

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Uma Análise das Curvas de Rotação de Galáxias em
Modelos de Branas**

Adiel da Silva Lêmos

CAMPINA GRANDE
- FEVEREIRO DE 2014 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Uma Análise das Curvas de Rotação de Galáxias em
Modelos de Branas**

Adiel da Silva Lêmos

Dissertação realizada sob a orientação do Prof.
Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, apresentada à
Unidade Acadêmica de Física em complemen-
tação aos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE
- FEVEREIRO DE 2014 -

L555a Lêmos, Adiel da Silva.
Uma análise das curvas de rotação de galáxias em modelos de branas
/ Adiel da Silva Lêmos. – Campina Grande, 2014.
79 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia".
Referências.

1. Universo – Galáxia. 2. Dimensões Extras. 3. Branas. 4. Curvas de Rotação. I. Dahia, Fábio Leal de Melo. II. Título.

CDU 524.8(043)

ADIEL DA SILVA LEMOS

**UMA ANÁLISE DAS CURVAS DE ROTAÇÃO DE GALÁXIAS
EM MODELOS DE BRANAS**


Dissertação aprovada em 25/02/2014

BANCA EXAMINADORA



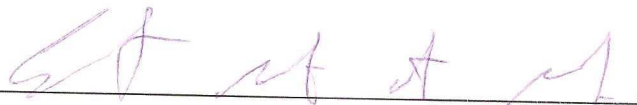
(Presidente)

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Departamento de Física – UFPB



(Membro Interno)

Profª. Drª. Geusa de Araújo Marques
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro Externo)

Prof. Dr. Edmundo Marinho do Monte
Departamento de Física – UFPB

*Dedico a Josmar Coêlho de Lêmos (in
memorian).*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, por sua orientação.

Aos meus familiares, pelo estímulo e apoio constante, em especial a Edilma pelo exemplo que sempre trago comigo.

A Raiane, pelo incentivo e compreensão durante longos anos.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

RESUMO

A dimensionalidade do espaço-tempo tornou-se um recorrente tema de estudo em pesquisas físicas de altas energias. Inicialmente motivada pela unificação de forças fundamentais da Natureza, hoje é um componente indispensável e até indissociável à teoria de cordas. Neste trabalho estamos interessados em discutir os efeitos das supostas dimensões extras em sistemas Físicos onde a gravidade é a força predominante. Com este intuito, estudaremos as curvas de rotação da galáxia *NGC 3198*, no contexto das teorias de branas *RSII* e *DGP*. Levando em conta a presença de matéria escura, pudemos fazer estimativas para os parâmetros livres das teorias , através do método estatístico da função *qui-quadrado*.

ABSTRACT

The dimensionality of spacetime has become a recurring theme of study in the high energy physics research. Initially motivated by the unification of fundamental forces of Nature, today is an indispensable and inseparable component in the string theory. In this work we are interested in discussing the effects of the alleged extra dimensions in Physical systems where gravity is the dominant force. For this purpose, we will study the rotation curves of the galaxy *NGC 3198*, in the context of branes theories *RSII* and *DGP*. Taking into account the presence of dark matter, we can make estimates for the free parameters of the theory, using the statistical method of *chi-squared* function.

Sumário

1	Introdução	1
2	Dimensões Extras	5
2.1	Modelo Kaluza-Klein	5
2.1.1	Teoria de Kaluza	5
2.1.2	Mecanismo de Klein	7
2.2	Modelo ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali)	11
2.2.1	Mecanismo de aprisionamento de matéria	12
2.2.2	O Potencial Gravitacional	15
2.2.3	Escala de compactação	17
2.3	Modelo Randall-Sundrum	20
2.3.1	RSI	20
2.3.2	RSII	25
2.4	Modelo DGP (Dvali, Gabadadze e Porrati)	27
2.4.1	Setup DGP	27
2.4.2	O Potencial Gravitacional	29

3	Matéria Escura	33
3.1	A matéria faltante	34
3.2	Curva de rotação	37
3.2.1	Halos de matéria escura	40
4	Dimensões extras e curvas de rotação	48
4.1	RSII	49
4.1.1	Curva de rotação	49
4.1.2	Exemplo: NGC 3198	53
4.2	DGP	56
4.2.1	Curva de rotação	56
4.2.2	Exemplo: NGC3198	58
5	Conclusões	61
	Apêndice A	64
	Teoria Bayesiana	64
	Marginalização	65
	Marginalização via aproximação de Laplace	67
	Curvas de confiança	69
	Apêndice B	72
	Código MATHEMATICA	72

Capítulo 1

Introdução

Desde meados do século *XX* o estudo da dimensionalidade do espaço-tempo tem despertado grande interesse [1, 2]. Ao que nos parece, o espaço-tempo em que vivemos é uma variedade quadridimensional onde três dimensões são espaciais e uma é temporal. Todavia, há fortes razões teóricas para fundamentar e postular a existência de dimensões extras [3, 4].

Inicialmente Kaluza e Klein propuseram um modelo de unificação entre a gravitação e eletromagnetismo pressupondo a existência de dimensões extras, e para justificar a aparente não detectabilidade da dimensão extra dotaram-na de um mecanismo de compactação. Com isso a dimensão extra possuiria a topologia de um círculo. A não constação observacional dessa dimensão espacial extra foi justificada por seu suposto tamanho ínfimo da ordem do comprimento de Planck ($l \sim 10^{-35}m$). Desta forma, o espaço-tempo passaria a ter $(4 + 1)$ dimensões.

Na última década essa vertente de teorias que propõem um espaço-tempo multidimensional tem se intensificado. Desta feita, essas teorias alicerçam-se sobre um pressuposto indispensável às teorias de cordas, pois de acordo com o modelo de cordas o espaço-tempo seria uma variedade em 10 dimensões [5].

Recentes modelos de dimensões extras deram início ao estudo de objetos denominados branas. Neste cenário, a matéria e os campos estariam localizados sobre a brana (uma hipersuperfície), e esta por sua vez encontraria-se imersa num espaço de dimensões superiores (bulk), enquanto que a gravidade tem acesso a todas as dimensões.

Nesse contexto, nosso trabalho tem início com uma revisão dos modelos de dimensões extras. Começamos discutindo o modelo *Kaluza-Klein*. Em seguida mostramos como a gravidade, aparentemente quadridimensional, pode de fato ser enfraquecida pela existência de dimensões extras. Sendo assim, estudamos o modelo de branas *ADD* que justifica a indetectabilidade das dimensões espaciais adicionais devido sua topologia. Verificaremos ainda que para não entrar em contradição com a realidade, há necessidade da existência de mais de uma dimensão extra, sendo que elas podem ser encontradas numa escala submilimétrica.

A existência de dimensões extras implica na alteração do potencial gravitacional. Como consequência direta, pode-se mostrar que no interior de uma casca esférica a força não será nula [6].

Posteriormente apresentamos os modelos *Randall-Sundrum I e II* (*RSI* e *RSII*) que são fundamentados sobre as branas. No modelo *RSI* temos duas

branas com tensões específicas σ_1 e σ_2 , separadas por uma distância finita (raio da dimensão extra). Os campos do modelo padrão são aprisionados à brana de tensão σ_1 devido ao fator de deformação, e apenas a gravidade estaria livre para se propagar para a dimensão extra. Apesar desse modelo apresentar uma dimensão extra compacta ele difere do modelo *ADD*, pois o espaço ambiente do modelo *RSI* possui uma constante cosmológica negativa. Já o modelo *RSII* é obtido fazendo a localização da brana de tensão σ_2 tender ao infinito. Então, nossa dimensão extra pode ter um tamanho infinito e o espaço-ambiente tem uma constante cosmológica negativa que além de assegurar um modo sem massa para o gráviton localizado na brana, irá suprimir os modos massivos. Também veremos que o modelo *RSII* traz correções ao potencial gravitacional newtoniano e que, se verificadas experimentalmente nos dariam indícios da existência de dimensões extras. Tais correções seriam importantes numa escala submilimétrica.

Por último estudamos o modelo *DGP* que, apesar de ser um modelo descrito por uma brana imersa num espaço ambiente de dimensões superiores, apresenta correções ao potencial gravitacional newtoniano apenas em escalas cosmológicas, contrariamente a todos os outros modelos de dimensões extras. De acordo com o modelo *DGP*, a Lagrangiana que descreve a gravitação apresenta uma modificação através do acréscimo de um termo quadridimensional, que será o responsável pela recuperação do caráter quadridimensional do potencial gravitacional newtoniano a curtas distâncias. Uma implicação direta dessa configuração do espaço-tempo é que o espaço ambiente de tamanho

infinito não precisa ter constante cosmológica.

Essas teorias prevêem correções ao potencial newtoniano, que resultam em efeitos observacionais. Pretendemos estudar esses efeitos analisando as curvas de rotação de galáxias.

No *capítulo III* apresentamos ainda uma rápida abordagem ao tema da matéria escura com o intuito de discutir a curva de rotação de galáxias espirais. Vimos que para a descrição teórica correta da curva de rotação necessitamos acrescentar um perfil de matéria escura (perfil *NFW*) que descreve um halo em torno da galáxia.

Com o objetivo de encontrarmos uma estimativa dos parâmetros livres das teorias de dimensões extras do tipo *RSII* e *DGP*, aplicamo-las ao problema da curva de rotação de galáxias espirais juntamente com o modelo de matéria escura descrita pelo perfil *NFW*. Com isso, no *capítulo IV*, obtivemos estimativas dos valores teóricos que melhor descrevem as curvas experimentais da galáxia *NGC 3198*.

Capítulo 2

Dimensões Extras

2.1 Modelo Kaluza-Klein

2.1.1 Teoria de Kaluza

Na década de 1920 *Theodor Kaluza* apresentou a *Albert Einstein* uma idéia revolucionária [1]. Em um artigo que *Kaluza* lhe enviara, a unificação de duas forças fundamentais da natureza era prevista por meio da inserção de uma dimensão espacial extra à teoria da gravitação de *Einstein*. Com a adição de uma dimensão extra conseguiu-se unificar a força eletromagnética à força gravitacional. Desta forma, o espaço-tempo seria uma variedade com 5 dimensões, onde as coordenadas são denotadas como $x^A = x(x^\mu, z)$, e $A = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, e $z = x^5$ é a coordenada na direção da dimensão extra.

Sob essas considerações, assume-se uma maneira de parametrizar a métrica

desse espaço-tempo como sendo:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde, $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo ordinário, ϕ é o campo escalar e A_μ é o potencial eletromagnético.

Para explicar o fato de não observarmos a dimensão extra *Kaluza* propôs a condição cilíndrica. De modo que os campos não dependem da dimensão extra. Posto matematicamente, a condição cilíndrica nos fornece:

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

Aplicando a condição cilíndrica e assumindo que o tensor de Ricci e os símbolos de Christoffel em cinco dimensões, definidos pela métrica g_{AB} , tem a mesma forma que o tensor de Ricci e os símbolos de Christoffel quadrimensionais pode-se encontrar as equações de campo [7].

Todavia, se partirmos da ação em 5 dimensões:

$$S = -\frac{1}{16\pi G_{(5)}} \int d^4x dz \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R}, \quad (2.3)$$

onde $G_{(5)}$ é a constante gravitacional em 5 dimensões, $\tilde{g} = \det(g_{AB})$ e \tilde{R} é o escalar de curvatura em cinco dimensões.

Através do princípio variacional, aplicado a ação (2.3), podemos encontrar [7]:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \phi \left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4} \phi^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{2}{3\kappa^2} \frac{\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi}{\phi^2} \right). \quad (2.4)$$

A eq. (2.4) descreve a gravidade 4-dimensional com o eletromagnetismo de Maxwell e o campo escalar sem massa de Klein-Gordon. Fazendo $\phi = 1$, encontramos a equação de Einstein-Maxwell para a gravitação mais o eletromagnetismo.

2.1.2 Mecanismo de Klein

Posteriormente a *Kaluza*, *Oscar Klein* introduziu um componente fundamental ao modelo original. Ele dotou a teoria com um mecanismo de compactação da dimensão extra. Devemos ressaltar que a compactação proposta por *Klein* é uma maneira de justificar fisicamente a condição cilíndrica imposta por *Kaluza* à teoria, e, portanto, uma forma de explicar o caráter quadridimensional do mundo.

Dessa forma, a quinta dimensão teria a topologia de um círculo e seria identificada periodicamente:

$$z \rightarrow z + 2\pi l, \quad (2.5)$$

onde l é o raio da dimensão extra.

A topologia da dimensão extra implica algumas consequências físicas. Nesse espaço, qualquer campo será periódico com respeito à quinta dimensão [7]:

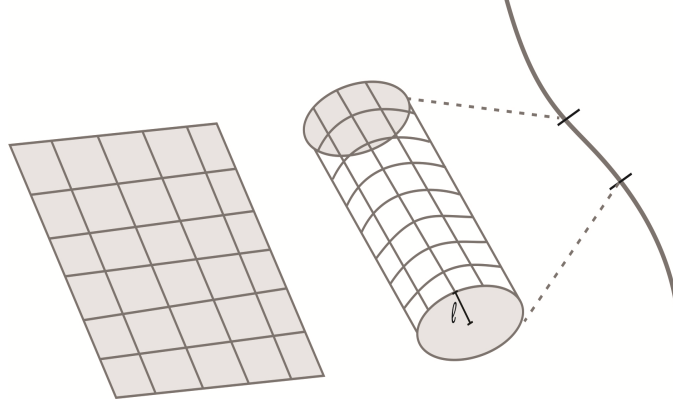


Figura 2.1: Dimensão extra segundo a teoria de Kaluza-Klein. As quatro dimensões espaciais formam um "cilindro" onde as três dimensões usuais (x^1, x^2, x^3) são infinitas e a dimensão z tem a topologia de um círculo de raio l .

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}(x^\mu, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}, \\
 \phi(x^\mu, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}, \\
 A_\mu(x^\mu, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l},
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde o índice (n) refere-se ao n -ésimo modo de Fourier.

Passemos a analisar algumas características clássicas da teoria de Kaluza-Klein. Para tanto, consideraremos a ação de um campo escalar sem massa em cinco dimensões [8]:

$$S = \int d^5x \left[-\frac{1}{2} \partial_A \phi(x^\mu, z) \partial^A \phi(x^\mu, z) \right]. \tag{2.7}$$

Como vimos, a compacidade da dimensão extra impõe a periodicidade ao

campo escalar com respeito a coordenada z , $\phi(x^\mu, z) = \phi(x^\mu, z + 2\pi l)$. O campo escalar decomposto em séries de Fourier terá a forma:

$$\phi(x^\mu, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.7), obtemos:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x dz \left[-\frac{1}{2} \partial_A \phi(x^\mu, z) \partial^A \phi(x^\mu, z) \right] \\ &= \int d^4x dz \sum_{m,n} \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^{(m)} e^{i\frac{m}{l}z} \partial^\mu \phi^{(n)} e^{i\frac{n}{l}z} - \frac{1}{2} \left(i\frac{m}{l}\right) \phi^{(m)} e^{i\frac{m}{l}z} \left(i\frac{n}{l}\right) \phi^{(n)} e^{i\frac{n}{l}z} \right] \\ &= \int d^4x \left(\int_0^{2\pi l} e^{i\frac{m+n}{l}z} dz \right) \sum_{m,n} \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^{(m)} \partial^\mu \phi^{(n)} + \frac{1}{2} \frac{mn}{l^2} \phi^{(m)} \phi^{(n)} \right] \\ S &= 2\pi l \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi^{(0)} \right) \left(\partial^\mu \phi^{(0)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\partial_\mu \phi^{(-n)} \right) \left(\partial^\mu \phi^{(n)} \right) + \frac{n^2}{l^2} \phi^{(-n)} \phi^{(n)} \right) \right], \quad (2.9) \end{aligned}$$

onde $\int_0^{2\pi l} e^{i\frac{m+n}{l}z} dz = 2\pi l \delta(m-n)$ e $\phi^{(m)} = \phi^{(m)}(x^\mu)$.

Podemos observar que do ponto de vista 4-dimensional a ação descreve uma série infinita de partículas (torre Kaluza-Klein; *ver figura (2.2)*) com massas $M^2 = \frac{n^2}{l^2}$. Cada modo KK carrega consigo uma energia de repouso da ordem de n/l , sendo este um parâmetro restritivo na detectabilidade dos

modos excitados ($n \neq 0$).

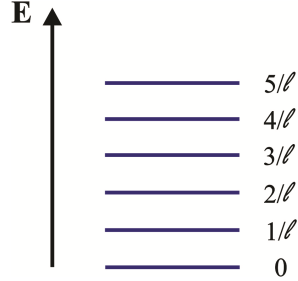


Figura 2.2: Torre de modos KK.

Constatamos que se a dimensão extra for suficientemente pequena, da ordem do comprimento de *Planck* ($l_{Planck} \equiv (\hbar G/c^2)^{1/2}$), os modos KK serão tão energéticos que não aparecerão na física de baixas energias. Somente o modo zero, que é independente da coordenada z , vai ser observável e o universo irá parecer quadrimensional. As dimensões extras tornariam-se acessíveis apenas quando os aceleradores de partículas estiverem atuando no patamar de energia da ordem de:

$$E \sim \frac{1}{l}. \quad (2.10)$$

Sendo assim, estima-se que as dimensões extras devem ser compactadas na ordem do comprimento de *Planck* ($l_{Planck} \sim 10^{-35}m$). Consequentemente a massa dos estados excitados seriam da ordem da massa de Planck ($M_p \approx 10^{19}GeV$).

2.2 Modelo ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali)

A priori, teorias de dimensões extras foram concebidas com o objetivo de buscar a unificação de forças fundamentais da Natureza [1, 2]. Em consonância com sua concepção original, atualmente, a existência de dimensões extras é um ingrediente elementar para a fundamentação teórica das teorias de cordas [5].

Isso se dá também na formulação da teoria de cordas com base em modelos de mundo-branas. As branas seriam superfícies imersas no universo de dimensões superiores. Sob esta ótica, os campos e as interações do modelo padrão, postula-se, estariam aprisionados à brana e apenas a gravidade permearia todo o espaço contendo as dimensões ocultas.

O modelo *ADD* [3, 4] é formulado apropriando-se da idéia de mundo-branas, conquanto as dimensões extras ainda são compactas sem apresentar conflitos com os resultados empíricos [9, 10, 11].

As dimensões extras adquiriram destaque na fenomenologia após o modelo *ADD* (*Arkani-Dimopoulos-Dvali*), que solucionou o problema da hierarquia com a adição de dimensões extras de grande escala ao espaço-tempo quadrimensional.

De modo conciso, o problema da hierarquia consiste na discrepante diferença entre escala de energia eletrofraca e a escala de Planck, região onde a gravidade torna-se tão forte quanto as interações de calibre.

Nesse contexto, o nosso universo observável seria uma hipersuperfície tridimensional (3-brana) imersa em um espaço com dimensões superiores.

2.2.1 Mecanismo de aprisionamento de matéria

Há necessidade de discutirmos o método pelo qual o confinamento da matéria na hipersuperfície 3D é assegurado. Sendo assim, consideraremos a localização de férmions em uma teoria que admite uma dimensão extra z [12]. A ação de um campo escalar $\phi = \phi(x^\mu, z)$ será:

$$S = \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.11)$$

onde $A = 0, 1, 2, 3, 4$ e $V(\phi)$ é o potencial escalar.

Um potencial que satisfaz a solução do tipo parede de domínio tem a forma,

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - \nu^2)^2. \quad (2.12)$$

De modo trivial verificamos que os mínimos do potencial ocorrem para $\phi = \nu$ e $\phi = -\nu$. Há ainda um máximo instável para $\phi = 0$ (*ver figura (2.3)*). Através do formalismo de Euler-Lagrange podemos encontrar as equações de movimento do campo escalar. Admitindo a solução estacionária e que dependa apenas da coordenada extra (z) encontramos a solução do tipo parede de domínios [7].

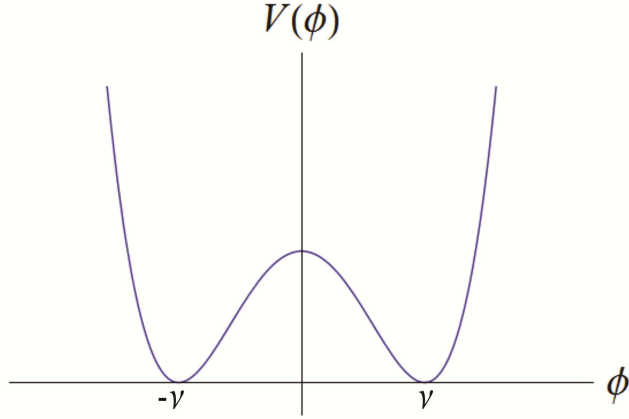


Figura 2.3: Potencial escalar em função do campo ϕ .

$$\phi(z) = \nu \tanh\left(\frac{\lambda\nu z}{2}\right). \quad (2.13)$$

O comportamento do campo escalar é representado na *figura 2.4*.

O campo escalar faz a interpolação entre as duas regiões de menor energia $\phi(z \rightarrow \infty) = \nu$ e $\phi(z \rightarrow -\infty) = -\nu$.

Para analisarmos o confinamento de partículas na parede de domínios, passemos a estudar a densidade de Hamiltoniana (H_0) associada ao campo ϕ . Fazendo a integração de H_0 com relação à coordenada extra (z), obtemos a densidade de energia do campo [7]:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} H_0 dz. \quad (2.14)$$

A partir de (2.11) e (2.12) encontramos \hat{H}_0 . Impondo a condição para

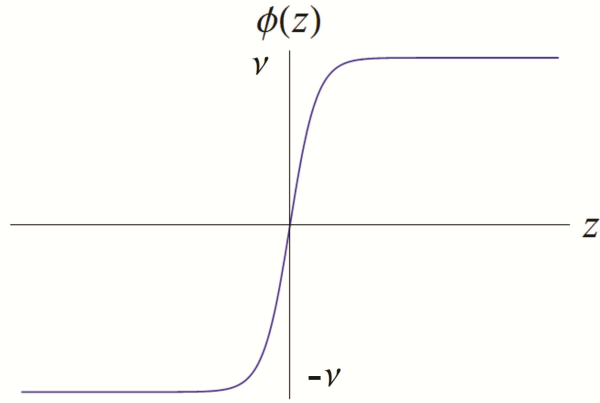


Figura 2.4: Solução do tipo parede de domínios.

solução do tipo parede de domínios (eq. 2.13) à \hat{H}_0 , temos:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda \nu z}{2}\right)}. \quad (2.15)$$

A energia tem um máximo em torno de $z = 0$ (ver figura (2.5)).

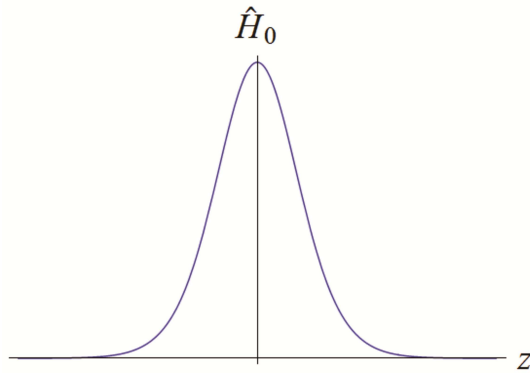


Figura 2.5: Densidade de energia da parede de domínios.

Finalmente, a densidade de energia será obtida substituindo (2.15) em

(2.14).

$$\sigma = \frac{2\lambda\nu^3}{3}. \quad (2.16)$$

O parâmetro λ ditará a concentração de energia e será interpretado como o inverso da espessura da brana. Conseqüentemente, no limite em que $\lambda \rightarrow \infty$ ($\sigma = cte$) a parede de domínios passará a ser uma 3-brana sem espessura.

2.2.2 O Potencial Gravitacional

Dissemos que os campos do modelo padrão encontram-se aprisionados à brana devido um mecanismo de confinamento. Entretanto, a gravidade pode escapar para as dimensões extras. Desse modo, esperamos que o potencial gravitacional apresente correções devido a presença de dimensões extras.

Passaremos a analisar os efeitos provocados, pela existência de dimensões extras compactas, sobre o campo gravitacional.

Por simplicidade, analisaremos inicialmente o potencial em $(4 + 1)$ dimensões. Em um espaço com uma dimensão extra compacta o potencial gravitacional pode ser calculado por meio do formalismo gaussiano. Nesse espaço ambiente uma massa será "vista" como se possuísse inúmeras cópias (imagens topológicas).

Note que a distância mínima entre as imagens é exatamente $l_c = 2\pi l$, i.e., o comprimento da dimensão extra. Para um observador afastado da massa, esse conjunto discreto de massas passará a ser um contínuo (linha). Desta

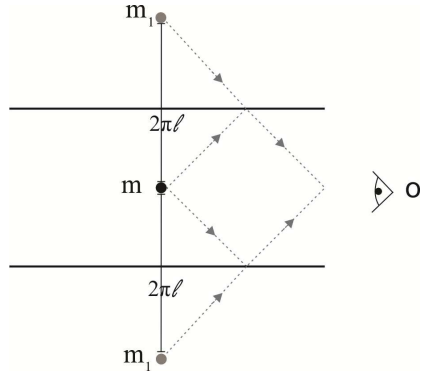


Figura 2.6: Configuração pictórica do espaço-tempo contendo uma dimensão extra compacta.

forma, podemos aplicar a Lei de Gauss e obter [13]:

$$\phi(r) = -\frac{G_{(5)} m}{2\pi l r}. \quad (2.17)$$

Podemos ainda reescrever a constante gravitacional pentadimensional em função da constante gravitacional quadridimensional ($G_{(5)} = 2\pi l G_{(4)}$). Desta forma, recuperamos a forma usual da lei do inverso do quadrado de Newton.

De modo genérico, considere uma massa m inserida num espaço com n dimensões extras compactas e todas têm o mesmo comprimento l_c . No regime $l_c \gg r$, apenas a massa localizada na origem irá contribuir para o potencial. Nesse limite as massas imagens apresentarão contribuições desprezíveis para a força.

2.2.3 Escala de compactação

Como as dimensões extras não encontram-se acessíveis para observação, necessitamos justificar esse fato. Seguindo o raciocínio de *Klein* poderíamos impor o tamanho ínfimo às dimensões extras. Todavia, usando a ideia de branas podemos justificar a ausência de traços empíricos da dimensão extra sem a necessidade de impor tal condição.

Para tanto, vamos mostrar como a constante gravitacional quadrimensional se relaciona com a constante gravitacional no espaço-tempo com n dimensões extras compactas. Considere a ação para o modelo *ADD* com n dimensões extras compactas [14].

$$S_{ADD} = \frac{M_*^{2+n}}{2} \int d^4x \int_0^{2\pi l} d^n z \sqrt{g_{(4+n)}} R_{(4+n)} + \int d^4x \sqrt{g} (T + \mathcal{L}_{MP}), \quad (2.18)$$

onde $g_{(4+n)}$ e $R_{(4+n)}$ são respectivamente o determinante da métrica e o escalar de curvatura em $(4+n)$ -dimensões, \mathcal{L}_{MP} é a lagrangeana que descreve os campos do modelo padrão.

Nos deteremos a analisar o primeira termo da eq. (2.18). A ação 4-dimensional para o modo zero na decomposição de Fourier independe da coordenada z , sendo assim, podemos mostrar que [14]:

$$\frac{M_*^{2+n}}{2} \int d^4x \int_0^{2\pi l} d^n z \sqrt{g_{(4+n)}} R_{(4+n)} \rightarrow \frac{M_*^{2+n} (2\pi l)^n}{2} \int d^4x \sqrt{g} R. \quad (2.19)$$

Utilizando a expressão (2.19) podemos definir a massa de Planck quadrimensional.

$$M_{pl}^2 = M_*^{2+n} (2\pi l)^n. \quad (2.20)$$

Através da equação (2.20) encontramos a relação entre a constante gravitacional quadrimensional e a constante gravitacional em $(4+n)$ dimensões. De fato, a constante gravitacional quadrimensional pode ser escrita como segue [7]:

$$G_{(4)} = \frac{\hbar c}{M_{pl}^2}. \quad (2.21)$$

Finalmente podemos encontrar a relação entre o número e o tamanho das dimensões extras através da eq. (2.20).

$$\begin{aligned} M_*^{2+n} (2\pi l)^n &= M_{pl}^2 \rightarrow l_c = \frac{1}{M_{pl}} \left(\frac{M_{pl}}{M_*} \right)^{2/n+1} \simeq \frac{1}{10^{15} TeV} \left(\frac{10^{15} TeV}{M_*} \right)^{2/n+1} \\ l_c &\simeq 10^{30/n-12} (eV)^{-1} \left(\frac{1 TeV}{M_*} \right)^{2/n+1} \\ l_c &\simeq 10^{30/n-17} cm, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $M_{pl} \simeq 10^{15} TeV$, $(eV)^{-1} = 1,973 \times 10^{-5} cm$ [15], $M_* \sim TeV$ e $l_c = 2\pi l$ é o comprimento da dimensão extra .

De posse da eq. (2.22) podemos estimar o tamanho das dimensões extras, onde este dependerá apenas do número de dimensões extras (n).

Número de dimensões extras n	1	2	3	4
Escala de compactação l_c em cm	10^{13}	10^{-2}	10^{-7}	10^{-10}

Tabela 2.1: Escala de compactação l_c para diferentes números n e $M_* \sim 1TeV$.

Caso existisse apenas uma dimensão extra sua escala de compactação seria muito grande, fato que possibilitaria sua observação. Como não temos observado dimensões extras nessa escala, então nesse modelo assume-se que há mais de uma dimensão extra. O modelo *ADD* matém-se efetivamente em concordância com os resultados experimentais apenas se $n \geq 2$ [9, 10, 11].

2.3 Modelo Randall-Sundrum

Na seção anterior iniciamos o estudo das branas. A teorização dessas hipersuperfícies em Física de Altas Energias têm se mostrado como uma viável alternativa para explicar universos multidimensionais.

Vimos ainda que a existência de dimensões extras é consistente, segundo o modelo *ADD*, com os experimentos. Entretanto, precisamos de um número de dimensões extras compactas $n \geq 2$.

No cenário de branas discutiremos os modelos *Randall-Sundrum* [16, 17], segundo os quais o caso $n = 1$ também é fenomenologicamente viável se admitirmos a presença de uma constante cosmológica negativa no espaço ambiente.

O primeiro modelo (*RSI*) admite que a dimensão extra é compacta com o objetivo de resolver o problema da hierarquia. Já no segundo modelo (*RSII*) a dimensão extra apresenta um tamanho infinito, mas ainda assim recupera a gravidade 4-dimensional para longas distâncias.

2.3.1 RSI

O modelo teórico (*RSI*) está fundamentado sobre a idéia de que há duas branas com tensões σ_1 e σ_2 no espaço de dimensões maiores. As tensões das branas são as densidades de energia das mesmas. A dimensão extra, nesse quadro, é compacta e tem a topologia S^1/\mathbb{Z}_2 , onde S^1 é a topologia da esfera 1-dimensional e \mathbb{Z}_2 introduz a identificação dos pontos (x^μ, z) com

$(x^\mu, -z)$. Esta condição incorpora periodicidade à dimensão extra, i.e., esta construção confere dois pontos fixos onde as branas serão localizadas, um na origem $z = 0$ e um na outra extremidade do círculo $z = z_c = \pi l$. Note que z_c é o comprimento da dimensão extra e l é o raio de compactação.

Nesse contexto, a fim de que a invariância de Poincaré quadrimensional seja preservada na brana (*Ansatz*) a métrica assume a forma [17]:

$$ds^2 = e^{-2\kappa|z|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2, \quad (2.23)$$

onde $e^{-2\kappa|z|}$ é chamado o fator de deformação (*ver figura (2.7)*) e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo 4-dimensional de *Minkowski*.

O fator de deformação depende apenas da coordenada extra (z), desta forma a métrica é não-fatorizável, ao contrário dos modelos do tipo Kaluza-Klein. Como consequência direta, a métrica não pode ser expressa como o produto da métrica 4D de Minkowski e uma variedade das dimensões extras. O valor de κ é calculado por meio das equações de Einstein.

As equações de Einstein para serem resolvidas nesse espaço ambiente são:

$$R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R = \Lambda g_{AB} + 8\pi G_{(5)} \tau_{AB}, \quad A, B = 0, 1, 2, 3 \text{ e } 4, \quad (2.24)$$

onde Λ é a constante cosmológica do espaço ambiente, $G_{(5)}$ é a constante gravitacional no espaço pentadimensional e τ_{AB} descreve o conteúdo energético das branas.

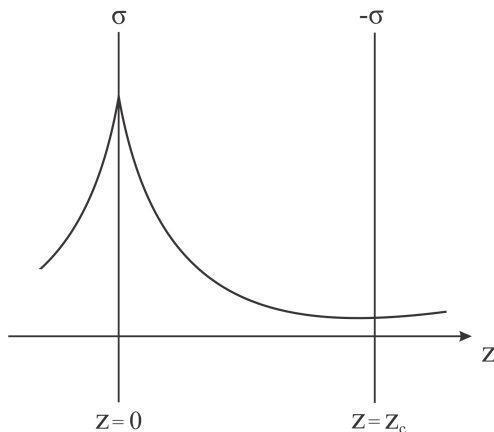


Figura 2.7: Comportamento do fator de deformação.

O lado direito da eq. (2.24) é o tensor energia-momento (T_{AB}).

Após calcular o tensor de Einstein através da métrica dada em (2.23) e admitindo a regularidade da função $a(z)$ no intervalo $0 < z < z_c$ obtém-se a seguinte condição [7]:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{6}\Lambda, \quad (2.25)$$

e,

$$\sigma^2 = -\frac{3}{32\pi^2 G_{(5)}^2} \Lambda. \quad (2.26)$$

O que implica que a constante cosmológica $5D$ deve ser negativa, logo o espaço entre as branas (bulk) é anti-de-Sitter (AdS_5). E ainda, a tensão da brana está ajustada com a constante cosmológica do espaço ambiente (bulk).

Fazendo uma perturbação na métrica podemos calcular a massa dos

grávitons para os primeiros estados excitados. Sendo assim, partiremos da métrica:

$$ds^2 = [a^2(z) \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, z)] dx^\mu dx^\nu - dz^2, \quad (2.27)$$

onde $h_{\mu\nu}(x, z)$ é o termo de perturbação ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$). Por meio dessa métrica perturbada pode-se encontrar as equações de *Einstein* linearizadas, a fim de obter as equações de campo para a perturbação $h_{\mu\nu}$ [7]:

$$h''_{\sigma\nu} - 4\kappa^2 h_{\sigma\nu} - a^{-2} \partial^\mu \partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0, \quad (2.28)$$

onde o símbolo ' representa derivada com respeito a coordenada extra (z). Esta equação obedece às seguintes condições de contorno [7]:

$$(h'_{\sigma\nu} + 4\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=0} = 0. \quad (2.29)$$

$$(h'_{\sigma\nu} + 4\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=z_c} = 0. \quad (2.30)$$

A equação (2.28) pode ser resolvida aplicando o método de separação de variáveis ($h_{\sigma\nu}(x, z) = \Psi(z) \Phi_{\sigma\nu}(x)$). Sendo assim, encontramos:

$$\Psi''(z) - 4\kappa^2 \Psi(z) + C \Psi(z) = 0. \quad (2.31)$$

$$\square \Phi_{\sigma\nu}(x) = -C \Phi_{\sigma\nu}(x). \quad (2.32)$$

A equação (2.32) é conhecida como a equação de *Klein-Gordon* para um campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$, e a constante de separação (C) está associada a massa do campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$. Desta forma, para cada valor de m permitido, corresponderá a um campo $\Phi_{\sigma\nu}^{(m)}(x)$ conhecido como modo *KK*. A solução de (2.31) é dada por [7]:

$$\Psi(z) = C_m \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) N_2\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}\right) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) J_2\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}\right) \right], \quad (2.33)$$

onde C_m é uma constante de normalização e $J_1(z)$, $J_2(z)$, $N_1(z)$ e $N_2(z)$ são as funções de *Bessel* de primeira ($J_1(z)$) e segunda ($N_1(z)$) espécies. Aplicando a solução (2.33) à condição de contorno (eq. (2.30)) obtemos uma relação entre a massa do campo (m) e o comprimento da dimensão extra (z_c).

$$N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) J_1\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c}\right) + J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) N_1\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c}\right) = 0 \quad (2.34)$$

Note que os valores permitidos para m serão raízes da eq. (2.34). Expandindo as funções de *Bessel* admitindo que m é pequeno comparado com κ , obtemos [7]:

$$m \simeq \kappa e^{-\kappa z_c}, \quad (2.35)$$

onde z_c é o tamanho da dimensão extra.

Os modos *KK* excitados não irão ser observados devido a supressão exponencial. A massa do campo tem dependência explícita com o tamanho da dimensão extra, então fazendo z_c suficientemente pequeno e κ grande

garantimos que os modos excitados estarão num patamar de energia além da resolução de nossos experimentos. Essa seria a explicação para não terem sido observados grávitons com massa neste modelo.

2.3.2 RSII

Na última seção estudamos o modelo de branas do tipo *RSI* que apresenta uma dimensão extra em sua formulação. Vimos que essa dimensão ainda é compacta devido a distância finita de separação entre as duas hiper-superfícies (branas) com tensões específicas.

Agora nos deteremos a descrever outro modo de obter a gravidade quadridimensional sobre uma brana. Ele é baseado sobre o fenômeno de localização da gravidade descoberto por *Randall e Sundrum* [17].

Segundo esse modelo a brana de tensão negativa é "removida" para o infinito, i.e., nós fazemos com que a sua posição z_c encontre-se a uma distância infinita da brana de tensão positiva. Logo, a dimensão extra deixa de ser compacta e pode ter tamanho infinito.

A consistência dos modelos de branas é assegurada se, no regime de campo fraco, as soluções reproduzirem o comportamento já conhecido. Para verificar essa condição pode-se linearizar a equação de Einstein no cenário das branas *RSII*, obtendo-se assim correções devido a existência da dimensão extra.

Estamos interessados em obter correções para o potencial gravitacional. Tais correções serão encontradas ao calcularmos a função de *Green* para o

espaço ambiente pentadimensional [7].

Pode-se mostrar que, devido ao modo zero ($m = 0$), o potencial recupera o caráter quadrimensional acrescido de um termo de correção para longas distâncias. A constante cosmológica negativa do espaço ambiente irá assegurar um modo sem massa para o gráviton localizado na brana, e suprimirá os modos KK leves. Deste modo, a função de Green será [7]:

$$G(x, z; x', z') = -\frac{\kappa}{4\pi R} \left[1 - \frac{1}{\pi^2 \kappa^2 R^2} \right]. \quad (2.36)$$

Note que o primeiro termo descreve o comportamento clássico obtido pela teoria newtoniana, já o segundo termo é a parcela corretiva do potencial, sendo este um efeito da possível existência de dimensões extras.

2.4 Modelo DGP (Dvali, Gabadadze e Porrati)

Os modelos multidimensionais da gravitação têm recebido destaque nos últimos anos após a teorização das branas. Dentre os modelos de branas passaremos a discutir nesta seção alguns aspectos relevantes do modelo *DGP*. Esse modelo teórico foi proposto por *Dvali, Gabadadze e Porrati* visando explicar a aparente debilidade da força gravitacional comparada com as demais forças elementares da Natureza.

Anteriormente mostramos como espaços com dimensões extras compactas [3] e até mesmo infinitas [17] podem reproduzir a gravidade quadridimensional. Contrariamente aos modelos já apresentados, o *DGP* é fundamentado sobre um Universo com 5 dimensões, onde a dimensão extra é plana e tem comprimento infinito.

O modelo *DGP* justifica a aparente quadridimensionalidade do espaço-tempo devido um mecanismo de indução da gravidade 4-dimensional em um espaço 5-dimensional. Segundo esse modelo uma 3-brana estaria imersa num espaço-tempo de Minkowski pentadimensional [18].

2.4.1 Setup DGP

Considere a ação do modelo *DGP*:

$$S = M^3 \int d^5x \sqrt{\tilde{g}} \tilde{R} + M_p^2 \int d^4x \sqrt{g} R, \quad (2.37)$$

onde \tilde{g} e \tilde{R} são o determinante da métrica e o escalar de Ricci em $5D$ respectivamente, M é a massa de Planck $5D$, M_p é a massa de Planck $4D$, g e R são o determinante da métrica e o escalar de Ricci $4D$.

Por simplicidade omite-se o acréscimo de outros campos à ação (2.37). Note que no limite em que $M \rightarrow 0$ (M_p fixo) a ação (2.37) descreverá a gravidade 4-dimensional sobre a brana. Todavia, se fizermos $M_p \rightarrow 0$ (M fixo) a ação passará a descrever a gravidade $5D$ no espaço ambiente.

Pode-se assegurar a realidade física da ação (2.37) por meio de duas hipóteses. A primeira possibilidade está relacionada com o fato de que a matéria e os campos estão confinados sobre a brana. Sendo assim, há um sistema de coordenadas em que o tensor energia-momento assume a forma:

$$T_{AB} = \begin{pmatrix} T_{\mu\nu} \delta(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Esse tensor energia-momento pode induzir correções (cálculo de loop) à ação de Einstein-Hilbert pentadimensional. Isto seria equivalente a introduzir o termo cinético 4-dimensional da eq. (2.37), segundo *Dvali* [18].

A segunda possibilidade é imaginar que o termo $4D$ é originado do acoplamento de um campo escalar $5D$ (ϕ) com a gravidade $5D$ como veremos adiante.

2.4.2 O Potencial Gravitacional

A viabilidade teórica do modelo *DGP* é confirmada mediante a recuperação do caráter quadrimensional Newtoniano do campo gravitacional. Para verificarmos isso, vamos considerar um campo escalar $5D$ regido por uma ação similar a (2.37)¹:

$$S = M^3 \int d^4x dz \partial_A \Phi(x, z) \partial^A \Phi(x, z) + M_p^2 \int d^4x dz \delta(z) \partial_\mu \Phi(x, 0) \partial^\mu \Phi(x, 0). \quad (2.39)$$

Note que esse tipo de ação pode surgir se o campo $5D$ é colocado no fundo $\chi = \nu \tanh(\nu z)$, e as interações entre o campo são dadas por: $(\partial_A \Phi)^2 + (\partial_A \chi)^2 (\partial_B \Phi)^2 - (\partial_A \Phi \partial^A \chi)^2 + \dots$

Nesse contexto temos a lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= M^3 (\partial_A \Phi)^2 + M_p^2 \left[(\partial_A \chi)^2 (\partial_B \Phi)^2 - (\partial_A \Phi \partial^A \chi)^2 \right] \\ &= M^3 (\partial_A \Phi)^2 + M_p^2 \left[(\chi')^2 (\partial_B \Phi)^2 - (\chi')^2 (\partial_z \Phi)^2 \right] \\ \mathcal{L} &= M^3 (\partial_A \Phi)^2 + M_p^2 (\chi')^2 (\partial_\mu \Phi)^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

O símbolo $'$ indica a derivada com respeito a coordenada extra. Sendo assim, $(\chi')^2 = \nu^4 \operatorname{sech}^4(\nu z)$. Analisando esta função podemos concluir que se

¹Índices latinos descrevem quantidades $5D$ ($A = 0, 1, 2, 3, 4$) e índices gregos descrevem quantidades $4D$ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$).

ν for suficientemente grande, então $(\chi')^2$ pode ser aproximada a uma função delta de Dirac. Deste modo,

$$\mathcal{L} = M^3 (\partial_A \Phi)^2 + M_p^2 \delta(z) (\partial_\mu \Phi)^2. \quad (2.41)$$

Com esta lagrangeana encontramos a ação (2.39).

Agora vamos determinar, a partir do cálculo da função de Green, a dependência com distância das interações que são mediadas por um campo escalar na teoria *DGP*. A função de Green será solução da equação:

$$(M^3 \partial_A \partial^A + M_p^2 \delta(z) \partial_\mu \partial^\mu) G_R(x, z; 0, 0) = \delta^{(4)}(x) \delta(z). \quad (2.42)$$

O potencial para uma fonte estática será dado por:

$$V(r) = \int G_R(t, \vec{x}, z = 0; 0, 0) dt, \quad (2.43)$$

onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Para resolver a eq. (2.42) vamos recorrer a transformada de Fourier da função de Green.

$$G_R(x, z; 0, 0) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu x^\mu} \tilde{G}_R(p, z). \quad (2.44)$$

Usando este formalismo encontramos:

$$(M^3 (p^2 - \partial_z^2) + M_p^2 p^2 \delta(z)) \tilde{G}_R(p, z) = \delta(z), \quad (2.45)$$

onde $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}$ representa o 4-momento Euclideano. A solução

de (2.45) tem a forma:

$$\tilde{G}_R(p, z) = \frac{1}{M_p^2 p^2 + 2M^3 p} e^{-p|z|}. \quad (2.46)$$

Finalmente, o potencial mediado pelo campo escalar na $4D$ brana será [18]:

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi^2 M_p^2} \frac{1}{r} \left\{ \sin\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{Ci}\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{r}{r_0}\right) \left[\pi - 2 \text{Si}\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \right\}, \quad (2.47)$$

onde,

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln(z) + \int_0^z (\cos(t) - 1) dt/t, \quad (2.48)$$

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \sin(t) dt/t, \quad (2.49)$$

$$\gamma \simeq 0,577 \text{ (constante de Euler-Masceroni)}, \quad (2.50)$$

e $r_0 = \frac{M_p^2}{2M^3}$ é o raio característico da teoria. Esta quantidade é útil para analisar o comportamento do potencial para curtas e longas distâncias.

Caso i) $r \ll r_0$

$$V(r) \simeq -\frac{1}{8\pi^2 M_p^2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\pi}{2} + \left[-1 + \gamma + \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \left(\frac{r}{r_0}\right) + \mathcal{O}(r^2) \right\}. \quad (2.51)$$

Esse resultado está em concordância com o potencial $4D$ Newtoniano.

Caso ii) $r \gg r_0$

$$V(r) \simeq -\frac{1}{8\pi^2 M_p^2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{r_0}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \right\}. \quad (2.52)$$

Para longas distâncias o potencial cai com r^2 em concordância com a teoria do potencial em $5D$. Para retomarmos o resultado usual, basta escolhermos r_0 suficientemente grande.

Nesta seção vimos que o modelo DGP consegue reproduzir a gravidade quadrimensional através da adição de um termo quadrimensional à ação pentadimensional. Portanto, ao contrário das outras teorias de dimensões extras discutidas anteriormente, no modelo DGP os efeitos da dimensão extra sobre a gravidade se tornam mais fortes para longas distâncias ($r \gg r_0$).

Capítulo 3

Matéria Escura

O cenário Cosmológico atual afirma que um grande percentual do material energético do Universo, cerca de 25%, encontra-se sob a forma de "partículas" chamadas matéria escura fria.

Todavia, esta proposição não é recente. Desde meados do século XX especula-se a necessidade de postular a existência de matéria escura. Inicialmente isto era devido aos dados envolvendo a estimativa da densidade de matéria nas regiões próximas ao nosso plano galáctico encontrados por *Jean* e *Kapteyn*.

O próximo a atestar veementemente a matéria escura como um componente indispensável do nosso Universo foi *Zwicky*. Ele fez tal alegação baseado na análise da velocidade radial de galáxias no aglomerado de *Coma*.

Nesse contexto, faremos uma breve introdução ao tema e posteriormente discutiremos acerca das curvas de rotação de galáxias. Ainda discorreremos a

respeito da necessidade de perfis de densidade característicos que descrevem halos de matéria escura envolvendo as galáxias.

3.1 A matéria faltante

Muitos objetos celestes emitem luz, por isso quase toda informação sobre tais corpos é extraída por meio de fótons. Em contrapartida, uma outra forma de estudar esses objetos é através da sua absorção de luz, como no caso das nebulosas que apresentam regiões escuras contra fundos luminosos.

Inicialmente a detecção de emissão de corpos astronômicos se deu no espectro de ondas de rádio e infravermelho. Posteriormente, com a instalação de equipamentos no espaço, atingiu-se a varredura das bandas de raios-x e raios gama [22].

A emissão (ou absorção) de fótons oriundos de corpos astronômicos de diferentes naturezas ocorre de diferentes modos e com diferentes eficiências. As supernovas, por exemplo, no fim de suas vidas são altamente luminosas. Nessa fase elas emitem mais energia do que todas as estrelas restantes da galáxia juntas. Há também os planetas que têm uma baixa emissão de luz por unidade de massa. Convenientemente a eficiência da emissividade é medida em termos da razão massa-luz (M/L) do objeto, que é expresso em unidades solares.

A massa de objetos celestes, frequentemente é determinada pela emissão. De outro modo, pode-se determinar a massa de corpos celestes direta-

mente utilizando outros corpos que o rodeiam (partículas testes). Em muitos casos a massa total dos corpos astronômicos excede a massa total luminosa. Essa discrepância na massa é atribuída a uma matéria hipotética, denominada *matéria escura*.

Em meados de 1922 surgiram os primeiros indícios da existência de matéria escura [23, 24]. Os astrônomos *J Jeans* e *K Kapteyn* analisaram os movimentos verticais das estrelas próximos ao plano da nossa Galáxia. Através desse estudo eles fizeram uma estimativa da densidade de matéria próxima ao Sol e da densidade devido todas as estrelas próximas ao plano galáctico. Como resultado verificou-se a discrepância entre a matéria luminosa existente e a quantidade de matéria necessária para provocar os efeitos observados.

Posteriormente, *Fritz Zwicky* observando a velocidade radial de galáxias no aglomerado de Coma detectou desvios na quantidade de massa esperada e observada. Como sabe-se as galáxias descrevem movimentos ao longo de órbitas nos aglomerados como os planetas planetas movem-se em torno do Sol. *Zwicky* constatou que o valor observado para a velocidade orbital era cerca de dez vezes maior do que o esperado [25]. Com essa constatação ele postulou a existência da matéria "faltante" conhecida como *matéria escura*.

Na década de 80 a presença de matéria escura foi "confirmada" por muitas fontes independentes: a dinâmica das galáxias e das estrelas nas galáxias, a determinação da massa baseada na lente gravitacional, e estudos de raios-x de aglomerados de galáxias [22, 26, 27].

Pelas razões supracitadas, considera-se que a matéria escura é um el-

emento importante da cosmologia moderna. Isso porque, como vem sendo teorizada, ela permeia todo o Universo, ainda que não tenha sido detectada diretamente por nenhum experimento [28].

A constatação de que não conhecemos a natureza dos constituintes básicos do Universo torna a busca pelas partículas de matéria escura um dos desafios mais fascinantes para o futuro. As primeiras partículas candidatas a ocuparem esse posto foram os neutrinos. Todavia, essa proposição leva a um outro problema. Os neutrinos apresentam velocidades altas o que impediria a formação de estruturas pequenas como as galáxias. Como consequência da negativa de que os neutrinos seriam os constituintes da matéria escura, teorizou-se a existência de "áxions". A essencial propriedade dessas partículas é que elas possuem uma baixa velocidade. Apesar desta proposta ter resolvido alguns problemas a natureza dos axions continua desconhecida. Como elas se formam num meio relativamente frio, então chamam-na "*Matéria Escura Fria*" (*Cold Dark Matter - CDM*). Simulações numéricas desse modelo foram consistentes com dados observacionais [22].

Há outras propostas para explicar a hipotética matéria escura. Uma delas admite que a matéria escura é composta por *WIMP's* que é o acrônimo inglês de *Weakly Interactive Massive Particles* (partículas massivas fracamente interagentes) [22, 29]. Uma outra possibilidade para explicar a matéria escura é através das teorias *MOND* (*MOdified Newtonian Dynamics*) que modelam as curvas de rotação de galáxias sem a necessidade de matéria escura. Para tanto, há necessidade de introduzir uma constante universal com unidade de

aceleração [30].

3.2 Curva de rotação

Outro problema na medição da massa e da razão massa-luz de galáxias espirais tem sido verificado. Espectros de galáxias têm mostrado que a velocidade de rotação encontrada é muito superior a estimada, que segue do modelo Kleperiano. Inicialmente, interpretou-se esse resultado como sendo devido a uma alta razão massa-luz na periferia da galáxia ou a uma grande absorção de poeira [22].

Posteriormente, com uma maior quantidade de dados obtidos do espaço, pode-se inferir que na região opticamente visível de uma galáxia a razão massa-luz é aproximadamente constante. Enquanto que nas regiões periféricas essa razão é de algumas dezenas maior.

Podemos tratar este problema por meio da teoria Newtoniana do potencial gravitacional, i.e., encontraremos a curva de rotação de uma galáxia utilizando a teoria da gravitação de Newton. Sendo assim, imagine inúmeras cascas esféricas concêntricas de raio r' com uma distribuição de densidade arbitrária $\rho(r')$. As contribuições do potencial serão divididos em duas regiões $r' < r$ e $r' > r$ [21]:

$$\Phi(r) = -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right]. \quad (3.1)$$

A força exercida devido essa configuração sob uma partícula teste de massa unitária será:

$$\vec{F}(r) = -\frac{d\Phi}{dr}\hat{e}_r = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{e}_r. \quad (3.2)$$

onde $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$ é a massa contida no interior da esfera de raio r e \hat{e}_r é o vetor unitário que aponta na direção de r . A velocidade de rotação de uma partícula teste numa órbita circular de raio r pode ser encontrada igualando a atração gravitacional (3.2) à força centrípeta v_c^2/r :

$$v_c^2 = r \frac{d\Phi}{dr} = r \left| \vec{F} \right| = \frac{GM(r)}{r}. \quad (3.3)$$

De posse da equação (3.3) pode-se inferir alguns resultados importantes. Se admitirmos que a partir de um raio limite (r_c) a massa contida no interior de uma esfera de raio r mantêm-se constante, então para essa região ($r > r_c$) a velocidade terá o seguinte comportamento:

$$v_c \propto r^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Entretanto, segundo dados observacionais após o limite $r > r_c$ a curva de rotação é aproximadamente constante, como indica a *curva (I)* da figura (3.1).

Na figura (3.1) a *curva (II)* é a representação do comportamento apresentado em (3.4). Portanto, se admitirmos que M é constante a partir de r_c , chegaremos a um conflito entre teoria e observação. Vamos, agora, tentar

obter a função $M(r)$ compatível com a condição $v_c = \text{const.}$ Substituindo $v_c = v = \text{const.}$ em (3.3), obtemos (3.5):

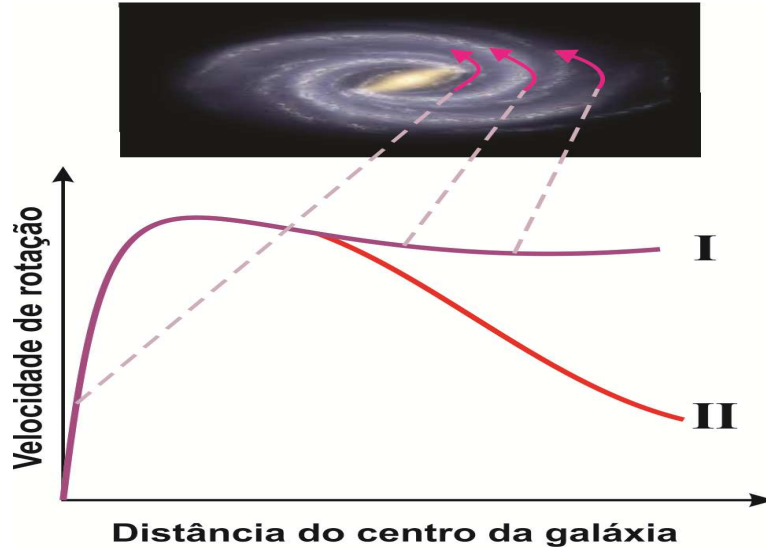


Figura 3.1: Comparação entre a curva de rotação Kleperiana esperada (curva II) e a curva observada (curva I).

$$\Phi(r) = v^2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (3.5)$$

onde $\Phi(r_0) = 0$. Finalmente podemos encontrar qual a distribuição de matéria que descreve esse comportamento para a curva de rotação. Desta feita, utilizaremos a eq. de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho \rightarrow \rho(r) = \frac{v^2}{4\pi Gr^2}. \quad (3.6)$$

Este perfil de densidade (3.6) é conhecido como perfil isotérmico.

3.2.1 Halos de matéria escura

Uma maneira de descrever esse déficit de massa nas galáxias espirais é propondo um perfil de densidade para a matéria escura, como encontramos na eq. (3.6). Entretanto, não é qualquer perfil que pode ser usado. Como vimos, nas periferias a razão massa-luz é de algumas dezenas vezes maior comparado ao interior da galáxia, enquanto que no centro temos uma razão aproximadamente constante. Então, um modo de entender essa matéria faltante seria postulando que ela estaria distribuída nas galáxias em forma de um halo.

Um perfil que consegue reproduzir os dados experimentais é o perfil de densidade *NFW* que passaremos a estudar.

Perfil NFW (Navarro-Frenk-White)

O perfil *NFW* comumente chamado de perfil universal de densidade foi proposto para explicar a matéria escura que permeia todo o espaço. A densidade é identificada como segue [31]:

$$\rho(r) = \frac{\rho_{crit}\delta_c}{r/r_s(1+r/r_s)^2}, \quad (3.7)$$

onde $r_s = r_{200}/c$ é o raio de escala que define a escala onde o perfil muda de forma (torna-se plano), $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$ é a densidade crítica do Universo (H é a constante de *Hubble* avaliada atualmente). Temos ainda δ_c e c (concentração) que são parâmetros adimensionais. Já o raio r_{200} nos fornece uma

importante informação acerca da massa do halo $M_{200} = 200\rho_{crit} \cdot (4\pi/3) \cdot r_{200}^3$, ou seja, ele define o raio do halo que contém massa igual a 200 vezes a massa crítica. Os parâmetros δ_c e c são relacionados pela exigência de que a densidade média no interior da esfera de raio r_{200} deve ser $200\rho_{crit}$.

De modo trivial, podemos encontrar a massa contida no interior de uma esfera de raio r .

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \frac{\rho_{crit}\delta_c}{r'/r_s (1+r'/r_s)^2} r'^2 dr',$$

$$M(r) = 4\pi\rho_{crit}\delta_c r_s^3 \left[-\frac{r}{r_s+r} + \ln\left(1 + \frac{r}{r_s}\right) \right]. \quad (3.8)$$

Utilizando as condições anteriormente mencionadas para massa avaliada em r_{200} , obtemos:

$$\delta_c = \frac{200}{3} \frac{c^3}{\left[\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}\right]}, \quad (3.9)$$

onde $c = r_{200}/r_s$.

Com estas definições encontramos a velocidade dada em (3.3) avaliada no raio $r = r_{200}$:

$$v_{200} = r_{200} h \frac{km/s}{kpc}, \quad (3.10)$$

onde h é obtido através da definição da *constante de Hubble* $H = 100h \frac{km}{s} \frac{1}{Mpc}$.

Para encontrar a curva de rotação, devemos calcular o potencial para uma distribuição esférica de matéria com densidade $\rho(r) = \rho_{NFW}(r)$. Posteriormente, encontramos a força ($\vec{g} = -\nabla\phi$) e a igualamos à força centrípeta.

Finalmente encontramos a velocidade de rotação:

$$v = 2\sqrt{\pi} \sqrt{-\frac{r_s^3 G \rho_{crit} \delta_c \cdot ((r_s + r)(r - \ln(1 + \frac{r}{r_s})) + r)}{r(r_s + r)}}. \quad (3.11)$$

Em termos de quantidades adimensionais (c e x).

$$v = \sqrt{v_{200}^2 \frac{1}{x} \left[\frac{\ln(1 + cx) - (cx)/(1 + cx)}{\ln(1 + c) - c/(1 + c)} \right]}, \quad (3.12)$$

onde $x = rh/v_{200}$ e $G = 2,16662 \times 10^{-36} kpc \left(\frac{km}{s}\right)^2 kg^{-1}$.

De posse da expressão (3.11) traçamos a curva de rotação afim de analisarmos o comportamento da mesma. Admitindo que $c = 15$ e $v_{200} = 110 km/s$, temos:

Note que a curva reproduz o comportamento esperado, i.e., ela apresenta um platô a partir de um ponto em torno de $r_s \simeq 7kpc$. Para traçar o gráfico (3.2) consideramos apenas a contribuição da matéria escura, ou seja, desprezamos a contribuição da matéria visível.

O raio do halo (R)

De forma pragmática, pode-se afirmar que há motivos para admitir a existência de matéria escura na forma de um halo [22]. Uma questão que não

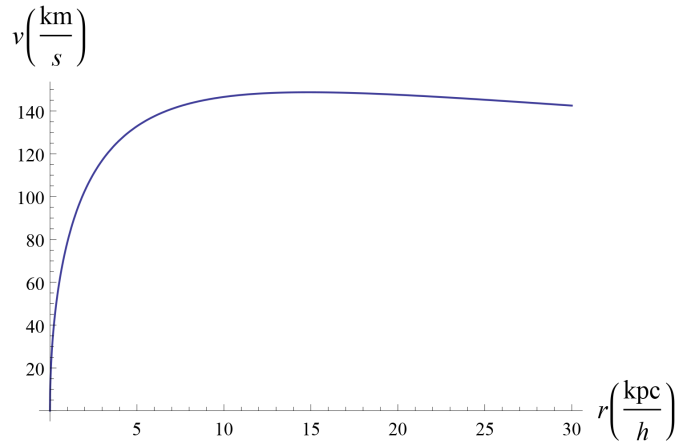


Figura 3.2: Curva de rotação para $c = 15$ e $v_{200} = 110 km/s$.

está clara é qual o tamanho do raio deste halo para que esta distribuição de matéria reproduza a curva de rotação da galáxia [32].

Uma maneira de estimar esse raio (R) é através do cálculo da dinâmica de sistemas binários de galáxias [33]. Esse estudo apresenta um relevante resultado, pois nos fornece conclusões através da análise de dados que são obtidos além das distâncias da distribuição de hidrogênio neutro numa galáxia individual.

Mediante esse estudo conclui-se que o raio do halo de matéria escura deve ser no mínimo $6 \times R_{25}$ [33]. O R_{25} é conhecido como o raio opticamente ativo ou raio de *de Vaucouleurs*. Esta grandeza nos dá informação sobre o limite da fronteira visível de uma galáxia.

De outro modo, podemos analisar o raio dos halos através do gás nas galáxias. Geralmente encontramos invólucros de gás em torno das galáxias

para raios em torno de $100 - 200kpc$ [34]. E como admite-se que o gás e a matéria escura nas galáxias encontram-se acoplados, então é razoável presumir que o raio dos halos se estendam para $\sim 200kpc$.

Exemplo: NGC 3198

Com o objetivo de analisarmos um caso real, passaremos a estudar a galáxia *NGC 3198* e à sua curva de rotação aplicaremos o perfil *NFW* a fim de encontrarmos uma estimativa para os parâmetros livres da teoria (c e v_{200}). Os dados experimentais extraídos de [35] são mostrados na figura (3.3), nela encontramos uma região de platô a partir de $r \simeq 5kpc$.

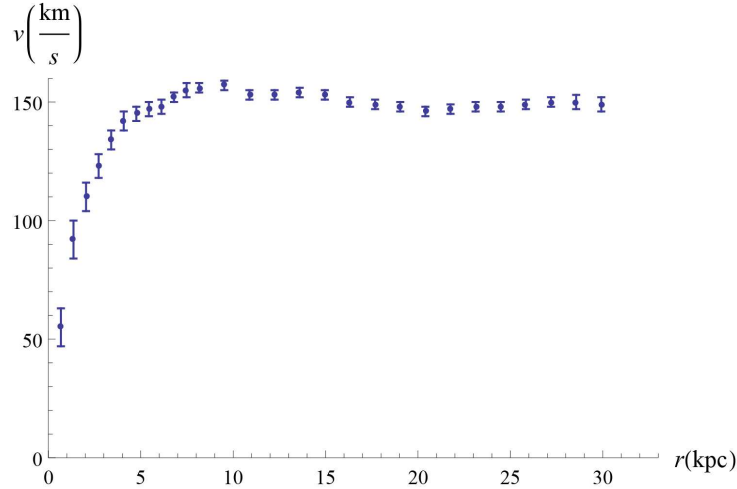


Figura 3.3: Gráfico da curva de rotação observada para a galáxia *NGC3198*.

Fazendo a análise estatística através do estudo do comportamento da função qui-quadrado, $\chi^2(r_{200}, c) = \sum_{i=1}^N \frac{(v_i - v_{teórico}(r_i))^2}{\sigma_i^2}$ com $N =$ número de dados, encontramos os melhores valores para os parâmetros livres que fitam

os dados experimentais. Para fitar o gráfico utilizamos a função da velocidade (3.11) e o valor da constante de *Hubble* $H_0 = 67,80 \frac{km}{s} Mpc^{-1}$ [37]. Para os cálculos numéricos, utilizamos o *MATHEMATICA*. Sendo assim, encontramos:

$$c = 26,86 \text{ e } r_{200} = 145,43 kpc \quad (r_s \simeq 5,41 kpc). \quad (3.13)$$

Ao invés de apresentarmos todos os detalhes da distribuição de probabilidades é comum condensar todos os resultados na forma de intervalos de confiança. A distribuição de probabilidade é uma função definida em um M -dimensional espaço de a parâmetros. A *região de confiança* é justamente uma região do espaço M -dimensional [36]. As curvas de confiança são mostradas figura (3.4).

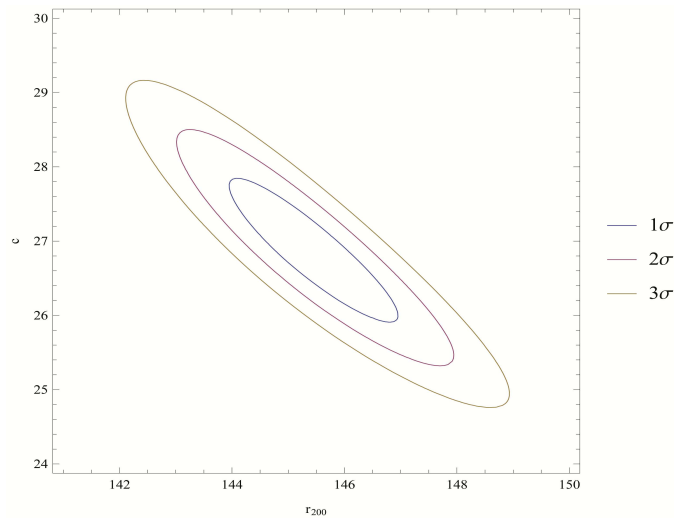


Figura 3.4: Contornos de confiança para (r_{200}, c) .

Com 68,3% de confiança afirmamos que o valor verdadeiro de r_{200} e c está contido na região 1σ , já com 95,4% de confiança podemos afirmar que o valor verdadeiro de (r_{200}, c) está contido na região 2σ e com 99,73% de confiança podemos afirmar que o valor verdadeiro de (r_{200}, c) está contido na região 3σ (ver Apêndice A).

Essas curvas nos informarão acerca das regiões de minimização da função qui-quadrado, ou seja, onde a função qui-quadrado assume seu mínimo. Consequentemente em tais regiões maximizaremos a função distribuição de probabilidades.

Comparando os dados empíricos com a curva de rotação teorizada por *NFW* e avaliada em (3.13) obtemos o seguinte gráfico (ver figura (3.5)):

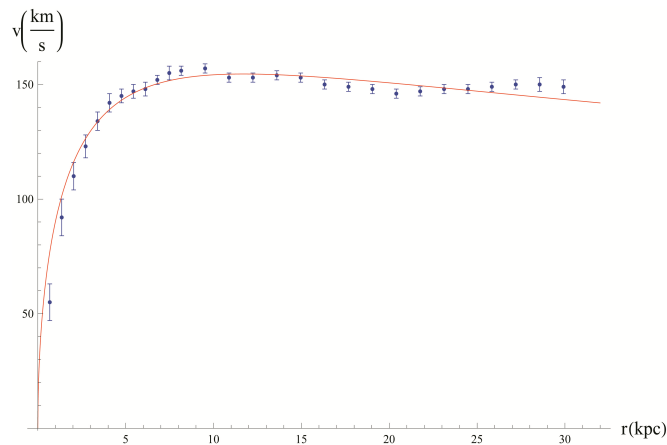


Figura 3.5: Curva de rotação da galáxia *NGC 3198* fitada pela curva de rotação *NFW*.

Por meio do gráfico (3.5) podemos concluir que o modelo *NFW* apresenta uma boa descrição da curva de rotação empírica. Note que, para este

ajuste de curva aos dados, consideramos apenas a contribuição do halo de matéria escura. O ajuste fino da curva aos dados experimentais no gráfico (3.5) ocorre quando acrescentamos a contribuição de matéria visível que tem uma distribuição exponencial decrescente (modelo Kleperiano).

Capítulo 4

Dimensões extras e curvas de rotação

Após a proposição dos modelos de branas, as teorias de dimensões extras têm obtido destaque nas pesquisas Físicas de altas energias. Há diversos estudos sobre os efeitos das supostas dimensões extras nos experimentos realizados em colisores de partículas funcionando num patamar de energia da ordem de TeV .

Aqui estamos interessados em encontrar meios de testar a existência das dimensões extras e demonstrar os efeitos provocados pelas mesmas em sistemas onde a gravitação seja a interação dominante. Para tanto, utilizaremos o potencial modificado pela existência de dimensões extras do tipo *RSII* e *DGP* e aplicamo-lo ao problema da curva de rotação das galáxias espirais, admitindo ainda a existência de matéria escura. Como resultado de

nosso estudo iremos apresentar estimativas para o raio da dimensão extra no modelo *RSII* e para a escala de corte no modelo *DGP* utilizando o método *qui-quadrado*.

4.1 RSII

O modelo de branas *RSII* apresenta uma solução alternativa aos modelos usuais de dimensões extras compactas. Neste contexto, a dimensão extra pode ser infinita.

Nesta seção, vamos abordar o problema da curva de rotação de galáxias espirais no contexto do modelo *RSII*. Calcularemos as curvas de rotação utilizando o potencial proposto por *Randall-Sundrum* no modelo de branas do tipo *RSII*. Admitiremos ainda a existência de matéria escura, e a fim de inferirmos resultados acerca das características das dimensões extras aplicaremos o método do *qui-quadrado* para obter o ajuste de curvas para a galáxia *NGC 3198*.

4.1.1 Curva de rotação

O potencial gravitacional no modelo *Randall-Sundrum* é obtido por meio de pequenas perturbações na métrica pentadimensional [7]. De modo que o potencial pode ser escrito como,

$$V(r) = V_0(r) [1 + \Delta], \quad (4.1)$$

onde $V_0(r)$ é o potencial Newtoniano quadrimensional e Δ é a correção devido a existência de uma dimensão extra.

Calculando as correções obtemos [38]:

$$V(r) = -\frac{G_{(4)}M}{r} \left[\frac{4}{3\pi\mu r} \right], \quad \mu r \ll 1, \quad (4.2)$$

$$V(r) = -\frac{G_{(4)}M}{r} \left[1 + \frac{2}{3\mu^2 r^2} \right], \quad \mu r \gg 1, \quad (4.3)$$

onde $\ell = \mu^{-1}$ é o raio de curvatura do espaço AdS_5 no modelo de branas do tipo *Randall-Sundrum II*.

Podemos propor uma função (*Ansatz*) que reproduza os dois comportamentos da função de Green de *Randall-Sundrum* (eqs. (4.2) e (4.3)). Desta forma, temos:

$$V(r) = -\frac{MG}{r} \left[1 + \frac{1}{\frac{r}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{3}{8}\pi} + \frac{r}{\alpha} \right)} \right], \quad (4.4)$$

onde $\alpha^2 = 2/(3\mu^2)$.

Agora, vamos calcular o potencial na região interna de uma esfera de raio R . Posto matematicamente:

$$\phi = -G \int_{v'} \rho_{NFW}(r') \left(1 + \frac{1}{\frac{|r-r'|}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{3}{8}\pi} + \frac{|r-r'|}{\alpha} \right)} \right) dv', \quad (4.5)$$

onde G é a constante gravitacional quadrimensional.

Sendo assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
\phi = & \frac{2a^3 G \pi \rho_0}{r} \left(2 \left(\frac{r}{a+r} + \ln(a) - \ln(a+r) \right) \right. \\
& + \frac{1}{b(a-r)(a+r)(a+R)(a-r-b\alpha)(a+r-b\alpha)} \left(2b^2 r(a+R) \ln \left(\frac{r}{a+r} \right) \alpha^3 \right. \\
& + 4abr(a+R) \ln \left(\frac{a+r}{r} \right) \alpha^2 + ((r^4 + ar^3 + Rr^3) \ln(r+R) + \ln(-r+R+b\alpha)r^4 \\
& - \ln(r+R+b\alpha)r^4 - (R+a)r^3 \ln(4(-r+R+b\alpha)) - (a+R)r^3 \ln(r+R+b\alpha) \\
& + 2(a+R) \ln \left(\frac{b\alpha}{r} + 2 \right) r^3 - (a^2 + b^2 \alpha^2 - aR - 2ab\alpha - aR) r^2 \ln(r+R) \\
& - (a^2 + b^2 \alpha^2 - aR - ab\alpha) r^2 \ln(-r+R+b\alpha) - bR\alpha \ln((2r+b\alpha)(-r+R+b\alpha))r^2 \\
& + (a^2 + b^2 \alpha^2 - aR) r^2 \ln(r+R+b\alpha) + bR\alpha \ln(b\alpha(r+R+b\alpha))r^2 \\
& - ab\alpha \ln((2r+b\alpha)(r+R+b\alpha))r^2 + 2b(a+R)\alpha(b\alpha - 2a) \ln(a+R)r \\
& - (a^3 + ab^2 \alpha^2 + b^2 R\alpha^2 + a^2 R - 2a^2 b\alpha - 2abR\alpha) r \ln(r+R) \\
& - (2a^2 b\alpha + 2abR\alpha) r \ln(b\alpha) + (ab^2 \alpha^2 + b^2 R\alpha^2) r \ln(4b\alpha) \\
& + (2a^3 + 2a^2 R) r \ln \left(\frac{r}{2r+b\alpha} \right) - (ab^2 \alpha^2 + b^2 R\alpha^2 - ab^2 R\alpha^2/r - 2a^2 b\alpha - 2abR\alpha) r \\
& \ln((R-r)(2r+b\alpha)) + (a^3 + a^2 R) r \ln(4(-r+R+b\alpha)) + (a^3 + a^2 R) r \ln(r+R+b\alpha) \\
& + (-(a+r)(r-R)(a-r)^2 + b^2 r^2 \alpha^2 - 2ab(r^2 + aR)\alpha) \ln(R-r) \\
& - (a^3 - 2a^2 b\alpha) R \ln(r+R) - ab^2 R\alpha^2 \ln(b(r+R)\alpha) + ab^2 R\alpha^2 \ln((R-r)(2r+b\alpha)) \\
& - a^3 R \ln(-r+R+b\alpha) + a^2 bR\alpha \ln(b\alpha(-r+R+b\alpha)) + (a^2 b^2 \alpha^2 - a^3 b\alpha) \\
& \ln((2r+b\alpha)(-r+R+b\alpha)) + a^3 R \ln(r+R+b\alpha) - (a^2 b^2 \alpha^2 - a^3 b\alpha) \ln(b\alpha(r+R+b\alpha)) \\
& - a^2 bR\alpha \ln((2r+b\alpha)(r+R+b\alpha)) \alpha + br(2(a-r)(r-R)(a-r-b\alpha)(a+r-b\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a(a+R)\alpha^2 \ln(16)) + \frac{\alpha}{b(a-r)(a+r)(-a+r+b\alpha)(a+r+b\alpha)} \\
& \left(2 \ln \left(\frac{r}{r+b\alpha} + 1 \right) r^3 - b\alpha \ln(16b\alpha)r^2 + 3b\alpha \ln(2r+b\alpha)r^2 \right. \\
& + 2b\alpha \ln \left(\frac{a+r}{ar+ab\alpha} \right) r^2 + 2b^2\alpha^2 \ln \left(\frac{a+r}{a} \right) r + b^2\alpha^2 \ln \left(\frac{r}{2b\alpha} + \frac{1}{4} \right) r \\
& + 2ab\alpha \ln \left(\frac{b\alpha}{2r+b\alpha} \right) r + 2a^2 \ln \left(\frac{r+b\alpha}{2r+b\alpha} \right) r + (a-r)(a+r) \ln(4)r \\
& + 2a^2b\alpha \ln \left(\frac{(a+r)(r+b\alpha)}{a} \right) + ab^2\alpha^2 \ln \left(\frac{b\alpha}{2r+b\alpha} \right) \\
& \left. - a^2b\alpha \ln(b\alpha(2r+b\alpha)) \right), \tag{4.6}
\end{aligned}$$

onde $a = r_s$ (raio de escala da densidade NFW), $b = \sqrt{\frac{3}{8}}\pi$ e R é o raio do halo de matéria escura.

Como a força gravitacional é conservativa, então podemos escrevê-la como o gradiente do potencial ($\vec{g} = -\nabla\phi$). Finalmente, a velocidade de rotação vai ser obtida igualando o resultado anterior à força centrípeta. Sendo assim:

$$v = \sqrt{r |\vec{g}|}. \tag{4.7}$$

Deve-se ressaltar que fazendo $\alpha \rightarrow 0$ ("desligando" o efeito da dimensão extra) retomamos o resultado obtido em (3.11) para a velocidade, i.e., reproduzimos o caso particular onde há contribuição apenas da matéria escura para o potencial no contexto Newtoniano.

4.1.2 Exemplo: NGC 3198

Agora estudaremos a curva de rotação de uma galáxia real (*NGC 3198*). Através da análise do melhor ajuste de curva, utilizando a função qui-quadrado, aos parâmetros livres da teoria podemos extrair uma informação importante acerca da dimensão extra. Encontramos o valor de α que minimiza a função qui-quadrado. E α por sua vez está relacionado com o raio de curvatura do espaço AdS_5 ($\alpha^2 = 2/(3\mu^2) = 2/3 \cdot \ell^2$).

O raio de *Vaucouleurs* da galáxia *NGC 3198* é $R_{25} = 11,43kpc$ [35], de modo que podemos admitir que $R = 300kpc$. Notando que $G = 2,16662 \times 10^{-36}kpc \left(\frac{km}{s}\right)^2 kg^{-1}$, $b = \sqrt{\frac{3}{8}}\pi$ e utilizando o valor da constante de *Hubble* $H_0 = 67,80\frac{km}{s}Mpc^{-1}$ [37], encontramos o ajuste de curva aos dados experimentais para a curva de rotação:

$$\ell = 8,685 \times 10^{-7}kpc, c = 26,86 \text{ e } r_{200} = 145,43kpc. \quad (4.8)$$

Abaixo temos uma comparação entre o melhor ajuste de curvas para os modelo *NFW* e *RSII* com matéria escura (*NFW*).

<i>Modelo</i>	χ_{\min}^2	<i>Melhor ajuste dos parâmetros</i>
<i>NFW</i>	47,7800304973	$c = 26,8570865001$ $r_{200} = 145,4333679571kpc$
<i>RSII + NFW</i>	47,7800304985	$\ell = 8,685 \times 10^{-7}kpc$ $c = 26,8570815715$ $r_{200} = 145,4333833207kpc$

Tabela 4.1: Quadro comparativo dos modelos *NFW* e *RSII + NFW*.

Adiante encontra-se o gráfico da curva de rotação utilizando os valores de minimização da função qui-quadrado.

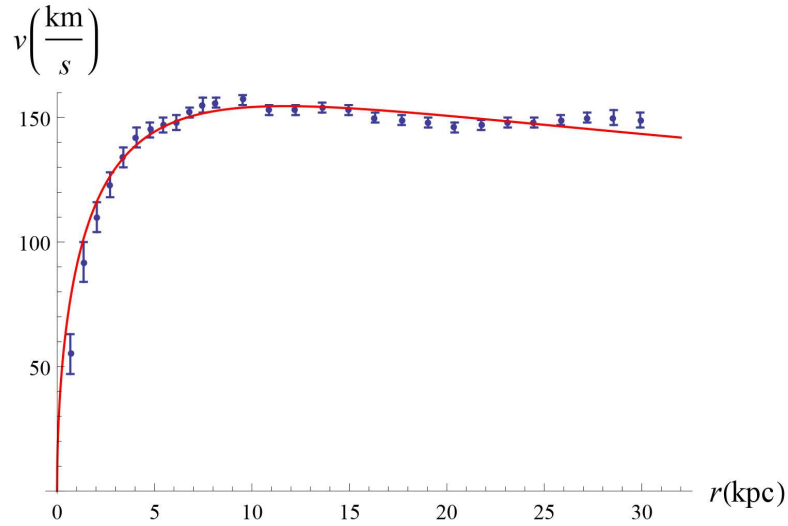


Figura 4.1: Curva de rotação para a galáxia *NGC 3198* no modelo de branas do tipo *RSII*.

Em nossa análise numérica utilizamos o *MATHEMATICA*. Para mais detalhes do código ver o *Apêndice B*.

Note que, novamente, analisamos apenas a contribuição da matéria escura para o ajuste da curva de rotação aos dados experimentais.

O modelo teórico que estamos estudando apresenta três parâmetros livres (ℓ, c, r_{200}). Todavia, estamos interessados em traçar o gráfico das curvas de confiança. Para remover-se um parâmetro da teoria deve-se fazer a marginalização da função de verossimilhança, i.e., deve-se integrar a distribuição

de probabilidade posterior com respeito ao parâmetro de desinteresse (*ver Apêndice A*). Há também um método aproximado conhecido como "*método de Laplace*", onde não há necessidade de fazer integrais numéricas. Entretanto, necessita-se efetuar o cálculo do determinante da matriz de informação [40].

Ao nosso problema, calculamos os contornos de confiança através da projeção da função *Qui-Quadrado*, ou seja, encontramos as regiões de confiança ($\ell \times c$) para o valor de r_{200} fixo ($r_{200} = r_{200}|_{\min}$), como podemos observar na figura (4.2).

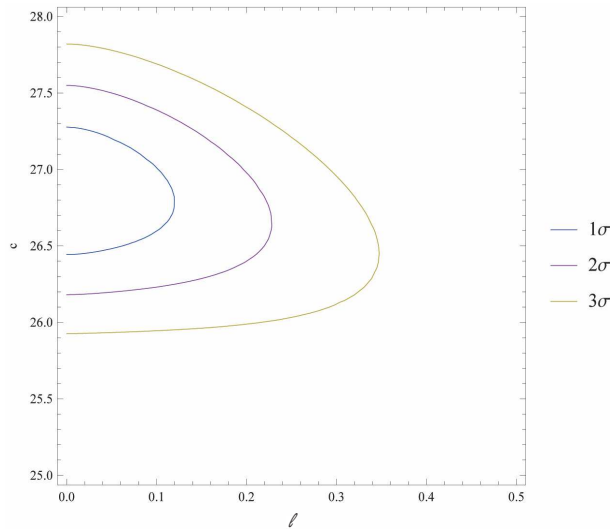


Figura 4.2: Contornos de confiança sobre o plano $\ell - c$, onde $[\ell] = kpc$ e c é o parâmetro adimensional de concentração.

Como resultado, a partir do gráfico (4.2), podemos inferir que com um nível de confiança de 3σ o raio da dimensão extra (ℓ) deve ser inferior a $0,36kpc$ e com um nível de confiança de 1σ o raio da dimensão extra deve

ser inferior a $0,12kpc$. Os testes de laboratório envolvendo a lei do inverso do quadrado têm sugerido que o raio da dimensão extra é inferior a $10^{-4}m$ [11]. Nosso resultado impõe um vínculo fraco, mas é um teste importante porque envolve outros fenômenos físicos, e no mínimo serve para confirmar de maneira independente os resultados de laboratório.

4.2 DGP

Modelos de dimensões extras não são proposições recentes. Entretanto, após a teorização dos objetos denominados branas essas teorias ganharam destaque. Dentre os modelos de branas, vimos que o modelo *DGP* mostra-se como uma alternativa aos modelos de dimensões extras compactas.

Neste contexto, utilizando o potencial gravitacional corrigido devido a existência de um dimensão extra no modelo *DGP*, traçaremos o ajuste de curva da curva de rotação da galáxia *NGC 3198*.

4.2.1 Curva de rotação

Para calcular a curva de rotação necessitamos calcular o potencial na região interna de uma esfera de raio R . Inspirados pelo *Ansatz* proposto para o modelo *Randall-Sundrum*, onde condessamos os dois resultados ($r \gg \alpha$ e $r \ll \alpha$) em uma única expressão, podemos proceder de modo análogo e encontrar para o modelo *DGP*:

$$V(r) = \frac{G_{(4)}M}{r \left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{r_0} + 1 \right)}, \quad (4.9)$$

onde $G_{(4)}$ é a constante gravitacional quadrimensional. Os comportamentos encontrados em (2.51) e (2.52) podem ser facilmente verificados pela expressão 4.9.

O potencial na região interna será:

$$\phi = -G_{(4)} \int_{v'} \frac{\rho_{NFW}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{r_0} + 1 \right)} dv'. \quad (4.10)$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{4a^3 G \rho r_0}{r(a+R)(\pi(a+r) - 2r_0)(-\pi a + \pi r + 2r_0)(\pi(a+r) + 2r_0)} \left(2\pi (\pi^2 a^2 r (\ln(a) \right. \\ & - \ln((a+R)(\pi r + 2r_0))) + 2\pi a^2 r_0 \ln \left(\frac{ar_0}{(a+r)(\pi r + 2r_0)} \right) - \pi^2 a r^2 \ln((a+R)(\pi r + 2r_0)) \\ & + \pi^2 r^2 R (\ln(a) - \ln((a+R)(\pi r + 2r_0))) - 4Rr_0^2 \ln \left(\frac{ar_0}{(a+r)(\pi r + 2r_0)} \right) \\ & + 2\pi a R r_0 \ln \left(\frac{ar_0}{(a+r)(\pi r + 2r_0)} \right) - \pi^2 a r R \ln((a+R)(\pi r + 2r_0)) \\ & - 2\pi a r r_0 \ln \left(\frac{r_0(a+r)(a+R)}{\pi(r+R) + 2r_0} \right) + \pi^2 a r (r+R) \ln(a(\pi(r+R) + 2r_0)) \\ & - 2\pi r R r_0 \ln(ar_0(a+R)) + 2\pi r R r_0 \ln(a(a+r)(\pi(R-r) + 2r_0)) \\ & - 4a r_0^2 \ln \left(\frac{ar_0}{(a+r)(\pi r + 2r_0)} \right) + 4\pi a r r_0 \ln(a+r) \Big) \\ & - (\pi^3 (a^2 R + r^3) + 2\pi^2 r_0 (a^2 + r^2) - 4\pi r_0^2 (r+R) - 8r_0^3) \ln \left(1 - \frac{2\pi r}{\pi(r+R) + 2r_0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\pi^3 r (a^2 + rR) \ln((\pi(R - r) + 2r_0)(\pi(r + R) + 2r_0)) \\
& +\pi r_0(a + R)(\pi \ln(16)(a - r) - r_0 \ln(256)) \Big) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

onde $a = r_s$ (raio de escala da densidade *NFW*), r_0 é a escala de corte que delimita os regimes de comportamento da gravidade no modelo *DGP* e R é o raio do halo de matéria escura.

Procedemos de maneira análoga ao caso *RS*, i.e., escrevemos a força como o gradiente do potencial ($\vec{g} = -\nabla\phi$). A velocidade de rotação vai ser obtida igualando este resultado anterior à força centrípeta ($v = \sqrt{r|\vec{g}|}$).

4.2.2 Exemplo: NGC3198

Fazendo uma análise do melhor ajuste de curva utilizando o *MATH-EMATICA* (ver: *Apêndice B*), análogo ao caso *RS*, podemos encontrar o valor dos parâmetros livres da teoria (r_0, c, r_{200}) que minimizam a função qui-quadrado. Através deste ajuste encontramos o valor de r_0 que é uma escala de corte para comportamento da gravidade.

Admitindo que $R = 300kpc$, notando que $G = 2,16662 \times 10^{-36} kpc \left(\frac{km}{s}\right)^2 kg^{-1}$ e utilizando o valor da constante de *Hubble* $H_0 = 67,80 \frac{km}{s} Mpc^{-1}$ [37], encontramos o valor dos parâmetros livres que melhor ajusta a curva de rotação teórica aos dados experimentais :

$$r_0 = 1,40 \times 10^5 kpc, c = 26,86 \text{ e } r_{200} = 145,43 kpc \tag{4.12}$$

Adiante segue uma comparação entre o melhor ajuste de curvas para os modelo *NFW* e *DGP* com matéria escura (*NFW*).

<i>Modelo</i>	χ_{\min}^2	<i>Melhor ajuste dos parâmetros</i>
<i>NFW</i>	47,7800304973	$c = 26,8570865001$ $r_{200} = 145,4333679571kpc$
<i>DGP + NFW</i>	47,7800475138	$r_0 = 1,40036 \times 10^5 kpc$ $c = 26,8570853838$ $r_{200} = 145,4333728472kpc$

Tabela 4.2: Quadro comparativo dos modelos *NFW* e *DGP + NFW*.

Por fim podemos mostrar o gráfico da curva de rotação, utilizando os valores de minimização da função qui-quadrado, ajustada aos dados experimentais (*ver figura (4.3)*).

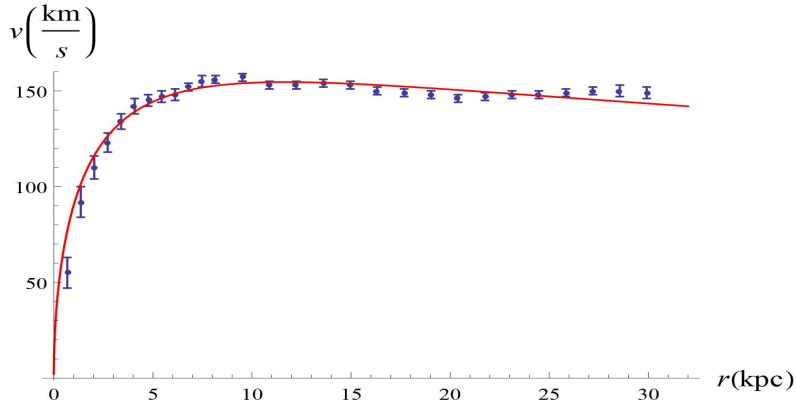


Figura 4.3: Curva de rotação para a galáxia *NGC 3198* no modelo *DGP*.

Finalmente pode-se traçar os contornos de confiança. Entretanto, neste modelo temos três parâmetros livres (r_0, c, r_{200}). Neste caso, para encon-

trarmos as curvas de confiança fixamos o valor do parâmetro de desinteresse (r_{200}) no valor que minimiza a função qui-quadrado. Sendo assim, reduzimos o número de parâmetros livres da teoria à apenas dois (r_0 e c). Os contornos de confiança para 1σ , 2σ e 3σ podem ser vistos na *figura (4.4)* [Apêndice A].

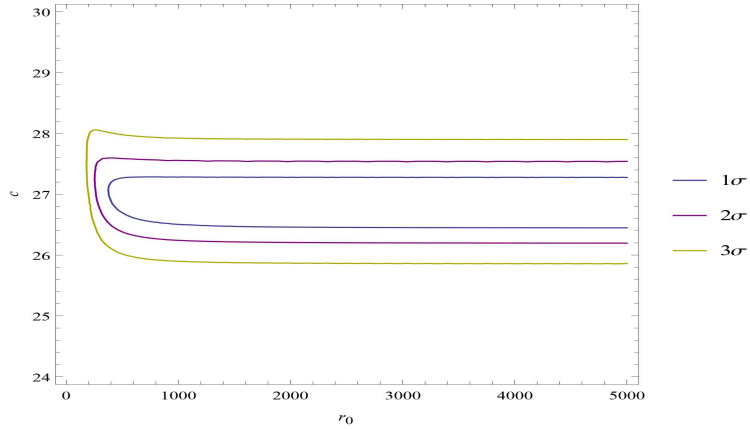


Figura 4.4: Contornos de confiança sobre o plano $r_0 - c$, onde $[r_0] = kpc$ e c é o parâmetro adimensional de concentração.

Apesar da função qui-quadrado ser minimizada para $r_0 = 1,40 \times 10^5 kpc$, pode-se afirmar que com 1σ o raio de corte r_0 deve ser maior que $400kpc$.

O valor de minimização da função qui-quadrado para a variável r_0 está em concordância com as proposições teóricas que exigem à teoria um valor para o raio de corte $r_0 \sim 5Gpc$ [39].

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho estudamos os modelos de dimensões extras propostos por *Kaluza-Klein*, *Arkani-Dimopoulos-Dvali (ADD)*, *Randall-Sundrum (RSI e RSII)* e *Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP)*. Em todos os modelos os campos do modelo padrão estão confinados no espaço-tempo quadridimensional, e apenas a gravidade pode escapar para as dimensões extras. Verificamos os mecanismos de ocultação pelos quais as dimensões extras tornam-se "invisíveis", e constatamos que tais mecanismos diferem entre os modelos.

No modelo de *Kaluza-Klein* a dimensão extra é compacta, tem a topologia de um círculo e um raio de compactação da ordem do comprimento de Planck. Nos modelos *ADD* e *RSI* há necessidade da teorização de uma hipersuperfície denominada brana. O tamanho dessas dimensões extras agora torna-se submilimétrico sem haver contradição com os resultados empíricos, porque só a gravidade tem acesso as dimensões extras. Os modelos *RS* são

descritos num espaço-tempo contendo duas branas, sendo que modelo *RSII* uma das branas é removida para o infinito, então a dimensão extra passa a ter um comprimento infinito, mas com constante cosmológica negativa.

Estudamos ainda o modelo *DGP* que também encontra-se fundamentado sobre teorização da hipersuperfície 3-brana. Este modelo apresenta-se como uma alternativa aos modelos de dimensões extras que exibem modificações ao potencial gravitacional na escala submilimétrica. Pode-se dizer que esta é uma versão cosmológica dos modelos de dimensões extras, pois a escala de corte desta teoria está na ordem de Gpc .

Discutimos as curvas de rotação de galáxias espirais, que indicam uma diferença na quantidade de matéria prevista teoricamente e a medida por meio das observações. Comumente admite-se a existência de matéria escura para poder explicar esta discrepância. A matéria escura seria descrita por um perfil característico, no nosso caso admitimos ser o *NFW*, que permearia toda a galáxia na forma de um halo de matéria esférico.

Aplicando os modelos de dimensões extras do tipo *RSII* e *DGP* ao problema da curva de rotação com a matéria escura caracterizada pelo perfil *NFW* (ρ_{NFW}) pudemos estimar os parâmetros livres das teorias. Para tanto, encontramos o melhor ajuste dos parâmetros através da minimização da função qui-quadrado, o que equivale maximizar a função de verossimilhança.

Para o modelo *RSII* obtivemos que os dados experimentais são melhores fitados pelo modelo teórico para $\ell = 8,685 \times 10^{-7} kpc$, $c = 26,86$ e $r_{200} = 145,43 kpc$. E com um nível de confiança de 1σ , podemos afirmar que $\ell <$

$0,12kpc$.

Já para o modelo *DGP* nós encontramos que o modelo teórico melhor ajusta-se aos dados empíricos para $r_0 = 1,40 \times 10^5 kpc$, $c = 26,86$ e $r_{200} = 145,43kpc$. Constatamos ainda que, com um nível de confiança de 1σ o raio de corte $r_0 > 400kpc$.

Os vínculos encontrados são mais fracos do que os encontrados na literatura. No entanto, sua relevância está no fato de que são obtidos em sistemas Físicos diferentes, e portanto, devem ser considerados como testes independentes.

Apêndice A

Teoria Bayesiana

Na inferência Bayesiana, uma distribuição de probabilidade é uma codificação da nossa incerteza, sobre alguns parâmetros do modelo ou sobre o conjunto de teorias concorrentes, com base em nosso estado atual de informações. A forma usual do teorema de *Bayes* pode ser representada como segue [40]:

$$p(H_i | D, I) = \frac{p(H_i | I) p(D | H_i, I)}{p(D | I)}, \quad (5.1)$$

onde,

$H_i \equiv$ proposição que afirma a veracidade de uma hipótese de interesse

$I \equiv$ proposição que indica nossa informação à priori

$D \equiv$ proposição representando os dados

$p(D | H_i, I) \equiv$ probabilidade de obtenção dos dados D , se H_i e I são verdadeiras

(também chamada de função de verossimilhança $\mathcal{L}(H_i)$)

$p(H_i | I) \equiv$ probabilidade à priori da hipótese

$p(H_i | D, I) \equiv$ probabilidade posterior de H_i

$$p(D | I) \equiv \sum_i p(H_i | I) p(D | H_i, I)$$

$$\left(\text{fator de normalização que garante } \sum_i p(H_i | D, I) = 1 \right)$$

Note que a probabilidade para as hipóteses na ausência de D são chamadas probabilidades à priori ($p(H_i | I)$). Se incluirmos a informação D estaremos tratando da probabilidade posterior ($p(H_i | D, I)$). A quantidade $p(D | H_i, I)$ é conhecida como a probabilidade de amostragem para D , ou a verossimilhança de H_i . Por último, $p(D | I)$ é chamada de probabilidade de previsão à priori para D , ou a verossimilhança global para toda a classe de hipóteses.

Marginalização

Admita que tenhamos algum conjunto de dados D e que nossa informação à priori I indica conter um sinal periódico. Nosso modelo de sinal tem dois parâmetros contínuos (ω e A) [40]. Estamos interessados nas implicações dos dados para o parâmetro ω independentemente do parâmetro A .

Sendo assim, podemos agrupar a probabilidade de ω e de A , com os dados fornecidos D e a informação à priori I , como $p(\omega, A | D, I)$. Nesse contexto, ω e A é uma proposição composta e afirma que as duas proposições são verdadeiras. Entretanto, nosso interesse se resume ao parâmetro ω . Nós vamos eliminar um parâmetro desinteressante A por meio da marginalização.

Por simplicidade, admita que o parâmetro A é discreto. Neste caso A assume somente valores A_1 ou A_2 ou A_3 , etc. Como assumimos que o modelo

é verdadeiro, então a proposição $A_1 + A_2 + A_3 + \dots$, só é verdadeira para algum valor de A_i se,

$$p(A_1 + A_2 + A_3 + \dots | I) = 1. \quad (5.2)$$

A proposição composta que afirma que tanto ω quanto $[A_1 + A_2 + A_3 + \dots]$ são verdadeiros será:

$$\begin{aligned} p(\omega, [A_1 + A_2 + A_3 + \dots] | D, I) &= p([A_1 + A_2 + A_3 + \dots] | D, I) \\ &\quad \times p(\omega | [A_1 + A_2 + A_3 + \dots], D, I) \\ &= 1 \times p(\omega | D, I). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Aplicamos a regra do produto à expressão 5.3. Os termos no lado direito $[A_1 + A_2 + A_3 + \dots], D, I$ na eq. 5.3 indicam que devem ser assumidos como verdadeiros. Todavia, devido a nossa informação à priori (I) temos que $[A_1 + A_2 + A_3 + \dots]$ é verdadeiro, ou seja, a verdade acerca de A já está contida em I . Por isso simplificamos a expressão anterior. Rearranjando 5.3 obtemos:

$$p(\omega | D, I) = p(\omega, [A_1 + A_2 + A_3 + \dots] | D, I). \quad (5.4)$$

Pode-se mostrar que, fazendo uma expansão no lado direito da equação 5.4 utilizando a álgebra *Booliana* [40]:

$$p(\omega | D, I) = \sum_i p(\omega, A_i | D, I). \quad (5.5)$$

Extendendo ao caso em que A é um parâmetro contínuo temos:

$$p(\omega | D, I) = \int p(\omega, A | D, I) dA. \quad (5.6)$$

A quantidade $p(\omega | D, I)$ é a distribuição marginal posterior para ω . Para um parâmetro contínuo essa distribuição passa a ser uma função densidade de probabilidade. Essa função resume o que D e I (estado de conhecimento) dizem sobre os parâmetros de interesse.

A probabilidade de que ω esteja numa faixa entre ω_1 e ω_2 é $\int_{\omega_1}^{\omega_2} p(\omega | D, I) d\omega$.

Aplicando o teorema de Bayes à expressão 5.6:

$$p(\omega | D, I) = p(\omega | I) \int \frac{p(A | I) p(D | \omega, A, I)}{p(D | I)} dA. \quad (5.7)$$

Desta forma obtivemos a distribuição marginal posterior $p(\omega | D, I)$ em termos da média ponderada da função de verossimilhança $p(D | \omega, A, I)$ e da função densidade de probabilidade à priori $p(A | I)$.

Marginalização via aproximação de Laplace

Pretendemos desenvolver uma formulação matemática conveniente para descrever o produto da probabilidade à priori e a verossimilhança em termos de uma gaussiana multivariada aproximada.

A função de verossimilhança é:

$$\mathcal{L}(\theta) = p(D|\theta, M, I) = C \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (d_i - f_i) [\mathbf{E}^{-1}]_{ij} (d_i - f_i) \right], \quad (5.8)$$

onde M é número de parâmetros do modelo e \mathbf{E} é a matriz de covariância dos erros de medição. Se os erros são independentes, então \mathbf{E} é diagonal com entradas iguais a σ_i^2 . Sendo assim,

$$\mathcal{L}(\theta) = C \exp \left[-\frac{\chi^2(\theta)}{2} \right], \quad (5.9)$$

onde $\chi^2(\theta) = \sum_i \frac{(Y_i - F(X_i))^2}{\sigma_i^2}$ é a função qui-quadrado, Y_i , X_i , σ_i são os dados experimentais e $F(x)$ é o modelo teórico.

Agora considere o caso em que o nosso modelo possua dois parâmetros (θ e ϕ), de modo que a função de verossimilhança será:

$$\mathcal{L}(\theta, \phi) = p(D|\theta, \phi, I) = C \exp \left[-\frac{\chi^2(\theta, \phi)}{2} \right]. \quad (5.10)$$

A distribuição marginal posterior $p(\theta, \phi|D, I)$ tem um máximo para $\theta = \theta_0$ e $\phi = \phi_0$. Desejamos marginalizar o parâmetro ϕ via aproximação de *Laplace*, sendo assim:

$$p(\theta|D, I) = p(\omega|I) \int \frac{p(\phi|I) p(D|\theta, \phi, I)}{p(D|I)} d\phi. \quad (5.11)$$

Admitindo uma probabilidade a priori uniforme ($p(\phi|I) = cte$) e sub-

stituindo 5.10 em 5.11, temos:

$$p(\theta | D, I) = C' \int \exp \left[-\frac{\chi^2(\theta, \phi)}{2} \right] d\phi. \quad (5.12)$$

Aplicando finalmente a aproximação de *Laplace*:

$$p(\theta | D, I) = C' \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\chi^2(\theta, \phi_0) + (\phi - \phi_0) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \chi^2(\theta, \phi) \right) \Big|_{\phi_0} + \frac{(\phi - \phi_0)^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \chi^2(\theta, \phi) \right) \Big|_{\phi_0} + \dots \right] \right\} d\phi. \quad (5.13)$$

Por fim,

$$p(\theta | D, I) = F \frac{\exp \left[-\frac{\chi^2(\theta, \phi_0)}{2} \right]}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \chi^2(\theta, \phi) \right) \Big|_{\phi_0}}}, \quad (5.14)$$

onde F agrupa todos os termos constantes e $\exp \left[-\frac{\chi^2(\theta, \phi_0)}{2} \right]$ é conhecida como a função de verossimilhança projetada de θ .

Note que a maximização da função $p(\theta | D, I)$ ocorrerá quando χ^2 for minimizada.

Curvas de confiança

Uma curva de confiança é um local onde os pontos de probabilidade são constantes e rodeiam uma região contendo uma probabilidade especificada

na distribuição de probabilidade conjunta [40].

Considere a densidade posterior para A_α como sendo:

$$p(\{A_\alpha\} | D, I) = C e^{-\frac{\chi^2}{2}}. \quad (5.15)$$

Por definição, o limite de uma região credível comum é definida como segue:

$$\chi^2(\{A_\alpha\}) = \chi_{\min}^2 + \Delta\chi_{crit}^2, \quad (5.16)$$

onde $\Delta\chi_{crit}^2$ é uma constante escolhida de tal modo que a região contém alguma probabilidade especificada P . Nossa tarefa é encontrar $\Delta\chi_{crit}^2$:

$$P = \int_{\Delta\chi^2 < \Delta\chi_{crit}^2} d^M A p(\{A_\alpha\} | D, I), \quad (5.17)$$

onde M é o número de graus de liberdade.

Como resultado temos:

$$P = 1 - \frac{\gamma(M/2, \Delta\chi_{crit}^2/2)}{\Gamma(M/2)} \quad (5.18)$$

Esta é a probabilidade dentro da região credível comum para todas as amplitudes correspondentes à $\Delta\chi^2 < \Delta\chi_{crit}^2$. Note ainda que $\gamma(M/2, \Delta\chi_{crit}^2/2)$ é função de gama incompleta.

Note a associatividade entre o número de parâmetros e os graus de liberdade que se explicita na tabela 5.1. Para o caso em que temos apenas um

P	Graus de liberdade M		
	1	2	3
68,3%	1,00	2,30	3,53
90%	2,71	4,61	6,25
95,4%	4,00	6,17	8,02
99%	6,63	9,21	11,3
99,73%	9,00	11,8	14,2

Tabela 5.1: Valores de $\Delta\chi_{crit}^2$ como uma função do nível de confiança P e do número de parâmetros de interesse M .

parâmetro livre, com uma confiança $P = 68,3\%$ afirmamos que $\Delta\chi_{crit}^2 = 1$.

Apêndice B

Código MATHEMATICA

Referências Bibliográficas

- [1] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) K1, 966 (1921).
- [2] O. Klein, Z. Phys. 37, 895 (1926).
- [3] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998) [hep-ph/9803315].
- [4] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Rev. D **59**, 086004 (1999) [hep-ph/9807344].
- [5] ABDALLA, Elcio. Teoria quântica da gravitação: cordas e teoria M. **Rev. Bras. Ensino Fís.**, São Paulo , v. 27, n. 1, Mar. 2005.
- [6] Lemos, A. S. and Dahia F. Lei gravitacional do inverso do quadrado e dimensões extras de grande escala. PIBIC/CNPq/UFCG-2011.
- [7] SILVA, A. A. Um Estudo Sobre Dimensões Extras. 2009. 101 p. Dissertação (Mestrado em Física) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, 2009.

- [8] R. K. Unz, Phys. Rev. D **32**, 2539 (1985).
- [9] C. D. Hoyle, U. Schmidt, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, D. J. Kapner and H. E. Swanson, Phys. Rev. Lett. **86**, 1418 (2001) [hep-ph/0011014].
- [10] C. D. Hoyle, D. J. Kapner, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, U. Schmidt and H. E. Swanson, Phys. Rev. D **70**, 042004 (2004) [hep-ph/0405262].
- [11] D. J. Kapner, T. S. Cook, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, C. D. Hoyle and H. E. Swanson, Phys. Rev. Lett. **98**, 021101 (2007) [hep-ph/0611184].
- [12] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **125**, 136 (1983).
- [13] Lemos, A. S. and Dahia F. Um estudo sobre o mecanismo de ocultação de dimensões extras. PIBIC/CNPq/UFCG-2009.
- [14] G. Gabadadze, hep-ph/0308112.
- [15] Domínguez-Tenreiro, Rosa; Quirós, Mariano. An Introduction to Cosmology and Particle Physics. World Scientific in Singapore, New Jersey, 1988.
- [16] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [hep-ph/9905221].

- [17] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [hep-th/9906064].
- [18] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000) [hep-th/0005016].
- [19] RALF, N. Equações de campos induzidas em branas pela imersão. 2011. 94 p. Dissertação (Mestrado em Física) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, 2011.
- [20] A. Kehagias and K. Sfetsos, Phys. Lett. B **472**, 39 (2000) [hep-ph/9905417].
- [21] Binney, James; Tremaine, Scott. Galactic Dynamics. 2 ed. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- [22] Dark matter. J. Einasto, [arXiv:0901.0632 [astro-ph.CO]].
- [23] Jeans, J. H. 1922, The motions of stars in a Kapteyn universe, MNRAS, 82, 122.
- [24] Kapteyn, J. C. 1922, First Attempt at a Theory of the Arrangement and Motion of the Sidereal System, ApJ, 55, 302.
- [25] Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. Zwicky, F., Helvetica Physica Acta, Vol. 6, p. 110-127 (00/1933).
- [26] Ostriker, J. P., Peebles, P. J. E., & Yahil, A. 1974, The size and mass of galaxies, and the mass of the universe, ApJ, 193, L1.

- [27] Rosati, P., Borgani, S., & Norman, C. 2002, The Evolution of X-ray Clusters of Galaxies, *ARA&A*, 40, 539.
- [28] Particle dark matter. Gianfranco Bertone and Joseph Silk.
- [29] M. Kamionkowski, In "Trieste 1997, High energy physics and cosmology"394-411 [hep-ph/9710467].
- [30] T. Randriamampandry and C. Carignan, arXiv:1401.5619 [astro-ph.GA].
- [31] J. F. Navarro, C. S. Frenk and S. D. M. White, *Astrophys. J.* **462**, 563 (1996) [astro-ph/9508025].
- [32] F. Prada, A. A. Klypin, E. Simonneau, J. Betancort-Rijo, S. Patiri, S. Gottlober and M. A. Sanchez-Conde, "How far do they go? The Outer structure of dark matter halos," *Astrophys. J.* **645**, 1001 (2006) [astro-ph/0506432].
- [33] Soares, D. S. D. L. Investigations of binary galaxies. 1989. 195 p. PhD Thesis. Groningen: Rijksuniversiteit, 1989.
- [34] M. E. Putman, J. L. Rosenberg, J. T. Stocke and R. McEntaffer, *Astron. J.* **131**, 771 (2006) [astro-ph/0510330].
- [35] Begeman, Kornelis. HI rotation curves of spiral galaxies. 1987. 134 p. PhD Thesis - Groningen: University Library Groningen, 1987.

- [36] Press, William H.; Teukolsky, Saul A.; Vetterling, William T.; Flannery, Brian P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). New York: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-88068-8.
- [37] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1303.5062 [astro-ph.CO].
- [38] P. Callin and F. Ravndal, *Phys. Rev. D* **70**, 104009 (2004) [hep-ph/0403302].
- [39] A. Lue and G. Starkman, *Phys. Rev. D* **67**, 064002 (2003) [astro-ph/0212083].
- [40] Gregory, Phil, *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica Support*. Cambridge University Press (Cambridge, UK), 2010.