UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Hidrodinâmica de Chern-Simons

Mário José Rodrigues Bezerra

CAMPINA GRANDE
- Agosto 2018 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Hidrodinâmica de Chern-Simons

Mário José Rodrigues Bezerra

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Anacleto.

CAMPINA GRANDE
- Agosto de 2018 -

B574h Bezerra, Mário José Rodrigues.
Hidrodinâmica de Chern-Simons / Leandro Fabricio Sena. – Campina Grande, 2018.
28 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto".
Referências.

1. Hidrodinâmica. 2. Vórtice Quântico. 3. Chern-Simons. I. Anacleto, Marcos Antônio. II. Título.

CDU 532.5(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Mário José Rodrigues Bezerra

Aprovada em ____________________

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcos Anacleto

Orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

Examinador Interno

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Examinador Externo

É realmente impossível dizer qualquer coisa com
precisão absoluta, a não ser aquela coisa que é
tão abstraída do mundo real, para não
representar qualquer coisa real.

Richard P. Feynman

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marcos Anacleto, pela orientação e oportunidade de realização deste trabalho.

A todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica.

A todos os professores da Universidade Estadual da Paraíba, instituição onde comecei a dar os primeiros passos.

Ao meu pai José Mário e a minha querida vó Maria da Glória que sempre me incentivaram a estudar.

À minha querida esposa Fabiana Cordeiro por todo apoio e suporte para que conseguido trilhar esse longo caminho e chegar até o fim

Aos amigos do departamento pelas discussões de Física, momentos de lazer e que propiciaram que o ambiente fosse agradável para realização do trabalho, em especial, Leandro, Illen, Anderson e Maxwell, João Paulo Gois, Klécio, Queiroga e Heberte Silva.

Ao Senhor Hélio que sempre nos atendeu na secretaria da pós-graduação com muita atenção e zelo.

Aos funcionários da limpeza, que sempre organizaram tudo e nos ofereceu um ambiente limpo e aconchegante.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão da bolsa.

Resumo

Nesta dissertação consideramos a influência do potencial quântico no vórtice planar em um problema de 2 + 1 dimensões para a equação de Schröodinger não-linear (modelo de Jackiw-Pi) que interage com o campo de calibre de Chern-Simons. Essa interação é estudada utilizando a aplicação da transformada Auberson-Sabatier tipo gauge (calibre), que afeta a fase da função de onda e isso acarreta uma alteração considerável nos parâmetros das configurações dos vórtices. Neste trabalho, o fluido considerado tem as características do fluido de Madelung. Com isso, cria-se a possibilidade para que haja uma interpretação física simples, uma vez que a lei de Gauss Chern-Simons gera vórtices locais para fluidos líquidos e com isso, dar condições de igualdade entre a velocidade clássica, que é a velocidade do centro de massa e a velocidade do movimento quântico, aquela gerada pela velocidade do potencial quântico do movimento interno, sendo assim o fluido admite a solução de vórtice N.

Palavras-chave: Chern-Simons, Hidrodinâmica, Vórtice.

Abstract

In this Dissertation we consider the influence of the quantum potential on the planar vortex in a 2 + 1-dimensional problem for the non-linear Schrödinger equation (Jackiw-Pi model) that interacts with the Chern-Simons gauge field. This interaction will be studied using the Auberson-Sabatier gauge transform, which affects the phase of the wave function and this causes a considerable change in the parameters of the vortex configurations. In this work, the fluid considered has the characteristics of the Madelung fluid. Thus, the possibility for a simple physical interpretation is created, since the Gaussian law of Chern-Simons generates local vortices for liquid fluids and with this, to give equality conditions between the "classical velocity", which is the velocity of the center of mass and the velocity of the quantum movement, that generated by the velocity of the quantum potential of the internal motion, thus the fluid admits the solution of N vortex.

Keywords: Chern-Simons, Hydrodynamics, Vórtex

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Cotidianamente nos deparamos com algumas manifestações naturais conhecidas como redemoinho, seja de vento ou de água. No entanto, o tal redemoinho fisicamente é denominado vórtice, Em teorias físicas modernas a noção da existência de vórtices remonta a cosmologia de Descartes[1]. É visto na literatura que a extensão não-linear da equação de Schrödinger adota outra denominação, onde o termo não-linear recebe a nomenclatura potencial quântico e tem sido a principal ponte de conexão entre o problema de quantização estocástica, que nada mais é que uma alternativa para quantização de campos clássicos de calibre[2], uma teoria de calibre[1] (gauge), é uma teoria de campos na qual a lagrangeana é invariante sob grupos de transformações de simetrias globais ou locais. Muitas teorias são descritas por lagrangianas que são invariantes sob determinados grupos de transformações de simetria. Quando tais grupos são invariantes sob uma transformação em todos os ponto do espaço, esses grupos descrevem uma simetria global[3]. Por outro lado, em uma teoria de calibre (local), a exigência de que as transformações sejam globais é deixada de lado e a lagrangeana possui uma simetria local. Isso pode ser visto como uma generalização do princípio de equivalência da Relatividade Geral, onde em cada ponto do espaço-tempo é permitida uma escolha de um referencial local. Aparece também na formulação teórica da onda da mecânica clássica [4] e no limite de dispersão da dinâmica de onda não-linear[5]. Tal como foi demonstrado por Sabatier[6] esta extensão preserva a estrutura lagrangeana. Além disso, por transformação adequada da fase da função de onda, Auberson e Sabatier, obtiveram linearização do modelo que dependendo da força do potencial quântico, é necessário aparecer na forma da equação de Schrödinger

[1]O termo calibre, refere-se aos graus de liberdade dos campos na lagrangeana.

com potencial redimensionado ou como um par das equações de difusões tempo-reverso. Devido a esta linearização não foram encontradas soluções tipo soliton[6, 7]. Entretanto, atualmente leva-se em consideração a versão não-linear da formulação de Bohm da mecânica quântica[8], ou seja, o problema do soliton de Schrodinger não-linear (NLS) sofre influência do potencial quântico[9, 5]. A aplicação da transformação de fase do tipo Auberson-Sabatier para problema do potencial quântico busca reduzir o problema ao par de equações de reação de tempo-reverso, representando uma versão temporal imaginária semelhante a equação não linear de Schrodinger. Então, constrói-se duas soluções de soliton, e assim determinando um caráter de ressonância de interação mútua[9, 5, 10].

No âmbito dessa dissertação, considera-se a influência do potencial quântico no vórtice planar em um problema de 2 + 1 dimensões para a equação de Schrödinger não-linear e como ocorre a interação com o campo de gauge (calibre) de Chern-Simons. Usa-se a aplicação da transformada tipo Auberson-Sabatier, que afeta a fase da função de onda e altera todos os parâmetros das configurações de vórtices. Na representação de Madelung, reformula-se o modelo da hidrodinâmica planar rotacional. Em seguida, o limite auto-dual, admitindo as soluções de N-vórtices, tem uma interpretação física simples como condição de igualdade entre a "velocidade clássica, que é a velocidade do centro de massa e a velocidade quântica, ou seja, a velocidade do movimento no centro de massa com movimento do spin interno ou zitterbewegung (movimento trêmulo descrito por Schrödinger)[11].

No capítulo 2 abordar-se as teorias de gauge definidas em espaços bidimensionais planos e suas peculiaridades[12]. Aqui analisa-se determinados tipos de soluções advindas de algumas teorias de gauge planares. Tais soluções são chamadas vórtices. No capítulo 3 faz-se uma breve análise de vórtices carregados que é de muito interesse para a discussão desse trabalho, além de fornecer maior contato com nosso objeto de estudo. No capítulo 4 reformulamos a dinâmica clássica da partícula carregada interagindo com o campo Abeliano como uma equação de onda do tipo Schrödinger não-linear. Deformando corretamente a força do potencial quântico, recuperando assim, a equação padrão de Schrödinger, onde o parâmetro de deformação desempenha o papel da constante de Planck. Especifica-se o campo de gauge como Chern-Simons Abeliano, interagindo com a equação de Schrodinger não linear (NLS). Para o fluxo estático movendo-se com uma velocidade igual ao quantum, reduz-se o problema à equação de Liouville e descreve-se os correspondentes para as configurações de vórtices e a partir de condições de não singularidade e de valor único, encontrando-se assim, condição de quantização para as constantes de acoplamento. A redução dimensional para uma equação de (NLS) unidimensional e sua modificação por potencial quântico são consideradas. Já no capítulo 5, nas conclusões, discutiremos os resultados obtidos neste trabalho.

Capítulo 2

Equação de onda não-linear da dinâmica clássica

Nesse capítulo, faremos uma breve revisão das principais características da teoria de calibre eletromagnética em (2+1) dimensões e do termo de Chern-Simons adicionado a teoria[13]. Sabe-se que a lagrangiana em coordenadas cartesianas é dada por [14]:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\phi + \frac{e}{c}\vec{v}.\vec{A}. \tag{2.1}$$

Sendo $\vec{A}$ o potencial vetor e que $\dot{x} = \vec{v}$, logo (2.1) torna-se:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - e\phi + \frac{e}{c}\vec{v}.\vec{A}. \tag{2.2}$$

Os momentos canônico para coordenadas generalizadas são dados por:

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \tag{2.3}$$

que em nosso caso

$$\rho_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \longrightarrow m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x, \tag{2.4}$$

$$\rho_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \longrightarrow m\dot{y} + \frac{e}{c}A_y, \tag{2.5}$$

$$\rho_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \longrightarrow m\dot{z} + \frac{e}{c}A_z, \tag{2.6}$$

onde $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Entretanto, deve-se perceber que o momento canônico não é $m\vec{v}$, pois o termo $\frac{e}{c}\vec{A}$ é a parte do nosso momento que fica no potencial magnético. Assim

$$\vec{\rho} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}. \tag{2.7}$$

De (2.7) isola-se $\vec{v}$, logo

$$\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{\rho} - \frac{e}{c}\vec{A}), \tag{2.8}$$

subistituindo-se (2.8) em (2.2), chega-se em

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - e\phi + \frac{e}{c}\vec{v}.\vec{A}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m}(\vec{\rho} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 - e\phi + \frac{1}{m}[\vec{\rho}\frac{e}{c}\vec{A} - (\frac{e}{c}\vec{A})^2]. \tag{2.10}$$

É visto na literatura que $\mathcal{H} = \vec{\rho}.\overrightarrow{v} - \mathcal{L}$[14], fazendo-se a associação desta equação com a equação (2.10) chega-se a equação

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\vec{\rho} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\phi. \tag{2.11}$$

A equação (2.11) é a hamiltoniana para uma partícula num campo eletromagnético externo. No entento, para uma carga não-relativística carregada em um campo $U(1)$ o campo de gauge é $A_\mu = (A_0, \vec{A})$ a equação (2.11) é similar equação dada abaixo [15].

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{\rho}^2}{2m} + \frac{e}{c}A_0 + U. \tag{2.12}$$

A equação de Hamilton-Jacobi é dada por[15]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(\vec{\nabla}S, A_0, \vec{A}, U) = 0, \tag{2.13}$$

e o momento é

$$\vec{\rho} = \overrightarrow{\nabla}S + \frac{e}{c}\vec{A}. \tag{2.14}$$

Substitui-se (2.14) em (2.12), logo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\overrightarrow{\nabla}S + \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2 + \frac{e}{c}A_0 + U. \tag{2.15}$$

Agora, substitui-se (2.15) em (2.13) para se obter

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\overrightarrow{\nabla}S + \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2 + \frac{e}{c}A_0 + U = 0. \tag{2.16}$$

Sabe-se também que a quação de Lionville é descrita da seguinte forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\vec{\rho}\vec{v}) = 0. \tag{2.17}$$

Deste modo, monta-se um sistema de equações a partir de (2.16) e (2.17)

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\overrightarrow{\nabla} S + \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2 + \frac{e}{c}A_0 + U. \quad \textbf{(i)} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0. \quad \textbf{(ii)} \end{cases}$$

O sistema clássico composto pelas equações (i) e (ii) será escrito em termos da função de onda ψ, de modo que, essa função de onda seja complexa.

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{iS}, \tag{2.18}$$

deriva-se a equação (2.18) em relação ao tempo, otendo-se o seguinte resultado

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + i\psi\frac{\partial S}{\partial t}, \tag{2.19}$$

da equação (2.19) isola-se $\psi\dfrac{\partial S}{\partial t}$, e assim obtem-se

$$\psi\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{i}\frac{\psi}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{2.20}$$

agora, multiplica-se (i) por ψ, logo

$$\psi\frac{\partial S}{\partial t} + \psi\frac{1}{2m}(\overrightarrow{\nabla} S + \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2 + \psi\frac{e}{c}A_0 + \psi U = 0, \tag{2.21}$$

usa-se a equação (2.20) em (2.21), chegando em

$$\frac{1}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{i}\frac{\psi}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \psi\frac{1}{2m}(\overrightarrow{\nabla} S + \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2 + \psi\frac{e}{c}A_0 + \psi U = 0. \tag{2.22}$$

Retomando a equação (2.18) e a derivando em relação ao espaço, tem-se

$$\vec{\nabla} S = \frac{\vec{\nabla}\psi}{i\psi} - \frac{\vec{\nabla}\rho}{2i\rho}. \tag{2.23}$$

Com esse resultado a equação (2.22) toma a seguinte forma

$$\frac{1}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{i}\frac{\psi}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \psi\frac{1}{2m}(\frac{\vec{\nabla}\psi}{i\psi} - \frac{\vec{\nabla}\rho}{2i\rho} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2 + \psi\frac{e}{c}A_0 + \psi U = 0, \tag{2.24}$$

após desenvolver o produto notável $(\dfrac{\vec{\nabla}\psi}{i\psi} - \dfrac{\vec{\nabla}\rho}{2i\rho} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2$, obtem-se

$$\begin{aligned}(\frac{\vec{\nabla}\psi}{i\psi} - \frac{\vec{\nabla}\rho}{2i\rho} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2 = &-\frac{(\vec{\nabla}\psi)^2}{2m\psi} + \frac{\vec{\nabla}\psi.\vec{\nabla}\rho}{2m\rho} - \frac{\psi}{8m\rho^2}(\vec{\nabla}\rho)^2 \\ &+\frac{\vec{\nabla}\psi}{im}(\frac{e}{c}\vec{A}) - \frac{\psi}{2mi\rho}\vec{\nabla}\rho.(\frac{e}{c}\vec{A}) + \frac{\psi}{2m}(\frac{e}{c}\vec{A})^2,\end{aligned} \tag{2.25}$$

É sabido que

$$(\vec{\nabla}\psi)^2 = \vec{\nabla}(\psi\vec{\nabla}\psi) - \psi\vec{\nabla}^2\psi, \tag{2.26}$$

logo chegamos exatamente em

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{i}\frac{\psi}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\vec{\nabla}.(\psi\vec{\nabla}\psi)}{2m\psi} + \frac{\vec{\nabla}^2\psi}{2m} + \frac{\vec{\nabla}\psi.\vec{\nabla}\rho}{2m\rho} - \frac{\psi}{8m\rho^2}(\vec{\nabla}\rho)^2$$
$$+\frac{\vec{\nabla}\psi}{im}.(\frac{e}{c}\vec{A}) - \frac{\psi}{2mi\rho}\vec{\nabla}\rho.(\frac{e}{c}\vec{A}) + \frac{\psi}{2m}(\frac{e}{c}\vec{A})^2 + \psi\frac{e}{c}A_0 + \psi U = 0. \tag{2.27}$$

Agora retornaremos a equação (**ii**) para desenvolve-la. Antes deve-se lembrar que $\vec{V} = \frac{1}{m}(\vec{\nabla}S + \frac{e}{c}\vec{A_0})$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{V}) = 0 \longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.[\frac{\rho}{m}(\vec{\nabla}S + \frac{e}{c}\vec{A})] = 0, \tag{2.28}$$

desenvolvendo (2.28) chega-se a

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}.\psi\vec{\nabla}\rho}{mi\psi} + \frac{(\vec{\nabla}\rho)^2}{2mi\rho} - \frac{\vec{\nabla}\rho}{m}.(\frac{e}{c}\vec{A}) + \frac{\rho i\vec{\nabla}^2\psi}{m\psi} - \frac{\rho i(\vec{\nabla}\psi)^2}{m\psi^2} - \frac{i\vec{\nabla}^2\rho}{2m} + \frac{i(\vec{\nabla}\rho)^2}{2m\rho}, \tag{2.29}$$

utilizando-se essa equação e substitui na equação (2.27), chega-se a

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\psi\vec{\nabla}\rho}{2mi\rho}(\frac{e}{c}\vec{A}) - \frac{\vec{\nabla}^2\psi}{2m} + \frac{\psi}{4m\rho}\vec{\nabla}^2\rho - \frac{\psi}{8m\rho^2}(\vec{\nabla}\rho)^2$$
$$+\frac{\vec{\nabla}\psi}{im}(\frac{e}{c}\vec{A}) - \frac{\psi}{2mi\rho}\vec{\nabla}\rho(\frac{e}{c}\vec{A}) + \frac{\psi}{2m}(\frac{e}{c}\vec{A})^2 + \psi\frac{e}{c}A_0 + \psi U = 0. \tag{2.30}$$

Multiplicando (2.30) por i e eliminando os termos semelhantes, sabendo que $D_0 = \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{e}{c}A_0$ e $D = \vec{\nabla}\psi - (\frac{e}{c}\vec{A})$, obtem-se.

$$iD_0\psi + \frac{1}{2m}D^2\psi - U\psi = \frac{1}{2m}\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi. \tag{2.31}$$

A equação (2.31) tem a mesma formatação da equação de Schrödinger, sem a constante de Planck, que é modificada pelo termo denominado potencial quântico no lado direito. essa equação admite todas as soluções habituais da mecânica clássica, mas não permite superposições dessas soluções. Deve-se notar que o sistema composto pelas equações (i) e (ii) descreve o limite semi-clássico da equação de Schrödinger na mecânica quântica. É importante salientar que a equação (2.31) é covariante sob as transformações de gauge (calibre). Deste modo, pode-se fazer as seguintes considerações[15]

$$\psi \longleftrightarrow \psi e^{i\alpha}, \tag{2.32}$$

e

$$\vec{A} \longleftrightarrow \vec{A} - \frac{e}{c}\overrightarrow{\nabla}\alpha, \tag{2.33}$$

Após essas considerações, ocorre a mudança da ação clássica

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} + \alpha, \tag{2.34}$$

sendo U(1) invariante de gauge (calibre), o termo adicional do lado esquerdo da equação (2.31) há uma compensação da contribuição da ivanriante de gauge correspondente a dispersão. Como a equação (2.31) não tem a constante de Planck, considera-se a contribuição do potencial quantico do lado direito da equação (2.31) deformado pela constante $\hbar^2$. Logo, tem-se

$$iD_0\psi + \frac{1}{2m}D^2\psi - U\psi = \frac{1}{2m}(1-\hbar^2)\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi. \tag{2.35}$$

Com isso surge uma nova função de onda, dada por

$$\chi = \sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}. \tag{2.36}$$

Fazendo todo o processo de calculos anteriores de ψ para χ, obtem-se a seguinte equação

$$i\hbar D_0\chi + \frac{\hbar^2}{2m}D^2\chi - U\chi = 0. \tag{2.37}$$

Como citado anteriomente $\hbar$ assume o papel da constante de Planck, é importante analisar que para $\hbar \neq 0$ a equação (2.35) é equivalente a equação de Schrödinger e para $\hbar = 0$ reduz a equação (2.35) a equação (2.31) que é a equação de onda não linear da mecânica clássica. Além disso, para $\hbar = \pm 1$, reduz diretamente à taxa linear da equação de Schrödinger e a sua conjugação complexa. Se houver deformação na equação (2.31) aparecerá um um sinal oposto na equação (2.35)

$$iD_0\psi + \frac{1}{2m}D^2\psi - U\psi = \frac{1}{2m}(1+\hbar^2)\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi, \tag{2.38}$$

deve-se notar que para o mesmo limite clássico $\hbar = 0$ da equação (2.35) não pode ser linearizado na forma da equação de Schrödinger pela transformação da equação (2.36), entretanto, nota-se que a equação (2.38) pode ser reduzida à equação (2.35) pela substituição analítica formal da constante de Planck pelo valor imaginário puro $\hbar \longrightarrow i\hbar$, que na mecânica quântica é a região classicamente inacessível que leva a função de onda a um decaimente exponencial. Desta maneira, escreve-se essas duas funções em termos reais, logo tem-se

$$Q^{\pm} = \sqrt{\rho}e^{\pm\frac{1}{\hbar}S}. \tag{2.39}$$

Analogamente aos processos anteriores e tomando a equação (2.38) e a sua conjugação complexa obtem-se o par de equações de difunsão - antidifusão, dada por

$$\pm\hbar D_0 Q^{\pm} + \frac{\hbar^2}{2m} D^2 Q^{\pm} - U Q^{\pm} = 0. \tag{2.40}$$

Tem-se que a equação (2.40) é semelhante a equação de Schrödinger como vista em [16]. Partindo desta consideração nota-se que a equação de Schrödinger sofreu uma perturbação pelo potencial quântico e assim é incluído como um dos casos particulares da mecânica clássica onde $\hbar = 0$, sendo na mecânica quântica $\hbar = \pm|\hbar|$ e o par de equações de difusão e antidifução em que $\hbar = i|\hbar|$.

Capítulo 3

Hidrodinâmica de Chern-Simons

Anteriormente buscou-se aplicar o limite semiclássico para modificar a equação não linear de Schrödinger, dada por

$$i\hbar\partial_t\chi + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\chi + 2g|\chi|^2\chi = 0. \tag{3.1}$$

Sendo $2g|\chi|^2\chi = U$. Deste modo, é importante salientar que para $g < 0$ o espaço está em uma ou duas dimensões [17, 18], com isso, tem-se uma ferramenta analítica para descrever ondas de choque em óptica não linear e vórtices em superflúido. Decompondo a função de onda igualmente feito com a equação (2.36) obtém-se a deformação quântica da equação de Hamilton-Jacobi por potencial quântico ou após a diferenciação de acordo com as coordenadas espaciais, o fluido de Madelung, que é um sistema hidrodinâmico quântico proposto em 1926 e não consiste em um modelo de partículas com trajetórias bem definidas, mas sim por uma densidade de probabilidade, que é um modelo hidrodinâmico que utiliza a equação de Schrödinger para sua formulação, de modo que a densidade do fluído é determinada, fazendo-se uma analogia com a densidade de probabilidade da teoria quântica [19]. No limite da mecânica clássica formal $\hbar \longrightarrow 0$, antes que os "choques"aconteçam, com isso há uma contribuição advinda do potencial quântico, e assim formatando o fluído de modo que ele possa ser trabalhado pelo sistema de Euler. Com isso, pode-se escreve-lo em termos da função de onda (2.18). Logo, a equação de Schrödinger não linear sem dispersão pode ser escrita da seguinte forma

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2m}\Delta\psi + 2g|\psi|^2\psi = \frac{1}{2m}\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi, \tag{3.2}$$

a deformação quântica torna (3.2) em

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2m}\Delta\psi + 2g|\psi|^2\psi = (1-\hbar^2)\frac{1}{2m}\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi. \tag{3.3}$$

A reformulação para a função de onda (2.36) retoma a equação original (3.1), que é o modelo NLS e a equação (3.1) interagindo com o campo de gauge de Chern-Simons em (2+1) dimensões é chamado de modelo de Jackiw-Pi (JP)[20]. Desta forma, para descrever essa teoria partiremos da lagrangeana do modelo abeliano de Jackiw-Pi[21], dada a seguir

$$\mathcal{L} = \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + i\psi^* D_0\psi - \frac{1}{2m}|\vec{D}\psi|^2 + \frac{g}{2}|\psi|^4, \tag{3.4}$$

considerando a Lagrageana no modelo Jackiw-Pi nos moldes da hidrodinâmica de Chern-Simos [15], obtêm-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{i}{2}(\psi^* D_0\psi - \psi D_0\psi^*) \\ &- \frac{1}{2m}|\vec{D}\psi|^2 + (1-\hbar^2)\frac{1}{2m}(\overrightarrow{\nabla}|\psi|)^2 + g|\psi|^4, \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{c}A_\mu$, deste modo, escreve-se (3.7) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{i}{2}\left[\psi^*\left(\partial_0 + \frac{ie}{c}A_0\right)\psi - \psi\left(\partial_0 + \frac{ie}{c}A_0\right)\psi^*\right] \\ &- \frac{1}{2m}\left[\left(\partial^\mu - \frac{ie}{c}A^\mu\right)\psi^*\left(\partial_\mu + \frac{ie}{c}A_\mu\right)\psi\right] \\ &+ (1-\hbar^2)\frac{1}{2m}(\partial_i\psi^*\partial_i\psi) + g(\psi^*\psi\psi^*\psi), \end{aligned} \tag{3.6}$$

as equações de movimento de Euler-Lagrange [22] são obtidas a partir de

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0, \tag{3.7}$$

da equação (3.8) faz-se $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*}$, desta forma

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} = \frac{i}{2}D_0\psi - \frac{e}{2c}\psi A_0 - \frac{1}{2m}\left[-\frac{ie}{c}A^\mu(\partial_\mu\psi) + \frac{e^2}{c^2}A^\mu A_\mu\psi\right] + 2g\psi^*\psi^2, \tag{3.8}$$

fazendo a outra parte da equação (3.8)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} = -\frac{i}{2}\delta_0^\mu\psi - \frac{1}{2m}\left[(\partial^\mu\psi) + \frac{ie}{c}A^\mu\psi\right] + \frac{1}{2m}(1-\hbar^2)\delta_i^\mu(\partial_i\psi), \tag{3.9}$$

com os valores das equações (3.12) e (3.13) basta substituí-los na equação (3.8), logo

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2}D_0\psi - \frac{e}{2c}\psi A_0 - \frac{1}{2m}\left[-\frac{ie}{c}A^\mu(\partial_\mu\psi) + (\frac{e}{c})^2A^\mu A_\mu\psi\right] + 2g\psi^*\psi^2 + \frac{i}{2}\partial_\mu(\delta_0^\mu\psi) \\ &\qquad + \frac{1}{2m}\partial_\mu D^\mu\psi - \frac{1}{2m}(1-\hbar^2)\partial_\mu\delta_i^\mu(\partial_i\psi) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Operando-se $\frac{i}{2}\partial_\mu(\delta_0^\mu\psi) - \frac{e}{2c}\psi A_0 = \frac{i}{2}D_0\psi$ e fazendo $\partial_\mu\delta_i^\mu(\partial_i\psi) = \partial_i(\partial_i\psi) = \nabla^2\psi$, assim

$$\begin{aligned} &iD_0\psi + \frac{1}{2m}\left[\frac{ie}{c}A^\mu(\partial_\mu\psi) - \frac{e^2}{c^2}A^\mu A_\mu\psi\right] + 2g|\psi|^2\psi \\ &\qquad + \frac{1}{2m}\partial_\mu(\partial^\mu + \frac{ie}{c}A^\mu)\psi - \frac{1}{2m}(1-\hbar^2)\nabla^2\psi = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

sabendo-se que $\partial_\mu A^\mu = 0$ e isolando $\frac{1}{2m}$, obtém-se

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{ie}{c}A^\mu(\partial_\mu\psi) - \frac{e^2}{c^2}A^\mu A_\mu\psi + \partial_\mu\partial^\mu + \frac{ie}{c}A^\mu(\partial_\mu\psi)\right] = \frac{1}{2m}D^2\psi, \tag{3.12}$$

substituindo (3.14) em (3.15) determina-se a primeira equação de movimento de Euler-Lagrange

$$iD_0\psi + \frac{1}{2m}D^2\psi + 2g|\psi|^2\psi = \frac{1}{2m}(1-\hbar^2)\nabla^2\psi. \tag{3.13}$$

Para encontrar a segunda equação de movimento deriva-se em relação a A_μ, para facilitar, da equação (3.9) tomando apenas os termos deriváveis em A_μ, Logo

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + \frac{i}{2}\left[\psi^*\left(\partial_0 + \frac{ie}{c}A_0\right)\psi - \psi\left(\partial_0 + \frac{ie}{c}A_0\right)\psi^*\right] \\ -\frac{1}{2m}\left[\left(\partial^\mu - \frac{ie}{c}A^\mu\right)\psi^*\left(\partial_\mu + \frac{ie}{c}A_\mu\right)\psi\right],\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $\left[\left(\partial^\mu - \frac{ie}{c}A^\mu\right)\psi^*\left(\partial_\mu + \frac{ie}{c}A_\mu\right)\psi\right] = \partial^\mu\psi^*\partial_\mu\psi + \partial^\mu\psi^*(\frac{ie}{c}A_\mu\psi) - \frac{ie}{c}A^\mu\psi^*\partial_\mu\psi + \frac{e^2}{c^2}A_\mu A^\mu\psi^*\psi$, deve-se lembrar que $\frac{\partial A_\mu A^\mu}{\partial A_\mu} = 2A^\mu$ usando mais uma vez a equação de Euler-Lagrange $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A\alpha)}\right) = 0$ e desenvolvendo-se inicialmente $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \frac{k}{2}\epsilon^{\alpha\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda + \frac{i}{2}[\psi^*\psi\delta_0^\alpha\frac{ie}{c} + \psi^*\psi\delta_0^\alpha\frac{ie}{c}] - \\ \frac{1}{2m}[(\partial^\alpha\psi^*)\frac{ie}{c}\psi - (\partial^\alpha\psi)\frac{ie}{c}\psi^* + 2\frac{e^2}{c^2}A^\alpha\psi^*\psi],\end{aligned} \tag{3.15}$$

organizando

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \frac{k}{2}\epsilon^{\alpha\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda - \frac{e}{c}|\psi|^2\delta_0^\alpha - \frac{1}{2m}[(\partial^\alpha\psi^*)\frac{ie}{c}\psi - (\partial^\alpha\psi)\frac{ie}{c}\psi^* + 2\frac{e^2}{c^2}A^\alpha\psi^*\psi], \tag{3.16}$$

trabalhando-se agora, com a segunda parte da equação, Assim

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} = \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\frac{\partial(\partial_\nu A_\lambda)}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)}, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} = \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\delta_\lambda^\alpha, \tag{3.18}$$

$$\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} = \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\mu, \tag{3.19}$$

juntando os dois termos

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}\epsilon^{\alpha\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda - \frac{e}{c}|\psi|^2\delta_0^\alpha - \frac{1}{2m}[(\partial^\alpha\psi^*)\frac{ie}{c}\psi - (\partial^\alpha\psi)\frac{ie}{c}\psi^* + 2\frac{e^2}{c^2}A^\alpha\psi^*\psi] - \\ (\frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\mu) = 0,\end{aligned} \tag{3.20}$$

associando-se o primeiro termo com o ultimo da equação (3.22) e utilizando a propriedade do Levi-Civita, chega-se a

$$\frac{k}{2}\epsilon^{\alpha\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda - \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda - \frac{e}{c}|\psi|^2\delta_0^\alpha - \frac{1}{2m}[(\partial^\alpha\psi^*)\frac{ie}{c}\psi - (\partial^\alpha\psi)\frac{ie}{c}\psi^* + 2\frac{e^2}{c^2}A^\alpha\psi^*\psi] = 0, \tag{3.21}$$

ou ainda

$$k\epsilon^{\alpha\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda - \frac{e}{c}|\psi|^2\delta_0^\alpha - \frac{1}{2m}[(\partial^\alpha\psi^*)\frac{ie}{c}\psi - (\partial^\alpha\psi)\frac{ie}{c}\psi^* + 2\frac{e^2}{c^2}A^\alpha\psi^*\psi] = 0. \tag{3.22}$$

ao comparar a equação acima com a equação de Schrödinger o termo que acompanha $\frac{1}{2m}$ vai a zero, logo

$$k\epsilon^{\alpha\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda - \frac{e}{c}|\psi|^2\delta_0^\alpha = 0, \tag{3.23}$$

aplica-se na equação (3.25) os valores para $\alpha = i$ ou $\alpha = 0$, inicialmente aplica-se $\alpha = 0$, com isso

$$k\epsilon^{0\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda - \frac{e}{c}|\psi|^2\delta_0^0 = 0, \tag{3.24}$$

$$k\epsilon^{012}\partial_1 A_2 + k\epsilon^{021}\partial_2 A_1 = \frac{e}{c}|\psi|^2, \tag{3.25}$$

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{e}{kc}|\psi|^2, \tag{3.26}$$

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{e}{kc}\psi^*\psi, \tag{3.27}$$

fazendo para $\alpha = i$

$$k\epsilon^{\alpha\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda - \frac{e}{c}|\psi|^2\delta_0^\alpha - \frac{1}{2m}[(\partial^\alpha\psi^*)\frac{ie}{c}\psi - (\partial^\alpha\psi)\frac{ie}{c}\psi^* + 2\frac{e^2}{c^2}A^\alpha\psi^*\psi] = 0, \tag{3.28}$$

$$k\epsilon^{i\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda - \frac{e}{c}|\psi|^2\delta_0^i - \frac{1}{2m}[(\partial^i\psi^*)\frac{ie}{c}\psi - (\partial^i\psi)\frac{ie}{c}\psi^* + 2\frac{e^2}{c^2}A^i\psi^*\psi] = 0, \tag{3.29}$$

coloca-se $\frac{ie}{c}$ em evidência, deste modo

$$k\epsilon^{i\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda = \frac{ie}{2mc}[(\partial^i\psi^*)\psi - (\partial^i\psi)\psi^* - 2i\frac{e}{c}A^i\psi\psi^*] = 0, \tag{3.30}$$

$$k\epsilon^{i\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda = \frac{ie}{2mc}\left[\left((\partial^i\psi^*) - \frac{ie}{c}A^i\psi^*\right)\psi - \psi^*\left((\partial^i\psi) + ieA^i\psi\right)\right], \tag{3.31}$$

fazendo separadamente, $k\epsilon^{i0j}\partial_0 A_j + k\epsilon^{ij0}\partial_j A_0 = \partial_0 A_j - \partial_j A_0$ e lembrando que $D_\mu = \partial_m u + \frac{ie}{c}A_\mu$, logo determina-se a terceira equação de movimento

$$\partial_0 A_j - \partial_j A_0 = -\frac{ie}{2mck}\epsilon_{jk}[\psi^* D_k\psi - \psi D_k\psi^*], \tag{3.32}$$

lembrando que para operar corretamente o ϵ do lado esquerdo da equação é preciso simetriza-la, com isso aparece o ϵ_{jk}. Tomando as equações de movimento (3.15),(3.29) e (3.34) usa-se $\psi = \sqrt{\rho}e^{iS}$

$$iD_0(\sqrt{\rho}e^{iS}) + \frac{1}{2m}D^2(\sqrt{\rho}e^{iS}) + 2g|\psi|^2\psi = (1-\hbar^2)\frac{1}{2m}\frac{\Delta(\sqrt{\rho}e^{iS}\sqrt{\rho}e^{-iS})}{\sqrt{\rho}e^{iS}\sqrt{\rho}e^{-iS}}\sqrt{\rho}e^{iS}, \tag{3.33}$$

sendo, $\Delta(\sqrt{\rho}e^{iS}\sqrt{\rho}e^{-iS}) = \Delta\sqrt{\rho} = 0$, com esse resultado a equação (3.35) torna-se

$$iD_0(\sqrt{\rho}e^{iS}) + \frac{1}{2m}D^2(\sqrt{\rho}e^{iS}) + 2g|\psi|^2\psi = 0. \tag{3.34}$$

De acordo com o que já foi visto no capítulo anterior, utilizou-se a função de onda $\psi = \sqrt{\rho}e^{iS}$, em seguida introduziu-se a constante de Planck utilizando a função de onda $\chi = \sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}$. Para chegar-se ao modelo de JP é preciso prova que a equação (3.15) em função de ψ seja exatamente igual a equação (3.36) agora para χ

$$i\hbar(\partial_0 + \frac{ie}{\hbar c}A_0)\chi + \frac{\hbar^2}{2m}(\overrightarrow{\nabla} + \frac{ie}{\hbar c}\vec{A})^2\chi + 2g|\chi|^2\chi = 0. \tag{3.35}$$

Para provar essa equivalência usa-se a equação (3.36) que na verdade é a equação (3.15).

$$i\left(\partial_0 + \frac{ie}{c}A_0\right)\sqrt{\rho}e^{iS} + \frac{1}{2m}\left(\vec{\nabla} + \frac{ie}{c}\vec{A}\right)^2\sqrt{\rho}e^{iS} + 2g\sqrt{\rho}e^{iS}\sqrt{\rho}e^{-iS}\sqrt{\rho}e^{iS} = 0, \tag{3.36}$$

sendo

$$\left(\vec{\nabla} + \frac{ie}{c}\vec{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\nabla^2 + \frac{ie}{mc}\vec{A}\vec{\nabla} - \frac{e^2}{c^2}\vec{A}^2, \tag{3.37}$$

logo

$$\left(-\dot{S} - \frac{ie}{c}A_0\right)\sqrt{\rho}e^{iS} + \left[\frac{-1}{2m}\nabla^2 S + \frac{ie}{mc}\vec{A}\nabla S - \frac{e^2}{2mc^2}A^2\right]\sqrt{\rho}e^{iS} + 2g\rho\sqrt{\rho}e^{iS} = 0, \tag{3.38}$$

ou ainda,

$$\left(-\dot{S} - \frac{ie}{c}A_0\right) - \frac{1}{2m}(\nabla^2 S) + \frac{ie}{mc}\vec{A}\nabla S - \frac{e^2}{2mc^2}A^2 + 2g\rho = 0, \tag{3.39}$$

usando-se a equação (3.37) para $\chi = \sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}$

$$i\hbar(\partial_0 + \frac{ie}{\hbar c}A_0)\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S} + \frac{\hbar^2}{2m}(\overrightarrow{\nabla} + \frac{ie}{\hbar c}\vec{A})^2\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S} + 2g\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}\sqrt{\rho}e^{\frac{-i}{\hbar}S}\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S} = 0, \tag{3.40}$$

$$\left(-\hbar\frac{1}{\hbar}\dot{S}-\frac{e}{c}\right)\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2+\frac{2ie}{\hbar c}-\frac{e^2}{\hbar^2c^2}A^2\right)\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}+2g\rho\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}=0, \quad (3.41)$$

desenvolvendo

$$\begin{aligned}\left(-\dot{S}-\frac{e}{c}\right)\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\hbar^2}\nabla^2S\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}+\frac{ie\hbar}{mc}\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}&\\ -\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}+2g\rho\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}=0,&\end{aligned} \quad (3.42)$$

obtemos

$$\left(-\dot{S}-\frac{e}{c}\right)-\frac{1}{2m}\nabla^2S+\frac{ie\hbar}{mc}-\frac{e^2}{2mc^2}+2g\rho=0. \quad (3.43)$$

Comparando as equações (3.41) e (3.45) é possível perceber que essas transformações são equivalentes, uma vez que geram a mesma equação de movimento, logo pode-se reescrever (3.15) com (3.37).tem-se que $\chi=\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}$, $\chi^*=\sqrt{\rho}e^{\frac{-i}{\hbar}S}$, $\psi=\sqrt{\rho}e^{iS}$ e $\psi^*=\sqrt{\rho}e^{-iS}$ com essas equações, faz-se então

$$\chi\chi^*=\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}\sqrt{\rho}e^{\frac{-i}{\hbar}S}=\rho, \quad (3.44)$$

$$\psi\psi^*=\sqrt{\rho}e^{iS}\sqrt{\rho}e^{-iS}=\rho, \quad (3.45)$$

com isso é fácil ver que $\chi\chi^*=\psi\psi^*$ desta forma, tem-se

$$\partial_1A_2-\partial_2A_1=\frac{e}{kc}\chi^*\chi, \quad (3.46)$$

tomando ainda $\chi\chi^*=\psi\psi^*$ e lembrando que $D_k=\partial_k+\frac{ie}{c}A_k$, assim pode-se chegar a

$$\partial_0A_j-\partial_jA_0=\frac{-ie}{2mck}\epsilon_{jk}(\psi^*D_\psi-\psi D_k\psi^*), \quad (3.47)$$

ou ainda

$$\partial_0A_j-\partial_jA_0=-\frac{ie\hbar}{2mck}\epsilon_{jk}[\chi^*(\partial_k+\frac{ie}{\hbar c}A_k)\chi-\chi(\partial_k-\frac{ie}{\hbar c}A_k)\chi^*]. \quad (3.48)$$

Retomando a lagrangeana e a reescrevendo em termos de χ é necessário chamar atenção no fato que em $\chi=\sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\hbar}S}$ o único termo diferente em relação a $\psi=\sqrt{\rho}e^{iS}$ é o $\hbar$, desta forma fazendo as substituições de acordo com as equações expostas anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=\frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho+\frac{i\hbar}{2}[\chi^*(\partial_0+\frac{ie}{\hbar c}A_0)\chi-\chi(\partial_0-\frac{ie}{\hbar c}A_0)\chi^*]&\\ -\frac{\hbar^2}{2m}(\overrightarrow{\nabla}-\frac{ie}{\hbar c}\vec{A})\chi^*(\overrightarrow{\nabla}+\frac{ie}{\hbar c}\vec{A})\chi+g|\chi|^4.&\end{aligned} \quad (3.49)$$

Nas equações (3.37), (3.48) e (3.50) a deformação $\hbar$ é equivalente à constante de Planck e o $\hbar$ surge na equação (3.51) como um fator de normalização, no qual gera as mesmas equações de movimento que foram obtidas anteriormente(3.15) e (3.37). É importante destacar que as equações [(3.15), (3.29), (3.34)] e [(3.37), (3.48), (3.50)] admitem a mesma representação hidrodinâmica (tipo Madelung)[23]. Da equação (3.15) e de $\psi = \sqrt{\rho}e^{iS}$ obtemos a equação quântica de Hamilton Jacobi

$$i\left(\partial_0 + \frac{ie}{c}A_0\right)\sqrt{\rho}e^{iS} + \frac{1}{2m}\left(\nabla^2 + \frac{2ie}{c}\vec{A}\vec{\nabla} - \frac{e^2}{c^2}A^2\right)\sqrt{\rho}e^{iS} + 2g\rho\sqrt{\rho}e^{iS}$$
$$-\frac{1}{2m}(1-\hbar^2)\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\sqrt{\rho}e^{iS} = 0, \qquad (3.50)$$

$$i\partial_0(\sqrt{\rho}e^{iS}) - \frac{e}{c}A_0\sqrt{\rho}e^{iS} + \frac{1}{2m}\nabla^2(\sqrt{\rho}e^{iS}) + \frac{ie}{mc}\vec{A}\vec{\nabla}(\sqrt{\rho}e^{iS})$$
$$+2g\rho\sqrt{\rho}e^{iS} = \frac{1}{2m}(1-\hbar^2)\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\sqrt{\rho}e^{iS}, \qquad (3.51)$$

para facilitar desenvolve-se separadamente

$$\partial_0(\sqrt{\rho}e^{iS}) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial t}e^{iS} + i\sqrt{\rho}e^{iS}\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad (3.52)$$

e

$$\nabla(\sqrt{\rho}e^{iS}) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\nabla\rho e^{iS} + i\sqrt{\rho}e^{iS}\nabla S, \qquad (3.53)$$

e também

$$\nabla^2(\sqrt{\rho}e^{iS}) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\Delta\sqrt{\rho}e^{iS} + i^2\sqrt{\rho}e^{iS}, \qquad (3.54)$$

substituindo-se as equações (3.54), (3.55) e (3.56) na equação (3.53) e organizando os termos, chega-se em

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left[\frac{mV^2}{2} + \frac{e}{c}A_0 - 2g\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right] + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0, \qquad (3.55)$$

onde $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho V)$ (**a**) é a equação da continuidade e automaticamente ela é igual a zero. Retomando a equação (3.48) $\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{e}{kc}\chi^*\chi$ onde $\chi = \sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}$ faz-se

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{e}{kc}\sqrt{\rho}e^{\frac{-iS}{\hbar}}\sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}, \qquad (3.56)$$

efetuando os devidos calculos

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{e\rho}{kc}, \qquad (3.57)$$

Da equação (3.50) $\partial_0 A_j - \partial_j A_0 = -\frac{ie\hbar}{2mck}\epsilon_{jk}[\chi^*(\partial_k + \frac{ie}{\hbar c}A_k)\chi - \chi(\partial_k - \frac{ie}{\hbar c}A_k)\chi^*]$ substitui igualmente χ analogamente como feito anteriormente

$$\partial_0 A_j - \partial_j A_0 = -\frac{ie\hbar}{2mck}\epsilon_{jk}[\sqrt{\rho}e^{\frac{-iS}{\hbar}}(\partial_k + \frac{ie}{\hbar c}A_k)\sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}} \\ -\sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}(\partial_k - \frac{ie}{\hbar c}A_k)\sqrt{\rho}e^{\frac{-iS}{\hbar}}], \tag{3.58}$$

calculando $\partial_k(\sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}})$ temos

$$\chi = \partial_k(\sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial k}e^{\frac{iS}{\hbar}} + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}\frac{\partial S}{\partial k}e^{\frac{iS}{\hbar}}, \tag{3.59}$$

e

$$\chi* = \partial_k(\sqrt{\rho}e^{\frac{-iS}{\hbar}}) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial k}e^{\frac{-iS}{\hbar}} + \frac{-i}{\hbar}\sqrt{\rho}\frac{\partial S}{\partial k}e^{\frac{iS}{\hbar}}, \tag{3.60}$$

substituindo-se as equações (3.61) e (3.62) do lado direto da equação (3.60)

$$= [e^{\frac{-iS}{\hbar}}\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial k}e^{\frac{iS}{\hbar}} + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}e^{\frac{-iS}{\hbar}}\frac{\partial S}{\partial k}\sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}} + \rho\frac{ie}{\hbar c}A_k \\ -\sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial k}\sqrt{\rho}e^{\frac{-iS}{\hbar}} + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\rho}e^{\frac{-iS}{\hbar}} + \frac{ie\rho}{\hbar c}A_k], \tag{3.61}$$

ainda

$$\partial_0 A_j - \partial_j A_0 = \frac{-ie\hbar}{2mck}\left[\frac{i2\rho}{\hbar}(\partial_k + \frac{i}{\hbar c}A_k)\right]\epsilon_{jk}, \tag{3.62}$$

Logo

$$\partial_0 A_j - \partial_j A_0 = \frac{e\rho}{ck}\epsilon_{jk}V_k. \tag{3.63}$$

Usando (3.65) e (3.57) sabendo que a velocidade vetorial é dada por

$$\vec{V} = \frac{1}{m}\left[\vec{\nabla}S + \frac{e}{c}\vec{A}\right], \tag{3.64}$$

isolando $\vec{\nabla}S$

$$\vec{\nabla}S = m\vec{V} - \frac{e}{c}\vec{A}, \tag{3.65}$$

aplica-se $\vec{\nabla}$ na equação (3.57) e tomando o resultado e aplicando em (3.67), tem-se

$$\frac{\partial\vec{\nabla}S}{\partial t} + \frac{m}{2}2\vec{V}.\vec{\nabla}\vec{V} + \frac{e}{c}\vec{\nabla}A_0 + \vec{\nabla}\left(-2g\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) = 0, \tag{3.66}$$

usando a equação (3.65) o termo $-2g\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$=P (**b**), logo

$$m\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} - \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + m\vec{V}.\vec{\nabla}\vec{V} + \frac{e}{c}A_0 = -\vec{\nabla}P. \tag{3.67}$$

Desta forma, exclui-se completamente os potenciais vetoriais **A** em favor do campo de velocidade. Chamando atenção que o último termo é uma variável invariante de gauge (calibre) explícito. chegando-se assim, na equação de Euler para velocidade

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.(\nabla\vec{V}) = -\frac{1}{m}\vec{\nabla}P. \tag{3.68}$$

usa-se agora a equação (3.59)

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{e\rho}{kc}, \tag{3.69}$$

onde, de modo geral tem-se a seguinte definição $V_k = \frac{1}{m}(\nabla S + \frac{e}{c}A_k)$, partindo dela, isola-se A_k

$$A_k = \frac{c}{e}V_k m - \frac{e}{c}\nabla_k S, \tag{3.70}$$

pegando esse resultado e substituindo em (3.71)

$$\partial_1\left(\frac{c}{e}V_2 m - \frac{e}{c}\nabla_2 S\right) - \partial_2\left(\frac{c}{e}V_1 m - \frac{e}{c}\nabla_1 S\right) = \frac{e}{c}\rho, \tag{3.71}$$

logo, a lei de Chern-Simons / Gauss (3.59) é escrita em termos das variáveis hidrodinâmicas

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{e^2}{mkc^2}\vec{\rho}. \tag{3.72}$$

É importante ressaltar a condição posta anteriormente, que tem um significado simples de um fluido rotacional, de tal forma que em qualquer ponto do fluido com densidade (não vivas) a vorticidade local é diferente de zero. O sistema de equações (**a**), (3.70), (**b**) e (3.74) determina o fluido Madelung para o nosso modelo. Desta maneira, como o campo de velocidade visto anteriormente $\vec{V} = \frac{1}{m}(\vec{\vec{\nabla}}S + \frac{e}{c}\vec{A}_0)$ é explicitamente U(1) invariante perante gauge (calibre). Além disso, a equação de continuidade $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{V}) = 0$ do sistema anterior não é independente. Aparece como uma condição de consistência para a lei de Chern-Simons Gauss (3.74) durante a evolução temporal.como foi verificado anteriormente, diferenciando (3.74) de acordo com a variável tempo e usar a equação (3.70). Com isso, tem-se o modelo hidrodinâmico definido por duas equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} = -\dfrac{1}{m}\vec{\nabla}(-2g\rho - \dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}) \quad \textbf{(iii)} \\ \vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{e^2}{mkc^2}\rho \quad \textbf{(iv)} \end{cases}$$

O limite semiclássico é dado quando $\hbar \longrightarrow 0$, sendo dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} = -\dfrac{1}{m}\vec{\nabla}(-2g\rho) \quad (\mathbf{v}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{e^2}{mkc^2}\rho \quad (\mathbf{vi}) \end{cases}$$

A forma de onda não linear dessas equações segue diretamente do sistema (3.15), (3.29) e (3.34) e lagrangeana da Eq. (3.7) com $\hbar \longrightarrow 0$.

Capítulo 4

Velocidade quântica e fluxo estacionário

Na literatura encontra-se caso em que há uma interpretação do potencial quântico em termos da velocidade do movimento interno ou do zitterbewegung[24]. Nessa abordagem tem como ponto de partida o conceito da corrente de Pauli, fazendo-se uma decomposição da velocidade local não relativística em duas partes, uma sendo paralela e outra ortogonal ao impulso. A primeira parte determina-se fazendo $\vec{\nabla}S$, é reconhecida como a parte clássica, correspondendo à velocidade do centro de massa. Já o segundo, chamado de quântico, é a sua velocidade do movimento no centro de massa, que é o movimento de rotação interno ou o zitterbewegung de Schrodinger)citado anteriormente. Então a contribuição do potencial quântico para o lagrangeano (3.51) tem um significado físico bastante simples, que é o da energia cinética[15]. Usando-se a lagrangiana mencionada anteriormente e usando $\chi = \sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}$, logo

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla|\chi|)^2 = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^2 = \frac{mV_q^2}{2}, \tag{4.1}$$

a velocidade é definida por

$$\vec{V_q} = \frac{\vec{\nabla}\rho \times \vec{S}}{mc}, \tag{4.2}$$

tomando em especial $S_x = S_y = 0$ e $S_z = \frac{\hbar}{2}$ usando a definição do rotacional, tem-se duas componentes

$$(V_q)_x = \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial_y\rho}{\rho}, \tag{4.3}$$

$$(V_q)_y = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial_x \rho}{\rho}, \tag{4.4}$$

juntando (4.3) e (4.4) chega-se a

$$(V_q)_i = \frac{\hbar}{2m}\epsilon_{ij}\frac{\partial_j \rho}{\rho}, \tag{4.5}$$

derivando em relação ao tempo

$$(\dot{V}_q)_i = \frac{\hbar}{2m}\epsilon_{ij}\frac{\partial_j \dot{\rho}}{\rho} + \frac{\hbar}{2m}\epsilon_{ij}\frac{\partial_j \rho}{\rho^2}(-\dot{\rho}), \tag{4.6}$$

$$(\dot{V}_q)_i = \frac{\hbar}{2m}\epsilon_{ij}\frac{\partial_j \dot{\rho}}{\rho} - \frac{\hbar}{2m}\epsilon_{ij}\frac{\partial_j \rho}{\rho^2}\dot{\rho}, \tag{4.7}$$

sendo que,

$$\dot{\rho} = -\vec{\nabla}.(\rho\vec{V}), \tag{4.8}$$

desta maneira

$$(\dot{V}_q)_i = \frac{\hbar}{2m}\epsilon_{ij}[\partial_j(-\vec{\nabla}\rho\vec{V})] + \frac{\hbar}{2m}\epsilon_{ij}\frac{\partial_j \rho}{\rho^2}\vec{\nabla}(\rho\vec{V}), \tag{4.9}$$

ou ainda

$$(\dot{V}_q)_i = \frac{-\hbar}{2m}\epsilon_{ij}[\partial_j((\vec{\nabla}\rho)\vec{V} + \rho\vec{\nabla}V)] + \frac{\hbar}{2m}\epsilon_{ij}\frac{\partial_j \rho}{\rho^2}[\vec{\nabla}\rho\vec{V} + \rho\vec{\nabla}V], \tag{4.10}$$

$$\dot{V}_q + (\vec{V}.\nabla)\vec{V}_q = 0, \tag{4.11}$$

lembrando

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{V}_q) = 0, \tag{4.12}$$

no limite estacionário $\vec{\nabla}(\rho\vec{V}_q) = 0$, logo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{4.13}$$

ou ainda

$$\partial_0 \rho = 0. \tag{4.14}$$

No limite semiclássico

$$\vec{\nabla}.(\rho\vec{V}) = 0 \rightarrow \vec{V} = \pm\vec{V}_q, \tag{4.15}$$

que é a condição de velocidade. Por outro lado

$$\partial_0\vec{V} = 0. \tag{4.16}$$

Quando aplicado no sistema de equações (**iii**) e (**iv**) e usando $\frac{kg}{e^2} = \pm\frac{\hbar}{2mc^2}$, obtém-se

$$\frac{m}{2}\nabla_j(\vec{V} - \vec{V}_q)(\vec{V} + \vec{V}_q) - \frac{e^2}{kc^2}\rho\epsilon_{jk}(\vec{V} \mp \vec{V}_q)_k \mp \frac{\hbar}{2}\nabla_j[\vec{\nabla} \times (\vec{V} \mp \vec{V}_q)] = 0, \tag{4.17}$$

na qual é satisfeita por (4.15) usa-se agora

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = \frac{m\vec{V}_q^2}{2} - \frac{\hbar}{2}[\partial_1(\vec{V}_q)_2 - \partial_2(\vec{V}_q)_1], \tag{4.18}$$

isolando $\vec{V}_q$ e substituindo $\nabla \times \vec{V}_q = \pm\frac{e^2}{kmc^2}\rho$ encontra-se

$$\Delta ln\rho = \mp\frac{2e^2}{k\hbar c^2}\rho, \tag{4.19}$$

é visto que a equação de Liouville apresenta um significado equivalente a vorticidade para o fluxo quântico. A soluções desse modelo são bem conhecidas [20, 25].Fez-se apenas o mencionamento para o caso polar simétrico, para o sinal de menos. Logo

$$\rho = 4\frac{k\hbar c^2 N^2}{e^2 r^2}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^N + \left(\frac{r_0}{r}\right)^N\right]^{-2}, \tag{4.20}$$

onde obtém-se um resultado regular para $N \geq 1$ que aparece a partir da solução geral[15]

$$\rho = \alpha\frac{|\zeta'(z)|^2}{(1 + |\zeta(z)|^2)^2}, \tag{4.21}$$

quando

$$\zeta(z) = \frac{cN}{(z - z_0)^N}, z = x + iy. \tag{4.22}$$

Agora existem duas condições físicas na formulação original $(\psi, \vec{A})$, restringindo nossa solução. A partir da regularidade do potencial de calibre $\vec{A}$, ajustamos a fase de $\chi = \sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}$ visto nas equações (3.37), (3.48) e (3.50) como $\frac{S}{\hbar} = (N - 1)\theta$, sendo $\theta = tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1})$, e restrinje N para ser um inteiro para χ de valor único [15]. Mas valor único da função original $\psi = \sqrt{\rho}e^{iS}$, visto nas equações (3.15), (3.29) e (3.34) que assim requer valor inteiro para a parte do produto

$$(N - 1)\hbar = inteiro, \tag{4.23}$$

valor que para qualquer inteiro N leva a um valor inteiro do parâmetro de deformação

$$\hbar = n, \tag{4.24}$$

e como conseqüência de (4.10), encontramos a condição de quantização

$$\frac{kg}{e^2} = \pm\frac{n}{2mc^2}, (n = 1, 2, 3, ...). \tag{4.25}$$

A última relação significa que a constante de acoplamento de Chern-Simons e a força potencial quântica devem ser quantizadas isolando k

$$k = n\frac{e^2}{2gmc^2}, 1 - \hbar^2 = 1 - n^2 = (1 - n)(1 + n), \tag{4.26}$$

No final desta seção apresenta-se a formulação Lagrangeana do nosso modelo de fluido dado pelas equações (**iii**)(**iv**). Depois de excluir os potenciais vetoriais A_μ de (3.51), retoma-se então a langragiana

$$\mathcal{L} = \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{i}{2}(\psi^* D_0\psi - \psi D_0\psi^*) - \frac{1}{2m}|\vec{D}\psi|^2$$
$$+(1 - \hbar^2)\frac{1}{2m}(\overrightarrow{\nabla}|\psi|)^2 + g|\psi|^4, \tag{4.27}$$

relembrando que

$$\vec{V}_k = \frac{1}{m}[\vec{\nabla}S + \frac{e}{c}\vec{A}_k], \tag{4.28}$$

isolando-se $\vec{A}_k$ e tomando mais uma vez $\psi = \sqrt{\rho}e^{iS}$

$$\vec{A}_k = \frac{c}{e}m\vec{V}_k - \frac{c}{e}\partial_k\vec{S}, \tag{4.29}$$

fica-se então com

$$\mathcal{L} = \frac{km^2c^2}{2e^2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}V_\mu\partial_\nu V_\lambda - \rho V_0 - \rho\frac{m\vec{V}^2}{2} - \rho\frac{m\vec{V}_q^2}{2} + g\rho^2, \tag{4.30}$$

onde V_0 desempenha o papel de multiplicador de Lagrange. Finalmente, o Hamiltoniano é determinado pela lei de Chern-Simons Gauss, como

$$\mathcal{H} = \frac{km^2c^2}{2e^2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}V_\mu\partial_\nu V_\lambda - \mathcal{L}, \tag{4.31}$$

lembrando que classicamente a hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}. \tag{4.32}$$

ou seja, a equação (4.31) é semelhante a equação (4.32) se considerarmos que $\frac{km^2c^2}{2e^2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}V_\mu\partial_\nu V_\lambda = \pi\dot{\phi}$, Logo

$$\mathcal{H} = \rho V_0 + \rho\frac{m\vec{V}^2}{2} + \rho\frac{m\vec{V}_q^2}{2} - g\rho^2. \tag{4.33}$$

Tomando esse resultando e integrando $\int d^3x\mathcal{H}$, obtemos assim

$$\mathcal{H} = \int\left(\rho\frac{mV^2}{2} + \rho\frac{mV_q^2}{2} - g\rho^2\right). \tag{4.34}$$

Essa integral nos fornece uma interpretação simples como a soma das energias cinéticas dos movimentos clássico e quântico, além da energia de auto-interação. verifica-se que desaparece para o fluxo auto-dual (4.15), quando$\vec{V} = \vec{V}_q$, isso torna a equação (4.34) em

$$\mathcal{H} = \int\left(\rho mV^2 - g\rho^2\right)d^3x, \tag{4.35}$$

resultando apenas a integral do momento e um termo ao quadrado referente ao potencial, com constantes fixas como na equação $\frac{kg}{e^2} = \pm\frac{\hbar}{2mc^2}$[15].

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas futuras

Neste trabalho foi possível observar que houve a reformulação da dinâmica clássica da partícula não-relativística interagindo com o campo de calibre (gauge) abeliano como uma equação de onda não-linear com potencial quântico. Então nós consideramos deformações desta equação e encontramos dois casos dependendo do sinal de deformação. Para um dos sinais foi obtido o modelo padrão de Schrodinger com parâmetro de deformação que desempenha o papel da constante de Planck. Enquanto, para o segundo sinal, obtivemos a equação de diferenciação e anti-distorção. Especificando o campo de calibre como um termo não-linear cúbico-simétrico de Chern-Simons para a equação de Schrödinger, encontramos o limite sem dispersão do modelo de Jackiw-Pi que poderia ser útil descritivo do limite semiclássico. A deformação deste modelo é equivalente ao modelo JP padrão que representamos como hidrodinâmica rotacional do fluido do tipo Madelung. Fluxos especiais neste fluido, quando as velocidades do movimento clássico e quântico coincidem, levam à equação de Liouville admitindo configurações de vórtices. Porem, devemos sempre lembrar que vórtices compõem um grande espectro dentro de teorias planares, abelianas e não abelianas e além disso também podem ser analisados em teorias acopladas à gravitação [13]. Pode-se também aprofunda-se em estudados ligando uma interface com física fundamental através da análise dos supercondutores, perfazendo assim um campo de estudo e pesquisa rico e amplo.

Referências Bibliográficas

[1] VILENKIN, Alexander; SHELLARD, E. Paul S. **Cosmic strings and other topological defects**. Cambridge University Press, 2000.

[2] SMOLIN, Lee. Quantum fluctuations and inertia. **Physics Letters A**, v. 113, n. 8, p. 408-412, 1986.

[3] VECCHIATO, Alberto. Lagrangian Formulation of General Relativity. In: **Variational Approach to Gravity Field Theories**. Springer, Cham, 2017. p. 167-198.

[4] SCHILLER, Ralph. Quasi-classical theory of the nonspinning electron. **Physical Review**, v. 125, n. 3, p. 1100, 1962.

[5] PASHAEV, Oktay K.; LEE, Jyh-Hao. Black holes and solitons of the quantized dispersionless NLS and DNLS equations. **The ANZIAM Journal**, v. 44, n. 1, p. 73-81, 2002.

[6] SABATIER, Pierre C. Multidimensional nonlinear Schrodinger equations with exponentially confined solutions. **Inverse Problems**, v. 6, n. 5, p. L47, 1990.

[7] AUBERSON, G.; SABATIER, P. C. On a class of homogeneous nonlinear Schrödinger equations. **Journal of Mathematical Physics**, v. 35, n. 8, p. 4028-4040, 1994.

[8] BOHM, David. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of"hidden"variables. I. **Physical review**, v. 85, n. 2, p. 166, 1952.

[9] PASHAEV, Oktay K.; LEE, Jyh-Hao. Soliton resonances, black holes and Madelung fluid. **Journal of Nonlinear Mathematical Physics**, v. 8, n. sup1, p. 230-234, 2001.

[10] MARTINA, L.; PASHAEV, O. K.; SOLIANI, G. Integrable dissipative structures in the gauge theory of gravity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 14, n. 12, p. 3179, 1997.

[11] MIKHAILOV, Alexander S.; ERTL, Gerhard. **Chemical Complexity: Self-Organization Processes in Molecular Systems**. Springer, 2017.

[12] BARATA, JC A.; MALBOUISSON, Adolfo PC; NOVAES, Sergio Ferraz. Particles and Fields: Proceedings of the IXth Jorge André Swieca Summer School. In: **Particles and Fields: Proceedings of the IXth Jorge André Swieca Summer School**. 1998. p. 1-526.

[13] HOFF DA SILVA, Julio Marny. **Soluções tipo vórtex em teorias de gauge Chern-Simons-Maxwell-Higgs**. 2005.

[14] LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica**. Editora Livraria da Física, 2007.

[15] LEE, Jyh Hao; PASHAEV, Oktay K. Self-dual vortices in Chern?Simons hydrodynamics. **Theoretical and Mathematical Physics**, v. 127, n. 3, p. 779-788, 2001.

[16] NAGASAWA, Masao. Time reversal of Markov processes and relativistic quantum theory.**Chaos, Solitons and Fractals**, v. 8, n. 11, p. 1711-1772, 1997.

[17] JIN, Shan; LEVERMORE, C. David; MCLAUGHLIN, David W. The semiclassical limit of the defocusing NLS hierarchy.**Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences**, v. 52, n. 5, p. 613-654, 1999.

[18] ERCOLANI, Nicholas; MONTGOMERY, Richard. On the fluid approximation to a nonlinear Schrödinger equation.**Physics Letters A**, v. 180, n. 6, p. 402-408, 1993.

[19] SILVA, João Maria da.**Dinâmica Estocástica e Cosmologia: alguns resultados analíticos**. 2008.

[20] JACKIW, R.; PI, So-Young. Classical and quantal nonrelativistic Chern-Simons theory.**Physical Review D**, v. 42, n. 10, p. 3500, 1990.

[21] JACKIW, R.; PI, So-Young. Soliton solutions to the gauged nonlinear Schrödinger equation on the plane.**Physical Review Letters**, v. 64, n. 25, p. 2969, 1990.

[22] GREINER, Walter; REINHARDT, Joachim. **Field Quantization**. Springer Science and Business Media, 2013.

[23] MADELUNG, Erwin. Quantentheorie in hydrodynamischer Form.**Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei**, v. 40, n. 3, p. 322-326, 1927.

[24] RECAMI, Erasmo; SALESI, Giovanni. Kinematics and hydrodynamics of spinning particles.**Physical Review A**, v. 57, n. 1, p. 98, 1998.

[25] ARKADIEV, V. A.; POGREBKOV, A. K.; POLIVANOV, M. C. Closed string-like solutions of the Davey-Stewartson equation.**Inverse Problems**, v. 5, n. 1, p. L1, 1989.