, \quad \langle \xi_\tau, \xi_\tau \rangle = 1 \tag{3.14}$$

Desta forma temos:

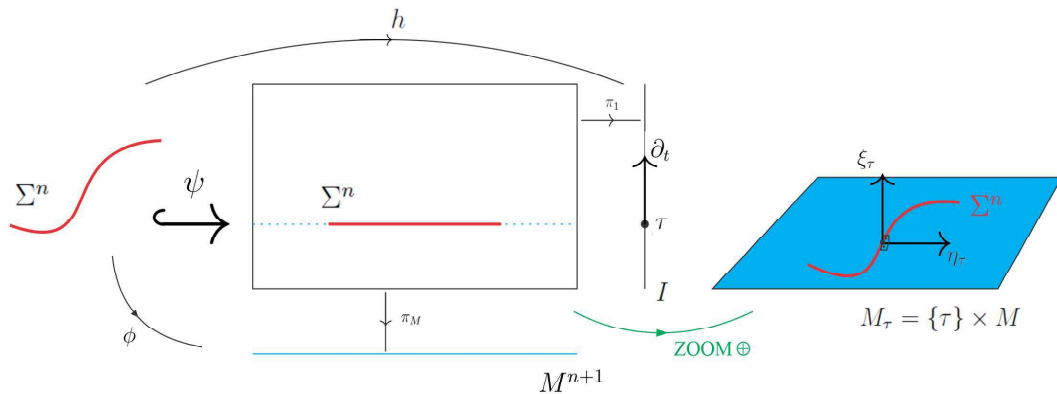


Figura 3.3: Esquema após a primeira parte do Teorema 3.5

A segunda forma  $\alpha_\tau$  da imersão  $\phi_\tau$  é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_\tau(X, Y) &= \langle \alpha_\tau(X, Y), \eta_\tau \rangle \eta_\tau + \langle \alpha_\tau(X, Y), \xi_\tau \rangle \xi_\tau \\ &= \langle A_\xi X, Y \rangle \eta_\tau + \langle A_\xi X, Y \rangle \xi_\tau \end{aligned} \tag{3.15}$$

para todo campo vetorial  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Observe que, para qualquer  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ ,

$$\bar{\nabla}_X \eta_\tau = \bar{\nabla}_X \frac{1}{f(\tau)} N = \frac{1}{f(\tau)} \bar{\nabla}_X N + X \left( \frac{1}{f(\tau)} \right) N = \frac{1}{f(\tau)} \bar{\nabla}_X N = \frac{1}{f(\tau)} \nabla_X^* N \quad (3.16)$$

onde  $\nabla^*$  denota a conexão de Levi-Civita de  $(M^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ .

Portanto, levando em consideração que

$$AX = -\nabla_X^* N, \quad (3.17)$$

onde  $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$  representa o operador de forma da hipersuperfície  $\phi : \Sigma \rightarrow M^{n+1}$  com respeito a  $N$ , segue disto e usando a fórmula de Weingarten (2.12) que  $\nabla_X^\perp \eta_\tau = 0$  e

$$A_{\eta_\tau} X = -\bar{\nabla}_X \eta_\tau = -\bar{\nabla}_X \left( \frac{1}{f(\tau)} N \right) = -\frac{1}{f(\tau)} \nabla_X^* N = \frac{1}{f(\tau)} AX \quad (3.18)$$

por outro lado, desde que  $\langle X, \xi_\tau \rangle = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , por (2.8) temos

$$\bar{\nabla}_X \xi_\tau = \frac{f(\tau)}{f(\tau)} X \quad (3.19)$$

que por conseguinte tem-se  $\nabla_X^\perp \xi_\tau = 0$  e

$$A_{\xi_\tau} X = -\bar{\nabla}_X \xi_\tau = -\frac{f'(\tau)}{f(\tau)} X \quad (3.20)$$

para cada  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Colocando isso em (3.15) obtemos que

$$\begin{aligned} \alpha_\tau(X, Y) &= \langle A_\xi X, Y \rangle \eta_\tau + \langle A_\xi X, Y \rangle \xi_\tau \\ &= \frac{1}{f(\tau)^2} \langle AX, Y \rangle_\tau N - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \langle X, Y \rangle_\tau \xi_\tau \end{aligned} \quad (3.21)$$

para todos os campos de vetores tangentes  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ .

Assim o campo vetorial curvatura média de  $\psi$  é dado por

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_\tau &= \frac{1}{n} \text{tr}(\alpha_\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_\tau(E_i, E_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{f(\tau)^2} \langle AE_i, E_i \rangle_\tau N - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \langle E_i, E_i \rangle_\tau \xi_\tau \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{f(\tau)^2} \sum_{i=1}^n \langle AE_i, E_i \rangle_\tau N - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \sum_{i=1}^n \langle E_i, E_i \rangle_\tau \xi_\tau \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial ortonormal local em  $\Sigma$ , com relação à métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\tau$ .

Em particular,

$$\sum_{i=1}^n \langle E_i, E_i \rangle_\tau = n. \quad (3.23)$$



Por outro lado, usando a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\tau = \phi_\tau^*(\langle \cdot, \cdot \rangle) = f(\tau)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ , temos que

$$\langle AE_i, E_i \rangle_\tau = f(\tau)^2 \langle AE_i, E_i \rangle_\Sigma = \langle Ae_i, e_i \rangle_\Sigma \quad (3.24)$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ , onde  $e_i = f(\tau)E_i$  e  $\{e_i\}$  é um referencial ortonormal em  $\Sigma$  em relação a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ .

Note que a curvatura média da hipersuperfície  $\phi : \Sigma \rightarrow M^{n+1}$  é dada por

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{1}{n} \text{tr}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle_\Sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle AE_i, E_i \rangle_\tau. \quad (3.25)$$

Aplicando isso em (3.22), obtemos

$$\overrightarrow{\mathcal{H}}_\tau = \frac{\mathcal{H}_\phi}{f(\tau)^2} N - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \xi_\tau. \quad (3.26)$$

Portanto, de (3.12) e (3.26) tem-se

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathcal{H}}_\tau|^2 &= \langle \overrightarrow{\mathcal{H}}_\tau, \overrightarrow{\mathcal{H}}_\tau \rangle = \left\langle \frac{\mathcal{H}_\phi}{f(\tau)^2} N - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \xi_\tau, \frac{\mathcal{H}_\phi}{f(\tau)^2} N - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \xi_\tau \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\mathcal{H}_\phi}{f(\tau)^2} N, \frac{\mathcal{H}_\phi}{f(\tau)^2} N \right\rangle - \left\langle \frac{\mathcal{H}_\phi}{f(\tau)^2} N, \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \xi_\tau \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \xi_\tau, \frac{\mathcal{H}_\phi}{f(\tau)^2} N \right\rangle + \left\langle \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \xi_\tau, \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \xi_\tau \right\rangle \\ &= \frac{\mathcal{H}_\phi^2}{f(\tau)^4} \langle N, N \rangle + \frac{f'(\tau)^2}{f(\tau)^2} \langle \xi_\tau, \xi_\tau \rangle = \frac{\mathcal{H}_\phi^2}{f(\tau)^4} f(\tau)^2 + \frac{f'(\tau)^2}{f(\tau)^2} \\ &= \frac{\mathcal{H}_\phi^2 + f'(\tau)^2}{f(\tau)^2}. \end{aligned}$$

Logo a curvatura média de hipersuperfície  $\phi$  satisfaz

$$|\overrightarrow{\mathcal{H}}_\tau|^2 = \frac{\mathcal{H}_\phi^2 + f'(\tau)^2}{f(\tau)^2},$$

o que conclui a demonstração. ■

A partir da relação (3.9) do Teorema 3.5, obtemos os seguintes resultados de inexistência.

**Corolário 3.6 ( Corolário 1 em [8])** *Não existem subvariedades mínimas fechadas  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+1}$  imersas em um produto warped  $I \times_f M^{n+1}$  tal que  $(\log f)'' \geq 0$  e  $f'$  não é nula em  $I$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que exista tais subvariedades mínimas, ou seja, que  $\overrightarrow{\mathcal{H}}_\tau = 0$ . De (3.9) temos

$$0 = \frac{\mathcal{H}^2 + f'(\tau)^2}{f(\tau)^2} \Rightarrow \mathcal{H}^2 + f'(\tau)^2 = 0,$$

que é um absurdo, pois  $f' \neq 0$  em  $I$ . Portanto não existe subvariedade mínima em  $I \times_f M^{n+1}$ . ■

Em 2006 Alías, Kurose e Solanes em [3], provaram um Lema técnico:

**Lema 3.7 (Lema 8 do Teorema 1 de [3])** *Cada hipersuperfície  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  no espaço hiperbólico tem um ponto onde (tomada uma orientação apropriada à  $M$ ) todas as curvaturas principais são maiores do que 1.*

**Demonstração.** Sendo  $M$  compacta, existe um ponto  $p_0 \in M$  onde a distância hiperbólica ao ponto  $a \in \mathbb{H}^{n+1}$  atinge o máximo. Equivalentemente,  $u(p_0) = \max_{p \in M} u(p)$ , onde  $u(p) = -\langle a, \psi(p) \rangle \leq 1$ . Em particular, o gradiente de  $u$  se anula em  $p_0$  e o hessiano satisfaz  $\nabla^2 u_{p_0}(v, v) \geq 0$  para cada vetor tangente  $v \in T_{p_0}M$ . Isso implica que  $\langle a, v(p) \rangle \neq 0$  e também que

$$\nabla^2 u_{p_0}(e_i, e_i) = -\langle a, v(p_0) \rangle k_i(p_0) + \sqrt{1 + \langle a, v(p_0) \rangle^2} \leq 0,$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base de direções principais em  $p_0$ . Escolhendo  $v$  tal que  $\langle a, v(p_0) \rangle > 0$ , concluímos que

$$k_i(p_0) \geq \frac{\sqrt{1 + \langle a, v(p_0) \rangle^2}}{\langle a, v(p_0) \rangle} > 1, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

■

Note que pelo Lema 3.7, existe um ponto  $p_0 \in \mathbb{H}^{n+1}$  tal que todas as curvaturas principais são estritamente maiores do que 1. E como a curvatura média em uma hipersuperfície é dada por

$$\mathcal{H}(p_0) = \frac{1}{n} \sum_i k_i.$$

Concluímos pela arbitrariedade de  $p_0$  que não existe hipersuperfícies mínimas em  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Tendo em vista a inexistência de hipersuperfícies mínimas fechadas no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  do teorema 3.5 nós também obter o seguinte resultado:

**Corolário 3.8 ( Corolário 2 em [8])** *Não existem subvariedades mínimas fechadas  $\phi : \Sigma \rightarrow I \times \mathbb{H}^{n+1}$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que exista tais subvariedades mínimas, ou seja, que  $\overrightarrow{\mathcal{H}}_\tau = 0$ . De (3.9) temos

$$0 = \frac{\mathcal{H}^2 + f'(\tau)^2}{f(\tau)^2} \Rightarrow \mathcal{H}^2 + f'(\tau)^2 = 0,$$

que é um absurdo, pois pelo Lema 3.7 concluímos que  $\mathcal{H}_\phi \neq 0$ . Portanto não existe subvariedade mínima em  $I \times \mathbb{H}^{n+1}$ . ■

Ora observe que na literatura da Geometria Riemanniana já é conhecido que não existem subvariedades minimas imersas em  $\mathbb{R}^k$  com  $k \geq 1$ , por outro lado o resultado do Lema 3.7 nos dá a inexistência de subvariedades minimas imersas em  $\mathbb{H}^{n+1}$ , e por fim o resultado do Corolário 3.8 nos dá a inexistência de subvariedades minimas imersas em  $I \times_f \mathbb{H}^{n+1}$ .

Portanto o resultado desenvolvido em [8] pelos autores Araújo, Lima e Velásquez por uma aplicação do processo de recorrência, podemos concluir que não existe subvariedades minimas imersas em

$$\mathbb{R}^k \times_f \mathbb{H}^{n+1}, \quad \text{com } k \geq 1.$$

### 3.3 Uma versão estocasticamente completa do Resultado Principal

Nesta seção buscamos aplicar o resultado anterior em um contexto que não temos o fechamento da subvariedade, e temos a subvariedade sendo estocasticamente completa. Desta forma se faz necessário consideramos algum tipo de limitação onde a subvariedade estará imersa no ambiente warped.

Tendo em vista essa necessidade consideremos um slab de um produto warped  $I \times_f M^{n+p}$ , ou seja, um slab será uma região entre dois slices  $M_{\tau_1}$  e  $M_{\tau_2}$ , para alguns  $\tau_1 < \tau_2$ , ou seja, é a região limitada dada por

$$[\tau_1, \tau_2] \times M^{n+p} = \{(t, q) \in I \times_f M^{n+p} : \tau_1 \leq t \leq \tau_2\}$$

**Teorema 3.9 ( Teorema 2 em [8])** *Seja  $I \times_f M^{n+p}$  um produto warped tal que  $(\log f)'' \geq 0$ , com a igualdade  $(\log f)'' = 0$  ocorrendo apenas em pontos isolados de  $I$ , e seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+p}$  uma subvariedade estocasticamente completa contida em um slab de  $I \times_f M^{n+p}$  e com campo vetorial curvatura média  $\vec{\mathcal{H}}$  tal que a função suporte  $\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle$  é constante. Então  $\psi(\Sigma)$  está contida em um slice  $\{\tau\} \times M^{n+p}$ , para algum  $\tau \in I$ . Além disso, quando  $p = 1$ ,*

$$\phi := \pi_M \circ \psi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$$

*é uma hipersuperfície com curvatura média  $\mathcal{H}_\phi$  satisfazendo*

$$|\vec{\mathcal{H}}|^2 = \frac{\mathcal{H}_\phi^2 + f'(\tau)^2}{f(\tau)^2}. \quad (3.27)$$

**Demonstração.** Podemos raciocinar como na prova do Teorema 3.5 (mas agora usando o Lema 3.3 em vez do Lema 3.1) para mostrar que

$$\mathcal{H}(h^*) = \mathcal{H}(h_*) = \langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle = c.t.e. \quad (3.28)$$

Nossa restrição para o  $\log f$  implica que a função  $\mathcal{H}(t)$  é estritamente decrescente em  $I$ . Assim, por (3.17) obtemos que  $h_* = h^*$  e, conseqüentemente utilizando o Lema 3.4, conclui-se que  $h$  é constante em  $\Sigma^n$ . Desta forma  $\psi(\Sigma)$  deve estar contida em um slice  $\{\tau\} \times M^{n+p}$ . Para  $p = 1$  a demonstração é análoga a segunda parte da demonstração do Teorema 3.5, e conclui-se que  $\mathcal{H}_\phi$  satisfaz a expressão (3.27). ■

Do Teorema 3.9 obtemos

**Corolário 3.10 ( Corolário 3 em [8])** *Não existem subvariedades mínimas estocasticamente completas  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+1}$  que se encontram em um slab de um produto warped  $I \times_f M^{n+1}$  tal que  $(\log f)'' \geq 0$ , com a igualdade  $(\log f)'' = 0$  ocorrendo apenas em pontos isolados de  $I$ , e  $f'$  não se anulando em  $I$ .*

Enunciamos agora nosso ultimo resultado, um resultado de rigidez.

**Teorema 3.11 ( Teorema 3 em [8])** *Seja  $I \times_f M^{n+p}$  um produto warped tal que  $(\log f)'' \geq 0$  e seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^{n+p}$  uma subvariedade completa contida em um slab de  $I \times_f M^{n+p}$ , tendo curvatura de Ricci não-negativa e curvatura média  $\vec{\mathcal{H}}$  tal que a*

função suporte  $\langle \vec{\mathcal{H}}, \partial_t \rangle$  é constante. Então,  $\psi(\Sigma)$  está contida em um slice  $\{\tau\} \times M^{n+p}$ , para algum  $\tau \in I$ . Além disso, quando  $p = 1$ ,

$$\phi := \pi_M \circ \psi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$$

é uma hipersuperfície com o campo vetorial curvatura média  $\mathcal{H}_\phi$  satisfazendo

$$|\vec{\mathcal{H}}|^2 = \frac{\mathcal{H}_\phi^2 + f'(\tau)^2}{f(\tau)^2}. \quad (3.29)$$

**Demonstração.** Um vez que uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci limitada por baixo é estocasticamente completa, pelo principio do máximo de Omori-Yau [23, 29], podemos proceder como na prova do Teorema 3.9 para inferir que a função  $u = g(h)$  é uma função harmônica em  $\Sigma$ . Portanto, como  $\psi(\Sigma)$  está em um slab de  $I \times_f M^{n+p}$  podemos aplicar o Lema 3.4 para concluir que  $u$  é constante e consequentemente,  $h$  é constante em  $\Sigma^n$ . Portanto,  $\psi(\Sigma)$  deve estar contida em um slice  $\{\tau\} \times M^{n+p}$ . ■

Finalmente, do Teorema 3.11, obtemos o seguinte resultado:

**Corolário 3.12 ( Corolário 4 em [8])** *Não existem subvariedades mínimas completas  $\psi : \Sigma \rightarrow I \times_f M^{n+1}$ , com curvatura de Ricci não-negativa e contida em um slab de um produto warped  $I \times_f M^{n+1}$  tal que  $(\log f)'' \geq 0$  e  $f'$  não se anulando em  $I$ .*

# Bibliografía

- [1] L. J. ALÍAS AND M. DAJCZER, *Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab*, Comment. Math. Helv. 81 (2006), 653-663.
- [2] LUIS J. ALÍAS AND MARCOS DAJCZER, *Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 50 (2007), no. 3, 511-526.
- [3] LUIS J. ALÍAS, TAKASHI KUROSE, AND GIL SOLANES, *Hadamard-type theorems for hypersurfaces in hyperbolic spaces*, Differential Geom. Appl. 24 (2006), no. 5, 492-502.
- [4] L.J. ALÍAS, D. IMPERA AND M. RIGOLI, *Hypersurfaces of constant higher order mean curvature in warped products*, Trans. American Math. Soc. 365 (2013), 591-621.
- [5] L. J. ALÍAS, P. MASTROLIA AND M. RIGOLI, *Maximum Principles and Geometric Applications*, Springer, New York, (2016).
- [6] C.P. AQUINO, E.A. LIMA JR AND H.F. DE LIMA, *On the angle of complete CMC hypersurfaces in Riemannian product spaces*, Diff. Geom. Appl. 33 (2014), 139-148.
- [7] C. P. AQUINO AND H. F. DE LIMA, *On the rigidity of constant mean curvature complete vertical graphs in warped products*, Differential Geom. Appl. 29 (2011), no. 4, 590-596.
- [8] J.G.S. ARAÚJO, H. F LIMA AND M.A. VELÁSQUEZ, *Submanifolds Immersed in a warped product: Rigidity and Nonexistence*, Proc. American Math. Soc. 147 (2019), 811-821.

- 
- [9] G. P. BESSA, S. PIGOLA AND A.G. SETTI, *Spectral and Stochastic Properties of the  $f$ -Laplacian, Solutions of PDE'S at Infinity and Geometric Applications*, ArXiv:1107.1172. To appear in Revista Matemática Iberoamericana.
- [10] A. CAMINHA AND H.F. DE LIMA, *Complete vertical graph with constant mean curvature in Semi-Riemannian warped products*, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin 16 (2009), 91-105.
- [11] BANG-YEN CHEN, *Differential Geometry of Waped Product Manifolds and Submanifolds*, Wold Scientific, New Jersey, (2017).
- [12] MARCOS DAJCZER ET.AL., *Sybmanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series 13, Houston, Texas, (1990).
- [13] F. DILLEN, J. FASTENAKELS, J. VAN DER VEKEN AND L. VRANCKEN, *Constant angle surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , Monaths. Math. 152 (2007), 89-96.
- [14] F. DILLEN AND D. KOWALCZYK, *Constant angle surfaces in product spaces*, J. Geom. Phys. 62 (2012), 1414-1432.
- [15] F. DILLEN AND M.I. MUNTEANU, *Constant angle surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Bull. Brazilian Math. Soc. 40 (2009), 85-97.
- [16] M. P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, 5° Ed., IMPA, Rio de Janeiro, (2015)
- [17] A.A. GRIGOR'YAN, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. American Math. Soc. 36 (1999), 135-249.
- [18] J. M. LEE, *Introdution to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Text in Mathematics 218, Springer, (2000).
- [19] H.F. DE LIMA, E.A. LIMA JR AND U.L. PARENTE, *Hypersurfaces with prescribed angle function*, Pacific J. Math. 269 (2014), 393-406.
- [20] E. GARNICA, O. PALMAS AND G. RUIZ-HERNÁNDEZ, *Hypersurfaces with a canonical principal direction*, Diff. Geom. Appl. 30 (2012), 382-391.

- 
- [21] S. MONTIEL, *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. 48 (1999), 711-748.
- [22] OBATA, M.; YANO, K, *Conformal change of Riemannian metrics*, Journal Differential Geometry, v. 4, p. 53-72, 1970.
- [23] H. OMORI, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 205-214.
- [24] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983).
- [25] S. PIGOLA, M. RIGOLI AND A.G. SETTI, *A remark on the maximum principle and stochastic completeness*, Proc. American Math. Soc. 131 (2003), 1283-1288.
- [26] S. PIGOLA, M. RIGOLI AND A. SETTI, *Maximum Principles on Riemannian Manifolds an Applications*, Mem. Amer. Math. Soc., v. 174, n. 822, 2005.
- [27] H. ROSENBERG, F. SCHULZE AND J. SPRUCK, *The half-space property and entire positive minimal graphs in  $M \times \mathbb{R}$* , J. Diff. Geom. 95 (2013), 321-336.
- [28] TASHIRO, Y. *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 117, p. 251-275, 1965.
- [29] S. T. YAU, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), 201-228.