



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**COSMOLOGIA COM ACOPLAMENTO DO
CAMPO DE ÁXIONS**

CARLOS HENRIQUE ARAÚJO BONFIM BORGES

CAMPINA GRANDE - PB

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**COSMOLOGIA COM ACOPLAMENTO DO
CAMPO DE ÁXIONS**

CARLOS HENRIQUE ARAÚJO BONFIM BORGES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito

Coorientador: Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa Filho

CAMPINA GRANDE - PB

2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

B732c Borges, Carlos Henrique Araújo Bonfim.
Cosmologia com acoplamento do campo de áxions / Carlos
Henrique Araújo Bonfim Borges. – Campina Grande, 2017.
87 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito; Coorientação:
Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa Filho".

Referências.

1. Cosmologia. 2. Inflação Cósmica. 3. Campos Acoplados. 4.
Áxions. I. Brito, Francisco de Assis. II. Costa Filho, Francisco
Geraldo da. III. Título.

CDU 113(043)

*À toda minha família, amigos e, em especial,
à minha esposa Evania Borges.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por esta conquista, ao Prof. Francisco de Assis Brito pela atenção, paciência e por compartilhar seus conhecimentos durante as orientações, ao Prof. Francisco Geraldo da Costa Filho pelas inúmeras horas de dedicação e colaboração na pesquisa.

Aos professores da Unidade Acadêmica de Física pelas aulas ministradas na Pós-Graduação.

Aos meus eternos amigos da PagFácil em Lagoa Seca que sempre flexibilizaram meus horários de trabalho, desde o período da graduação, para que eu pudesse ir à universidade.

Aos professores e alunos do Curso de Licenciatura Plena em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba pelo acolhimento na minha chegada ao Campus Campina Grande.

Aos meus antigos professores da graduação na Universidade Estadual da Paraíba por ter me proporcionado um ensino sem o qual não teria nem ingressado na pós-graduação.

Aos meus pais Clementino Gomes Bonfim e Maria do Socorro Araújo Bonfim e toda minha família e, em especial, a minha esposa Evania Borges de Souza Araújo pelo companheirismo, atenção e amor depositados em nosso casamento.

Resumo

Por apresentar fundamentos mais satisfatórios com base nos dados observacionais, o Modelo Cosmológico Padrão mostrou-se consistente com a Teoria da Relatividade Geral. Contudo, em virtude de algumas dificuldades relacionadas ao universo primordial e na tentativa de encontrar uma teoria cujo estágio final coincidissem com o início do Modelo Padrão, é publicada a Teoria da Inflação Cósmica, na qual o universo passa por um período onde se expande aceleradamente devido a atuação de um campo escalar. Neste trabalho abordaremos alguns conceitos sobre o Modelo Padrão da Cosmologia introduzindo alguns modelos de inflação com diferentes potenciais e analisaremos o fator de escala e as equações de Friedmann baseadas em campos de áxions acoplados ao eletromagnético.

Palavras-chave: Cosmologia, Inflação, Campos Acoplados, Áxions.

Abstract

Because of the more satisfactory foundations based on observational data, the Standard Cosmological Model was consistent with the General Relativity Theory. However, due to some difficulties related to the primordial universe and in the attempt to find a theory whose final stage coincided with the at the beginning of the Standard Model, the Cosmic Inflation Theory is published, which the universe goes through a period where it expands rapidly due to the performance of a scalar field. In this work we will discuss some concepts about the Standard Model of Cosmology introducing some models of inflation with different potentials and we will analyze the scale factor and the Friedmann equations based on fields of coupled electromagnetic fields.

Keywords: Cosmology, Inflation, Coupled Fields, Axions.

Lista de Figuras

- 1.1 Evolução do fator de escala para modelos de Friedmann. Fonte: <https://portugues.free-ebooks.net/ebook/Analogos-classicos-para-cosmologias-relativisticas-aceleradas-uma-abordagem-lagrangiana>. 15
- 1.2 Comparação das distâncias comóvel, diâmetro angular e luminosidade para diferentes modelos cosmológicos. Λ CDM e SCDM são planos, OCDM é aberto, sem energia escura. Para um dado redshift, as distâncias em um Universo Λ CDM são sempre maiores do que em um universo plano sem energia escura. Note que o modelo OCDM tem um comportamento mais próximo de um Λ CDM. A linha ponto-traço fina mostra a relação linear entre redshift e distância, válida apenas para baixo z . Fonte: <http://www.astro.iag.usp.br/gastao/>. 30
- 1.3 Velocidades orbitais previstas e observadas de algumas estrelas em relação ao centro da galáxia. 32
- 1.4 Demonstração do efeito das lentes gravitacionais produzidas por um aglomerado de galáxias. Fonte: <http://www.astro.iag.usp.br/gastao/>. 33

1.5	Cruzamento dos resultados das medições de parâmetros cosmológicos do satélite WMAP com outros experimentos astronômicos. A reta na figura corresponde aos valores nos quais $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. As análises correspondem aos dados do WMAP (contorno preto) e WMAP + outros conjuntos de dados (vermelho). Nestes contornos não são assumidos a priori $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Os dados apenas do WMAP favorecem cosmologias com $\Omega_m = 0,415$ e $\Omega_\Lambda = 0,630$, ou seja, universo não plano, entretanto, quando cruzados com outros conjuntos de dados há um favorecimento para um universo plano. Fonte: https://portugues.free-ebooks.net/ebook/Analogos-classicos-para-cosmologias-relativisticas-aceleradas-uma-abordagem-lagrangiana	37
2.1	Potencial do campo escalar. A curva "A" apresenta apenas um ponto de equilíbrio, isso ocorre a altas temperaturas. As curvas "B", "C" e "D" apresentam um segundo ponto de equilíbrio com a queda da temperatura. A curva "E" apresenta um segundo ponto de equilíbrio, porém, em um ponto abaixo da temperatura crítica. Fonte: OLIVEIRA, M. C. B., 2010.	46
2.2	Potencial do campo escalar. Em $\phi = 0$, o campo se encontra no estado de falso vácuo. Abaixo da temperatura crítica o campo se encontra no estado de vácuo verdadeiro. Fonte: OLIVEIRA, M. C. B., 2010.	47
2.3	Potencial do ínflaton no regime de rolagem lenta(slow-roll). Nesse caso, o potencial domina o termo cinético. Após o campo ínflaton atingir seu ponto mínimo, há um reaquecimento dando início a era da radiação. Fonte: BAUMANN, D. TASI lectures on inflation. ArXiv 0907.5424, jul. 2009. 30, 31, 32, 37, 41.	50
2.4	Variação do campo escalar ínflaton em relação ao tempo.	51
3.1	Potencial do modelo de inflação caótica. O campo ϕ se comporta como um oscilador harmônico oscilando no ponto de mínimo. Fonte: FIGUEIRO, M. F., 2005.	54

3.2	Potencial do modelo de inflação natural. Para este modelo, a inflação inicia quando o campo ϕ for aproximadamente nulo. Fonte: FIGUEIRO, M. F., 2005. .	58
3.3	Potencial do modelo de inflação híbrida. Nesse modelo, o campo ψ permanece fixo até que ϕ atinja ϕ_c . Fonte: FIGUEIRO, M. F., 2005.	62
5.1	Evolução do quadrado do parâmetro de Hubble em relação ao fator de escala para diferentes componentes numa representação log-log. Fonte(adaptada): https://portugues.free-ebooks.net/ebook/Analogos-classicos-para-cosmologias-relativisticas-aceleradas-uma-abordagem-lagrangiana	81

Conteúdo

Introdução	1
1 A Teoria da Relatividade Geral e o Modelo Cosmológico Padrão	5
1.1 Equações de Campo de Einstein	6
1.2 A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	8
1.3 A Lei de Hubble e a Expansão do Universo	10
1.4 Equação de Conservação de Energia	12
1.5 Universo Formado por Várias Componentes	18
1.5.1 Modelo Matéria + Constante Cosmológica(Λ)	18
1.5.2 Modelo Matéria + Radiação	20
1.5.3 Modelo Matéria + Curvatura	21
1.6 Modelo de Einstein - de Sitter	22
1.7 Distâncias Cósmicas	24
1.7.1 Distância de Luminosidade	24
1.7.2 Distância de Diâmetro Angular	27
1.7.3 Distância do Horizonte de Partículas	31
1.8 Matéria Escura e Energia Escura	31
1.9 Radiação Cósmica de Fundo (CMB)	34
1.10 Problemas com o Modelo Cosmológico Padrão	37
1.10.1 Problema da Singularidade	38
1.10.2 Problema da Planura	38

1.10.3	Problema do Horizonte	39
2	Inflação Cósmica	41
2.1	Resolvendo o Problema da Planura	42
2.2	Resolvendo o Problema do Horizonte	43
2.3	O Ínflaton	44
2.4	Rolagem Lenta (Slow-Roll)	48
3	Modelos Inflacionários	53
3.1	Modelos com Campo Simples	53
3.1.1	Inflação Caótica	54
3.1.2	Inflação com Potencial Quártico	56
3.1.3	Inflação Natural	57
3.1.4	Inflação com Potencial Quadrático Invertido	58
3.1.5	Inflação com Potenciais de Terceira Ordem ou Superior	59
3.1.6	Inflação com Outro Tipo de Potencial	60
3.2	Inflação Híbrida	61
4	Acoplamento entre os Campos de Áxions e Eletromagnético como Candidato a Energia Escura	63
4.1	Equação de Movimento para as Lagrangeanas Acopladas	65
4.2	Tensor Energia Momento dos Campos Eletromagnético e de Áxions	67
4.3	Equação de movimento para ϕ e Regime de Rolagem Lenta	73
4.4	Determinação dos campos \vec{E} e \vec{B}	75
4.5	Equações de Friedmann e de Estado para o Caso das Lagrangeanas Acopladas	77
5	Cenários Cosmológicos	80
6	Considerações Finais e Perspectivas	82
	Bibliografia	84

Introdução

O estudo da evolução do universo sempre despertou grande interesse na comunidade científica, assim, os cosmólogos sempre buscaram teorias e modelos que melhor expliquem sua dinâmica de acordo com os dados observacionais. Com o surgimento da Teoria da Relatividade Geral (TRG) por Albert Einstein em 1916, adotou-se uma nova visão sobre o conceito de campo gravitacional diferentemente da mecânica newtoniana, ou seja, apresentando uma descrição geométrica representada pela curvatura do espaço-tempo. Através da TRG, Einstein adotou o Princípio Cosmológico propondo que o universo apresenta-se de forma homogênea e isotrópica em grandes escalas [1].

Em 1917, Einstein propôs o primeiro modelo cosmológico relativista o qual era baseado na TRG e tinha como característica um universo estático e fechado, ou seja, finito, afinal, naquela época ainda não se tinha a ideia de expansão do universo [2]. Portanto, fez-se necessário contrabalancear a atração gravitacional e impedir que o universo entrasse em colapso, daí introduziu uma constante chamada constante cosmológica em sua equação de campo.

Em 1922, Alexander Friedmann obtem as soluções relacionadas a um universo em expansão para a equação de campo de Einstein [3][4], tais resultados também foram encontrados de forma independente por George Lemaître [5], em 1927, e em seguida, surge a hipótese do universo está se expandindo, assim, dispensando a necessidade da constante cosmológica proposta por Einstein a fim de se obter um universo estático.

Em 1929, com o auxílio de um telescópio, Edwin Hubble [6], baseado em alguns

resultados de Slipher [7][8], em 1912, sobre o espectro de luz vinda das estrelas e nebulosas, relata que as galáxias estão se afastando com velocidades proporcionais as suas distâncias.

Contudo, em 1935, Howard Percy Robertson [9][10][11] e Arthur Geoffrey Walker [12] deduziram uma métrica para os resultados de Friedmann e Lemaître que satisfaz o Princípio Cosmológico conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker dando assim, três possíveis formas geométricas para o universo: plano, esférico ou hiperbólico. Tal métrica é expressa em coordenadas comóveis e possui como fonte de curvatura um fluido perfeito.

Segundo estudos realizados com base em observações, o universo apresenta uma geometria plana, ou seja, com curvatura nula, e possui como componentes: radiação, matéria bariônica e escura e uma constante cosmológica. Em relação à matéria escura, esta já havia sido prevista em 1934 por Fritz Zwicky [13] durante estudos de aglomerado de galáxias. Porém, em virtude da precisão dos dados observacionais, somente na década de 70 foi alvo de estudo pela comunidade científica, logo, Ford e Rubin descobriram que as velocidades das curvas de rotações de galáxias eram constantes ou crescentes em pontos fora da região visível, contudo, as velocidades dessas galáxias apresentavam-se de maneira incompatíveis diante da massa deduzida com base da radiação eletromagnética, ou seja, deveria haver uma quantidade de massa a qual não interage com a luz, daí a ideia de matéria escura. Essa justificativa também é baseada num fenômeno chamado lentes gravitacionais [24] onde uma quantidade de matéria distorce o espaço-tempo entre um observador e uma fonte luminosa, gerando assim, uma posição aparente desta.

Um estudo que também contribuiu para o modelo cosmológico padrão refere-se a Radiação Cósmica de Fundo (CMB), que em 1965, foi descoberta por Arno Penzias e Robert Wilson [14] através de um detector de microondas [15]. Segundo Bob Dicke e Jim Peebles [16], os quais se basearam nos estudos de Gamov, em virtude da expansão do universo essa radiação se apresenta para nós somente agora, porém, em faixas de microondas. Portanto, podemos dizer que tal análise nos permite visualizar o universo

primordial [17].

Assim, no primeiro capítulo apresentaremos alguns conceitos sobre a Teoria da Relatividade Geral e introduziremos o Modelo Cosmológico Padrão explorando os períodos desde a era da radiação até o modelo Λ CDM, o qual retrata a expansão do universo em virtude de uma constante cosmológica.

No segundo capítulo veremos como o modelo cosmológico padrão apresenta alguns problemas que estão relacionados com a Teoria do Big Bang Quente, no entanto, a Teoria da Inflação Cósmica, publicada em 1981 por Alan Guth [18], surge com o propósito de solucionar esses fatos. Assim, aborda sobre a hipótese do universo ter passado por uma fase de expansão acelerada seguida de um reaquecimento e dando origem ao universo com as condições estabelecidas pelo modelo padrão da cosmologia. Dessa maneira, Guth atribui tal período de expansão acelerada a um campo escalar homogêneo e isotrópico ϕ denominado ínflaton [19][20], o qual possui um potencial associado com um ponto de equilíbrio quando $\phi = 0$ e, conforme a temperatura diminui, desenvolve-se um segundo ponto de equilíbrio. Caso este segundo ponto de equilíbrio apresente uma temperatura abaixo da crítica, então, dá-se o nome de vácuo verdadeiro, enquanto ao primeiro, é denominado de falso vácuo [21]. Esse modelo de campo escalar aborda o início da inflação como um período onde o potencial domina o termo de energia cinética num regime de rolagem lenta (slow-roll), assim, resultando num resfriamento seguido de um reaquecimento dando origem a formação de estruturas.

No terceiro capítulo será apresentado alguns modelos inflacionários onde mudamos o potencial num regime de rolagem lenta para obter os índices espectrais e as equações de Friedmann e de estado para cada caso.

No quarto capítulo, introduziremos um modelo com acoplamento dos campos eletromagnético e de áxions, sendo este um bóson hipotético de spin zero cujo campo é um candidato a matéria escura [39]. Adotaremos os campos elétrico e magnético como soluções do tipo ondas planas e após a realização de algumas aproximações, somaremos suas

respectivas densidades de energia e pressão com o propósito de encontrar a equação de estado para o caso em análise. A importância da equação de estado se deve ao fato de demonstrar como ocorre a evolução da densidade de energia em relação ao tempo, assim, determinando se o universo está apresentando uma expansão acelerada ou desacelerada.

E por fim, no quinto capítulo, analisaremos alguns cenários cosmológicos baseados na atuação dos campos eletromagnético e de áxions, isoladamente e acoplados, determinando assim, a contribuição destes na expansão do universo.

No decorrer de toda a pesquisa será utilizada o sistema de unidades naturais e a assinatura da métrica é dada por $(+, -, -, -)$.

Capítulo 1

A Teoria da Relatividade Geral e o Modelo Cosmológico Padrão

A Teoria da Relatividade Geral (TRG), publicada em 1916 por Albert Einstein [1], baseia-se na descrição geométrica da gravitação, descrevendo aplicações para uma melhor compreensão da evolução do universo, assim, com o propósito de encontrar respostas que não poderiam ser entendidas pela teoria gravitacional de Newton. Neste contexto, a consideração que se tem sobre o espaço isolado deixa de ter sentido, pois este não pode existir sem o tempo e vice-versa [15]. Em sua abordagem, o campo gravitacional é visto como uma distorção do espaço-tempo, ou seja, curvo. Uma de suas bases centraliza-se no Princípio da Equivalência, estabelecendo que um referencial inercial não acelerado na presença de um campo gravitacional é equivalente a um referencial acelerado na ausência de um campo gravitacional. Assim, a TRG é uma generalização da Teoria da Relatividade Especial (ou Restrita), formulada em 1905, a qual fazia menção apenas aos referenciais inerciais e as dimensões do espaço e tempo eram fundamentadas na geometria quadridimensional de Minkowski descrita pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.1)$$

1.1 Equações de Campo de Einstein

No contexto da TRG, como exemplos mais satisfatórios de suas aplicações, temos a deflexão da luz em um campo gravitacional, o redshift gravitacional o qual é responsável pela diminuição do comprimento de onda dos fótons na presença de um campo gravitacional intenso, a precessão do periélio de Mercúrio e a previsão das ondas gravitacionais.

Em sua análise, a TRG menciona a massa como responsável pela curvatura do espaço-tempo, definindo assim, o campo gravitacional. Portanto, a equação que descreve sua dinâmica, conhecida como equação de campo de Einstein, é definida por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, obtido através da contração do tensor de Riemann, representado por $R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}{}^{\rho}$, trata-se de um tensor simétrico, ou seja,

$$R_{\mu\lambda} = R_{\lambda\mu}, \quad (1.3)$$

R é o escalar de curvatura de Ricci, dado por

$$R = g^{\mu\lambda}R_{\mu\lambda}, \quad (1.4)$$

G é a constante gravitacional, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Assim, a equação de campo de Einstein relaciona a geometria do espaço-tempo com o conteúdo da matéria e energia descritas através do tensor energia-momento, o qual contém as densidades e os fluxos de energia e momento gerados pelas fontes presentes do espaço. Sua definição é dada por $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}$ e considerando um fluido perfeito, teremos

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

onde u^μ é a quadrivelocidade para o observador comóvel ao fluido e ρ e p são a densidade de energia e pressão, respectivamente. Representando o tensor energia-momento na forma diagonal, teremos

$$T^{\mu\nu} = (\rho, -p, -p, -p). \quad (1.6)$$

Assim, seu traço é dado por

$$Tr = \rho - 3p. \quad (1.7)$$

O tensor energia-momento é simétrico e obedece a seguinte lei de conservação de energia

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.8)$$

Em 1917, com o propósito de obter um universo estático, afinal, naquela época não se tinha a ideia da expansão do universo, Albert Einstein introduz em sua equação de campo um termo chamado de constante cosmológica(Λ), sendo esta responsável pelo contrabalanceamento com a atração gravitacional, ou seja, trata-se de uma força repulsiva que impede o colapso do universo. Dessa forma, para a equação (1.2), temos

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Em 1929, com a descoberta do desvio para o vermelho, conhecido como redshift, por Edwin Hubble, e a ideia de expansão do universo, Einstein descartou tal termo adicionado a sua equação de campo. Porém, hoje, sabemos que a constante cosmológica pode ser utilizada para explicar a aceleração do universo indicado pelas observações de supernovas [22].

1.2 A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

A comunidade científica baseia suas teorias em um princípio chamado Princípio Cosmológico que descreve o universo, em largas escalas (acima de 100 kpc, onde um parsec equivale a aproximadamente 3,26 anos-luz), como homogêneo e isotrópico, ou seja, dizer que o universo é homogêneo significa informar que ele apresenta as mesmas propriedades, como por exemplo, densidade de energia, temperatura, etc, em qualquer ponto, e dizer que ele é isotrópico significa que todas as direções são equivalentes. Portanto, podemos afirmar que considerando o princípio cosmológico, logo não há observadores privilegiados [23].

Em 1922, o matemático e cosmólogo russo Alexander Friedmann afirma sobre a possibilidade do universo está se expandindo. Assim, Friedmann publica dois trabalhos os quais abordam espaços com curvatura constante com valores positivos e negativos [3][4]. De forma independente, em 1927, o físico e astrônomo belga George Lemaître obtém os mesmos resultados de Friedmann [5]. Contudo, em 1929, o astrônomo Edwin P. Hubble descobre que as galáxias estão se afastando com velocidade proporcional a sua distância [6]. Em seguida, em 1935, o físico e matemático americano Howard Percy Robertson e o matemático inglês Arthur Geoffrey Walker deduziram uma métrica geral que satisfaz a condição de homogeneidade e isotropia para a geometria do espaço-tempo e que tenha simetria esférica chamada de métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker , dada por [24]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.10)$$

sendo $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ e o tensor métrico dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\text{sen}^2\theta \end{bmatrix}.$$

Da equação (1.10) o fator de escala $a(t)$ determina a distância física do universo e k expressa sua curvatura espacial que pode ser classificado em plano com valor nulo, hiperbólico com valor -1, ou seja, um universo aberto, e esférico com valor 1, também chamado de universo fechado.

A equação (1.10) está expressa em coordenadas comóveis e possui como fonte de curvatura um fluido perfeito cujo tensor energia-momento é dado pela equação (1.5). Assim, para descrever a dinâmica do universo como solução das equações de campo de Einstein da gravitação basta obter os termos não nulos e calcular o tensor e o escalar de Ricci, dessa forma, temos para componente temporal do tensor de Einstein

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.11)$$

onde esta equação corresponde a velocidade de expansão do universo e é conhecida como equação de Friedmann. Se utilizarmos qualquer uma das componentes espaciais do tensor de Einstein com a equação anterior, ficamos com:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.12)$$

A equação acima refere-se a aceleração ou desaceleração da expansão do universo, conhecida como equação da aceleração. Portanto, a equação de Friedmann relaciona a taxa de crescimento do fator de escala com a densidade de energia total e a geometria do universo.

1.3 A Lei de Hubble e a Expansão do Universo

Em 1912, V. Slipher [7][8], analisando o espectro de luz vinda de estrelas e nebulosas, nota um desvio para o azul(blueshift) das linhas espectrais da galáxia de Andrômeda, fenômeno que pode ser compreendido através do efeito doppler. Porém, o estudo do espectro das galáxias exibiam em sua grande maioria um desvio para o vermelho(redshift) que por sua vez resulta num aumento do comprimento de onda. O redshift refere-se ao deslocamento das linhas de absorção ou emissão de seu espectro devido ao movimento relativo entre a fonte e seu observador, ou seja,

$$z \equiv \frac{\nu_e}{\nu_o} - 1 = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{v_e}{c}, \quad (1.13)$$

sendo que λ_o e λ_e correspondem aos comprimentos de onda observado e emitido, respectivamente, v_e é a velocidade da fonte relativa ao observador e c é a velocidade da luz.

Em 1929, durante as análises de algumas medidas, Hubble nota uma proporcionalidade entre o redshift e a distância das galáxias dada por

$$cz = H_0 r. \quad (1.14)$$

Assim, combinando as equações (1.13) e (1.14) e isolando v_e , temos:

$$v(t) = H(t)r, \quad (1.15)$$

conhecida como Lei de Hubble sendo $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ o parâmetro de Hubble. Portanto, com tais observações, Hubble aponta a ideia do universo está se expandindo.

Considerando a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker e sabendo que o tempo percorrido por um fóton e a distância são dados pela integral de uma geodésica nula, então,

$$ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dx^2}{1 - kx^2} \quad (1.16)$$

$$cdt = a(t) \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}} \Rightarrow \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_o^{\chi_e} \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}}. \quad (1.17)$$

Obtendo como resultado:

$$\begin{cases} \arcsen \chi_e, & \text{para } k = 1 \\ \chi_e, & \text{para } k = 0 \\ \operatorname{arcsenh} \chi_e, & \text{para } k = -1 \end{cases}$$

Se nós observamos um objeto que não tenha movimento próprio, então, durante um intervalo de tempo sua coordenada comóvel não mudará para este instante, ou seja, o objeto estará se afastando somente em virtude da expansão do universo [25]. Portanto, para a equação (1.17), temos

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.18)$$

$$\int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.19)$$

Se os intervalos de tempo δt_o e δt_e são pequenos em relação à idade do universo, daí, o fator de escala é aproximadamente constante durante tais intervalos, assim,

$$\frac{\delta t_o}{a(t_o)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)}. \quad (1.20)$$

Como para este caso a única componente da velocidade será devido a expansão do universo, logo,

$$\frac{\lambda_o}{\lambda} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (1.21)$$

Dessa forma, combinando as equações (1.13) e (1.21), ficamos com

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \equiv z = \frac{a(t_o) - a(t_e)}{a(t_e)} \Rightarrow 1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}, \quad (1.22)$$

ou seja, o intervalo de tempo entre emissão e recepção de um sinal de luz pode relacionar o redshift ao fator de escala do universo, sendo que quanto maior o valor de z , mais remoto é o passado ao qual estamos nos referindo, enquanto ao tempo presente teremos que $z = 0$. A esse intervalo de tempo decorrido chamamos de lookback time, que pode ser expresso em termos do tempo de Hubble e do fator de escala, dado por [24]

$$T_L = \frac{2}{3}t_H(1 - a^{3/2}), \quad (1.23)$$

onde t_H é o tempo de Hubble, que pode ser calculado por

$$d = vt_H \Rightarrow d = \underbrace{H_0 d}_{v} t_H. \quad (1.24)$$

Como $H_o = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, então, para o tempo de Hubble, temos

$$t_H = 4,4 \times 10^{17} \text{ seg} = 13,9 \times 10^9 \text{ anos}. \quad (1.25)$$

Para a distância de Hubble, ou seja, a distância percorrida pela luz durante a idade do universo, teremos

$$d_H = ct_H = 4280 \text{ Mpc}. \quad (1.26)$$

1.4 Equação de Conservação de Energia

Considerando um universo plano, isolando a densidade de energia ρ na equação (1.11) e calculando sua derivada temporal, teremos:

$$\dot{\rho} = \left(\frac{3}{4\pi G} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (1.27)$$

Agora, substituindo as equações (1.11) e (1.12) no terceiro parênteses da equação acima ficaremos com

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (1.28)$$

Esta é a Equação de Continuidade ou simplesmente equação de conservação de energia, através dela podemos determinar como os componentes do universo evoluem no tempo.

Para uma relação entre as densidades de energia e pressão temos a equação de estado dada por

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad (1.29)$$

onde ω é um número adimensional.

Dividindo a equação (1.28) por ρ_0 e encontrando uma solução para ρ , temos:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho_0} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega_0) \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -3\rho_0(1 + \omega_0)\frac{1}{a}\frac{da}{dt} \Rightarrow \rho = \int_0^a -3\rho_0(1 + \omega_0)\frac{1}{a}da.$$

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega_0)}. \quad (1.30)$$

Tanto para a matéria bariônica quanto para a matéria escura, os parâmetros da equação de estado são nulos, enquanto que para a radiação temos $\omega_r = \frac{1}{3}$, ou seja,

$$\rho_b = \rho_{b,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (1.31)$$

$$\rho_{me} = \rho_{me,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (1.32)$$

$$\rho_r = \rho_{r,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4}, \quad (1.33)$$

onde ρ_b , ρ_{me} e ρ_r referem-se, respectivamente, as densidades de energia de matéria bariônica, matéria escura e radiação, enquanto aos índices "0" representam as densidades de energia para o tempo presente.

Para que o universo assuma uma geometria plana, ou seja, com constante de curvatura nula, precisamos de uma determinada densidade de energia chamada densidade crítica, em outras palavras, trata-se de uma densidade de energia necessária para parar a expansão do universo, dada por

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Rightarrow \frac{8\pi G}{3} = \frac{H_0^2}{\rho_c}. \quad (1.34)$$

Substituindo a expressão acima na equação de expansão de Friedmann considerando $k = 0$, ficamos com

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\rho_r}{\rho_c} + \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \right], \quad (1.35)$$

onde consideramos todos os componentes do universo: radiação, matéria bariônica e escura e constante cosmológica.

Agora, definindo um parâmetro como a razão entre a densidade de energia do universo e a densidade crítica chamado parâmetro de densidade (Ω), ou seja

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (1.36)$$

e dividindo as equações (1.31), (1.32) e (1.33) pela densidade crítica, temos

$$\frac{\rho_b}{\rho_c} = \Omega_b = \underbrace{\frac{\rho_{b,0}}{\rho_c}}_{\Omega_{b,0}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}, \quad (1.37)$$

$$\frac{\rho_{me}}{\rho_c} = \Omega_{me} = \underbrace{\frac{\rho_{me,0}}{\rho_c}}_{\Omega_{me,0}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\rho_r}{\rho_c} = \Omega_r = \underbrace{\frac{\rho_{r,0}}{\rho_c}}_{\Omega_{r,0}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}. \quad (1.39)$$

Tendo em vista que as observações apontam para um universo em expansão, consequentemente, há um aumento do fator de escala no decorrer do tempo, assim, temos que ele era bastante pequeno nos períodos mais remotos da evolução do universo, portanto, de acordo com as equações (1.37), (1.38) e (1.39) prevalece uma singularidade quando $a(t) \rightarrow 0$. Na figura 1.1 temos a evolução do fator de escala para diferentes tipos de universos, ou seja, aberto, fechado e plano.

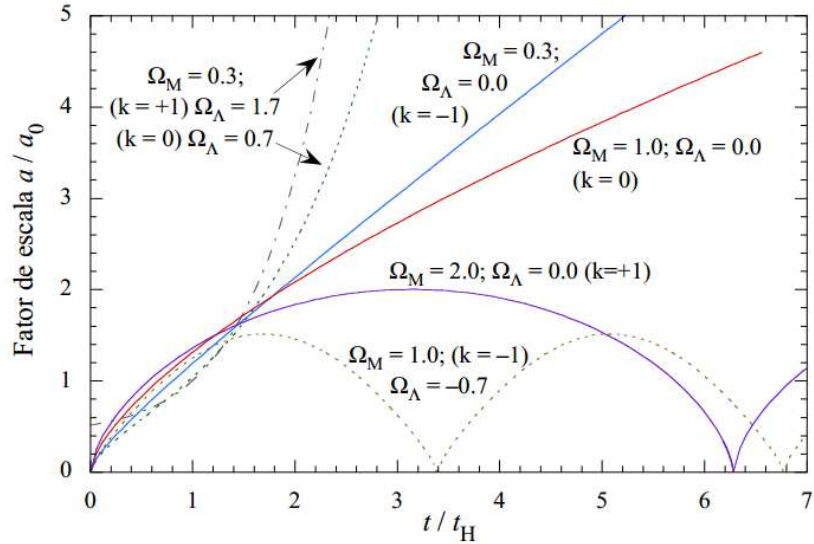


Figura 1.1: Evolução do fator de escala para modelos de Friedmann. Fonte: <https://portugues.free-ebooks.net/ebook/Analogos-classicos-para-cosmologias-relativisticas-aceleradas-uma-abordagem-lagrangiana>.

Também vale salientar sobre a predominância da era da radiação anterior a era

da matéria uma vez que a primeira apresenta uma densidade de energia inversamente proporcional ao fator de escala elevado a quarta potência.

Substituindo os resultados obtidos nas três expressões acima na equação (1.35), teremos

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{\Lambda,0} \right], \quad (1.40)$$

sendo $\Omega_{m,0}$ o parâmetro de densidade referente às densidades de energia de matérias escura e bariônica.

Se $a = a_0$ e $H = H_0$, então

$$\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda} = 1. \quad (1.41)$$

Considerando um universo com constante de curvatura k , se por definição temos $8\pi G = 2$, daí, isolando ρ e ρ_c da equação de Friedmann teremos para o parâmetro de densidade

$$\Omega = \frac{\frac{3}{2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)}{\frac{3}{2} H^2} = \frac{H^2 a^2 + k}{H^2 a^2} = 1 + \frac{k}{H^2 a^2}.$$

Portanto

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.42)$$

Assim, para

$$\begin{cases} k = 1, \Rightarrow \Omega > 1 \\ k = -1, \Rightarrow \Omega < 1 \\ k = 0, \Rightarrow \Omega = 1 \end{cases}$$

Dessa maneira, podemos verificar que Ω é uma medida indireta da geometria do universo onde para um universo esférico temos $\Omega > 1$, hiperbólico, $\Omega < 1$ e plano, $\Omega = 1$.

Por outro lado, para o fator de escala, fazendo uma expansão em série de Taylor, temos

$$a(t) = \underbrace{a_0}_1 + (t - t_0) \underbrace{\frac{da}{dt}}_{\dot{a}} + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \underbrace{\frac{d^2a}{dt^2}}_{\ddot{a}} + \dots \quad (1.43)$$

Dividindo ambos os membros por a_0 , logo

$$\frac{a(t)}{a_0} = 1 - (t_0 - t)H_0 - \frac{1}{2}q_0(t_0 - t)^2 H_0^2 + \dots \quad (1.44)$$

Sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = \text{tempo no instante presente} \\ a_0 = \text{fator de escala no tempo presente} \\ H_0 = \text{constante de Hubble} \end{array} \right.$$

Assim, definindo o parâmetro de desaceleração hoje, representado por q_0 , e considerando o termo que expressa a aceleração na equação de Friedmann, teremos

$$-q_0 H_0^2 = \frac{\ddot{a}}{a_0} \Rightarrow q_0 = -\ddot{a} \frac{a_0}{\dot{a}^2}, \quad (1.45)$$

onde q_0 é um parâmetro adimensional que permite classificar a evolução do universo como

$$\left\{ \begin{array}{l} q > 0 \Rightarrow \text{desacelerada} \\ q = 0 \Rightarrow \text{estática} \\ q < 0 \Rightarrow \text{acelerada} \end{array} \right.$$

Portanto, o valor de q , assim como Ω , expressa o futuro da expansão do universo, sendo ambos, funções do tempo.

1.5 Universo Formado por Várias Componentes

1.5.1 Modelo Matéria + Constante Cosmológica(Λ)

Considerando um universo plano composto apenas por matéria e constante cosmológica, através da expressão (1.40), temos para a equação de expansão de Friedmann

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0}, \quad (1.46)$$

onde admitimos $a_0 = 1$ e $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$.

O primeiro termo do segundo membro da equação (1.46) expressa a contribuição da matéria sendo sempre positiva, enquanto ao segundo termo, este representa a contribuição de uma constante cosmológica. Portanto, para $\Omega_{m,0} < 1$ implica em $\Omega_{\Lambda,0} > 0$. Assim, para um parâmetro de densidade positivo da constante cosmológica, o universo continuará a se expandir, por outro lado, se este valor for negativo teremos uma força atrativa e, conseqüentemente, o universo deixará de se expandir, nesse instante, terá um fator de escala máximo dado por

$$a_{max} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \right)^{1/3}. \quad (1.47)$$

Integrando a equação (1.46), para um universo plano, temos [22]

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} \text{sen}^{-1} \left[\left(\frac{a}{a_{max}} \right)^{3/2} \right]. \quad (1.48)$$

Considerando que o universo tem se expandido de um estado inicial bastante denso, então, houve uma determinada densidade de matéria igual a constante cosmológica e isso ocorreu quando o fator de escala era dado por

$$a_{m,\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right)^{1/3}, \quad (1.49)$$

ou seja, a equação acima expressa o valor do fator de escala que corresponde a igual-

dade entre matéria e constante cosmológica. Agora, integrando a equação de expansão de Friedmann, teremos

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln \left[\left(\frac{a}{a_{m,\Lambda}} \right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{a_{m,\Lambda}} \right)^3} \right]. \quad (1.50)$$

Se fizermos $a \ll a_{m,\Lambda}$, ficamos com

$$a(t) \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (1.51)$$

Do contrário, ou seja, $a \gg a_{m,\Lambda}$, logo

$$a(t) \approx a_{m,\Lambda} \exp \left(\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} H_0 t \right). \quad (1.52)$$

Segundo Modelo Benchmark [22], temos:

$$\begin{cases} \Omega_{m,0} = 0,3 \\ \Omega_{\Lambda,0} = 0,7 \end{cases},$$

então, podemos escrever o redshift de igualdade entre matéria e constante cosmológica como

$$a_{m,\Lambda} = a(t) = \frac{1}{1+z} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \Rightarrow z = 0,32. \quad (1.53)$$

Através da equação (1.50) podemos encontrar a idade do universo, assim

$$t_0 = \frac{2H^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln \left[\frac{\sqrt{1-\Omega_{m,0}+1}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right] \approx 1,34 \times 10^{10} \text{anos}. \quad (1.54)$$

Na igualdade entre as componentes, daí

$$t_{m,\Lambda} = \frac{2H^{-1}}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln [1 + \sqrt{2}] \approx 9,81 \times 10^9 \text{anos}. \quad (1.55)$$

1.5.2 Modelo Matéria + Radiação

Segundo o Modelo Benchmark [22], o universo foi dominado primeiramente pela radiação e, em seguida, pela matéria. Se considerarmos um universo composto somente por matéria e radiação a equação de Friedmann (1.40) nos dará

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}. \quad (1.56)$$

Reescrevendo, temos

$$H_0 dt = \frac{ada}{\Omega_{r,0}^{1/2}} \left[1 + \frac{a}{a_{r,m}} \right]^{-1/2}. \quad (1.57)$$

Se integrarmos teremos o tempo em função do fator de escala, ou seja

$$H_0 t = \frac{4a_{r,m}^2}{3\sqrt{\Omega_{r,0}}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{r,m}} \right) \left(1 + \frac{a}{a_{r,m}} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.58)$$

Quando $a \ll a_{r,m}$:

$$a \approx \left(2\sqrt{\Omega_{r,0}} H_0 t \right)^{1/2}, \quad (1.59)$$

onde a evolução do universo é dominada pela radiação. Por outro lado, se $a \gg a_{r,m}$, então,

$$a \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (1.60)$$

Para o tempo de igualdade entre matéria e radiação ficamos com

$$t_{r,m} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{a_{r,m}^2}{\sqrt{\Omega_{r,0}}} H_0^{-1}. \quad (1.61)$$

Se pelo Modelo Benchmark [22], vem que:

$$\begin{cases} \Omega_{r,0} = 8,4 \times 10^{-5} \\ \Omega_{m,0} = 0,3 \end{cases},$$

portanto,

$$t_{r,m} \approx 47.000 \text{ anos.} \quad (1.62)$$

Para o redshift de igualdade, logo:

$$a_{r,m} = a(t) = \frac{1}{1+z} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \Rightarrow z = 3570. \quad (1.63)$$

1.5.3 Modelo Matéria + Curvatura

Se considerarmos um universo composto somente por matéria, sem pressão, ou seja, com $\omega = 0$, teremos para a equação de expansão de Friedmann, considerando uma curvatura k ,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}, \quad (1.64)$$

sendo $\Omega_{m,0} = \Omega_0$.

Supondo que tal universo esteja em expansão, então esta será cessada quando $H = 0$. Contudo, caso o primeiro termo do segundo membro da equação (1.64) seja positivo, então, o segundo termo deverá ser negativo. Portanto, no instante da expansão máxima, teremos

$$0 = \frac{\Omega_0}{a_{max}^3} + \frac{1 - \Omega_0}{a_{max}^2}, \quad (1.65)$$

e o fator de escala será dado por

$$a_{max} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}. \quad (1.66)$$

Caso o universo apresente um período de contração, conseqüentemente, para um observador as galáxias seriam vistas com um blueshift proporcional a sua distância. Na literatura, tal fenômeno é chamado Big Crunch. Portanto, em um universo dominado por matéria com $\Omega_0 > 1$ resultará numa expansão máxima do fator de escala que pode

ser calculado através da equação de Friedmann (1.64), assim, multiplicando ambos os membros por a^2 :

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a} + (1 - \Omega_0). \quad (1.67)$$

Dessa forma, para a idade do universo, podemos calcular a integral do fator de escala, na forma

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_0}{a} + (1 - \Omega_0)}}. \quad (1.68)$$

Por outro lado, considerando um universo também dominado por matéria, porém, com $\Omega_0 < 1$, então, teremos ambos os termos do segundo membro da equação (1.64) como positivos, e como consequência, haveria uma expansão infinita. Em períodos mais remotos, quando o fator de escala era bastante pequeno, ou seja, $a \ll \Omega_0/(1 - \Omega_0)$, houve a predominância do termo referente a matéria na equação de expansão de Friedmann.

1.6 Modelo de Einstein - de Sitter

Em 1917, quando Einstein adicionou uma constante (Λ) às suas equações de campo com a finalidade de propor uma condição para contrabalancear a atração gravitacional e admitir um universo estático, daí considerou tal termo como uma propriedade intrínseca do espaço-tempo, assim,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.69)$$

Dessa forma, teríamos $\dot{a} = 0$ e o universo seria fechado, portanto, finito com $k = 1$. Contudo, ainda em 1917, o astrônomo holandês Williem de Sitter propôs um modelo de universo isotrópico e, para ser estático, não podia conter qualquer quantidade de matéria.

Assim, considerando a equação de expansão de Friedmann, temos a expressão

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (1.70)$$

Contudo, para outro modelo de universo de de Sitter proposto em 1932, a curvatura e a constante cosmológica (Λ) são consideradas nulas, pois supõe-se que a densidade de matéria corresponde a densidade crítica, conseqüentemente, assumindo o caso de um universo plano ($k = 0$). Agora, definindo uma constante como [26]:

$$C = \frac{8\pi\rho a^3}{3}. \quad (1.71)$$

da equação (1.70), ficamos com

$$\dot{a}^2 = \underbrace{\frac{8\pi\rho}{3}}_{=\frac{C}{a^3}} a^2. \quad (1.72)$$

Então,

$$\dot{a} = \frac{C^{1/2}}{a^{1/2}} \Rightarrow a^{1/2} \frac{da}{dt} = C^{1/2} \Rightarrow \int_0^a a^{1/2} da = \int_0^t C^{1/2} dt$$

$$a = \left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{2/3} t^{2/3}. \quad (1.73)$$

Realizando a derivada temporal da equação acima, temos

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{2/3} t^{-1/3}. \quad (1.74)$$

Dividindo a equação (1.74) pela (1.73):

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{2/3} t^{-1/3}}{\left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{2/3} t^{2/3}} = \frac{2}{3t^{2/3}t^{1/3}}.$$

Resultando em

$$H = \frac{2}{3t}. \quad (1.75)$$

Derivando a equação (1.74) em relação ao tempo,

$$\ddot{a} = \left(\frac{-1}{3}\right) \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{2/3} t^{-4/3}. \quad (1.76)$$

Como o parâmetro de desaceleração é dado por $q(t) = \frac{-a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$, então, utilizando as equações (1.73), (1.74) e (1.76), teremos:

$$q(t) = \frac{-\left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{2/3} t^{2/3} \left[\frac{-2}{9} \left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{2/3} t^{-4/3}\right]}{\frac{4}{9} \left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{4/3} t^{-2/3}}, \quad (1.77)$$

$$q(t) = \frac{1}{2} \quad (1.78)$$

1.7 Distâncias Cósmicas

1.7.1 Distância de Luminosidade

Sabendo que a Cosmologia é baseada em observações, portanto, para calcularmos a distância de uma determinada galáxia, por exemplo, faz-se necessário o conhecimento de algumas propriedades da mesma e, uma delas refere-se a sua luminosidade(L), então distância de luminosidade(D_L) consiste na comparação entre as intensidades emitida e observada de um objeto luminoso [23], considerando sua emissão como um valor supostamente conhecido.

Em astronomia, há algumas técnicas para medir distâncias relativamente pequenas, porém, quando tratamos de distâncias entre estrelas ou galáxias, faz-se necessário a técnica da distância de luminosidade.

Definindo a luminosidade absoluta como a quantidade total de energia radiativa emitida por segundo, ou seja, a potência. Agora, denominando a luminosidade aparente sendo a quantidade medida, em outras palavras, é a energia que atravessa cada metro quadrado de uma esfera imaginária de raio igual à distância da fonte até a Terra.

Como a área da esfera centrada na fonte que acompanha o fluxo dos fótons é dada por $4\pi D_M^2$, e sabendo que a taxa dos fótons que abandonam a fonte é superior aos fótons que podem ser observados por um fator $1/(1+z)$, com isso, da definição de fluxo, temos:

$$F = \frac{L}{4\pi D_M^2(1+z)^2} \equiv \frac{L}{4\pi D_L^2}, \quad (1.79)$$

onde D_M é a distância métrica ou simplesmente distância comóvel (D_c), ou ainda, é a distância própria no instante t dividida pelo fator de escala correspondente, ou seja,

$$D_M = \frac{D(t)}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (1.80)$$

De acordo com a equação (1.79) podemos relacionar a distância de luminosidade com a distância comóvel por:

$$D_L = (1+z)D_c. \quad (1.81)$$

Agora, reescrevendo a distância comóvel, multiplicando e dividindo a equação (1.80) por \dot{a} , então:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \left(\frac{\dot{a}}{\dot{a}} \right) = \int_{a_1}^{a_0} \frac{cda}{a^2 \dot{a}/a} = \int_{a_1}^{a_0} \frac{cda}{a^2 H},$$

sabendo que $a_0/a = (1+z)$, então, $da = [-a_0/(1+z)^2]dz$, portanto, substituindo na equação acima, ficamos com

$$\int_0^z \frac{a_0 cdz}{(1+z)^2 a^2 H} = \int_0^z \frac{a_0 c(1+z)^2 dz}{(1+z)^2 a_0^2 H} = \int_0^z \frac{cdz}{a_0 H_0 E(z)}, \quad (1.82)$$

daí, utilizando a distância comóvel representada acima e substituindo na equação (1.81), teremos a distância de luminosidade em termos da energia e do redshift:

$$D_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}. \quad (1.83)$$

A distância de luminosidade requer a medição do fluxo de luminosidade de um

determinado objeto, contudo, há técnicas que caracterizam a luminosidade vinda desses corpos, isso é feito através das magnitudes aparente e absoluta [25], esta última, é definida como a magnitude aparente que a fonte apresentaria caso estivesse a uma distância de 10 pc.

Expressando o fator de escala em séries de potências em torno de t_0 , temos

$$a(t) \approx a_0 + \dot{a}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}_0(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.84)$$

Dividindo pelo fator de escala a_0 , então:

$$\frac{a(t)}{a_0} \approx 1 + H_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2}(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.85)$$

Fazendo $a_0 = 1$ e partindo da definição de $q_0 = -\ddot{a}_0 \frac{a_0}{\dot{a}_0^2}$, ficamos com $q_0 = \frac{-\ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2} = \frac{-\ddot{a}_0}{H_0^2}$, ou seja, $\ddot{a}_0 = -q_0 H_0^2$, assim, substituindo esse resultado na expressão acima, o fator de escala pode ser representado por

$$a(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.86)$$

Calculando $1/a(t)$,

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0(t - t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.87)$$

Assim, para o redshift, teremos

$$z = \frac{a_0}{a(t)} - 1 = \frac{1}{a(t)} - 1 \approx H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t_0 - t)^2 + \dots \quad (1.88)$$

Para a distância comóvel percorrida pela luz, podemos escrever:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \approx c \int_{t_e}^{t_0} \left[1 + H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t_0 - t)^2 + \dots\right] dt$$

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \approx c \left[(t_0 - t) + \frac{H_0}{2} (t_0 - t)^2 + \dots \right]. \quad (1.89)$$

Invertendo a equação (1.88), teremos o lookback time em função do redshift, ou seja,

$$t_0 - t \approx H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \dots \right]. \quad (1.90)$$

Substituindo a equação (1.90) em (1.89), logo

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \approx \frac{c}{H_0} \left[z - (1 + q_0/2)z^2 \right] + \frac{cH_0}{2} \frac{z^2}{H_0} + \dots = \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{1 + q_0}{2} z + \dots \right]. \quad (1.91)$$

Portanto, a equação acima descreve a distância comóvel em termos do redshift.

Para $a_0 = 1$ sabemos que $1/a(t) = (1 + z)$, assim, combinando as equações (1.81) e (1.91), teremos a distância de luminosidade dada por:

$$D_L = \frac{c}{a(t)H_0} z \left[1 - \frac{1 + q_0}{2} z + \dots \right]. \quad (1.92)$$

1.7.2 Distância de Diâmetro Angular

Consideremos um objeto de extensão infinitesimal comóvel tendo coordenada radial comóvel e comprimento próprio, então, sua distância de diâmetro angular no instante t é dada por

$$D_A(t) = \frac{D}{\theta} = a(t_1)D_c, \quad (1.93)$$

onde D é a dimensão linear do objeto, θ é o ângulo pelo qual o mesmo é observado, $a(t_1)$ é o fator de escala no instante t_1 e D_c é a distância comóvel.

Reescrevendo a equação acima utilizando a definição em (1.82), temos

$$D_A(t) = \underbrace{\frac{a_0}{(1+z)}}_{a(t_1)} \underbrace{\frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}}_{D_c} \Rightarrow D_A(t) = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}. \quad (1.94)$$

Combinando as equações (1.83) e (1.93), podemos relacionar a distância de luminosidade com a distância de diâmetro angular, ou seja,

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2}, \quad (1.95)$$

assim, conclue-se que para $z \ll 1$ temos $D_A = D_L$.

Adotando um universo plano e só de matéria, pelo modelo de Einstein - de Sitter e de acordo com a equação (1.74), temos para o fator de escala:

$$\begin{cases} a = \left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{2/3} t^{2/3} \\ a_0 = \left(\frac{3}{2}C^{1/2}\right)^{2/3} t_0^{2/3} \end{cases}$$

Então,

$$\frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{(1+z)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \quad (1.96)$$

Assim, podemos reescrever a distância comóvel como

$$D_c = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{c}{a_0} \int_{t_e}^{t_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} dt = \frac{3ct_0^{2/3}}{a_0} (t_0^{1/3} - t_e^{1/3}).$$

Fazendo,

$$\begin{cases} t_0^{2/3} \cdot t_0^{1/3} = t_0 \cdot 1 \\ t_0^{2/3} \cdot t_e^{1/3} = \underbrace{\frac{t_0}{t_0^{1/3}}}_{t_0^{2/3}} \cdot t_e^{1/3} = t_0 \cdot \frac{t_e^{1/3}}{t_0^{1/3}} \end{cases} \Rightarrow D_c = \frac{3ct_0}{a_0} \left(1 - \frac{t_e^{1/3}}{t_0^{1/3}}\right). \quad (1.97)$$

Através da equação (1.75), temos que

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}.$$

Assim, substituindo esse resultado na expressão (1.97), vem que

$$D_c = \frac{3c}{a_0} \frac{2}{3H_0} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{1/3} \right]. \quad (1.98)$$

Se o fóton foi emitido num instante t_e , então, o seu desvio para o vermelho poderá ser representado por

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} = \left(\frac{t_0}{t_e} \right)^{2/3} \Rightarrow (1 + z)^{3/2} = \frac{t_0}{t_e}$$

$$\frac{t_e}{t_0} = \frac{1}{(1 + z)^{3/2}}. \quad (1.99)$$

Portanto, utilizando a expressão acima para a distância comóvel:

$$D_c = \frac{2c}{a_0 H_0} \left[1 - (1 + z)^{-1/2} \right]. \quad (1.100)$$

Combinando as equações (1.93) e (1.100):

$$\theta = \frac{H_0 D}{2c} \left[\frac{(1 + z)}{1 - (1 + z)^{-1/2}} \right]. \quad (1.101)$$

Derivando em relação a z :

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{H_0 D}{2c} \left\{ \frac{1 - \frac{3}{2}(1 + z)^{-1/2}}{[1 - (1 + z)^{-1/2}]^2} \right\}.$$

Com o propósito de encontrar z e verificar se há um valor mínimo para θ , façamos $\frac{d\theta}{dz} = 0$, daí ficamos com

$$z = \frac{5}{4}.$$

Como $z = 5/4$ é um valor muito pequeno, então, θ é decrescente, caso contrário, ou seja, z sendo muito maior que 1, seria crescente. Portanto, $z = 5/4$ é um mínimo para θ .

Calculando o ângulo θ quando $z = 5/4$, temos

$$\theta_{min} = \frac{27H_0D}{8c}. \quad (1.102)$$

Ao contrário do que se espera em um universo euclidiano, a dimensão angular não decresce com o redshift. Desse modo, no modelo de Einstein - de Sitter, o diâmetro angular observado por nós, de uma fonte de dimensão linear fixa, passa por um mínimo em $z_{min} = 5/4$ e, em seguida, volta a aumentar. Tal efeito pode ser interpretado como uma amplificação gravitacional provocada pela massa responsável devido a curvatura do espaço-tempo entre nós e o objeto emissor [23].

Analisando as equações (1.81) e (1.95), podemos concluir que para $z \ll 1$ teremos as distâncias própria, comóvel, de luminosidade e de diâmetro angular como equivalentes. Dessa forma, podemos verificar através da figura 1.2 que até um redshift $z = 0,1$ tais distâncias representam uma mesma reta do gráfico.

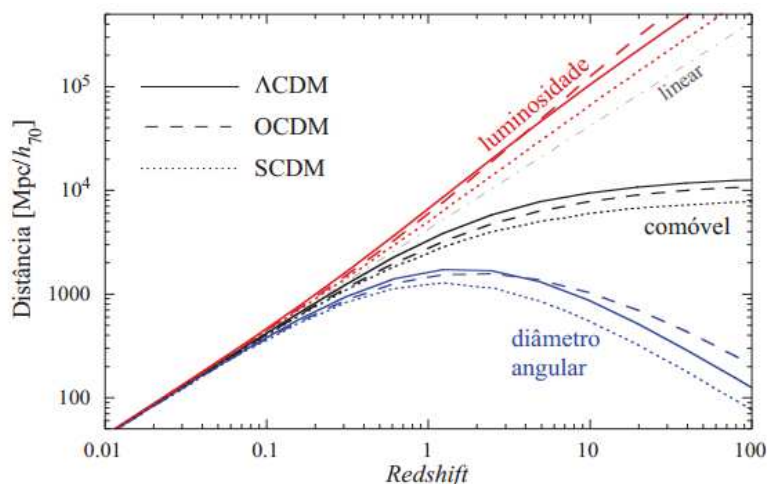


Figura 1.2: Comparação das distâncias comóvel, diâmetro angular e luminosidade para diferentes modelos cosmológicos. Λ CDM e SCDM são planos, OCDM é aberto, sem energia escura. Para um dado redshift, as distâncias em um Universo Λ CDM são sempre maiores do que em um universo plano sem energia escura. Note que o modelo OCDM tem um comportamento mais próximo de um Λ CDM. A linha ponto-traço fina mostra a relação linear entre redshift e distância, válida apenas para baixo z . Fonte: <http://www.astro.iag.usp.br/gastao/>.

1.7.3 Distância do Horizonte de Partículas

O horizonte de um determinado local é definido como a maior distância observável, portanto, os fótons que percorrem uma distância maior que o horizonte não chegam ao observador, assim é o chamado horizonte de partículas, ou seja, se dois ou mais observadores estiverem separados por uma distância superior a distância do horizonte, então, estes não estão em contato causal. Para a distância comóvel do horizonte em um determinado instante temos

$$D_H(t) = \int_0^t \frac{cdt}{a(t)}. \quad (1.103)$$

Adotando um modelo de Einstein - de Sitter, com $k = 0$ e $a_0 = 1$:

$$D_H(t) = \frac{ct_0^{2/3}}{a_0} \int_0^t \frac{dt}{t^{2/3}} = 3c \underbrace{t_0^{2/3}}_{=t_0 t_0^{-1/3}} t^{1/3}. \quad (1.104)$$

Isolando t/t_0 em (1.96) e combinando com a equação acima, teremos:

$$D_H(t) = \frac{3ct_0}{\sqrt{1+z}}. \quad (1.105)$$

Ou seja, através da expressão acima podemos relacionar o redshift com a distância do horizonte de partículas. Assim, o horizonte de partículas é descrito por uma esfera em torno de um observador, logo se encontra a uma distância correspondendo ao raio do universo observável.

1.8 Matéria Escura e Energia Escura

Tendo em vista as diversas dúvidas em relação ao movimento orbital de galáxias dentro de aglomerados, os quais contém cerca de centenas ou até milhares de galáxias, como exemplos, o aglomerado de Coma e de Virgem, os cientistas concluíram que as velocidades das galáxias eram incompatíveis com a massa deduzida através da radiação

eletromagnética, ou seja, tais galáxias orbitavam numa velocidade bastante superior a esperada [13].

Em relação a massa do aglomerado, esta pode ser deduzida através do Teorema do Virial que consiste na hipótese das galáxias no interior do aglomerado terem atingido um estado de equilíbrio orbital, assim, cujas propriedades não variam no tempo [24]. Dessa maneira, a soma da energia potencial gravitacional das partículas com o dobro da energia cinética é nula, portanto

$$E_G + 2E_C = 0, \quad (1.106)$$

onde E_G é a energia potencial gravitacional e E_C é a energia cinética.

Diante de tal situação, os estudiosos acreditavam que haveria uma quantidade de massa muito maior do que a deduzida, porém, que não fosse possível interagir com a luz, a essa massa foi dado o nome de matéria escura. Então, podemos inferir que deve haver mais matéria nas galáxias do que a que podemos observar através de sua radiação.

A existência da matéria escura foi inicialmente percebida em 1934 pelo astrônomo suíço Fritz Zwicky ao estudar os aglomerados de galáxias [13], porém, apenas na década de 70, devido a precisão dos dados observacionais, iniciou-se mais acentuadamente seu estudo pelos cientistas. Nessa mesma década, Ford e Rubin descobriram que as velocidades das curvas de rotação das galáxias eram constantes ou crescentes em regiões fora da região visível, portanto, corpos que orbitam no centro da galáxia, ou seja, fora da região visível, apresentam velocidade constante como representada na figura 1.3.

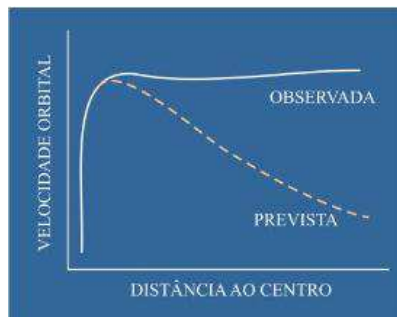


Figura 1.3: Velocidades orbitais previstas e observadas de algumas estrelas em relação ao centro da galáxia.

Outro fenômeno o qual podemos atribuir a matéria escura trata-se do efeito das lentes gravitacionais. Tal efeito consiste no desvio da radiação eletromagnética em virtude de matéria entre a fonte e o observador, resultando assim, numa posição aparente da fonte, como mostra a figura 1.4 ou ainda, originando duas imagens de uma única fonte.

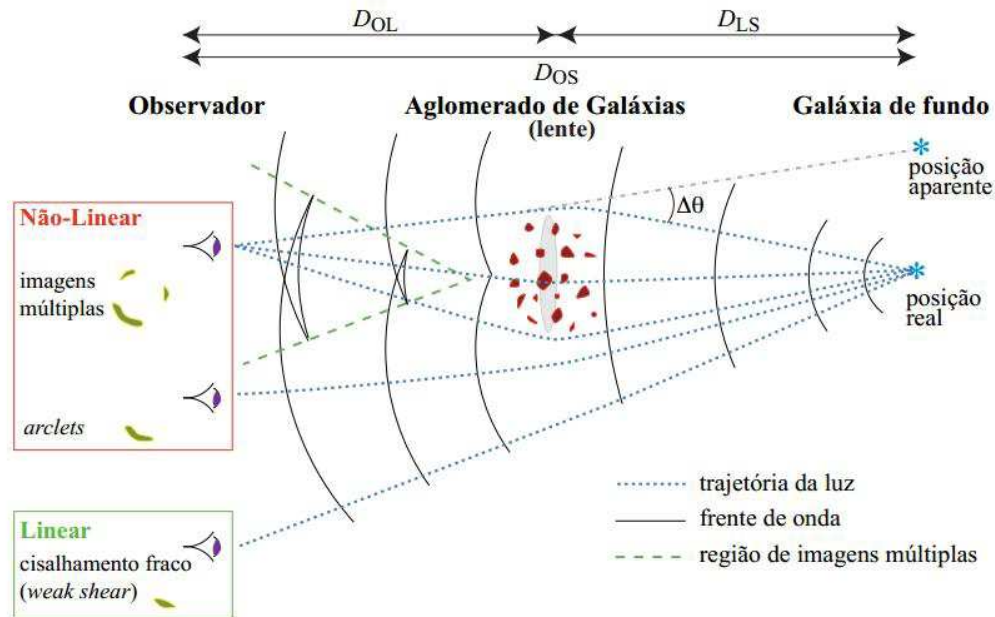


Figura 1.4: Demonstração do efeito das lentes gravitacionais produzidas por um aglomerado de galáxias. Fonte: <http://www.astro.iag.usp.br/gastao/>.

Um fato interessante sobre as lentes gravitacionais está relacionado ao seu bilho superficial, ou seja, como ocorre uma alteração no tamanho da imagem, então, o fluxo observado também se altera, assim, a imagem pode ser mais brilhante que a fonte [25]. Dessa maneira, aglomerados de galáxias podem ser utilizados como telescópios gravitacionais ao ampliar o brilho das galáxias mais distantes.

Diante de tais evidências, podemos constatar que há uma grande quantidade de matéria responsável pela deflexão da luz durante a observação de uma fonte e, quando esta não interage com a radiação eletromagnética podemos afirmar sobre a existência de matéria escura.

Por outro lado, além da matéria escura, o universo também apresenta outros fenôme-

nos os quais não estão ligados intimamente com a radiação eletromagnética. Sabendo que o universo está se expandindo aceleradamente, segundo os estudos da luminosidade das Super Novas Tipo Ia [22][27], deve haver uma energia responsável por tal aceleração, a essa energia ainda desconhecida damos o nome de energia escura. Tal energia contrabalança a atração gravitacional, portanto, deve ter uma pressão negativa.

Dentre os modelos de energia escura já estudados pela comunidade científica temos o da constante cosmológica, conhecido como modelo Λ CDM, vista também como densidade de energia do vácuo, mostrando-se consistente em grande parte das observações.

Apesar de ser o maior candidato a energia escura, a constante cosmológica também apresenta alguns problemas em relação a escala necessária para a expansão cósmica [28]. Dessa maneira, considerando a densidade de energia do vácuo como um fluido perfeito e sua energia sendo calculada pela Teoria Quântica de Campos, logo, estudos demonstram que os resultados divergem quando comparados aos obtidos com a Teoria da Relatividade Geral.

Contudo, para um modelo Λ CDM, as equações de Friedmann são descritas por:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_m}{a^3} \right) - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.107)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi}{3} \left(2\frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_m}{a^3} \right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.108)$$

Portanto, para que o universo apresente uma expansão acelerada, temos que:

$$\Lambda > 4\pi \left(2\frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_m}{a^3} \right).$$

1.9 Radiação Cósmica de Fundo (CMB)

A ideia do universo apresentar em toda sua extensão uma radiação de corpo negro foi prevista por George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman em 1948, e quanto ao

brilho desta radiação, segundo a lei de Planck, é dada por [25]

$$B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (1.109)$$

Entretanto, somente em 1965, os americanos Arno Penzias e Robert Wilson, com base em vários testes de um detector de microondas, publicaram a descoberta da radiação cósmica de fundo com 4080 Mhz [14][15]. Contudo, os americanos Bob Dicke e Jim Peebles, considerando as ideias de Gamow, as quais relatam que a separação das galáxias deveria ter sido bem menor no passado, assim, com um universo primordial denso e quente, deduzem que, em razão da expansão do universo, esta radiação estaria se apresentando hoje para nós em faixas de microondas. Dessa forma, podemos afirmar que a radiação cósmica de fundo em microondas nos mostra, de forma geral, o universo primordial [17].

Sendo a temperatura da radiação cósmica de fundo para $z = 0$ como correspondendo a hoje, então, para redshifts maiores teremos uma temperatura superior a $T(z = 0)$. Conforme medições de algumas temperaturas em função do redshift temos $T \approx 12,2K$ com $z = 3,025$ na direção do QSO 0347-3819 medida por Levshakov et al. (2002) correspondendo ao valor esperado de $T \approx 10,9K$ e, Cui et al. (2005) que obtiveram $T \approx 7,2K$ em $z = 1,77$ na direção do Q1331+170, assim, correspondendo as expectativas de $T \approx 7,5K$ [25].

Em virtude do efeito Doppler, temos que a temperatura da radiação cósmica de fundo depende da velocidade relativa do observador, portanto, para uma temperatura medida, baseada na emissão do corpo negro, temos

$$T_{obs}(\theta) = T \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos\theta}, \quad (1.110)$$

onde $\beta \equiv v/c$ com v sendo o módulo e θ a direção do vetor velocidade do observador.

Fazendo uma expansão da equação anterior para $\beta \ll 1$ e considerando a identidade $2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$:

$$T_{obs}(\theta) = T \left[1 + \frac{v}{c} \cos\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \cos(2\theta) + \dots \right], \quad (1.111)$$

onde o primeiro termo refere-se a um dipolo cinemático e medido pela primeira vez por Conklin (1969), Henry (1971), Smoot, Gorenstein e Muller (1977), isso em decorrência do movimento da Terra em relação à radiação cósmica de fundo.

Em relação a variação observada da temperatura, temos para seu espectro

$$B_{\nu,obs}(\theta, T_{obs}) \approx B_{\nu}(T_{CMB}) + \frac{v}{c} T_{CMB} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial T} \cos\theta. \quad (1.112)$$

Em decorrência da subtração do efeito do dipolo cinemático, a radiação cósmica de fundo apresenta flutuações da ordem de $10^{-5}K$, também chamada de anisotropias. Assim, sendo detectadas inicialmente pelo satélite COBE (Smoot et al., 1992). Em seguida, novos estudos também foram realizados com os satélites WMAP e Planck. Essas anisotropias que correspondem a variações de temperaturas em diferentes regiões do céu estão relacionadas com as flutuações na densidade de matéria do universo primordial.

Dentre os satélites lançados com o propósito de obter medições cada vez mais precisas, o satélite WMAP se destacou bastante. Na figura 1.5 temos alguns parâmetros cosmológicos vinculados pelas medições do WMAP juntamente com outros resultados, dessa forma, a reta corresponde aos valores nos quais $\Omega_m + \Omega_{\Lambda} = 1$. Observando somente os dados do WMAP, podemos verificar que as condições apontam para um universo não plano, por outro lado, quando cruzados com resultados de outros dados há indícios de um universo plano.

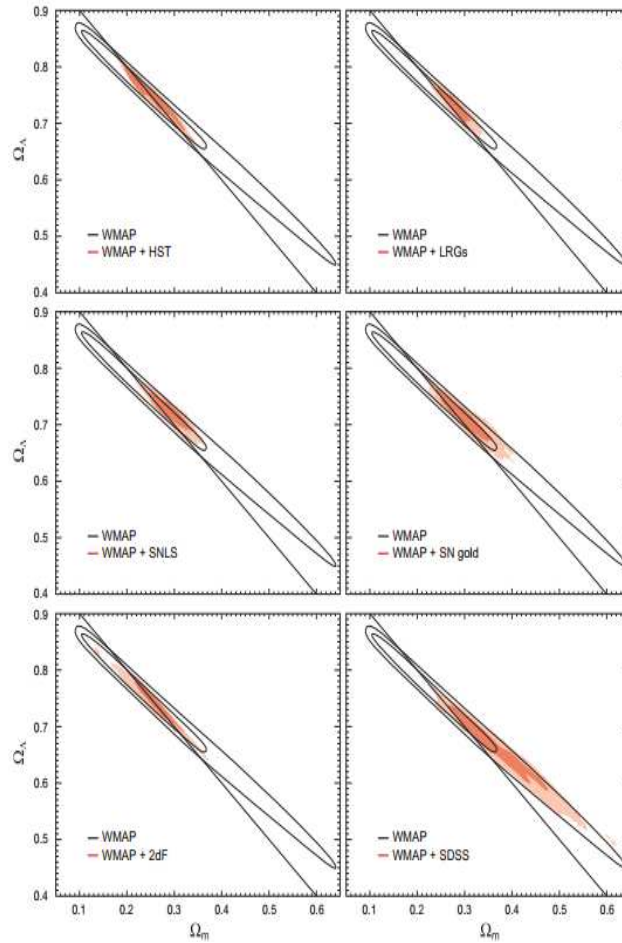


Figura 1.5: Cruzamento dos resultados das medições de parâmetros cosmológicos do satélite WMAP com outros experimentos astronômicos. A reta na figura corresponde aos valores nos quais $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. As análises correspondem aos dados do WMAP (contorno preto) e WMAP + outros conjuntos de dados (vermelho). Nestes contornos não são assumidos a priori $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Os dados apenas do WMAP favorecem cosmologias com $\Omega_m = 0,415$ e $\Omega_\Lambda = 0,630$, ou seja, universo não plano, entretanto, quando cruzados com outros conjuntos de dados há um favorecimento para um universo plano. Fonte: <https://portugues.free-ebooks.net/ebook/Analogos-classicos-para-cosmologias-relativisticas-aceleradas-uma-abordagem-lagrangiana>.

1.10 Problemas com o Modelo Cosmológico Padrão

Também conhecido como modelo do Big Bang quente, o modelo cosmológico padrão, apesar de seu alto grau de aceitação pela comunidade científica, apresenta alguns problemas os quais estão associados a incompatibilidade com a teoria de partículas elementares, ou seja, necessitou-se de uma abordagem física que estivesse voltada para as condições iniciais do universo.

1.10.1 Problema da Singularidade

Como já mencionado anteriormente, sabemos que a densidade de energia do universo deve ter sido infinita considerando $t \rightarrow 0$, porém, não se tem modelos que compreendem $t < 0$, assim, não sabemos da origem do universo.

Há hipóteses de que houve um período com predominância de efeitos gravitacionais quânticos em lugar do modelo padrão para uma densidade do universo maior que o valor limite. Dessa maneira, a escala de energia deve ter correspondido ou superado a massa de Planck, dada por

$$M_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV.}$$

Considerando a idade do universo como o tempo de Planck:

$$t_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5,39 \times 10^{-44} \text{ seg.}$$

A partir desse instante, temos um universo com as condições iniciais seguida das equações de Friedmann.

1.10.2 Problema da Planura

Os cientistas acreditam que o valor de Ω_0 é aproximadamente 1, ou seja, a densidade do universo é próxima a densidade crítica. Daí, surgem as questões do motivo da coincidência, em outras palavras, Ω_0 poderia assumir um valor relativamente superior ou inferior a 1. No entanto, o problema se agrava quando deduzimos que se o universo apresenta uma densidade próxima a crítica hoje, então, tal densidade dever ter sido ainda mais próxima a crítica em períodos mais remotos.

Podemos analisar o problema da planura a partir da equação (1.42), e considerando-a num tempo presente, temos

$$\Omega_0 - 1 = \frac{k}{a_0^2 H_0^2}.$$

Igualando o parâmetro k em ambas as equações, ficamos com

$$\Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{a_0^2 H_0^2}{a^2 H^2} = (\Omega_0 - 1) \frac{\dot{a}_0^2}{a^2}. \quad (1.113)$$

Assim, dados observacionais apontam que $(\Omega_0 - 1)$ é bastante pequeno de modo que o universo apresenta uma geometria muito próximo da planura hoje. Contudo, a equação acima exige que o universo tenha sido cada vez mais plano a medida que consideramos um passado mais remoto. Assim, configura-se o problema da planura.

Sabendo que $\rho_r \propto a^{-4}$ e $T \propto a^{-1}$, então, comparando os parâmetros do período de Planck com o tempo presente, ficamos com

$$\frac{|\Omega - 1|_{t=t_P}}{|\Omega_0 - 1|} \approx \frac{a_P^2}{a_0^2} \approx \frac{T_0^2}{T_P^2}. \quad (1.114)$$

Com isso, sabendo que $T_P \approx 10^{19}$ GeV e $T_0 \approx 10^{-13}$ GeV, ou seja, para a razão entre as temperatura, temos um valor da ordem de 10^{-64} , enquanto que para $(\Omega_0 - 1) \approx 1$, conseqüentemente, $(\Omega - 1)$ deve ser bastante pequeno, com valores bem próximos de zero.

1.10.3 Problema do Horizonte

Considerando que dois pontos no universo estão causalmente conectados somente se houve tempo suficiente para que o fóton de um ponto atinja o outro, ou seja, tendo em vista que a radiação cósmica de fundo apresenta quase a mesma temperatura em toda extensão do universo observável, logo, regiões desconectadas no passado não teriam como apresentar características semelhantes.

Assim, partindo das definições de distância própria e horizonte de partículas mencionados anteriormente, consideremos dois pontos opostos, cuja distância para um observador é igual ao horizonte de partículas. Então, a distância entre esses dois pontos corresponde a uma distância própria $D_P(t_0) = 2D_H(t)$ e, portanto, esses pontos não podem se comunicar no universo, ou ainda, não podem estar em equilíbrio térmico.

Desde que as inhomogeneidades não podem ser dissolvidas durante a expansão cósmica, o universo homogêneo e isotrópico no presente deve ser consequência de uma região de homogeneidade e isotropia inicial, de modo que o comprimento físico

$$l(t) \equiv D_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a},$$

para um instante inicial $t = t_i$, pode ser escrito como

$$l_i \approx t_0 \frac{a_i}{a_0},$$

uma vez que para o universo primordial vale $l_0 \approx t_0 \approx D_H(t_0)$.

Se compararmos esse resultado com o comprimento físico causal $l_C \approx t_i \approx D_H(t_i)$, então

$$\frac{l_i}{l_C} \approx \frac{t_0 a_i}{t_i a_0}.$$

Assim, considerando condições iniciais associadas à escala de Planck, ou seja, $T_P \approx 10^{32}K$ e $t_P \approx 10^{-43}$ seg e sendo

$$\frac{a_i}{a_0} \approx \frac{T_0}{T_P} \approx 10^{-32},$$

e para a idade do universo estimada em $t_0 = 10^{17}seg$, temos

$$\frac{l_i}{l_C} \approx \frac{10^{17} \cdot 10^{-32}}{10^{-43}} \approx 10^{28}. \quad (1.115)$$

Dessa forma, o tamanho do universo é inicialmente muito maior que o tamanho da região causal, porém, a teoria do Big Bang quente afirma que a expansão do universo primordial é desacelerada, decorrente da gravidade ser sempre atrativa, portanto, a região causal é sempre maior que o universo observável. Assim, é definido o problema do horizonte.

Capítulo 2

Inflação Cósmica

A Teoria da Inflação Cósmica foi formulada, em 1981, pelo físico Alan Guth com o propósito de solucionar os problemas apresentados pelo Modelo Cosmológico Padrão relacionados às condições iniciais do universo primordial [18]. Assim, Guth ressaltou que o universo passou por uma fase de expansão acelerada na qual a densidade de energia predominante correspondia a de um campo escalar ϕ , denominado ínflaton [19][20]. Dessa maneira, ao final do período de inflação, o universo passaria por uma fase de reaquecimento que refere-se ao momento em que o campo atingisse um valor mínimo, em seguida, haveria um aumento da entropia dando início a criação de partículas e originando um novo universo cujas condições podem ser esclarecidas pela teoria do Big Bang quente.

Como pesquisador da teoria de física de partículas, Guth baseia suas ideias na física do estado sólido e em mecânica estatística. Então, com o intuito de resolver o problema dos monopolos magnéticos que consistia em sua abundância não se apresentar relativamente igual ao de um monopolo por bárion, ele faz referência as propriedades das teorias de grande unificação das forças, notando que esta previa a criação de uma grande quantidade de tais monopolos magnéticos. Contudo, Guth notou que para resolver esse problema deveria haver uma quebra de simetria associada a um campo escalar, fazendo com que o universo passasse por uma rápida expansão sendo a responsável pelo desaparecimento dos monopolos magnéticos.

Portanto, podemos afirmar que a inflação compreende duas fases, sendo uma dominada pelo campo escalar ϕ e a outra se remetendo ao reaquecimento, ou seja, com o decaimento de ϕ .

Assumindo que a dinâmica do universo é governada pelas equações de Friedmann, considerando uma fase de expansão acelerada, ou seja, $\ddot{a} > 0$, então, a equação da aceleração $\ddot{a}/a = -(\rho + 3p)/3$ mostra que para um regime inflacionário, temos $\omega < -1/3$. Supondo a inflação como uma fase dominada pela constante cosmológica, teremos para as equações de Friedmann:

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3}$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} > 0,$$

de modo que o fator de escala evolui exponencialmente com o tempo físico, desse modo:

$$a \propto \exp(Ht).$$

Também vale frisar que a fase inflacionária não trata-se de um modelo padrão, também há hipóteses de campos vetoriais, branas, teorias de cordas, lagrangeanas não-canônicas, gravitação modificada e outros [21]. Por outro lado, a ideia de um campo escalar submetido a um potencial foi a que se apresentou mais satisfatória dentre os outros modelos. Contudo, é frequente a busca de uma forma de potencial que iniciasse o regime inflacionário e solucionasse os problemas do modelo padrão.

2.1 Resolvendo o Problema da Planura

O espectro de flutuações na temperatura da Radiação Cósmica de Fundo, juntamente com medidas do valor atual do parâmetro de Hubble favorecem que $\Omega_k \approx 0$, ou seja, fazendo-se uma aproximação, o universo apresenta geometria plana.

Sabendo que a evolução do parâmetro de densidade é dada por

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.1)$$

se $a \propto e^{Ht}$, então, $|\Omega - 1| \propto e^{-2Ht}$.

Considerando instantes inicial e final:

$$|\Omega_f - 1| = e^{-2H(t_f - t_i)} |\Omega_i - 1|.$$

Desse modo, mesmo que o universo esteja fora da planura no início do regime inflacionário, se decorridos um número, por exemplo, de $100H(t_f - t_i)$ para a duração da inflação, temos [29]

$$|\Omega_f - 1| \approx e^{-200},$$

e o universo no fim da inflação é muito próximo da planura. Contudo, faz-se necessário que $H(t_f - t_i)$ seja de acordo com a literatura, assim, com valor da ordem de 75 [29], podendo ser ainda maior, desde que os dados observacionais sejam consistentes com um parâmetro de densidade muito próximo da unidade hoje, ou seja, $|\Omega_0 - 1| \ll 1$.

2.2 Resolvendo o Problema do Horizonte

Sabendo que o horizonte de partículas é dado por:

$$d_{hor}(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a}.$$

Considerando a fase dominada por radiação, temos que

$$d_{hor}(t_i) = a_i \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i \left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}} = 2t_i.$$

Onde para o fim do regime inflacionário:

$$d_{hor}(t_f) = a_i e^{H(t_f - t_i)} \left[\int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i \left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_i e^{H(t - t_i)}} \right].$$

Resultando em [15]:

$$d_{hor}(t_f) = e^{H(t_f - t_i)} (2t_i + H^{-1}).$$

Daí, admitindo $H^{-1} = t_i$, então:

$$d_{hor}(t_f) = e^{H(t_f - t_i)} (3t_i).$$

Com o fim do período inflacionário, o horizonte volta a crescer linearmente com o tempo. Dessa maneira, o período inflacionário torna possível o contato causal por um fator $e^{H(t_f - t_i)}$.

Em outras palavras, a inflação inicia quando o universo tem cerca de 10^{-34} seg e dura aproximadamente 10^{-32} seg, assim, nesse intervalo de tempo, a expansão do universo corresponde a aproximadamente $e^{60} \approx 10^{26}$. Portanto, desde a nucleossíntese primordial até o instante presente expande de um fator em torno de 10^{14} [25].

2.3 O Ínflaton

Considerando um modelo dinâmico para a energia escura, onde um campo escalar homogêneo e isotrópico responde pela aceleração cósmica do universo, daí, para uma ação de Einstein-Hilbert, temos

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right), \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ é a lagrangeana do campo ϕ , definida por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.3)$$

sendo $V(\phi)$ o potencial associado ao campo ϕ .

Variando a ação em relação à métrica, teremos o tensor energia-momento, dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.4)$$

Agora, determinando as densidades de energia e pressão do campo escalar, ou seja,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.5)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.6)$$

Portanto, para a equação de estado, temos

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (2.7)$$

Utilizando os resultados obtidos nas expressões (2.5) e (2.6), podemos reescrever as equações de Friedmann como

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) - \frac{k}{a^2} \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) + 3 \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) \right], \quad (2.9)$$

lembrando que o parâmetro de Hubble é dado por $H = \dot{a}/a$, então, calculando sua derivada

temporal, ficamos com

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}\dot{a}}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2},$$

combinando a equação acima com as equações de Friedmann, então

$$\dot{H} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p) - \frac{2}{3}\rho + \frac{k}{a^2}.$$

Fazendo $\rho = \rho_\phi$ e $p = p_\phi$, e considerando um modelo plano, teremos:

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (2.10)$$

Relacionando as equações (2.8) e (2.10), podemos encontrar o potencial associado, assim,

$$V = \frac{3}{2}H^2 + \frac{1}{2}\dot{H}. \quad (2.11)$$

Em temperaturas mais elevadas o potencial associado ao ínflaton possui um ponto de equilíbrio quando $\phi = 0$. Conforme a temperatura diminui, o potencial começa a desenvolver um segundo ponto de equilíbrio como representado na figura 2.1.

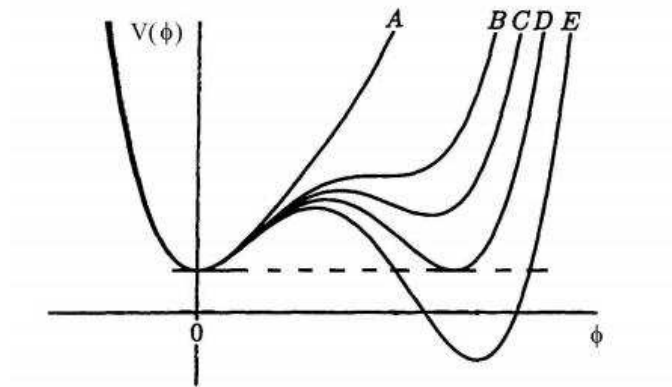


Figura 2.1: Potencial do campo escalar. A curva "A" apresenta apenas um ponto de equilíbrio, isso ocorre a altas temperaturas. As curvas "B", "C" e "D" apresentam um segundo ponto de equilíbrio com a queda da temperatura. A curva "E" apresenta um segundo ponto de equilíbrio, porém, em um ponto abaixo da temperatura crítica. Fonte: OLIVEIRA, M. C. B., 2010.

Abaixo de uma certa temperatura crítica este novo ponto de equilíbrio tornou-se o ponto de equilíbrio estável, também chamado vácuo verdadeiro, e o anterior tornou-se um ponto de equilíbrio metaestável, ou falso vácuo [21], conforme a figura 2.2.

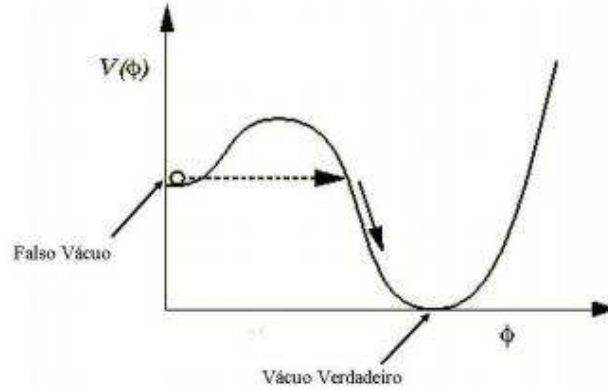


Figura 2.2: Potencial do campo escalar. Em $\phi = 0$, o campo se encontra no estado de falso vácuo. Abaixo da temperatura crítica o campo se encontra no estado de vácuo verdadeiro. Fonte: OLIVEIRA, M. C. B., 2010.

Desse modo, é possível que haja um tunelamento do campo escalar do estado de falso vácuo para o verdadeiro vácuo. Em certas regiões do universo, este tunelamento ocorrerá, e o campo passará a ocupar o ponto de equilíbrio estável do potencial [14]. A fronteira entre estes dois estados corresponde a uma região na qual a energia se apresenta na forma de calor latente [30][31].

Considerando a métrica de FLRW, temos para o determinante:

$$g = -a^6 \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3,$$

e de acordo com a equação (2.3), vem que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial^0 \phi - V(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.12)$$

Tendo em vista a equação de Euler-Lagrange, dada por

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.13)$$

Portanto, através das equações (2.12) e (2.13), então,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}. \quad (2.14)$$

Assim, fazendo uso do determinante da métrica de FLRW e substituindo a equação (2.12) em (2.14), teremos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (2.15)$$

a qual representa a equação de movimento do campo ínflaton, ou seja, é a equação de Klein-Gordon remetendo a dinâmica de campos escalares, onde o índice ϕ descreve a derivada em relação ao campo.

A equação de movimento também pode ser obtida substituindo-se as equações (2.5) e (2.6) na equação de continuidade (1.28).

2.4 Rolagem Lenta (Slow-Roll)

A aproximação de rolagem lenta consiste em assumir que a energia cinética do campo ínflaton é muito menor que sua energia potencial, ou seja,

$$\dot{\phi} \ll V(\phi), \quad (2.16)$$

assim, para a equação de estado do caso em questão, temos

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} \approx -1.$$

Nessa situação, o ínflaton se comportaria como a equação de estado de uma constante

cosmológica, em outras palavras, a expansão do universo seria quase exponencial. Dessa forma, a equação de expansão de Friedmann para um universo plano é dada por

$$H^2 \approx \frac{2}{3}V(\phi). \quad (2.17)$$

Conseqüentemente, considerando também que a aceleração do ínfaton seja muito menor que sua velocidade, então,

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}, \quad (2.18)$$

sendo $3H\dot{\phi}$ um termo de viscosidade responsável pela rolagem lenta do campo ínfaton em direção ao mínimo do potencial. Portanto, de acordo com a equação de movimento (2.15), temos

$$\dot{\phi} \approx -\frac{V_\phi}{3H}. \quad (2.19)$$

Partindo do conceito de inflação, vem que $\ddot{a} > 0$, daí, como descrito anteriormente,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 \Rightarrow 1 > -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.20)$$

Agora, introduzindo dois termos $\epsilon(\phi)$ e $\eta(\phi)$ como parâmetros para as condições de rolagem lenta e definindo a massa reduzida de Planck como $M_P \equiv (8\pi G)^{-1/2}$, assim, para a equação (2.17), temos

$$H^2 = \frac{V(\phi)}{3M_P^2}. \quad (2.21)$$

Combinando as equações (2.10), (2.19) e (2.21), ficamos com

$$\dot{H} = \frac{V_\phi^2}{3} \frac{M_P^2}{V(\phi)} \quad (2.22)$$

e definindo $\epsilon(\phi) \equiv \frac{\dot{H}}{H^2}$, teremos

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{2} \left[\frac{V_\phi}{V(\phi)} \right]^2 \ll 1. \quad (2.23)$$

De maneira análoga, considerando $\ddot{\phi} \ll V_\phi$, então, para a definição de $\eta(\phi)$, temos:

$$\eta(\phi) = M_P^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V(\phi)} \ll 1, \quad (2.24)$$

onde o índice $\phi\phi$ representa a derivada segunda em relação ao campo. Sendo os termos $\epsilon(\phi)$ e $\eta(\phi)$ definidos como parâmetros de rolagem lenta.

Como a inflação cósmica nos remete a uma expansão acelerada, então, deve haver um resfriamento seguido de um aquecimento no qual corresponde a formação de estruturas. Dessa forma, a rolagem lenta ocorre quando o potencial $V(\phi)$ domina o termo de energia cinética $\dot{\phi}^2/2$ como demonstrado na figura 2.3. Após o período de aquecimento inicia-se a era da radiação.

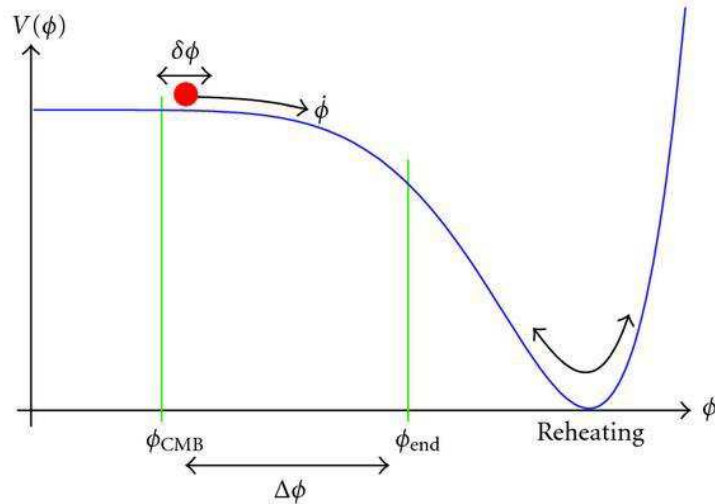


Figura 2.3: Potencial do inflaton no regime de rolagem lenta (slow-roll). Nesse caso, o potencial domina o termo cinético. Após o campo inflaton atingir seu ponto mínimo, há um aquecimento dando início a era da radiação. Fonte: BAUMANN, D. TASI lectures on inflation. ArXiv 0907.5424, jul. 2009. 30, 31, 32, 37, 41.

Na teoria da velha inflação o aquecimento ocorre em virtude da transição de fase onde o ponto da temperatura crítica resulta num período de surgimento de bolhas cujas colisões transformam a energia cinética em energia térmica. Tal teoria estudada por Alan Guth em Teorias de Grande Unificação não considera a inflação das próprias bolhas [29]. Contudo, a teoria da nova inflação admite que esta ocorre somente após a transição de

fase gerando modelos dependendo das condições iniciais do potencial.

Sabendo que o potencial é dado por $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, então podemos reescrever a equação (2.19) como

$$3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0, \quad (2.25)$$

e considerando a equação (2.17), vem que:

$$H^2 = \frac{1}{3}m^2\phi^2 \Rightarrow H = \frac{1}{\sqrt{3}}m\phi. \quad (2.26)$$

Assim, substituindo a equação (2.26) em (2.25), e dividindo ambos os membros por ϕ e m , temos

$$\frac{3}{\sqrt{3}}\dot{\phi} + m = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}m. \quad (2.27)$$

Integrando a expressão acima,

$$\phi = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}mt + \underbrace{\text{constante}}_{=\phi_i}. \quad (2.28)$$

O resultado acima refere-se ao campo escalar ínflaton. Assim, podemos notar que seu valor varia linearmente com tempo nos dando a possibilidade de obter duas retas representadas na figura 2.4.

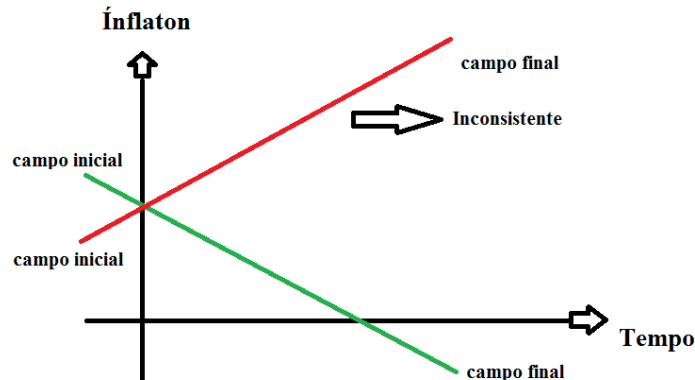


Figura 2.4: Variação do campo escalar ínflaton em relação ao tempo.

No entanto, de acordo com a equação (2.28) temos que $\phi_{inicial} > \phi_{final}$ nos informando sobre a inconsistência da reta onde $\phi_{inicial} < \phi_{final}$.

Substituindo a equação (2.28) em (2.26), teremos

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}}m \left(\mp \frac{\sqrt{3}}{3}mt + \phi_i \right)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \mp \frac{1}{3}m^2t + \frac{1}{\sqrt{3}}m\phi_i.$$

Fazendo $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{d(\ln a)}{dt}$, logo, $\ln a = \int_0^t \frac{\dot{a}}{a} dt$, então,

$$\ln a = \mp \frac{1}{3}m^2 \left(\frac{t^2}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}}m\phi_i t + \text{constante}.$$

Portanto, teremos para o fator de escala:

$$a(t) = a_0 \exp \left[\mp \frac{1}{6}m^2 t^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}m\phi_i t + \text{constante} \right]. \quad (2.29)$$

Dessa forma, vemos que o fator de escala varia exponencialmente com o tempo.

Capítulo 3

Modelos Inflacionários

No desenvolvimento de um modelo inflacionário precisamos propor uma teoria que conecte o fim deste período com o início da era da radiação, assim, determinando a forma do potencial responsável por tal transição. Há dois tipos de classes de modelos inflacionários sendo um possuindo apenas um campo escalar (ínflaton) onde sua dinâmica é descrita por um potencial $V(\phi)$, e outro que além do campo escalar ínflaton também apresenta o campo escalar Jordan-Brans-Dicke [32][33].

3.1 Modelos com Campo Simples

Os modelos inflacionários com campo simples correspondem aos casos onde há apenas um campo escalar, o ínflaton. Este campo rola vagorosamente partindo de um valor inicial ϕ_i para um final ϕ_f atingindo assim, seu valor mínimo em virtude da influência de seu potencial $V(\phi)$. No caso do ínflaton, seu valor de mínimo pode ser maior ou menor que seu valor inicial [32]. Assim, o final da inflação se satisfaz quando cessam as condições de rolagem lenta, ou seja, ao se atingir esse ponto de mínimo, daí, da-se início a era da radiação.

3.1.1 Inflação Caótica

A inflação caótica é composta por um campo escalar ínflaton acoplado à gravidade, o qual o potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (3.1)$$

Portanto, das definições dos parâmetros de rolagem lenta nas equações (2.23) e (2.24), temos

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{m^2\phi}{\frac{1}{2}m^2\phi^2} \right)^2 = \frac{2M_P^2}{\phi^2}, \quad (3.2)$$

e também,

$$\eta(\phi) = M_P^2 \left(\frac{m^2}{\frac{1}{2}m^2\phi^2} \right) = \frac{2M_P^2}{\phi^2}. \quad (3.3)$$

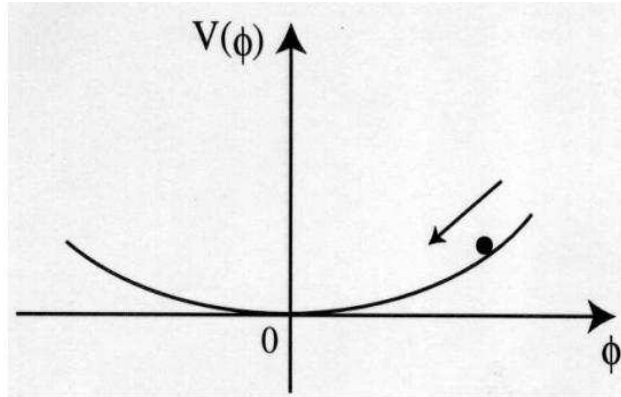


Figura 3.1: Potencial do modelo de inflação caótica. O campo ϕ se comporta como um oscilador harmônico oscilando no ponto de mínimo. Fonte: FIGUEIRO, M. F., 2005.

Assim, para o mínimo deste potencial temos que $\phi = 0$, ou seja, o campo ϕ se comportaria como um oscilador harmônico oscilando neste ponto de mínimo, como demonstrado na figura 3.1. Nesse caso, o modelo é conhecido por apresentar um campo ínflaton de tal forma que este parte de um valor máximo e evolui em direção ao seu ponto de mínimo e sua equação de movimento será dada de forma análoga a equação (2.15), ou seja,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0, \quad (3.4)$$

sendo $3H\dot{\phi}$ considerado como um termo de amortecimento.

Para a equação de Friedmann, esta é representada por

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) + \frac{k}{a^2}. \quad (3.5)$$

Considerando que o campo ϕ seja suficientemente grande obedecendo à parametrização slow-roll, então, o termo de amortecimento também deve assumir valores elevados de forma que ϕ move-se lentamente. Assim, neste estágio, a densidade de energia do campo ϕ permanece quase constante e a expansão do universo se dá com uma velocidade bem maior do que na antiga teoria cosmológica [20].

Sabendo que o fator de escala deve apresentar um rápido crescimento, ao contrário do campo ϕ que cresce lentamente, então, valem as condições

$$\begin{cases} 3H\dot{\phi} \gg \ddot{\phi} \\ \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \gg \frac{1}{2} \dot{\phi}^2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Dessa maneira, reescrevendo as equações (3.4) e (3.5), ficamos, respectivamente, com

$$3H\dot{\phi} = -m^2\phi \quad (3.7)$$

e

$$H^2 = \frac{1}{3} m^2 \phi^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (3.8)$$

Consequentemente, após terminarem as condições de rolagem lenta, a inflação chega ao seu fim. Para este tipo de potencial o índice espectral é dado por

$$n(k) = 1 + 2\eta = 1 + 4 \frac{M_P^2}{\phi^2}. \quad (3.9)$$

Dessa forma, a informação sobre as flutuações da densidade de matéria é determinada pela amplitude das flutuações primordiais, ou seja, da inflação cósmica e do índice

espectral, que mede como as flutuações alteram-se com a escala, tal grandeza, de acordo com os dados observacionais do WMAP, se aproxima de 1.

3.1.2 Inflação com Potencial Quártico

Para esse modelo, o potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (3.10)$$

Para os parâmetros de rolagem lenta, ficamos com:

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{\lambda\phi^3}{\frac{\lambda}{4}\phi^4} \right)^2 = \frac{8M_P^2}{\phi^2} \quad (3.11)$$

e

$$\eta(\phi) = M_P^2 \left(\frac{3\lambda\phi^2}{\frac{\lambda}{4}\phi^4} \right) = \frac{12M_P^2}{\phi^2}. \quad (3.12)$$

Nesse caso, temos que a equação de estado pode ser escrita como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \lambda\phi^3 = 0. \quad (3.13)$$

E para a equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right) + \frac{k}{a^2}. \quad (3.14)$$

Daí, o índice espectral é representado por

$$n(k) = 1 + 24\frac{M_P^2}{\phi^2}. \quad (3.15)$$

3.1.3 Inflação Natural

Esse modelo é conhecido na literatura por apresentar inicialmente um campo máximo, neste caso, o potencial em questão é dado por

$$V(\phi) = m^4 \left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right], \quad (3.16)$$

sendo m e f duas escalas de massa.

Para os parâmetros de rolagem lenta, temos

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{2} \left\{ \frac{m^4 \left[-\sin \left(\frac{\phi}{f} \right) \frac{1}{f} \right]}{m^4 \left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right]} \right\}^2 = \frac{M_P^2}{2f^2} \left[\frac{\sin \left(\frac{\phi}{f} \right)}{1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right)} \right]^2 \quad (3.17)$$

e para $\eta(\phi)$,

$$\eta(\phi) = -M_P^2 \frac{\left[m^4 \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \frac{1}{f^2} \right]}{m^4 \left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right]} = -\frac{M_P^2}{f^2} \frac{\cos \left(\frac{\phi}{f} \right)}{\left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right]}, \quad (3.18)$$

portanto, percebemos que os parâmetros acima não dependem de m . A inflação inicia quando o ponto inicial do campo escalar ínflaton for aproximadamente nulo e após seu ponto de mínimo, ou seja, em $\phi_f = \pi f$, como podemos ver na figura 3.2, dando assim, início a era da radiação.

Para a equação de movimento, teremos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^4 \left[-\sin \left(\frac{\phi}{f} \right) \frac{1}{f} \right] = 0, \quad (3.19)$$

Reescrevendo a equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + m^4 \left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right] \right\} + \frac{k}{a^2}. \quad (3.20)$$

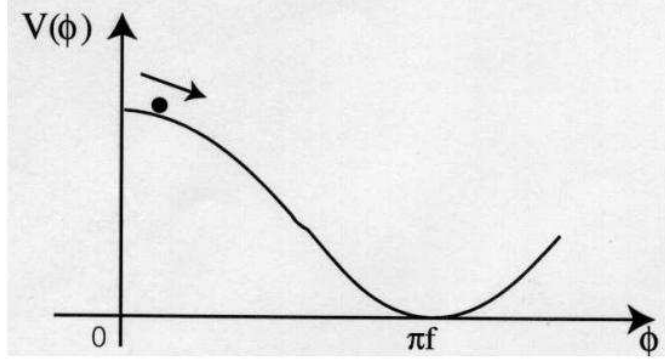


Figura 3.2: Potencial do modelo de inflação natural. Para este modelo, a inflação inicia quando o campo ϕ for aproximadamente nulo. Fonte: FIGUEIRO, M. F., 2005.

Considerando que no início da inflação temos as condições:

$$\begin{cases} 3H\dot{\phi} \gg \ddot{\phi} \\ m^4 \left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right] \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \end{cases} \quad (3.21)$$

então, para as equações de movimento e de Friedmann, teremos, respectivamente:

$$3H\dot{\phi} = m^4 \left[\sin\left(\frac{\phi}{f}\right) \frac{1}{f} \right] \quad (3.22)$$

e

$$H^2 = \frac{2}{3} \left\{ m^4 \left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right] \right\} + \frac{k}{a^2}. \quad (3.23)$$

Em relação ao índice espectral, ficaremos com

$$n(k) = 1 - 2 \left\{ \frac{M_P^2}{f^2} \frac{\cos\left(\frac{\phi}{f}\right)}{\left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right]} \right\}. \quad (3.24)$$

3.1.4 Inflação com Potencial Quadrático Invertido

Neste caso, o potencial é descrito por

$$V = V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots \quad (3.25)$$

Assim, para os parâmetros de rolagem lenta, temos

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{2} \frac{m^4\phi^2}{\left(V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots\right)^2} \quad (3.26)$$

e

$$\eta(\phi) = -M_P^2 \frac{m^2}{\left(V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots\right)}. \quad (3.27)$$

Utilizando esse potencial para as equações de movimento e de Friedmann, daí,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - m^2\phi = 0 \quad (3.28)$$

e

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots \right) + \frac{k}{a^2}. \quad (3.29)$$

Assim, para o índice espectral, vem que

$$n(k) = 1 + 2\eta = 1 - 2M_P^2 \frac{m^2}{\left(V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots\right)}. \quad (3.30)$$

3.1.5 Inflação com Potenciais de Terceira Ordem ou Superior

Considerando o potencial abaixo:

$$V(\phi) = V_0(1 - \mu\phi^p + \dots) \quad (3.31)$$

com $p \gg 3$, daí, para os parâmetros de rolagem lenta:

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{2} \frac{[-V_0 p \mu \phi^{p-1}]^2}{[V_0(1 - \mu \phi^p + \dots)]^2} = \frac{M_P^2}{2} \frac{V_0^2 p^2 \mu^2 \phi^{2(p-1)}}{V_0^2 (1 - \mu \phi^p + \dots)^2} \quad (3.32)$$

e

$$\eta(\phi) = M_P^2 \frac{[-p\mu(p-1)V_0\phi^{p-2}]}{V_0(1 - \mu \phi^p + \dots)}. \quad (3.33)$$

Escrevendo a equação de movimento, teremos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V_0 p \mu \phi^{p-1} = 0. \quad (3.34)$$

E da equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V_0(1 - \mu \phi^p + \dots) \right] + \frac{k}{a^2}. \quad (3.35)$$

Calculando o índice espectral:

$$n(k) = 1 + 2\eta = 1 - 2M_P^2 \frac{[-p\mu(p-1)V_0\phi^{p-2}]}{V_0(1 - \mu \phi^p + \dots)}. \quad (3.36)$$

3.1.6 Inflação com Outro Tipo de Potencial

Dado o potencial abaixo:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \exp\left(-q \frac{\phi}{M_P}\right) \right]. \quad (3.37)$$

Para os parâmetros $\epsilon(\phi)$ e $\eta(\phi)$, temos

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{2} \frac{q^2 V_0^2}{M_P^2} \exp\left(\frac{-2q\phi}{M_P}\right) \frac{1}{V_0^2 \left[1 - \exp\left(-q \frac{\phi}{M_P}\right) \right]^2} = \frac{q^2}{2} \frac{\exp\left(-\frac{2q\phi}{M_P}\right)}{\left[1 - \exp\left(-q \frac{\phi}{M_P}\right) \right]^2} \quad (3.38)$$

e

$$\eta(\phi) = -q^2 \frac{\exp\left(-q\frac{\phi}{M_P}\right)}{\left[1 - \exp\left(-q\frac{\phi}{M_P}\right)\right]}. \quad (3.39)$$

Assim, para a equação de movimento:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{qV_0}{M_P} \exp\left(\frac{-q\phi}{M_P}\right) = 0. \quad (3.40)$$

E para a equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V_0 \left[1 - \exp\left(-q\frac{\phi}{M_P}\right) \right] \right\} + \frac{k}{a^2}. \quad (3.41)$$

O índice espectral para o caso em questão é dado por

$$n(k) = 1 + 2\eta = 1 - 2q^2 \frac{\exp\left(-q\frac{\phi}{M_P}\right)}{\left[1 - \exp\left(-q\frac{\phi}{M_P}\right)\right]}. \quad (3.42)$$

3.2 Inflação Híbrida

A inflação híbrida é caracterizada pela ação de um segundo campo escalar, assim, dado abaixo um potencial de segunda ordem,

$$V(\phi, \psi) = V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}m_\psi^2\psi^2 + \frac{1}{4}\lambda\psi^4 + \frac{1}{2}\lambda'\psi^2\phi^2 \quad (3.43)$$

sendo $V_0 = m_\psi^2 M^2/4$ e $m_\psi^2 = \lambda M^2$, e λ e λ' são as constantes de acoplamento de auto interação do campo ψ e da interação dos campos escalares. Nesse modelo, o campo ψ permanece fixo até que ϕ atinja ϕ_c , em seguida, ψ é desestabilizado alcançando o vácuo verdadeiro, o que caracteriza o fim da inflação [20].

Na figura 3.3 podemos ver como se dá o comportamento do potencial em relação ao inflaton. Para este caso, a inflação ocorre sob o potencial quadrático

$$V = V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (3.44)$$

até que o campo escalar ínflaton alcance seu valor crítico.

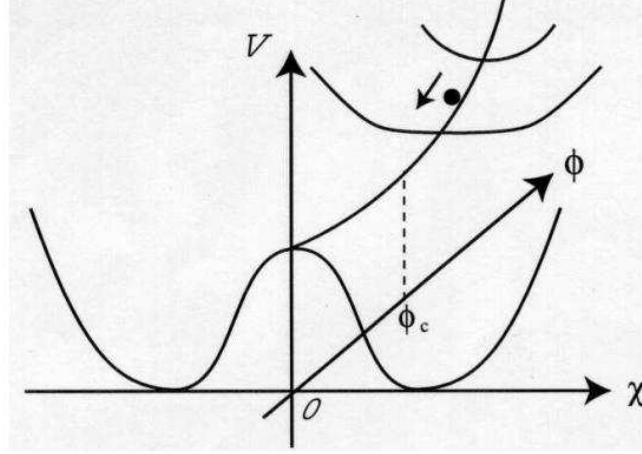


Figura 3.3: Potencial do modelo de inflação híbrida. Nesse modelo, o campo ψ permanece fixo até que ϕ atinja ϕ_c . Fonte: FIGUEIRO, M. F., 2005.

Dos parâmetros de rolagem lenta, ficamos com:

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{2} \left[\frac{m^2\phi}{V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2} \right]^2 \quad (3.45)$$

e

$$\eta(\phi) = M_P^2 \left[\frac{m^2}{V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2} \right]. \quad (3.46)$$

Quanto as equações de movimento de ambos os campos, temos:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \phi} = 0 \\ \ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + \frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \psi} = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

E na equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + V(\phi, \psi) \right] + \frac{k}{a^2}. \quad (3.48)$$

Capítulo 4

Acoplamento entre os Campos de Áxions e Eletromagnético como Candidato a Energia Escura

Observações recentes têm demonstrado que o universo é composto aproximadamente de 70% de energia escura e 20% de matéria escura [15]. Como descrito anteriormente, uma de suas maiores evidências está relacionada aos efeitos gravitacionais, como por exemplo, as velocidades orbitais das galáxias no aglomerado de Coma. Tendo em vista que há diversos modelos que buscam explicar a natureza da energia e matéria escuras [34], dentre estes também há aqueles que as abordam considerando campos escalares.

Em 1977 foi postulado por Roberto D. Peccei e Helen R. Quinn a existência de um bóson hipotético de spin zero, o áxion. Tendo em vista que a falta de violação de paridade(P) e carga paridade(CP) nas interações fortes é conhecida como "o grande problema de CP", pois requer um parâmetro de interação na força forte extremamente pequeno, porém, não nulo. Portanto, com o propósito de explicar porque as interações fortes e eletromagnéticas conservam paridade e carga paridade apesar das interações fracas violarem estas simetrias [39]. Um campo que além de solucionar o problema da CP forte em cromodinâmica quântica e também é um grande candidato a matéria escura é o áxion [35],

o qual trata-se de um campo pseudo-escalar. Sua massa pode ser considerada um parâmetro livre, e que está relacionada a escala em que a simetria Peccei-Quinn é quebrada [36].

Embora nunca tenham sido diretamente observados, sua teoria prediz que os áxions são criados quando fótons interagem com campos magnéticos ou cargas elétricas, o que acontece nas estrelas, de modo que observações astrofísicas podem colocar limites nas taxas de produção de áxions [37].

Quanto a energia escura, esta também poderia surgir de outro campo pseudo-escalar, ou seja, um novo áxion o qual se acopla linearmente à densidade de Pontryagin de um campo de gauge não-abeliano operando a escalas de altas energias [38].

Considerando a interação dos fótons com a intensidade do campo eletromagnético resultando num áxion, logo, temos o tensor $F^{\mu\nu}$ o qual descreve tal campo. Assim, o tensor do campo eletromagnético é representado por uma matriz 4×4 antissimétrica tendo como nulos os termos da diagonal principal, apresentando dessa maneira, seis componentes independentes.

Portanto, definido como $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, temos

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, definindo um tensor dual como sendo $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}F^{\rho\sigma}$ onde $\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}$ são os símbolos de Levi-Civita em 4 dimensões. Dessa forma, para uma mudança de $F \Rightarrow \tilde{F}$, temos que $\vec{E} \Rightarrow \vec{B}$ e $\vec{B} \Rightarrow -\vec{E}$, ou seja,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando a métrica $ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, onde c é a velocidade da luz e $a(t)$ é o fator de escala no instante t , calculando o produto entre duas matrizes do tensor do campo eletromagnético sendo uma covariante e a outra contravariante, ficamos com

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(a^4\vec{B}^2 - a^2\vec{E}^2).$$

4.1 Equação de Movimento para as Lagrangeanas Acopladas

Considerando uma lagrangeana definida por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{AC} \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$ e $\mathcal{L}_{AC} = -\frac{\lambda}{f}\phi F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ correspondem as lagrangeanas de Maxwell, campo de áxions, referente a parte livre, e acoplamento do campo de áxions, respectivamente. Daí, teremos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) - \frac{\lambda}{f}\phi F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Para encontrar a equação de movimento da lagrangeana acima para $F_{\mu\nu}$ calcularemos a derivada covariante deste tensor, definida por $\nabla_c T^{ab} = \partial_c T^{ab} + \Gamma_{cd}^a T^{db} + \Gamma_{cd}^b T^{ad}$, assim:

$$\nabla_0 F^{0\beta} + \nabla_1 F^{1\beta} + \nabla_2 F^{2\beta} + \nabla_3 F^{3\beta} +$$

$$-\frac{4\lambda}{f} \left[\epsilon^{\mu\nu\beta 0} \partial_0(\phi F_{\mu\nu}) + \epsilon^{\mu\nu\beta 1} \partial_1(\phi F_{\mu\nu}) + \epsilon^{\mu\nu\beta 2} \partial_2(\phi F_{\mu\nu}) + \epsilon^{\mu\nu\beta 3} \partial_3(\phi F_{\mu\nu}) \right] = 0. \quad (4.3)$$

Para $\beta = 0$, temos:

$$\underbrace{-\partial_1 E_x}_{\nabla_1 F^{10}} - \underbrace{\partial_2 E_y - \frac{E_x}{r}}_{\nabla_2 F^{20}} - \underbrace{\partial_3 E_z - \frac{E_x}{r} - E_y \cot \theta}_{\nabla_3 F^{30}} +$$

$$-\frac{4\lambda}{f} \left[\epsilon^{\mu\nu 00} \partial_0(\phi F_{\mu\nu}) + \epsilon^{\mu\nu 01} \partial_1(\phi F_{\mu\nu}) + \epsilon^{\mu\nu 02} \partial_2(\phi F_{\mu\nu}) + \epsilon^{\mu\nu 03} \partial_3(\phi F_{\mu\nu}) \right] = 0. \quad (4.4)$$

Assim, desconsiderando os termos nulos e na condição que o campo escalar ϕ depende apenas do tempo, então

$$-\frac{2E_x}{r} - E_y \cot \theta = 0. \quad (4.5)$$

Para $\beta = 1$, temos:

$$\underbrace{\partial_0 E_x + E_x H}_{\nabla_0 F^{01}} - \underbrace{\partial_2 B_z + E_x H}_{\nabla_2 F^{21}} + \underbrace{\partial_3 B_y + E_x H - B_z \cot \theta}_{\nabla_3 F^{31}} - \frac{4\lambda}{f} \left[\epsilon^{\mu\nu 10} \partial_0 \phi F_{\mu\nu} \right] = 0.$$

Cujos termos não nulos resultam em

$$\partial_0 E_x + 3E_x H - B_z \cot \theta - \frac{8\lambda}{f} \dot{\phi} B_x = 0. \quad (4.6)$$

Para $\beta = 2$, temos:

$$\underbrace{\partial_0 E_y + E_y H}_{\nabla_0 F^{02}} + \underbrace{\partial_1 B_z + E_y H + \frac{B_z}{r}}_{\nabla_1 F^{12}} - \underbrace{\partial_3 B_x + E_y H + \frac{B_z}{r}}_{\nabla_3 F^{32}} - \frac{4\lambda}{f} \left[\epsilon^{\mu\nu 20} \partial_0 \phi F_{\mu\nu} \right] = 0.$$

Resultando em

$$\partial_0 E_y + 3E_y H + \frac{2B_z}{r} - \frac{8\lambda}{f} \dot{\phi} B_y = 0. \quad (4.7)$$

Para $\beta = 3$, logo:

$$\underbrace{\partial_0 E_z + E_z H}_{\nabla_0 F^{03}} - \underbrace{\partial_1 B_y + E_z H - \frac{B_y}{r}}_{\nabla_1 F^{13}} + \underbrace{\partial_2 B_x + E_z H - \frac{B_x}{r} + B_x \cot \theta}_{\nabla_2 F^{23}} - \frac{4\lambda}{f} \left[\epsilon^{\mu\nu 30} \partial_0 \phi F_{\mu\nu} \right] = 0.$$

Assim, temos que

$$\partial_0 E_z + 3E_z H - \frac{2B_y}{r} + B_x \cot \theta - \frac{8\lambda}{f} \dot{\phi} B_z = 0. \quad (4.8)$$

Portanto, escrevendo a equação de movimento na forma covariante, então, para a representação temporal, ficamos com

$$\nabla_\alpha E^\alpha = \frac{8\lambda}{f} (\partial_\alpha \phi) B^\alpha, \quad (4.9)$$

enquanto para a parte espacial, temos que

$$\nabla_\alpha E^\sigma + 2HE^\sigma - \epsilon^{\mu\sigma\alpha\beta} \nabla_\alpha B_\beta = -\frac{8\lambda}{f} \left(\epsilon^{\mu\sigma\alpha\beta} \partial_\alpha \phi E_\beta + \partial_\alpha \phi B^\sigma \right). \quad (4.10)$$

4.2 Tensor Energia Momento dos Campos Eletromagnético e de Áxions

Partindo da definição do tensor energia momento:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.11)$$

Considerando inicialmente a parcela que corresponde a lagrangeana de Maxwell, a qual podemos representá-la por:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F_{\rho\sigma} g^{\kappa\rho} g^{\lambda\sigma} \sqrt{-g} = -\frac{1}{4} F^2 \sqrt{-g}.$$

Assim, substituindo na expressão que define o tensor energia momento, ficamos com:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \left(-\frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F_{\rho\sigma} g^{\kappa\rho} g^{\lambda\sigma} \sqrt{-g} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{1}{\delta g_{\mu\nu}} \left[-\frac{1}{4} (2\delta g^{\kappa\rho}) g^{\lambda\sigma} F_{\kappa\lambda} F_{\rho\sigma} \sqrt{-g} - \frac{F^2}{4} \delta \sqrt{-g} \right] \end{aligned}$$

sendo

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\kappa\lambda} \delta g^{\kappa\lambda}, \quad (4.12)$$

daí:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{1}{\delta g_{\mu\nu}} \left[-\frac{1}{2} F_{\kappa}^{\sigma} F_{\rho\sigma} \sqrt{-g} \delta g^{\kappa\rho} - \frac{F^2}{4} \frac{\sqrt{-g}}{2} (-g_{\kappa\lambda} \delta g^{\kappa\lambda}) \right] \\ &= \left[-F_{\kappa}^{\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{F^2}{4} g_{\kappa\rho} \right] \frac{\delta g^{\kappa\rho}}{\delta g_{\mu\nu}} \\ &= \left[-F_{\kappa}^{\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{F^2}{4} g_{\kappa\rho} \right] (-g^{\kappa\mu} g^{\rho\nu}) \\ &= F^{\mu\sigma} F^{\nu}_{\sigma} - g^{\mu\nu} \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\sigma} F_{\nu}^{\sigma} - g_{\mu\nu} \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (4.13)$$

Agora, calculando T_{00} , onde temos que $g_{00} = 1$ e $F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = 2(a^4 \vec{B}^2 - a^2 \vec{E}^2)$, então:

$$\begin{aligned} T_{00} &= F_{0\sigma} F_0^{\sigma} - g_{00} \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \\ &= -a^2 E_x^2 - a^2 E_y^2 - a^2 E_z^2 - \frac{1}{2} a^4 \vec{B}^2 + \frac{1}{2} a^2 \vec{E}^2 \\ &= -\frac{1}{2} (a^2 \vec{E}^2 + a^4 \vec{B}^2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para T_{11} temos $g_{11} = -a^2$, então:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= F_{1\sigma}F_1^\sigma - g_{11}\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= -a^6\vec{B}^2 + \frac{1}{2}a^6\vec{B}^2 - \frac{1}{2}a^4\vec{E}^2 + a^4E_x^2 + a^6B_x^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(a^6\vec{B}^2 + a^4\vec{E}^2\right) + a^4E_x^2 + a^6B_x^2.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Para T_{22} , com $g_{22} = -a^2$, logo:

$$\begin{aligned}
T_{22} &= F_{2\sigma}F_2^\sigma - g_{22}\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= -a^6\vec{B}^2 + \frac{1}{2}a^6\vec{B}^2 - \frac{1}{2}a^4\vec{E}^2 + a^4E_y^2 + a^6B_y^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(a^6\vec{B}^2 + a^4\vec{E}^2\right) + a^4E_y^2 + a^6B_y^2.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

E para T_{33} , ficamos com $g_{33} = -a^2$, daí:

$$\begin{aligned}
T_{33} &= F_{3\sigma}F_3^\sigma - g_{33}\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= -a^6\vec{B}^2 + \frac{1}{2}a^6\vec{B}^2 - \frac{1}{2}a^4\vec{E}^2 + a^4E_z^2 + a^6B_z^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(a^6\vec{B}^2 + a^4\vec{E}^2\right) + a^4E_z^2 + a^6B_z^2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dessa maneira, representando o tensor energia momento por uma matriz 4×4 , teremos

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Notemos que o traço da matriz acima referente ao tensor energia momento associado a métrica com assinatura $(+, -, -, -)$ apresenta valor nulo. Em relação aos resultados que compõem a matriz, a componente tempo-tempo representa a densidade de energia, as componentes tempo-espaco representam o fluxo de energia, as componentes espaco-

tempo representam a densidade de momento em uma determinada direção, e por fim, as componentes espaço-espaço representam a força exercida em uma determinada direção por unidade de área correspondente, ou seja, trata-se da pressão.

Assim, definindo a densidade de energia como sendo

$$\rho_M = T_0^0 = g^{00}T_{00} = -\frac{1}{2}(a^2\vec{E}^2 + a^4\vec{B}^2) \quad (4.18)$$

e para as demais componentes da diagonal principal, temos

$$T_1^1 = g^{11}T_{11} = \frac{1}{2}(a^4\vec{B}^2 + a^2\vec{E}^2) - a^2E_x^2 - a^4B_x^2, \quad (4.19)$$

$$T_2^2 = g^{22}T_{22} = \frac{1}{2}(a^4\vec{B}^2 + a^2\vec{E}^2) - a^2E_y^2 - a^4B_y^2, \quad (4.20)$$

$$T_3^3 = g^{33}T_{33} = \frac{1}{2}(a^4\vec{B}^2 + a^2\vec{E}^2) - a^2E_z^2 - a^4B_z^2. \quad (4.21)$$

Assim como nos gases perfeitos, podemos considerar a situação em questão como um "gás" de fótons, portanto:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & -p & & \\ & & -p & \\ & & & -p \end{pmatrix}.$$

Como o traço é nulo, então $Tr = \rho - 3p = 0$, daí $p = \frac{1}{3}\rho$, ou seja,

$$p_M = -\frac{1}{6}(a^2\vec{E}^2 + a^4\vec{B}^2). \quad (4.22)$$

Conseqüentemente, para a equação de estado, teremos:

$$\omega_M = \frac{p_M}{\rho_M} = \frac{1}{3}. \quad (4.23)$$

Agora, considerando a lagrangeana correspondente ao acoplamento do campo de áxion, temos

$$\mathcal{L}_{AC} = -\frac{\lambda}{f}\phi F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (4.24)$$

Daí, para o tensor energia momento e utilizando a expressão (4.12), ficamos com

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \left[-\frac{\lambda}{f}\phi F_{\kappa\lambda}\tilde{F}_{\rho\sigma}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\sqrt{-g} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{1}{\delta g_{\mu\nu}} \left[-\frac{\lambda}{f}\phi(2\delta g^{\kappa\rho})g^{\lambda\sigma}F_{\kappa\lambda}\tilde{F}_{\rho\sigma}\sqrt{-g} - \frac{\lambda}{f}\phi F_{\kappa\lambda}\tilde{F}_{\rho\sigma}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\delta\sqrt{-g} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{1}{\delta g_{\mu\nu}} \left[-\frac{2\lambda\phi}{f}F_{\kappa}{}^{\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma}\sqrt{-g}\delta g^{\kappa\rho} + \frac{\lambda\phi}{f}F_{\kappa\lambda}\tilde{F}_{\rho\sigma}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\kappa\lambda}\delta g^{\kappa\lambda} \right] \\ &= \left[-\frac{4\lambda\phi}{f}F_{\kappa}{}^{\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma}\frac{\delta g^{\kappa\rho}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\lambda\phi}{f}F_{\kappa\lambda}\tilde{F}_{\kappa\lambda}\frac{g_{\kappa\lambda}\delta g^{\kappa\lambda}}{\delta g_{\mu\nu}} \right] \\ &= \left[\frac{4\lambda\phi}{f}\underbrace{F_{\kappa}{}^{\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma}g^{\kappa\mu}g^{\rho\nu}}_{=F^{\mu\sigma}\tilde{F}_{\sigma}^{\nu}} - \frac{\lambda\phi}{f}\underbrace{F_{\kappa\lambda}\tilde{F}^{\kappa\lambda}g_{\kappa\lambda}g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}}_{=g^{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}\tilde{F}^{\kappa\lambda}} \right] \\ &= \frac{4\lambda\phi}{f}F^{\mu\sigma}\tilde{F}_{\sigma}^{\nu} - g^{\mu\nu}\frac{\lambda\phi}{f}F_{\kappa\lambda}\tilde{F}^{\kappa\lambda}. \end{aligned}$$

Podendo ser reescrito como

$$T_{\mu\nu} = \frac{4\lambda\phi}{f}F_{\mu\sigma}\tilde{F}_{\nu}{}^{\sigma} - g_{\mu\nu}\frac{\lambda\phi}{f}F^{\kappa\lambda}\tilde{F}_{\kappa\lambda}. \quad (4.25)$$

Em relação ao produto do tensor contravariante do campo eletromagnético com o tensor dual na forma covariante, temos:

$$F^{\kappa\lambda}\tilde{F}_{\kappa\lambda} = -2(a^2\vec{E} \cdot \vec{B} + a^4\vec{E} \cdot \vec{B}). \quad (4.26)$$

Agora, calculando as componentes da diagonal principal, teremos:

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{4\lambda\phi}{f} F_{0\sigma} \tilde{F}_0^\sigma - g_{00} \frac{\lambda\phi}{f} F^{\kappa\lambda} \tilde{F}_{\kappa\lambda} \\
&= -\frac{4\lambda\phi}{f} a^2 \vec{E} \cdot \vec{B} + \frac{2\lambda\phi}{f} a^2 \vec{E} \cdot \vec{B} + \frac{2\lambda\phi}{f} a^4 \vec{E} \cdot \vec{B} \\
&= \frac{2\lambda\phi}{f} (a^4 \vec{E} \cdot \vec{B} - a^2 \vec{E} \cdot \vec{B}),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{4\lambda\phi}{f} F_{1\sigma} \tilde{F}_1^\sigma - g_{11} \frac{\lambda\phi}{f} F^{\kappa\lambda} \tilde{F}_{\kappa\lambda} \\
&= \frac{4\lambda\phi}{f} a^6 \vec{E} \cdot \vec{B} - \frac{2\lambda\phi}{f} a^6 \vec{E} \cdot \vec{B} - \frac{2\lambda\phi}{f} a^4 \vec{E} \cdot \vec{B} + \frac{4\lambda\phi}{f} (a^4 E_x B_x - a^6 E_x B_x) \\
&= \frac{2\lambda\phi}{f} (a^6 \vec{E} \cdot \vec{B} - a^4 \vec{E} \cdot \vec{B}) + \frac{4\lambda\phi}{f} (a^4 E_x B_x - a^6 E_x B_x),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} &= \frac{4\lambda\phi}{f} F_{2\sigma} \tilde{F}_2^\sigma - g_{22} \frac{\lambda\phi}{f} F^{\kappa\lambda} \tilde{F}_{\kappa\lambda} \\
&= \frac{4\lambda\phi}{f} a^6 \vec{E} \cdot \vec{B} - \frac{2\lambda\phi}{f} a^6 \vec{E} \cdot \vec{B} - \frac{2\lambda\phi}{f} a^4 \vec{E} \cdot \vec{B} + \frac{4\lambda\phi}{f} (a^4 E_y B_y - a^6 E_y B_y) \\
&= \frac{2\lambda\phi}{f} (a^6 \vec{E} \cdot \vec{B} - a^4 \vec{E} \cdot \vec{B}) + \frac{4\lambda\phi}{f} (a^4 E_y B_y - a^6 E_y B_y).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
T_{33} &= \frac{4\lambda\phi}{f} F_{3\sigma} \tilde{F}_3^\sigma - g_{33} \frac{\lambda\phi}{f} F^{\kappa\lambda} \tilde{F}_{\kappa\lambda} \\
&= \frac{4\lambda\phi}{f} a^6 \vec{E} \cdot \vec{B} - \frac{2\lambda\phi}{f} a^6 \vec{E} \cdot \vec{B} - \frac{2\lambda\phi}{f} a^4 \vec{E} \cdot \vec{B} + \frac{4\lambda\phi}{f} (a^4 E_z B_z - a^6 E_z B_z) \\
&= \frac{2\lambda\phi}{f} (a^6 \vec{E} \cdot \vec{B} - a^4 \vec{E} \cdot \vec{B}) + \frac{4\lambda\phi}{f} (a^4 E_z B_z - a^6 E_z B_z).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Procedendo da mesma forma do caso no campo eletromagnético, temos para a densidade de energia:

$$\rho_{AC} = T_0^0 = g^{00}T_{00} = \frac{2\lambda\phi}{f}(a^4\vec{E} \cdot \vec{B} - a^2\vec{E} \cdot \vec{B}). \quad (4.31)$$

E para as outras componentes da diagonal principal, estas são dadas por:

$$T_1^1 = g^{11}T_{11} = -\frac{2\lambda\phi}{f}(a^4\vec{E} \cdot \vec{B} - a^2\vec{E} \cdot \vec{B}) - \frac{4\lambda\phi}{f}(a^2E_xB_x - a^4E_xB_x), \quad (4.32)$$

$$T_2^2 = g^{22}T_{22} = -\frac{2\lambda\phi}{f}(a^4\vec{E} \cdot \vec{B} - a^2\vec{E} \cdot \vec{B}) - \frac{4\lambda\phi}{f}(a^2E_yB_y - a^4E_yB_y), \quad (4.33)$$

$$T_3^3 = g^{33}T_{33} = -\frac{2\lambda\phi}{f}(a^4\vec{E} \cdot \vec{B} - a^2\vec{E} \cdot \vec{B}) - \frac{4\lambda\phi}{f}(a^2E_zB_z - a^4E_zB_z). \quad (4.34)$$

Portanto, percebemos, realizando a soma das quatro expressões acima, que o traço é nulo, ou seja, o campo de áxion se comporta como uma radiação eletromagnética, dessa forma, assim como no caso anterior, também temos que $p = \frac{1}{3}\rho$, ou seja,

$$p_{AC} = \frac{2}{3}\frac{\lambda\phi}{f}(a^4\vec{E} \cdot \vec{B} - a^2\vec{E} \cdot \vec{B}). \quad (4.35)$$

Como também descrito anteriormente para a equação de estado teremos $\omega_{AC} = \frac{1}{3}$.

4.3 Equação de movimento para ϕ e Regime de Roldagem Lenta

Partindo da definição da lagrangeana expressa na equação (4.2), podemos fazer uso da equação de Euler-Lagrange em (2.14) e encontrar a equação de movimento para ϕ ,

assim,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi} - \frac{2\lambda}{f}(a^2\vec{E} \cdot \vec{B} + a^4\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0. \quad (4.36)$$

Considerando um regime de rolagem lenta e adotando para o modelo do potencial acima correspondendo a uma inflação caótica como expressado na equação (3.1) e admitindo $H \approx 0$ para $t \gg 1$, então,

$$m^2\phi - \frac{2\lambda}{f} [a^2(t) + a^4(t)] (\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0. \quad (4.37)$$

Fazendo uma analogia com o oscilador harmônico forçado amortecido, temos

$$\ddot{x} + b\dot{x} + w_0^2x = F(t) \quad (4.38)$$

onde

$$\begin{cases} x = Awt \\ F = F_0wt \end{cases}, \quad (4.39)$$

então, assim como na equação (4.37), desconsiderando os termos \ddot{x} e b na equação (4.38), sendo este último proporcional a H , teremos

$$w_0^2Awt = F_0wt. \quad (4.40)$$

Conseqüentemente,

$$x = \frac{F_0}{w_0^2}wt, \quad (4.41)$$

agora, considerando $a^2 = y$, então, para o somatório dos fatores de escala expressos em (4.37) e considerando a equação (4.39), logo, $F = \frac{2\lambda}{f} [a^2(t) + a^4(t)] (\vec{E} \cdot \vec{B})$, daí,

$$[a^2(t) + a^4(t)] = wt \Rightarrow y^2 + y - wt = 0$$

a qual trata-se de uma equação do segundo grau cuja solução é dada por

$$a^2(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4wt}}{2}. \quad (4.42)$$

Se $wt \gg 1$, então,

$$a(t) = (wt)^{1/4}. \quad (4.43)$$

Dessa maneira, da definição do parâmetro de Hubble, teremos

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{4t}. \quad (4.44)$$

Assim, representando o fator de escala em termos do parâmetro de Hubble:

$$a(t) = \frac{w^{1/4}}{4Ht^{3/4}}. \quad (4.45)$$

Associando tal análise para o caso do campo escalar e fazendo $w_0^2 \Rightarrow m^2$ e $\phi(t) \Rightarrow x$, então,

$$\phi(t) = \frac{F_0}{m^2} wt. \quad (4.46)$$

4.4 Determinação dos campos \vec{E} e \vec{B}

Considerando as equações de movimento com $\beta = 0, 1, 2, 3$ para as lagrangeanas acopladas, temos da equação (4.5) $E_x = 0$ e $E_y = 0$ para satisfazê-la. Com isso, pela equação (4.6), fazendo $B_z \ll 1$ nos remete a $B_x = 0$. Conseqüentemente, da equação (4.7), para que esta seja satisfeita, teremos que $B_y = 0$. E por final, a equação (4.8) se resume a

$$\partial_0 E_z + 3E_z H = 0. \quad (4.47)$$

Adotando os campos \vec{E}_z e \vec{B}_z como soluções do tipo onda plana, ou seja,

$$\begin{cases} \vec{E}_z = \vec{E}_{0z} e^{i\omega t + \lambda t} \\ \vec{B}_z = \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} e^{-i\omega t - \lambda t} \end{cases}.$$

Reescrevendo a equação (4.47), temos que

$$(i\omega + \lambda)\vec{E}_z + 3\vec{E}_z H = 0 \Rightarrow i\omega + \lambda + 3H = 0.$$

Fazendo $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ de modo que os índices R e I representam as partes real e imaginária, respectivamente. Assim, ficamos com

$$i\omega + \lambda_R + i\lambda_I + 3H = 0 \Rightarrow i(\omega + \lambda_I) + \lambda_R + 3H = 0.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \lambda_I = -\omega \\ \lambda_R = -3H \end{cases}.$$

Então, das definições dos campos \vec{E}_z e \vec{B}_z , ficamos com

$$\begin{aligned} \vec{E}_z &= \vec{E}_{0z} e^{i\omega t + (-3H - i\omega)t} \\ &= \vec{E}_{0z} e^{-3Ht} \end{aligned} \quad (4.48)$$

e

$$\begin{aligned}
\vec{B}_z &= \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} e^{-i\omega t - (-3H - i\omega)t} \\
&= \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} e^{3Ht}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Dessa maneira, temos que

$$\vec{E}_z \cdot \vec{B}_z = \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2}. \tag{4.50}$$

Agora, analisando a equação (4.39) vemos que $F_0 = \frac{2\lambda}{f} \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2}$, portanto, podemos reescrever a equação (4.46) como

$$\phi(t) = \frac{2\lambda}{f} \frac{\vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2}}{m^2} a^4(t) \tag{4.51}$$

que representa o campo ϕ variando inversamente com o tempo.

4.5 Equações de Friedmann e de Estado para o Caso das Lagrangeanas Acopladas

Considerando a lagrangeana definida na equação (4.2) e somando as densidades de energia correspondentes aos campos eletromagnético e de áxions, este sendo representado por sua parte livre e outra com acoplamento, definidas respectivamente nas equações (4.18), (2.5) e (4.31), teremos

$$\begin{aligned}
\rho_{total} &= \rho_m + \rho_\phi + \rho_{AC} \\
&= -\frac{1}{2}(a^2 \vec{E}^2 + a^4 \vec{B}^2) + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{2\lambda\phi}{f} (a^4 \vec{E} \cdot \vec{B} - a^2 \vec{E} \cdot \vec{B}).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Enquanto que para a pressão, ficamos com

$$\begin{aligned}
p_{total} &= p_m + p_\phi + p_{AC} \\
&= -\frac{1}{6}(a^2 \vec{E}^2 + a^4 \vec{B}^2) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{2}{3}\frac{\lambda\phi}{f}(a^4 \vec{E} \cdot \vec{B} - a^2 \vec{E} \cdot \vec{B}). \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Com isso, podemos encontrar a equação de estado para as lagrangeanas acopladas, denotada por ω_{total} , ou seja,

$$\omega_{total} = \frac{-\frac{1}{6}(a^2 \vec{E}^2 + a^4 \vec{B}^2) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{2}{3}\frac{\lambda\phi}{f}(a^4 \vec{E} \cdot \vec{B} - a^2 \vec{E} \cdot \vec{B})}{-\frac{1}{2}(a^2 \vec{E}^2 + a^4 \vec{B}^2) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{2\lambda\phi}{f}(a^4 \vec{E} \cdot \vec{B} - a^2 \vec{E} \cdot \vec{B})}.$$

Com o auxílio das equações (4.45), (4.48), (4.49), (4.50) e (4.51) e também, considerando $wt \gg 1$, teremos:

$$\omega_{total} = \frac{-\frac{1}{2}m^2 \left[\frac{4\lambda^2 \vec{E}_{0z}^2 \cdot \vec{B}_{0z}^2 \cdot t^{-4} a^8(t)}{f^2 m^4} \right] + \frac{2\lambda}{3f} \left[\frac{2\lambda \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} a^4(t)}{f m^2} \right] \left[a^4(t) \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} \right]}{\frac{1}{2}m^2 \left[\frac{4\lambda^2 \vec{E}_{0z}^2 \cdot \vec{B}_{0z}^2 \cdot t^{-4} a^8(t)}{f^2 m^4} \right] + \frac{2\lambda}{f} \left[\frac{2\lambda \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} a^4(t)}{f m^2} \right] \left[a^4(t) \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} \right]}. \quad (4.54)$$

Lembrando que $\vec{B}_{0z} \ll 1$ de modo que $\vec{E}_{0z} \gg 1$ para que o produto $\vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z}$ não seja nulo e eliminando os termos em comum, ficamos com

$$\omega_{total} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + 1}. \quad (4.55)$$

Portanto, como $\omega_{total} = -\frac{1}{9}$, então, o universo seria desacelerado, pois $\omega_{total} > -\frac{1}{3}$.

Daí, considerando os termos não nulos da densidade de energia da equação de estado (4.54), as equações de Friedmann podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2} m^2 \left[\frac{2\lambda \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} a^4(t)}{f m^2} \right]^2 + \left[\frac{4\lambda^2 \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} a^4(t)}{f^2 m^2} \right] \left[a^4(t) \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} \right] \right\} \\
&= \left[\frac{2\lambda \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} a^4(t)}{f m} \right]^2 t^{-4}. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Contudo, notemos que o parâmetro de Hubble decresce no decorrer do tempo. Sabendo que no regimento de rolagem lenta a densidade de energia é representada pelo potencial e este por sua vez depende do campo ϕ que de acordo com a equação (4.51) diminui com o tempo, portanto, tal resultado mostra-se consistente com a equação de estado $\omega = -1/9$, pois nos remete a um cenário de desaceleração para o universo.

Por outro lado, para a equação da aceleração, teremos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho_{total} + 3p_{total})$$

onde ρ_{total} e p_{total} representam a densidade de energia e pressão referentes ao acoplamento entre os campos eletromagnético e de áxions. Resultando em

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3} \left[\frac{\lambda \vec{E}_{0z} \cdot \vec{B}_{0z} \cdot t^{-2} a^4(t)}{f m} \right]^2. \tag{4.57}$$

Cujo resultado se refere ao de um universo desacelerado. Assim, tal resultado encontra-se consistente para a situação em análise, pois para a equação de estado encontrada, $\omega_{total} = -\frac{1}{9}$, correspondendo aos dois campos quando acoplados nos informa que a densidade de energia, de acordo com a equação (1.30), decai por um fator de escala $a^{-8/3}$.

Capítulo 5

Cenários Cosmológicos

Em relação as componentes que respondem pela expansão do universo temos a era da radiação com $\omega_r = \frac{1}{3}$, da matéria com $\omega_{matter} = 0$, da energia escura ou constante cosmológica com $\omega_\Lambda = -1$. Para um campo de áxions, vimos que este se comporta como radiação, ou seja, com $\omega_{AC} = \frac{1}{3}$ e para os campos eletromagnético e de áxions acoplados temos que $\omega_{total} = -\frac{1}{9}$. Dessa maneira, podemos demonstrar alguns cenários cosmológicos através de um gráfico da evolução do quadrado do parâmetro de Hubble em relação ao fator de escala no qual temos o momento em que cada componente dominou a expansão do universo, incluindo a curvatura, dessa maneira, adotando $\ln H^2 \propto \ln \rho$, $\ln H^2 \propto \ln a^{-4}$ para a era da radiação, $\ln H^2 \propto \ln a^{-3}$ para a era da matéria, $\ln H^2 \propto \ln a^{-2}$ para a era da curvatura e $\ln H^2 \propto \ln \Lambda$ para a constante cosmológica, como mostra a figura 5.1.

Como foi mencionado anteriormente, de acordo com a expressão (1.30), temos que para a era da radiação o quadrado do parâmetro de Hubble decai mais rapidamente, representada por a^{-4} na figura 5.1, conseqüentemente, o campo de áxions por apresentar um mesmo valor para a equação de estado, logo pode ser descrito pela mesma reta, a^{-3} representa o período da era da matéria e a^{-2} da curvatura. Contudo, notemos que a constante cosmológica descrita por "cst" domina representando uma reta paralela ao eixo horizontal, assim, não apresentando variações no quadrado do parâmetro de Hubble.

Por outro lado, para um acoplamento entre os campos eletromagnético e de áxions,

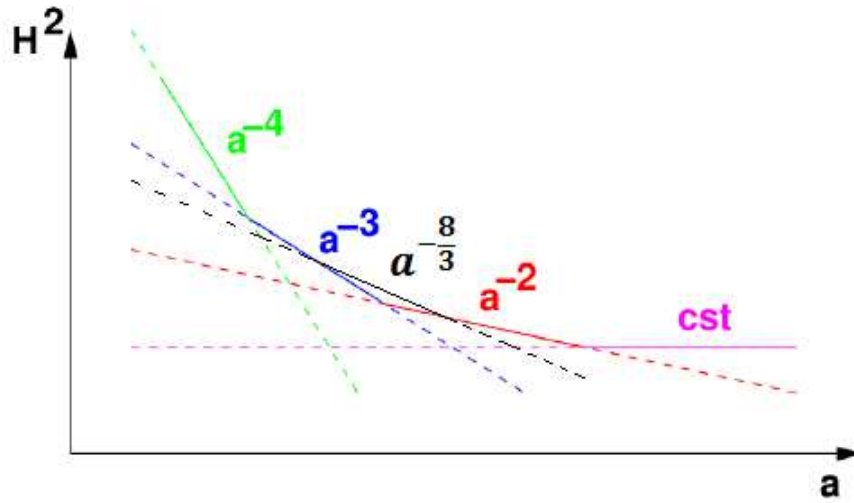


Figura 5.1: Evolução do quadrado do parâmetro de Hubble em relação ao fator de escala para diferentes componentes numa representação log-log. Fonte(adaptada): <https://portugues.free-ebooks.net/ebook/Analogos-classicos-para-cosmologias-relativisticas-aceleradas-uma-abordagem-lagrangiana>.

de acordo com a expressão (4.55), para um tempo presente $a_0 = 1$ teremos $H^2 \propto a^{-8/3}$, ou seja, estes campos quando acoplados assumem um comportamento intermediário entre a era da matéria e da curvatura. Em outras palavras, o acoplamento entre estes dois campos em questão dominaria a expansão do universo e sucederia após a primeira metade da era da matéria até o final da primeira metade da época na qual somente a constante de curvatura era responsável pela expansão.

Tal resultado mostra-se consistente uma vez que a evolução do quadrado do parâmetro de Hubble dos campos quando acoplados deve assumir um comportamento intermediário entre os apresentados pela constante cosmológica e radiação, pois de acordo com a equação de estado para um universo acelerado, ou seja, $\omega < -\frac{1}{3}$, temos $\omega_\Lambda = -1$, enquanto que $\omega_r = \frac{1}{3}$ nos remete a uma expansão desacelerada. Portanto, um acoplamento entre os campos eletromagnético e de áxions atua de maneira a diminuir a desaceleração da expansão do universo, assim, também apresentando um valor menor para a equação de estado em relação a matéria, $\omega_{matter} = 0$ e, conseqüentemente, iniciando seu período em seguida como demonstra o gráfico na figura 5.1.

Capítulo 6

Considerações Finais e Perspectivas

Com o propósito de solucionar alguns problemas encontrados no modelo padrão da cosmologia surge a teoria da inflação cósmica apresentando como característica uma expansão acelerada do universo e cujo estágio final coincide com o início do Modelo Cosmológico Padrão. Na fase inflacionária a densidade de energia era constituída por um campo escalar homogêneo e isotrópico denominado ínflaton onde seu valor mínimo corresponde a um período de reaquecimento no qual deu origem a era da radiação.

A utilização de uma aproximação de rolagem lenta(slow-roll) generaliza a densidade de energia para um determinado potencial, ou seja, sendo este muito maior quando comparado ao termo cinético, assim, facilitando a solução para a equação de movimento que apresentaria somente o termo de viscosidade e o potencial em questão.

Em seguida, são apresentados alguns modelos inflacionários compostos por campos simples onde cada um demonstra o comportamento do campo ínflaton e seu respectivo índice espectral. Nesse mesmo contexto, também é apresentado um modelo híbrido com um segundo campo escalar que permanece fixo até que o ínflaton atinja seu ponto crítico.

Finalizando a pesquisa, abordamos sobre um modelo de campos acoplados e, por tentativa, adotamos os campos elétrico e magnético sendo representados como soluções do tipo ondas planas com o propósito de descrever possíveis soluções para expansão do universo ocasionada por campos de áxions e eletromagnético. Portanto, podemos compa-

rar cada cenário com a predominância de cada um destes campos e por fim, verificar até que ponto estes dominavam a expansão do universo. Assim, podemos notar que os dois campos quando acoplados assumem comportamento intermediário entre as eras da matéria e da curvatura. Sendo o acoplamento entre tais campos apresentando uma equação de estado $\omega_{total} = -\frac{1}{9}$, logo, atua de forma a expandir o universo de forma desacelerada.

Como perspectiva, pretendemos prosseguir com a pesquisa, contudo, adicionando outros tipos de campos sob o ponto de vista da teoria inflacionária com a atuação de um segundo campo escalar, ou seja, num regime de inflação híbrida.

Bibliografia

- [1] EINSTEIN, A. **Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts theorie**, Annalen der Physik, 1916, 49: 769–822.
- [2] EINSTEIN, A. **Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitäts theorie**, 1917, Sitzungsberichte der Preu ßischen Akademie der Wissenschaften: 142.
- [3] FRIEDMANN, A. **Über die Krümmung des Raumes**, 1922. Zeitschrift für Physik. 10 (1): 377–386.
- [4] FRIEDMANN, A. **Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes**, 1924. Zeitschrift für Physik. 21 (1): 326–332.
- [5] LEMAÎTRE, G. **Expansion of the universe, a homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae**; 1931.
- [6] HUBBLE, E. **A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae**, 1929. Proceedings of the National Academy of Sciences. 15 (3): 168–73.
- [7] BELENKIY, A. **Discovery of Hubble’s Law: an Example of Type III Error**, arXiv:1403.6699 [physics.hist-ph], 2014.
- [8] RAIFEARTAIGH, C. O. **The Contribution of V. M. Slipher to the Discovery of the Expanding Universe**, arXiv:1212.5499 [physics.hist-ph], 2012.

- [9] ROBERTSON, H. P. **Kinematics and world structure**, 1935. *Astrophysical Journal* 82: 248-301.
- [10] ROBERTSON, H. P. **Kinematics and world structure**, 1936. *Astrophysical Journal* 83: 187-201.
- [11] ROBERTSON, H. P. **Kinematics and world structure**, 1936. *Astrophysical Journal* 83: 257-271.
- [12] WALKER, A. G. **On Milne's theory of world-structure**, 1937. *Proceedings of the London Mathematical Society* 2 42: 90-127.
- [13] BERNABEI, R. et al. **Dark Matter search**, arXiv:astro-ph/0307403, 2003.
- [14] PENZIAS, A. and WILSON, R. **A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s**, 1965. *Astrophysical Journal* 142, 419.
- [15] HOLANDA, R. F. L. **Análogos clássicos para cosmologias relativísticas aceleradas: uma abordagem lagrangeana**, 2007. Dissertação - Universidade de São Paulo, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas.
- [16] DICKE, R. H., PEEBLES, J. E., ROLLAND, P. G. and WILKINSON, D. T. **Cosmic Black-Body Radiation**, 1965, *Astrophysical Journal* 142, 414.
- [17] KOLB, E. and TURNER, M. **The Early Universe**, 1994. Reading: Addison-Wesley. p. 14-16.
- [18] GUTH, A. H. **Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems**, 1981. *Physical Review D*. 23 (2): 347-356.
- [19] ANDRADE, T. M. **Modelos cosmológicos inflacionários tipo Starobinsky**, 2016. Dissertação - Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Física.

- [20] DANTAS, J. D. **Modelos Inflacionários**, 2008. Dissertação - Universidade Federal da Paraíba, Programa de Pós-Graduação em Física.
- [21] OLIVEIRA, M. C. B. **Inflação cósmica e teorias escalar-tensoriais da gravitação**, 2010. Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física.
- [22] RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**, 2006. Department of Astronomy, The Ohio State University.
- [23] SOUZA, R. E. **Introdução à Cosmologia**, 2004. Ed. USP.
- [24] KEPLER, S. O. e SARAIVA, M. F O. **Astronomia e Astrofísica**, 2014. 3ª Edição. Editora Livraria da Física. p.696.
- [25] LIMA, G. B. **Astronomia Extragaláctica**, 2016. Universidade de São Paulo, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas. Disponível em <http://www.astro.iag.usp.br/gastao>, acesso em 23 de janeiro de 2017.
- [26] PEREIRA, S. F. **Modelos Cosmológicos Escalares-Tensoriais**, 2006. Dissertação - Universidade de Brasília, Instituto de Física.
- [27] OPPER, R. e PELINSON, A. **A New Test for Dark Energy Models**, arXiv:astro-ph/0703779, 2007.
- [28] ABREU, E. M. C. **An analytical description for the cosmological constant**, arXiv:0803.2651 [gr-qc], 2008.
- [29] SANTOS, J. J. R. **Tópicos em cosmologia com campos escalares**, 2011. Tese - Universidade Federal da Paraíba, Programa de Pós-Graduação em Física.
- [30] COLEMAN, S. **Fate of the false vacuum: Semiclassical theory**. Phys. Rev. D, v. 15, p. 2929 ; Errata 16:1248, 1977.

- [31] CALLAN Jr, C. G.; COLEMAN, S. **Fate of the false vacuum. ii. First quantum corrections.** Phys. Rev. D, v. 16, p. 1762, 1977.
- [32] FIGUEIRO, M. F. **Cosmologia inflacionária em modelos de branas tipo RS-I,** 2005. Dissertação - Universidade de São Paulo, Instituto de Física.
- [33] Y. M. Cho, **Reinterpretation of Jordan-Brans-Dicke theory and Kaluza-Klein cosmology,** Phys. Rev. Lett. 68:3133-3136 (1992).
- [34] GRAEF, L. L. **Um modelo para o decaimento da energia escura,** 2012. Dissertação - Universidade de São Paulo, Instituto de Física.
- [35] BRANDENBERGER, R. et al. **Dark Energy and Dark Matter in a Model of an Axion Coupled to a Non-Abelian Gauge Field,** arXiv: 1609.06920v1 [hep-th], 2016.
- [36] QUEIROZ, F. S. **Detecção direta e indireta de matéria escura em teorias de gauge,** 2013. Tese - Universidade Federal da Paraíba, Programa de Pós-Graduação em Física.
- [37] KEPLER, S. O. **Áxions.** Disponível em <http://astro.if.ufrgs.br/evol/axions/axions.htm>, acesso em 13 de junho de 2017.
- [38] BRANDENBERGER, R. et al. **Tracking Dark Energy from Axion-Gauge Field Couplings.** arXiv:1601.00057 [hep-th],2016.
- [39] PECCEI, R. and QUINN, H. **CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles,** 1977. Physical Review Letters Vol. 38, Num. 25, p.1440.