



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

## **Revisitando Modelos de Inflação Híbrida**

**Mirian Custodio**

CAMPINA GRANDE

- Junho 2018 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Revisitando Modelos de Inflação Híbrida**

**Mirian Custodio**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

CAMPINA GRANDE

- Junho 2018 -

C987r Custodio, Mirian.  
Revisitando modelos de inflação híbrida / Mirian Custodio. –  
Campina Grande, 2018.  
39 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de  
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.  
"Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos;".  
Referências.

1. Defeitos topológicos. 2. Expansão acelerada. 3. Modelos de  
quintessência . 4. Parâmetros cosmológicos. 5. Campos escalares.  
I. Santos, João Rafael Lúcio dos. II. Título.

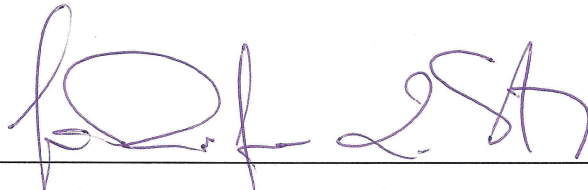
CDU 524.8(043)

**MIRIAN CUSTODIO**

**REVISITANDO MODELOS DE INFLAÇÃO HÍBRIDA**

Dissertação aprovada em 28/06/2018

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG  
(Presidente)



---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG  
(Membro interno)



---

Profª. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire  
Departamento de Física - UEPB  
(Membro externo)

*”Tudo aquilo que o homem ignora,  
não existe pra ele. Por isso o uni-  
verso de cada um se resume ao ta-  
manho seu saber.”*

Albert Einstein

# Agradecimentos

A Deus por permitir que eu chegasse até aqui e que me permite viver e ser capaz de ir em busca de meus sonhos, sendo este um deles. Ao meu orientador João Rafael L. dos Santos por todo ensino, por todo material fornecido, por toda dedicação, pelos encontros no qual baseava-se na transmissão de conhecimento, pela paciência que teve comigo ao longo desse tempo, sem o qual não seria possível desenvolver esse trabalho, meu agradecimento especial com carinho e admiração. Aos professores da Unidade Acadêmica de Física, todos são de grande importância, em particular aos que me ensinaram. Aos Professores Francisco Brito e Morgana Lígia por aceitarem fazer parte da banca, contribuindo dessa forma para um momento importante de minha carreira acadêmica. Aos funcionários da Unidade Acadêmica de Física. A Hélio secretário por sua prontidão em atender, tirar dúvidas, contribuindo assim para a chegada desse momento. A CAPES por todo suporte financeiro. Aos amigos e colegas do curso que me ajudaram ao longo desse caminho. Agradeço a minhas filhas Emanuelle, Anna Rafaele e Lara Mariana, por toda paciência nessa jornada, pelo amor e compreensão a mim dedicados. Aos demais membros da família em especial a minha irmã Beth e meus sobrinhos Felipe, Gabrielle e Anna Clara por fazerem parte de minha vida de modo tão especial. Por fim, aos amigos que fazem parte da minha vida, em especial a Flávia Sampaio e sua mãe Iolanda por todo incentivo e apoio.

*As minhas filhas Emanuelle,  
Anna Rafele e Lara Mariana.*

# Lista de Figuras

2.1	Gráfico do potencial $\phi^4$ e da solução analítica tipo Kink . . . . .	12
2.2	Gráfico do potencial $\phi^4$ invertido e no lado direito a solução analítica tipo lump . . . . .	14
2.3	O gráfico $\eta_0(x)$ caracterizando estabilidade da solução estática de um potencial do tipo $\phi^4$ . . . . .	18
2.4	O gráfico $\eta_0(x)$ caracterizando instabilidade da solução estática de um potencial do tipo $\phi^4$ invertido. . . . .	19
4.1	Parâmetro de Hubble $H(t)$ para $b = 2.0$ , $\tau = -1.8$ e $b_3 = -11.5$ . . . . .	40
4.2	Parâmetro de aceleração $\bar{q}(t)$ para $b = 2.0$ , $\tau = -1.8$ e $b_3 = -11.5$ . . . . .	41
4.3	Fator de escala $a(t)$ em escala logarítmica para $b = 2.0$ , $\tau = -1.8$ e $b_3 = -11.5$ . . . . .	41
4.4	Parâmetro da equação de estado $\omega(t)$ para $b = 2.0$ , $\tau = -1.8$ e $b_3 = -11.5$ . . . . .	42



# Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	vii
Resumo	x
Abstract	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Tópicos em Teoria Clássica de Campos Escalares Reais</b>	<b>6</b>
2.1 Modelo de um Campo Escalar Real . . . . .	6
2.2 Método BPS . . . . .	9
2.3 Carga Topológica . . . . .	10
2.4 Defeito Tipo Kink . . . . .	11
2.5 Defeito Tipo Lump . . . . .	13
2.6 Estabilidade Linear . . . . .	14
<b>3 Tópicos em Relatividade Geral</b>	<b>22</b>
3.1 Equações de Campo de Einstein . . . . .	23
3.2 Métrica FRW . . . . .	26
3.3 Tensor Energia-Momento . . . . .	28
3.4 Formalismo de Primeira Ordem . . . . .	32
<b>4 Uma nova abordagem de quintessência para modelos de dois campos</b>	<b>35</b>
4.1 Modelos de quintessência para dois campos . . . . .	36
4.2 Criando modelos efetivos de dois campos a partir de uma órbita . . . . .	37
4.3 Novos modelos e parâmetros cosmológicos . . . . .	38

<b>5 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>44</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>46</b>

# Resumo

Soluções provenientes de equações diferenciais não lineares estão presentes no contexto da teoria clássica de campos, tais soluções remetem a ondas solitárias e podem ser tanto estáveis quanto instáveis. Elas também são conhecidas como defeitos que em uma dimensão são denominadas de *kinks* ou *lumps*. Esta dissertação é fundamentada na aplicação de soluções tipo defeitos em modelos cosmológicos de quintessência, com o objetivo de descrever a fase atual de expansão do universo. No final da década de 1990 dois grupos independentes comprovaram experimentalmente que o universo encontra-se em fase expansão acelerada, o mecanismo responsável por essa expansão foi chamada de energia escura. Há diversas propostas teóricas para descrever a energia escura entre elas destacamos os modelos cosmológicos do tipo quintessência, nos quais uma ação composta por um campo escalar é acoplada a ação de Einstein-Hilbert. Tal acoplamento, repercute tanto na equação de movimento relativa a densidade de lagrangiana do campo escalar, quanto nas equações de Friedmann provenientes da minimização da ação em respeito à métrica. Conseqüentemente esse campo escalar influencia na determinação de parâmetros cosmológicos. Nesta dissertação, revisitamos o formalismo de primeira ordem para modelos de quintessência e ilustramos como este é essencial na busca por modelos de inflação híbrida analíticos. Apresentamos uma metodologia capaz de construir novas famílias de modelos de quintessência compostos por dois campos escalares. Estudamos os parâmetros cosmológicos derivados a partir de um exemplo e verificamos que eles corroboram com a descrição de diferentes fases do universo.

**Palavras chaves:** defeitos topológicos, expansão acelerada, modelos de quintessência, parâmetros cosmológicos, campos escalares.

# Abstract

Solutions which come from nonlinear differential equations are part of the classical field theory, such solutions also remember the behavior of solitary waves and can be stable or unstable. They are also known as defect and called by kinks and lumps when we deal with one-dimensional systems. This dissertation is based on the application of defect like solutions in cosmological quintessence models, such an application can be used to describe the actual phase of an expanding universe. In the end of nineties, two research groups shown independently that the universe is in an accelerated expansion phase, whose mechanism is named by dark energy. There are several theoretical proposals to describe dark energy, among them we highlight the quintessence cosmological models, where an action composed by a scalar field is coupled with the famous Einstein-Hilbert action. Such a coupling takes influence as in the equation of motion for the scalar field, as in the Friedmann equations which come from the minimization of the action is respect to the metric. Consequently, this scalar field has a direct influence in the determination of the cosmological parameters. In this dissertation, we revisited the first order formalism for quintessence models, and we shown how this formalism is essential in the search for analytical hybrid inflation models. We presented a methodology which is capable to build new families of quintessence models, formed by two scalar fields. We

studied the cosmological parameters derived from one example, and we verified that they corroborate with the description of different phases of the universe.

**Keywords:** topological defects, accelerated expansion, quintessence models, cosmological parameters, scalar fields.

# Capítulo 1

## Introdução

A existência de ondas solitárias foi relatada experimentalmente pela primeira vez por Jonh Scott Russel, em 1834 [1], em um canal que cortava as cidades escocesas de Edinburgo e Glasgow. Russel descreveu que o processo de formação da onda solitária ocorreu quando um barco puxado por cavalos ao longo do canal para repentinamente. Apesar do barco ter parado a massa de água deslocada continuava em movimento, e ao se chocar com o barco criou uma onda solitária que possuía forma arredondada e bem definida. Tal onda, conservava ao longo do canal, seu contorno e sua velocidade. As ondas observadas por Russel foram equacionadas matematicamente por Koterweg e de-Vries, por volta de 1895, e a equação de movimento que descreve estas ondas foi denominada KdV [2]. Tal oscilação ficou conhecida como sóliton (ou onda solitária), e é caracterizada como uma solução que satisfaz uma dinâmica não linear e por preservar infinitas quantidades físicas (no caso de um sóliton ideal como o da KdV).

Soluções não-lineares também estão presentes no contexto de teoria clássica de campos, que também são interpretadas como soluções solitárias e podem ser estáveis. Tais soluções são conhecidas como defeitos e em uma dimensão possuem duas configurações básicas, denominadas *kinks* e

*lumps*. Os *kinks* são defeitos que conectam duas configurações distintas de um dado modelo, e como veremos ao longo desta dissertação, são estáveis sob perturbações. Já os *lumps* são defeitos associados à uma única configuração de um dado modelo, e como abordaremos em nossas discussões, eles serão instáveis sob perturbações. Soluções tipo defeitos possuem grande aplicabilidade em diversas áreas da física, tais como física de altas energias [3, 4], cenários de mundos-brana [5], modelos cosmológicos [6, 7] e física de matéria condensada [8]. Esta dissertação é fundamentada na aplicação de soluções tipo defeito em modelos cosmológicos de quintessência.

A cosmologia estuda o universo em sua mais larga escala, e nos anos recentes tem vivido sua era de ouro de observações experimentais. Alguns exemplos de como essas observações alteraram nossa perspectiva de visualizar o universo são os dados sobre a expansão acelerada do universo [9, 10, 11], ou as medidas experimentais de ondas gravitacionais [12, 13, 14]. A descrição do universo atual é fortemente fundamentada no chamado modelo cosmológico padrão, cuja proposta tem como ponto fundamental o chamado *Big-Bang*. Outras características marcantes do universo observável são sua homogeneidade e isotropia em larga escala, que fazem parte do princípio cosmológico e que foram observadas experimentalmente via diferentes técnicas experimentais, tais como medidas precisas do diagrama de Hubble através de supernovas do tipo Ia [15] e o espectro da radiação cósmica de fundo [11].

No final dos anos 1990, dois grupos experimentais independentes denominados *Supernova Cosmology Project* e *High Redshift Supernova Team* comprovaram experimentalmente que o universo encontra-se em fase de expansão acelerada [9, 10]. Os grupos *Supernova Cosmology Project* e *High*

*Redshift Supernova Team* esperavam que o brilho de uma supernova do tipo Ia fosse maior do que seus desvios para o vermelho (redshift), sob a hipótese de uma expansão não acelerada do universo. Ao invés disso, constataram que o brilho das supernovas ficava cada vez menor, caracterizando uma expansão acelerada [9, 10, 16]. O mecanismo responsável por essa expansão foi chamado de energia escura, e observações recentes revelaram que ela corresponde a aproximadamente 70% do conteúdo de matéria do universo [11].

Há diversas propostas teóricas para descrever a energia escura, entre elas a mais simples é a adição de uma constante cosmológica às equações de Einstein da relatividade geral. Outra proposta de possível descrição consiste em modelos do tipo quintessência, na qual uma ação composta pela lagrangiana de um campo escalar é acoplada à ação de Einstein-Hilbert. Tal acoplamento, repercute tanto na equação de movimento relativa a densidade de lagrangiana do campo escalar, quanto nas equações de Friedmann, provenientes da minimização da ação de Einstein-Hilbert [17, 18]. Consequentemente, o acoplamento escalar influencia na determinação de parâmetros cosmológicos tais como: o parâmetro de Hubble, o fator de escala, o parâmetro de aceleração, a densidade do universo, a pressão do universo e o chamado parâmetro da equação de estado [17, 18].

Um ponto importante a ressaltar sobre formalismo de quintessência, é que a grande maioria das análises de modelos fica restrita a resultados numéricos devido à complexidade das equações envolvidas. Com o objetivo de explorar possíveis soluções e parâmetros cosmológicos analíticos, uma formulação de primeira ordem foi proposta por Bazeia, Gomes, Losano e Meneses [18]. Em que o campo escalar depende somente da va-



riável temporal, e uma grande vantagem, é que não é necessário realizar nenhuma aproximação na equação de movimento para obter uma solução e parâmetros cosmológicos analíticos. Conseqüentemente, evita-se regimes aproximativos como o chamado regime de rolagem lenta ou *slow-roll* [17].

O formalismo de primeira ordem de modelos de quintessência descrito acima pode ser generalizado para acoplamentos envolvendo mais de um campo escalar [17, 18]. Modelos inflacionários desse tipo são conhecidos na literatura como inflação híbrida [17, 18]. Contudo, tanto as equações de movimento quanto as equações diferenciais de primeira ordem de modelos como esses são acopladas, o que limita a classe de sistemas analiticamente solúveis. Com o intuito de obter novos tipos de modelos que resultem em novos comportamentos para os parâmetros cosmológicos, Moraes e Santos aplicaram um método de extensão de modelos compostos por um campo escalar em cenários de quintessência [19]. Essa aplicação resultou em cenários cosmológicos potencialmente interessantes, além de apresentar uma formulação capaz de gerar novos modelos de inflação híbrida mais complexos e ainda assim analíticos.

Ao longo desta dissertação, estudaremos tópicos em teoria clássica de campos e cosmologia de quintessência. Esse conteúdo será apresentado da seguinte maneira.

No Capítulo 2, abordamos um breve estudo de teoria clássica de campos escalares reais, onde descrevemos a variação da ação de uma densidade de lagrangiana composta por um campo escalar real, determinamos a equação de Euler-Lagrange para este modelo e introduzimos o chamado método BPS. Ainda nesse capítulo, estudamos o conceito de carga topológica, e também desenvolvemos a metodologia da estabilidade de campos

estáticos. Apresentamos também conceitos gerais de modelos compostos por dois campos escalares.

No Capítulo 3 expomos uma revisão sobre conceitos de cosmologia, apresentando o procedimento de minimização da ação de Einstein-Hilbert acoplada à ação de uma lagrangiana composta por um campo escalar. Tal procedimento permite encontrar as equações de campo de Einstein e a partir delas determinamos as equações de Friedmann que serão necessárias para o cálculo dos parâmetros cosmológicos. Nesse capítulo, ilustramos também como determinar a equação de movimento para o campo escalar e revisamos o formalismo de primeira ordem proposto em [18], que permite a obtenção de modelos de quintessência analíticos.

No Capítulo 4 estendemos os procedimentos adotados no Capítulo 3 para modelos de inflação híbrida, e introduzimos uma nova metodologia que nos permite construir diversos modelos de quintessência compostos por dois campos escalares que são analiticamente solúveis.

E no Capítulo 5, apresentamos as conclusões e perspectivas futuras.

## Capítulo 2

# Tópicos em Teoria Clássica de Campos Escalares Reais

Neste capítulo apresentamos o estudo de campos escalares reais para modelos de um e dois campos, no qual consideramos teorias de campos relativísticas que obedecem à métrica de Minkowski e escritas em unidades naturais. Destacamos ainda, que os modelos abordados são compostos por campos escalares com uma dimensão espacial (ou estáticos), os quais obedecem equações diferenciais de primeira e segunda ordem. Nestes modelos buscamos por soluções tipo BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Sommersfield), as quais correspondem a defeitos não-triviais com energia mínima. Abordamos também os conceitos de corrente e de carga topológica, além da definição do tensor energia momento. Finalizamos este capítulo com a análise de estabilidade das soluções quando estas estão sujeitas à pequenas perturbações.

### 2.1 Modelo de um Campo Escalar Real

Uma teoria de campos composta por um campo escalar real  $\phi$  pode ser descrita de forma padrão através de uma densidade de lagrangiana  $\mathcal{L}$

dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde  $V(\phi)$  é o potencial que corresponde à teoria. Tal densidade de lagrangiana está relacionada com a seguinte ação

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x, \quad (2.2)$$

sendo esta uma quantidade escalar.

A ação apresentada, é resultado da equação da densidade de lagrangiana sob todo o espaço-tempo. Em nossas análises, trabalhamos com teorias de campos relativísticas que obedecem a métrica de Minkowski, cujo tensor métrico é dado por  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ , para campos quadridimensionais. Além disso, nossos cálculos são descritos em unidades naturais, ou seja, tomando  $c = \hbar = 1$ . Ao variarmos a ação anterior, verificamos que (2.2) assume a forma

$$\delta S = \delta \left( \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x \right) = \int dt d^3x \delta \mathcal{L} = 0, \quad (2.3)$$

onde,

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi). \quad (2.4)$$

Assim,

$$\delta S = \int dt d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) \right] = 0. \quad (2.5)$$

Após alguns cálculos e simplificações, a equação (2.5) pode ser reescrita como:

$$\delta S = \int dt d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0. \quad (2.6)$$

Para que esta variação seja nula para qualquer região no interior do espaço-tempo, é necessário que

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.7)$$

sendo esta última denominada equação de Euler-Lagrange ou equação de movimento.

Podemos ver este procedimento de minimização em diversos livros textos [20]. O exemplo mais simples de teoria de campos consiste naquela formada por um campo escalar real  $\phi = \phi(x, t)$ , onde por simplicidade, adotamos um campo real em  $(1 + 1)$  dimensões. A ação e a densidade de lagrangiana correspondentes a esta teoria são

$$S = \int \mathcal{L} dt dx, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi), \quad (2.8)$$

onde

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \phi' = \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Substituindo  $\mathcal{L}$  na equação (2.7), teremos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.10)$$

Nosso objetivo foi determinar soluções para esta equação de movimento considerando diferentes formas do potencial  $V(\phi)$ . Para tanto, simplificaremos mais a teoria, considerando um campo estático, ou seja,  $\phi = \phi(x)$ . Essa consideração implica que a equação (2.10) assume a seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad \phi'' = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) corresponde a uma equação diferencial de segunda ordem, contudo, esta ordem pode ser reduzida através de uma integração

primeira. O procedimento de integração resume-se em multiplicar ambos os lados de (2.11) por  $\phi'$ , resultando em

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\phi'}{2} \right) = \frac{dV}{dx}, \quad (2.12)$$

logo, integrando ambos os lados da equação acima em relação a  $x$ , obtemos

$$\phi' = \pm \sqrt{2V + C}, \quad (2.13)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária de integração que tomaremos como nula a fim de gerarmos sistemas que possuam energia finita [21].

## 2.2 Método BPS

O método BPS foi proposto por (Bogomol'nyi, Prasad e Sommersfield), como podemos ver em [22, 23, 24, 25], que Este expõe como soluções que obedecem as equações diferenciais de primeira ordem, que minimizam a energia do sistema. A fórmula fundamental para ilustração do método é a densidade de energia do sistema, que no caso de campos estáticos é escrita como:

$$\rho(x) = -\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi). \quad (2.14)$$

A energia total do sistema será a integral desta densidade sob toda a dimensão espacial, ou seja,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx. \quad (2.15)$$

A equação anterior pode ser reescrita recombinação os termos do integrando a fim de completar um quadrado perfeito, resultando em

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \phi' \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm 2\phi' \sqrt{2V} \right] dx. \quad (2.16)$$

Analisando esta equação percebemos que caso o vínculo dado por:

$$\phi' = \pm\sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.17)$$

seja obedecido, a energia do sistema é minimizada e dada por:

$$E_{BPS} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \phi' \sqrt{2V(\phi)} \right) dx \right|. \quad (2.18)$$

Uma forma interessante de definir o potencial  $V(\phi)$  consiste em escrever como:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.19)$$

onde  $W_\phi$  é a derivada em relação ao campo  $\phi$  de uma função  $W(\phi)$ , que denominaremos de superpotencial. A definição anterior, permite reescrever a energia BPS como:

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\phi}{dx} W_\phi \right) dx, \quad (2.20)$$

ou ainda,

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]|. \quad (2.21)$$

Consequentemente, ao obtermos a forma da função  $W(\phi)$ , bem como a evolução espacial do campo, ou seja  $\phi = \phi(x)$ , podemos facilmente obter a energia BPS. Além disso, a equação diferencial de primeira ordem para  $\phi$  possui a forma

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi), \quad (2.22)$$

cuja solução descreve a evolução espacial do campo escalar real.

## 2.3 Carga Topológica

A definição de carga topológica  $Q_T$  tem como objetivo caracterizar defeitos topológicos e defeitos não topológicos, podendo ser determinada a partir da seguinte corrente topológica:

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W, \quad (2.23)$$

onde  $\epsilon^{\mu\nu}$  é o pseudo-tensor de Levi-Civita anti-simétrico, pela troca de  $\mu \rightarrow \nu$ . Cada um destes índices tem variação de acordo com o número de dimensões, no nosso caso,  $(1 + 1)$  dimensões implicam em  $\mu, \nu = 0, 1$  [21]. As componentes deste pseudo-tensor são  $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$  e  $\epsilon^{01} = \epsilon^{10} = 1$ . Esta assimetria informa que há uma conservação da corrente topológica, ou seja,

$$\partial_\mu J_T^\mu = 0. \quad (2.24)$$

Estabelecido este vínculo e traçando um paralelo com cargas e correntes de Noether, podemos definir a carga topológica [21] como

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} W dx = W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty)). \quad (2.25)$$

Através dessa equação percebemos que há dois tipos de soluções; uma em que  $Q_T$  é diferente de zero, solução conhecida como solução topológica (ou kinks), que são estáveis, e a segunda solução será  $Q_T$  igual a zero, chamada não-topológica (ou lumps), a qual apresenta instabilidade.

Podemos observar das equações (??) e (??), para o qual pode-se relacionar que a  $E_{BPS} = |Q_T|$  que corresponde a uma energia mínima não nula, temos uma solução estável. E para  $E_{BPS} = |Q_T|$  onde a  $E_{BPS}$  e a  $Q_T$  são nulas, temos uma instabilidade.

## 2.4 Defeito Tipo Kink

Como comentamos previamente, a existência de uma carga topológica provinda de uma corrente topológica conservada caracteriza um defeito tipo



kink. Um exemplo de defeito com esta característica é a solução associada ao modelo  $\phi^4$ , cuja densidade de lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2, \quad (2.26)$$

onde vemos que  $V$  possui dois mínimos em  $\phi = \pm 1$ , como vemos no lado esquerdo da Figura 2.1.

A equação diferencial de primeira ordem relativa a este modelo é

$$\phi' = W_\phi = (1 - \phi^2), \quad (2.27)$$

A energia BPS pode ser obtida a partir da equação anterior e do fato que nos extremos de integração  $\phi = \pm 1$  (estes valores também são conhecidos como valores de vácuo do campo e correspondem aos mínimos do potencial ilustrados no lado esquerdo da Figura (2.1)). Podemos verificar diretamente que a energia BPS e a carga topológica deste modelo são  $E_{BPS} = Q_T = 4/3$ . Além disso, a região do gráfico de  $V$  entre os vácuos de  $\phi$  é o setor topológico, ou seja, soluções neste setor sempre conectam os mínimos do potencial.

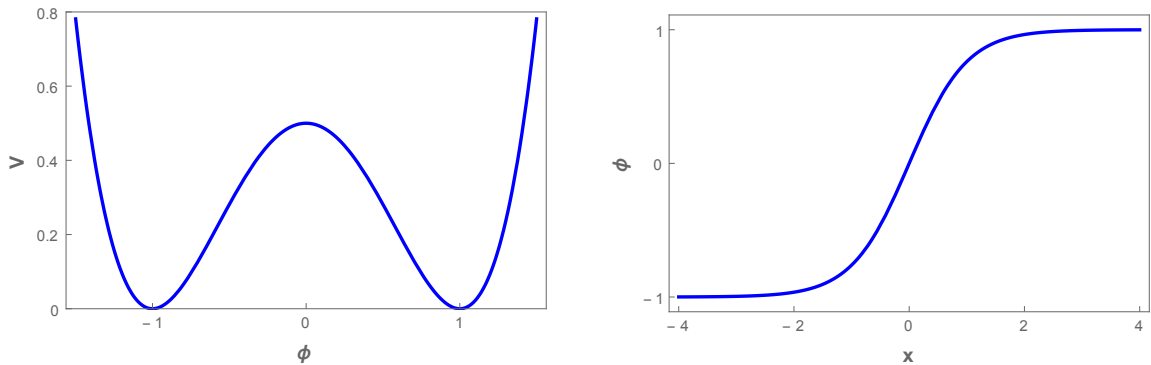


Figura 2.1: Gráfico do potencial  $\phi^4$  e da solução analítica tipo Kink

O lado esquerdo mostra o gráfico do potencial  $\phi^4$ ,  $V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2$ , já o lado direito revela a forma da solução analítica tipo kink.

com solução analítica

$$\phi(x) = \tanh(x), \quad (2.28)$$

ilustrada no lado direito da Figura 2.1. Ao integramos  $W_\phi$  em relação ao campo, obtemos

$$W = \int d\phi W_\phi = \int d\phi(1 - \phi^2). \quad (2.29)$$

Deste modo, o superpotencial  $W(\phi)$  associado a este exemplo possui a seguinte forma funcional

$$W(\phi) = \left( \phi - \frac{\phi^3}{3} \right). \quad (2.30)$$

## 2.5 Defeito Tipo Lump

Como discutido anteriormente, ao contrário do que se apresenta no defeito tipo kink, a carga topológica do defeito tipo lump é nula, caracterizando uma solução não-topológica. Um exemplo de potencial a partir do qual podemos obter soluções com estas características trata-se do modelo  $\phi^4$  invertido, cuja forma explícita é

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2), \quad (2.31)$$

apresentada no lado esquerdo da Figura 2.2.

A equação diferencial de primeira ordem correspondente tem a forma

$$\phi' = W_\phi = -\phi(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.32)$$

cuja solução é

$$\phi(x) = \operatorname{sech}(x), \quad (2.33)$$

ilustrada no lado direito da Figura 2.2.

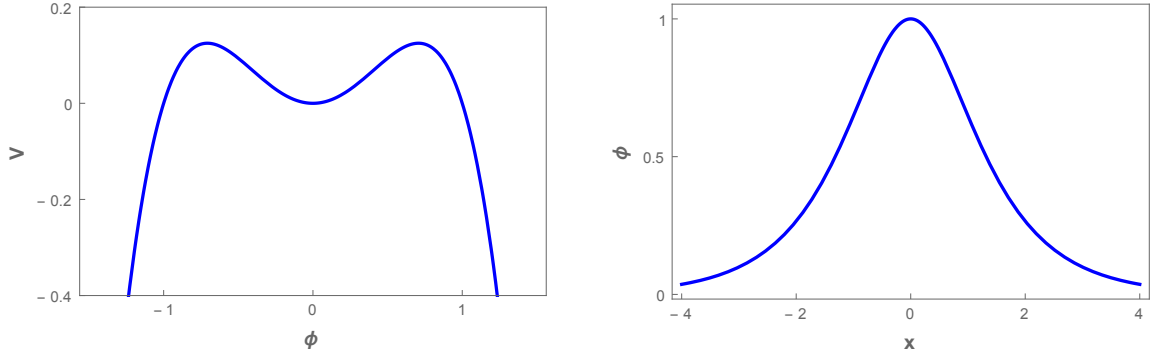


Figura 2.2: Gráfico do potencial  $\phi^4$  invertido e no lado direito a solução analítica tipo lump

Além disso, ao integramos  $W_\phi$  encontramos

$$W = \int d\phi W_\phi = \int d\phi \phi(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}(1 - \phi^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.34)$$

A equação acima permite verificar que tanto a energia BPS quanto a carga topológica para este modelo são nulas. Observamos também que o potencial  $V$  possui dois setores não-topológicos, conectando o mínimo local ( $V = 0, \phi = 0$ ) com os pontos ( $V = 0, \phi = \pm 1$ ). Sempre que houver setores como estes em modelos compostos por um campo escalar real, as soluções conectando tais pontos serão lumps.

O lado esquerdo mostra o potencial  $\phi^4$  invertido,  $V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2)$ , enquanto no lado direito observamos a solução analítica tipo lump.

## 2.6 Estabilidade Linear

O estudo da estabilidade linear informa sobre as soluções estáticas serem estáveis ou instáveis sob pequenas perturbações [26]. Esta metodologia pode ser implementada considerando que o campo escalar possui dependência espacial e temporal do tipo

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.35)$$

onde  $\eta(x, t)$  é uma pequena perturbação e  $\phi_s(x)$  é a solução estática. Substituindo a equação (2.35) na equação de movimento (2.10) encontramos

$$\ddot{\eta} - \eta'' - V_{\phi_s \phi_s} \eta = 0. \quad (2.36)$$

Aqui observamos que  $\eta$  depende tanto da forma do potencial quanto da solução estática  $\phi_s$ . Considerando o seguinte *Ansatz* para a perturbação:

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t), \quad (2.37)$$

a equação de evolução de  $\eta$  passa a ser escrita como:

$$-\eta_n'' + V_{\phi_s \phi_s} \eta_n = \omega_n^2 \eta_n. \quad (2.38)$$

Observamos que essa é uma equação tipo Schrodinger, onde  $V_{\phi_s \phi_s}$  faz o papel de um potencial efetivo. Procedendo de forma análoga a utilizada em mecânica quântica, podemos reescrever a equação anterior na notação de operadores como

$$\hat{H} \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n; \quad \hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi_s \phi_s}, \quad (2.39)$$

onde  $\omega_n^2$  são os auto-valores e  $\eta_n(x)$  são os autovetores. Além disso, podemos impor que sempre é possível encontrar um autovalor mínimo para tal equação, que denominaremos de  $\omega_0$  ou modo zero. Podemos representar a equação de autovalores em termos dos operadores  $a$  e  $a^+$ , ou seja,

$$\hat{H} = a a^+ = \left( \frac{d}{dx} + W_{\phi_s}(\phi_s) \right) \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s}(\phi_s) \right), \quad (2.40)$$

onde  $a = \left( \frac{d}{dx} + W_{\phi_s}(\phi_s) \right)$  e  $a^+ = \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s}(\phi_s) \right)$ . Como a hamiltoniana  $\hat{H}$  é  $\hat{H} \eta_n(x)$ , a equação (2.40) assume a seguinte forma

$$\hat{H} \eta_n(x) = \left( \frac{d}{dx} + W_{\phi_s}(\phi_s) \right) \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s}(\phi_s) \right) \eta_n(x), \quad (2.41)$$

desenvolvendo a equação acima, encontramos que:

$$\hat{H}\eta_n(x) = \left[ \frac{d^2}{dx^2} + (W_{\phi_s\phi_s\phi_s} + W_{\phi_s\phi_s}^2) \right] \eta_n(x), \quad (2.42)$$

que pode ser reescrita em termos dos operadores  $a$  e  $a^+$

$$\hat{H}\eta_n(x) = a a^+ \eta_n = \omega_n^2 \eta_n. \quad (2.43)$$

Em analogia com uma equação de autovalores de um sistema quântico, vamos considerar que existe um estado fundamental para este sistema, cujo autovalor é  $\omega_0^2$ .

Espectros discretos de um sistema quântico em geral podem ser parametrizados para que seus estados fundamentais possuam energia nula, como é o caso do espectro de energia do oscilador harmônico quântico, por exemplo:

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (2.44)$$

e para um estado fundamental, considerando  $n$  igual a zero, tem-se:

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega. \quad (2.45)$$

Contudo, podemos utilizar uma outra representação para o espectro

$$\tilde{E}_n = E_n - \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (2.46)$$

na equação (2.29) vamos substituir o valor da equação (2.27)

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{2} \hbar \omega - \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega = n \hbar \omega, \quad (2.47)$$

ou seja, para um valor nulo de  $n$ , teremos  $\tilde{E}_0 = 0$ .

De modo análogo podemos supor um valor de  $n$  igual a zero para a equação de auto-valores

$$a a^+ \eta_0(x) = W_{\phi_s\phi_s} \eta_0(x), \quad (2.48)$$

como

$$a a^+ \eta_0(x) = \left( -\frac{d}{dx} \eta_0 + W_{\phi_s \phi_s} \right) \eta_0(x) = 0, \quad (2.49)$$

ou seja

$$\frac{d\eta_0}{\eta_0} = W_{\phi_s \phi_s} dx = 0, \quad (2.50)$$

lembrando que definimos  $a$  operador como  $\left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s}(\phi_s) \right)$  na equação (2.41), assim

$$a\eta_0 = \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s}(\phi_s) \right) \eta_0, \quad (2.51)$$

logo

$$\frac{d\eta_0}{\eta_0} = W_{\phi_s \phi_s} dx. \quad (2.52)$$

Sabendo que a integral do lado direito da equação (2.51) é  $\log \eta_0$ , podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\eta_0 = e^{\int W_{\phi_s \phi_s} dx}. \quad (2.53)$$

Vejam os que

$$\frac{d}{dx} \log \eta_0 = \frac{1}{W_{\phi_s}} W_{\phi_s \phi_s} \phi'_{\phi_s} = W_{\phi_s \phi_s}, \quad (2.54)$$

sendo assim, a equação (2.52) pode ser apresentada na forma

$$\eta_0 = e^{\int \frac{d}{dx} \log(W_{\phi_s}) dx} = e^{\log W_{\phi_s}}, \quad (2.55)$$

ou

$$\eta_0 = W_{\phi_s}. \quad (2.56)$$

**Exemplo 1:** Para um potencial do tipo  $\phi^4$ , com  $W_{\phi_s} = 1 - \phi_s^2$ , cuja solução analítica é apresentada por  $\phi_s = \tanh(x)$ , teremos que

$$\eta_0 = 1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.57)$$

para

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega_0 t), \quad (2.58)$$

e

$$\eta(x) = \eta_0 \operatorname{sech}(x), \quad (2.59)$$

assim a solução perturbada é  $\phi(x) = \tanh(x) + \eta_0 \operatorname{sech}(x)$ , onde  $\eta_0 \ll 1$ . A equação anterior revela que  $\eta_0$  corresponde ao modo-zero de oscilação, caracterizando a estabilidade da solução estática.

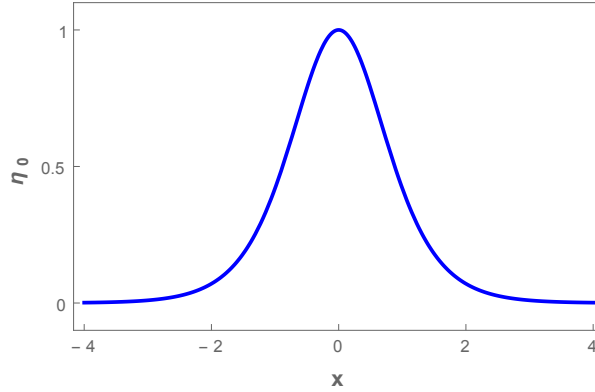


Figura 2.3: O gráfico  $\eta_0(x)$  caracterizando estabilidade da solução estática de um potencial do tipo  $\phi^4$ .

Podemos verificar que se o estado  $\eta_0$  for diferente do modo-zero de oscilação este corresponde a um estado excitado, abrindo espaço para a existência de um estado fundamental com auto-valor  $\omega_n^2 < 0$ , ou seja  $\omega_n \rightarrow i\omega_n$ . A consequência de um estado deste tipo é que

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos(i\omega_n t) = \eta_0 \left( \frac{e^{\omega_n t} + e^{-\omega_n t}}{2} \right). \quad (2.60)$$

Analisando a equação (2.60) temos que para um tempo  $t$  tendendo à infinito a perturbação  $\eta(x, t)$  também tende ao infinito o que desestabiliza a função, implicando na instabilidade de  $\phi_s(x)$ .

**Exemplo 2:** Para um potencial do tipo  $\phi^4$  invertido, onde  $W_{\phi_s} = \phi \sqrt{1 - \phi_s^2}$ , temos que  $\phi'_s = -W_{\phi_s}$  e a solução analítica desse potencial é  $\phi_s = \operatorname{sech}(x)$ , conseqüentemente

$$\eta_0 = W_{\phi_s} = \operatorname{sech}(x) \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(x)}, \quad (2.61)$$

correspondendo a um primeiro modo de oscilação. Desta forma a solução  $\phi_s(x)$  é instável.

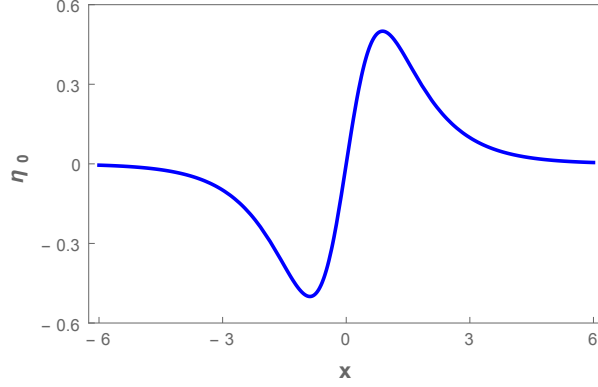


Figura 2.4: O gráfico  $\eta_0(x)$  caracterizando instabilidade da solução estática de um potencial do tipo  $\phi^4$  invertido.

Para a descrição de modelos constituídos por dois campos escalares reais, a abordagem se inicia a partir da densidade de lagrangiana, que neste caso é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (2.62)$$

onde  $V(\phi, \chi)$  é o potencial. Ao se trabalhar com campos estáticos, obtemos as equações de movimento

$$\phi'' = V_\phi; \quad \chi'' = V_\chi, \quad (2.63)$$

nas quais  $\phi = \phi(x)$  e  $\chi = \chi(x)$ . Além disso, a densidade de energia deste modelo é tal que

$$\rho(x) = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi), \quad (2.64)$$

Deste modo, a energia total do sistema é dada por

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi) \right] dx, \quad (2.65)$$



na qual redefinimos o potencial, reescrevendo-o como

$$V(\phi, \chi) = \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2}. \quad (2.66)$$

Ao substituírmos a equação (2.66) na equação (2.65), temos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2} \right] dx, \quad (2.67)$$

que pode ser expressa na forma

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2}(\phi'^2 + W_\phi^2) + \frac{1}{2}(\chi'^2 + W_\chi^2) \right] dx. \quad (2.68)$$

Completando o quadrado perfeito no integrando, encontra que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} [(\phi' \mp W_\phi)^2 + (\chi' \mp W_\chi)^2 \pm 2W_\phi \phi' \pm 2W_\chi \chi'] . \quad (2.69)$$

Caso as equações diferenciais de primeira ordem dadas por:

$$\phi' = W_\phi(\phi, \chi); \quad \chi' = W_\chi(\phi, \chi), \quad (2.70)$$

sejam obedecidas, minimizamos a energia do sistema, além disso, que implica em

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi' W_\phi + \chi' W_\chi), \quad (2.71)$$

sendo  $E_{BPS}$  a energia mínima do sistema, que é dada por:

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]|. \quad (2.72)$$

Uma maneira de buscar por soluções analíticas para o sistema de equações diferenciais apontado na equação (2.70), consiste em representar tal sistema como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}. \quad (2.73)$$

cuja solução é uma função genérica do tipo  $\phi = \phi(\chi)$ , conhecida como equação de órbita. Entretanto, a equação anterior, em geral, é não-linear e de difícil integração analítica.

A corrente topológica para modelos de dois campos pode ser definida de maneira análoga ao caso de um campo, ou seja,

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi, \chi), \quad (2.74)$$

assim, como  $J_T^\mu$  é uma quantidade conservada, podemos associá-la a uma carga topológica, cuja forma é

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx. \quad (2.75)$$

Conseqüentemente, no caso de um modelo de dois campos ficamos com

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{dx} dx = W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]. \quad (2.76)$$

Deste modo, caso  $Q_T$  seja diferente de zero temos um setor topológico, caracterizando soluções estáveis e caso  $Q_T$  seja igual a zero temos um setor não-topológico, cujas soluções são instáveis.

Podemos observar das equações (??) e (??), para o qual pode-se relacionar que a  $E_{BPS} = |Q_T|$  que corresponde a uma energia mínima não nula, temos uma solução estável. E para  $E_{BPS} = |Q_T|$  onde a  $E_{BPS}$  e a  $Q_T$  são nulas, temos uma instabilidade.

## Capítulo 3

# Tópicos em Relatividade Geral

Acreditava-se que o universo era estático em larga escala, ou seja, para as distâncias inter-galácticas ele permanecia constante. Em 1922, Alexandre Friedmann demonstrou a partir das equações de campo de Einstein que o universo sofre uma expansão acelerada. Uma maneira simples de entender esse fenômeno é incluir uma constante cosmológica, que nesse capítulo estamos considerando modelos padrão de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) descritos por campos escalares reais, ou seja, a energia escura como quintessência. Para melhor entendimento desta expansão acelerada foi introduzido as equações de campo de Einstein, começando com a dedução da ação de Einstein-Hilbert, que através de considerações chega-se as equações de campo.

Com uma métrica FRW apropriada para tal descrição, aplicada as equações de campo e de acordo com os princípios cosmológicos, chegamos as equações de Friedmann.

O tensor energia-momento considerando os campos escalares acoplados a gravitação e representando como fluido perfeito e de acordo com a conservação da energia relacionamos as equações de Friedman e a equação de movimento. Com o formalismo de primeira ordem, encontra-se o pa-

râmetro de aceleração, que como consequência permite o entendimento da expansão acelerada do universo.

### 3.1 Equações de Campo de Einstein

Introduziremos aqui as equações de campo da Relatividade Geral, essas equações foram proposta por Hilbert em 1915, [16] e são derivadas a partir da chamada ação de Einstein-Hilbert ou simplesmente ação de Hilbert. Neste capítulo demonstraremos como as equações de campo podem ser determinadas a partir da minimização da ação de Einstein-Hilbert em relação à métrica. Para tanto, partiremos da ação Einstein-Hilbert, definida por

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right], \quad (3.1)$$

onde  $R$  é o escalar de Ricci,  $\phi$  corresponde ao campo escalar,  $g$  é o determinante do tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ ,  $g = (|g_{\mu\nu}|)$  e adotaremos  $4\pi G = 1$ . Fazendo variar a ação, teremos

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \left[ \delta\sqrt{-g} \left( -\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right) + \sqrt{-g} \delta \left( -\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right) \right], \quad (3.2)$$

nessa equação assumiremos que  $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\delta\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$  a demonstração segue abaixo. Então, para uma matriz qualquer,

$$Tr(\log M) = \log(\det M), \quad (3.3)$$

se variar o traço, temos

$$\delta Tr(\log M) = \delta \log(\det M). \quad (3.4)$$

Assim,

$$Tr \left( \frac{1}{M} \delta M \right) = \frac{1}{\det M} \delta(\det M), \quad (3.5)$$

sendo  $Tr M = \sum_i M_{ii}$ , então

$$(M^{-1}\delta M)_{ij} = \sum_k (M^{-1})_{ik} \delta M_{kj}, \quad (3.6)$$

Reescrevendo a equação (3.4), temos

$$Tr(M^{-1}\delta M)_{ii} = \sum_k (M^{-1})_{ik} \delta M_{ki}. \quad (3.7)$$

logo, determinamos o vínculo

$$Tr(M^{-1}\delta M) = \sum_i \sum_k (M^{-1})_{ik} \delta M_{ki}. \quad (3.8)$$

Considerando que  $M = g^{\mu\nu}$ ,  $M^{-1} = g_{\mu\nu}$  e  $det(M) = g$  a equação (3.8) assume a seguinte forma

$$\sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = g^{-1} \delta g, \quad (3.9)$$

então

$$\delta g = g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Admitindo que a variação de  $\sqrt{-g}$ , é

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}}, \quad (3.11)$$

podemos substituí-la em (3.10) nos levando à

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

Com a equação (3.12), podemos escrever a equação (3.2) da seguinte forma:

$$\delta\mathcal{S} = \int dx^4 \left\{ -\frac{\sqrt{-g}}{4} \left( -\frac{g_{\mu\nu}}{2} R + 2 g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta \left( -\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right) \right\}, \quad (3.13)$$

onde utilizamos  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Ao tomar  $\delta R$  e  $\delta\mathcal{L}$ , temos:

$$-\frac{1}{4} \sqrt{-g} \delta R = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} [\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}], \quad (3.14)$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

Além disso, é possível mostrar que a integral do segundo termo da equação (3.14) sobre todo o espaço-tempo é nula por condições de contorno. Deste modo, substituindo as equações (3.14) e (3.15) na equação (3.13) encontra-se:

$$\delta \mathcal{S} = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4} (R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} R) + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

Segundo a Teoria da Relatividade Geral há uma relação entre a matéria e a geometria do universo, cuja forma matemática é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = K T^{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

esta relação foi postulada por Einstein em 1916, o lado direito nos informa sobre a geometria do espaço-tempo e, o lado esquerdo estabelece a relação da matéria com o tensor energia momento. Através do princípio de equivalência podemos determinar a constante de proporcionalidade  $K = \frac{8\pi G}{c^4}$ , lembrando que estamos considerando o sistema natural de unidades, ou seja,  $c = 1$ , onde  $c$  corresponde a velocidade da luz e adotaremos  $4\pi G = 1$ , assim,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 2T^{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Substituindo a equação (3.18) em (3.16), determinamos a seguinte relação

$$2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = T^{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

No caso de vácuo, ou seja, na ausência de matéria,  $T_{\mu\nu} = 0$ , resultando em

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (3.20)$$

## 3.2 Métrica FRW

De acordo com as observações de Hubble, o princípio cosmológico assume que em larga escala o universo é homogêneo e isotrópico, essa confirmação foi possível através da descoberta da radiação cósmica de fundo, feita por Arno Penzias e Robert Wilson, em 1965 [27]. A métrica apropriada para essa descrição do universo, consiste em um elemento de linha correspondente a um espaço-tempo esfericamente simétrico corrigido por um fator de escala. Tal elemento de linha possui a forma

$$dS^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.21)$$

onde  $a = a(t)$  é o fator de escala,  $k$  é constante de curvatura. Esta equação que define o elemento de linha é conhecida por métrica FRW, ou de Friedmann-Robertson-Walker. Essa métrica admite três modelos geométricos para o nosso universo, o esférico com  $k = 1$ , plano com  $k = 0$  e hiperbólico com  $k = -1$ .

Aplicando a métrica FRW às equações de campo da gravitação para obter as equações que descrevem a dinâmica do universo. Considerando o universo homogêneo e isotrópico em larga escala, utilizando o elemento de linha descrito pela equação (3.21), obtemos a matriz do tensor métrico, dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

e sua inversa, cuja forma é

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - kr^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Além disso, o tensor de curvatura, ou tensor de Riemann, é representado por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}, \quad (3.24)$$

tratando-se de um tensor de quarta ordem que não depende da métrica. O tensor de Ricci, é determinado por meio de conexão afim que obedece a relação

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3.25)$$

As simetrias associadas a esse tensor são tais que

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (3.26)$$

sendo simétrico na troca entre do primeiro e o terceiro e\ou segundo e quarto índices, e antisimétrico nas demais permutações. Podemos definir o tensor de Ricci a partir do tensor de Riemann, faremos isso contraindo os índices simétricos, de tal modo que

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

e através da métrica, a contração do tensor representa uma quantidade geométrica, o escalar de curvatura  $R$ , que por sua vez, é considerado como uma segunda contração de Riemann. Através da componente do traço da



matriz  $g^{\mu\nu}$  e da equação (3.27) podemos calcular as componentes não nulas do tensor de Ricci que são expressas por

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.28)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (3.29)$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2, \quad (3.30)$$

e

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.31)$$

A partir das relações anteriores, verifica-se que o escalar de Ricci para a métrica FRW possui a seguinte estrutura

$$R = -6 \left( \frac{\ddot{a} + \dot{a}^2 + k^2}{a^2} \right). \quad (3.32)$$

### 3.3 Tensor Energia-Momento

Por estamos trabalhando com campos escalares reais acoplados a gravitação e segundo o princípio cosmológico o universo é homogêneo e isotrópico na métrica FRW, logo podemos considerar que temos um fluido perfeito que permeia todo o universo. Tal afirmação é corroborada pela conservação do tensor energia momento. Para um sistema de coordenadas comoveis como podemos ver com mais detalhes em [28], [29] e [30], a forma do tensor energia momento é tal que

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

onde  $\rho$  corresponde a densidade de energia,  $p$  a pressão e  $u$  ao quadri-vetor velocidade do fluido. Considerando o referencial de uma partícula estacionária temos  $u^\mu = (1, 0)$ , deste modo,

$$T_{00} = (\rho + p) u_0 u_0 - p g_{00}; \quad T_{ii} = -p g_{ii}, \quad (3.34)$$

cuja representação matricial é

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 p / (1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta p \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

logo,  $T_{00} = \rho$ ,  $T_{11} = a^2 / (1 - kr^2) p$ , para  $k = 0$ , temos  $T_{11} = a^2 p$ ,  $T_{22} = a^2 r^2 p$ ,  $T_{33} = a^2 r^2 \sin^2 \theta p$  e ainda  $T = T_{\mu}^{\mu} = \rho - 3p$ , sendo esse o traço da matriz do tensor  $T_{\mu\nu}$ .

Substituindo as componentes do tensor energia-momento na equação (3.18), encontra-se as respectivas formas para as equações de Friedmann

$$R_{00} - \frac{R}{2} g_{00} = 2T_{00}; \quad R_{ii} - \frac{R}{2} g_{ii} = 2T_{ii}, \quad (3.36)$$

que após manipulações algébricas são reescritas como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}; \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p). \quad (3.37)$$

Na equação esquerda de (3.37) temos o termo  $\frac{\dot{a}}{a}$  que é denominado parâmetro de Hubble, ou seja,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , resultando em

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.38)$$

Tal parâmetro permite obter informações sobre a taxa de expansão do universo e a última equação em conjunto com o lado direito da equação (3.37) compõe as chamadas equações de Friedmann.

Relacionando as equações de Friedmann encontra-se a equação da continuidade para um fluido cosmológico

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.39)$$

Dessa expressão pode-se estabelecer uma conexão entre densidade e pressão [19], denominada equação de estado. A razão entre pressão e densidade é

mediada pelo chamado parâmetro da equação de estado, cuja forma é

$$\omega = \frac{p}{\rho}. \quad (3.40)$$

A densidade e a pressão do universo podem ser determinadas em termos de uma lagrangiana de campo escalar como aquelas vistas ao longo do Capítulo 2. No intuito de determinar  $\rho$  e  $p$ , considera-se a seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.41)$$

a qual substituindo em

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.42)$$

Deste modo, observamos diretamente que o tensor energia-momento pode ser reescrito como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right], \quad (3.43)$$

cujas formas explícitas de suas componentes são

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 - \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right], \quad (3.44)$$

$$T_{ii} = 0 + \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right], \quad (3.45)$$

as quais ao serem comparadas com a equação (3.35), resultam em

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.46)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.47)$$

Com base nesses dados, pode-se reescrever as equações de Friedman, primeiramente substituindo as equações (3.46) e (3.47) na equação (3.40), resultando no parâmetro da equação de estado

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V}. \quad (3.48)$$

Além disso, a densidade devido ao campo escalar permite reescrever a equação (3.38) como

$$H^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (3.49)$$

e, uma vez que,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , tem-se que

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \quad (3.50)$$

Como apontado na equação (3.37),

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3} (\rho_\phi + 3p_\phi), \quad (3.51)$$

assim, obtendo diretamente a relação

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{3} (\rho_\phi + 3p_\phi). \quad (3.52)$$

Deste modo, ao substituirmos a equação (3.44) na equação (3.51), encontramos

$$\dot{H} = -\frac{1}{3} (\rho_\phi + 3p_\phi) - \frac{2}{3} \rho_\phi + \frac{k}{a^2} = -\rho_\phi - p_\phi + \frac{k}{a^2}, \quad (3.53)$$

que também pode ser escrita como

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V - \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V + \frac{k}{a^2} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (3.54)$$

A ação presente na equação (3.1) pode ser revista como

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}; \quad \tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (3.55)$$

cujas minimização em relação ao campo implica em

$$\delta S = \int d^4x \delta \tilde{\mathcal{L}} = 0. \quad (3.56)$$

Esse procedimento resulta na equação de movimento

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0. \quad (3.57)$$

Dado que a forma padrão da lagrangiana  $\mathcal{L}$  é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.58)$$

a equação de movimento para o campo escalar fica com a forma

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V_\phi = 0. \quad (3.59)$$

Assim, se  $\phi = \phi(t)$ , encontra-se que:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V_\phi = \ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (3.60)$$

uma vez que,  $H = \dot{a}/a$ , a equação de movimento resultante para este campo escalar é

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (3.61)$$

### 3.4 Formalismo de Primeira Ordem

Uma possibilidade de descrever a energia escura é através da inclusão de um campo escalar, abordagem esta conhecida como modelo  $\phi$  Cold Dark Matter ( $\phi - CDM$ ) ou modelos de quintessência. Para realizar essa análise, nos baseamos nas equações de movimento associadas a dinâmica desse campo escalar que nos permite explorar modelos cosmológicos. Nas referências [31] e [18] temos uma simplificação na obtenção dessas soluções, em que os autores reduzem a ordem das equações diferenciais de movimento. Nesse primeiro momento, assumiremos uma geometria plana, ou seja,  $k = 0$ , implicando nas equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) \quad (3.62)$$

e

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (3.63)$$

Agora definindo o parâmetro de Hubble como:

$$H \equiv -W(\phi), \quad (3.64)$$

substituindo a equação (3.64) na equação (3.63), tem-se que

$$\dot{H} = -W_\phi \dot{\phi} = -\dot{\phi}^2; \quad \dot{\phi} = W_\phi, \quad (3.65)$$

onde,  $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$ . Isolando  $v$  na equação (3.62), temos:

$$\frac{2}{3} V = H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{3} \rightarrow V = \frac{3}{2} H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{2} \rightarrow V = \frac{3}{2} W^2 - \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (3.66)$$

então, podemos reescrever  $H$  em termos de

$$H = -W_\phi; \quad \dot{\phi} = W_\phi \quad (3.67)$$

e

$$V = \frac{3}{2} W^2 - \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (3.68)$$

e, estas equações devem ser consistente com a equação de movimento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (3.69)$$

com

$$\ddot{\phi} = W_{\phi\phi}\dot{\phi} = W_{\phi\phi}W_\phi \quad (3.70)$$

e

$$H = -W; \quad \dot{\phi} = W_\phi \quad (3.71)$$

dessa forma, o potencial  $V_\phi$  assume a forma

$$V_\phi = 3W W_\phi - W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (3.72)$$

ou seja, o formalismo de primeira ordem é consistente com a equação de movimento.

Para análise de modelos de quintessência, as quantidades físicas como a pressão, a densidade e a equação de estado  $\omega$ , são muito importantes e podem ser reescritas em termos do superpotencial  $W(\phi)$ , segundo

$$\rho_\phi = \frac{3}{2} W^2, \quad (3.73)$$

$$p_\phi = W_\phi^2 - \frac{3}{2} W^2 \quad (3.74)$$

e

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V}. \quad (3.75)$$

Além dos parâmetros cosmológicos anteriores, uma outra quantidade relevante para o tratamento da energia escura trata-se do chamado parâmetro de aceleração  $\bar{q}$ , cuja forma é

$$\bar{q} \equiv \frac{\ddot{a} a}{\dot{a}^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \rightarrow \bar{q} = 1 - \left( \frac{W_\phi}{W} \right)^2, \quad (3.76)$$

esse parâmetro de aceleração relaciona-se com a equação de estado através de

$$\bar{q} = -\frac{1}{2} (1 + 3\omega), \quad (3.77)$$

no caso de um universo plano. Dado que, a porção de variação observacional de  $\omega$  deve respeitar os limites,  $-1 \leq \omega \leq 1$ , conseqüentemente deveríamos ter  $-2 \leq \bar{q} \leq 1$ , onde  $\bar{q} = 1$  corresponde ao limite  $\omega = -1$ , descrevendo uma fase do universo dominada por pressão negativa. Tal fase, é consistente com as recentes observações experimentais da expansão do universo devido a energia escura.

## Capítulo 4

# Uma nova abordagem de quintessência para modelos de dois campos

Apresentamos neste capítulo modelos de quintessência compostos por dois campos escalares reais, onde utilizamos o formalismo de primeira ordem para descrever as dinâmicas do campos, e encontrarmos as equações de Friedmann que foram implementadas no cenário cosmológico. Em seguida, a partir de um método alternativo que consiste em conectar dois modelos de um campo para gerar um modelos de dois campos revelamos como é possível construir novas famílias de modelos híbridos de inflação. Analisamos os aspectos dos parâmetros cosmológicos extraídos desses modelos e apontamos como tais parâmetros descrevem certas características do universo observável.



## 4.1 Modelos de quintessencia para dois campos

A extensão do acoplamento entre a ação de Einstein-Hilbert com a ação de uma lagrangeana composta por dois campos escalares do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (4.1)$$

na qual  $\phi = \phi(t)$  e  $\chi = \chi(t)$ . Ao repetirmos os procedimentos do capítulo anterior, encontramos as equações de Friedmann

$$\frac{3}{2} H^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\dot{\chi}^2}{2} + V; \quad \dot{H} = -\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2. \quad (4.2)$$

Além disso, as equações de movimento para os campos escalares são dadas por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0; \quad \ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + V_\chi = 0. \quad (4.3)$$

O formalismo de primeira ordem pode ser implementado nesse cenário cosmológico se estabelecermos uma vez mais, quer

$$H = -W(\phi, \chi), \quad (4.4)$$

que ao ser substituída na equação para  $\dot{H}$  implica em

$$\dot{H} = -W_\phi \dot{\phi} - W_\chi \dot{\chi} = -\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2, \quad (4.5)$$

que por sua vez, estabelece as equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\phi} = W_\phi; \quad \dot{\chi} = W_\chi. \quad (4.6)$$

Podemos verificar ainda, que as componentes de densidade e de pressão do tensor energia momento possuem respectivamente as formas:

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\dot{\chi}^2}{2} + V(\phi, \chi); \quad p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\dot{\chi}^2}{2} - V(\phi, \chi), \quad (4.7)$$

a partir das quais podemos calcular o parâmetro da equação de estado, cuja relação é escrita como:

$$\omega = \frac{\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2 + 2V}. \quad (4.8)$$

## 4.2 Criando modelos efetivos de dois campos a partir de uma órbita

Modelos de quintessência dependentes de dois campos escalares têm sido alvo de diversas investigações científicas ao longo dos últimos anos. Dentre tais investigações, destacamos o trabalho de Ellis *et al.* [32], no qual os autores revelam que modelos compostos por mais de um campo escalar real permitem que a descrição da energia escura via campos escalares seja factível com dados experimentais medidos pela colaboração Planck [11]. Apesar desse aspecto atrativo relativo a quintessência composta por dois campos escalares, modelos que pressupõem a interação entre estes campos são de difícil solução analítica. No intuito de construir novos modelos analiticamente solúveis formados por dois campos escalares reais, aplicaremos o procedimento desenvolvido por Ferreira e Santos em [33].

A metodologia proposta consiste em utilizar uma órbita que conecte os campos  $\phi$  e  $\chi$ , ou seja, um mapeamento do tipo  $\phi = f(\chi)$ , para construir um modelo de dois campos efetivo a partir de um modelo que possua solução analítica [33]. Sendo assim, dado que as soluções de um modelo analítico composto por dois campos obedecem as equações diferenciais

$$\dot{\phi} = W_{\phi}(\phi, \chi); \quad \dot{\chi} = W_{\chi}(\phi, \chi), \quad (4.9)$$

podemos reescrever tais equações somando um zero, de tal forma que

$$\dot{\phi} = W_{\phi}(\phi, \chi) + c [\phi^n - f^n(\chi)] F(\phi) = \widetilde{W}_{\phi}(\phi, \chi), \quad (4.10)$$

$$\dot{\chi} = W_{\chi}(\phi, \chi) + c [\phi^n - f^n(\chi)] G(\chi) = \widetilde{W}_{\chi}(\phi, \chi), \quad (4.11)$$

onde  $c$  é uma constante real. Para que essa nova versão do modelo de dois

campos seja consistente, ela deve obedecer o vínculo

$$\widetilde{W}_{\phi\chi} = \widetilde{W}_{\chi\phi}, \quad (4.12)$$

resultando em

$$W_{\phi\chi} - cn f^{n-1} f_\chi F(\phi) = W_{\chi\phi} - cn \phi^{n-1} G(\chi), \quad (4.13)$$

revelando que

$$F(\phi) = \phi^{n-1}; \quad G(\chi) = -f^{n-1} f_\chi. \quad (4.14)$$

Deste modo, as equações de primeira ordem podem ser reescritas como

$$\dot{\phi} = W_\phi(\phi, \chi) + c [\phi^n - f(\chi)^n] \phi^{n-1}, \quad (4.15)$$

e

$$\dot{\chi} = W_\chi(\phi, \chi) - c [\phi^n - f(\chi)^n] f^{n-1} f_\chi. \quad (4.16)$$

Consequentemente, as equações diferenciais de primeira ordem acima mencionadas nos permitem derivar uma infinidade de novos modelos analíticos.

### 4.3 Novos modelos e parâmetros cosmológicos

Considerando um modelo de dois campos associado às seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\phi} = b^2 - \phi^2 + \frac{b_2}{2} (\phi^2 - \chi^2); \quad \dot{\chi} = b_1 (b^2 - \chi^2) + b_2 (b^2 - \phi\chi), \quad (4.17)$$

cujas soluções analíticas são

$$\phi(t) = \chi(t) = b \tanh(bt + \tau), \quad (4.18)$$

onde  $b_1 + b_2 = 1$ . Essas duas soluções revelam que a órbita conectando esses campos é do tipo  $\phi = f(\chi) = \chi$ . Assim, pode-se encontrar diretamente

que a função  $G(\chi)$  é tal que

$$G(\chi) = -\chi^{n-1}. \quad (4.19)$$

Desta maneira, as equações diferenciais de primeira ordem do modelo efetivo são tais que

$$\dot{\phi} = b^2 - \phi^2 + \frac{b_2}{2} (\phi^2 - \chi^2) + c (\phi^n - \chi^n) \phi, \quad (4.20)$$

e

$$\dot{\chi} = b_1 (b^2 - \chi^2) + b_2 (b^2 - \phi \chi) - c (\phi^n - \chi^n) \chi^{n-1}. \quad (4.21)$$

Para analisar as características físicas dos modelos cosmológicos, vamos considerar o caso  $n = 2$ . Esse valor específico de  $n$  faz com que as equações acima possuam as formas

$$\dot{\phi} = b^2 - \phi^2 + \frac{b_2}{2} (\phi^2 - \chi^2) + c (\phi^2 - \chi^2) \phi, \quad (4.22)$$

e

$$\dot{\chi} = b_1 (b^2 - \chi^2) + b_2 (b^2 - \phi \chi) - c (\phi^2 - \chi^2) \chi, \quad (4.23)$$

resultando no superpotencial efetivo

$$\begin{aligned} W = & b^2 \phi - \frac{\phi^3}{3} + \frac{b_2}{2} \left( \frac{\phi^3}{3} - \chi^2 \phi \right) + c \left( \frac{\phi^4}{4} - \frac{\chi^2 \phi^2}{2} \right) \\ & + b_1 \left( \left( b^2 \chi - \frac{\chi^3}{3} \right) + b_2 b^2 \chi + c \frac{\chi^4}{4} + b_3 \right), \end{aligned}$$

onde  $b_3$  é uma constante de integração. Ao substituirmos as soluções da equação (4.18) na equação (4.24), determinamos que

$$H(t) = -W = \frac{2}{3} b^3 \tanh(bt + \tau) (\tanh^2(bt + \tau) - 3) - b_3, \quad (4.24)$$

revelando que o parâmetro de Hubble é independente da constante  $c$ . As características desse parâmetro podem ser apreciadas na Figura 4.1. Neste

gráfico, observamos que  $H$  possui dois valores aproximadamente constantes, um para  $t \approx 0$  e outro quando  $t > 1,5$ . Tais cenários correspondem a períodos de expansão acelerada do universo. Pode-se observar também que há uma transição contínua e suave entre esses dois regimes de expansão.

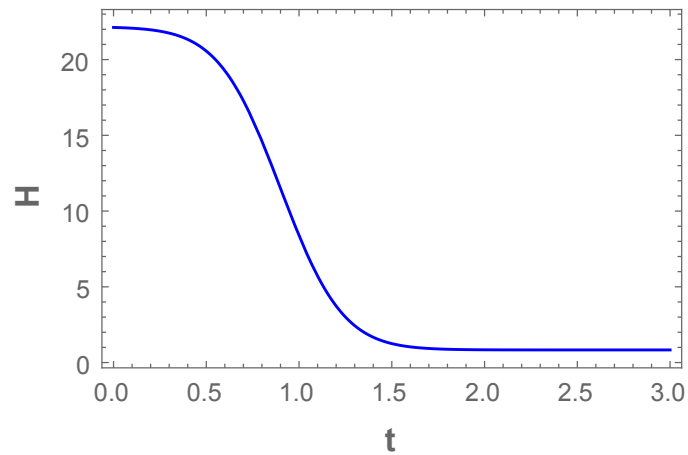


Figura 4.1: Parâmetro de Hubble  $H(t)$  para  $b = 2.0$ ,  $\tau = -1.8$  e  $b_3 = -11.5$ .

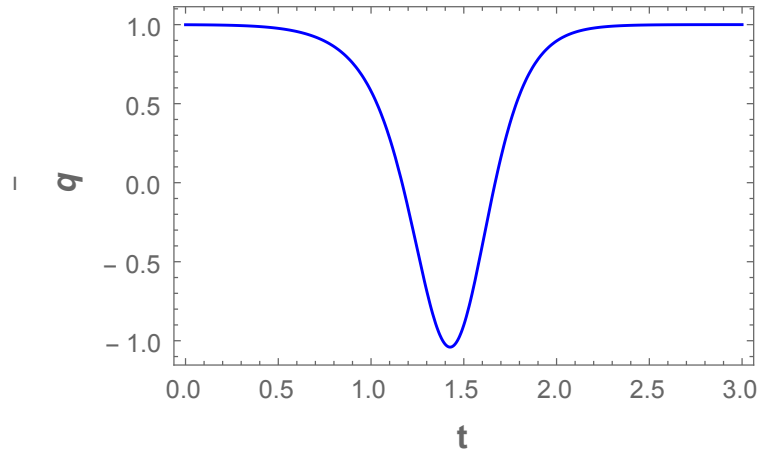


Figura 4.2: Parâmetro de aceleração  $\bar{q}(t)$  para  $b = 2.0$ ,  $\tau = -1.8$  e  $b_3 = -11.5$ .

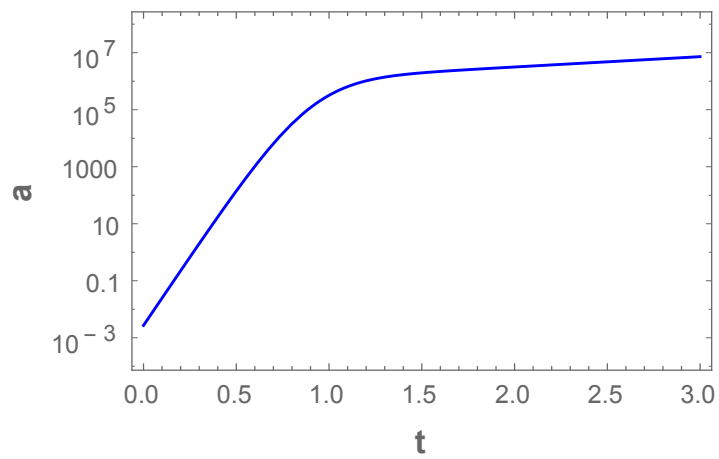


Figura 4.3: Fator de escala  $a(t)$  em escala logarítmica para  $b = 2.0$ ,  $\tau = -1.8$  e  $b_3 = -11.5$ .

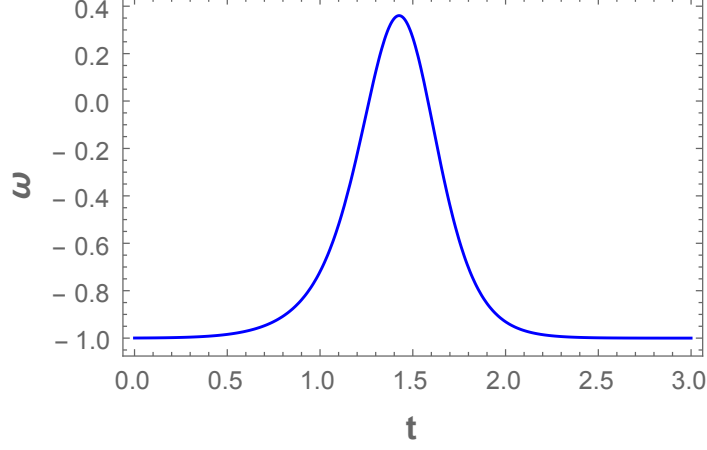


Figura 4.4: Parâmetro da equação de estado  $\omega(t)$  para  $b = 2.0$ ,  $\tau = -1.8$  e  $b_3 = -11.5$ .

Já o potencial cosmológico  $V$ , em termos dos campos, é escrito como

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{96} \left( 12b^2(\chi + \phi) + \phi^3(-2b_1 + 3c\phi - 2) + 6\chi^2\phi(b_1 - c\phi - 1) \right. \\
 & \left. - 4b_1\chi^3 + 12b_3 + 3c\chi^4 \right)^2 - \frac{1}{8} \left( -2b^2 + \phi^2(b_1 - 2c\phi + 1) + \chi^2(-b_1 + 2c\phi + 1) \right)^2 \\
 & - \frac{1}{2} \left( b^2 + \chi(\phi(b_1 - c\phi - 1) - b_1\chi + c\chi^2) \right)^2, \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

o qual depende explicitamente de termos envolvendo a constante  $c$ . Outros parâmetros relevantes calculados foram o parâmetro de aceleração, o fator de escala e também o parâmetro da equação de estado, cujas formas estão apresentadas abaixo

$$\bar{q} = 1 - \frac{18b^4 \text{sech}^4(bt + \tau)}{\left[ 3b_3 - 2b^3 \tanh(bt + \tau) (\tanh^2(bt + \tau) - 3) \right]^2}, \quad (4.26)$$

$$\log a = \frac{1}{3} \left( b^2 \text{sech}^2(bt + \tau) - 4b^2 \log(\cosh(bt + \tau)) - 3b_3t \right), \quad (4.27)$$

$$\omega = \frac{12 b^4 \cosh^2(b t + \tau)}{[b^3(3 \sinh(b t + \tau) + \sinh(3 (b t + \tau))) + 3 b_3 \cosh^3(b t + \tau)]^2} - 1. \quad (4.28)$$

Os comportamentos desses parâmetros são revelados nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4. Nessas Figuras, percebe-se comportamentos que corroboram com as características de  $H(t)$ . O parâmetro de aceleração  $\bar{q}$  inicia em +1 e faz uma transição para valores negativos, o que condiz com o regime esperado na era da matéria, quando  $\omega = 0$ . Em seguida,  $\bar{q}$  passa a ser positivo novamente, revelando um novo regime inflacionário.

A evolução do fator de escala  $a(t)$  ilustra dois períodos de expansão acelerada, um para tempos remotos, corroborando com a inflação primordial, e outro para tempos futuros, caracterizando a fase dominada pela energia escura. O mesmo comportamento é descrito pelo parâmetro da equação de estado  $\omega(t)$ . Podemos ver, que inicialmente  $\omega \approx -1$ , indicando um regime de expansão acelerada, regido por pressão negativa. Após esse regime, observa-se uma transição contínua de  $\omega$  para valores positivos, com um pico em  $\omega \approx 1/3$ , indicando a era da radiação. Em seguida,  $\omega$  passa a evoluir para uma nova era inflacionária  $\omega \approx -1$ , dominada pela energia escura.

Podemos observar que esses três parâmetros cosmológicos são independentes da constante  $c$ , deste modo, o procedimento adotado para geração de modelos cosmológicos analíticos configura uma nova alternativa de construir uma infinidade de modelos com parâmetros cosmológicos idênticos. Acredita-se que análises como cálculo perturbativo da métrica, dever implicar em vínculos para a constante  $c$ , que até agora permanece livre.



# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Ao longo desta dissertação fizemos um estudo em tópicos de teoria clássica de campos escalares reais, de teoria da relatividade geral, e de modelos de quintessência. Apresentamos nos Capítulos 2 e 3 o formalismo utilizado como base para o entendimento de soluções do tipo defeitos e também de conceitos de cosmologia e relatividade geral. No Capítulo 2, destacamos a importância do método BPS para a determinação de modelos analiticamente solúveis que possuem energia mínima e são não-triviais. Destacamos também, as condições de estabilidade dos defeitos estáticos, além disso, debatemos como a carga topológica pode caracterizar estes defeitos como topológicos e não-topológicos. Ainda no Capítulo 2, estendemos o formalismo de um campo para sistemas compostos por dois campos escalares e ilustramos as dificuldades em encontrar modelos de dois campos que sejam analiticamente solúveis.

No Capítulo 3 apresentamos uma revisão detalhada sobre a relatividade geral, com foco no acoplamento da ação de Einstein-Hilbert com a ação de uma lagrangiana composta por um campo escalar real. A análise da dinâmica do campo escalar e das equações de Friedmann permitiu observar como o campo escalar influencia diretamente no comportamento

dos parâmetros cosmológicos. Revisitamos o formalismo de primeira ordem proposto em [18], e debatemos sobre como este formalismo é essencial na busca por modelos de quintessência analíticos. A conexão marcante entre a teoria clássica de campos escalares reais e a expansão do universo, ou seja, os conteúdos dos Capítulos 2 e 3 ocorre no Capítulo 4, foi quando abordou-se um modelo de inflação híbrida que foi construído a partir da metodologia apresentada em [33]. Exemplificamos essa metodologia com um modelo analítico de dois campos. Através desse campo foi gerado parâmetros cosmológicos analíticos que corroboram com a descrição de diferentes fases do universo. Além disso, apontamos que os parâmetros cosmológicos construídos através do modelo efetivo introduzido nesta dissertação, foram independentes da constante  $c$ , sendo esta, o ingrediente fundamental do método exposto em [33]. Essa liberdade de  $c$  permite que uma família de infinitos modelos híbridos descreva o mesmo cenário cosmológico. Acredita-se que uma análise perturbativa deste modelo poderá levar a parâmetros cosmológicos dependentes de  $c$ , ou mesmo a um vínculo de origem experimental para esta constante.

Como futuras perspectivas e aplicações da metodologia apresentada, destaca-se cenários com quebra de simetria de Lorentz [34], modelos de gravitação generalizada do tipo  $F(R)$  e  $F(R, T)$  [35] e também modelos com decaimento do vácuo [36]. Deste modo, acredita-se que há uma vasta aplicabilidade do procedimento, as quais esperamos abordar e relatar em um futuro próximo.

## Referências Bibliográficas

- [1] J. S. Russel, “Report on waves”, 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 311 (1844).
- [2] D. J. Korteweg; G de-Vries, “On the chance of form of long waves advancing in a rectangular canal, ando a new type of long stationary waves”, Philos. Mag. **39**, 422 (1895).
- [3] M. Toharia; M. Trodden, “Metastable kinks in the orbifold”, Phys Rev. Lett. **100**, 041602 (2008).
- [4] S. Dulta, D. A. Steer; T. Vachaspati, “Creating kinks from particles”, Phys. Rev. Lett. **101**, 121601 (2008).
- [5] L. Randall e R. Sundrum, “An alternative to compactification”, Phys. Rev. Lett. B **83**, 4690 (1999).
- [6] L. Amendariz-Picon, T. Damour e V. F. Mukhanov, “K-Inflation”, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999).
- [7] R. J. Scherrer, “Purely Kinete K Essence as Unified Dark Matter”, Phys. Rev. Lett. **93**, 011301 (2004).
- [8] D. Walgrafe, “Spation-temporal pattern formation”, Springer-Berlag, NY, (1997).

- [9] A. G. Riess et al., “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”, *The Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998).
- [10] G. Perlmutter et al., “Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae”, *ApJ*. **517**, 565 (1999).
- [11] Ade P. A. R. *et al.* , “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters”, *Astron.Astrophys.* **594**, A13 (2016).
- [12] B. P. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration e Virgo Collaboration “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [13] B. P. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration e Virgo Collaboration “GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence”, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 241103 (2016).
- [14] B. P. Abbott et al., LIGO Scientific Collaboration e Virgo Collaboration “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral”, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 161101 (2017).
- [15] R. P. Kirshner, “Hubble’s diagram and cosmic expansion”, *PNAS* **8**, 101 (2004).
- [16] J. J. R. dos Santos, “Tópicos em Cosmologia com Campos Escalares”, Tese de Doutorado - DF - UFPB, João Pessoa, (2011).
- [17] W. H. Kinney, “Hamilton-Jacobi approach to non-slow-roll inflation”, *Phys. Rev. D* **56**, 2002 (1997).

- [18] D. Bazeia, C. B. Gomes, L. Losano e R. Menezes, “First-order formalism and dark energy”, *Phys. Lett. B* **633**, 415 (2006).
- [19] P. H. R. S. Moraes e J. R. L. Santos, “Two scalar field cosmology from coupled one-field models”, *Phys. Rev. D* **89**, 083516 (2014).
- [20] Ashok Das, “Lectures on Quantum Field Theory”, World Scientific, Singapura (2008).
- [21] J. R. L. dos Santos, “Tópicos em Defeitos Deformados e o Movimento Browniano”, Tese de Doutorado - DF - UFPB, João Pessoa, (2013).
- [22] M. K. Prasad e C. M. Sommereld, “Exact Classical Solution for the ’t Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon”, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 760 (1975).
- [23] E. B. Bogomol’nyi, “The stability of classical solutions”, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).
- [24] T. Vachaspati, “Kinks and Domain Walls An Introduction to Classical and Quantum Solitons”, Cambridge University Press, EUA (2006).
- [25] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, vol 2, Cambridge University Press, Reino Unido (2000) p. 441.
- [26] D. Bazeia Filho, “Campos escalares em ação”, Tese apresentada para concurso de Professor Titular - DF - UFPB, João Pessoa (2004).
- [27] A. A. Penzias e R. W. Wilson, *Astrophysical Journal* **142**, 419 (1965).
- [28] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology”, Massachusetts Institute of Technology, John Wiley & Sons, EUA (1972).

- [29] Ashok Das, “Lectures on Gravitation”, World Scientific, Singapura (2011).
- [30] S. M. Carrol, “Lectures Notes on General Relativity”, arXiv: gr-qc/9712019 (1997).
- [31] D. Baseia, L. Losano e J. R. L. Santos, “Kinklike Structures in Scalar Field Theories from One-Field to Two-Field Models”, Phys. Lett. A **377**, 1516 (2013).
- [32] J. Ellis , M. Fairbairn e M. Sueiro, “Rescuing Quadratic Inflation”, JCAP **1402**, 044 (2014).
- [33] D. A. Ferreira, “Defeitos topológicos em quebra de simetria de Lorentz”, Dissertação de Mestrado - UFCG, Campina Grande, (2016).
- [34] C. A. G. Almeida, M. A. Anacleto, F. A. Brito, E. Passos, e J. R. L. Santos, “Cosmology in the Universe with Distance Dependent Lorentz-Violating Background”, Advances in High Energy Physics **2017**, 5802352 (2017).
- [35] T. Harko, F. S. N. Lobo, S. Nojiri, S. D. Odintsov, “ $f(R, T)$  gravity”, Physical Review D **84**, 024020 (2011).
- [36] J. A. S. Lima, S. Basilakos, J. Sola, “Expansion history with decaying vacuum: a complete cosmological scenario”, MNRAS **431**, 923 (2013).