



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Soluções não-BPS nos limites de interação forte,
fraca ou finita**

Maria Danieli Clementino Araujo

CAMPINA GRANDE

- Maio de 2019 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Soluções não-BPS nos limites de interação forte,
fraca ou finita**

Maria Danieli Clementino Araujo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Teoria de Campos.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

CAMPINA GRANDE

- Maio de 2019 -

A663s Araujo, Maria Danieli Clementino.
Soluções não BPS nos limites de interação forte, fraca ou infinita / Maria Danieli Clementino Araujo. – Campina Grande, 2019.
35 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".
Referências.

1. Teoria de Campos. 2. Solução BPS. 3. Modelo BNRT. 4. Método da Órbita Tentativa. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.

CDU 53(043)

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é
senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria
menor se lhe faltasse uma gota.

Madre Teresa de Calcutá.

Agradecimentos

A Deus, por ser Autor da minha fé.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, por ter aceitado me orientar em tão pouco tempo, pelo seus ensinamentos acadêmicos e de vida.

Aos professores do PPG-Física UFCG, em especial, João Santos, Bertulio Lima, e Francisco Brito pelas ótimas aulas ministradas.

À UFCG pela estrutura e todos os profissionais que a constitui, em especial Dona Helena, Dona Dalva, Seu Hélio e Maria!

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A Hebertt Leandro, por acreditar em mim, quando eu mesma não conseguia. Seu amor me fez ver beleza na vida mesmo quando estava escuro.

Aos meus irmãos, Daiane, Karina e Natan. Meu pai Nilson e minha madrastra Socorro. Vocês são essenciais na minha vida

Às pessoas especiais que tive o prazer de conhecer durante esses dois anos, Aline, Kleiton, Elizangela, Valeria, Maurício, seu Beto, Marina. E todos aqueles, que em algum momento me transmitiram palavras boas e de motivação.

Lista de Figuras

2.1	Representação Potencial $V(\phi)$ do modelo ϕ^4	6
2.2	Representação das soluções para o caso estático da equação de movimento $\phi(x)$	7
2.3	Representação do Potencial do modelo ϕ^4 invertido	8
2.4	Solução tipo lump em laranja	9
4.1	Representação dos setores topológicos do modelo BNRT.	22
4.2	Órbitas hiperbólicas para o caso $r=-1$ não setor BPS	29
4.3	Soluções para $r=0.40$ (linhas finas) e $r=0.01$ (linhas grossas).	30
4.4	Órbitas elípticas para $r=0,02$ (linha vermelha) e $r=0,01$ (linha azul). Quando a espessura da parede de domínios e o tamanho dos domínios são da mesma ordem	31

Resumo

Neste trabalho analisamos o modelo BNRT composto de dois campos escalares, para os setores BPS e não-BPS. Usamos o método da órbita tentativa para calcular as soluções de ambos os setores do modelo e investigamos órbitas fechadas para o setor não-BPS. Fizemos duas tentativas que não resultaram em órbitas fechadas no geral. Entretanto, para um regime específico, conseguimos uma órbita fechada para uma aproximação de interação fraca entre os campos, e analisamos a estabilidade desta solução a qual se mostrou linearmente estável.

Palavras-chave: Teoria de Campos, Solução BPS, Modelo BNRT, Método da Órbita Tentativa.

Abstract

In this work we analysed the BNRT model of two scalar fields for its BPS, and for its non-BPS sectors. We used the trial orbit method to calculate the solutions for both sectors and we investigated closed orbit for non-BPS sector. We have made two attempts of orbits in which did not result in closed orbits in general. However, for a specific regime, we got a closed orbit using an approximation of weak interaction between the fields, and we analysed the stability of such a solution. The previous study unveils that the solution is linearly stable.

Keywords: Field Theory, BPS Solution, BNRT Model, Trial Orbit Method.

Sumário

1	Introdução	1
2	Fundamentação teórica	3
2.1	Modelo de um campo	3
2.1.1	Carga Topológica	5
2.1.2	Kinks e Lumps	6
2.2	Soluções BPS	8
2.2.1	Setor Topológico	10
2.2.2	Estabilidade linear	10
3	Modelo com dois campos escalares.	13
3.1	Método da Órbita Tentativa	14
3.2	Soluções BPS para dois campos	16
3.3	Estabilidade para modelo de dois campos	18
4	Modelo BNRT	21
4.1	Soluções dos setores BPS	23
4.2	Solução para o setor não-BPS	26
5	Considerações Finais	34
	Referências Bibliográficas	35

Capítulo 1

Introdução

Um campo escalar é uma função, que em física pode ser interpretada como a informação sob alguma distribuição do espaço [1]. Através de campos escalares podemos modelar diversos fenômenos na natureza [2]. Quando se procura descrever um fenômeno ou formular leis na física, geralmente lida-se com equações de movimento, equações diferenciais não lineares que descrevem um sistema dinâmico de interesse. Em teoria de campos, investiga-se as soluções dessas equações de movimento em particular para modelos com campos escalares reais, que mesmo sendo um dos campos mais simples tem sua importância pela aplicabilidade em diversas áreas da física, como por exemplos, em cosmologia [3, 4] na qual o campo escalar descreve o denominado campo de ínflaton, o qual é considerado responsável pela aceleração cósmica do universo na sua fase inicial, matéria condensada na descrição de defeitos topológicos em meios elásticos contínuos [5, 6] associados as irregularidades nos campos que descrevem a ordenação da estrutura dos materiais. Outro exemplo são as partículas de spin zero na teoria quântica de campos que são também representadas por um campo escalar [7].

Normalmente, quando se trabalha com modelos de campos escalares reais, os potenciais que caracterizam um sistema físico, são não-lineares e as soluções quando estáticas são denominadas defeitos. Esses podem ser defeitos topológicos ou defeitos não-topológicos. Esses defeitos conhecidos na literatura como kinks e lumps, respectivamente. A caracterização de defeitos topológicos e não topológicos se deve a existência ou não do que chamaremos de carga topológica.

Sendo assim, neste trabalho objetiva-se analisar o modelo BNRT (Bazeia-Nascimento-Ribeiro-Toledo) para os setores BPS (Bazeia-Nascimento-Ribeiro-Toledo) e não-BPS atra-

vés do método da órbita tentativa para determinação de solução dos setores.

Nesta dissertação, apresentou-se conceitos fundamentais de teoria de campos escalares reais, soluções BPS, que são soluções de equações diferenciais de primeira ordem (equações BPS, que resolvem as equações de Euler-Lagrange. Isto foi abordado nos Capítulos 2 e 3, nos quais estudamos modelos de um e dois campos, respectivamente. Ainda no Capítulo 3, se discorre sobre o método da órbita tentativa de Rajaraman que serve para desacoplar equações diferenciais de segunda ordem não lineares e acopladas e sobre o uso deste método para desacoplar as equações BPS. No Capítulo 4, investiga-se soluções para os setores do modelo BNRT. Nos setores BPS usa-se o método da órbita tentativa nas equações de primeira ordem para achar soluções que conectem esses setores. Já no setor não-BPS, usaremos o método de Rajaraman para tentar encontrar uma órbita fechada, e em seguida, utiliza-se de uma método alternativo para calcular as soluções e órbitas que descrevem este setor. E, no Capítulo 5 apresenta-se as considerações finais.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

2.1 Modelo de um campo

Na mecânica clássica a lagrangiana de um sistema de N graus de liberdade é caracterizada por N coordenadas generalizadas q_i e suas derivadas no tempo $\frac{dq}{dt} = \dot{q}_i$, tal lagrangiana é descrita algebricamente pela diferença entre a energia cinética T e a energia potencial generalizada U do sistema, ou seja, $L = T - U$. A evolução temporal do sistema é governada pelas equações de movimento (equações de Euler-Lagrange). Pode-se utilizar o arcabouço teórico de mecânica clássica para teoria de campos, tratando os sistemas com um número infinito de graus de liberdade descrito por uma coordenada denominada campo ϕ , definido em todo espaço-tempo, e por derivadas deste campo [1]. A dinâmica do sistema é regida por uma função \mathcal{L} , denominada densidade lagrangiana. Logo tendo a seguinte dependência funcional

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\phi; \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi, x, t \right), \quad (2.1)$$

e a integral de \mathcal{L} sobre todo o espaço resulta na lagrangiana L dada por:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}. \quad (2.2)$$

A integral de L no tempo é a ação S , ou seja,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (2.3)$$

A equação de Euler-Lagrange decorre do princípio variacional de Hamilton escrita como:

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi; x, t) = 0, \quad (2.4)$$

que conduz a equação de movimento dada por¹.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.5)$$

onde as derivadas são $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

Agora considerando o modelo para um campo escalar ϕ , em 1+1 dimensões do espaço tempo, $\phi(x, t)$, cuja dinâmica é governada pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.6)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial que caracteriza o modelo a ser investigado. Substituindo a Eq. (2.6) na Eq. (2.5) tem-se a equação de movimento dada como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (2.7)$$

Soluções clássicas possuem três tipos de soluções: (1) constantes que independem do tempo e do espaço, (2) estáticas que independem do tempo, mas dependem do espaço e (3) que dependem de ambos [8].

A equação de movimento para soluções estáticas $\phi = \phi(x)$ se torna

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.8)$$

A energia de uma dada configuração de campo é dada pela integral da densidade de energia [9], ou seja,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x, t), \quad (2.9)$$

onde $\rho(x)$ é a componente T^{00} do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, que é obtido através [10] [11].

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.10)$$

Assim, a componente T^{00} é:

$$T^{00} = \rho(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.11)$$

Portanto, a energia em 1+1 dimensões para soluções estáticas é escrita como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.12)$$

¹Consideramos o sistema de unidades naturais para $c = 1$ e $\hbar = 1$ e as seguintes notações: $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z)$ e $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

As soluções $\phi(x)$ de interesse físico são aquelas com energia finita. Por isso, algumas condições surgem para tais soluções sejam determinadas. Fazendo a Eq.(2.12) na qual o primeiro termo representa a energia gradiente que por definição é sempre positiva, e assumindo que $V(\phi)$ também seja, para que a energia seja finita, ou seja não divirja, uma condição de contorno se faz necessária que [12]

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \rightarrow 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \equiv \phi_{\pm} = \pm v. \quad (2.13)$$

A segunda condição da Eq.(2.13) certifica que $\phi(x)$ tenda assintoticamente para um dos zeros do potencial de modo que $V(\pm v) = 0$, onde $\pm v$ são os mínimos do potencial.

2.1.1 Carga Topológica

Para que a energia das soluções estáticas seja finita, o campo deve ir para mínimos do potencial nos extremos. Este comportamento assintótico das soluções nos diz que $\phi(x)$ pode apresentar duas possibilidades de valores nos extremos. A solução pode tender a um mesmo valor quando $x \rightarrow \infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$, ou ter um comportamento distinto, ou seja, $\phi(x \rightarrow \infty) \rightarrow \phi_i$ e $\phi(x \rightarrow -\infty) \rightarrow \phi_j$, com $i \neq j$, no qual $V(\phi_j) = 0$ [12]. Essas possibilidades estão associadas e caracterizadas pela corrente topológica j_T^μ definida por [13, 14];

$$j_T^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.14)$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu}$ é o tensor anti-simétrico de Levi-Civita em 1+1 dimensões. Essa corrente é conservada, ou seja $\partial_\mu j_T^\mu = 0$. A densidade de carga associada a corrente é :

$$\rho_T^0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{01} \partial_1 \phi = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2.15)$$

o que resulta numa carga conservada que para soluções estáticas é dada por

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \frac{1}{2} \phi(x \rightarrow \infty) - \frac{1}{2} \phi(x \rightarrow -\infty). \quad (2.16)$$

A carga permite distinguir exatamente a diferença de comportamento assintótico da solução estática, e por meio dela se pode classificar dois tipos de soluções: (A) **Soluções topológicas** no qual $Q \neq 0$, e assim, conectam mínimos diferentes, que se iniciam em algum valor de campo para $x \rightarrow -\infty$ e suavemente crescem ou decrescem para um outro valor de campo em $x \rightarrow \infty$. E (B) **Soluções não-topológicas** com $Q = 0$, que são soluções que ligam, um mínimo a ele mesmo, isto é, se iniciam em algum valor de

campo em $x \rightarrow -\infty$ e crescem (decrecem) e decrecem (crescem) para o mesmo valor de campo em $x \rightarrow \infty$.

Na literatura soluções topológicas são denominadas de defeitos topológicos, que em 1+1 dimensões são soluções do tipo *kink* e as soluções não topológicas são conhecidas como defeitos não topológicos, que são soluções do tipo *lump* [15, 16].

2.1.2 Kinks e Lumps

Um modelo que apresenta uma solução do tipo *kink*, é dado pelo potencial, conhecido como modelo $\lambda\phi^4$

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda(\phi^2 - 1)^2. \quad (2.17)$$

Os mínimos deste potencial são dados por $\phi = \pm 1$, e seu comportamento é exibido pela Figura (2.1).

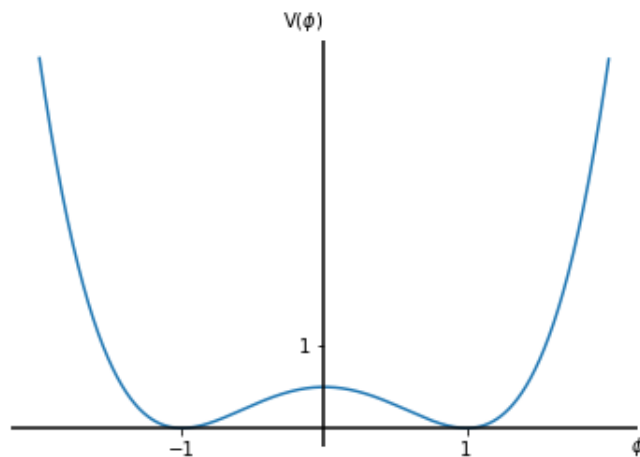


Figura 2.1: Representação Potencial $V(\phi)$ do modelo ϕ^4

Usando a Eq.(2.8) obtêm-se a equação de movimento para o caso estático, dada por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi\lambda(\phi^2 - 1), \quad (2.18)$$

Cuja solução é

$$\phi(x) = \pm \tanh(\sqrt{\lambda}x). \quad (2.19)$$

Observa-se que a variação do campo $\phi(x)$ ocorre apenas em uma faixa do eixo x , esta faixa é denominada região de transição e o *kink* é a transição entre dois mínimos

de energia. Outra observação importante está em torno da espessura do defeito (*kink*), onde o parâmetro está inteiramente associado a questão da largura das soluções. Quanto maior o λ , mais abrupto o *kink* e $\phi(x)$ alcança seus pontos de mínimos (vácuos) mais rapidamente, conseqüentemente menor será a espessura do defeito. A representação da solução do tipo *kink* para alguns valores de λ é dado na Figura 2.3.

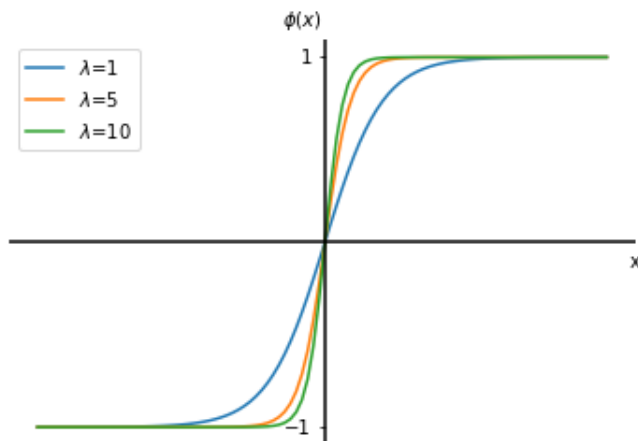


Figura 2.2: Representação das soluções para o caso estático da equação de movimento $\phi(x)$

Essas soluções são topológicas, pois possuem limites assintótico diferentes, e conectam mínimos distintos do potencial.

A energia da solução é calculada pela Eq.(2.12), onde a densidade de energia $\rho(x)$ é dada por $\rho(x) = \text{sech}^4(a\sqrt{\lambda}x)a^2\lambda$. A energia total é ;

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) = \frac{4a^3\sqrt{\lambda}}{3}. \quad (2.20)$$

Este resultado é uma demonstração de que a energia total para o *kink* e o *anti-kink* é mínima, ou seja, verifica-se de fato que a energia é finita.

Portanto, *kinks* são defeitos topológico com muitas propriedades importantes, possuem energia finita, soluções estáveis, e separam duas regiões onde o campo assume diferentes pontos de mínimos. Defeitos do tipo *kink* em (3+1) dimensões são denominados paredes de domínios.

Para soluções do tipo *lump* [17], que são defeitos não-topológicos, tem-se um modelo cujo *lump* como solução é representa pelo seguinte potencial,

$$V(\phi) = \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{2}, \quad (2.21)$$

Este potencial possui apenas um ponto de mínimo, em $\phi = 0$. Representado na figura (2.3)

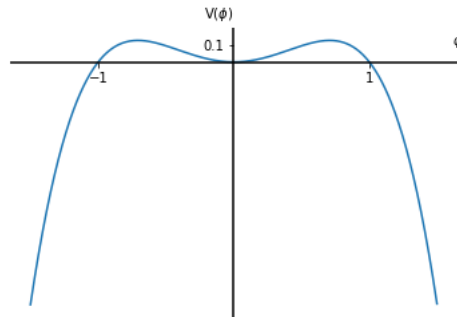


Figura 2.3: Representação do Potencial do modelo ϕ^4 invertido

A equação de movimento para este modelo é dada por:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi - 2\phi^3, \quad (2.22)$$

e a sua solução é dada na forma

$$\phi(x) = \pm \text{sech}(x). \quad (2.23)$$

A solução tipo *lump* tende a um mesmo valor quando tomado os limites assintóticos, como apresentado na figura (2.4), ou seja $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$. Sendo assim, soluções do tipo *lump* tem carga topológica nula e são instáveis do ponto de vista topológico.

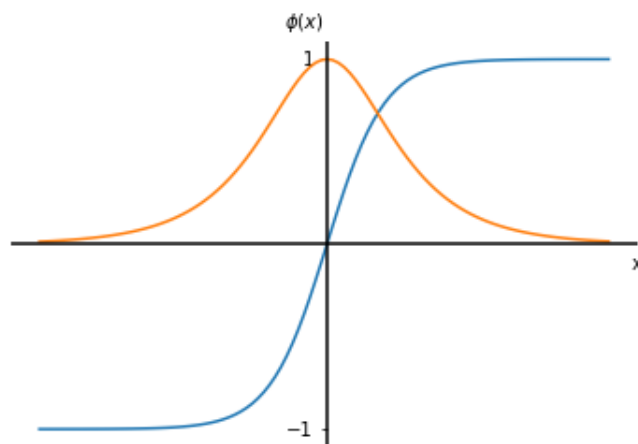


Figura 2.4: Solução tipo lump em laranja

2.2 Soluções BPS

Para resolver as equações de movimento para um dado modelo de campos escalares, tem-se que lidar com equações de segunda ordem não-lineares. Na década de 1970, um método foi desenvolvido com a finalidade de encontrar soluções para as equações de segunda ordem, através de equações de primeira ordem. Este método foi proposto por Bogomol'nyi em 1976 [18], e em 1975 por M.K Prasad e C.M. Sommerfield [19], e ficou conhecido como Método BPS.

Para potenciais não negativos, cujos zeros são mínimos globais, podemos escreve-se o potencial $V(\phi)$ em função de um superpotencial $W = W(\phi)$ [20, 21] como:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (2.24)$$

A equação de movimento para soluções estáticas, dada na Eq.(2.8) pode ser escrita em termos de W_ϕ , ou seja,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{W_\phi^2}{2} \right) \rightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (2.25)$$

A densidade de energia é dada por:

$$\rho(x) = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) = \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.26)$$

e a energia do sistema é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}W_\phi^2 \right). \quad (2.27)$$

Completando quadrado na equação acima temos:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 \mp \frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi} \right], \quad (2.28)$$

como soluções físicas aceitáveis são de energia finita, tem-se interesse em configuração de energia mínima. Assim, para que isso ocorra na equação (2.28), o termo $\frac{d\phi}{dx}$ é dado por:

$$\frac{d\phi}{dx} = \mp W_\phi. \quad (2.29)$$

Esta equação é uma equação diferencial de primeira ordem chamada equação de Bogomol'nyi. As soluções encontradas por este método são chamadas soluções BPS, e elas resolvem as equações de movimento de segunda ordem.

A energia dada pela Eq.(2.28), se torna

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{dx} dx = |W[\phi(x \rightarrow +\infty)] - W[\phi(x \rightarrow -\infty)]| = \Delta W. \quad (2.30)$$

Essa energia minimizada associada ao campo é denominada energia de Bogomol'nyi. Portanto, o método BPS possibilita que as equações a serem resolvidas sejam de primeira ordem. Além disso, permite calcular a energia mínima usando apenas o super potencial $W(\phi)$, sem que seja necessário o conhecimento de soluções explícitas do modelo.

2.2.1 Setor Topológico

Um setor ij é BPS quando $E_{ij} \neq 0$, ou seja, quando $W_i = W(\phi_i)$ for diferente de $W_j = W(\phi_j)$ e assim $E_{BPS} = |W(\phi_i) - W(\phi_j)| \neq 0$. Para este caso pode se encontrar soluções que conectam os mínimos do tipo soluções BPS. Entretanto, quando $W(\phi_i) = W(\phi_j)$ tem-se que $E_{BPS} = 0$, e o setor é dito não-BPS, e não há soluções BPS para este setor. Contudo, há energia para esse setor, e sua energia Eq.(2.12) pode ser calculada quando as soluções explícitas forem conhecidas.

2.2.2 Estabilidade linear

Nesta subseção, faremos uma breve revisão da estabilidade linear, das soluções das equações de movimento. Com essa concepção, é necessário entender o que ocorre nas proximidades da solução estática. O procedimento consiste da introdução de pequenas perturbações de primeira ordem em torno das soluções. A solução acrescida da perturbação é representada pela expressão a seguir;

$$\phi(x, t) \equiv \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.31)$$

onde $\eta(x, t)$ é uma pequena perturbação ou flutuação e $\phi(x, t)$ satisfaz a equação de movimento, Eq.(2.7), dada por:

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0.$$

Substituindo a equação (2.31) na equação acima, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\phi_s(x) + \eta(x, t))}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\phi_s(x) + \eta(x, t))}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi}|_{\phi=\phi(x,t)} = 0; \\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como η é muito pequeno comparado a ϕ_s , deve expandir V_ϕ em uma série de potência, que resulta em

$$V_\phi \approx V_\phi|_{\phi=\phi_s} + V_{\phi\phi}|_{\phi=\phi_s}\eta + \varphi(n^2) + \dots \approx V_{\phi_s} + V_{\phi_s\phi_s}\eta$$

Daí, a Eq.(2.32) se torna:

$$\ddot{\eta} - \phi_s'' - \eta'' + V_{\phi_s} + V_{\phi_s\phi_s}\eta = 0. \quad (2.33)$$

Para soluções estáticas, temos que $\phi_s'' = V_{\phi_s}$. Implicando em

$$\ddot{\eta} - \eta'' + V_{\phi_s\phi_s}\eta = 0. \quad (2.34)$$

Para resolver esta equação, utilizamos o *Ansatz*;

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t), \quad (2.35)$$

e a equação de movimento é reescrita da seguinte forma:

$$-\eta_n'' + V_{\phi_s\phi_s}\eta_n = \omega_n^2\eta_n, \quad (2.36)$$

que é uma equação do tipo Schrödinger,

$$H\eta_n = \omega_n^2\eta_n, \quad (2.37)$$

onde $H = -\frac{d}{dx^2} + V_{\phi_s\phi_s}$ é o operador Hamiltoniano e ω_n^2 são autovalores e η_n os autovetores. Se $\omega_n^2 < 0$ então ω_n é imaginário pois existe um argumento imaginário no cosseno e portanto, a perturbação deixaria de ser pequena e a solução tem caráter instável. Para $\omega_n^2 > 0$, tem-se que ω_n é real, resultando numa solução estável, e para $\omega_n = 0$, a solução é estável com perturbação constante no tempo [21].

Para o modelo do potencial ϕ^4 , com solução topológica $\phi(x) = \tanh(x)$, o potencial do problema mecânico-quântico (apesar de ser um análogo dos problemas de mecânica quântica, o tratamento aqui envolve apenas casos clássicos) que aparece no estudo da estabilidade linear, tem a forma

$$U(x) = \frac{d^2V}{d\phi^2} = 4 - 6\text{sech}^2(x). \quad (2.38)$$

Que é o potencial Pöschl-Teller modificado, com espectro de energia para os estados ligados dado por $\omega_n^2 = 4n - n^2$. Assim, temos dois estado ligados, com autovalores $w_0^2 = 0$ e $w_1^2 = 3$. O modo zero e o seu estado excitado, são dados respectivamente por

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sech}^2(x). \quad (2.39)$$

e

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}(x) \tanh(x) \quad (2.40)$$

O potencial ϕ^4 apresenta dois estados ligados, um com autovalor zero que identifica o modo zero, e o outro com autovalor maior igual a 3. Pode-se concluir que o modelo ϕ^4 apresenta soluções estáveis, já que sob pequenas perturbações seus autovalor não são negativos $\omega^2 > 0$.

Já o potencial ϕ^4 invertido, apresenta o seguinte potencial ligado:

$$U(x) = 1 - 6 \operatorname{sech}^2(x) \quad (2.41)$$

Seu espectro de estado ligado é dado por $\omega_n^2 = -3 + 4n - 4n^2$. Teremos, dois estado ligados com autovalor $\omega_0^2 = -3$ e $\omega_1^2 = 0$, com respectivos estados ligados,

$$\eta_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2(x) \quad (2.42)$$

e

$$\eta_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}(x) \tanh(x). \quad (2.43)$$

O modelo ϕ^4 invertido, apresenta soluções não estáveis sob pequenas perturbações, pois possui autovalor negativo $\omega_n^2 < 0$

Capítulo 3

Modelo com dois campos escalares.

Os modelos de campos escalares acoplados tem sido de interesse em diversas áreas da física, na literatura há muitos trabalhos que estudam e usam modelos de dois campos [22, 23, 24, 25, 26, 27].

Um problema em modelos de dois campos acoplados é em relação a integrabilidade das equações de movimentos, em virtude da dificuldade de resolver equações diferenciais de segunda ordem não lineares e acopladas. Todavia, há um método que possibilita desacoplar essas equações, denominado método da órbita tentativa [28]. Assim, como para o caso de modelo de um único campo, as equações de movimento também podem ser resolvidas por equações diferenciais de primeira ordem, que neste caso serão acopladas. O método da órbita tentativa pode ser usado de forma muito eficiente para se obter soluções explícitas das equações de primeira ordem e, conseqüentemente, resolver as equações movimento [29].

Analisando modelos compostos por dois campos escalares $\phi = \phi(x, t)$ e $\chi = \chi(x, t)$ representados pela densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{1}{2}\partial_\alpha\chi\partial^\alpha\chi - V, \quad (3.1)$$

onde $V = V(\phi, \chi)$ é o potencial que descreve o modelo. A ação relativa a \mathcal{L} é dada por:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{1}{2}\partial_\alpha\chi\partial^\alpha\chi - V \right], \quad (3.2)$$

Ao minimizar esta ação, obtemos as equações de Euler-Lagrange para o campo ϕ e χ dadas respectivamente por:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \quad (3.3)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \chi)} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq.(3.1) nas equações acima e considerando configurações estáticas $\phi = \phi(x)$ e $\chi = \chi(x)$, obtêm-se as seguintes equações de movimento

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (3.5)$$

e

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \chi}. \quad (3.6)$$

Como o potencial depende de ϕ e χ , as Eq.(3.5) e (3.6) são equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas.

3.1 Método da Órbita Tentativa

Rajaraman desenvolveu um método, denominado método das órbitas tentativas, com o propósito de desacoplar equações de campo escalares acopladas [28].

Considerando as Eq. (3.5) e (3.6) e fazendo uma analogia a um sistema mecânico, em que estas equações são semelhantes a um movimento de uma partícula no plano (ϕ, χ) submetidos a um potencial $V(\phi, \chi)$, a necessidade de que as soluções destas equações tenham energia finita leva às seguintes condições de contorno: $\frac{d\phi}{dx} = 0$, $\frac{d\chi}{dx} = 0$ e $V(\phi, \chi) = 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.

O método das órbitas tentativas consiste em achar uma órbita sujeita as mesmas condições de contorno. Considerando, então, a órbita:

$$g(\phi, \chi) = 0, \quad (3.7)$$

temos que,

$$\frac{\partial g(\phi, \chi)}{\partial x} = 0, \quad (3.8)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0. \quad (3.9)$$

Elevando ao quadrado as Eq. (3.8) e (3.9) obtém-se::

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2, \quad (3.10)$$

e integrando as Eq. (3.5) e (3.6) uma vez e usando a Eq. (3.10), tem-se que para qualquer ponto P na órbita uma equação denominada equação integro-diferencial. Rajaraman propõe uma equação, em que as integrais devem ser realizadas ao longo da órbita, ou seja,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)^2 \int_Q^P \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \phi} d\phi = \left(\frac{\partial g}{\partial \chi}\right)^2 \int_Q^P \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \chi} d\chi. \quad (3.11)$$

Ele definiu que Q é o "ponto de partida" da órbita em $x = -\infty$, onde a energia tem que ser finita. Deste modo, elimina-se a dependência explícita de x na equação que relaciona a órbita $g(\phi, \chi)$ e o potencial $V(\phi, \chi)$.

Para exemplificar o método proposto por Rajaraman, considerando o com o potencial estudado por ele, que é dado por [28]:

$$V(\sigma, \rho) = \frac{1}{4}(\sigma^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}f\rho^2 + \frac{1}{4}\lambda\rho^4 + \frac{1}{2}d\rho^2(\sigma^2 - 1). \quad (3.12)$$

E as equações de movimento são

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = -\sigma + \sigma^3 + d\rho^2\sigma \quad (3.13)$$

e

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = f\rho + \lambda\rho^3 + d\rho(\sigma^2 - 1), \quad (3.14)$$

onde $\sigma(x)$ e $\rho(x)$ são campos escalares reais e f , λ e d são parâmetros. O potencial V tem dois mínimos absolutos ($\sigma = \pm 1, \rho = 0$). Analisando uma órbita que vai de um mínimo a outro, $(-1, 0)$ a $(1, 0)$. A escolha da órbita foi $g(\sigma, \rho) = \rho^n - \alpha(1 - \sigma^2) = 0$. Com α e n livre para serem determinados. Inserindo essa órbita na Eq.(3.11), produz que:

$$(2\alpha\sigma)^2 \int_{-1}^{\sigma} (\sigma^3 - \sigma + d\rho^2\sigma) d\sigma = (n\rho^{n-1}) \int_0^{\rho} [f\rho + \lambda\rho^3 + d\rho(\sigma^2 - 1)] d\rho, \quad (3.15)$$

e escrevendo ρ em termos de σ usando a órbita e substituindo no lado esquerdo da igualdade, e σ em termos de ρ e substituindo no lado direito, realizando a integração em ambos os lados e depois colocando tudo em função de ρ , tem-se o seguinte resultado

$$4\alpha^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{\alpha}\right) \left[\frac{\rho^{2n}}{4\alpha^2} - \frac{nd}{2\alpha(n+2)\rho^{n+2}}\right] = \frac{f}{2}n^2\rho^{2n} + \frac{\lambda}{4}n^2\rho^{2n+2} - \frac{dn^2\rho^{3n}}{\alpha(n+2)}. \quad (3.16)$$

Para uma solução não trivial obtém-se $n+2 = 2n$ ou $n+2 = 3n$. O que resulta em $n=2$ e $n=1$. Substituindo $n=2$ na Eq. (3.16) e comparando os coeficientes correspondentes resultam que os termos de α e λ são, respectivamente, dadas por:

$$\alpha = \frac{1 - 2f}{d}, \quad (3.17)$$

e

$$\lambda = \frac{d(d-2f)}{1-2f}. \quad (3.18)$$

Substituindo na órbita tem-se $\rho^2 = (1 - \frac{2f}{d})(1 - \sigma^2)$ que é uma semi-elipse. Inserindo na Eq. (3.13), obtém-se

$$\sigma'' = \sigma^3 - \sigma + d\rho^2\sigma = 2f(\sigma^3 - \sigma). \quad (3.19)$$

Resolvendo essa equação, tem-se a seguinte solução

$$\sigma(x) = \tanh[\sqrt{f}x], \quad (3.20)$$

e usando essa solução de σ na órbita obtemos $\rho(x)$ é:

$$\rho(x) = \pm[(1-2f)/d]^{1/2} \operatorname{sech}[\sqrt{f}x]. \quad (3.21)$$

Para $n = 1$ combinando o coeficiente da Eq (3.16) teremos $f = 2$, $\lambda = \frac{8}{3}d$ e $\alpha = \frac{d-3}{2d}$. A órbita fica $\rho = [(d-3)/2d]^{1/2}(1 - \sigma^2)$. Inserindo isso na Eq. (3.14) tem-se as seguintes soluções

$$\rho(x) = 2a(b^2 - 4ac)^{1/2} \cosh(\sqrt{ax}) + b, \quad (3.22)$$

e

$$\sigma^2(x) = 1 - \frac{\rho(x)}{\alpha}. \quad (3.23)$$

Esta é uma órbita parabólica. Essas soluções são dadas em [28], onde se pode obter mais discussões sobre as mesmas.

3.2 Soluções BPS para dois campos

Abordou-se na seção (3.1), o método de Rajaraman para desacoplar equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas, que apesar de auxiliar, pode envolver um processo árduo, já que mesmo desacopladas essas equações diferenciais não são de fácil resolução.

Bogomol'nyi propõe um método no qual ele reduz as equações de movimento de segunda ordem para um sistema de equação de diferenciais de primeira ordem [18]. Similamente ao procedimento realizado para um campo escalar, ao analisar o método BPS para dois campos escalares reais (ϕ) e (χ), submetido a um potencial positivo, dado por:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{1}{2}W_\chi^2, \quad (3.24)$$

onde $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$ e $W_\chi = \frac{dW}{d\chi}$. Considerando $V(\phi, \chi)$ dado na Eq.(3.24), as equações de movimento para configuração estatística são dadas por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi}, \quad (3.25)$$

e

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi}. \quad (3.26)$$

A energia do sistema para configuração de campos estáticos é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right], \quad (3.27)$$

substituindo $V(\phi, \chi)$, a energia toma a seguinte forma

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2} \right]. \quad (3.28)$$

Completando quadrado, tem-se que a energia é dada por:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \mp W_\chi \right)^2 \right] \pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2dx \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right], \quad (3.29)$$

Como o modelo Bogomol'nyi baseia-se na minimização da energia, deve-se impor que os termos da primeira integral seja nulo, o que fornece as seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi; \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi. \quad (3.30)$$

A energia minimizada do sistema é dada por:

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi} + \frac{d\chi}{dx} \frac{dW}{d\chi} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{dW}{dx} \right) = |\Delta W|, \quad (3.31)$$

onde

$$\Delta W = | W(\phi(+\infty), \chi(+\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty)) |. \quad (3.32)$$

A energia BPS, não depende das características locais das soluções, apenas dos valores assintóticos do superpotencial W , ou seja depende dos mínimo de $V(\phi, \chi)$.

Ao impor algumas condições de contorno para os campos e suas derivadas, de forma a assegurar que a energia seja finita, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \equiv \phi(\pm) = v_i; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \chi(x) \equiv \chi(\pm) = v_j \quad (3.33)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\chi}{dx} \right) = 0, \quad (3.34)$$

onde $v_i = (\phi_i, \chi_i)$ e $v_j = (\phi_j, \chi_j)$ são os pontos de mínimos do potencial $V(\phi, \chi)$. Pode-se então, perceber que os pontos de mínimos são pontos que satisfazem $W_\phi = 0$ e $W_\chi = 0$. Assim é possível determinar os pontos de mínimo usando W .

Cada par de mínimo v_i e v_j define um setor topológico do sistema, que pode ou não ser BPS. Um setor ij é BPS, quando $W_i = W(\phi_i, \chi_i)$ e $W_j = W(\phi_j, \chi_j)$ forem distintos, de forma que $E_{BPS}^{ij} = |\Delta W_{ij}| \neq 0$. Já, quando $W_i = W(\phi_i, \chi_i)$ e $W_j = W(\phi_j, \chi_j)$ forem iguais, de modo que $E_{BPS}^{ij} = 0$, o setor é dito não BPS [20, 21]. As Eqs. (3.30) são equações BPS, cujas soluções resolvem as equações diferenciais de segunda ordem, não linear e acopladas. Ressaltando, que nem todas soluções de um dado modelo são obtidas pelas equações de primeira ordem, entretanto, todas os setores BPS são soluções das equações de movimento. Como o potencial depende de ϕ e χ as equações diferenciais de primeira ordem dadas pela Eqs. (3.30) são acopladas. O método das órbitas tentativas pode ser usado na busca de soluções BPS, que resolvem as equações diferenciais de primeira ordem [29]. Para isso precisa-se seguir as seguintes etapas:

1° Determinar os pontos de mínimos do potencial $V(\phi, \chi)$.

2° Selecionar um setor BPS. Isto é feito por meio da escolha de dois mínimos $v_i = (\phi_i, \chi_i)$ e $v_j = (\phi_j, \chi_j)$, tais que: $W_i = W(\phi_i, \chi_i) \neq W_j = W(\phi_j, \chi_j)$. Ou seja, um par de mínimo que possua energia Bogomol'nyi diferente de zero.

3° Escolher uma órbita $g(\phi, \chi) = 0$, que satisfaça os pontos de mínimo, de forma que $g(\phi_i, \chi_i) = 0$ e $g(\phi_j, \chi_j) = 0$.

4° Testar a órbita escolhida. Isto é feito diferenciando a órbita escolhida para obter

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \phi} W_\phi + \frac{\partial g_{ij}}{\partial \chi} W_\chi = 0. \quad (3.35)$$

Se a Eq. (3.35) for compatível com a órbita escolhida, então a órbita é boa e pode ser usada para desacoplar as equações de primeira ordem [21].

3.3 Estabilidade para modelo de dois campos

Dada as soluções estáticas $\phi = \phi_s(x)$ e $\chi = \chi_s(x)$, pode-se investigar a estabilidade linear dessas soluções. Ao definir $\phi(x, t)$ e $\chi(x, t)$ [30] como:

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (3.36)$$

e

$$\chi(x, t) = \chi_s(x) + \xi(x, t), \quad (3.37)$$

onde $\eta(x, t)$ e $\xi(x, t)$ são pequenas perturbações ($\eta(x, t) \ll 1$ e $\xi(x, t) \ll 1$), ou flutuação, ao redor das soluções estática $\phi_s(x)$ e $\chi_s(x)$ respectivamente. Substituindo $\phi(x, t)$ e $\chi(x, t)$ nas equações de movimento, teremos

$$\ddot{\eta} - \eta'' - \phi_s'' + V_{\phi_s} = 0 \quad (3.38)$$

e

$$\ddot{\xi} - \xi'' - \chi_s'' + V_{\chi_s} = 0. \quad (3.39)$$

Expandindo $V(\phi, \chi)$ até primeira ordem e considerando contribuições lineares de η e ξ , obtém-se

$$\ddot{\eta} - \eta'' - \phi_s'' + V_{\phi_s} + V_{\phi_s\phi_s}\eta + V_{\chi_s\phi_s}\xi = 0 \quad (3.40)$$

e

$$\ddot{\xi} - \xi'' - \chi_s'' + V_{\chi_s} + V_{\phi_s\chi_s}\eta + V_{\chi_s\chi_s}\xi = 0. \quad (3.41)$$

Para soluções estáticas tem-se que $\phi_s'' = V_{\phi_s}$ e $\chi_s'' = V_{\chi_s}$, logo as expressões acima se tornam

$$\ddot{\eta} - \eta'' + V_{\phi_s\phi_s}\eta + V_{\chi_s\phi_s}\xi = 0 \quad (3.42)$$

$$\ddot{\xi} - \xi'' + V_{\phi_s\chi_s}\eta + V_{\chi_s\chi_s}\xi = 0. \quad (3.43)$$

Para resolver estas equações de segunda ordem pode-se recorrer ao método de separação de variáveis, e como as soluções estáticas só dependem de x , considera-se que

$$\eta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x) \cos(\omega_n t) \quad (3.44)$$

e

$$\xi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(x) \cos(\omega_n t). \quad (3.45)$$

De modo que substituindo as Eqs. (3.44) e (3.45) nas Eqs. (3.42) e (3.43), resulta nas seguintes expressões:

$$- \eta_n'' + V_{\phi\phi}\eta_n + V_{\chi\phi}\xi_n = \omega_n^2 \eta_n \quad (3.46)$$

e

$$- \xi_n'' + V_{\chi\chi}\xi_n + V_{\phi\chi}\eta_n = \omega_n^2 \xi_n. \quad (3.47)$$

Pode-se reescrever as equações diferenciais (3.46) e (3.47), como:

$$H\psi_n = \omega_n^2\psi_n. \quad (3.48)$$

No qual H e ψ_n são definidos, respectivamente, como

$$H \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} V_{\phi\phi} & V_{\chi\phi} \\ V_{\phi\chi} & V_{\chi\chi} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

e

$$\psi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

A estabilidade das soluções, significa ausência de ω_n^2 negativo.

Capítulo 4

Modelo BNRT

Para um modelo de dois campos denominado modelo BNRT [31], descrito pelo superpotencial W que é dado por

$$W = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (4.1)$$

onde r é um parâmetro de acoplamento real.

Este modelo consiste em dois campos escalares acoplados por um potencial, que conforme a Equação (3.24) é dado pela expressão

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 - r\chi^2 + r(1 + 2r)\phi^2\chi^2 + \frac{r^2\chi^4}{2}. \quad (4.2)$$

As equações de movimentos para soluções estáticas $\phi(x)$ e $\chi(x)$, são obtidas usando as Equações (3.25) e (3.26) e escritas como

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\phi + 2r(1 + 2r)\phi\chi^2 + 2\phi^3 \quad (4.3)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = -2r\chi + 2r(1 + 2r)\phi^2\chi + 2r^2\chi^3. \quad (4.4)$$

Estas equações são de segunda ordem não lineares e acopladas.

No limite BPS as equações de primeira ordem, Equação (3.30) para este modelo, são dados por

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi = 1 - \phi^2 - r\chi^2 \quad (4.5)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = W_\chi = -2r\phi\chi. \quad (4.6)$$

Fazendo $W_\phi = 0$ e $W_\chi = 0$ nas Equações (4.5) e (4.6), obtém-se que:

$$1 - \phi^2 - r\chi^2 = 0 \quad (4.7)$$

e

$$2r\phi\chi = 0. \quad (4.8)$$

Logo, os pontos de mínimo são $(\phi = \pm 1, \chi = 0)$ e $(\phi = 0, \chi = \pm \frac{1}{\sqrt{r}})$ para $r > 0$, ou seja $V(\phi, \chi)$ tem os seguintes mínimos $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (-1, 0)$, $v_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{r}})$ e $v_4 = (0, -\frac{1}{\sqrt{r}})$. A conexão destes quatro pontos de mínimos resultam em seis setores topológicos: setor 1 que conecta v_1 e v_2 ; o setor 2 que conecta v_3 e v_4 ; o setor 3 que conecta v_1 e v_3 ; setor 4 que conecta v_1 e v_4 ; o setor 5 que conecta v_2 e v_3 e o setor 6 que conecta v_2 e v_4 . Tais setores são representados na figura 4.1.

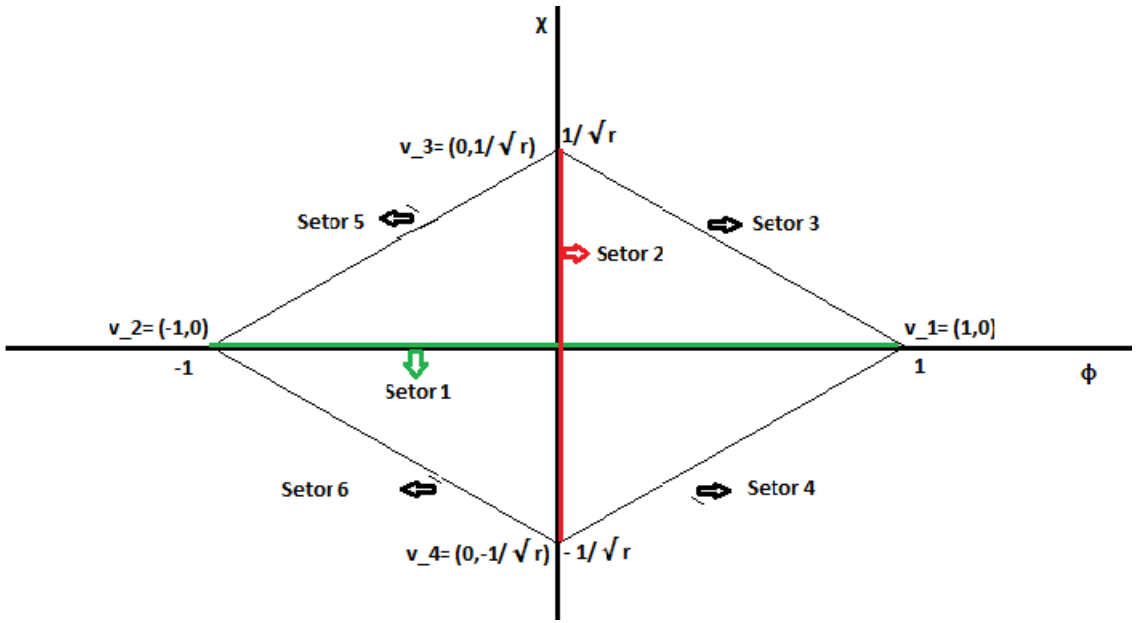


Figura 4.1: Representação dos setores topológicos do modelo BNRT.

Para estes setores a energia BPS associada é obtida usando a equação

$$E_{BPS} = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - (\phi(-\infty), \chi(-\infty))|, \quad (4.9)$$

onde W é expresso pela Equação (4.1). Calculando W para cada mínimo do potencial temos:

$$W_1(1, 0) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$W_2(-1, 0) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2 = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$W_3(0, \frac{1}{\sqrt{r}}) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2 = 0,$$

e

$$W_4(0, -\frac{1}{\sqrt{r}}) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2 = 0.$$

A energia BPS para cada setor é então dada por:

$$E_{BPS}^{12} = |W(1, 0) - W(-1, 0)| = \frac{4}{3}, \quad (4.10)$$

$$E_{BPS}^{13} = |W(1, 0) - W(0, \frac{1}{\sqrt{r}})| = \frac{2}{3}, \quad (4.11)$$

$$E_{BPS}^{14} = |W(1, 0) - W(0, \frac{-1}{\sqrt{r}})| = \frac{2}{3}, \quad (4.12)$$

$$E_{BPS}^{23} = |W(-1, 0) - W(0, \frac{1}{\sqrt{r}})| = \frac{2}{3}, \quad (4.13)$$

$$E_{BPS}^{24} = |W(-1, 0) - W(0, \frac{-1}{\sqrt{r}})| = \frac{2}{3}, \quad (4.14)$$

e

$$E_{BPS}^{34} = |W(0, \frac{1}{\sqrt{r}}) - W(0, \frac{-1}{\sqrt{r}})| = 0. \quad (4.15)$$

Portanto, os setores 3, 4, 5 e 6 são degenerados com $E_{BPS} = \frac{2}{3}$, o setor 1 possui $E_{BPS} = \frac{4}{3}$ e o setor 2 possui energia BPS nula, ou seja este setor é não BPS e sua energia só pode ser calculada quando sua solução topológica for conhecida.

4.1 Soluções dos setores BPS

As soluções $\phi(x)$ e $\chi(x)$ das equações diferenciais de primeira ordem, Equações (4.5) e (4.6), são obtidas conectando dois pares de vácuos distintos. Cada par de vácuo conectado por essas soluções constitui um setor topológico. Como essas equações são acopladas, ao usar o método da órbita tentativa descrito no final da seção 3.2 pode-se desacoplá-las e assim obter as suas soluções.

Inicialmente, ao propor para o setor 1 uma órbita elíptica descrita por $a\phi^2 + b\chi^2 = 1$, que ao satisfazer as condições de $g_{ij}(\phi_i, \chi_i) = 0$ e $g_{ij}(\phi_j, \chi_j) = 0$. Tem-se $g(1, 0)$ e $g(-1, 0)$ são dadas, respectivamente, por

$$g(1, 0) = a(1)^2 + b(0) - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$g(-1, 0) = a(-1)^2 + b(0) - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

O que implica em $a = 1$. Agora testando a órbita escolhida, ou seja:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \phi} W_\phi + \frac{\partial g_{ij}}{\partial \chi} W_\chi = 0. \quad (4.16)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
2\phi(1 - \phi^2 - r\chi^2) + 2b\chi(-2r\chi\phi) &= 0 \\
1 - \phi^2 - r\chi^2 - 2br\chi^2 &= 0 \\
\phi^2 + \chi^2(r + 2br) &= 1.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Comparando a Equação (4.17) com a equação de órbita $\phi^2 + b\chi^2 = 1$, encontra-se o valor de b , em termos de r :

$$b = \frac{r}{(1 - 2r)}. \tag{4.18}$$

A órbita elíptica assume a seguinte forma

$$\phi^2 + \left(\frac{r}{1 - 2r}\right)\chi^2 = 1. \tag{4.19}$$

Esta órbita é usada para desacoplar as equações de primeira ordem, Equações (4.5) e (4.6). Isolando $\phi^2 = 1 - \left(\frac{r}{1 - 2r}\right)\chi^2$ e substituindo na Equação (4.5) obtêm-se a seguinte equação

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm 2r(1 - \phi^2), \tag{4.20}$$

cuja solução é:

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \tanh(2rx). \tag{4.21}$$

Ao substituir essa solução de $\phi(x)$ na órbita, determina-se o valor para o campo χ como:

$$\chi_{\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2\operatorname{sech}(2rx)}. \tag{4.22}$$

As Equações (4.21) e (4.22) são soluções que conectam os mínimos do setor 1.

Para os setores 3, 4, 5 e 6 propõe-se a órbita $a\chi^2 = 1 \pm \phi$ que tem que ser compatível com os pontos de mínimos dos setores em questão: $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{r}})$ e $(0, -\frac{1}{\sqrt{r}})$. Assim, como se pode analisar em seguida:

$$g(1, 0) = a(0) - 1 - 1 = 0,$$

$$g(-1, 0) = a(0) - 1 - (-1) = 0,$$

$$g(0, \frac{1}{\sqrt{r}}) = a\frac{1}{r} \rightarrow a = r,$$

e

$$g(0, -\frac{1}{\sqrt{r}}) = a\frac{1}{r} \rightarrow a = r;$$

a órbita satisfaz os pontos de mínimo para $r = a$, escrita como

$$r\chi^2 = 1 \pm \phi. \quad (4.23)$$

Testando a órbita usando a Equação (4.16) tem-se que;

$$(1 - \phi)(1 + \phi) - r\chi^2(1 + 4r\phi) = 0,$$

e da Equação (4.23) $1 - \phi = r\chi^2$ tem-se que:

$$(r\chi^2)(1 + \phi) - r\chi^2(1 + 4r\phi) = 0.$$

O que leva ao seguinte valor para r:

$$r = \frac{1}{4}. \quad (4.24)$$

Usando a órbita $\frac{1}{4}\chi^2 = (1 \pm \phi)$ nas equações de primeira ordem, determina-se as seguintes soluções como,

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2}[1 \pm \tanh(x/2)], \quad (4.25)$$

e

$$\chi(x) = \pm \sqrt{2[1 \pm \tanh(x/2)]}. \quad (4.26)$$

Estas soluções devem ser arranjadas de forma adequada para descrever pares de soluções que conectam os mínimos de cada setor topológico específico.

Considerar soluções que dependem apenas de um campo para o setor topológico 1, e fazendo $\chi = 0$ nas equações de movimento, Equações (4.3) e (4.4), obtém-se que,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\phi(1 - \phi^2). \quad (4.27)$$

Cuja solução é dada por:

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \tanh(x), \quad \chi = 0. \quad (4.28)$$

Podemos observar que essas soluções são similares as obtidas nas Equações (4.21) e (4.22) quando $r \rightarrow 1/2$. Portanto, as soluções BPS obtidas para uma órbita elíptica que conecta os mínimos do setor 1, tem que ter $r \in (0, 1/2)$, ou seja, quando $r \rightarrow 1/2$ a órbita elíptica que liga (1,0) e (-1,0) se torna uma reta cuja soluções são representadas na equação (4.28). Nota-se que esta solução pode ser obtida das equações de primeira ordem, Equações (4.5) e (4.6), ou seja, é uma legítima solução BPS.

4.2 Solução para o setor não-BPS

O setor 2 que conecta os mínimos v_1 e v_2 não contém energia BPS, em vista disso suas soluções não podem ser obtidas usando as equações de primeira ordem. Usa-se nesta seção métodos para tentar resolver as equações de movimento de segunda ordem e acopladas para este setor.

Inicialmente, considera-se soluções triviais que dependem apenas de um campo. Se fizer $\phi = 0$ e $\chi \neq 0$, obtém-se a seguinte equação de movimento:

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = -2r^2\chi\left(\frac{1}{r} - \chi^2\right), \quad (4.29)$$

cuja solução é dada por:

$$\chi_{\pm}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} \tanh(\sqrt{r}x). \quad (4.30)$$

Usando a Equação (3.27) determina-se a energia para esta solução, ou seja E_{nBPS} é:

$$E_{nBPS} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dx^2} + V(\phi, \chi) \right], \quad (4.31)$$

ou

$$E_{nBPS} = \frac{4}{3\sqrt{r}}. \quad (4.32)$$

Os pares de solução $\phi = 0$ e $\chi_{\pm}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} \tanh(\sqrt{r}x)$ constitui soluções para o modelo de dois campos do setor 2, para uma órbita reta que conecta os mínimo v_3 e v_4 . Essas soluções são não-BPS, pois não resolvem as equações de primeira ordem, o que mostra-se não ser possível existir uma órbita reta para o setor 2 representando estados BPS.

Em busca de uma órbita fechada para o setor 2 cuja soluções sejam $\phi \neq 0$ e $\chi \neq 0$, usa-se o método Rajaraman descrito na seção (3.1) para encontrar a órbita que conecta os mínimos v_3 e v_4 . Considerando uma órbita geral dada pela expressão:

$$g(\phi, \chi) = \phi^n - \alpha\left(\frac{1}{r} - \chi^2\right), \quad (4.33)$$

onde α e n são livres para serem determinados. Esta órbita tem que satisfazer a condição $g_{ij}(\phi_i, \chi_i) = 0$ e $g_{ij}(\phi_j, \chi_j) = 0$ como expresso a seguir.

$$g\left(0, \frac{1}{\sqrt{r}}\right) = 0^n - \alpha\left(\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2\right) = 0,$$

e

$$g\left(0, -\frac{1}{\sqrt{r}}\right) = 0^n - \alpha\left(\frac{1}{r} - \left(-\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2\right) = 0.$$

Usando agora a órbita na equação integro-diferencial, Equação (3.11), proposta por Rajaraman tem-se que:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \phi}\right)^2 \int \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) d\phi = \left(\frac{\partial g}{\partial \chi}\right)^2 \int \left(\frac{\partial V}{\partial \chi}\right) d\chi, \quad (4.34)$$

e desenvolvendo os termos que compõe esta equação, tem-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 - r\chi^2 + r(1 + 2r)\phi^2\chi^2 + \frac{r^2\chi^4}{2} \right) = -2\phi(1 - \phi^2) + 2r\phi\chi^2(1 + 2r), \\ \frac{\partial V}{\partial \chi} &= \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 - r\chi^2 + r(1 + 2r)\phi^2\chi^2 + \frac{r^2\chi^4}{2} \right) = -2r\chi + 2r\chi\phi^2(1 + 2r) + 2r^2\chi^3, \\ \frac{\partial g}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\phi^n - \alpha\left(\frac{1}{r} - \chi^2\right) \right) = n\phi^{(n-1)}, \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\phi^n - \alpha\left(\frac{1}{r} - \chi^2\right) \right) = 2\alpha\chi.$$

Substituindo tais expressões na Equação (4.34), permite escrever:

$$\begin{aligned} (n\phi^{n-1})^2 \int_0^\phi [-2\phi(1 - \phi^2) + 2r\phi\chi^2(1 + 2r)]d\phi = \\ (2\alpha\chi)^2 \int_{\frac{-1}{\sqrt{r}}}^\chi (-2r\chi + 2r\chi\phi^2(1 + 2r) + 2r^2\chi^3)d\chi. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Fazendo $\chi^2 = \left(\frac{1}{r} - \frac{\phi^n}{\alpha}\right)$ na primeira parte da igualdade e $\phi^2 = \alpha^{2/n} \left(\frac{1}{r} - \chi^2\right)^{2/n}$ na segunda parte da igualdade, tem-se que

$$\begin{aligned} (n\phi^{n-1}) \int_0^\phi [-2\phi(1 - \phi^2) + 2r\phi \left(\frac{1}{r} - \frac{\phi^n}{\alpha}\right) (1 + 2r)]d\phi = \\ (2\alpha\chi)^2 \int_{\frac{-1}{\sqrt{r}}}^\chi (-2r\chi + 2r\chi\alpha^{2/n} \left(\frac{1}{r} - \chi^2\right)^{2/n} (1 + 2r) + 2r^2\chi^3)d\chi, \end{aligned} \quad (4.36)$$

Resolvendo a equação acima e colocando os termos em função de ϕ , resulta em

$$-n^2\phi^{3n} \frac{2r(2r+1)}{\alpha(n+2)} + 2rn^2\phi^{2n} + \phi^{2n+2} \frac{n^2}{2} = 4\alpha^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{\phi^n}{\alpha}\right) \left(\frac{\phi^{2n}r^2}{2\alpha^2} - \frac{nr\phi^{n+2}(2r+1)}{(n+2)\alpha}\right). \quad (4.37)$$

Comparando os expoentes da Equação (4.27), para uma solução não-trivial tem-se que:

$2n = n + 2$ e $3n = n + 2$ onde $n = 2$ e $n = 1$ respectivamente. Para o caso interessante, o termo n seja $n = 2$, pois pode-se encontrar uma órbita do tipo fechada para o setor 2.

Assim a órbita é:

$$\sigma^2 - \alpha\left(\frac{1}{r} - \chi^2\right) = 0 \quad (4.38)$$

Para $n = 2$ a Equação (4.37) torna-se:

$$-2\sigma^6(2r+1)\frac{r}{\alpha} + 8r\sigma^4 + 2\sigma^6 = 2\sigma^4r - 2\alpha(2r+1)\sigma^4 - 2\sigma^6\frac{r^2}{\alpha} + 2(2r+1)r\sigma^6, \quad (4.39)$$

comparando os coeficientes de mesma ordem resultam em

$$8r = 2r - 2\alpha(2r+1), \quad (4.40)$$

e

$$-2(2r+1)\frac{r}{\alpha} + 2 = -2\frac{r^2}{\alpha} + 2(2r+1)r. \quad (4.41)$$

Da Equação (4.40) α é dado por

$$\alpha = \frac{-3r}{2r+1}. \quad (4.42)$$

E daí determina-se a seguinte órbita:

$$\sigma^2 + \left(\frac{3}{2r+1}\right) - \frac{3r\chi^2}{2r+1} = 0 \quad (4.43)$$

Para que esta órbita seja fechada r tem que ser $-1/2 < r < 0$, entretanto este valor para r não é permitido por que r não pode ser negativo, pois apresentaria mínimos complexos.

Portanto, pelo método do Rajaraman, tem-se apenas órbita aberta.

Ao investigar outra solução para o setor 2 em busca de uma órbita fechada, a solução proposta é a seguinte para ϕ e χ , respectivamente,

$$\phi = A \operatorname{sech} \alpha x, \quad (4.44)$$

$$\chi = B \tanh \alpha x. \quad (4.45)$$

Para satisfazer as equações de movimento, tem-se que:

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2(\phi^2 - 1 + r\chi^2)\phi + 4r^2\phi\chi^2 = 0, \quad (4.46)$$

$$-\frac{d^2\chi}{dx^2} + 2(\phi^2 - 1 + r\chi^2)r\chi + 4r^2\phi^2\chi = 0. \quad (4.47)$$

Por substituição direta, os parâmetros da soluções, representadas pelas Equações (4.44)-(4.45); precisam assumir os valores $A = \sqrt{1-2r}$, $B = 1/\sqrt{r}$, $\alpha = 2\sqrt{r}$ e a seguinte condição extra

$$\tanh(2\sqrt{r}x) \operatorname{sech}^2(2\sqrt{r}x) (r^2 - 1) \sqrt{r} = 0. \quad (4.48)$$

Esta condição pode ser satisfeita para $r = 1$, $r = -1$ e $r \rightarrow 0$. Numa maneira mais sítíl, no limite em que $r \rightarrow \infty$ esta condição também pode ser satisfeita conforme se discute abaixo. Estas soluções de um modo geral satisfazem a seguinte órbita:

$$\frac{\phi^2}{\frac{1}{r} - 2} + \chi^2 = \frac{1}{r} \quad (4.49)$$

Para o primeiro caso, ou seja para $r = 1$, nota, que se tem uma solução complexa, ou seja:

$$\phi = i \operatorname{sech} 2x, \quad (4.50)$$

$$\chi = \tanh 2x. \quad (4.51)$$

que descarta-se da análise.

No segundo caso, $r = -1$ temos uma solução real dada por

$$\phi = \sqrt{3} \sec 2x, \quad (4.52)$$

$$\chi = \tan 2x. \quad (4.53)$$

Cuja órbita é definida pela hipérbole

$$\frac{\phi^2}{3} - \chi^2 = 1 \quad (4.54)$$

Ou seja, neste caso não se obtêm uma órbita fechada tipo elíptica como no setor BPS.(Figura 4.2)

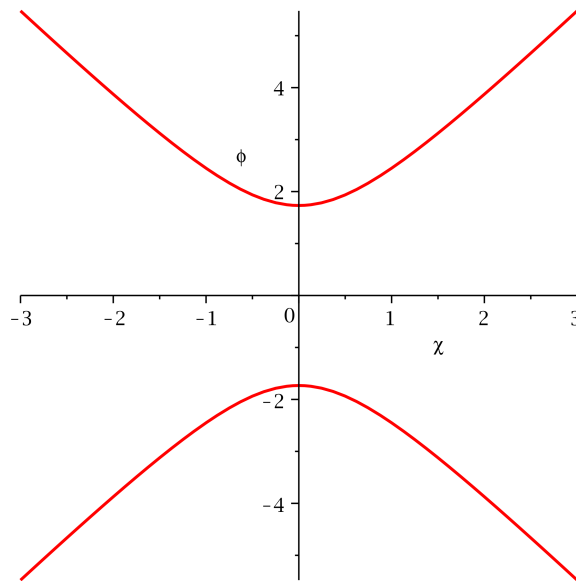


Figura 4.2: Órbitas hiperbólicas para o caso $r=-1$ não setor BPS

Agora para $r \rightarrow 0$, mantendo apenas o termo mais importante da expansão de Taylor, tem-se as seguintes soluções

$$\phi = \sqrt{1 - 2r} \operatorname{sech} 2\sqrt{r}x \quad \longrightarrow \quad \phi = 1 + \mathcal{O}(r), \quad (4.55)$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{r}} \tanh 2\sqrt{r}x \quad \longrightarrow \quad \chi = 2x + \mathcal{O}(r) \quad (4.56)$$

O comportamento de aproximação de ‘sóliton espesso’ ou *thick kink* é apresentado na Figura (4.3).

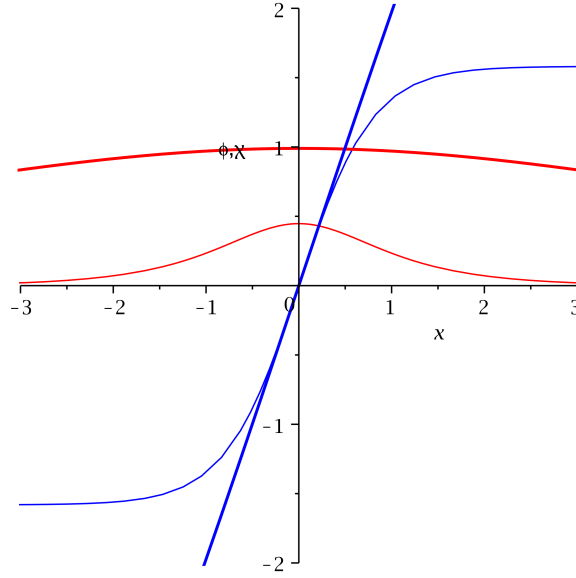


Figura 4.3: Soluções para $r=0.40$ (linhas finas) e $r=0.01$ (linhas grossas).

Uma vez que r é a constante de acoplamento entre os campos, logo este limite é um limite de *acoplamento fraco*. Portanto, essencialmente, esta solução é ideal para descrever sistemas em que a espessura seja bastante relevante e seja predominantemente descrita pelo campo χ com localização de campo constante $\phi \approx 1$. Um exemplo desta situação pode ocorrer quando a espessura da parede de domínios, descrita por esta solução solitônica, é da mesma ordem do tamanho dos domínios (ex.: bolhas de vácuo no regime do equilíbrio após o colapso de paredes de domínios esféricas e instáveis). A órbita para esta solução é apresentada na Figura (4.4).

Já $r \rightarrow \infty$, é mais sutil. Fisicamente, este seria o caso em que tem-se um *acoplamento forte* entre os campos. O fato é que neste limite a espessura do sóliton se torna muito pequena. Este é o conhecido ‘limite de parede fina’ (*thin wall limit*) [32]. Neste limite a função $\tanh(2\sqrt{r}x)$ tende à função sinal $\operatorname{sgn}(x)$ e $\sqrt{r} \operatorname{sech}^2(2\sqrt{r}x)$ tende à função

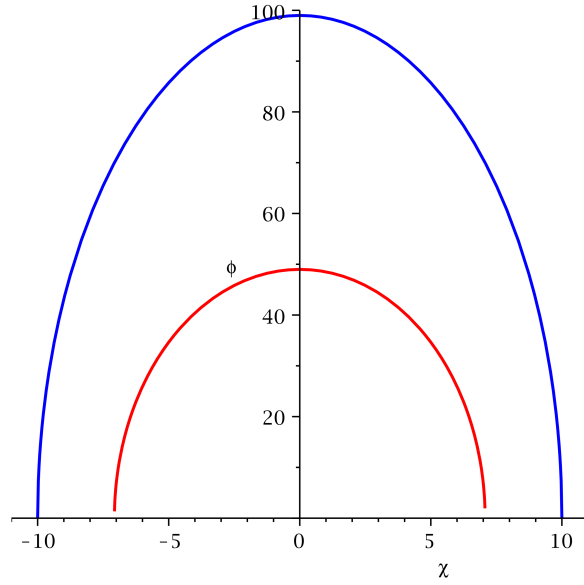


Figura 4.4: Órbitas elípticas para $r=0,02$ (linha vermelha) e $r=0,01$ (linha azul). Quando a espessura da parede de domínios e o tamanho dos domínios são da mesma ordem

delta de Dirac $\delta(x)$. Pode-se usar a Figura (4.3) para entender isto, ao identificarmos a espessura da parede de domínios como sendo $\sim 1/\sqrt{r}$. Como o produto $\text{sgn}(x)\delta(x)=0$ (uma vez que pode-se mostrar que $\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$ se $f(x)$ for contínua em $x = 0$, o que é o caso da função sinal) então no limite de parede fina o produto na Equação. 4.48, $\tanh(2\sqrt{r}x) \text{sech}^2(2\sqrt{r}x) = 0$. Portanto, pode-se mostrar que a solução da Equação. (4.44) de um modo geral satisfaz as equações de segunda ordem neste limite. Soluções de paredes finas normalmente são consideradas quando o tamanho dos domínios são muito maiores que a separação dos mesmos através de uma parede de domínios (sólitons). No exemplo discutido aqui uma solução específica para $r \rightarrow \infty$ seria:

$$\phi = \tanh(2\sqrt{r}x) \approx \text{sgn}(x) \quad (4.57)$$

$$e \quad \chi = \text{sech}(2\sqrt{r}x) \approx \delta(x), \quad (4.58)$$

que poderia ser usada, por exemplo, em teorias de branas as quais numa primeira aproximação são consideradas normalmente infinitesimalmente finas. Para maiores detalhes o leitor pode ver, por exemplo, a referência [32].

A solução aproximada no limite $r \rightarrow 0$ pode ser considerada uma solução solitônica genuína que conecta os vácuos $(0, -1/\sqrt{r})$ a $(0, 1/\sqrt{r})$. A órbita percorrida é tipo elíptica cujo arco tende a descrever uma longa trajetória devido ao fato de que os vácuos se afastam em direção ao infinito no limite em que $r \rightarrow 0$ (Figura (4.4)). Ao questionar em

tal situação extrema, ou seja, o caso em que o único parâmetro livre é levado a valores tão pequenos, mantém a solução estável. Ao investigar isto de duas maneiras:(a) pelo método da comparação energética da solução não BPS em relação às soluções BPS; e (b) por estudo de estabilidade linear. Para a primeira, maneira conforme segue, a energia desta solução é dada por:

$$E_{nBPS} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} (\phi^2 - 1 + r\chi^2)^2 + 2r^2\phi^2\chi^2 \right] dx \quad (4.59)$$

$$= \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{4}{3} \sqrt{r} - \frac{4}{3} r^{3/2}, \quad (4.60)$$

em que foi usada a solução da equação (4.55) na sua forma exata. Porém deve-se considerar o limite de $r \rightarrow 0$. Neste caso a energia é dada pelos termos dominantes, ou seja:

$$E_{nBPS} \approx \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{4}{3} \sqrt{r} \quad (4.61)$$

$$= \bar{E}_{nBPS} + \frac{4}{3} \sqrt{r} \quad (4.62)$$

Onde \bar{E}_{nBPS} é precisamente a energia do setor para uma órbita reta $\phi = 0, \chi \neq 0$ em geral. Para estabelecer a estabilidade é necessário que $E_{nBPS} < \bar{E}_{BPS}$, onde \bar{E}_{BPS} é a energia total dos setores BPS cuja trajetória completa também conecta os vácuos do setor não BPS. Sabe-se que $\bar{E}_{BPS} = 4/3$ daí a condição de estabilidade requer aproximadamente $\bar{E}_{nBPS} < 4/3$ ou simplesmente $r > 1$, o que não está de acordo com o fato de se ter considerado $r \rightarrow 0$ previamente. Portanto, por este método conclui-se que esta solução é *instável*. No entanto, deve-se perceber que o cálculo da energia na Equação (4.59) leva em conta todo o espaço (no intervalo $(-\infty, \infty)$) o que retorna a um valor aceitável se a solução solitônica obtida é de fato espacialmente bem localizada, ao invés de soluções ‘infinitamente espessas’. Como se pode observar na Figura (4.3), a solução para o campo χ cresce linearmente e integrando isto num intervalo infinito obviamente deve gerar uma solução com energia infinita. Pode-se verificar isto na equação para energia, Equação (4.61), a qual se torna infinita no limite $r \rightarrow 0$. No entanto, para efeitos fenomenológicos, é possível que um intervalo de integração na Equação (4.76) finito, determinado por uma outra escala, seja suficiente para tratar da física do sistema. Sendo assim integrando ao longo de uma região espacial finita (no intervalo $(-\Delta/2, \Delta/2)$) e mantendo $r \rightarrow 0$ obtém-se que:

$$E_{nBPS} = 2\Delta - \frac{4}{3}\Delta^3 r + \mathcal{O}(r^2). \quad (4.63)$$

Esta é uma energia finita, controlada por uma escala Δ .

Por enquanto, para o critério de estabilidade para impor limite no valor deste parâmetro, a condição de estabilidade $E_{nBPS} < \bar{E}_{BPS}$ deve ser $\Delta < 2/3$.

Para segunda maneira que se considera a estabilidade linear desta solução aproximada no limite $r \rightarrow 0$, usando a equação (3.48), tem-se que:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} 4 + 8rx^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} = \omega_n^2 \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Pode verificar que só foram mantidos termos da ordem de r e x^2 (por comparação de termos, percebe que estes são os termos mais importantes da expansão para $r \rightarrow 0$ e x arbitrário). Portanto, a Equação (4.81) tem-se que

$$-\frac{d^2\eta_n(x)}{dx^2} + (4 + 8rx^2)\eta_n(x) = \omega_n^2\eta_n(x) \quad (4.65)$$

$$e - \frac{d^2\xi_n(x)}{dx^2} = \omega_n^2\xi_n(x) \quad (4.66)$$

Como em ambas as equações o potencial de Schroedinger é positivo e portanto não há possibilidade de encontrar estados com auto-valores $\omega_n^2 < 0$ o que causaria instabilidades. O potencial para $\eta_n(x)$ é o de um oscilador harmônico mais uma constante positiva, e a equação para $\xi_n(x)$ descreve ondas planas para $\omega_n^2 > 0$. Assim o sistema, por análise linear e dentro das aproximações consideradas demonstra-se *estável*.

Para finaliza, sobre a aplicação dos resultados relacionados examina-se à solução solitônica com $r \rightarrow 0$. Tal tipo tem sido considerada no contexto de fenomenologia de partículas na presença de dimensões extras. Por exemplo, em [33] foi considerado uma parede de domínios espessa imersa em cinco dimensões de maneira que o perfil da solução se parece com a nossa solução solitônica descrita acima. Para isso, consideraram a possibilidade de se obter a função de onda dos léptons e quarks em lados opostos da parede de domínios com espessura da ordem de Δ — neste cenário normalmente o nome ‘paredes de domínios’ é substituído por ‘branas’.

Capítulo 5

Considerações Finais

Modelos que usam teoria de campos escalares tem diversas aplicações na Física. Como por exemplo em Física da Matéria Condensada, Cosmologia e Física de Partículas. Geralmente modelos deste tipo são descritos por equações diferenciais de segunda ordem não-linear e acopladas. Um dos objetivos principais da teoria de campos é resolver estas equações acopladas com o intuito de obter as soluções de campo e assim analisar o fenômeno físico descrito pelo modelo.

O método da órbita tentativa nos auxilia para desacoplar as equações de movimento ou as equações BPS cujas soluções são soluções das equações de movimento. Neste trabalho analisamos o modelo BNRT no intuito de encontrarmos uma solução de orbita fechada para o setor não BPS deste modelo. Primeiramente, usamos o método proposto por Rajaraman, no qual ajustamos os parâmetros da órbita usando a equação integro diferencial. Nesta investigação não obtemos uma órbita fechada para o setor estudado. Finalmente, supomos uma solução que satisfaz uma certa órbita e por aproximação para o parâmetro de acoplamento entre os campos $r \rightarrow 0$ obtemos uma órbita fechada. Vimos que mesmo neste limite a solução é estável.

Referências Bibliográficas

- [1] LEMOS, N.A. **Mecânica Analítica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- [2] MENEZES, R. *Defeitos Globais em Teorias de Campos e Aplicações*. Dissertação de Doutorado - UFPB, Paraíba, 2007.
- [3] GUTH, A. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Phys. Rev D**, v. 23, n. 2, p.347-356, 1981.
- [4] LINDE, A. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. **Phys. Lett. B**, v. 108, n. 6, p. 389-393, 1982.
- [5] ABRIKOSOV, A. On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group, **Soviet Physics JETP**, v. 5, n. 6, p.1174-1182, 1957.
- [6] ZUREK, W. Cosmological Experiments in Condensed Matter Systems, **Physica Reports**, v. 276, n. 4, p. 177-221, 1996.
- [7] WACHTER, A. Relativistic quantum mechanics. **Springer Science e Business Media**, 2010.
- [8] Rubakov, V. **Classical theory of gauge fields**. Princeton University Press, 2002.
- [9] VACHASPATI, T. **Kinks and domain wall: An introduction to classical and quantum and Solitons**. Inglaterra: Cambridge University Press, 2006.
- [10] BARCELOS, J.N. **Matemática para físicos com aplicações** . 1. ed. v. 1, São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- [11] GOLDESTEIN,H.; POOLE,C.; SAFKO.,J. **Classical Mechanics**. 3. ed. Addison Wesley, 2001.

- [12] SOUZA, M.; BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. **Lat. Am. J. Phys. Educ.** v. 6, n. 1, p. 47-54, 2012.
- [13] RAJARAMAN, R. **Solitons And Instantons. An Introduction To Solitons And Instantons In Quantum Field Theory.** Amsterdam: North-holland, 1982.
- [14] GOMES, M. **Teoria Quântica dos Campos.** 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2015.
- [15] REBBI,C.; SOLIANI,R. **Solitons and Particles.** Singapore: World Scientific, 1984.
- [16] SILVA, I.; *Topológicos em Modelos de Campos Escalares.* Dissertação de Mestrado - UFPB, Paraíba, 2003.
- [17] AVELAR, A.; BAZEIA, B.; CARDOSO.W.B.; LOSANO, L. Lump-like Structures in Scalar-field Models. **Phys. Lett. A**, v. 374, n. 2, p. 222-227, 2009.
- [18] BOGOMOL'NYI, E. The stability of classical solutions. **Sov. J. Nucl. Phys.** v. 24, p. 449-454, 1976.
- [19] PRASSAD, M.; SOMMERFIELD, C. Exact Classical Solution for the Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. **Phys. Rev. Lett.** v. 35, p. 760, 1975.
- [20] BAZEIA,D.; LOSANO,L.; SANTOS,J.R.L. Kinklike structures in scalar field theories: from one-fieldto two-field models. **Phys. Lett. A**, v. 377, n. 25, p. 1615-1620.
- [21] BAZEIA, D. **Memorial.**2004. Concurso para Docência - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.
- [22] GIBBONS, G.; TOWNSEND, P. Bogomol'nyi equation for intersecting Domain Wall. **Phys. Rev. Lett.** v. 83, p. 1727, 1999
- [23] BAZEIA,D.; BRITO, F. Bags, Junctions, and networks of BPS and non-BPS defects. **Phys. Rev. D.** v. 61, p. 105019, 2000.
- [24] BAZEIA, D.; BRITO, F.; SANTOS, M. Topological defects inside domain wall. **Phys. Rev. D.** v. 54, p. 1852-1855, 1996.

- [25] BAZEIA, D.; BRITO, F.; BOSCHI, H. Domain defects in systems of coupled scalar fields. **Journal High Energy Phys.** v. 04, p. 28, 1999.
- [26] BAZEIA, D. Scalar fields: From Domain Walls to nonotubes and Fullerenes. **Brazilian Journal of Physics.** v. 32, n. 4, 2002.
- [27] BAZEIA, D.; GOMES, A. Bloch Brane. **Journal High Energy Phys.**, n. 05, 2004.
- [28] RAJARAMAN, R. Solitons of coupled scalar field theories in two dimensions. **Phys. Rev. Letts.** v. 42, n. 4, p. 200-204, 1979.
- [29] BAZEIA, D.; FREIRE, W.; LOSANO, L; RIBEIRO, F. Topological defects and the trial orbit method. **Modern Physics Letters A** v. 17, p. 1945, 2002.
- [30] JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory **Rev. Mod. Phys.** v. 49, p. 681, 1977.
- [31] BAZEIA, D.; NASCIMENTO, J.; RIBEIRO, R.; TOLEDO, D. Soliton stability in systems of tworeal scalar fields. **Journal of Physics A: Mathematical and General.** v. 30, p. 8157-8166, 1997.
- [32] BRITO, F.; CVETIC, M.; YOON, S. From a thick to a thin supergravity domain wall. **Phys. Rev. D.** v. 64, 2001.
2001
- [33] ARKANI, N.; SCHMALTZ, M. Hierarchies without symmetries from extra dimensions. **Phys. Rev. D.** v. 61, 2000.