



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Modelos de Energia Escura com Acoplamento  
Não-Mínimo ao Campo Escalar e Quebra de Simetria**

**Felipe Bruno Medeiros dos Santos**

CAMPINA GRANDE

- Março 2019 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Modelos de Energia Escura com Acoplamento  
Não-Mínimo ao Campo Escalar e Quebra de Simetria**

**Felipe Bruno Medeiros dos Santos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Cosmologia, Teoria de Campos.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

CAMPINA GRANDE

- Março de 2019 -

S237m Santos, Felipe Bruno Medeiros dos.  
Modelos de energia escura com acoplamento não-mínimo ao campo escalar e quebra de simetria / Felipe Bruno Medeiros dos Santos. – Campina Grande, 2019.  
91 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.  
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".  
Referências.

1. Cosmologia. 2. Teoria de Campos. 3. Symmetron. 4. Mecanismo de Blindagem. 5. Energia Escura. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.

CDU 524.8(043)

**FELIPE BRUNO MEDEIROS DOS SANTOS**

**MODELO DE ENERGIA ESCURA COM ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO  
AO CAMPO ESCALAR E QUEBRA DE SIMETRIA**

Dissertação aprovada em 15/03/2019

**BANCA EXAMINADORA**



---

(Presidente)

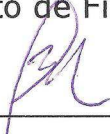
Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



---

(Membro interno)

Prof. Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz  
Instituto de Física – UnB



---

(Membro externo)

Prof. Dr. Luciano Barosi de Lemos  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG

One could perhaps describe the situation by saying that God is a mathematician of a very high order, and He used very advanced mathematics in constructing the universe.

Paul Dirac

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mãe, pelo constante apoio dado em mais uma jornada minha fora de casa para concretizar esse projeto.

Ao Prof. Dr. Francisco Brito por me dar a liberdade de vir com um tema de meu interesse e realizar este trabalho, esclarecendo minhas dúvidas em vários momentos.

Ao Prof. Dr. David Mota, por ter indiretamente me sugerido o tema desta dissertação, visto que não conhecia nada sobre até ser aluno dele.

Agradeço também a todos que conheci na UFCG, por proporcionarem um bom ambiente dentro e fora da sala de aula.

A CAPES, pelo suporte financeiro.

# Lista de Figuras

2.1	Transporte paralelo de um vetor na superfície de uma esfera. . . . .	5
2.2	Magnitude efetiva das 42 supernovas tipo Ia para o <i>redshift</i> . . . . .	13
2.3	Fator de escala para vários modelos cosmológicos. . . . .	14
2.4	Linhas de $H_0 t_0$ constante no plano $\Omega_\Lambda - \Omega_m$ . . . . .	15
2.5	O plano $\Omega_m - \Omega_K$ para dados combinados do satélite Planck e de oscilações acústicas de bárions. . . . .	16
2.6	Regiões de confiança para os valores de $\Omega_m$ e $w$ , para os resultados de observações de supernovas. Fonte: [5]. . . . .	17
3.1	O potencial 3.11 para $\rho = 1$ (esquerda) e $\rho = 3$ (direita). . . . .	22
3.2	O potencial 3.39 em diferentes configurações. . . . .	26
3.3	Solução do campo <i>symmetron</i> após a quebra de simetria. . . . .	30
3.4	$\Omega_\phi, \Omega_m$ e $\Omega_\Lambda$ para o <i>symmetron</i> . . . . .	31
3.5	$H/H_0$ de $z = 2$ até tempos atuais. . . . .	32
4.1	O fator de escala (4.31) e (4.35) para $n = 1/2$ e $A = 2$ . . . . .	39
4.2	O fator de escala (4.31) e (4.35) para $n = 1/4$ e $A = 2$ . . . . .	40
5.1	Diagrama de pontos críticos a partir da matriz $A$ . . . . .	46
5.2	Trajетórias entre os pontos críticos do sistema 5.19. A região em amarelo indica onde $w_{eff} < -1/3$ , e há aceleração. . . . .	50
5.3	Evolução dos parâmetros de densidade e do parâmetro efetivo da equação de estado para o modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	51
5.4	Trajетórias entre os pontos críticos do sistema 5.28-5.30, para $\xi = 1/6$ e $z_0^2 = 2$ . . . . .	54
5.5	Projeção nos eixos x e z do espaço de fase junto de soluções mostradas na Figura 5.4. . . . .	55

5.6	$\Omega_\phi, \Omega_m$ e $w_{eff}$ para a linha azul na Figura 5.2. . . . .	56
5.7	$\Omega_\phi, \Omega_m$ e $w_{eff}$ para soluções com aceleração na Figura 5.4. . . . .	57
5.8	Diagramas de fase para o potencial (5.23) e $\xi = 0$ . . . . .	58
5.9	$\Omega_\phi, \Omega_m$ e $w_{eff}$ para uma das soluções da Figura 5.8. . . . .	59
5.10	Parâmetros cosmológicos para o modelo não mínimo com $\xi = 1/6$ e $\alpha = 1/\sqrt{7}$ . . . . .	61
6.1	O potencial da Eq. 6.8. . . . .	65
6.2	O potencial expresso na Eq. 6.12. Note que para um certo valor de $\phi$ , inicia-se uma região de instabilidade. . . . .	66
6.3	Projeção no espaço tridimensional do sistema 6.16. . . . .	68
6.4	Coordenadas (6.15) para a trajetória na Figura 6.3. . . . .	69
6.5	Projeções em 2-d do sistema 6.16. . . . .	70
6.6	$\tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{H}, w_{eff}$ e $q$ para o sistema (6.2-6.5). . . . .	72
6.7	$\tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{H}, w_{eff}$ e $q$ para o sistema (6.2-6.5), onde $\psi$ não evolui. . . . .	73



# Lista de Tabelas

5.1	Classificação de pontos críticos para sistemas em duas dimensões. . . . .	47
5.2	Classificação de pontos críticos para sistemas em três dimensões. . . . .	48
5.3	Pontos críticos e estabilidade do sistema (5.19). . . . .	50

# Lista de Abreviaturas e Siglas

FRW - *Friedmann-Robertson-Walker*

VEV - *Valor Esperado do Vácuo*

RG - *Relatividade Geral*

# Resumo

Neste trabalho, estudaremos as propriedades de modelos cosmológicos com acoplamento não-mínimo de um campo escalar à geometria, aplicados a mecanismos de blindagem, com foco no modelo do *symmetron*, que faz com que o campo esteja presente apenas em ambientes de baixa densidade de matéria e tempos de expansão acelerada, como na inflação e na aceleração cósmica atual. Veremos a forma mais simples do modelo, para em seguida considerar modificações que buscam aliviar problemas presentes na forma original. A dinâmica de cada potencial será estudada pelo método dos sistemas dinâmicos de equações de primeira ordem, onde podemos gerar diagramas de fase e calcular parâmetros cosmológicos importantes. Encontraremos que o modelo de dois campos pode gerar soluções do tipo de Sitter estáveis, úteis para descrever uma aceleração cósmica persistente.

Palavras-chave: Symmetron, Mecanismo de Blindagem, Energia Escura.

# Abstract

In this work, we will study the properties of cosmological models with non-minimal coupling of a scalar field with the geometry, with a screening mechanism, more specifically the symmetron mechanism, which makes the field active only in ambients of low matter density and times of accelerated expansion, like the inflation and the current cosmic acceleration period. We will see the simplest form of the model, to consider afterwards that seek to alleviate problems present in its original form. The dynamics of each potential will be investigated by the method of dynamical system of autonomous first order equations, where we can generate phase diagrams and compute important cosmological parameters. We will find that the two-field model can generate stable de Sitter solutions, useful to describe a persistent cosmic acceleration.

Keywords: Symmetron, Screening Mechanism, Dark Energy.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Relatividade Geral e Cosmologia</b>	<b>4</b>
2.1	Equações de Campo . . . . .	4
2.2	Cosmologia . . . . .	8
2.2.1	As equações de Friedmann . . . . .	8
2.2.2	O modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Cosmologia Com Campos Escalares</b>	<b>18</b>
3.1	Por quê Gravidade Modificada? . . . . .	18
3.2	Mecanismos de Blindagem . . . . .	20
3.2.1	Chameleon . . . . .	21
3.2.2	Vainshtein . . . . .	23
3.3	O Modelo do Symmetron . . . . .	24
3.3.1	Evolução Cosmológica . . . . .	28
3.4	Problemas do Modelo . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Incorporando um Acoplamento Não-Mínimo ao Campo Escalar</b>	<b>33</b>
4.1	Equações de Movimento . . . . .	33
4.1.1	O Referencial de Einstein . . . . .	35
4.1.2	Relacionando o referencial de Jordan com o de Einstein . . . . .	37
4.1.3	Um Exemplo: A Expansão em Lei de Potência . . . . .	38
4.2	A quebra da simetria conforme . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Análise do Espaço de Fase Para o Modelo Não-Mínimo</b>	<b>44</b>
5.1	Sistemas Dinâmicos . . . . .	44

5.1.1	Condições de Estabilidade . . . . .	45
5.1.2	Linearização . . . . .	47
5.2	Análise Dinâmica Para o $\Lambda$ CDM . . . . .	49
5.3	O Espaço de Fase para $V(\phi) = U_0(\phi^2 - \phi_0^2)^2$ . . . . .	51
5.3.1	Caracterização dos Pontos Fixos . . . . .	53
5.4	O <i>Symmetron</i> quando $\xi \neq 0$ . . . . .	57
5.4.1	A Falta de Soluções Tipo de Sitter para o Campo Escalar . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Um Modelo Híbrido com Quebra de Simetria</b>	<b>63</b>
6.1	Equações de Movimento . . . . .	63
6.2	Sistema Dinâmico . . . . .	65
6.3	Soluções Numéricas . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Propriedades do Tensor de Riemann</b>	<b>76</b>
<b>B</b>	<b>O Princípio Variacional para a Relatividade Geral</b>	<b>77</b>
<b>C</b>	<b>Variação da Ação com Acoplamento Não-Mínimo</b>	<b>80</b>
<b>D</b>	<b>Prova da Simetria Conforme</b>	<b>82</b>
<b>E</b>	<b>Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz</b>	<b>84</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>86</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Desde a formulação da relatividade geral, em 1915, teorias com o intuito de estendê-la foram propostas na busca de prever e descrever possíveis características que objetos astrofísicos, e o próprio universo pudessem possuir. Entre as modificações mais populares, temos os trabalhos de Jordan, Brans e Dicke [1], Kaluza e Klein [2], que introduzem campos escalares e dimensões extras como novos objetos atuantes na descrição de fenômenos cósmicos.

Tais modificações também viraram ingredientes essenciais para a chamada inflação cósmica [3], desenvolvida a partir da década de 80, quando se percebeu uma série de problemas relacionadas com a ideia da expansão a partir de uma singularidade, como os problemas do horizonte e da planura. Esses problemas podem ser resolvidos se um campo escalar é introduzido como agente de uma expansão acelerada logo no período inicial da evolução cósmica, embora evidências mais concretas da existência desse campo ainda estejam para aparecer. Outro evento que fez o número de extensões e modificações da relatividade geral aumentar significativamente, foi a descoberta da expansão acelerada do universo, em 1998 [4],[5]. Embora o modelo que mais concorde com as observações seja a própria relatividade geral, ela necessita que um termo constante seja adicionado às equações, cuja natureza é ainda desconhecida. A dificuldade em entender a presença e o valor desse termo levaram aos chamados problemas da coincidência e da constante cosmológica, onde muitos dos modelos modificados ainda não conseguem tratar de forma completa. Assim como no regime inflacionário, vários modelos de gravidade estendida recorrem a existência de campos escalares como responsáveis pela aceleração cósmica atual. Um dos mais estudados nos últimos anos é chamado de quintessência [6], no qual

se prevê uma nova forma de matéria adicionada às equações de movimento, dependente de um termo potencial que rege a dinâmica desse campo e cujas soluções podem ser comparáveis às observações. No entanto nos últimos anos, observações mostraram que se um campo do tipo existisse, ele já teria sido detectado no nosso sistema solar[34]; assim, pode haver a existência de um mecanismo que esconda a presença do campo em certas regiões do espaço. Tais mecanismos são chamados de *mecanismos de blindagem* [7],[8], e foram bem explorados nos últimos anos [10],[11],[12].

Neste trabalho, focaremos em um mecanismo em específico. O *symmetron* [13], [14], é um campo escalar cuja dinâmica é descrita por um potencial tipo Higgs, ou seja, o valor esperado do campo é controlada pela quebra espontânea da simetria do potencial. O possível efeito do campo na formação de estruturas foi explorado [11], na inflação [15], e no regime de aceleração atual [14]. Mas os parâmetros determinados por experimentos locais limitam o modelo de modo que o potencial não consegue realizar a aceleração cósmica. Além disso experimentos recentes com oscilações acústicas de nêutrons [16], não encontraram o campo para um intervalo considerável de parâmetros. Mesmo assim, a praticidade da ideia de uma quebra de simetria como responsável pelo surgimento de um novo campo é atraente e algumas modificações da gravidade aliadas ao mecanismo foram realizadas [17],[18],[19],[20],[21] e mostram que a aceleração cósmica pode ser alcançada para o potencial tipo Higgs com diferentes parâmetros. Desta forma, escolheremos uma das teorias modificadas, generalizada pela teoria de Brans-Dicke e veremos como o mecanismo de quebra de simetria ocorre nesses casos. O trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 2, faremos uma revisão da relatividade geral, e das equações de Friedmann para a cosmologia, com uma breve discussão dos modelos de Einstein-de Sitter e  $\Lambda$ CDM, e por fim falaremos sobre os problemas da constante cosmológica.

No Capítulo 3, iremos introduzir o campo escalar nas equações cosmológicas e ver as principais consequências, através de um modelo popular, que é a ideia da quintessência, um novo tipo de matéria adicionada às equações de Einstein. Em seguida, trataremos sobre os mecanismos de blindagem, que controlam a detecção do campo escalar dependendo de fatores como a densidade local do espaço. Iremos citar os mecanismos mais populares, mas veremos em detalhes o mecanismo do *symmetron*, para o qual mostraremos os principais aspectos em relação a evolução cosmológica, e os problemas a serem resolvidos.



O Capítulo 4 trata sobre extensões da relatividade geral, onde escolhemos um modelo em que o campo escalar se acopla a geometria, resultando em equações de Friedmann extendidas e uma diferente dinâmica cosmológica. Há o surgimento de um novo parâmetro adimensional  $\xi$ , cujos valores podem afetar de forma significativa o comportamento do modelo. Falaremos dos referenciais de Jordan e de Einstein, que são presentes em modelos do tipo, onde as quantidades da ação são redefinidos a partir de uma função  $\Omega$ , nos permitindo expressar a ação da teoria geralmente em uma forma mais familiar em relação a modelos de quintessência. Por fim, falaremos da simetria conforme também presente no modelo para o valor específico de  $\xi = 1/6$ .

No Capítulo 5, usaremos as técnicas dos sistemas dinâmicos para analisar as equações de movimento apresentadas no Cap. 4 com mais facilidade e objetividade; escolhendo um potencial do tipo Higgs, veremos que cada ponto fixo do sistema representa um tipo de solução com valor definido dos parâmetros de densidade  $\Omega$  e parâmetro da equação de estado  $w$ , onde há possibilidade de soluções que caracterizem expansão acelerada. No final, tentaremos aplicar o mecanismo do *symmetron* ao modelo extendido, e veremos se os problemas expostos no capítulo 3 são aliviados.

No Capítulo 6, iremos considerar um modelo proposto recentemente, composto de dois campos escalares, em que apenas um deles está acoplado a geometria da mesma forma que no Capítulo 5. Veremos que é possível nesse caso, que a formação de um potencial efetivo é possível sem a introdução de uma função que se acople à densidade, e que a presença do segundo campo possibilita a criação de pontos de Sitter reais e estáveis, para certos valores dos parâmetros do modelo. Através de soluções numéricas das equações de movimento, confirmaremos que um estado de Sitter eventualmente é alcançado, após um período de super aceleração.

Finalmente no Capítulo 7, apresentamos as conclusões e perspectivas do trabalho.

# Capítulo 2

## Relatividade Geral e Cosmologia

Neste capítulo apresentamos uma revisão geral da cosmologia atual [24],[25]. Obtemos as equações de Friedmann e suas soluções para o modelo atual de evolução cósmica, o  $\Lambda$ CDM, e discutimos brevemente o problema da constante cosmológica.

### 2.1 Equações de Campo

A relatividade geral é baseada na ideia que o espaço-tempo pode se curvar de acordo com o conteúdo de matéria e energia contida em uma região. Sendo assim, é necessário entender a matemática de espaços curvos, para assim interpretar o efeito da curvatura como a própria gravidade. A quantidade que define inicialmente que tipo de geometria teremos é o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , onde o seu conteúdo diz o que é necessário para descrevermos o espaço em que eventos acontecem, como as definições de distâncias e tempo, a noção de causalidade e o campo gravitacional no limite onde a física newtoniana é válida.

Uma das primeiras noções que devemos ter quando falamos de curvatura é a de *transporte paralelo*. Em um espaço plano, podemos mover um dado vetor ao longo de um caminho paralelamente a si mesmo em tempos anteriores se mantemos esse vetor constante. No entanto em um espaço curvo, a mesma ação terá resultados diferentes dependendo do caminho tomado (Figura 2.1).

Assim, o que podemos fazer para realizar a ideia de transporte paralelo em um espaço curvo é usar a definição da *derivada covariante*, que faz o papel da derivada parcial em um espaço curvo, de forma que há uma modificação em termos da *conexão afim*  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$

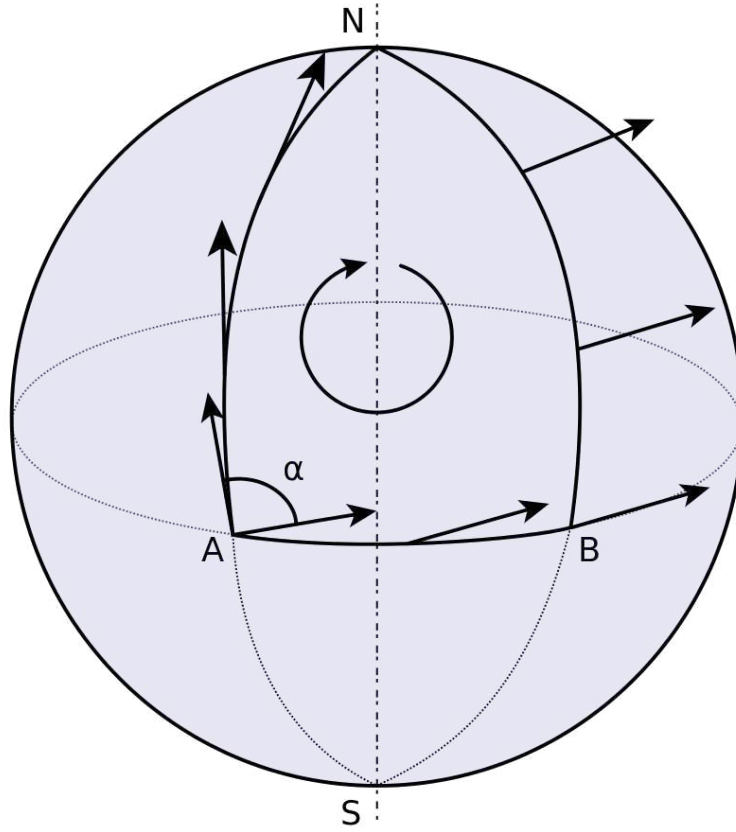


Figura 2.1: Transporte paralelo de um vetor na superfície de uma esfera. O início da trajetória se dá no ponto A, e no final do caminho fechado, vemos que o vetor aponta em outra direção, formando um ângulo  $\alpha$  com o seu estado inicial. Fonte: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parallel\\_Transport.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parallel_Transport.svg)

definida como

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} V^{\lambda} \quad (2.1)$$

Em termos da métrica, podemos mostrar que a conexão é dada pelos *símbolos de Christoffel*

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (2.2)$$

presente na *equação da geodésica*

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0 \quad (2.3)$$

que representa a curva pela qual um vetor tangente é paralelamente transportado. Se os coeficientes da conexão são os do espaço euclidiano, eles vão ser zero, e assim a Eq. (2.3)

se tornará a equação de uma linha reta. Por outro lado, em espaços curvos, os coeficientes não se anulam, e uma forma de quantificar a curvatura em dado local é pelo uso do tensor de Riemann, expresso por

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}, \quad (2.4)$$

cujas propriedades são apresentadas no Apêndice A. Se tomamos a derivada covariante deste tensor, e somarmos a contribuição das permutações cíclicas dos três primeiros índices, teremos a seguinte relação

$$\nabla_{\lambda}R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho}R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma}R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0, \quad (2.5)$$

que é conhecida como a *identidade de Bianchi*. Por ser um tensor com quatro índices, o tensor de Riemann pode ser difícil de se trabalhar. Assim podemos transformá-lo em um tensor de ordem 2, pela contração que resulta em

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.6)$$

que é chamado de *tensor de Ricci*. Ele tem essa forma pois o traço dos dois últimos e dois primeiros índices do tensor de Riemann resultam em zero, mas não o traço do primeiro e terceiro índice. Este tensor é simétrico, ou  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ . O traço deste tensor nos dá o *escalar de curvatura R*:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Como vimos da obtenção do tensor de Riemann, estas quantidades nos dão informações sobre a curvatura do espaço, assim, na busca de equações que descrevam a gravidade em termos da curvatura, somos induzidos a usar este tensor, ou uma combinação que o contenha para obter algo consistente. Devemos então estabelecer princípios que farão com que essa conexão seja possível, e a teoria deverá obedecê-los quando confrontados com experimentos. O primeiro é o *princípio da equivalência*, que pode expresso como:

- Em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, as leis da física devem se reduzir a mesma forma da relatividade especial.

Existe também um conjunto de princípios que se referem à generalização das leis da física, garantindo que independentemente da situação em que um sistema se encontre, seja possível encontrar leis que regem a dinâmica existente e que essas leis são equivalentes em qualquer referencial. Assim, temos

- **Princípio da relatividade geral:** Todos os referenciais são equivalentes;
- **Princípio da covariância geral:** As equações da física tem forma tensorial;

Nesse caso, o primeiro princípio estende o que foi feito na relatividade especial, onde tudo se aplicava a referenciais inerciais; dessa vez, independente do referencial, devemos encontrar a mesma física. Já o segundo princípio evidencia a capacidade de tensores de se transformar da mesma forma em qualquer referencial, o que é justamente o que a teoria busca.

Existe ainda outro princípio, que pode ser descrito como uma sequência de “passos” em como realizar a transição de um espaço plano para um espaço curvo para uma certa teoria. O *princípio do acoplamento mínimo* diz que podemos:

1. *Escolher uma lei física válida no espaço plano;*
2. *Escrever essa lei em forma tensorial;*
3. *Verificar a validade dessa lei no espaço curvo.*

Como exemplo, temos a lei de conservação da energia que em forma tensorial é escrita como  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , onde  $T^{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento. O terceiro passo nos sugere usar a Eq. (2.1) que representa a derivada parcial em um espaço curvo, de forma que teremos  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

Algo a se notar é que na formulação destes princípios, é englobada toda a física, em uma época em que teorias como a mecânica quântica ainda estavam dando seus primeiros passos. Embora os princípios se apliquem bem a teorias clássicas, cautela é necessária em teorias mais atuais.

Por fim, outro princípio que as teorias físicas devem seguir no geral é o *princípio da correspondência*, que garante a redução de uma teoria para outra anterior no limite que ela é válida; por exemplo a relatividade geral deve se reduzir a relatividade especial na ausência de gravidade ou a teoria newtoniana quando o campo gravitacional é suficientemente fraco e as velocidades são baixas.

Em termos das quantidades apresentadas, a equação de campo de Einstein é dada por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde  $\kappa = 8\pi G$ , com  $c = 1$ . Ela vai descrever como o conteúdo de matéria e energia em  $T_{\mu\nu}$  afeta a geometria descrita por  $G_{\mu\nu}$ .

## 2.2 Cosmologia

Uma das mais importantes aplicações da Relatividade Geral é na descrição do próprio universo. Por meio das equações de campo podemos extrair soluções que nos dizem como ele era há bilhões de anos e como se comporta atualmente. Também é possível descrever fenômenos astrofísicos e o processo de formação de galáxias, assim, a teoria é um grande triunfo para a ciência e inaugurou uma nova era de pesquisas em diversos ramos da física.

Para aplicar a RG na evolução do universo, geralmente partimos do chamado *princípio copernicano*, que diz essencialmente que o universo se parece o mesmo em todo lugar, em grandes escalas. Podemos desenvolver esta ideia até chegarmos no que é conhecido hoje como *princípio cosmológico*, que se baseia nas ideias de *isotropia* e *homogeneidade*.

Isotropia é quando o espaço parece o mesmo independente da direção que se olhe. Homogeneidade é quando o espaço parece o mesmo em qualquer lugar. O princípio cosmológico admite que as duas ideias são satisfeitas em grandes escalas, embora seja possível que haja um espaço que seja homogêneo mas não isotrópico e vice-versa.

### 2.2.1 As equações de Friedmann

Observações indicam que o princípio cosmológico é verdadeiro, assim é possível postular um universo que é homogêneo e isotrópico espacialmente, mas que evolui. A métrica que descreve esse universo é a de *Friedmann-Robertson-Walker*, com elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.9)$$

que vamos usar para resolver a equação de Einstein, e obter novas equações, que esperamos que nos forneçam uma forma de descrever a evolução cósmica.  $a(t)$  é o *fator de escala*, que é uma função que relaciona como as distâncias mudam a medida que o universo expande;  $k$  corresponde à curvatura do espaço, onde podemos relacioná-la com os valores que  $k$  pode tomar.  $k = -1$  corresponde a uma curvatura negativa e é chamada de *aberta*.  $k = 0$  corresponde a zero curvatura, chamada *plana*. Já o caso  $k = +1$  descreve uma curvatura positiva, ou *fechada*. Também,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ . Se escolhermos a seguinte forma

para o tensor energia momento, a de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

ou

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (2.11)$$

o traço é dado por

$$T = -\rho + 3p, \quad (2.12)$$

é possível calcular as componentes da equação de campo (2.8). As equações resultantes para  $\mu\nu = 00$  e  $\mu\nu = ij$  são, respectivamente

$$3H^2 = 8\pi G\rho - \frac{3k}{a^2}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.14)$$

sendo equações diferenciais onde podemos considerar casos simples e derivar relações para o comportamento do fator de escala em relação ao tempo. A Eq. (2.13) é conhecida como a *equação de Friedmann*, e a Eq. (2.14) como *equação de Raychaudhuri*. Aqui temos uma quantidade nova, chamada *parâmetro de Hubble*, definida como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.15)$$

de onde o valor atual,  $H_0$ , embora com divergências entre diferentes observações tem valor observado  $H_0 = 67,4 \pm 0,5$  km/s/Mpc [27], ou mais convenientemente,  $H_0 = 100h$  km/s/Mpc, onde  $h \approx 0,674$ . Uma quantidade útil é o *parâmetro de densidade*  $\Omega$ , que é definido como

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \quad (2.16)$$

com  $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$  sendo a densidade crítica. Ela tem esse nome, pois dependendo de sua relação com a densidade  $\rho$ , define a geometria do espaço. Podemos verificar isso pela equação de Friedmann (2.13), que quando reescrita em termos de  $\Omega$  fica

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}, \quad (2.17)$$

e verificamos que o sinal de  $k$ , que define o tipo de geometria, é dependente de  $\Omega$ , ou seja, da relação entre a densidade total e a densidade crítica. Observações indicam um valor de  $\Omega \approx 1$  [27], assim, o lado direito da (2.17) é essencialmente zero, o que indica que o universo é plano. Sendo assim, consideraremos  $k = 0$  no decorrer do trabalho.

Vamos considerar agora o tensor energia-momento, onde a eq. da conservação  $\nabla_\mu T_\nu^\mu$  resulta em

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)H, \quad (2.18)$$

onde foi usada a relação entre pressão e densidade, representada pela equação de estado

$$p = w\rho. \quad (2.19)$$

Se considerarmos  $w$  constante, a solução de (2.18) é

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (2.20)$$

Podemos então, considerar vários tipos de fluidos cosmológicos, sendo útil usar componentes que sabemos que há em nosso universo, como matéria não-relativística e radiação. Para matéria não-relativística, como estrelas e galáxias, temos  $p_M = 0$ , e  $w_M = 0$ , e a solução fica

$$\rho_M \propto a^{-3}, \quad (2.21)$$

o que pode ser interpretado como o decréscimo da densidade de matéria a medida que o espaço expande com unidades do inverso de volume. No caso de radiação, que engloba no geral partículas massivas ou não, que se movem a velocidades próximas a da luz, temos um valor de  $w_R = \frac{1}{3}$ , e a densidade relacionada à radiação decresce como

$$\rho_R \propto a^{-4}, \quad (2.22)$$

onde o fator extra de  $\frac{1}{a}$  pode ser compreendida como referente a perda de energia pelo *redshift* cósmico. Estas equações descrevem grande parte da evolução cósmica até agora. Quando o universo estava em seus estágios iniciais, radiação era mais abundante, de forma que a evolução da densidade total obedecia à Eq. (2.22). Eventualmente, o universo esfriou, criando outra categoria de matéria (não-relativística), que passou a dominar sobre a radiação, com evolução dada pela Eq. (2.21). Tal modelo era o mais popular antes da



descoberta da expansão acelerada do universo, chamado de *Einstein-de Sitter*. Uma outra opção interessante é quando a expansão é dominada pelo vácuo, cuja equação de estado se torna  $p_{vac} = -\rho_{vac}$ , o que implica em densidade constante

$$\rho_{vac} \propto \text{constante}, \quad (2.23)$$

caso em que o fator de escala evolui como  $a(t) \propto \exp(Ht)$ . Soluções deste tipo descrevem um *universo de de Sitter*. Para finalizar a seção, apresentamos duas quantidades que serão usadas no decorrer do trabalho e são úteis em caracterizar o tipo de expansão que está ocorrendo no universo. A forma efetiva do parâmetro  $w$  em (2.19), que considera todas as componentes da equação de Friedmann é dada por

$$w_{eff} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (2.24)$$

e o parâmetro de desaceleração  $q$  é

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.25)$$

Quando  $q < 0$ , significa que há expansão acelerada, de forma que um universo de de Sitter tem  $q = w_{eff} = -1$ , e um universo de Einstein-de Sitter tem  $q = 0.5$  e  $w_{eff} = 0$ .

## 2.2.2 O modelo $\Lambda$ CDM

As soluções da equação de Friedmann nos possibilitaram encontrar um modelo que descreve com precisão a evolução do universo nos tempos atuais. Tal modelo se chama  $\Lambda$ CDM (onde CDM - *Cold Dark Matter*), que conta essencialmente com parâmetros de densidade  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$  e  $\Omega_\Lambda$ , onde  $\Omega_\Lambda$  corresponde a solução de vácuo em (2.23). Uma quantidade importante em cosmologia é o *redshift* cósmico dado por

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}, \quad (2.26)$$

cujo nome vem da descoberta por Edwin Hubble em 1929, de uma relação aproximadamente linear entre o redshift e a distância de galáxias, onde a velocidade de recessão dessas galáxias aumentava de acordo com o redshift da luz emitida por elas. Por exemplo, no nosso grupo local de galáxias, a velocidade de recessão média era de 1000 km/s enquanto em outro grupo, Coma, com redshift  $z \approx 0,02$  a velocidade era de cerca de 7000 km/s. Essa descoberta serviu como evidência de que o universo estava expandindo, e temos um

fator de escala que aumenta com o tempo, que possibilitou a descrição da evolução cósmica pelas equações da subseção anterior.

Na determinação de distâncias em redshifts grandes ( $z > 0.1$ ), os astrônomos buscam fontes que podem ser consideradas como “velas padrão”, que possuem magnitude absoluta aproximadamente constante. Antes, as galáxias mais brilhantes de aglomerados eram usadas para esse propósito; contudo hoje se sabe que essa magnitude muda ao longo do tempo, assim foi preciso achar uma outra fonte que as substituísse de forma eficaz.

Supernovas do tipo Ia ocorrem quando uma anã branca em um sistema binário ganha massa de sua companheira até o limite de Chandrasekhar, de aproximadamente 1,4 massas solares. A instabilidade provocada por esse processo desencadeia uma nova explosão termonuclear, com magnitude que a faz ser visível a centenas de megaparsecs de distância. Uma coisa em comum em todos esses processos é, que devido à massa da estrela, o espectro da magnitude absoluta é essencialmente o mesmo, com um pico de  $\approx -19,2$ . Observações desse processo foram publicadas por dois grupos [4][5], que mostraram a relação entre a magnitude aparente dessas supernovas com o redshift, mostrando, que para redshifts entre 0,16 e 0,97, o modelo que melhor descreve a atual evolução cósmica exclui  $\Omega_{vac} \leq 0$ , o que corresponde a uma constante cosmológica  $\Lambda$  adicionada as equações de campo de Einstein (Figura 2.2). Para um universo de geometria plana, modelos onde  $\Omega_{vac} + \Omega_m = 1$ , são favorecidos com  $\Omega_m \approx 0,28$ , significando uma dominância da componente  $\Lambda$  atualmente, ou seja,  $\Omega_\Lambda$  tem valor de aproximadamente 0,70. Tal combinação implica em um universo com aceleração positiva (Figura 2.3), ou  $\ddot{a} > 0$ , que pode ser visto explicitamente pela Eq. (2.14)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.27)$$

Se a densidade total é  $\rho = \rho_m + \rho_\Lambda$  e a pressão é  $p = p_m + p_\Lambda$ , e lembrarmos que  $p_m = 0$  e  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ , (2.27) se torna

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m - 2\rho_\Lambda). \quad (2.28)$$

Como as observações de supernova indicam que  $\rho_\Lambda > \rho_m$ , temos  $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$ . As soluções para o fator de escala e a idade do universo pelo modelo são [28]

$$a(t) = a_0 \left( \frac{\Omega_{m0}}{1 - \Omega_{m0}} \right)^{1/3} \left[ \sinh \left( \frac{3}{2} \sqrt{1 - \Omega_{m0}} H_0 t \right) \right]^{2/3}, \quad (2.29)$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{1-\Omega_{m0}}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\Omega_{m0}}}{\sqrt{\Omega_{m0}}} \right), \quad (2.30)$$

onde a contribuição da radiação  $\Omega_{r0} \approx 10^{-5}$  foi desprezada e é possível encontrar soluções analíticas mais facilmente. Embora as observações concordem com um modelo composto

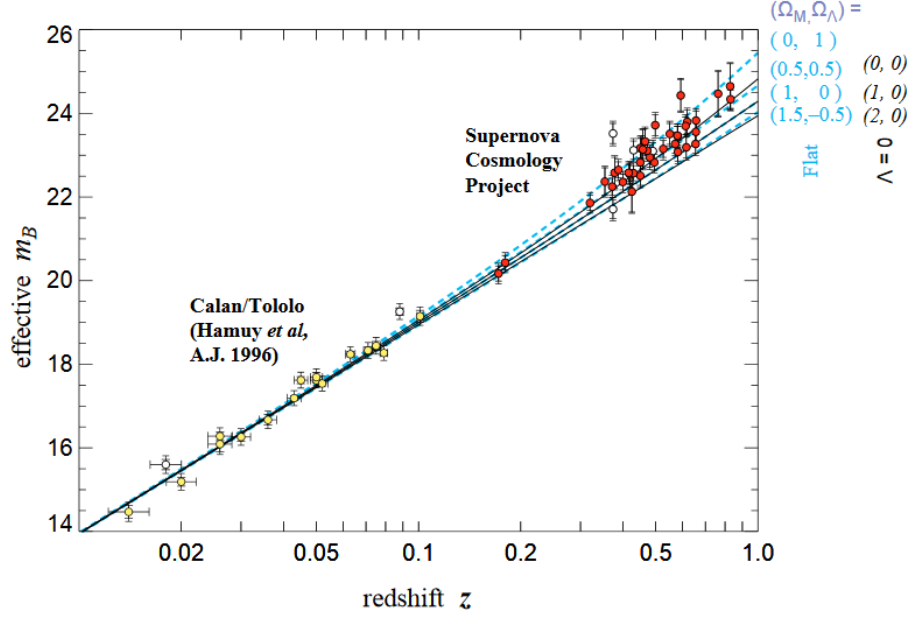


Figura 2.2: Magnitude efetiva das 42 supernovas tipo Ia para o *redshift*. Os dados do Supernova Cosmology Project favorecem um universo com  $\Omega_\Lambda > 0$ , onde  $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$ . Fonte:[5].

também de energia do vácuo, não se sabe sobre a sua natureza, e nem se ela é realmente constante ao longo da evolução cósmica. Essa componente cuja natureza se tornou um dos maiores problemas da cosmologia moderna, é chamada de *energia escura*.

A idade do universo para o modelo Einstein-de Siiter é obtida se tomamos o limite da Eq. (2.30) para  $\Omega_\Lambda \rightarrow 0$ , onde  $\Omega_{m0} + \Omega_\Lambda = 1$ , obtendo

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}. \quad (2.31)$$

Usando os valores mais recentes do satélite Planck [27], calculamos aproximadamente  $t_0 \approx 9,67$  Gyr. A idade estimada de aglomerados globulares na nossa galáxia varia entre  $12,9 \pm 2,9$  Gyr e  $13,5 \pm 2$  Gyr [29], [30], assim há uma inconsistência entre esses valores onde teríamos estruturas mais antigas que o próprio universo.  $\Omega_\Lambda \neq 0$  resolve o problema. Nesse caso, para  $\Omega_m \rightarrow 0$ , teremos  $t_0 \rightarrow \infty$ , de modo que  $t_0$  aumenta se  $\Omega_{m0}$  diminui. Assim, uma constante cosmológica positiva possibilita um universo mais antigo, onde em

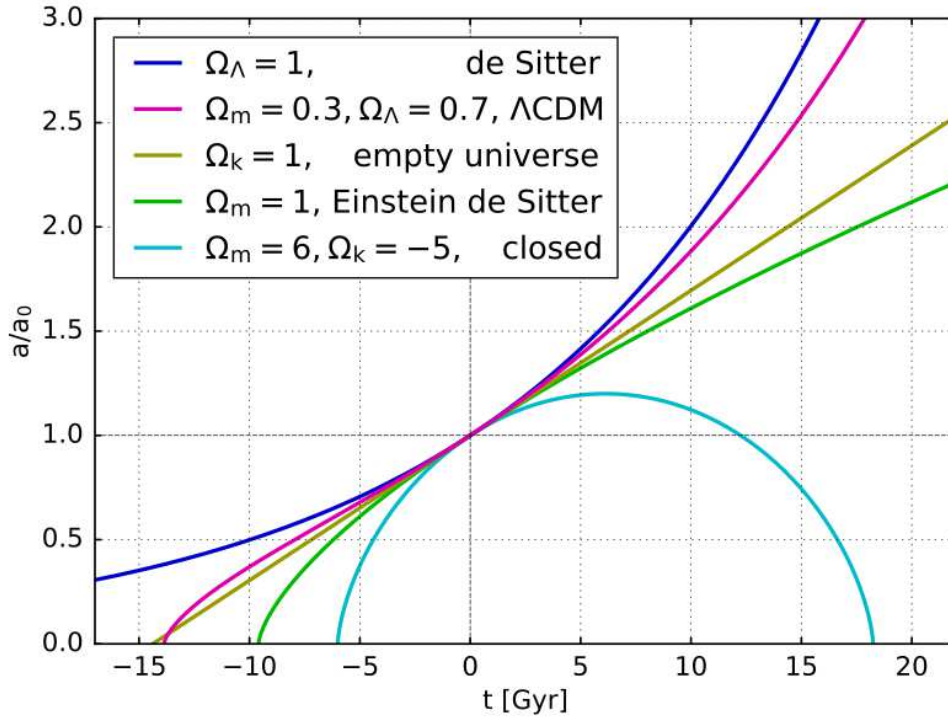


Figura 2.3: O fator de escala para vários modelos cosmológicos. A linha verde representa o modelo de Einstein-de Sitter e a linha magenta, o modelo  $\Lambda$  CDM, onde a contribuição da radiação no presente é descartada (Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/De\\_Sitter\\_universe#/media/File:Mplwp\\_universe\\_scale\\_evolution.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/De_Sitter_universe#/media/File:Mplwp_universe_scale_evolution.svg)).

[27], é reportado um valor de  $t_0 = 13,787 \pm 0,020$  Gyr para o  $\Lambda$ CDM. Na Figura 2.4, para os resultados de 1998 [5], temos as linhas de tempo cósmico constante no plano  $\Omega_\Lambda - \Omega_m$ , onde a região de maior confiança experimental intercepta uma linha onde  $H_0 t_0 = 14.3$  Gyr. Também, do mesmo artigo, temos as regiões de confiança para a equação de estado da energia escura, no plano  $\Omega_m - w$  (Figura 2.6). Já na Figura 2.5, temos os resultados do relatório do Planck para a densidade de matéria atual e curvatura. Os dados correspondem a uma geometria plana, onde  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ .

A constante adicionada às equações de Einstein necessária para realizar a presente aceleração cósmica precisa ser da ordem do parâmetro de Hubble atual

$$\Lambda \approx H_0^2. \quad (2.32)$$

Se expressamos  $\Lambda$  como uma densidade adicionada à Eq. (2.13), encontraremos que

$$\rho_\Lambda = \Lambda M_{Pl}^2 \approx 10^{-47} GeV^4, \quad (2.33)$$

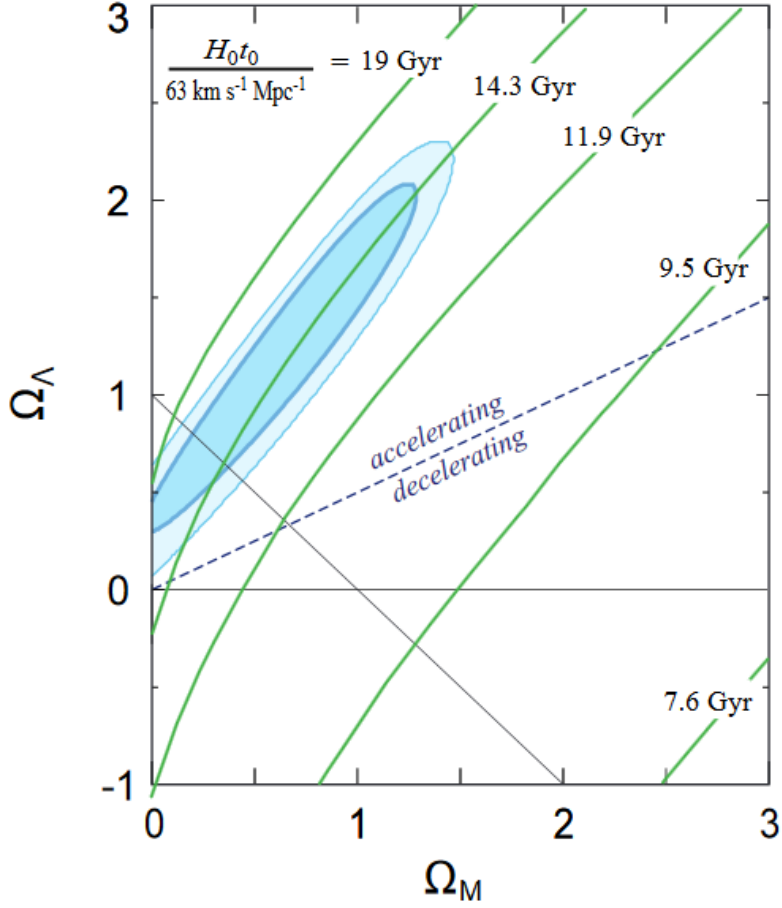


Figura 2.4: Linhas de  $H_0 t_0$  constante no plano  $\Omega_\Lambda - \Omega_m$ . A região em azul representa uma região de confiança de 90%,. Fonte:[5].

para  $M_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} \approx 10^{19}$  GeV. Se comparamos este valor com a densidade de energia do vácuo, obtida da energia de ponto zero  $E = \omega/2 = \sqrt{k^2 + m^2}/2$  até o limite onde a Relatividade Geral é considerada válida, a escala de Planck, encontramos que

$$\rho_{vac} \approx M_{Pl}^4 \approx 10^{74} GeV^4, \quad (2.34)$$

e percebemos uma diferença de 121 ordens de magnitude entre (2.33) e (2.34), que é minimizada quando se considera outras escalas de energias em física de partículas ( $\rho_{vac} \approx 10^{-3} GeV^4$ ) e em teorias supersimétricas, contudo ainda há uma diferença fora do aceitável para serem usadas como interpretação para o valor previsto. Outro problema é o fato do valor da constante cosmológica observado ser da ordem da densidade cósmica atual. Em um universo descrito pelo modelo  $\Lambda$ CDM, nós vivemos agora justamente na época da transição da dominância da matéria para um universo dominado por  $\Lambda$ . O *redshift*

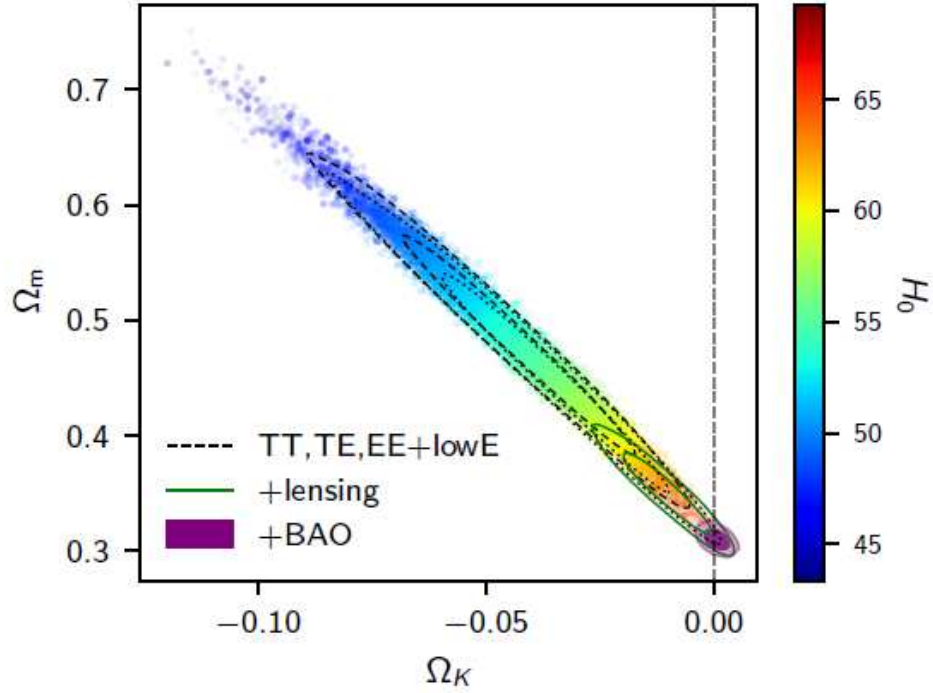


Figura 2.5: O plano  $\Omega_m - \Omega_K$  para dados combinados do satélite Planck e de oscilações acústicas de bárions (BAO, na imagem), onde a coloração refere-se ao valor do parâmetro de Hubble atual. A região de maior confiança está na área em roxo, após a adição dos dados de BAO; nota-se uma consistência com um universo de geometria plana ( $\Omega_K = 0$ ).  
 Fonte: [27]

previsto onde  $\Omega_{\Lambda 0} = \Omega_{m 0}$  é  $z_{coinc} \approx 0.3$  [?], sendo bem próximo do nosso tempo presente. Esse problema é chamado o *problema da coincidência*. No próximo capítulo veremos o que há além da Relatividade Geral, para explicar fenômenos que estão além do alcance da teoria, entre eles, o problema da constante cosmológica. Focaremos em modificações da RG, que buscam explicar a natureza desses fenômenos através de novas lagrangeanas. Os modelos abordados aqui assumem que há uma nova componente que poderá reproduzir o papel da constante cosmológica a partir de uma equação de estado  $w_{eff}$  dependente do tempo, com valores previstos que podem corresponder às observações.

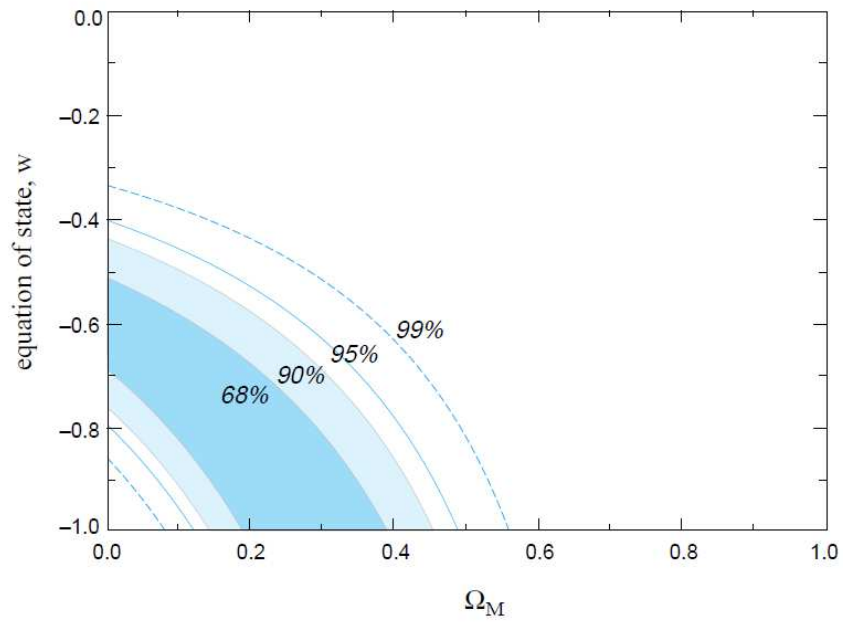


Figura 2.6: Regiões de confiança para os valores de  $\Omega_m$  e  $w$ , para os resultados de observações de supernovas. Fonte: [5].

# Capítulo 3

## Cosmologia Com Campos Escalares

Neste capítulo, entramos em mais detalhes acerca da introdução de campos escalares em modelos cosmológicos, a fim de resolver problemas como o da energia escura. Existem diversas formas de adicionar esse novo objeto na ação de Einstein-Hilbert, onde cada uma exibe diferentes características quando resolvemos as equações de movimento. Aqui, focamos em extensões do modelo  $\Lambda$ CDM com *campos escalares canônicos*<sup>1</sup>, e posteriormente, generalizações descritas por teorias chamadas *tensor-escalares*.

### 3.1 Por quê Gravidade Modificada?

Embora a Relatividade Geral seja uma das teorias físicas mais bem testadas, existe um limite para as escalas nas quais a teoria é válida; para curtas distâncias, modificações são necessárias, devido a efeitos quânticos, e há a possibilidade de mudanças fora do regime de maior confiança experimental. Assim, questões como a natureza da constante cosmológica podem ser exploradas se assumimos que tais modificações existem, e que sejam a fonte de fenômenos não explicados atualmente.

Além dos problemas já mencionados relacionados a constante cosmológica, dificuldades são encontradas se propomos modificações. Weinberg [31] mostrou as limitações de se considerar  $\Lambda$  dinâmico. Resta então atribuir fenômenos como a aceleração cósmica a presença de novos objetos junto da relatividade geral. Entre as modificações mais pop-

---

<sup>1</sup>É possível que a equação de estado da energia escura tenha  $w < -1$ ; uma forma de explicar isso seria através dos campos tipo *phantom* ou não-canônicos, que geralmente possuem energia cinética dada por  $-\frac{\dot{\phi}^2}{2}$ .



ulares, temos as teorias  $f(R)$ , onde em vez de  $R$  na ação de Einstein-Hilbert, teremos uma função  $f(R)$ , cuja forma pode ser motivada por outras teorias; e as extensões da relatividade geral através de campos escalares adicionados a ação.

A constante cosmológica é dita como tendo um valor fixo ao longo do tempo, que se torna relevante quando a densidade da matéria é aproximadamente da mesma ordem. Uma forma de explicar a expansão acelerada sem a necessidade de  $\Lambda$  é introduzir um campo escalar que contém um potencial de modo que a equação de estado é variável no tempo. Esse campo é chamado *quintessência* [6], embora estudos das consequências de campos escalares na evolução cósmica datam de muito antes. O modelo mais comum de quintessência é descrito pela ação

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M + S_\phi \quad (3.1)$$

onde

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (3.2)$$

sendo  $V(\phi)$  um termo potencial que comanda a evolução do campo escalar e  $S_M$  a parte da ação referente a matéria. Variando a ação (3.1), temos a forma para o tensor-energia momento do campo escalar

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right]. \quad (3.3)$$

Em um espaço-tempo descrito pela métrica de FRW, as expressões para a densidade e pressão respectivamente são

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.4)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.5)$$

cuja evolução obedece às equações

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} (\rho_\phi + \rho_m), \quad (3.6)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{Pl}^2} (\rho_\phi + p_\phi + \rho_m + p_m), \quad (3.7)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (3.8)$$

onde a Eq. (3.8) é a equação de Klein-Gordon, que aparece em razão da introdução do campo escalar. Para um universo dominado por  $\phi$ , a equação de estado é

$$w_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.9)$$

Aqui podemos notar dois casos principais, que dependem bastante da forma do potencial escolhido. Se  $\dot{\phi}^2/2 \gg V(\phi)$ , temos  $w_\phi \approx 1$ , e teremos uma densidade de campo que decresce muito mais rápido que a da matéria, de ordem  $\rho_\phi \propto a^{-6}$ . Por outro lado, se temos  $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2/2$ , teremos  $w_\phi \approx -1$  que corresponde a um universo de de Sitter, com aceleração. Dessa forma, duas condições que tem de ser satisfeitas para aceleração positiva são que o termo cinético precisa ser pequeno em relação ao potencial e que o potencial tenha uma inclinação leve para que o campo evolua em uma espécie de *slow-roll* introduzido na teoria inflacionária.

## 3.2 Mecanismos de Blindagem

Embora haja a motivação para a existência de partículas descritas por tais campos escalares, nenhum sinal delas foi encontrado em experimentos na região do sistema solar. A massa típica de uma partícula descrita por essa teoria é da ordem de  $\leq 10^{-33}eV \approx H_0$ , pequena o suficiente para ter um alcance considerável, e possível de ser detectado. No entanto a presença dessas partículas escalares pode apenas estar sendo ocultada por um mecanismo que nos impede de fazer detecções em certas condições. Vários *mecanismos de blindagem* [14],[10],[7] foram propostos no últimos anos e tentam explicar os fatores que influenciam o surgimento do campo escalar em questão em possíveis experimentos. Três mecanismos são bem conhecidos e explorados na literatura, onde dois deles serão discutidos brevemente, e exploraremos em mais detalhes um terceiro, o *symmetron*.

Os aspectos que diferenciam o modo como os mecanismos funcionam são geralmente expostos através do seguinte cenário: Considere um objeto esférico estático, de massa  $m_c$  e densidade homogênea, de modo que  $\rho_c = m_c/\frac{4\pi R_c}{3}$ , onde  $R_c$  é o raio do objeto. Esse objeto está imerso em um espaço com densidade  $\rho_b$ , e resolvemos a equação de movimento do campo para uma partícula teste nas proximidades do objeto e distante dele, para assim calcular a força exercida por esse campo nos dois casos, dada em forma

geral por

$$\vec{F}_\phi = \frac{\alpha}{M_{Pl}} \nabla \phi, \quad (3.10)$$

onde  $\alpha$  é a intensidade do acoplamento ao campo.

### 3.2.1 Chameleon

Nesse modelo [9],[10], o campo escalar se acopla à densidade da matéria através de uma função que depende do campo, assim a massa efetiva  $m_{eff}(\phi)$  irá depender da densidade local. A função é definida de tal modo que quando a densidade é baixa (nos espaços entre galáxias, por exemplo) a massa é pequena e uma *quinta força* prevista pela presença do campo aparece. Quando a densidade é alta (no sistema solar), a massa se torna grande, ou seja, com pequeno alcance e assim de difícil detecção. Um potencial comumente usado nesse mecanismo é o de Ratra-Peebles, com forma efetiva

$$V_{eff}(\phi) = \frac{M^{4+n}}{\phi^n} + \sum_i \rho_i e^{\frac{\beta_i \phi}{M_{Pl}}}, \quad (3.11)$$

que possui um mínimo onde a massa para oscilações em torno dele se torna

$$m_{eff}^2(\phi) \propto \rho^{\frac{n+2}{n+1}}, \quad (3.12)$$

uma função crescente da densidade. Na figura 3.1 vemos a forma do potencial e como ele muda na forma efetiva, de acordo com a densidade local. Assumindo que o campo é menor que a massa de Planck ( $\phi \ll M_{Pl}$ ), podemos aproximar a função de acoplamento à matéria como  $A(\phi) \approx 1 + \frac{\beta \phi}{M_{Pl}}$  e vemos que a medida que a densidade aumenta o mesmo ocorre com o potencial efetivo, onde o mínimo criado está a valores cada vez maiores de  $V_{eff}(\phi)$ . A criação desse mínimo significa que a massa em torno dele será cada vez maior, como expresso pela Eq. (3.12).

A equação de Klein-Gordon é dada por

$$\square \phi = V_{eff,\phi}(\phi), \quad (3.13)$$

onde para o caso estático teremos

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = V_{,\phi}(\phi) + \frac{\beta}{M_{Pl}} \rho(r) e^{\beta \phi / M_{Pl}}. \quad (3.14)$$

Antes de resolver a Eq. (3.14), temos que garantir soluções bem comportadas. Usamos as condições de contorno

$$\frac{d\phi(r=0)}{dr} = 0, \quad \phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow \phi_b, \quad (3.15)$$

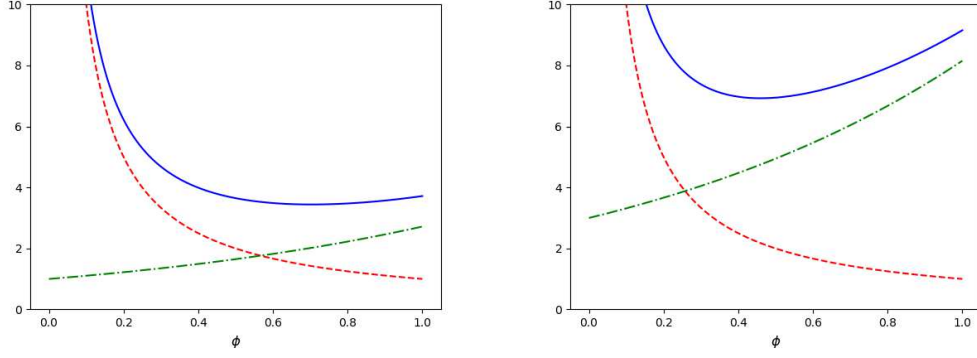


Figura 3.1: Em vermelho, o potencial de Ratra-Peebles (o primeiro termo de 3.11); em verde, a função  $A(\phi)$ , e em azul, o potencial efetivo 3.11. À esquerda, com  $\rho = 1$ , o mínimo do potencial não é claro mas percebemos que à direita com  $\rho = 3$ , a criação de um mínimo.

onde  $\phi_b$  é o valor do campo fora do objeto que minimiza o potencial efetivo. Considerando que o campo tem seu valor inicial  $\phi_i$  em  $r = 0$ , podemos calcular soluções para o interior do objeto até  $r \gg R_c$ . Em todos os mecanismos citados, focaremos em soluções externas ao objeto para comparar a força que envolve uma partícula teste. Fora do objeto, a equação de movimento (3.14) pode ser aproximada como

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} \approx 0, \quad (3.16)$$

onde a condição inicial do campo é que  $\phi_i \approx \phi_c$ , e temos a solução

$$\phi(r) \approx -\frac{3\beta\Delta R_c}{4\pi M_{Pl}R_c} \frac{e^{-m_b(r-R_c)}}{r} + \phi_b. \quad (3.17)$$

$\frac{\Delta R_c}{R_c} = \frac{\phi_b - \phi_c}{6\beta M_{Pl}\Phi_c}$ , com  $\Phi_c$  sendo o potencial gravitacional do objeto, é uma quantidade importante que nos diz o quanto o campo se esconde de acordo com o ambiente. Derivando esta quantidade em relação à  $r$  e usando que  $G = \frac{1}{8\pi G}$ , substituímos em (3.10) e eventualmente chegaremos a

$$\vec{F}_\phi = 6\beta^2 \vec{F}_N \frac{\Delta R_c}{R_c}, \quad (3.18)$$

onde identificamos  $\vec{F}_N$  como a força gravitacional newtoniana  $\vec{F}_N = G \frac{mm_c}{r^2}$ . Vemos imediatamente que se  $\frac{\Delta R_c}{R_c} \ll 1$ , a força newtoniana supera a força do campo e pode permanecer indetectável. Isso acontece se o objeto é grande o bastante, como o Sol, que possui  $\Phi$  suficientemente grande e obedece  $\frac{\Delta R_c}{R_c} \ll 1$ .

### 3.2.2 Vainshtein

Este mecanismo, proposto em 1972 por A. Vainshtein, esconde o campo através de dominância de termos cinéticos sobre outros termos, assim, não dependendo da massa desse campo<sup>2</sup>. O mecanismo se baseia em um campo tipo *galileon*, representado por lagrangeanas de ordens altas. Em teorias do tipo, há uma invariância quando se aplica a transformação

$$\pi(x) \rightarrow \pi(x) + c + b_\mu x^\mu, \quad (3.19)$$

e possuem equações de movimento de segunda ordem. Em [] é citado o uso de galileons para descrever a aceleração cósmica, inflação, e usada em contextos de super-gravidade. Para demonstrar como o mecanismo de Vainshtein acontece, usaremos a lagrangeana de terceira ordem

$$\mathcal{L}_3 = -3(\partial\pi)^2 - \frac{1}{\Lambda^3}(\partial\pi)^2\Box\pi + \frac{g}{M_{Pl}}\pi T^\mu_\mu, \quad (3.20)$$

onde  $\Lambda$  é o acoplamento forte do modelo, com unidades de massa,  $g \approx \mathcal{O}(1)$ , e  $T^\mu_\mu$  é o traço do tensor energia-momento. A equação de Euler-Lagrange para  $\pi$  nesse caso é

$$6\Box\pi + \frac{2}{\Lambda^3}[(\Box\pi)^2 - \partial^\mu\partial^\nu\pi\partial_\mu\partial_\nu\pi] = -\frac{g}{M_{Pl}}T, \quad (3.21)$$

onde  $g$  representa a intensidade do acoplamento do campo com a gravidade e  $\Lambda = (m^2 M_{Pl})^{1/3}$ , com  $m \sim H_0$ . O terceiro termo no lado esquerdo de (3.21) irá dominar sobre o d'alembertiano em escalas pequenas. Para uma fonte esférica de massa  $M$  a Eq. (3.21) se torna

$$6\pi'(r) + \frac{4}{\Lambda^3} \left( \frac{\pi'(r)^2}{r} \right) = g \frac{M}{4\pi r^2} M_{Pl}. \quad (3.22)$$

Resolvendo para  $\pi'$  teremos

$$\pi' = \frac{3\Lambda^3 r}{4} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{9\pi} \left( \frac{r_V}{r} \right)^3} \right), \quad (3.23)$$

onde  $r_V$  é o *raio de Vainshtein*

$$r_V \equiv \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{gM}{M_{Pl}} \right)^{1/3}. \quad (3.24)$$

---

<sup>2</sup>Mais recentemente, este mecanismo tem sido invocado para explicar certos efeitos, atribuídos normalmente à matéria escura, como sendo apenas manifestações de gravitação modificada [32]

Podemos considerar dois regimes para a Eq. (3.23); uma partícula teste próxima e longe da fonte. O critério é a comparação de  $r$  com o raio de Vainshtein; assim, longe da fonte ( $r \gg r_V$ ),  $\pi'(r \gg r_V)$  tem a forma

$$\pi'(r \gg r_V) \approx \frac{g}{3} \frac{M}{8\pi M_{Pl} r^2}. \quad (3.25)$$

Usando (3.10) a razão da força do galileon e da força gravitacional é

$$\frac{F_\pi}{F_N} \approx \frac{g^2}{3}, \quad (3.26)$$

onde  $g = \mathcal{O}(1)$ . A grandes distâncias, percebe-se uma força mediada pelo campo, mais especificamente além do raio de Vainshtein. Para curtas distâncias ( $r \ll r_V$ ), a Eq. (3.23) se torna

$$\pi'(r \ll r_V) \approx \frac{\Lambda^3 r_V}{2} \sqrt{\frac{r_V}{r}}, \quad (3.27)$$

onde a razão das forças agora é dada por

$$\frac{F_\pi}{F_N} \approx \left(\frac{r}{r_V}\right)^{3/2} \ll 1. \quad (3.28)$$

### 3.3 O Modelo do Symmetron

Podemos expressar a ação que representa o *symmetron* com um acoplamento do campo escalar com as espécies de matéria [13], [14]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_m(\psi, \tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (3.29)$$

onde  $M_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$  e as espécies de matéria estão acopladas minimamente a  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , que obedece a relação

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\phi) g_{\mu\nu}, \quad (3.30)$$

com uma função  $A(\phi)$  que depende do campo escalar, onde  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  representa o referencial de Einstein e  $g_{\mu\nu}$  o referencial de Jordan. O funcionamento do mecanismo de blindagem no caso do symmetron depende da escolha desta função junto do potencial, onde ambas as funções devem ser simétricas na operação  $\phi \rightarrow -\phi$ , e que o potencial permita a quebra espontânea de simetria de forma que, antes da quebra o VEV seja zero e depois, seja diferente de zero. Dessa forma, o potencial permite a transição do campo de um estado

de “falso” vácuo para outro de “verdadeiro” vácuo. Para entender como o processo funciona, consideremos as funções que representam a teoria mais simples

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (3.31)$$

$$A(\phi) = 1 + \frac{1}{2M^2}\phi^2. \quad (3.32)$$

Como a dimensão da ação em unidades naturais é  $[M]^4$ , vemos que  $\mu^2$  é um termo de massa, que nos ajudará a definir a massa do modelo, assim como o parâmetro  $M$  na função  $A(\phi)$  que a faz adimensional, assim como  $\lambda$ . A variação da ação (3.29) em relação à métrica  $g^{\mu\nu}$  e ao campo escalar resulta nas equações de Einstein e de movimento de  $\phi$

$$M_{pl}^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^\phi + A^2(\phi)\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

$$\square\phi = V_{,\phi} - A^3(\phi)A_{,\phi}\tilde{T}, \quad (3.34)$$

onde  $\tilde{T}$  é o traço do tensor energia momento que é

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}}. \quad (3.35)$$

Já  $T_{\mu\nu}^\phi$  é o tensor energia momento do campo escalar

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial\phi)^2 - g_{\mu\nu}V(\phi), \quad (3.36)$$

onde  $(\partial\phi)^2 \equiv g_{\alpha\beta}\partial^\alpha\phi\partial^\beta\phi$ . Ao contrário do tensor para a matéria, (3.36) não é conservado, mas a equação da conservação para o tensor completo  $T_{tot}^{\mu\nu} = A(\phi)T^{\mu\nu} - \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial\phi)^2 - g^{\mu\nu}V(\phi)$  obedece [11]

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{A_{,\phi}(\phi)}{A(\phi)}(Tg^{\mu\nu} - T^{\mu\nu})\nabla_\mu\phi. \quad (3.37)$$

Nosso caso de interesse aqui será como a matéria não-relativística, que é a mais abundante depois da energia escura. Podemos aproximar o traço do tensor energia-momento da matéria como  $\tilde{T} \approx -\tilde{\rho}$ , e a densidade no referencial de Jordan se relaciona com o referencial de Einstein por  $\rho = A^3(\phi)\tilde{\rho}$ . Considerando estas relações, (3.34) se torna

$$\square\phi = \left(\frac{\rho}{M^2} - \mu^2\right)\phi + \lambda\phi^3. \quad (3.38)$$

O lado direito da equação acima pode ser interpretado como a derivada de um potencial efetivo expresso como

$$V_{eff}(\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{M^2} - \mu^2\right)\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (3.39)$$

Vemos que o sinal do termo quadrático pode mudar de acordo com a forma que os parâmetros entre parênteses se comportam. Essa é a base do mecanismo, que pode ser melhor percebida se definirmos uma massa efetiva  $m_{eff}$

$$m_{eff} \equiv \frac{\rho}{M^2} - \mu^2. \quad (3.40)$$

Em regiões de alta densidade,  $\rho > \mu^2 M^2$ , e o potencial (3.39) tem um mínimo em  $\phi_0 = 0$ . Já em regiões de baixa densidade, se  $\rho < \mu^2 M^2$ , o sinal do termo quadrático de (3.39) muda e temos uma quebra da simetria  $\phi \rightarrow -\phi$ , assim o potencial ganha novos mínimos diferentes de zero,  $\phi_0 = \pm \frac{\mu^2}{\lambda}$ . O acoplamento do campo com a densidade é proporcional a  $\phi_0$ , de forma que em regiões densas, (3.32) é igual a 1, o que significa que não há esse acoplamento até que a simetria seja quebrada (Figura 3.2). Veremos as consequências de

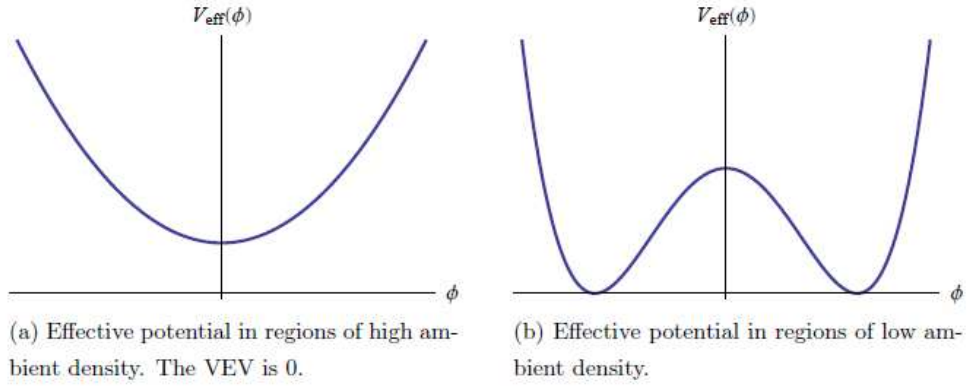


Figura 3.2: O potencial da Eq. (3.39). Antes da quebra de simetria, com  $\phi_0 = 0$  (a); após a quebra de simetria, com dois mínimos  $\phi_0 = \pm \frac{\mu^2}{\lambda}$ , quando  $\rho = 0$  (Fonte: [14]).

se adotar o potencial (3.31) em um modelo cosmológico, e principalmente se ele é capaz de reproduzir a aceleração cósmica atual. A ideia central é a de que até o fim da era da matéria, a densidade é maior que  $\mu^2 M^2$ , onde definimos que seja aproximadamente da ordem da densidade crítica

$$\mu^2 M^2 \approx H_0^2 M_{Pl}^2, \quad (3.41)$$

e a evolução do fator de escala acaba sendo a de um universo sem campo escalar. Apenas recentemente, por volta de  $z \approx 1$ , a simetria seria quebrada e o campo então poderia afetar significativamente a expansão cósmica. A partir da relação (3.41), podemos estimar os



limites para  $\mu$  e  $\lambda$ . Como  $V(\phi_0)_{,\phi\phi} = m_0^2$ , usando o potencial (3.31) vemos que a massa em torno do VEV  $\phi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$  é da ordem de

$$m_0 \approx \sqrt{2}\mu \approx \frac{M_{Pl}}{M}H_0, \quad (3.42)$$

e se  $\phi \ll M$  o acoplamento  $\alpha_\phi$  com a matéria é [11]

$$\alpha_\phi \approx M_{Pl}\phi/M^2, \quad (3.43)$$

junto da necessidade que a modificação realizada pelo campo seja proporcional à gravidade para que seja detectável, o que significa  $\alpha_\phi \approx \mathcal{O}(1)$ , vemos que no vácuo a estimativa para  $\lambda$  é

$$\lambda \approx M_{Pl}^4 H_0^2 / M^6 \geq 10^{-96}, \quad (3.44)$$

onde o limite  $M \leq 10^{-4}M_{Pl}$  vem de medidas dos parâmetros pós-newtonianos  $\gamma$  e  $\beta$  quando usadas na relação entre a força gravitacional e a força do campo escalar[33][34]. Assim, como nos outros dois mecanismos, podemos aproximar soluções analíticas para uma simetria esférica, e investigar o comportamento do campo de acordo com o ambiente. A Eq. (3.34) para um objeto esférico estático de raio  $R_c$  e densidade  $\rho_c$  é

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = V_{,\phi} + A_{,\phi}\rho_c, \quad (3.45)$$

de onde podemos encontrar soluções a partir das condições de contorno já mencionadas

$$\frac{d\phi(0)}{dr} = 0; \quad \phi(r \rightarrow \infty) = \phi_0 \quad (3.46)$$

onde agora,  $\phi_0$  é o VEV  $\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ . Fora do objeto, podemos expandir o potencial efetivo em Taylor como  $V_{eff}(\phi) = m_0^2(\phi - \phi_0)^2/2$ . A solução se torna

$$\phi_{fora}(r) = D \frac{R}{r} e^{-m_0(r-R)} + \phi_0, \quad (r > R). \quad (3.47)$$

Como dito em [14], a constante  $D$  pode ser encontrada com o auxílio da solução interna, onde em  $r = R_c$ , podemos igualar ambas as soluções e suas derivadas, ao mesmo tempo que assumimos  $m_0 R \ll 1$ , pois o alcance do campo é  $m_0^{-1} \leq 0.1$  Mpc. Dessa forma, temos

$$D = -\phi_0 \left[ 1 - \sqrt{\frac{\Delta R_c}{R_c}} \tanh \left( \sqrt{\frac{R_c}{\Delta R_c}} \right) \right], \quad (3.48)$$

onde, novamente temos  $\frac{\Delta R_c}{R_c}$  o fator *thin-shell*

$$\frac{\Delta R_c}{R_c} = \frac{\phi_0}{6gM_{Pl}\Phi}. \quad (3.49)$$

Para uma partícula teste localizada a uma distância  $r$ , onde  $R_c \ll r \ll m_0^{-1}$ , distante o suficiente para que  $\phi \approx \phi_0$ , derivamos (3.47) em relação à  $r$  e calculamos a força  $\vec{F}_\phi$  de modo similar ao *chameleon*, obtendo

$$\frac{F_\phi}{F_N} = 6g^2 \frac{\Delta R_c}{R_c} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\Delta R_c}{R_c}} \tanh \left( \sqrt{\frac{\delta R_c}{R_c}} \right) \right]. \quad (3.50)$$

Vemos que o fator *thin-shell* determina o quão blindado o campo está. Da definição do fator vemos que objetos com grande potencial gravitacional podem fazer que  $\frac{\Delta R_c}{R_c} \ll 1$ ; inserindo esta condição em (3.50) faz com que tenhamos

$$\frac{F_\phi}{F_N} \approx 6g^2 \frac{\Delta R_c}{R_c} \ll 1. \quad (3.51)$$

Por outro lado, objetos com menor potencial gravitacional fazem o efeito contrário, de modo que  $\frac{\Delta R_c}{R_c} \gg 1$  e

$$\frac{F_\phi}{F_N} \approx 2g^2, \quad (3.52)$$

com  $g \approx \mathcal{O}(1)$ .

### 3.3.1 Evolução Cosmológica

O nosso interesse principal nesse trabalho é se o potencial (3.31) é capaz de realizar a expansão cósmica atual. Como mencionado anteriormente, em termos da evolução do fator de escala, o campo escalar é irrelevante em sua contribuição, e só quando a densidade de matéria não-relativística é pequena o bastante, o acoplamento é ativado e podemos prever possíveis implicações cosmológicas relacionadas a expansão. Assim, resolvemos as Eqs. (3.33) e (3.34), em um universo regido pela métrica FRW  $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x}^2$ , cujas soluções são

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} + A(\phi)^3 A_{,\phi}(\phi) \sum_i (1 - 3w_i) \tilde{\rho}_i = 0, \quad (3.53)$$

$$3H^2 M_{Pl}^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + A(\phi)^4 \sum_i \tilde{\rho}_i. \quad (3.54)$$

Usando a redefinição para a densidade  $\rho_i \equiv A^{3(1+w_i)}\tilde{\rho}_i$ , as equações acima podem ser reescritas em termos do potencial efetivo (3.39)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{eff,\phi}(\phi) = 0, \quad (3.55)$$

$$3H^2 M_{Pl}^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_{eff}(\phi), \quad (3.56)$$

aonde retiramos a soma em  $i$ , pois escolhemos acoplar o campo apenas à matéria não-relativística. Antes de verificar o comportamento das soluções destas equações próximo a quebra de simetria, é válido discutir brevemente a forma das soluções de campo escalar nas épocas de radiação e da matéria. Assim como apresentado em [14], é considerado que logo após a inflação cósmica, o campo está “congelado” em algum valor pequeno  $\phi_{rad-i}$ , de forma que tanto o potencial como o termo cinético são desprezíveis e que a função de acoplamento obedeça  $\phi_{rad-i} \ll M$  de onde podemos aproximar com boa precisão  $A(\phi) \approx 1$ , que se mantêm por boa parte da história cósmica. A equação do campo escalar se torna então

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \rho_m \frac{\phi}{M^2} = 0, \quad (3.57)$$

que descreve um oscilador amortecido, onde dependendo da dinâmica de  $H$  e  $\rho_m$ , pode manter o campo no estado inicial ou deixá-lo oscilar em torno do mínimo  $\phi_0 = 0$ .

Agora voltamos nossa atenção ao período recente. Esperamos que para redshifts da ordem  $z \approx 1$ , a simetria se quebre e o perfil da solução do campo mude. Em termos do potencial, devemos verificar as condições de estabilidade. Como a massa efetiva do campo é

$$m^2 = \frac{d^2 V_{eff}(\phi)}{d\phi^2}, \quad (3.58)$$

vemos que para  $m^2 > 0$  temos um ponto de estabilidade e para  $m^2 < 0$ , temos um ponto instável, ou seja, a concavidade está para cima e o campo começará a se dirigir para o novo mínimo (Figura 3.3).

### 3.4 Problemas do Modelo

Como é fácil de ver pela Figura 3.1, quando a simetria é quebrada, o potencial se torna negativo na região próxima aos mínimos; tal característica tem implicações fortes

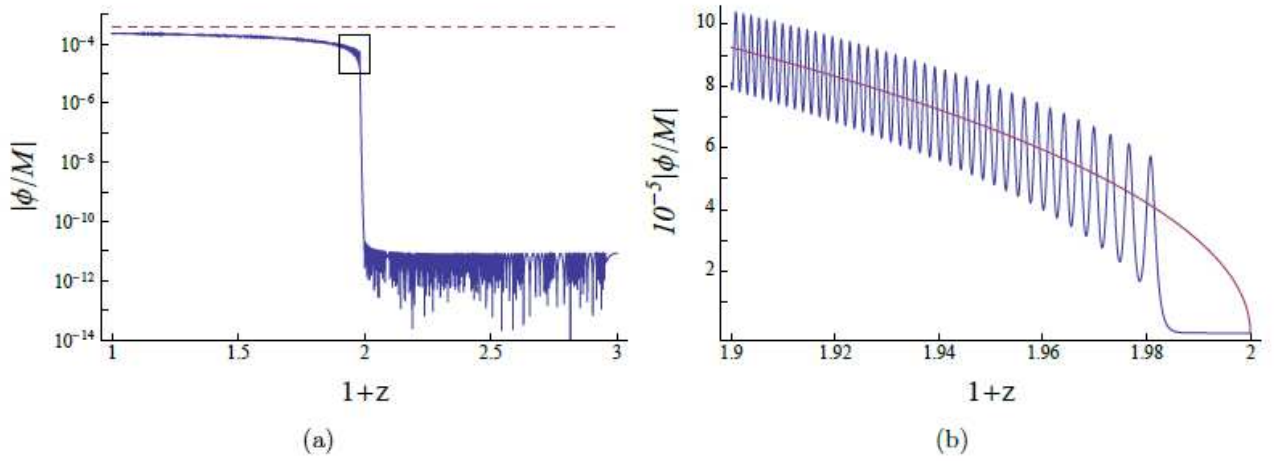


Figura 3.3: O symmetron depois da quebra de simetria. Note que o campo segue para o mínimo indicado pela linha tracejada (a). Vemos também os detalhes da oscilação assim que a simetria é quebrada (b) (Fonte: [14]).

na sua capacidade de produzir a aceleração cósmica. Como enfatizado em [21], em uma teoria de quintessência, onde as equaoes de Friedmann tem a forma

$$3M_{Pl}^2 H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho; \quad (3.59)$$

$$2M_{Pl}^2 \dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \rho. \quad (3.60)$$

Podemos reescrever  $\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}$  com ajuda das equaoes acima para obter

$$\dot{H} + H^2 = \frac{1}{6M_{Pl}^2} \left( -2\dot{\phi}^2 + 2V(\phi) - \rho \right), \quad (3.61)$$

assim percebemos que para que  $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$  seja satisfeito, um potencial positivo  necessário.

Um tentativa de contornar esse problema é adicionar uma constante ao potencial

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 + V_0, \quad (3.62)$$

de forma que podemos por exemplo, fazer com que os mínimos se localizem onde o potencial  zero, pela escolha  $V_0 = \frac{\mu^2}{4\lambda}$ . No entanto quando calculamos esta diferença de potencial para os valores de  $\mu$  e  $\lambda$  vemos que

$$\frac{\mu^2}{4\lambda} \approx H_0^2 M^2 \ll H_0^2 M_{Pl}^2, \quad (3.63)$$

ou seja,  $V_0$  é menor em várias ordens de magnitude que a densidade de energia da constante cosmológica. Assim, o symmetron descrito por (3.39) parece não ser um bom candidato para agente da aceleração cósmica. Mesmo assim, o mecanismo interessante pelo qual o campo se manifesta é objeto de pesquisa em diversos artigos, e várias modificações foram feitas para analisar as propriedades desse potencial, até modificando-o, mas mantendo o mecanismo de quebra de simetria. As conclusões sobre o modelo podem ser confirmadas numericamente. Na Figura 3.4 temos os parâmetros de densidade do campo escalar, da matéria e de uma constante cosmológica adicionada às equações de Friedmann e que também se acopla ao campo. Notamos que  $\Omega_\phi$  é muito pequeno em relação aos outros parâmetros, e a evolução cósmica acaba sendo essencialmente indistinguível do modelo  $\Lambda$ CDM do redshift  $z = 2$  até hoje. A Figura 3.5 mostra a evolução do parâmetro de Hubble  $h \equiv H/H_0$  para o modelo para o mesmo limite do redshift. No próximo capítulo,

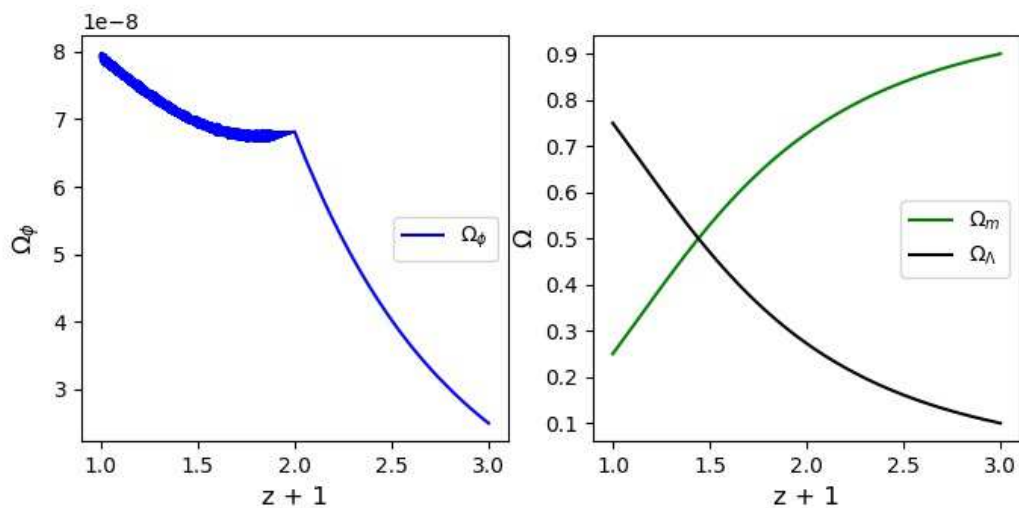


Figura 3.4: À esquerda, o parâmetro de densidade do symmetron, da ordem de  $10^{-8}$ . À direita, os parâmetros de densidade da matéria e da constante cosmológica.

veremos mais sobre modificações realizadas na ação (3.1), as quais revelam propriedades de interesse em contextos inflacionários, da formação de estruturas e da própria aceleração cósmica.

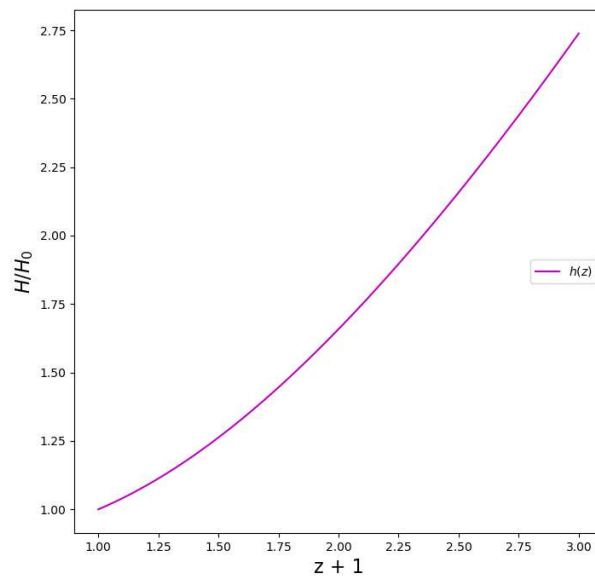


Figura 3.5: O parâmetro de Hubble normalizado ( $H/H_0$ ) para a Eq. (3.35) com constante cosmológica.

# Capítulo 4

## Incorporando um Acoplamento Não-Mínimo ao Campo Escalar

O modelo que vamos considerar agora é um caso da generalização feita por Jordan, Brans e Dicke [1], onde há um acoplamento entre o campo escalar e a gravidade na ação que descreve o modelo [36]. Modelos do tipo tem sido usados para investigar diversos aspectos da evolução cosmológica, como o regime inflacionário [35],[37], e o período recente de aceleração.

Recentemente, a detecção de ondas gravitacionais [40],[41], [42] colocou severas restrições em diversos modelos de gravidade estendida, devido ao limite  $|c_g/c - 1| \leq 10^{-16}$ , onde  $c_g$  é a velocidade das ondas gravitacionais; modelos como Brans-Dicke,  $f(R)$  [40] e quintessência satisfazem os limites, e permanecem ainda como prováveis candidatos a modificações viáveis da relatividade geral. Assim, veremos detalhes de um modelo que é dependente de um novo parâmetro  $\xi$ , que para certos valores pode resolver problemas sem a necessidade de ajuste fino em outros parâmetros.

### 4.1 Equações de Movimento

Podemos escrever a ação geral que descreve modelos do tipo como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ U(\phi)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (4.1)$$

onde assumimos que a função do campo escalar  $U(\phi)$  é maior que zero. A variação da ação é detalhada no Apêndice B e as soluções das equações de campo em um universo

regido pela métrica FRW plano são

$$6UH^2 + 6\dot{U}H = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.2)$$

$$2U(2\dot{H}H + 3H^2) = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - 2\ddot{U} - 4H\dot{U} + V(\phi). \quad (4.3)$$

Já a equação de Klein-Gordon se torna

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - 6U_{,\phi}(\dot{H} + 2H^2) + V_{,\phi}(\phi) = 0. \quad (4.4)$$

Para analisar as propriedades do modelo, devemos escolher uma função  $U(\phi)$  e um potencial  $V(\phi)$ . A escolha para a primeira função que será mantida até o final do trabalho é

$$U(\phi) = \frac{M_{Pl}^2}{2} - \xi \frac{\phi^2}{2}, \quad (4.5)$$

assim, as equações (4.2)-(4.4) se tornam

$$3M_{Pl}^2H^2 = \frac{1}{1 - M_{Pl}^2\xi\phi^2} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + 6\xi H\phi\dot{\phi} + V(\phi) \right), \quad (4.6)$$

$$M_{Pl}^2(3H^2 + 2\dot{H}) = -\frac{1}{1 - M_{Pl}^2\xi\phi^2} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + 2\xi\dot{\phi}^2 + 2\xi\ddot{\phi}\phi + 4\xi H\phi\dot{\phi} - V(\phi) \right), \quad (4.7)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi}(\phi) + \xi R\phi = 0, \quad (4.8)$$

onde  $R = 6(\dot{H} + 2H^2)$ . Este modelo possui propriedades bastante interessantes e de grande impacto em aplicações cosmológicas, pela presença do parâmetro  $\xi$ . Se fizermos  $\xi = 0$  iremos recuperar a ação expressa pela Eq. 3.1, que é a relatividade geral de Einstein com uma nova forma de matéria descrita por um campo escalar. Por outro lado, dentre os possíveis valores de  $\xi$ , o caso onde  $\xi = 1/6$  é chamado de *conforme*, e se o termo potencial for zero ou  $\lambda\phi^4$ , a ação (4.1) é invariante frente a certas transformações, onde  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ . Tal característica é chamada de *invariância conforme*. Assim, quando tivermos que escolher um valor para  $\xi$  nas seções seguintes, escolheremos  $\xi = 1/6$ , exceto quando mencionado. Notamos que a partir da Eq. 4.1 com a função 4.5, é possível definir uma quantidade

$$G_N^{eff} = \frac{1}{M_{Pl}^2 - 8\pi\xi\phi^2}, \quad (4.9)$$



que pode ser interpretada como uma constante gravitacional newtoniana efetiva, que pela presença de  $\xi$ , é dependente do campo escalar e pode variar no tempo, sendo uma das consequências de modelos com acoplamento não-mínimo. Em [43] são calculados possíveis valores de  $\xi$  para o modelo, baseado em dados de supernovas tipo Ia, e do parâmetro de Hubble para um potencial constante; onde é possível reproduzir o modelo  $\Lambda$  CDM para  $\xi = 1/6$ . Foram estimados para modelos canônicos e não-canônicos, com e sem constante cosmológica, para 68%, de confiança, onde por exemplo, em um modelo com  $\Omega_\Lambda > 0$ , caracterizado pelo potencial e  $\Omega_{m,0} \sim 0.2873$ , temos  $\xi \sim 0.4967$ .

### 4.1.1 O Referencial de Einstein

Em modelos desse tipo, é comum adotar uma transformação para a métrica do tipo

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (4.10)$$

chamada de transformação de Weyl ou transformação conforme; esta transformação não afeta a estrutura causal; se um vetor for tipo espaço, tempo ou nulo em relação a  $g_{\mu\nu}$ , também o será em relação a  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  [36] [46]. Aplicando esta transformação ao escalar de Ricci, iremos obter

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} [R - 6g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu (\log \Omega) - 6g^{\mu\nu} D_\mu (\log(\Omega)) D_\nu (\log(\Omega))], \quad (4.11)$$

de onde substituímos na ação 4.1 e obtemos [67]

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{U(\phi)\tilde{R}}{2\Omega^2} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu} \frac{\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\Omega^2} - \frac{V(\phi)}{\Omega^4} \right]. \quad (4.12)$$

Agora definimos uma forma para  $\Omega$ , já que até o momento fizemos tudo de forma geral. O nosso objetivo aqui é reescrever a ação 4.1 em uma forma que lembre a Eq. 3.2, e para isso vemos do primeiro termo de 4.12, que uma boa escolha é

$$\Omega^2 = U(\phi) = 1 - \xi\phi^2, \quad (4.13)$$

com  $M_{Pl}^2 = 1$ , a Eq. 4.12 se torna

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2}\tilde{R} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \frac{1 + \xi(6\xi - 1)\phi^2}{U^2} - \frac{V(\phi)}{U^2} \right]. \quad (4.14)$$

Vemos que podemos simplificar a Eq. 4.14 se definimos

$$d\tilde{\phi} \equiv \frac{\sqrt{1 + \xi(6\xi - 1)\phi^2}}{U(\phi)} d\phi, \quad \tilde{V} \equiv \frac{V(\phi)}{U^2(\phi)}, \quad (4.15)$$

e finalmente a ação se torna

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{\phi} - \tilde{V} \right]. \quad (4.16)$$

Como a ação 4.16 tem a mesma forma da 3.2, coordenadas representadas pela métrica  $\tilde{g}^{\mu\nu}$ , são indicadas como estando no *referencial de Einstein*, enquanto a ação 4.1 é dita como descrevendo o referencial de *Jordan*. Estas transformações limitam os valores possíveis do campo escalar, onde podemos ver de 4.15 que para  $F(\phi) \geq 0$ ,  $1 + \xi(6\xi - 1)\phi^2 \geq 0$  é sempre satisfeito, e o campo possui valores críticos  $\phi^2 = \frac{1}{\xi}$ . A diferença mais marcante entre os dois referenciais que pode ser mais facilmente vista ocorre quando adicionamos um termo de matéria na ação. Por causa da transformação (4.10), o tensor energia-momento também sofre uma transformação de acordo com o referencial, onde

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \Omega^s T^{\mu\nu}, \quad \tilde{T}_{\mu\nu} = \Omega^{s+4} T_{\mu\nu}. \quad (4.17)$$

$s$  é uma constante que define a ordem do  $\Omega$  que relaciona os tensores. A equação da conservação da matéria  $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$  se torna [44]

$$\tilde{\nabla}_\mu (\Omega^s T^{\mu\nu}) = \Omega^s \nabla_\mu T^{\mu\nu} + (s + 6) \Omega^{s-1} T^{\mu\nu} \nabla_\mu \Omega - \Omega^{s-1} g^{\mu\nu} T \nabla_\mu \Omega = 0. \quad (4.18)$$

Esta equação é simplificada se escolhemos  $s = -6$ , resultando em

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = T g^{\mu\nu} \nabla_\mu (\ln \Omega), \quad (4.19)$$

e há uma mudança na equação da conservação do tensor energia-momento no referencial de Einstein. No entanto vemos que para fluidos de traço zero (como a radiação), há conservação nos dois referenciais, enquanto para matéria não-relativística, há uma troca de energia e momento entre o campo e o fluido, e observando a equação da geodésica no referencial de Einstein

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} &= 0, \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} &= -\frac{\Omega_{,\phi}}{\Omega} (\delta_\nu^\mu \partial_\sigma \phi + \delta_\sigma^\mu \partial_\nu \phi - g_{\nu\sigma} \partial^\mu \phi) \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}, \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} &= -\frac{\Omega_{,\phi}}{\Omega} (\partial_\sigma \phi \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} + \partial_\nu \phi \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} - g_{\nu\sigma} \partial^\mu \phi \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde usamos a transformação do símbolo de Christoffel para  $\Omega$ , vemos que o lado direito indica o surgimento de uma *quinta força*, relacionada ao campo escalar, cuja forma é a da Eq. (3.10), no limite newtoniano. Vemos então que a transformação de um referencial para outro pode resultar em consequências bastante diferentes para um dado modelo, e artigos mais recentes falam sobre a equivalência entre os dois referenciais no contexto inflacionário [38] [39].

### 4.1.2 Relacionando o referencial de Jordan com o de Einstein

Nesta seção mostraremos uma técnica primeiramente desenvolvida em [47], e mais tarde aprimorada em [48], em que é possível, para soluções gerais do campo, e um dado potencial, relacionar os dois referenciais e investigar a diferença de comportamento dessas soluções em relação ao referencial escolhido. Para começar, retornamos à Eq. (4.15), onde

$$d\tilde{\phi} = \frac{1 + \xi(6\xi - 1)\phi^2}{U(\phi)^2} d\phi. \quad (4.21)$$

Integrando e invertendo a equação acima, para  $\xi = 1/6$ , teremos

$$\phi(\tilde{\phi}) = \zeta^{-1} \tanh(\zeta\tilde{\phi}), \quad (4.22)$$

onde seguindo [48], por conveniência, usamos  $\zeta = (1/6)^{1/2}$ . Substituindo esta forma do campo nas Eq. (4.13) e no potencial da Eq. (4.15), obtemos

$$\Omega^{-1}(\tilde{t}) = \cosh(\zeta\tilde{\phi}(\tilde{t})), \quad (4.23)$$

e

$$V(\phi) = (1 - \zeta^2\phi^2)^2 \tilde{V} \left[ \frac{\zeta^{-1}}{2} \ln \left( \frac{1 + \zeta\phi}{1 - \zeta\phi} \right) \right]. \quad (4.24)$$

Quando resolvemos as equações de movimento a partir de 4.16, temos que usar o elemento de linha em relação a métrica  $\tilde{g}^{\mu\nu}$ , e notamos que usando as transformações para o tempo e fator de escala como

$$d\tilde{t} = \Omega dt, \quad \tilde{a} = \Omega a, \quad (4.25)$$

expressamos a o elemento de linha FRW da mesma forma que pela métrica  $g^{\mu\nu}$ , mas com o fator de escala e tempo redefinidos

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + \tilde{a}^2(\tilde{t}) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right). \quad (4.26)$$

Em resumo, apresentamos as quantidades redefinidas da técnica que serão usadas na seção seguinte para comparar soluções no referencial de Jordan e Einstein:

$$a(\tilde{t}) = \cosh(\tilde{\psi}(\tilde{t}))\tilde{a}(\tilde{t}), \quad (4.27)$$

$$\frac{dt(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \cosh(\tilde{\psi}(\tilde{t})), \quad (4.28)$$

$$\psi(\tilde{t}) = \tanh(\tilde{\psi}(\tilde{t})), \quad (4.29)$$

$$V(\psi) = (1 - \psi^2)^2 \tilde{V} \left[ \frac{\zeta^{-1}}{2} \ln \left( \frac{1 + \zeta\phi}{1 - \zeta\phi} \right) \right], \quad (4.30)$$

com  $\psi = \zeta\phi$ . Ainda em [48], são investigadas soluções obtidas por [49], onde aqui mostraremos o comportamento de uma em particular.

### 4.1.3 Um Exemplo: A Expansão em Lei de Potência

Adotaremos comportamentos para o fator de escala e o campo escalar para um dado potencial no referencial de Einstein. Podemos considerar soluções expressas por uma lei de potência, e um potencial exponencial

$$\tilde{a}(\tilde{t}) = A\tilde{t}^n, \quad (4.31)$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{t}) = \ln(\tilde{t}^p), \quad (4.32)$$

$$\tilde{V}(\tilde{\psi}) = V_0 \exp\left(-\frac{2}{p}\tilde{\psi}\right), \quad (4.33)$$

$$q = -\frac{\Omega' a}{\Omega a'} - \frac{aa''}{a'^2} \quad (4.34)$$

$A$  e  $n$  são constantes com  $n \neq 1$ ,  $p(n) = (n/3)^{1/2}$  e  $V_0(n) = n(3n - 1)$ .  $q$  é o parâmetro de desaceleração em termos do fator de escala e da transformação  $\Omega$ . Estamos interessados em soluções para  $n > 1$ , as quais correspondem a um universo com expansão acelerada, e  $0 < n < 1$ , que representam desaceleração. Substituindo as Eqs. (4.31-4.33) nas relações (4.27-4.30), obtemos diretamente

$$a(\tilde{t}) = \frac{A}{2}(\tilde{t}^{n+p} + \tilde{t}^{n-p}), \quad (4.35)$$

$$t(\tilde{t}) = \begin{cases} \frac{1}{2(1+p)}\tilde{t}^{1+p} + \frac{1}{2(1-p)}\tilde{t}^{1-p}, & \text{se } p \neq 1 \\ \frac{1}{4}\tilde{t}^2 + \ln(\tilde{t}), & \text{se } p = 1 \end{cases}$$

$$\psi(\tilde{t}) = \frac{\tilde{t}^{2p} - 1}{\tilde{t}^{2p} + 1}, \quad (4.36)$$

$$V(\psi) = V_0(1 - \psi)^\alpha(1 + \psi)^\beta, \quad (4.37)$$

com  $\alpha(p) = 2 + 1/p$  e  $\beta(p) = 2 - 1/p$ . O parâmetro de desaceleração  $q$  se torna

$$q(\tilde{t}) = \frac{q_1\tilde{t}^{4p} + q_2\tilde{t}^{2p} + q_3}{(n+p)^2\tilde{t}^{4p} - q_2\tilde{t}^{2p} + (n-p)^2}, \quad (4.38)$$

onde

$$q_1(n) = (n+p)(1-n), \quad q_2(n) = 2(p^2 - n^2), \quad q_3 = (n-p)(1-n). \quad (4.39)$$

Uma característica interessante da solução 4.32 em particular é a possibilidade de não haver singularidade em  $t \rightarrow 0$ ; isso ocorre dependendo do valor de  $n$ , onde no limite  $1/3 \leq n < 3$ , teremos soluções do tipo big-bang (Figura 4.1), com  $a \rightarrow 0$ , mas para  $0 < n < 1/3$  e  $n > 3$  a solução é livre de singularidade (Figura 4.2). Na Figura 4.2 vemos o comportamento do fator de escala no limite  $t \rightarrow 0$ , para  $n = 1/2$ . Notamos que um tempo infinito no passado é necessário para que a singularidade seja atingida. É

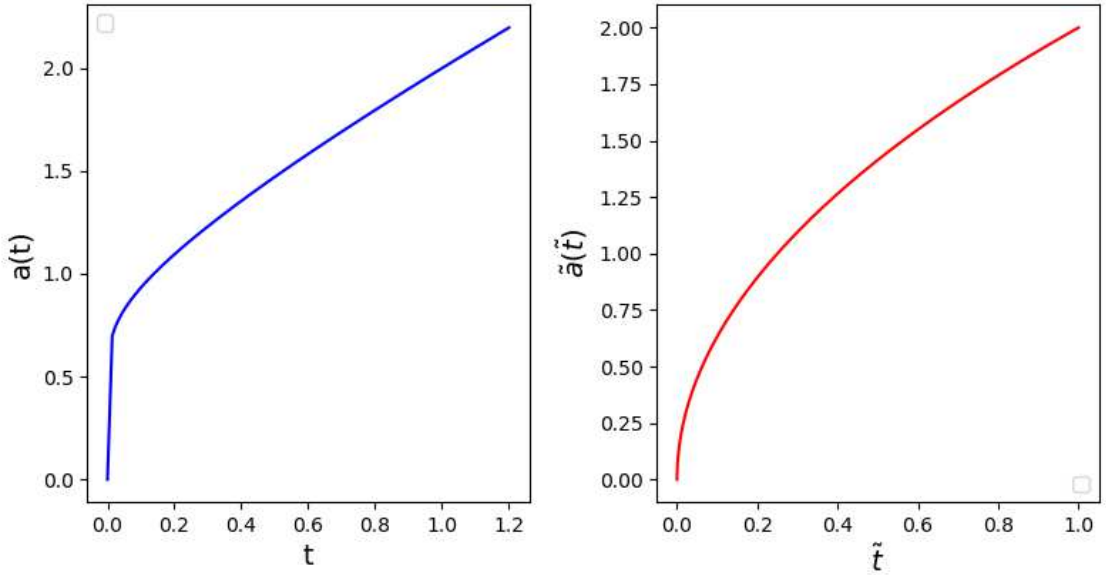


Figura 4.1: O fator de escala (4.31) e (4.35) para  $n = 1/2$  e  $A = 2$ .

útil analisar também as aproximações assintóticas das soluções (4.35-4.37) nos casos onde  $\tilde{t} \rightarrow 0$  e  $\tilde{t} \rightarrow \infty$ :

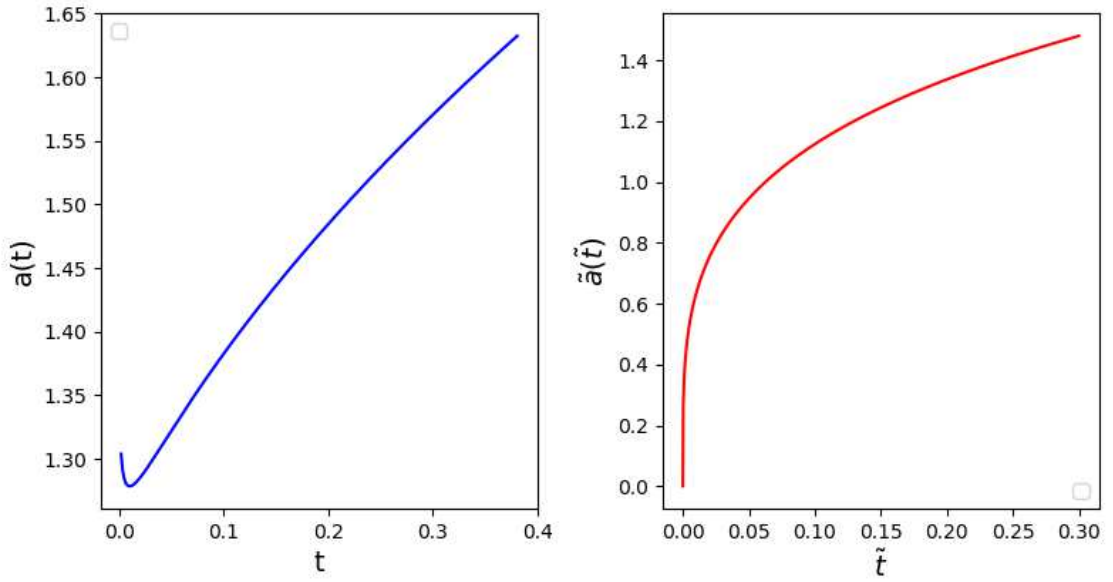


Figura 4.2: O fator de escala (4.31) e (4.35) para  $n = 1/4$  e  $A = 2$ .

- $\tilde{t} \rightarrow 0$

Nesse limite, as soluções são dadas por

$$a(t) \sim \begin{cases} t^m & \text{se } 0 < n < 3, \\ (-t)^m & \text{se } n > 3, \end{cases}$$

$$\psi(t) \sim \begin{cases} -1 + \psi_0 t^s & \text{se } 0 < n < 3, \\ -1 + \psi_0 (-t^s)^s & \text{se } n > 3, \end{cases}$$

$$V(\psi) \sim (1 + \psi)^\beta, \quad (4.40)$$

com

$$m(n) = \frac{n-p}{1-p}, \quad s(n) = \frac{2p}{1-p}, \quad \psi_0 = (2|1-p|)^s. \quad (4.41)$$

- $\tilde{t} \rightarrow \infty$

Já no limite futuro, teremos

$$a(t) \sim t^l, \quad (4.42)$$

$$\psi(t) \sim -1 + \psi_\infty t^{-r}, \quad (4.43)$$

$$V(\psi) \sim (1 - \psi)^\alpha, \quad (4.44)$$

com

$$l(n) = \frac{n+p}{1+p}, \quad r(n) = \frac{2p}{1+p}, \quad \psi_\infty = (2(1+p))^{-r}. \quad (4.45)$$

Para haver aceleração, precisamos que  $l > 1$ , que é satisfeito para  $n > 1$ , onde no limite  $n \rightarrow \infty$ , teremos uma expansão tipo de Sitter. Por último, veremos o comportamento do parâmetro de desaceleração quando  $\tilde{t} \rightarrow \infty$ , e verificar as condições para a existência de soluções aceleradas. No limite assintótico, temos

$$q(t) \sim \frac{q_1}{(n+p)^2} = \frac{1-n}{n+p}, \quad (4.46)$$

onde  $q(t) < 0$  é alcançado para  $n > 1$ .

## 4.2 A quebra da simetria conforme

Como mencionado nas seções anteriores, o valor  $\xi = 1/6$  garante que a chamada simetria conforme seja preservada no modelo, para  $V(\phi) = 0$  ou  $V(\phi) = \lambda\phi^4$ . Mostraremos como isso ocorre de forma mais explícita. Consideremos a ação de uma teoria de gravidade induzida [50], expressa por [52], [51]

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{6} R \phi^2 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right], \quad (4.47)$$

de onde a variação em relação a métrica e  $\phi$  resultam na equação de Klein-Gordon e de Einstein

$$(\square - \frac{1}{6}R)\phi = 0, \quad (4.48)$$

$$G_{\mu\nu} = 6\phi^{-2}T_{\mu\nu}^\phi, \quad (4.49)$$

onde o tensor energia-momento do campo é dado por

$$T_{\mu\nu}^\phi = - \left[ \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \right] - \frac{1}{6} (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \phi^2 \quad (4.50)$$

A simetria é verificada quando calculamos o traço da Eq. (4.49), que resulta em

$$\phi(\square - \frac{1}{6}R)\phi = 0. \quad (4.51)$$

Vemos que a Eq. (4.49) é consistente com a Eq. (4.48). No artigo original [50], é discutida a possibilidade da quebra de simetria conforme dar origem a um termo extra nas equações de Einstein que pode se comportar como uma constante cosmológica; Em [52], essa ideia é ampliada, onde o termo extra pode aparecer de maneira mais natural. Se adicionarmos um termo de matéria na ação (4.47)

$$S = S[\phi] + S_m, \quad (4.52)$$

e repetirmos os cálculos, veremos que as Eqs. (4.48-4.49) tornam-se

$$(\square - \frac{1}{6}R)\phi = 0, \quad (4.53)$$

$$G_{\mu\nu} = 6\phi^{-2}[T_{\mu\nu}^{\phi} + T_{\mu\nu}], \quad (4.54)$$

de onde vemos que para que a simetria seja preservada, o traço do tensor energia-momento da matéria  $T$  precisa ser zero. Para quebrar a simetria conforme, precisamos apenas adicionar um novo termo na ação, do tipo  $\int d^4x \sqrt{-g} f(\phi)$ , que equivale a um termo potencial. Se escolhermos  $f(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$  e repetirmos novamente o processo de variação da ação e traço das equações de Einstein, veremos que isso implicará em  $T = \mu^2\phi^2$ . Isso significa que matéria com traço zero corresponderá a  $\mu^2 = 0$  e a simetria é conservada, caso contrário haverá uma quebra da simetria conforme e teremos equações na forma

$$\phi(\square - \frac{1}{6}R - \mu^2)\phi = 0, \quad (4.55)$$

$$G_{\mu\nu} - 3\mu^2 g_{\mu\nu} = 6\phi^{-2}[T_{\mu\nu}^{\phi} + T_{\mu\nu}]. \quad (4.56)$$

Como o termo  $\mu$  tem dimensões de massa, o seu inverso é uma estimativa do alcance do campo em questão. Assim é seguro tomar  $\mu^{-1}$  como sendo da ordem do raio do universo  $R_0$  e o traço  $T$  como sendo a densidade média  $\sim M/R_0^3$ , onde  $M$  é a massa do universo observável. Dessa forma, da relação  $T = \mu^2\phi^2$ , vemos que  $\phi$  assume um valor constante de ordem<sup>1</sup>

$$\phi^2 \sim G \quad (4.57)$$

Esta aproximação, quando inserida na Eq. (4.56) resulta na equação de Einstein com uma constante cosmológica  $\Lambda \sim \mu^2$

$$G_{\mu\nu} - 3\mu^2 g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.58)$$

---

<sup>1</sup>A relação empírica  $GM/R_0 \approx 1$  foi usada para chegar em 4.54, vinda do princípio de Mach [1].



A escolha dessas aproximações possibilita uma explicação para o problema da coincidência. Pois se a densidade da constante cosmológica é

$$\rho_V = \frac{\Lambda}{8\pi G} \sim \frac{\mu^2}{G} \quad (4.59)$$

e na era da matéria,  $T = \rho_m = \mu^2 \phi^2$ , teremos  $\mu^2 \sim G\rho_m$  e conseqüentemente

$$\rho_V \sim \rho_m, \quad (4.60)$$

o que mostra que a equivalência da ordem das densidades de  $\Lambda$  e da matéria depende da quebra da simetria conforme, que ocorre quando o  $T \neq 0$ . No próximo capítulo, tentaremos aplicar o modelo do symmetron a teorias modificadas na forma de (4.1) em busca de aliviar os problemas apresentados na seção 3.5. Em geral, buscaremos a possibilidade do campo atingir um estado de Sitter estável, sem a necessidade de adicionar uma constante cosmológica a ação.

# Capítulo 5

## Análise do Espaço de Fase Para o Modelo Não-Mínimo

Agora iniciaremos os estudos de uma poderosa ferramenta usada para a investigação de soluções de equações diferenciais. O método dos sistemas dinâmicos faz parte de um campo bem explorado na matemática [53],[54],[55] e nos últimos anos têm sido cada vez mais usado no contexto das equações cosmológicas, pois providencia um modo direto de verificar possíveis soluções que representam diferentes eras da evolução cósmica [57]. Será feito agora uma breve revisão dos principais aspectos do método, e o que precisamos entender para realizar a investigação das equações de Friedmann apresentadas até o momento. O conteúdo das próximas seções será baseado nas referências já citadas.

### 5.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico é, na sua forma geral, escrito da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{x}$  é um conjunto de elementos do espaço  $X \subseteq \mathfrak{R}^n$ , e a função  $\mathbf{f}$  é expressa como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})). \quad (5.2)$$

$X$  é o espaço onde se dá a dinâmica das  $n$  equações, onde cada solução é referenciada como uma trajetória no *espaço de fase* do sistema. Em geral, é requerido que a função  $\mathbf{f}$  seja diferenciável e contínua, embora podemos nos deparar com descontinuidades. Seguimos a

revisão feita em [57], onde foram apresentadas as seguintes definições que nos permitirão investigar a dinâmica do sistema.

**Definição 1:** Um ponto crítico  $\mathbf{x}_0$  existe para o sistema 5.1 se e somente se  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ .

Tais pontos são possíveis destinos das trajetórias do espaço de fase dependendo das condições iniciais, no entanto o sistema pode ou não ficar em repouso nesse ponto, isso depende da estabilidade da solução fixa.

**Definição 2:** Se, para um ponto crítico  $\mathbf{x}_0$  e dado um  $\epsilon > 0$ , existe uma quantidade  $\delta(\epsilon)$  que satisfaça  $\|x(t) - \mathbf{x}_0\| < \delta$ , a solução  $x(t)$  existe para todo  $t \geq 0$  e irá satisfazer  $\|x(t) - \mathbf{x}_0\| < \delta$ .

Essa é a definição formal de um ponto estável. Se uma solução começa a sua evolução próxima a um ponto crítico e permanece próximo a ele, esse ponto é dito estável. Mas existem pontos que possuem a capacidade de “atrair” soluções para um estado final em  $\mathbf{x}_0$ , e veremos que pontos desse tipo, denominados *assintoticamente estáveis* são de grande importância em cosmologia.

**Definição 3:** Um ponto crítico  $\mathbf{x}_0$  é assintoticamente estável se para uma quantidade  $\delta$ , quando  $\|x(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$ , a solução seguirá  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{x}_0$ .

### 5.1.1 Condições de Estabilidade

Um método eficiente de verificar a estabilidade de um ponto crítico é observar o comportamento da solução nas proximidades desse ponto. Para um sistema como na Eq. 5.1 podemos fazer uma expansão em Taylor de modo que teremos

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) y_j + \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0) y_j y_k + \dots \quad (5.3)$$

Considerando a primeira derivada, correspondente a matriz *jacobiana*

$$A = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

onde vemos da Eq. 5.3 que é calculada nos pontos críticos  $\mathbf{x}_0$ . As principais quantidades de uma matriz, como os autovalores, determinante e o traço determinam o fluxo no espaço de fase ao redor do ponto crítico assim como sua estabilidade. A figura 5.1 mostra a classificação dos pontos de acordo com os valores do determinante e do traço.

Na Figura 5.1 vemos exemplos de pontos com estabilidade ou instabilidade assintótica;

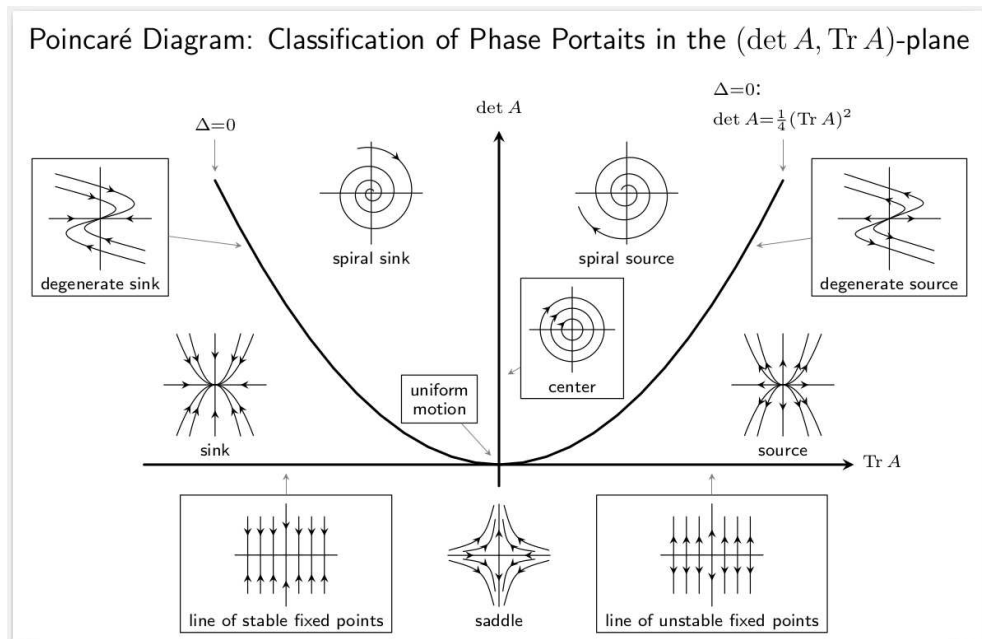


Figura 5.1: Diagrama que mostra o perfil dos pontos críticos para certos valores do determinante e do traço da Eq. 5.4. Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:StabilityDiagram.png>

as espirais podem atrair ou repelir soluções que tem condições iniciais nas proximidades de um ponto do tipo; um centro por outro lado, caracterizado por  $\text{Tr}(A) = 0$ , é um exemplo de ponto estável descrito pela Definição 2, onde a solução permanece próxima ao ponto, mas não tem seu estado final nele. Podemos também caracterizar a estabilidade dos pontos através dos autovalores (Tabela 5.1), onde devemos notar o seguinte aspecto:

**Definição 4:** O ponto crítico  $\mathbf{x}_0 \in X \subset \mathfrak{R}$ , é chamado *hiperbólico* se a parte real dos autovalores do jacobiano é diferentes de zero; caso contrário, o ponto é denominado *não-hiperbólico*.

A análise de estabilidade descrita até agora não classifica a estabilidade de pontos não-hiperbólicos; existem técnicas que são aplicadas ao sistema para realizar a análise completa de tais soluções. A Tabela 5.1 mostra os tipos mais comuns de pontos críticos

Tabela 5.1: Classificação de pontos críticos para sistemas em duas dimensões.

Sinal dos autovalores	Tipo de ponto	Estabilidade
$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$	Fonte	Instável
$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$	Ponto de Sela	Instável
$\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$	Fonte	Estável
$\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = -\rho \pm i\omega$	Espiral	Estável
$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = \rho \pm i\omega$	Espiral	Instável

que podemos nos deparar de acordo com o sinal dos autovalores. Uma certa solução pode passar por múltiplos pontos caracterizando a evolução do sistema, mas só terá um estado final em um ponto finito em uma solução estável. Em sistemas com dimensões maiores que 2, o modo de classificação da estabilidade de pontos críticos fica mais ampla, pela presença do terceiro autovalor no cálculo da matriz jacobiana. Ainda assim, a ideia de estabilidade (instabilidade) para  $\lambda > 0$  ( $\lambda < 0$ ) continua. Para três autovalores, em geral teremos o mostrado na Tabela 5.2 [59].

Daqui em diante usaremos a nomenclatura adotada por [58], onde o número de autovalores com parte real maior que zero é o *índice* do ponto, por exemplo,  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_{2,3} < 0$  corresponde a um ponto de sela de índice 1.

### 5.1.2 Linearização

Em Álgebra Linear, encontramos sistemas de equações que podem ser escritos na forma

$$\dot{x} = f(x), \quad \dot{y} = g(y), \quad (5.5)$$

Tabela 5.2: Classificação de pontos críticos para sistemas em três dimensões [59].

Sinal dos autovalores	Tipo de ponto	Estabilidade
$\lambda_i \in \Re < 0$	Fonte	Estável
$\lambda_i \in \Re > 0$	Fonte	Instável
$\lambda_{2,3} = -\rho \pm i\omega$ e $-\rho < \lambda_1 < 0$	Fonte	Estável
$\lambda_{2,3} = -\rho \pm i\omega$ e $\lambda_1 < -\rho < 0$	Espiral	Estável
$\lambda_{2,3} = \rho \pm i\omega$ e $0 < \lambda_1 < \rho$	Fonte	Instável
$\lambda_{2,3} = \rho \pm i\omega$ e $0 < \rho < \lambda_1$	Espiral	Instável
$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_{2,3} < 0$	Ponto de Sela	Instável
$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_{2,3} = -\rho \pm i\omega$	Sela-Espiral	Instável e Estável
$\lambda_1 < 0$ e $\lambda_{2,3} = \rho \pm i\omega$	Sela-Espiral	Instável e Estável

que é um sistema de equações *linear*. No entanto, na maioria dos casos os sistemas serão não-lineares,

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \quad (5.6)$$

Assim, para computar a estabilidade de pontos fixos do sistema, usamos a matriz 5.4, junto das definições já citadas; nesse caso, a matriz jacobiana também é chamada de *matriz de linearização* na literatura, e veremos o porquê. De posse dos autovalores e autovetores para um determinado ponto, podemos determinar o comportamento da solução na vizinhança desse mesmo ponto. Se em um ponto fixo, é satisfeito [55]

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0, \quad (5.7)$$

onde  $x^*$  e  $y^*$  é um ponto crítico qualquer, e perturbamos esse ponto na forma

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*, \quad (5.8)$$

podemos chegar por uma expansão em Taylor em

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \quad (5.9)$$

e

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv), \quad (5.10)$$

e temos um sistema linear de equações onde as derivadas são os elementos da matriz jacobiana. Para um sistema do tipo, a solução linearizada geral é dada por

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^* + c_i^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_i^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad (5.11)$$

onde  $\lambda$  é um autovalor e  $c_i$  são coeficientes provenientes dos autovetores.

## 5.2 Análise Dinâmica Para o $\Lambda$ CDM

Antes de considerar sistemas de equações mais complicados, presentes em modelos de gravidade estendida, podemos verificar as propriedades do modelo  $\Lambda$ CDM como um sistema dinâmico de equações de primeira ordem. Teremos então um universo com matéria, radiação e uma constante cosmológica, cujas equações de Friedmann são

$$3H^2 = \kappa^2(\rho_m + \rho_r) + \Lambda, \quad (5.12)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2(p_m + p_r) + \Lambda. \quad (5.13)$$

Sendo  $\rho_\Lambda = \Lambda/\kappa^2$  e  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ ,  $p_m = 0$  e  $p_r = \rho_r/3$ , podemos definir as seguintes variáveis

$$x \equiv \Omega_m = \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2}, \quad y \equiv \Omega_r = \frac{\kappa^2 \rho_r}{3H^2}, \quad z \equiv \Omega_\Lambda = \frac{\kappa^2 \rho_\Lambda}{3H^2}, \quad (5.14)$$

de modo que a Eq. (5.12) pode ser reescrita como  $x + y + z = 1$ . Embora tenhamos três variáveis, a Eq. (5.12) escrita nessa forma permitirá a redução de uma coordenada, assim podemos investigar a dinâmica do modelo através de um espaço de fase em duas dimensões. As equações de primeira ordem são obtidas pela derivada das coordenadas  $x$  e  $y$  em relação à  $N = \log(a)$ , o número de “e-dobra”, onde temos a relação

$$Hf' = H \frac{df}{dN} = \frac{df}{dt}, \quad (5.15)$$

teremos

$$x' = \frac{\kappa^2 \dot{\rho}_m}{3H^3} - \frac{2\kappa^2 \rho_m}{3H^2} \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (5.16)$$

$$y' = \frac{\kappa^2 \dot{\rho}_r}{3H^3} - \frac{2\kappa^2 \rho_r}{3H^2} \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (5.17)$$

Substituindo as equações da continuidade (2.18) para a matéria e radiação no primeiro termo do lado direito de (5.16-5.17) e notando da Eq. (5.13) que podemos escrever

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{2}(3 - y - 3z) = -\frac{1}{2}(3 - y - 3(1 - x - y)), \quad (5.18)$$

chegamos ao sistema

$$x' = x(3x + 4y - 3), \quad y' = y(3x + 4y - 4). \quad (5.19)$$

A primeira coisa que fazemos é encontrar os pontos críticos, onde  $x' = y' = 0$ . Após isso calculamos a matriz jacobiana (5.4) para obter os autovalores que indicam a estabilidade dos pontos. A Tabela 5.3 mostra quais são os pontos e respectiva estabilidade. Para

Tabela 5.3: Pontos críticos e estabilidade do sistema (5.19).

$(x,y)$	$w_{eff}$	Autovalores	Estabilidade
(0, 0)	-1	(-4,-3)	Estável
(0, 1)	1/3	(1,4)	Instável
(1, 0)	0	(-1,3)	Ponto de Sela

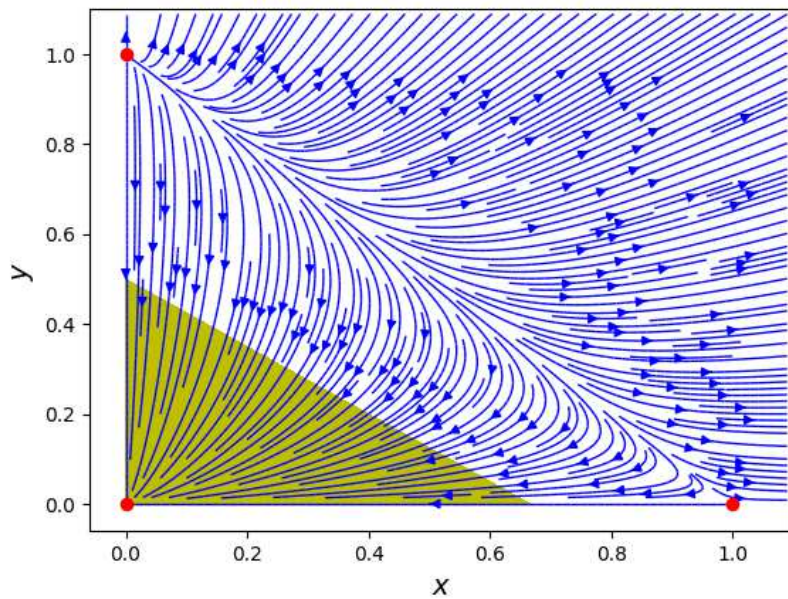


Figura 5.2: Trajetórias entre os pontos críticos do sistema 5.19. A região em amarelo indica onde  $w_{eff} < -1/3$ , e há aceleração.

saber qual a interpretação física de cada ponto, podemos usar a Eq. (2.24) com a Eq.(5.18) para escrever

$$w_{eff} = -1 + x + \frac{4}{3}y, \quad (5.20)$$



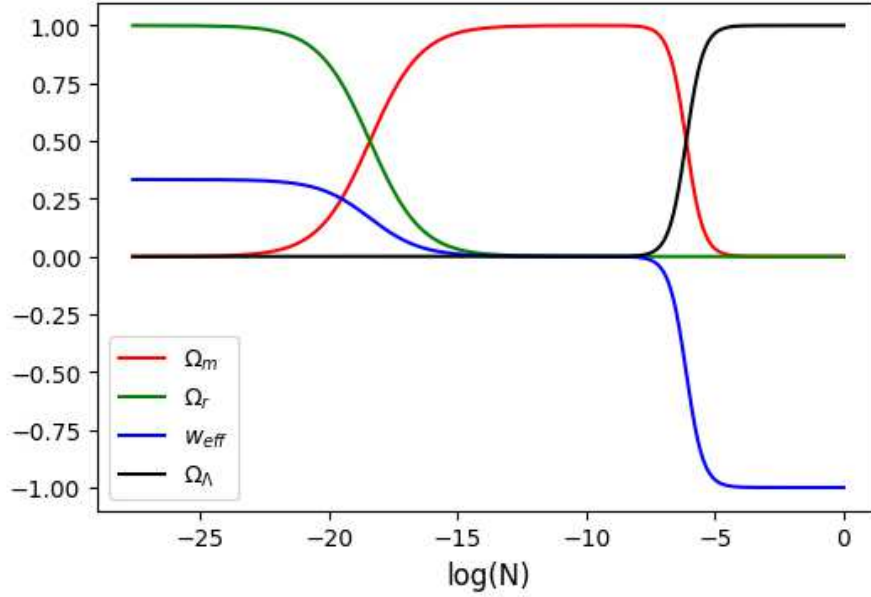


Figura 5.3: Evolução dos parâmetros de densidade e do parâmetro efetivo da equação de estado para o modelo  $\Lambda$ CDM.

que é o parâmetro efetivo da equação de estado. Vemos então da Tabela , que o ponto  $(x, y) = (0, 0)$  corresponde a um universo com expansão acelerada e  $w_{eff} = -1$ . O diagrama do espaço de fase está na Figura , onde sombreada, está a região onde a aceleração se inicia, onde as linhas convergem para o ponto de aceleração. Já na Figura 5.3 temos a evolução dos parâmetros de densidade  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$ ,  $\Omega_m$  e  $w_{eff}$ . Vemos um estado inicial onde a densidade de radiação domina o universo, com  $w_{eff} = 1/3$ , havendo uma transição para a era da matéria, com  $w_{eff} = 0$ . A próxima mudança é caracterizada pela diminuição da densidade de matéria, dando lugar a constante cosmológica, caminhando para  $w_{eff} = -1$ .

### 5.3 O Espaço de Fase para $V(\phi) = U_0(\phi^2 - \phi_0^2)^2$

Agora aplicaremos o método dos sistemas dinâmicos ao modelo descrito no Capítulo 4, de forma que a partir das equações de movimento chegaremos a um sistema não linear de equações de primeira ordem que permitirá a investigação das possíveis soluções do modelo para um dado potencial. Isso significa que poderemos verificar se fenômenos como a aceleração cósmica são possíveis, assim como identificar outros períodos da história

evolucionária do universo. Anteriormente, partimos da ação

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \xi \frac{\phi^2}{2} R - \frac{M_{Pl}^2}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V(\phi) \right] + S_m, \quad (5.21)$$

adicionando o termo da ação relativa a matéria  $S_m$ . A condição de energia, ou primeira equação de Friedmann, é dada por

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + 6\xi H \phi \dot{\phi} + 3\xi H^2 \phi^2 + \rho_m. \quad (5.22)$$

Escolhemos o potencial tipo Higgs

$$V(\phi) = U_0(\phi^2 - \phi_0^2)^2, \quad (5.23)$$

onde  $\phi_0$  é o mínimo do potencial e em  $\phi = \phi_0$ ,  $V(\phi_0) = 0$ . Das Eq. (4.6-4.8), podemos chegar à função

$$-2(1 - \xi(1 - 6\xi)\phi^2)\dot{H} = (1 - 2\xi)\dot{\phi}^2 + 8\xi H \phi \dot{\phi} + 2\xi \phi U_{,\phi}(\phi) + 24\xi^2 \phi^2 H^2 + \rho_m(1 + w_m). \quad (5.24)$$

Para criar um sistema não-linear de equações de primeira ordem a partir do modelo, seguimos o que foi feito em [60] para o mesmo potencial, e introduzimos as novas variáveis

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \\ y &\equiv \frac{\sqrt{12U_0}}{H}, \\ z &\equiv \frac{\phi}{\sqrt{6}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Estas variáveis definirão um sistema dinâmico nos moldes da Eq. 5.5 em três dimensões. Antes de tudo, reescrevemos as Eqs. 5.22 e 5.24 como

$$\Omega_m = 1 - [y^2(z^2 - z_0^2)^2 + (1 - 6\xi)x^2 + 6\xi(x + z)^2], \quad (5.26)$$

e

$$\begin{aligned} (1 - 6\xi(1 - 6\xi)z^2) \frac{\dot{H}}{H^2} &= -\frac{3}{2}(1 - w_m)(1 - 6\xi)x^2 - 3\xi(1 - 3w_m)(x + z)^2 \\ &\quad + 12\xi(1 - 6\xi)z^2 - \frac{3}{2}(1 - y^2(z^2 - z_0^2)^2) - 12\xi y^2 z^2 (z^2 - z_0^2), \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde usamos que  $\Omega_m = \frac{\rho_m}{3H^2}$ . Novamente, expressando as equações em termos dos números de “e-dobra”  $N = \ln(a)$ , teremos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} = & -2(1 - 6\xi(1 - 6\xi)z^2)(x + 3\xi z + y^2 z(z^2 - z_0^2)) \\ & - (x + 6\xi z)[1 + 6\xi(1 - 6\xi)z^2 - \frac{3}{2}(1 - w_m)(1 - 6\xi)x^2 - 3\xi(1 - 3w_m)(x + z)^2 \\ & - \frac{3}{2}(1 - y^2(z^2 - z_0^2)^2) - 12\xi y^2 z^2(z^2 - z_0^2)], \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} = & y[\frac{3}{2}(1 - w_m)(1 - 6\xi)x^2 + 3\xi(1 - 3w_m)(x + z)^2 \\ & - 12\xi(1 - 6\xi)z^2 + \frac{3}{2}(1 - y^2(z^2 - z_0^2)^2) + 12\xi y^2 z^2(z^2 - z_0^2)], \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = x(1 - 6\xi(1 - 6\xi)z^2). \quad (5.30)$$

O termo do lado esquerdo de 5.27,  $(1 - 6\xi(1 - 6\xi)z^2)$  pode produzir uma singularidade para certo valor de  $z$ , assim a seguinte transformação foi feita

$$\frac{d}{d\tau} = (1 - 6\xi(1 - 6\xi)z^2) \frac{d}{d\ln(a)}. \quad (5.31)$$

### 5.3.1 Caracterização dos Pontos Fixos

De posse do sistema (5.28-5.30) podemos achar os pontos críticos, ou seja, que obedecem  $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} = 0$  simultaneamente. Se considerarmos as principais trajetórias podemos criar um gráfico no espaço de fase em três dimensões (Figura 5.4). Na figura 5.4, dentre os diversos caminhos mostrados, daremos mais atenção a dois deles. A linha azul que se dirige ao ponto  $C$  descreve a evolução de um universo dominado pela matéria logo após ter sido dominado pelo campo agindo como radiação, onde escolhemos  $\xi = 1/6$ . Para ter uma melhor ideia dos caminhos gerais, fazemos a projeção em 2d das coordenadas  $x$  e  $z$  com as duas soluções de interesse sobrepostas (Figura 5.5). As densidades de matéria e campo, e a equação efetiva de estado evoluem como na Figura 5.6.

Já as outras linhas mostram outras possíveis trajetórias que são atraídas para o ponto  $x = 0$ ,  $y^2 = \frac{1}{z_0^2}$ ,  $z = 0$ , cuja evolução dos parâmetros cosmológicos está na Figura 5.7, onde vemos a equação de estado evoluir para  $w_{eff} = -1$ , o que significa que o universo passa por uma expansão acelerada. A análise de estabilidade dos pontos críticos será descrita nas seções seguintes, onde encontramos os autovalores da matriz jacobiana 3x3, e

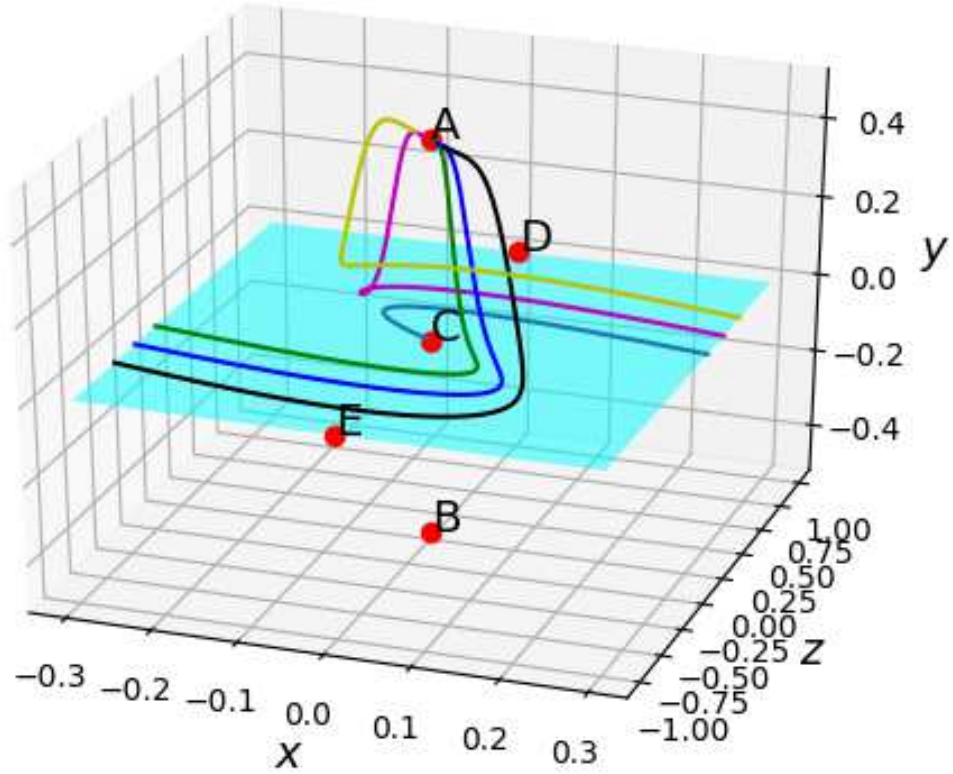


Figura 5.4: Trajetórias entre os pontos críticos do sistema 5.28-5.30, para  $\xi = 1/6$  e  $z_0^2 = 2$ .

verificamos as possibilidades do sinal de cada um deles.

Ponto C:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

Nesse ponto, os autovalores são dados por

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{3}\sqrt{3 - 16\xi}), \quad \lambda_3 = \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{3}\sqrt{3 - 16\xi}). \quad (5.32)$$

Como  $\lambda_1 > 0$ , teremos um fluxo que sai do ponto, denotando instabilidade, mas a caracterização completa depende dos outros dois autovalores, mais especificamente de  $\xi$ . Para o valor específico  $\xi = 3/16$  ou  $|\sqrt{3}\sqrt{3 - 16\xi}| \in \Re < |3|$ , teremos um ponto de sela de índice 1. Se  $3 - 16\xi < 0$  haverá uma parte imaginária com  $\lambda_{2,3} \in \Re < 0$ , o que indica uma espiral, mas pelo sinal do primeiro autovalor, será uma espiral-sela de índice 1. Se

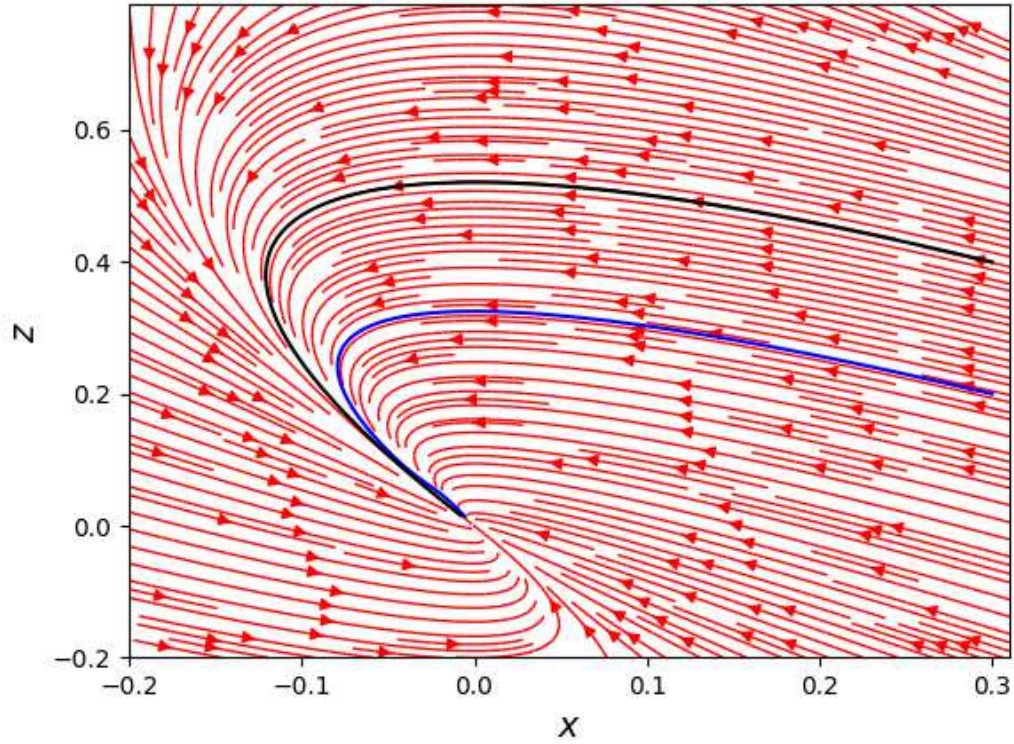


Figura 5.5: Projeção nos eixos  $x$  e  $z$  do espaço de fase junto de soluções mostradas na Figura 5.4.

$|\sqrt{3}\sqrt{3-16\xi}| \in \Re > |3|$  teremos  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_3 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ , que caracteriza um ponto de sela de índice 2. O caso mínimo  $\xi = 0$  corresponde a  $\lambda_3 = 0$ , que caracteriza um ponto não-hiperbólico. Este ponto corresponde a  $\Omega_\phi = 0$  e  $w_{eff} = 0$ , ou seja, um universo dominado pela matéria.

$$\text{Pontos } \mathbf{D}, \mathbf{E}: x = 0, \quad y = 0, \quad z^2 = \frac{1}{6\xi}.$$

Estes pontos existem apenas para  $\xi > 0$  e os autovalores do jacobiano são

$$\lambda_1 = 12\xi, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{144\xi}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\sqrt{144\xi}. \quad (5.33)$$

Nesse caso a classificação é mais direta, pois temos  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_3 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ , que caracteriza um ponto de sela de índice 2. Esta solução corresponde a uma densidade do campo de valor  $\Omega_\phi = 1$  com  $w_{eff} = -1 + \frac{2(-1-6\xi)}{9\xi}$ . No caso conforme ( $\xi = \frac{1}{6}$ ), temos  $w_{eff} = \frac{1}{3}$ , que corresponde a um universo dominado pela radiação.

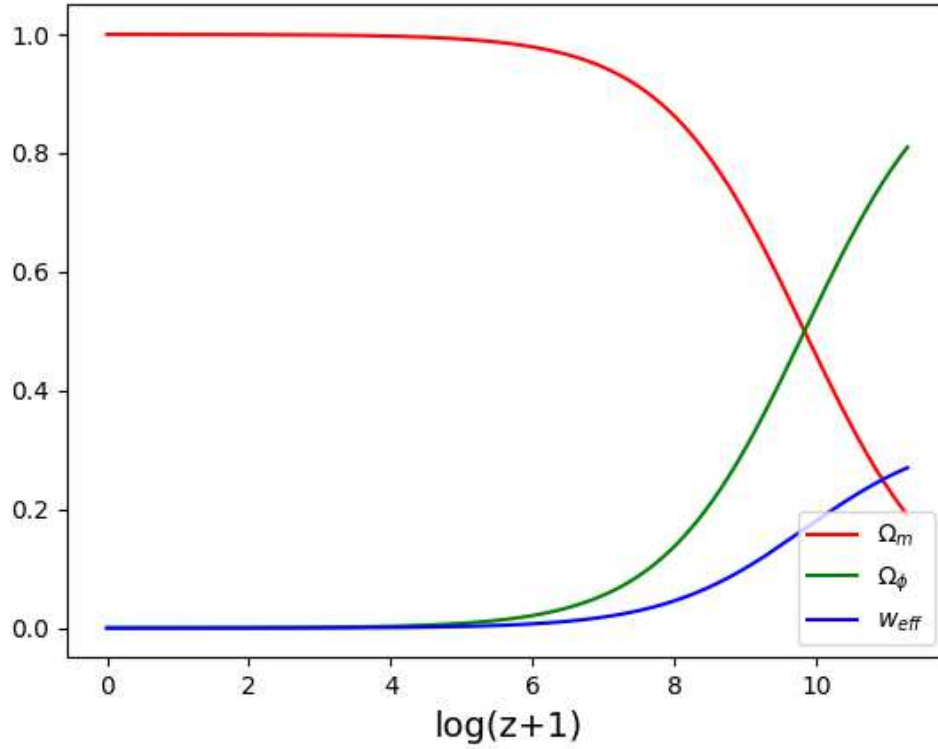


Figura 5.6: Evolução dos parâmetros de densidade do campo e da matéria, e da equação efetiva de estado, para a linha azul que se dirige ao ponto  $C$  da Figura 5.4.

Pontos **A,B**:  $x = 0$ ,  $y^2 = \frac{1}{z_0^4}$ ,  $z = 0$ .

A existência desses pontos não dependem de  $\xi$ , mas a estabilidade sim. Os autovalores nesse caso dependem tanto de  $\xi$  como de  $z_0$ , o mínimo do potencial. Eles são

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \frac{-3z_0^2 - \sqrt{-z_0^2(-8 - 9z_0^2 + 48\xi z_0^2)}}{2z_0^2}, \quad \lambda_3 = \frac{-3z_0^2 + \sqrt{-z_0^2(-8 - 9z_0^2 + 48\xi z_0^2)}}{2z_0^2}. \quad (5.34)$$

Vemos que se  $-8z_0^2 - 9z_0^4 + 48\xi z_0^4 < 0$ , teremos uma espiral estável, e para  $-8z_0^2 - 9z_0^4 + 48\xi z_0^4 = 0$ , um ponto estável. Para  $\xi = 0$  não podemos ter espirais, pois  $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-3 \mp \sqrt{\frac{8}{z_0^2} + 9})$ . Por fim, se  $|\sqrt{\frac{8}{z_0^2} + 9}| > |3|$ , teremos um ponto de sela. Nesse ponto teremos  $\Omega_\phi = 1$  e  $w_{eff} = -1$ , que representa um universo dominado pelo campo escalar, e com expansão acelerada.

No caso mínimo ( $\xi = 0$ ), vemos a inversão do potencial, evidenciando dois mínimos

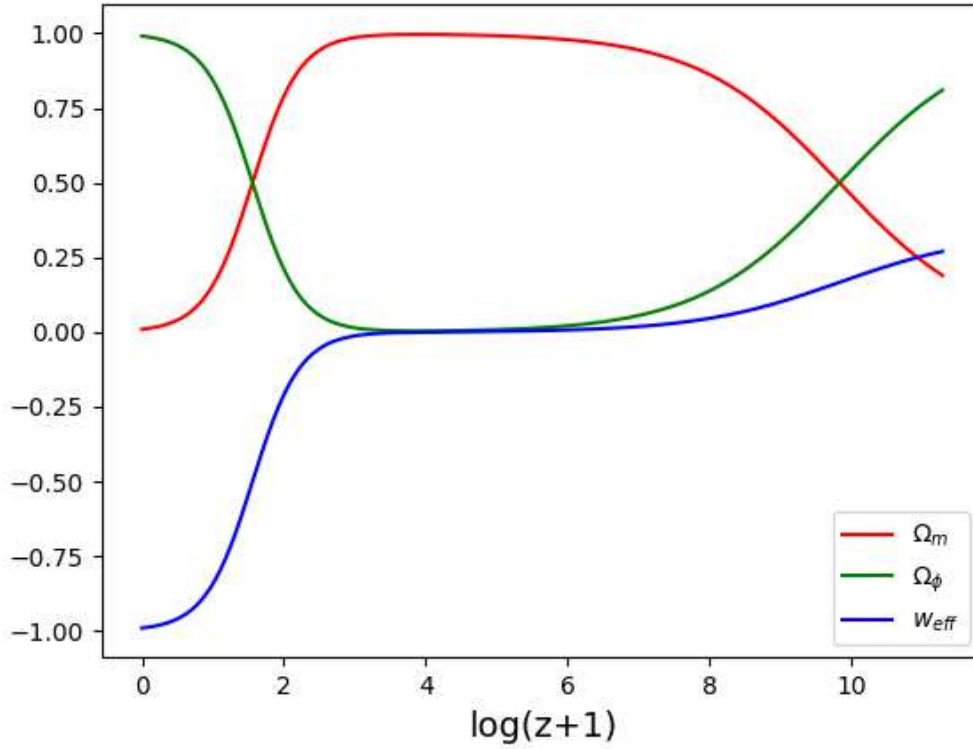


Figura 5.7: Evolução dos parâmetros de densidade do campo e da matéria, e da equação efetiva de estado, para uma trajetória em direção ao ponto A na Figura 5.4.

onde o ponto  $\phi = 0$  se torna instável. O diagrama de fase se encontra na Figura 5.8. Quando calculamos os parâmetros  $\Omega_m, \Omega_\phi$  e  $w_{eff}$  nesse caso, percebemos a aceleração transiente e após isso, uma grande oscilação dos valores da equação de estado, no momento que o campo começa a oscilar em torno de um dos mínimos (Figura 5.9)

## 5.4 O *Symmetron* quando $\xi \neq 0$

Se, dessa vez, incluirmos o acoplamento à densidade  $A(\phi)$ , as equações de Friedmann e de Klein-Gordon tomarão a forma[19]

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + 6\xi H\phi\dot{\phi} + 3H^2\xi\phi^2 + \rho_m A(\phi), \quad (5.35)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi}(\phi) + \rho_m A_{,\phi}(\phi) + \xi R\phi = 0. \quad (5.36)$$



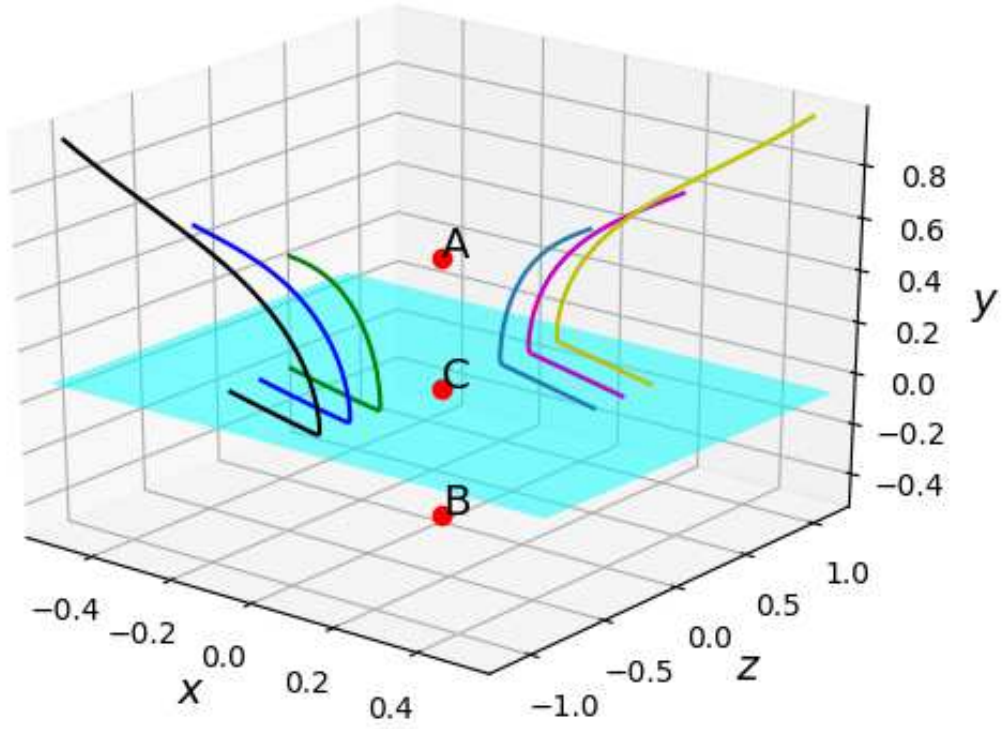


Figura 5.8: Diagramas de fase para o potencial (5.23) e  $\xi = 0$ . Abaixo, as soluções convergem para os mínimos do potencial em  $y \rightarrow \infty$ .

Assim como anteriormente, assumimos que antes da quebra de simetria a contribuição do *symmetron* na evolução do fator de escala é mínima, dessa forma

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + 6\xi H\phi\dot{\phi} + 3H^2\xi\phi^2 = 0, \quad (5.37)$$

o que significa que o campo se encontra essencialmente em repouso no mínimo do potencial, onde  $\dot{\phi} = 0$  e  $V(0) = 0$ . Nesse caso, também, o campo está acoplado apenas à matéria, e como  $A(\phi) = 1 + \frac{\phi^2}{2M^2}$ , a aproximação  $A(0) = 1$  é válida e a densidade evolui como  $\rho_m \propto a^{-3}$ . Notamos também que a equação de Klein-Gordon nos mostra a existência de um potencial efetivo que obedece

$$V_{eff,\phi}(\phi) = V_{,\phi} + \rho_m A_{,\phi} + \xi R\phi, \quad (5.38)$$

e, novamente, quando a quebra de simetria acontece, um breve período taquiônico ocorre, ou seja

$$\mu_{eff}^2 = V_{eff,\phi\phi} < 0. \quad (5.39)$$



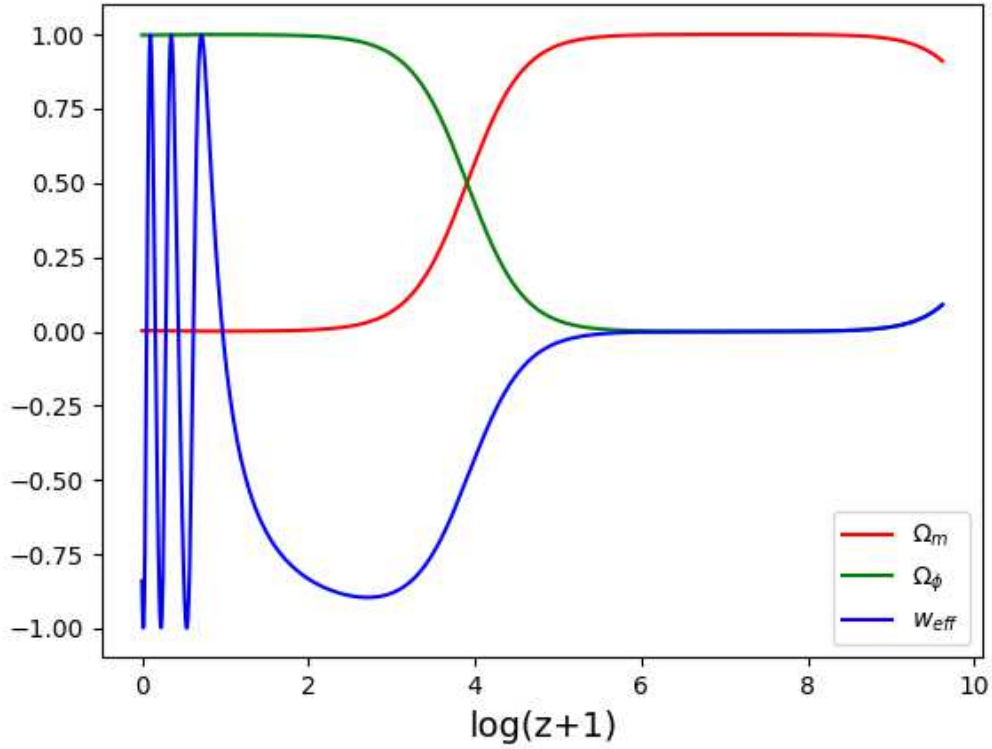


Figura 5.9: Parâmetros de densidade do campo e da matéria e da equação efetiva de estado, para uma das soluções da Figura 5.8.

Mas, antes disso, a condição

$$\mu_{eff}^2 = V_{eff,\phi\phi}|_{\phi=0} = -\mu^2 + \xi R + \rho_m A_{,\phi\phi} > 0, \quad (5.40)$$

deve ser satisfeita. Usando (5.35) junto de  $R = 6(2H^2 + \dot{H})$  encontramos que  $-2\dot{H} = \rho_m A(\phi = 0)$ , e

$$R = \rho_m A(\phi = 0), \quad (5.41)$$

de onde podemos reescrever (5.40) como

$$\mu_{eff}^2 = -\mu^2 + \xi \rho_m A(\phi = 0) + \rho_m A_{,\phi\phi}(\phi = 0) > 0. \quad (5.42)$$

Finalmente, com  $A(0) = 1$  e  $A_{,\phi\phi}(0) = \frac{1}{M^2}$ , teremos

$$\mu_{eff}^2 = -\mu^2 + \xi \rho_m + \rho_m/M^2 > 0, \quad (5.43)$$

o que leva a densidade ‘crítica’ que define a quebra da simetria

$$\rho_m > \frac{\mu^2 M^2}{1 + \xi M^2} \equiv \rho_c, \quad (5.44)$$

que mantém  $\mu_{eff}^2 > 0$ . Vamos agora analisar o caso onde  $\xi = 1/6$  e ver como os parâmetros do modelo são modificados. A condição (5.36) pode ser reescrita como [18]

$$\rho_c = \mu^2 \left( \frac{1}{6M_{Pl}^2} - \frac{1}{M^2} \right)^{-1}, \quad (5.45)$$

onde voltamos a considerar  $M_{Pl}$ , pois iremos buscar uma modificação na relação  $M_{Pl}/M$ , já que o potencial efetivo agora é diferente. Também foi considerada a função  $A(\phi) = 1 + \epsilon \frac{\phi^2}{2M^2}$ , com  $\epsilon = -1$ . Assim como no modelo original, vamos impor

$$\rho_c = H_0^2 M_{Pl}^2, \quad (5.46)$$

de onde conseguimos a forma do parâmetro  $\mu$  em termos de quantidades conhecidas

$$\mu^2 = \left( \frac{1}{6M_{Pl}^2} - \frac{1}{M^2} \right) H_0^2 M_{Pl}^2. \quad (5.47)$$

A massa do *symmetron* em torno de um dos mínimos ainda é  $m_0 = \sqrt{2}\mu$ , e queremos saber se ela é comparável a massa da quintessência,  $m_\phi \sim H_0$ . Assim, definimos  $\mu = \alpha H_0$ , e usando a relação (5.47) encontramos que

$$\alpha^2 H_0^2 = \left( \frac{1}{6M_{Pl}^2} - \frac{1}{M^2} \right) H_0^2 M_{Pl}^2, \quad (5.48)$$

e notando que  $\mu^2$  se torna negativo para  $M > \sqrt{6}M_{Pl}$ , encontramos o limite  $0 < \alpha < 1/\sqrt{6}$ . No entanto, novamente os testes da gravidade locais impõem limites que não ajudam o modelo. Como nesse caso  $\alpha > 10^4$ , temos uma massa para o *symmetron* de pelo menos  $10^4$  maior que a da quintessência. Ainda assim, consideremos que o limite calculado  $0 < \alpha < 1/\sqrt{6}$  seja válido. Novamente usando a suposição do modelo original que em um dos mínimos do potencial  $\phi_0/M^2 \sim 1/M_{Pl}$  encontramos a expressão para  $\lambda$

$$\lambda = \left( \frac{M_{Pl}^2}{M^4} + \frac{1}{6M_{Pl}^2} \right) \alpha^2 H_0^2. \quad (5.49)$$

Em seguida, vemos os resultados numéricos para estes parâmetros, onde redefinimos  $\mu$  e  $\lambda$  como

$$\tilde{\mu} = \mu/H_0 \quad \tilde{\lambda} = \lambda M_{Pl}^2/H_0^2. \quad (5.50)$$

Escolhendo  $\alpha = 1/\sqrt{7}$ , vemos que um estado de aceleração é facilmente alcançado (Figura 5.10). O campo escalar segue em direção ao mínimo, enquanto o parâmetro de Hubble tem um valor aproximadamente constante.

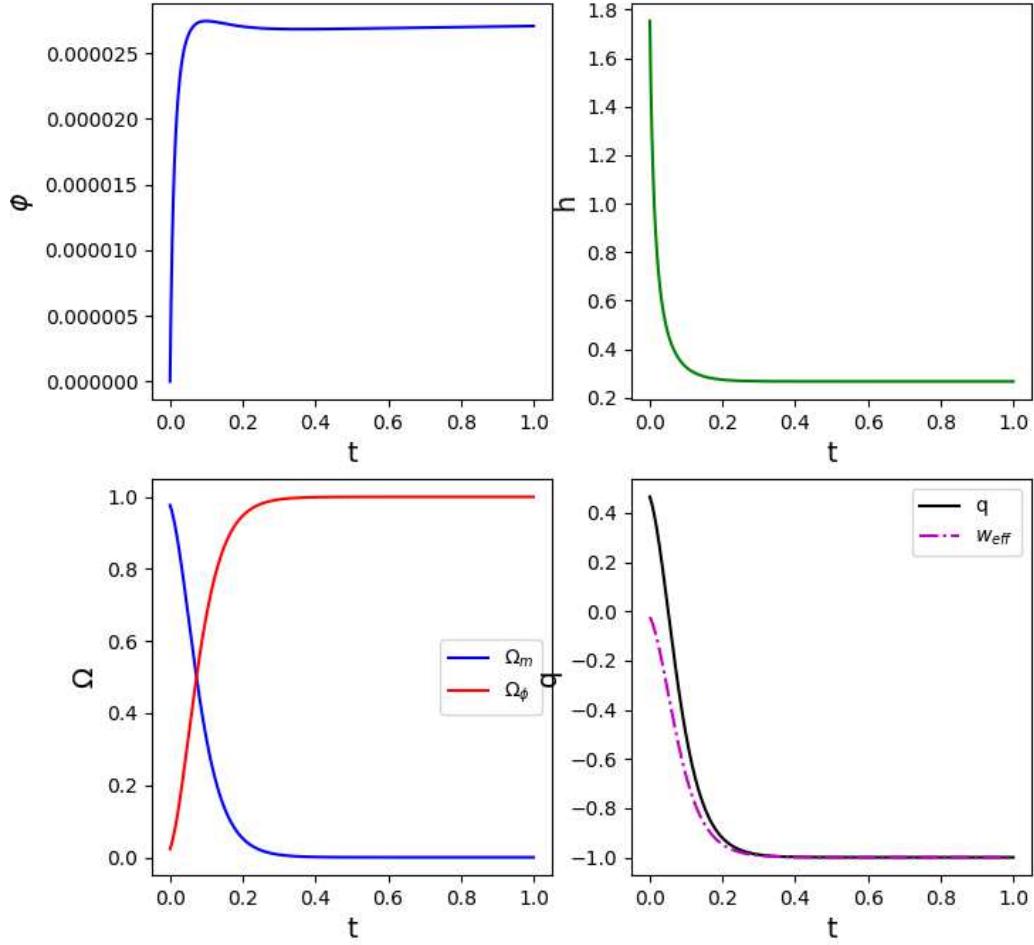


Figura 5.10: Parâmetros cosmológicos para o modelo não mínimo com  $\xi = 1/6$  e  $\alpha = 1/\sqrt{7}$ .

### 5.4.1 A Falta de Soluções Tipo de Sitter para o Campo Escalar

Uma característica importante em modelos envolvendo campos escalares como fonte da aceleração cósmica, se buscamos uma aceleração persistente, é a existência de soluções tipo de Sitter, caracterizadas por  $\phi \equiv H \equiv \text{constante}$ , e podemos mostrar que para um certo campo que começa sua evolução, ele eventualmente será ‘atraído’ para essa solução, o que poderá caracterizar aceleração. No próximo capítulo, veremos com mais detalhes as possíveis soluções críticas desse modelo, e as rotas de evolução do campo, em que cada uma corresponde a uma certa situação física. Aqui no entanto, vamos nos limi-

tar apenas aos pontos de Sitter, os quais são derivados diretamente das equações (5.35) e (5.36), que se tornam com  $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = \rho_m = 0$

$$3H^2 = V(\phi) + 3H^2\xi\phi^2 \quad (5.51)$$

e

$$V_{,\phi} + 12\xi H^2\phi = 0. \quad (5.52)$$

As soluções para  $\phi_{dS}^2$  e  $H_{dS}^2$  são

$$\phi_{dS}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda - \mu^2\xi}, \quad H_{dS}^2 = \frac{-\mu^4}{12(\lambda - \mu^2\xi)}. \quad (5.53)$$

Vemos um problema aqui, não obtemos soluções simultâneas reais para as duas quantidades, o que significa que um estado de Sitter para o *symmetron* é inacessível, mesmo para o caso mínimo: Se fizermos  $\xi = 0$  o problema persiste e, como vimos das soluções numéricas, o campo segue oscilando em torno de um dos mínimos com uma contribuição irrelevante para o parâmetro de densidade do campo  $\Omega_\phi$ .

A opção que temos nesse caso é adicionar uma constante ao potencial, de forma que as soluções em (5.53) se tornam

$$\phi_{dS}^2 = \frac{\mu^2 + 4\xi V_0}{\lambda - \mu^2\xi}, \quad H_{dS}^2 = \frac{4\lambda V_0 - \mu^4}{12(\lambda - \mu^2\xi)}. \quad (5.54)$$

Se levantarmos o potencial o suficiente para que  $V(\phi_0) = 0$ , nos mínimos, com  $V_0 = \frac{\mu^4}{4\lambda}$ , teremos  $H_{dS}^2 = 0$ , assim, para obtermos soluções de Sitter nesse modelo, um potencial com essa forma positivo se faz necessário.

# Capítulo 6

## Um Modelo Híbrido com Quebra de Simetria

Como vimos no capítulo anterior, há uma dificuldade para o potencial tipo Higgs em realizar a aceleração cósmica, mesmo em uma teoria de gravidade modificada, seja pela negatividade do potencial, ou por severos limites experimentais impostos por observações no sistema solar. No entanto, vemos que se conseguirmos modificar o potencial de forma que ele mantenha suas características principais, que são a preservação da simetria  $\phi \rightarrow -\phi$  e a eventual quebra dessa simetria, permitindo a evolução do campo, de modo que um estado de Sitter seja alcançado, se quisermos aceleração persistente, podemos chegar em um modelo viável e interessante de ser estudado.

### 6.1 Equações de Movimento

Assim, seguimos aqui o que foi feito em [73], onde é proposta a adição de um novo campo  $\psi$  a ação 4.1 de forma que teremos

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} (M_{Pl}^2 - \xi \phi^2) R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - V(\phi, \psi) \right] + S_m, \quad (6.1)$$

onde a variação em relação a métrica FRW e os campos escalares resultam nas equações

$$3M_{Pl}^2 H^2 = \rho_d + \rho_m, \quad (6.2)$$

$$-2M_{Pl}^2 \dot{H} = p_d + \rho_d + p_m + \rho_m, \quad (6.3)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \xi R\phi + V_{,\phi} = 0, \quad (6.4)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + V_{,\psi} = 0, \quad (6.5)$$

e a pressão e densidade dos campos são

$$\rho_d = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi, \psi) + 6\xi H\phi\dot{\phi} + 3\xi H^2\phi^2 + \frac{1}{2}\psi^2, \quad (6.6)$$

$$p_d = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi, \psi) - 2\xi\dot{\phi}^2 - 2\xi\dot{H}\phi^2 + 2\xi H\phi\dot{\phi} - (3\xi H^2 - 2\xi^2 R)\phi^2 + 2\xi\phi V_{,\phi} + \frac{1}{2}\psi^2. \quad (6.7)$$

Para a função  $V$  escolhemos o potencial tipo  $\phi^4$ , para dois campos

$$V(\phi, \psi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 - \frac{1}{2}\gamma\phi^2\psi^2 + \frac{1}{2}m^2\psi^2 + \frac{1}{4}\Lambda\psi^4. \quad (6.8)$$

A forma do potencial permite que haja duas quebras de simetrias, que criam regiões instáveis do potencial onde o campo pode iniciar a sua evolução. Na Figura 6.1 temos o potencial (6.8) para diferentes configurações. Para entender o processo, escrevemos as equações (6.4-6.5) mais explicitamente

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + (-\gamma\psi^2 + \xi R - \mu^2)\phi + \lambda\phi^3 = 0, \quad (6.9)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + (-\gamma\phi^2 + m^2)\psi + \Lambda\psi^3 = 0. \quad (6.10)$$

Percebemos que o termo híbrido  $-\frac{1}{2}\gamma\phi^2\psi^2$  permite a quebra de simetria em (6.10). Já em (6.9) temos a presença do escalar de Ricci  $R$ , que preserva o sinal do termo quadrático até outra quebra de simetria. Inicialmente os campos se encontram em repouso na origem do potencial, em  $\phi = \psi = 0$ . Assim, as equações de Friedmann evoluem normalmente como em um universo Einstein-de Sitter e o escalar de Ricci é igual a densidade de matéria,  $R = \rho_m$ . Assim, se reescrevermos a derivada do potencial para  $\phi$  em (6.9) como

$$V_{,\phi}^{eff} = (\rho_m\xi - \mu^2)\phi + \lambda\phi^3, \quad (6.11)$$

vemos que o termo entre parênteses muda de sinal quando  $\rho_m > \mu^2/\xi$ , e temos instabilidade na parte em  $\phi$  do potencial. Notamos que, nesse momento, não há evolução do campo  $\psi$ , assim, temos algo muito parecido com o modelo descrito no capítulo anterior, mas vemos que é possível a criação de um potencial efetivo envolvendo a densidade da matéria sem a introdução de uma transformação na métrica, como no modelo do *symmetron*. Agora olhamos para a derivada do potencial na equação de Klein-Gordon para  $\psi$

$$V_{,\psi}^{eff} = (-\gamma\phi^2 + m^2)\psi + \Lambda\psi^3. \quad (6.12)$$

A segunda quebra de simetria ocorre quando  $\phi^2 > m^2/\gamma$ , possibilitando o início da evolução do campo  $\psi$  (Figura 6.2). A evolução do sistema é mostrada na Figura 6.6 pela integração numérica do sistema (6.2-6.5), onde percebemos que é possível atingir um regime de super aceleração, que acontece quando  $w_{eff} < -1$ , mas eventualmente um estado onde  $w_{eff} = -1$  é alcançado, com campos e parâmetro de Hubble constante.

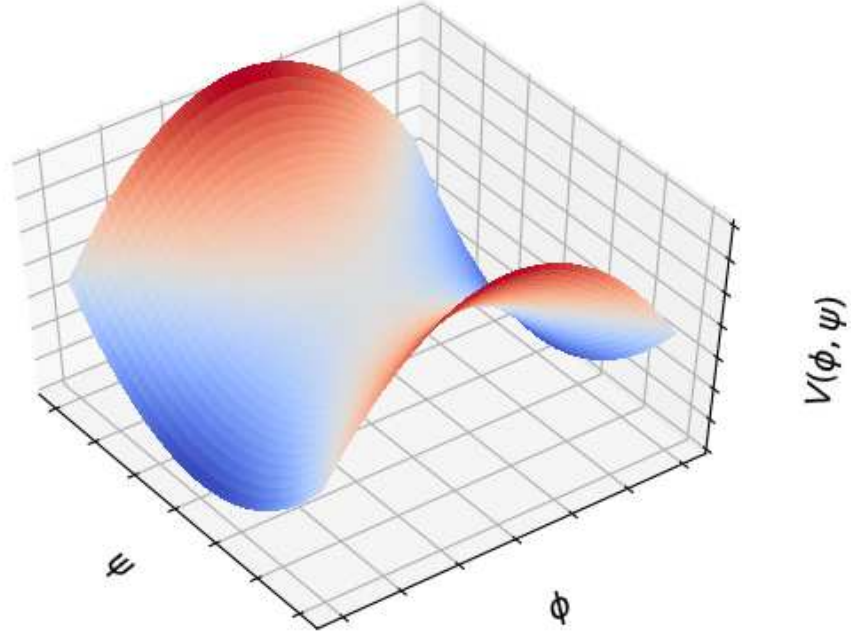


Figura 6.1: O potencial da Eq. 6.8.

## 6.2 Sistema Dinâmico

Para derivar o sistema dinâmico de equações de primeira ordem para (6.2-6.5), e a realização dos cálculos numéricos, fazemos as seguintes redefinições

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} = \frac{\phi}{M_{Pl}}, \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{M_{Pl}}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{M_{Pl}^2 H_0^2}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda M_{Pl}^2}{H_0^2}, \quad \tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda M_{Pl}^2}{H_0^2}, \\ \tilde{\mu} = \frac{\mu}{H_0}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{H_0}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma M_{Pl}^2}{H_0^2}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{H_0^2}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

removendo assim a dependência explícita em  $M_{Pl}$  nas equações de Friedmann. Da mesma forma que foi feito no Capítulo 5, definimos também variáveis adimensionais, de modo

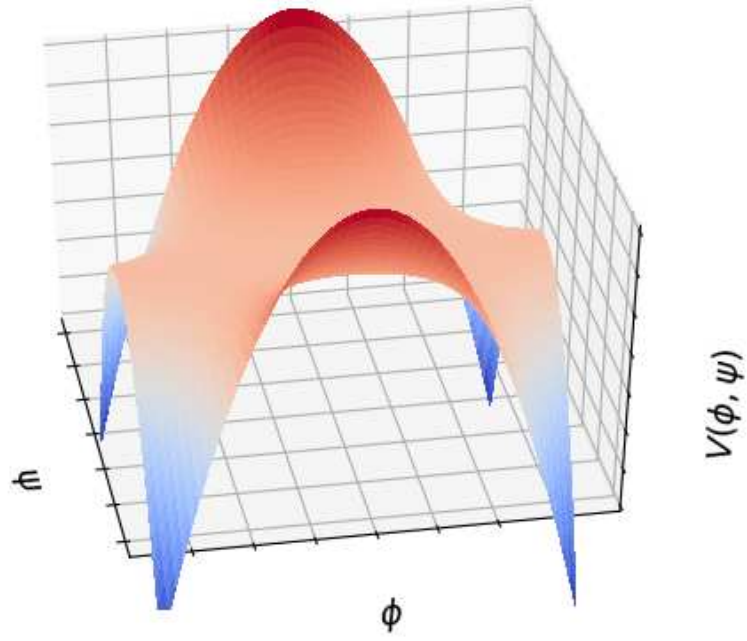


Figura 6.2: O potencial expresso na Eq. 6.12. Note que para um certo valor de  $\phi$ , inicia-se uma região de instabilidade.

que a Eq. (6.2) é escrita como

$$1 = x^2 + X^2 + 2\sqrt{6}\xi xy + \xi y^2 + \frac{V(y, Y)}{3H^2}, \quad (6.14)$$

onde as novas coordenadas são

$$x \equiv \frac{1}{\sqrt{6\tilde{H}}} \frac{d\tilde{\phi}}{d\tau}, \quad X \equiv \frac{1}{\sqrt{6\tilde{H}}} \frac{d\tilde{\psi}}{d\tau}, \quad y \equiv \tilde{\phi}, \quad Y \equiv \tilde{\psi}, \quad u \equiv \frac{\sqrt{\tilde{\rho}_m}}{\sqrt{3\tilde{H}}}, \quad (6.15)$$

com  $\tau = H_0 t$ . Derivando cada coordenada em relação a  $N = \ln(a)$ , com a ajuda da relação (5.19), teremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} x' &= -3x - \sqrt{6}\xi y(2 + s) - xs - \frac{\sqrt{6}f(y, Y)v}{2}, \\ y' &= \sqrt{6}x, \\ u' &= -\frac{3u}{2} - su, \\ Y' &= \sqrt{6}X, \\ X' &= -3X - Xs - \sqrt{6}F(y, Y)v, \end{aligned} \quad (6.16)$$



onde temos também as variáveis

$$\begin{aligned}
s \equiv \frac{\dot{H}}{H^2} &= \frac{3u^2/2 + 3(1 - 2\xi)x^2 + 3X^2 + 4\sqrt{6}\xi xy + 3\xi y f(y, Y)v + 12\xi^2 y^2}{-1 + \xi(1 - 6\xi)y^2}, \\
v &\equiv 1 - x^2 - X^2 - 2\sqrt{6}\xi xy - \xi y^2, \\
f(y, Y) &= \frac{V_{,\phi}}{V}, \\
F(y, Y) &= \frac{V_{,\psi}}{V}.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Vemos que agora temos um sistema com 5 dimensões no espaço de fase, e assim teremos que ampliar novamente os conceitos de estabilidade para caracterizar os pontos críticos de (6.16) (Apêndice D). Aplicando a condição  $x' = y' = u' = Y' = X' = 0$ , chegaremos a pontos críticos de interesse

$$\begin{aligned}
x = 0, \quad X = 0, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \quad Y = \text{qualquer}, \quad u = 0, \\
x = 0, \quad X = 0, \quad y = 0, \quad Y = 0, \quad u = 1, \\
x = 0, \quad X = 0, \quad y = \pm \phi_{dS}, \quad Y = \pm \psi_{dS}, \quad u = 0, \\
x = 0, \quad X = 0, \quad y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda - \xi\mu^2}}, \quad Y = 0, \quad u = 0.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$\psi_{dS}$  e  $\phi_{dS}$  são as soluções que representam um universo de de Sitter

$$\phi_{dS}^2 = -\frac{\xi\tilde{m}^4 + \tilde{\Lambda}\tilde{\mu}^2 - \tilde{\gamma}\tilde{m}^2}{\tilde{\Lambda}\xi\tilde{\mu}^2 - \xi\tilde{\gamma}\tilde{m}^2 - \tilde{\Lambda}\tilde{\lambda} + \tilde{\gamma}^2} \tag{6.19}$$

$$\psi_{dS}^2 = -\frac{\xi\tilde{m}^2\tilde{\mu}^2 - \tilde{\lambda}\tilde{m}^2 + \tilde{\gamma}\tilde{\mu}^2}{\tilde{\Lambda}\xi\tilde{\mu}^2 - \xi\tilde{\gamma}\tilde{m}^2 - \tilde{\Lambda}\tilde{\lambda} + \tilde{\gamma}^2} \tag{6.20}$$

e

$$H_{dS}^2 = \frac{1}{12} \frac{\Lambda\tilde{\mu}^2 - 2\tilde{\gamma}\tilde{m}^2\tilde{\mu}^2 + \tilde{\lambda}\tilde{m}^4}{\tilde{\Lambda}\xi\tilde{\mu}^2 - \xi\tilde{\gamma}\tilde{m}^2 - \tilde{\Lambda}\tilde{\lambda} + \tilde{\gamma}^2}, \tag{6.21}$$

enquanto  $u = 1$  representa um universo dominado pela matéria, com  $w_{eff} = 0$  e  $y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda - \xi\mu^2}}$  um período transiente de aceleração, mas com o mesmo problema da seção 5.3.1, já que os pontos coincidem. Os parâmetros do modelo tem valores de modo que  $\phi_{dS}^2$ ,  $\psi_{dS}^2$  e  $H_{dS}^2$  sejam maiores que zero, para a existência das soluções. Da mesma forma que [73] tomaremos os valores

$$\xi = 1, \quad \tilde{\lambda} = 0.005, \quad \tilde{m} = 4, \quad \tilde{\gamma} = 1, \quad \tilde{\mu} = 4, \quad \tilde{\Lambda} = 0.5, \tag{6.22}$$

A seguir apresentamos projeções no espaço tridimensional e em duas dimensões do sistema (6.16) nas proximidades de alguns pontos críticos. Na Figura 6.3 vemos uma trajetória

típica nas coordenadas  $X$ ,  $Y$  e  $u$ , que são atraídas para as soluções (6.22-6.23), representadas pelo ponto  $A$ , que partem do ponto  $B$ , onde  $u = 1$ . Já na Figura 6.4 temos a evolução de todas as coordenadas no trajeto descrito na Figura 6.3. Uma outra forma

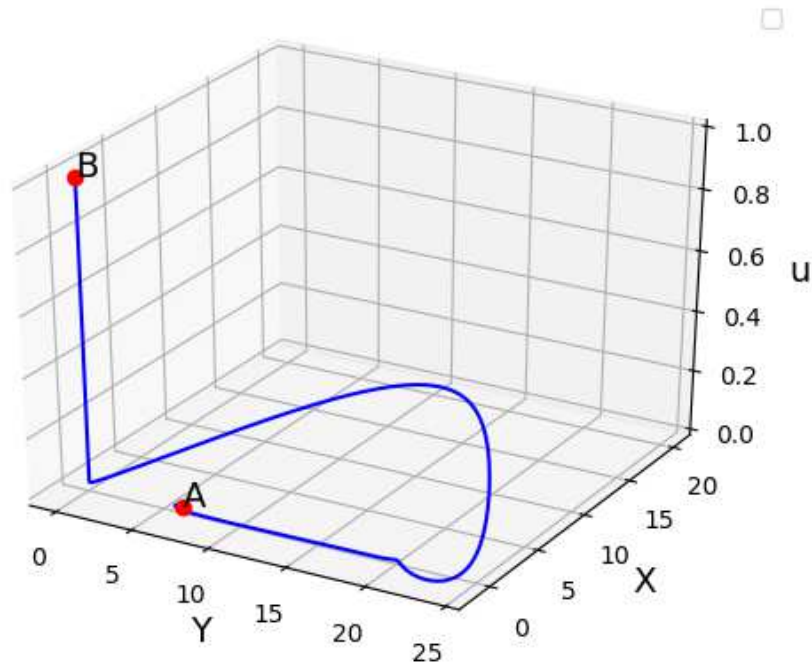


Figura 6.3: A projeção no espaço tridimensional do sistema 6.16. As soluções partem de valores próximos ao ponto referente a dominação pela matéria até um dos pontos de de Sitter em  $u = 0$ .

de visualizar pontos críticos assim como o fluxo em volta é fazendo a projeção em duas dimensões. Para os pontos de Sitter, fazemos  $u = X = 0$  e  $y = \phi_{dS}$ , conforme mostrado na Figura 6.5. Também mostramos na mesma figura o ponto onde  $y = \pm 1/\sqrt{\xi}$ , onde as demais coordenadas são zero. Existem ainda outros pontos críticos no sistema (6.17), mas alguns deles simplesmente não existem para os valores dos parâmetros do modelo que escolhemos (como 6.21), e assim decidimos focar nos mais relevantes para a aceleração cósmica e períodos conhecidos como o da radiação e da matéria.

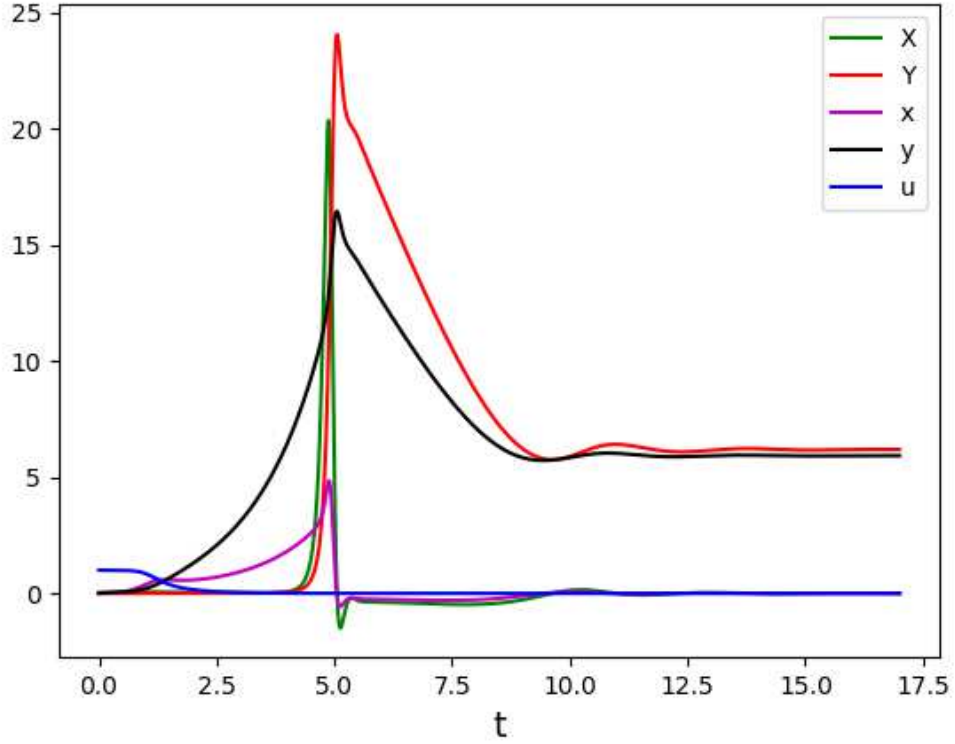


Figura 6.4: A evolução das coordenadas (6.15) do sistema (6.16) para a trajetória na Figura 6.3.

### 6.3 Soluções Numéricas

Podemos simular como o mecanismo funciona pela resolução numérica das equações (6.2-6.5). Primeiramente percebemos que podemos reescrever a equação para  $\tilde{H}$  como

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{H}}{d\tau} = & -\frac{1}{2\epsilon((6\epsilon - 1)\tilde{\phi}^2 + 1)} \left( (1 - 2\epsilon) \left( \frac{d\tilde{\phi}}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} \right)^2 \right) \\ & + 8\epsilon\tilde{H}\tilde{\phi}\frac{d\tilde{\phi}}{d\tau} - 2\epsilon\mu^2\tilde{\phi}^2 + 2\epsilon\lambda\tilde{\phi}^4 - 2\epsilon\gamma\tilde{\phi}^2\tilde{\psi}^2 + 24\epsilon^2\tilde{\phi}^2\tilde{H}^2 + \tilde{\rho}^m. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Assim, esta equação nos dará o parâmetro de Hubble enquanto que a evolução dos campos escalares e da densidade de matéria serão dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{\phi}}{d\tau^2} + 3\tilde{H}\frac{d\tilde{\phi}}{d\tau} + \xi R\phi + V_{,\tilde{\phi}} &= 0, \\ \frac{d^2\tilde{\psi}}{d\tau^2} + 3\tilde{H}\frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} + V_{,\tilde{\psi}} &= 0, \\ \frac{d\tilde{\rho}}{d\tau} + 3\tilde{H}\tilde{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

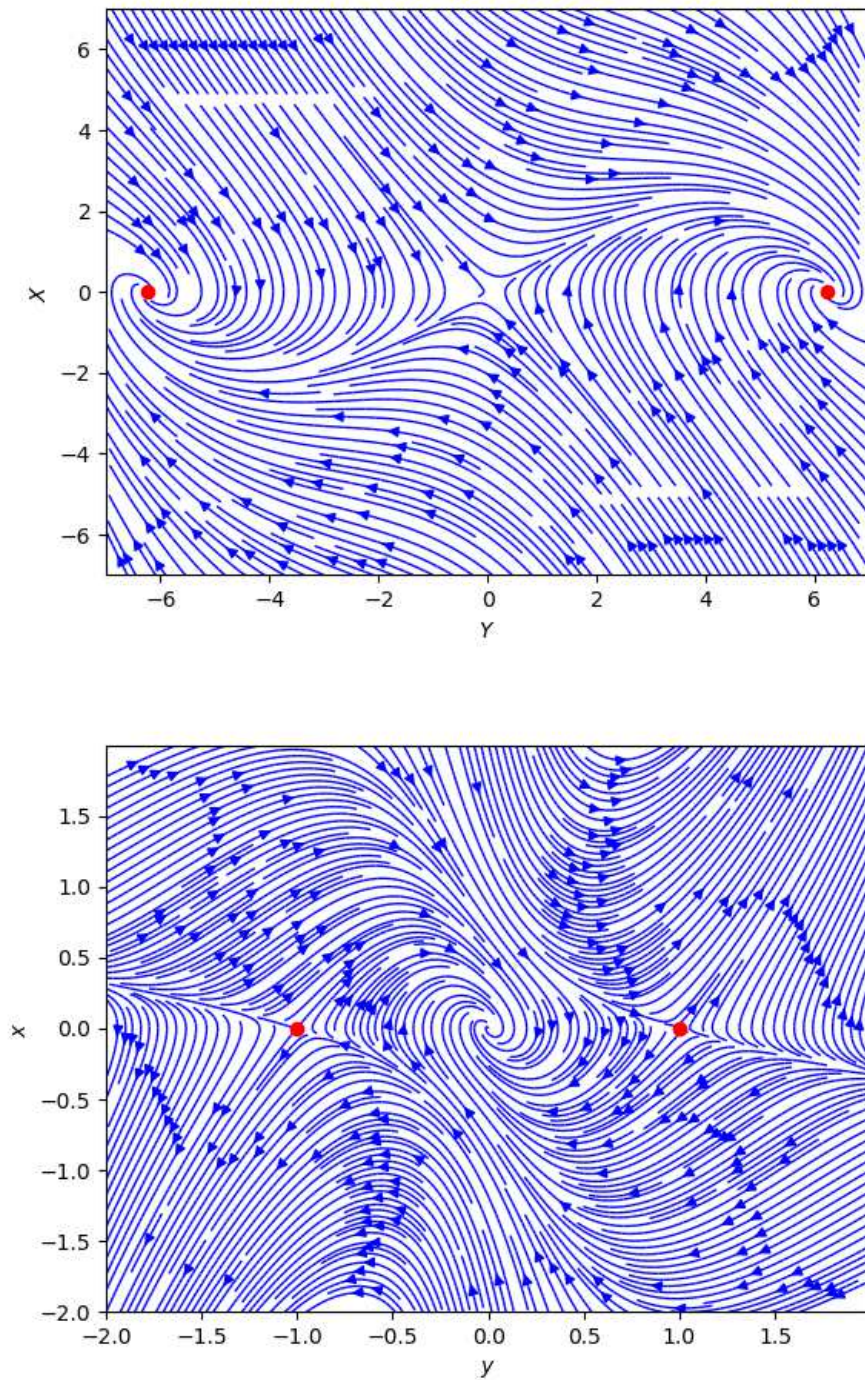


Figura 6.5: Acima, o plano  $X - Y$  onde os pontos de Sitter estão em vermelho. Abaixo, o plano  $x - y$ , onde os pontos  $y = \pm 1/\sqrt{\xi}$  também estão representados em vermelho.

Para resolver equações diferenciais de ordens superiores a 1, podemos fazer o seguinte procedimento. Considerando uma equação de segunda ordem

$$\ddot{f} = C, \tag{6.25}$$

sendo  $C$  uma constante, é possível representar esta equação como duas equações de primeira ordem

$$\begin{aligned}\dot{f} &= g, \\ \dot{g} &= C,\end{aligned}\tag{6.26}$$

e resolvê-la usando os diversos métodos numéricos disponíveis. Neste trabalho, escolhemos o método de *Runge-Kutta* de segunda ordem, onde a solução  $f$  de uma equação de primeira ordem é

$$\begin{aligned}f(t + \Delta t) &= y + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) + \mathcal{O}(3), \\ k_1 &= g(f, t)\Delta t, \\ k_2 &= g(f + k_1, t + \Delta t)\Delta t.\end{aligned}\tag{6.27}$$

Para os parâmetros (6.22), encontramos que a densidade crítica para a quebra da simetria é  $\frac{\mu^2}{\xi} = 16$ , então integraremos a partir desse valor, ou seja,  $\tilde{\rho}_{m0} = 16$ , onde  $\phi$  começa a evolução, mas  $\psi$  só aparece após a segunda quebra de simetria, onde  $\phi = \frac{m^2}{\gamma} = 4$ . O gráfico para uma série de parâmetros está na Figura 6.6. Nela, vemos um comportamento variado, especialmente do parâmetro de Hubble. Primeiro notamos que o campo  $\phi$  começa sua evolução enquanto  $\psi$  permanece nulo até determinado momento. Em seguida, os dois campos atingem um pico até se tornarem constantes para tempos posteriores. Já o parâmetro de desaceleração e a equação de estado efetiva mostram algo mais interessante no comportamento inicial. Eles apresentam superaceleração, que se reflete no aumento súbito do parâmetro de Hubble, onde tal aspecto é comum desse tipo de modelo. Após o pico visto em  $q$  e  $w_{eff}$ , vemos que os dois parâmetros convergem para o valor  $-1$ , característico de um universo de Sitter, com parâmetro de Hubble constante. Outro ponto interessante é o papel do segundo campo em evitar consequências indesejáveis para o modelo. Para esse tipo de potencial, é comum o parâmetro de Hubble tomar valores negativos, eventualmente alcançando singularidades. A Figura 6.7 mostra, para os mesmos parâmetros e condições iniciais, um cenário onde  $\psi$  nunca é ativado, e embora  $w_{eff}$  seja  $-1$  por um tempo, eventualmente,  $\tilde{H}$  tende para valores negativos, e pouco depois de  $\tau = 7$ , uma singularidade é alcançada numericamente.

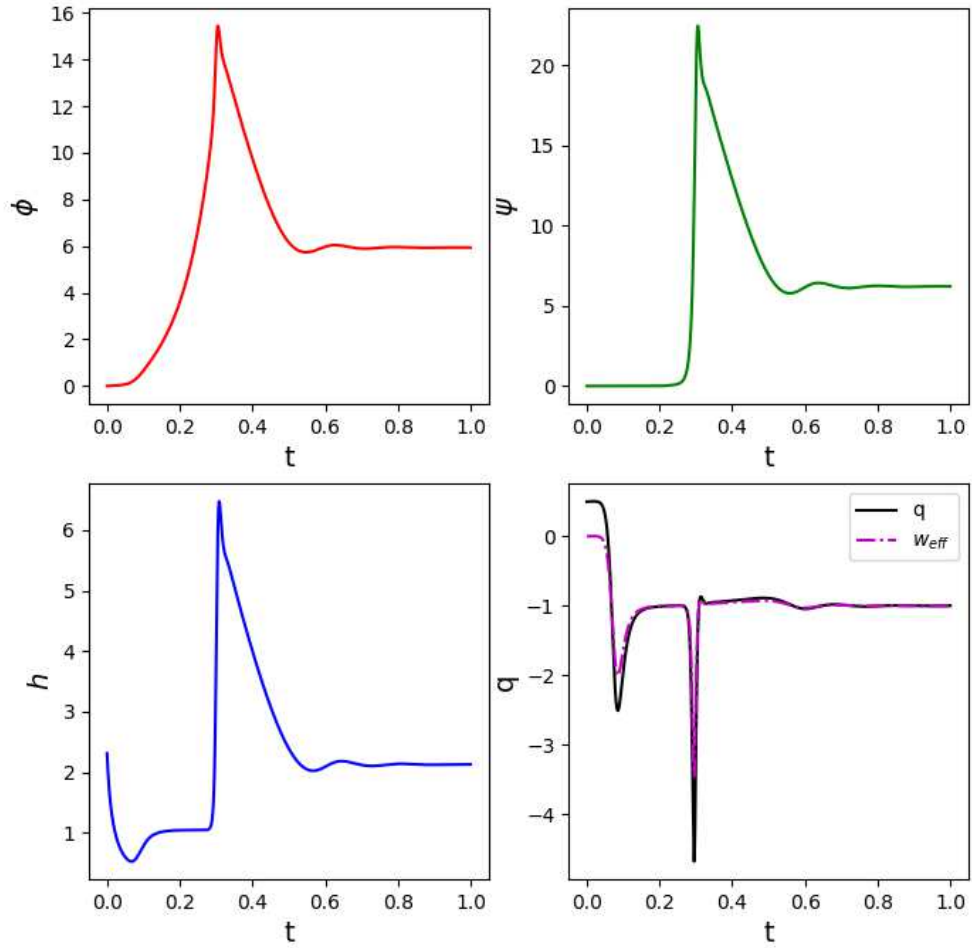


Figura 6.6: Os campos  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\psi}$  o parâmetro de Hubble  $\tilde{H}$  e os parâmetros  $w_{eff}$ ,  $q$ . O tempo está normalizado, com  $\tau = 17$ .



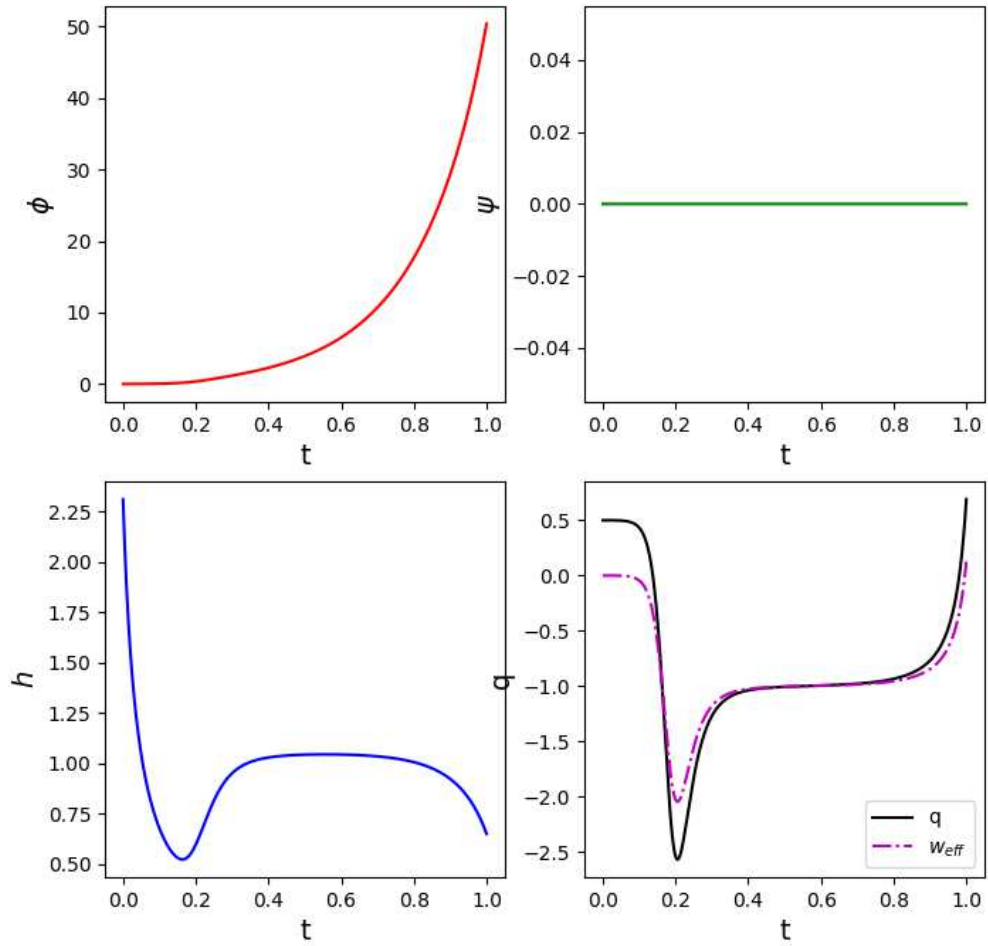


Figura 6.7: Os campos  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\psi} = 0$  o parâmetro de Hubble  $\tilde{H}$  e os parâmetros  $w_{eff}$ ,  $q$ . O tempo normalizado é  $\tau = 7$ .

# Capítulo 7

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, vimos as consequências da introdução de um campo escalar em modelos cosmológicos, cuja presença é controlada pelo mecanismo do *symmetron*, um mecanismo de blindagem que tenta justificar a não detecção desse campo em experimentos locais, assim como seu comportamento quando expresso por uma teoria de gravitação modificada. Focamos na possibilidade de tais mudanças serem responsáveis pela presente aceleração cósmica, e, embora haja a possibilidade de realizar essa aceleração através do mecanismo, o modelo é muito limitado por parâmetros que podem impossibilitar o fenômeno. Dessa forma, há a necessidade de considerar diferentes potenciais que possuam as mesmas características, onde a presença de termos extras podem fazer por exemplo, potenciais mudarem a sua forma e possibilitar o mecanismo dentro dos limites experimentais.

Vimos que o termo  $\frac{1}{2}\xi\phi^2$  acoplado a geometria possibilita um modelo viável para a aceleração cósmica, mas quando aplicado ao modelo do *symmetron*, ainda é severamente limitado por dados experimentais de medições feitas no sistema solar; além disso, a ausência de soluções reais do campo escalar no mínimo do potencial e do parâmetro de Hubble mostra a inexistência de soluções de Sitter, importantes para comportamentos em tempos futuros, a menos que uma constante seja adicionada ao potencial. No entanto, a introdução de um novo campo possibilita a criação de soluções tipo de Sitter, ainda que ao mesmo tempo, aumente o número de parâmetros do modelo, assim como apresente um estado inicial de super-aceleração.

Para trabalhos futuros, seria interessante estabelecer limites para os parâmetros onde o regime de super-aceleração não exista, assim como investigar o comportamento de



um modelo do tipo com os dois campos acoplados a geometria, refazendo e ampliando a análise feita no Capítulo 6. Outras formas para a função  $U(\phi)$ , podem ser consideradas, mantendo a invariância para  $\phi \rightarrow -\phi$ .

Uma outra opção é considerar um outro potencial que tenha as mesmas características do que foi usado no trabalho; que mantenha os campos em repouso em  $\phi = \psi = 0$  e apresente quebra de simetria de acordo com a densidade. Tal potencial também pode ser aplicado ao modelo de um campo.

# Apêndice A

## Propriedades do Tensor de Riemann

A derivada covariante de um vetor não comuta, pois se fizermos

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ &= (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma})V^\sigma - 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \nabla_\lambda V^\rho \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

vemos que uma nova quantidade surge, o tensor de Riemann. O último termo de A.1 é o *tensor de torção*, que é considerado zero no trabalho. Dessa forma, vemos que o tensor de Riemann pode ser representado como

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (\text{A.2})$$

É importante listar as propriedades de simetria deste tensor. Para isso o contraímos com  $g_{\rho\lambda}$ , onde temos

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda_{\sigma\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

e podemos verificar que

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \quad (\text{A.4})$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\nu\mu}, \quad (\text{A.5})$$

e

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (\text{A.6})$$

# Apêndice B

## O Princípio Variacional para a Relatividade Geral

É possível obter a Eq. (2.8) através do princípio variacional, onde aplicamos o princípio da ação mínima, que para uma quantidade  $S$  calculada entre um estado inicial e final, ela deve ser um mínimo, ou  $\delta S = 0$ . Para um conjunto de campos  $\Phi^i$  [24], escrevemos a ação como

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi^i, \nabla_\mu \Phi^i) d^n x, \quad (\text{B.1})$$

para  $n$  dimensões, onde trocamos a derivada parcial pela covariante, definida na subseção anterior. Como também vimos a importância do tensor métrico e como ele define a geometria do espaço, a densidade de lagrangeana normalmente é escrita como um produto definido por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}}, \quad (\text{B.2})$$

onde  $\sqrt{-g}$  contém  $g = \det(g_{\mu\nu})$  e  $\hat{\mathcal{L}}$  é um escalar. Agora nos resta saber qual escalar devemos usar para que possamos obter a equação de Einstein após a variação da ação. David Hilbert mostrou que a forma mais simples pode ser  $\hat{\mathcal{L}} = R$ , o escalar de Ricci, assim a ação se torna

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} R d^4 x, \quad (\text{B.3})$$

que é chamada de *ação de Einstein-Hilbert*. Devemos variar esta ação em termos da métrica  $g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \int \delta\sqrt{-g} R d^4x = \int d^4x \delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta\sqrt{-g} \\ &= (\delta S)_1 + (\delta S)_2 + (\delta S)_3.\end{aligned}\tag{B.4}$$

A variação de  $(\delta S)_1$  resulta em

$$(\delta S)_1 = \int \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g^{\mu\nu} (\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}) - g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu})] = \int \sqrt{-g} \nabla_\sigma V^\sigma.\tag{B.5}$$

Usando o teorema de Stokes, dado por

$$\int_\Sigma \nabla_\mu V^\mu \sqrt{|g|} d^m x = \int_{\partial\Sigma} n_\mu V^\mu \sqrt{|\gamma|} d^{m-1} x,\tag{B.6}$$

podemos dizer que no contorno, a variação é zero. Assim o termo do lado esquerdo coincide com a Eq. (B.5), sendo a integral da derivada covariante de um vetor, e escrevemos

$$(\delta S)_1 = 0.\tag{B.7}$$

Para  $(\delta S)_3$ , podemos mostrar que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},\tag{B.8}$$

e podemos deixar  $(\delta S)_2$  em sua forma original, obtendo assim

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \int d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{B.9}$$

Aplicando o princípio da ação mínima, temos a equação de Einstein no vácuo, onde sem a presença de matéria

$$G_{\mu\nu} = 0.\tag{B.10}$$

No entanto, queremos que o princípio variacional nos dê a equação completa, (2.47). Para isso, definimos uma nova ação correspondente ao conteúdo de matéria e energia,  $S_M$ , de onde podemos escrever a ação total como

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M,\tag{B.11}$$

onde introduzimos o fator  $\frac{1}{16\pi G}$  em razão do elemento  $\kappa$ . Usando o resultado de (B.9) na variação de S, temos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} G_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (\text{B.12})$$

Pela forma da equação, definimos o tensor energia-momento como

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (\text{B.13})$$

assim temos exatamente a Eq. (2.8)

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.14})$$

# Apêndice C

## Variação da Ação com Acoplamento Não-Mínimo

Para realizar a variação da ação 4.1, é conveniente dividir a expressão como

$$S = S_a + S_b, \quad (\text{C.1})$$

onde

$$S_a = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (\text{C.2})$$

e

$$S_b = \int d^4x \sqrt{-g} U(\phi) R, \quad (\text{C.3})$$

Se variarmos C.3 em relação a métrica  $g^{\mu\nu}$  aplicando o princípio de Hamilton, teremos

$$\delta S_b = \int d^4x [U(\phi) R \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} U(\phi) \delta R] = 0, \quad (\text{C.4})$$

onde a variação do escalar de Ricci é

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square(\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu}), \quad (\text{C.5})$$

e usando a Eq. (C.8) junto da definição do tensor de Einstein, teremos

$$\delta S_b = \int d^4x \sqrt{-g} [U(\phi) G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square(\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g^{\mu\nu})] = 0. \quad (\text{C.6})$$

Usando integração por partes, chegamos a

$$\delta S_b = \int d^4x \sqrt{-g} [U(\phi) G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square(U(\phi)) - \nabla_\mu \nabla_\nu U(\phi) \delta g^{\mu\nu}]. \quad (\text{C.7})$$

Percebemos que C.2 é a mesma ação da quintessência, com tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\phi\partial_{\beta}\phi + V(\phi) \right], \quad (\text{C.8})$$

de modo que a equação de Einstein se torna

$$U(\phi)G_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}U(\phi) + g_{\mu\nu}\square U(\phi) + \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\phi\partial_{\beta}\phi + V(\phi) \right] = 0. \quad (\text{C.9})$$

Já a equação de Klein-Gordon vem da variação em relação ao campo, de onde podemos calcular diretamente pela equação de Euler-Lagrange para campos escalares

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} = 0, \quad (\text{C.10})$$

onde se  $\mathcal{L}$  é o integrando de  $S$ , teremos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -V_{,\phi}(\phi) + U_{,\phi}(\phi)R, \quad (\text{C.11})$$

e

$$\partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} = -\square\phi, \quad (\text{C.12})$$

resultando em

$$\square\phi = V_{,\phi}(\phi) - U_{,\phi}(\phi)R. \quad (\text{C.13})$$

# Apêndice D

## Prova da Simetria Conforme

Considerando as transformações generalizadas

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2}g^{\mu\nu}, \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2g_{\mu\nu}, \sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^D\sqrt{-g}, \quad (\text{D.1})$$

o tensor e escalar de Ricci se tornam

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + [(D-2)\partial_\mu\partial_\nu - g_{\mu\nu}\square] \ln \Omega + (D-2)[(\partial_\mu \ln \Omega)(\partial_\nu \ln \Omega) \\ - g_{\mu\nu}g^{\rho\lambda}(\partial_\rho \ln \Omega)(\partial_\lambda \ln \Omega)], \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} [R - 2(D-1)\square \ln \Omega - (D-2)(D-1)g^{\rho\lambda}(\partial_\rho \ln \Omega)(\partial_\lambda \ln \Omega)]. \quad (\text{D.3})$$

Substituindo as transformações na ação

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [-g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2V(\phi) - \xi R \phi^2], \quad (\text{D.4})$$

teremos

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} \int d^Dx \sqrt{-\tilde{g}} \Omega^{-D} [-\tilde{g}^{\mu\nu} \Omega^2 \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \xi \Omega^2 \tilde{R} \phi^2 - 2V(\phi) - \\ (D-1)\xi \Omega^2 \phi^2 \Omega^2 [2(D-1)\tilde{g}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \ln \Omega + (D-2)(D-1)\tilde{g}^{\rho\lambda}(\partial_\alpha \ln \Omega)(\partial_\beta \ln \Omega)]]. \end{aligned}$$

A ação é conformalmente invariante se após as transformações (D.1), (D.5) tem a mesma forma que (C.4). Se também transformamos o campo escalar como

$$\tilde{\phi} = \Omega^{\frac{2-D}{2}} \phi, \quad (\text{D.5})$$

e expressando a derivada de  $\tilde{\phi}$  na ação (D.5), teremos

$$\begin{aligned} S = \int d^Dx \sqrt{-\tilde{g}} [-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{\phi} - \frac{1}{2}\xi \tilde{R} \tilde{\phi}^2 - \Omega^{-D}V(\phi) \\ - \left(\frac{D-2}{4} - (D-1)\xi\right) \tilde{\phi}^2 \left(\square \ln \Omega + \frac{1}{2}(D-2)\tilde{g}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \ln \Omega)(\partial_\beta \ln \Omega)\right)]. \end{aligned}$$



Em quatro dimensões  $D = 4$ , teremos

$$S = \int d^D x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \xi \tilde{R} \tilde{\phi}^2 - \Omega^{-4} V(\tilde{\phi}) \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{2} - 3\xi \right) \tilde{\phi}^2 \left( \tilde{\square} \ln \Omega + \frac{1}{2} (D-2) \tilde{g}^{\alpha\beta} (\partial_\rho \ln \Omega) (\partial_\lambda \ln \Omega) \right) \right].$$

Vemos que para a ação (C.8) ter a mesma forma da ação (C.4), as condições

$$\frac{1}{2} - 3\xi = 0, \tag{D.6}$$

$$V(\tilde{\phi}) = 0, \tag{D.7}$$

tem que ser obedecidas. (C.9) nos dá o valor específico do acoplamento conforme,  $\xi = 1/6$ .

Se o potencial for diferente de zero, vemos da relação (C.7) que  $\tilde{\phi} = \Omega\phi$  para  $D = 4$  e apenas um termo quártico simplifica  $\Omega$  de modo que  $V(\tilde{\phi}) = V(\phi)$ . Assim, o termo potencial que obedece à simetria conforme em quatro dimensões é

$$V(\phi) = \lambda\phi^4. \tag{D.8}$$

# Apêndice E

## Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

O critério de Routh-Hurwitz permite, a partir da equação característica de uma matriz, determinar a estabilidade do sistema, sem a necessidade de resolver diretamente os autovalores, que em certos casos, pode ser complicado. Considerando um polinômio do tipo

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n, \quad (\text{E.1})$$

disponemos os coeficientes na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ s^{n-4} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & g_0 & & & & \end{bmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

onde

$$b_i = \frac{a_1a_{2i} - a_0a_{2i+1}}{a_1}, \quad (\text{E.3})$$

$$c_i = \frac{b_1a_{2i+1} - a_1a_{i+1}}{b_1}, \quad (\text{E.4})$$

e assim por diante, multiplicando os coeficientes de forma cruzada até chegar em  $g_0$ . Os coeficientes que faltarem nesse cálculo são substituídos por zeros. Ao final, a condição

suficiente para estabilidade é que os elementos da segunda coluna sejam maiores que zero, ou seja

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad \dots \quad g_0 > 0. \quad (\text{E.5})$$

Em [73], a condição de estabilidade do ponto de Sitter é calculada por esse método, onde a matriz jacobiana tem a forma

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 & J_{14} & 0 \\ \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & J_{52} & 0 & J_{54} & -3 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.6})$$

sendo os elementos  $J_{ij}$  dependentes dos parâmetros do modelo. Obtemos então a seguinte equação característica

$$\mathcal{P} = z^5 + \mathcal{P}_4 z^4 + \mathcal{P}_3 z^3 + \mathcal{P}_2 z^2 + \mathcal{P}_1 z + \mathcal{P}_0. \quad (\text{E.7})$$

A aplicação do critério mostra que para o ponto de Sitter ser estável, as condições abaixo têm que ser satisfeitas

$$\mathcal{P}_3 \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_2 > 0,$$

$$\mathcal{P}_3 \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_4^2 + \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_2^2 > 0,$$

$$\mathcal{P}_3 \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3^2 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1^2 \mathcal{P}_4^2 + \mathcal{P}_3 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_2 + 2\mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2^2 - \mathcal{P}_0^2 > 0,$$

$$\mathcal{P}_4 > 0,$$

com

$$\mathcal{P}_0 = 9J_{54}J_{12} - 9J_{52}J_{14},$$

$$\mathcal{P}_1 = -6J_{52}J_{14} + \frac{3\sqrt{6}}{2}J_{54}J_{11} + 6J_{54}J_{12} - \frac{9\sqrt{6}}{2}J_{12},$$

$$\mathcal{P}_2 = -\frac{3\sqrt{6}}{2}J_{54} + \sqrt{6}J_{54}J_{11} - \frac{9}{2}J_{11} - \frac{9\sqrt{6}}{2}J_{12},$$

$$\mathcal{P}_3 = -\sqrt{6}J_{12} - \frac{9}{2}J_{11} - \sqrt{6}J_{54} + \frac{9}{2},$$

$$\mathcal{P}_4 = -J_{11} + \frac{9}{2}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] BRANS, C., DICKE, R. H., **Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation**. Phys. Rev. 124, 925 (1961).
- [2] OVERDUIN, J. M., WESSON, P. S., **Kaluza-Klein Gravity**. Phys.Rept. 283 303-380 (1997).
- [3] GUTH, A. H., **Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems**. Phys.Rev. D23, 347 (1981).
- [4] RIESS, A. G., et al., **Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant**. Astron.J. 116 1009-1038 (1998).
- [5] PERLMUTTER, S., et al., **Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae**. Astrophys.J. 517 565-586 (1999).
- [6] TSUJIKAWA S., **Quintessence: A Review**. Class.Quant.Grav. 30 214003 (2013).
- [7] KHOURY, J., **Theories of Dark Energy with Screening Mechanisms**. [arXiv:1011.5909].
- [8] SAMI, M., MYRZAKULOV, R.,**Late time cosmic acceleration: ABCD of dark energy and modified theories of gravity**. Int.J.Mod.Phys. D25 no.12, 1630031 (2016).
- [9] KHOURY, J.,WELTMAN, A., **Chameleon Cosmology**. Phys.Rev. D69 044026 (2004).
- [10] WATERHOUSE, T.P., **An Introduction to Chameleon Gravity**. [arXiv:astro-ph/0611816] (2004).

- [11] BRAX P., VAN DE BRUCK C., DAVIS A.C., LI B., SCHMAUCH B., SHAW D.J., **Linear Growth of Structure in the Symmetron Model.** Phys.Rev.D84:123524 (2011).
- [12] IP, H. Y. S., SCHIMIDT, F., **Tsunamis and Ripples: Effects of Scalar Waves on Screening in the Milky Way.** JCAP 1806 no.06, 035 (2018).
- [13] HINTERBICHLER K., KHOURY J., **Symmetron Fields: Screening Long-Range Forces Through Local Symmetry Restoration.** Phys.Rev.Lett.104:231301 (2010).
- [14] HINTERBICHLER K., KHOURY J., **Symmetron Cosmology.** Phys.Rev. D84 103521 (2011).
- [15] DONG, R., KINNEY, W. H., STOJKOVIC, D., **Symmetron Inflation.** JCAP 1401 021 (2014).
- [16] CRONENBERG, G., et al. **Acoustic Rabi oscillations between gravitational quantum states and impact on symmetron dark energy.** Nature Physics 14, 1022-1026 (2018).
- [17] SADJADI, H. M., **Cosmic acceleration in screening hybrid quintessence model.** Phys.Dark Univ. 22 101-107 (2018).
- [18] BAMBA, K., GANNOUJI, R., KAMIJO M., NOJIRI S., SAMI M., **Spontaneous symmetry breaking in cosmos: The hybrid symmetron as a dark energy switching device.** JCAP 1307 017 (2013).
- [19] SADJADI, H. M., **Symmetron and de Sitter attractor in a teleparallel model of cosmology.** JCAP 1701 no.01, 031 (2017).
- [20] HONARDOOST, M., MOTA, D. F., SEPANGI, H. R., **Symmetron with a non-minimal kinetic term.** JCAP 1711 no.11, 018 (2017).
- [21] SADJADI, H. M., HONARDOOST, M., SEPANGI, H. R., **Symmetry breaking and onset of cosmic acceleration in scalar field models.** Phys.Dark Univ. 14 (2016) 40-47.

- [22] DAS, A., **Lectures on Quantum Field Theory**. World Scientific Pub Co Inc (2008).
- [23] NETO, J. B., **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. Editora Livraria da Física (2004).
- [24] CARROLL, S., **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. Addison-Wesley Professional (2003).
- [25] D'INVERNO, R., **Introducing Einstein's Relativity**. Clarendon Press (1992).
- [26] WEINBERG, S., **Cosmology**. Oxford University Press (2008).
- [27] AGHANIM N., et al. **Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters**. [arXiv:1807.06209] (2018).
- [28] SAZHIN, M. V., SAZHINA, O. S., CHADAYAMMURI, U., **The Scale Factor in the Universe with Dark Energy**. arXiv:1109.2258 [astro-ph.CO].
- [29] CARRETA, E., GRATTON, R. G., CLEMENTINI, G., FUSI PECCI F., **Distances, ages and epoch of formation of globular clusters**, *Astrophys. J.* 533, 215 (2000).
- [30] JIMENEZ, R., THEJLL, P., JORGENSEN, U., MACDONALD, J., PAGEL, B., **Ages of globular clusters: a new approach**, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 282, 926 (1996).
- [31] WEINBERG, S., **The cosmological constant problem**. *Rev. Mod. Phys.* 61 1 (1989).
- [32] PLATSCHER, M. et al, **Long Range Effects in Gravity Theories with Vainshtein Screening**. *JCAP* 1812 no.12, 009 (2018); [arXiv:1809.05318 [astro-ph.CO]].
- [33] BERTOTTI, B., IESS, L., TORTORA, P., **A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft**. *Nature* 425 374-376 (2003).
- [34] WILL, C. M., **The Confrontation between general relativity and experiment**. *Living Rev.Rel.* 9 3 (2006).
- [35] FUTAMASE, T., MAEDA, K. **Chaotic inflationary scenario of the Universe with a nonminimally coupled "inflaton" field**. *Phys. Rev. D* 39, 399 (1989).

- [36] FARAONI, V., **Cosmology in scalar tensor gravity**. Fundam.Theor.Phys. 139 (2004).
- [37] FARAONI, V., **Conformally coupled inflation**. [arXiv:1309.4900] (2000).
- [38] POSTMA, M., VOLPONI, M., **Equivalence of the Einstein and Jordan frames**. Phys.Rev. D90 no.10, 103516 (2014).
- [39] AZRI, H., **Are there really conformal frames? Uniqueness of affine inflation**. Int. J. Mod. Phys. D27 No.5, 1830006 (2018).
- [40] NOJIRI, S., ODINTSOV, S.D., **Cosmological Bound from the Neutron Star Merger GW170817 in scalar-tensor and F(R) gravity theories**. Phys.Lett. B779 425-429 (2018).
- [41] EZEQUIAGA, J. M., ZUMALACÁRREGUI, M., **Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead**. Phys.Rev.Lett. 119 no.25, 251304 (2017).
- [42] SAKSTEIN, J., JAIN, B., **Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories**, Phys.Rev.Lett. 119 no.25, 251303 (2017).
- [43] HRYCZYNA, O., **What  $\xi$ ? Cosmological constraints on the non-minimal coupling constant**. Physics Letters B 768 218-227 (2017).
- [44] FARAONI, V., CAPOZZIELO, S., **Beyond Einstein Gravity - A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics**. Fundam.Theor.Phys. 170 (2010).
- [45] FARAONI, V., GUNZIG, E., **Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology**. Fund.Cosmic Phys. 20 121 (1999).
- [46] WALD, R. M., **General Relativity**. University of Chicago Press (1984).
- [47] BEKENSTEIN, J. D., **Exact solutions of Einstein conformal scalar equations**. Annals Phys. 82 535-547 (1974).

- [48] ABREU, J.P., CRAWFORD, P., MIMOSO, J.P., **Exact conformal scalar field cosmologies**. *Class.Quant.Grav.* 11 1919-1940 (1994).
- [49] ELLIS, G. F. R., MADSEN, M. S., **Exact scalar field cosmologies**. *Class. Quantum Grav.* 8 667 (1991).
- [50] DESER, S., **Scale invariance and gravitational coupling**. *Annals Phys.* 59 248-253 (1970).
- [51] DARABI, F., **Dark energy from conformal symmetry breaking**. *Eur.Phys.J.* C73 no.4, 2389 (2013).
- [52] DARABI, F., **Acceleration of the universe in matter dominant era by conformal symmetry breaking**. *Int. J. Theor. Phys.* 53, 881, (2014).
- [53] PERKO L., **Differential Equations and Dynamical Systems** . Springer (2006).
- [54] WIGGINS S., **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos** . Springer (2003).
- [55] STROGATZ S. H., **Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering** . CRC Press (2000).
- [56] SPROTT, J. C., **Chaos and Time-Series Analysis**. Oxford University Press, Inc. New York (2003).
- [57] BAHAMONDE, S., BÖHMER C.G., **Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity**. *Phys.Rept.* 775-777 1-122 (2018).
- [58] THOMPSON, J. M. T., STEWART, H. B., **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Wiley (2002).
- [59] SHILNIKOV, LP, SHILNIKOV, A., TURAEV, D., CHUA, L., **Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I** (1998).
- [60] HRYCYNA, O., **Scalar Field Cosmology - Improving the Cosmological Evolutional Scenario**. [arXiv:1212.4657] (2012).



- [61] KOMATSU, E., FUTAMASE, T., **Complete constraints on a nonminimally coupled chaotic inflationary scenario from the cosmic microwave background.** Phys.Rev. D59 064029 (1999).
- [62] SADJADI, H. M., ANARI, V., **Cosmic acceleration and de Sitter expansion in hybrid mass varying neutrino model.** JCAP 1810 no.10, 036 (2018).
- [63] HRYCYNA, O., **Cosmological dynamics with non-minimally coupled scalar field and a constant potential function.** JCAP 1511 no.11, 013 (2015).
- [64] ARAPOĞLU, A.S., YÜKSELÇI, A.E., **Dynamical System Analysis of Quintessence Models with Exponential Potential - Revisited.** [arXiv:1711.03824].
- [65] FARAONI, V., **Inflation and quintessence with nonminimal coupling.** Phys.Rev. D62 023504 (2000).
- [66] HRYCYNA, O., **Non-minimally coupled scalar field cosmology on the phase plane.** JCAP 0904 026 (2009).
- [67] ABRAMO, L.R., BRENIG, L., GUNZIG, E., **On the stability of gravity in the presence of an NMC scalar field.** Phys.Lett. B549 13-19 (2002).
- [68] BAKER, T. et al. **Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A.** Phys.Rev.Lett. 119 no.25, 251301 (2017).
- [69] UPADHYE A., **Symmetron dark energy in laboratory experiments.** Phys.Rev.Lett. 110 no.3, 031301 (2013).
- [70] GUNZIG, E., et al. **The Dynamical System Approach to Scalar Field Cosmology.**Class. Quantum Grav. 17 1783-1814 (2000).
- [71] YOO, J., WATANABE Y., **Theoretical Models of Dark Energy.** Int. J. Mod. Phys. D 21, 1230002 (2012) .
- [72] TADDEI L., CATENA, R., PIETRONI, M., **Spherical collapse and halo mass function in the symmetron model.** Phys. Rev. D 89, 023523 (2014).
- [73] SADJADI, H. M., **Cosmic acceleration in screening hybrid quintessence model.** Phys.Dark Univ. 22 101-107 (2018).