



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Anderson Evangelista Mateus

# **Efeitos de quebra de simetria de Lorentz no movimento browniano quântico**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

16 de março de 2020



Anderson Evangelista Mateus

## **Efeitos de quebra de simetria de Lorentz no movimento browniano quântico**

Dissertação realizada sob orientação do Dr. Marcos Antônio Anacleto, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Marcos Antônio Anacleto

Coorientador: Dr. Carlos Heitor Gomes Bessa

Campina Grande, Paraíba, Brasil

16 de março de 2020

M425e Mateus, Anderson Evangelista.  
Efeitos de quebra de simetria de Lorentz no movimento browniano quântico / Anderson Evangelista Mateus. – Campina Grande, 2020.  
89 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.  
"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto, Dr. Carlos Heitor Gomes Béssa".  
Referências.

1. Física. 2. Simetria de Lorentz. 3. Violação. 4. Movimento Browniano. I. Anacleto, Marcos Antônio. II. Béssa, Carlos Heitor Gomes. III. Título.

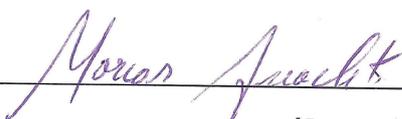
CDU 53(043)

**ANDERSON EVANGELISTA MATEUS**

**EFEITOS DE QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ NO MOVIMENTO  
BROWNIANO QUÂNTICO**

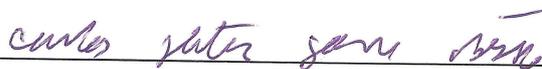
Dissertação aprovada em 18/02/2020

**BANCA EXAMINADORA**



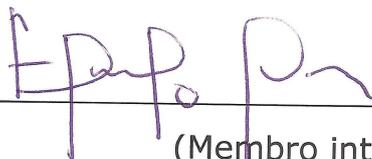
(Presidente)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



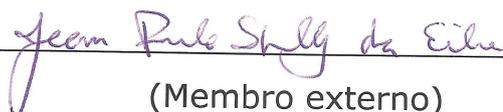
(Coorientador)

Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Bessa  
Programa de Pós-graduação em Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva  
Departamento de Física - UEPB









# Agradecimentos

- Primeiramente a Deus por me dar força todos os dias de minha vida para poder chegar até aqui.
- Ao Prof. Marcos Anacleto, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- Ao Prof. Carlos Bessa, pela colaboração que recebi durante a fase de preparação desta dissertação e por todo o empenho em ajudar mesmo, talvez, quando não fosse "obrigação" dele. Também ao Professor Eduardo pela disponibilidade em tirar dúvidas e pelas propostas de correção
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.
- A meu grande amigo Éwerton Jeferson por me auxiliar muitas vezes nas contas quando não conseguia desenvolvê-las, além, claro, por sua amizade desde os tempos de graduação.
- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo.
- Aos irmãos de grupo de oração e a minha grande amiga Andreia por suas orações .
- Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- À CAPES pelo suporte financeiro.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.



*“E não vos conformeis com este mundo,  
mas transformai-vos, renovando a vossa mente,  
a fim de poderdes discernir qual é a vontade de Deus,  
o que é bom, agradável e perfeito.  
(Bíblia De Jerusalém, Romanos 12, 2)*



# Resumo

Um das teorias que vem criando forma nos últimos anos, tanto no aspecto teórico quanto no aspecto experimental é a ideia de que a simetria de Lorentz pode ser violada no regime de altas energias, na escala de Planck. Parece que nessa escala, a física que conhecemos, baseada no Modelo Padrão e a Teoria da Relatividade, deve ser unificada em uma teoria de gravitação quântica. Desse cenário surge a possibilidade de que a simetria de Lorentz, fundamental na Física, possa ser quebrada nessa escala de energia. Uma vez que já é conhecido o mecanismo de quebra de simetria de calibre que ocorre de forma espontânea e que explica, por exemplo, a criação de massa em uma teoria de bósons, é possível que a simetria de Lorentz possa ser quebrada também de forma espontânea. Outro fenômeno que gera discussões, mas que é mais aceito dentro da comunidade é a possibilidade de que partículas que interagem com um campo quântico flutuante possam executar um movimento aleatório similar ao observado por Robert Brown no século *XIX* com grãos de pólen. Esse movimento é por vezes chamado de movimento browniano quântico (MBQ). Foi mostrado que o MBQ pode ocorrer em uma geometria plana ou em uma dependente do tempo. Sendo assim, uma boa pergunta a se fazer é qual o efeito da quebra de simetria de Lorentz para o movimento browniano quântico executado por uma partícula pontual? É essa pergunta que vamos responder nessa dissertação. Para investigar isso é necessário que as equações que descrevem esse tipo de movimento sejam modificadas introduzindo-se termos que carreguem a violação de simetria de Lorentz.

**Palavras-chave:** Simetria de Lorentz. Violação. Movimento Browniano.



# Abstract

One of the theories that has been taking shape in recent years, both in theoretical and experimental aspects, is the idea that Lorentz's symmetry can be violated in the high energy regime, on the Planck scale. It seems that on this scale, the physics we know, based on the Standard Model and the Theory of Relativity, should be unified in a theory of quantum gravity. From this scenario, the possibility arises that the Lorentz symmetry, fundamental in Physics, may be broken on this scale of energy. Since the caliber symmetry breaking mechanism that occurs spontaneously and that explains, for example, mass creation in a boson theory, is known, it is possible that Lorentz symmetry can also be broken spontaneously. On the other hand, another phenomenon that generates discussions, but which is more accepted within the community is the possibility that particles that interact with a fluctuating quantum field can perform a random movement similar to the observed by Robert Brown in the 19th century with pollen grains. This movement is sometimes called the quantum brownian motion (QBM). It has been shown that QBM can occur in a flat geometry or in a time dependent one. So, a good question to ask is what is the effect of Lorentz's symmetry breaking for the quantum brownian motion performed by a point particle? It is this question that we wish to answer in this thesis. To investigate this, it is necessary that the equations that describe this type of movement be modified by introducing terms that carry the Lorentz symmetry violation.

**Keywords:** Lorentz symmetry. Violation. Brownian Motion





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Diferença de transformação de observador (a esquerda) e de partícula (a direita). Fonte: [1] . . . . .	31
Figura 2 – gráfico $G \times \varepsilon$ da eq. (4.45) devido a contribuição da quebra de Lorentz para o caso ligado . . . . .	57
Figura 3 – gráfico $G \times \varepsilon$ da eq. (4.45) para $\varepsilon \rightarrow \infty$ . . . . .	57
Figura 4 – gráfico $G' \times \varepsilon$ da Eq. (4.72) devido a contribuição da quebra de Lorentz para o caso livre. . . . .	63
Figura 5 – gráfico $G' \times \varepsilon$ da eq. (4.72) quando $\varepsilon \rightarrow \infty$ . . . . .	64
Figura 6 – Ilustração de uma região R delimitada por uma curva C em que existem pontos de singularidades. Fonte: criada pelo autor . . . . .	74
Figura 7 – Representação gráfica dos polos e do contorno escolhido. O símbolo x representa o polo $\eta_1 = \eta_2$ que queremos contornar. Os pontos representam os polos $\eta_{1k}$ . Perceba que existem infinitos polos $\eta_{1k}$ , um para cada valor de $k$ . Fonte: criada pelo autor . . . . .	75
Figura 8 – Representação gráfica dos polos e do contorno escolhido. O círculo fechado representa o polo $\eta_2 = \eta_{1k}$ que queremos contornar. Os pontos representam os polos $\eta_{2l}$ . Perceba que existem infinitos polos $\eta_{2l}$ , um para cada valor de $l$ . Fonte: criada pelo autor . . . . .	77
Figura 9 – Ilustração da formação do condensado de Bose-Einstein. Conforme a temperatura diminui (da esquerda para a direita), as características quânticas ficam mais visíveis em escala macroscópica. Fonte: nobel-prize.org . . . . .	79



# Lista de tabelas

Tabela 1 – algumas combinações para  $p = k + m$  . . . . . 61



# Lista de abreviaturas e siglas

CBE	Condensado de Bose-Einstein
RR ou RE	Relatividade Restrita ou Especial
RG	Relatividade Geral
MP	Modelo Padrão
MB	Movimento Browniano
MQB	Movimento Browniano Quântico
MPE	Modelo Padrão Mínimo Estendido
EDQ	Eletrodinâmica quântica
TQC	Teoria Quântica de Campos



# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	23
2	VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ . . . . .	29
2.1	Violação da simetria de Lorentz: O modelo padrão mínimo estendido (MPE) . . . . .	29
2.2	Eletromagnetismo com violação de Lorentz . . . . .	33
2.3	Métrica análoga a partir do Modelo Abelião de Higgs . . . . .	36
3	MOVIMENTO BROWNIANO . . . . .	39
3.1	Movimento Browniano Clássico . . . . .	39
3.2	Movimento Browniano Quântico . . . . .	41
4	MOVIMENTO BROWNIANO COM QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ . . . . .	49
4.1	Caso ligado . . . . .	52
4.2	Caso Livre . . . . .	58
5	CONCLUSÕES . . . . .	65
	REFERÊNCIAS . . . . .	67
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>71</b>
	APÊNDICE A – TEOREMA DO RESÍDUO . . . . .	73
	APÊNDICE B – CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN . . . . .	79
	APÊNDICE C – FUNÇÃO DE DOIS PONTOS PELO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN . . . . .	81
	<b>ANEXOS</b> . . . . .	<b>85</b>
	ANEXO A – CONFIGURAÇÕES DE PLOTAGENS E SOMAS . . . . .	87
A.0.1	Caso ligado . . . . .	87
A.0.2	Caso livre . . . . .	88





# 1 Introdução

Na Física atual, as teorias mais consolidadas, no sentido de acumularem sucesso experimental e observacional, são a Relatividade Geral (RG), que é uma teoria gravitacional e o Modelo Padrão (MP) que é uma teoria que descreve as interações entre as partículas fundamentais. Ambas as teorias são fundamentadas na Relatividade Restrita.

A Relatividade Restrita, proposta por Einstein no início do século *XX* foi um marco na história da Física<sup>1</sup>. Ela colocou em cheque a teoria newtoniana, uma das mais bem sucedidas teorias até então. A física de Newton, aliada ao eletromagnetismo e a termodinâmica que, aliás, encontravam base na própria mecânica newtoniana, formavam a Física Clássica que conhecemos hoje. Tais eram seus sucessos que chegou-se, por um tempo, a pensar que todos os problemas da Física estariam elucidados.

Contudo, as descobertas, ainda no final do século *XIX* e início do século *XX* relacionadas ao mundo atômico, mostraram que era uma ilusão achar que todos os problemas físicos já estavam resolvidos. Mais do que isso, tais elas apresentaram a ideia de que a física newtoniana poderia está, de certa forma, errada<sup>2</sup>. Fato é que a mecânica newtoniana se mostra insuficiente para descrever fenômenos em escala muito pequena, no nível atômico. Além disso, quando considerada altas velocidades, essa mesma mecânica newtoniana também apresentava falhas. Einstein foi um dos primeiros a sugerir uma forma de solucionar esses problemas de incompatibilidade entre novas observações e teoria. Na realidade, ele acabou por criar uma nova teoria que geraria tanta revolução que seus resultados até hoje podem impressionar. Ao propor seus dois postulados, sobre a invariância das leis da Física e da constância da velocidade da luz independente do referencial inercial, Einstein conseguiu dar uma interpretação fantástica as já existentes transformações de Lorentz ou, como é mais utilizado na literatura especializada, *boosts*. As equações que as definem podem ser escritas, quando consideramos um movimento relativo apenas no eixo  $x$ , como:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.1)$$

Agora, o tempo não é mais uma variável qualquer, ela é uma coordenada a mais de um novo conceito para o espaço e o tempo: o espaço-tempo. Nascia a relatividade restrita (RR). Consequências dessa nova teoria, como a dilatação temporal, contração do comprimento dos corpos na direção do movimento e o efeito Doppler relativístico,

<sup>1</sup> Utilizamos Física para nos referir a Ciência e física para uma teoria específica

<sup>2</sup> Esse termo não é muito apropriado, porém será utilizado para podermos entender o surgimento da relatividade e posterior surgimento de novas teorias.

que pareceram revolucionárias na época, mostraram-se reais, comprovando o sucesso da relatividade. De fato, a partir das Eqs. (1.1), pode-se ver que as leis da Física preservam suas formas quando se muda de um referencial  $S$  para um  $S'$  que se movem relativamente um ao outro com velocidade constante  $v$ . Em outras palavras, isso significa dizer que as equações que descrevem a física são invariantes por transformações de Lorentz, ou seja, que a teoria deve se manter inalterada frente essas transformações, são invariantes frente à simetria de Lorentz.

Por outro lado, o mesmo Einstein contribuiu também com o desenvolvimento da mecânica quântica. Suas ideias relacionadas ao quantum de energia (criado por Planck em sua explicação para a radiação de corpo negro), introduzindo a ideia de que existia um pacote de energia mínimo que compunha a luz, o fóton, serviu para explicar o efeito fotoelétrico, até então sem explicação. Além disso, em seu artigo de 1905, Einstein também ofereceu mais uma contribuição ao surgimento da teoria atômica molecular ao ser um dos primeiros a propor uma explicação para o movimento browniano (Capítulo 3). A partir disso, a Física passou a se desenvolver a caminhos ainda não trilhados que quebravam de vez com a mecânica de Newton. As ideias da relatividade restrita, que tinha como base as transformações de Lorentz, aliadas a mecânica quântica que ganhava forma, deram suporte para o desenvolvimento de uma nova teoria que descreve com precisão o comportamento de partículas elementares: a teoria quântica de campos.

Durante praticamente todo o século  $XX$ , viu-se o sucesso da relatividade restrita, com sua extensão para a relatividade geral quando campos gravitacionais estão presentes, na descrição de um novo modelo cosmológico em que a gravidade está diretamente ligada a geometria do espaço-tempo. Também viu-se o sucesso da mecânica quântica, aliada a relatividade restrita que culminou com o desenvolvimento da teoria quântica de campos e do modelos padrão que previu a existência do bóson de Higgs, detectado em 2012. Porém, como se sabe, nossas teorias científicas possuem um limite de validade. Ou seja, existe uma classe de fenômenos que estariam dentro de um domínio de descrição das teorias atuais. Um possível limite para essas teorias é a chamada escala de Planck. Para se ter uma ideia (ver a referência [1]), o comprimento de Planck,  $l_P$ , possui uma ordem de grandeza de  $10^{-35}m$ . Isso significa uma energia da ordem de  $10^{19}GeV$  (energia de Planck,  $E_P$ ). O LHC (Large Hadron Collider), acelerador de partículas mais potente em operação, opera investigando fenômenos da ordem de comprimento de  $10^{-19}m$ . Poderíamos esperar, então, que para uma ordem de grandeza comparáveis a escala de Planck, uma nova física também surgisse, uma física de altas energias que estaria fora de nosso atual acesso experimental e fora do domínio da relatividade e do modelo padrão, sendo essas, casos limites dessa nova teoria. Da mesma forma que foi necessário passar da mecânica newtoniana para a relatividade e para a mecânica quântica, seria plausível ponderar que também seja necessário sair dessas últimas para uma nova teoria dentro da escala de Planck.

O fato de uma nova física possivelmente surgir na escala de Planck levam os físicos a tentar unificar a física quântica, representada pelo modelo padrão e que engloba três das principais forças da natureza (nuclear fraca, forte e eletromagnética), e a relatividade geral que descreve a quarta força fundamental da natureza, a gravidade. Essa união sugere uma teoria quântica da gravitação. Na relatividade geral, a gravidade está diretamente relacionada a estrutura do espaço-tempo. Já uma teoria quântica baseia-se na quantização de grandezas. Unir essas duas teorias implicaria em uma quantização da gravidade e, portanto, do próprio espaço-tempo. Ai surgem os problemas, uma vez que nenhuma teoria até o presente momento conseguiu essa união de forma confiável e que fossem capazes de passar pelo teste experimental. Contudo, vários modelos são propostos, como a *teoria das cordas*, que concebe os blocos fundamentais não como partículas, mas como estruturas extensas unidimensionais semelhantes a cordas, ou outras como *gravitação quântica de laços* [2], etc. Todas, contudo tem em comum o fato que violam algum aspecto da relatividade restrita [1].

Se a quantização da gravidade e, portanto, do espaço-tempo implica em uma nova física em altas energias, poderia-se esperar que aspectos fundamentais às teorias das quais provém esses problemas (relatividade geral e mecânica quântica) possam ser modificados, assim como ocorreu com a física newtoniana. Dentro desse contexto, o próprio conceito de espaço-tempo que é modificado com o desenvolvimento da relatividade restrita<sup>3</sup>, pode ser radicalmente mudado na escala de Planck. Estando a invariância de Lorentz, conceito que surge naturalmente das transformações de Lorentz da relatividade restrita, intrinsecamente ligada ao conceito de espaço-tempo a suposição de que esse espaço-tempo muda na escala de Planck sugere uma possível alteração em nosso entendimento da invariância de Lorentz. Desse pensamento surge a ideia da quebra da simetria de Lorentz.

Um dos primeiros a propor uma teoria efetiva para a quebra de simetria de Lorentz (VL) foi Alan Kostelecky em 1989 [3]. Junto com seus colaboradores, eles desenvolveram um modelo que estende o modelo padrão em uma nova teoria que introduz possíveis formas para a violação da simetria de Lorentz no espaço-tempo. No modelo padrão mínimo estendido (MPE), todos os setores que descrevem as interações entre partículas fundamentais, são corrigidos por coeficientes/parâmetros que possuem valores pequenos que introduzem a quebra de simetria e que podem ser ajustados conforme os requisitos da teoria. Além disso modelos de experimentos para a detecção da violação de simetria de Lorentz foram desenvolvidos pelos mesmos autores. Apesar de não terem mostrado resultados positivos no sentido de comprovação da existência da violação de tal simetria, tais experimentos tem se mostrado como novos testes da teoria da relatividade, além de possibilitar uma estipulação para os valores dos coeficientes violadores de Lorentz de forma que o modelo padrão estendido seja condizente com as observações.

---

<sup>3</sup> Lembre-se que na física de Newton tínhamos espaço e tempo separados

Por outro lado, o movimento browniano quântico (MQB) é um fenômeno mais aceito pela comunidade científica (apesar de alguns questionamentos [4], [5], [6], [7]) e também é uma previsão bem recente, do fim do século *XX*. O fenômeno clássico é conhecido desde meados do século *XIX*, sendo Einstein um dos responsáveis por sua explicação em 1905, como já dito. No fenômeno quântico, um campo flutuante induz o movimento irregular de uma partícula. A partícula teste possui uma dispersão de velocidade diferente de zero devido as flutuações quânticas do vácuo na presença de um campo (eletromagnético ou escalar) quantizado. Essa partícula pode estar imersa numa geometria plana na presença de placas refletoras ou com topologia não trivial [8]. Em uma geometria dependente do tempo, como a geometria de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), tal partícula também pode executar um movimento aleatório com uma dispersão de velocidade não nula que surge devido a dependência temporal da geometria[4].

Apesar dos resultados dessas teorias proporem uma física em uma escala experimental de difícil acesso, até então, os estudos com modelos análogos desenvolvidos nos últimos anos podem ser uma promissora forma de testar dessas teorias de forma experimental. Os análogos desenvolvidos com superfluidos tem se mostrado como modelos de laboratórios concretos para teste de teoria quântica de campos e também para a relatividade geral, além de se mostrarem também como potenciais formas de se obter lições de grande relevância no caminho para uma teoria da gravidade quântica [9]. O mais conhecido, utiliza ondas sonoras se propagando em um fluxo de fluido supersônico para criar um análogo de um buraco negro, um “buraco mudo” que acaba por se mostrar como um bom modelo experimental para geometrias curvas, servindo de laboratório para testes, como por exemplo da radiação Hawking [10]. Outro sistema físico, ainda em estudo, mas que se mostra como bom sistema para desenvolvimento de modelos em que se pode fazer analogias, é o condensado de Bose-Einstein (Apêndice B). Nesses sistemas, geometrias curvas e dependentes do tempo, como a geometria de Friedmann-Robertson-Walker, podem ser criadas para testes de teorias já conhecidas e novas.

Uma vez que várias frentes já investigam efeitos de quebra de simetria de Lorentz, propoemos aqui uma investigação de como esses efeitos apareceriam em partículas que executam movimento browniano quântico. Nossa investigação se torna relevante quando consideramos que a violação de simetria de Lorentz prova no espaço-tempo uma anisotropia, que poderia, a principio provocar um efeito semelhante ao MBQ. Pensando em uma possível medida desses fenômeno, investigamos esses efeitos em um condensado de Bose-Einstein que é, a grosso modo, uma fase da matéria formada por bósons que, estando em uma temperatura muito baixa, próxima ao zero absoluto, permite que os efeitos quânticos sejam mais evidentes nos átomos que compõem o condensado, se comportando como um fluido quântico. Assim, apresentamos aqui uma maneira de se investigar a quebra de simetria de Lorentz e que pode ser, em princípio medida através de um modelo análogo de um condensado de Bose-Einstein.

Sendo assim, nessa dissertação mostramos no Capítulo 2 a ideia geral de uma teoria que quebra a simetria de Lorentz. No Capítulo 3 introduzimos o conceito de movimento browniano quântico e apresentamos um formalismo para analisar esse fenômeno via um modelo análogo da geometria de FRW. No Capítulo 4 mostramos os resultados provenientes de nossa investigação sobre os efeitos causados por uma violação de simetria em partículas se movendo em uma geometria análoga à descrita no Capítulo 3.



## 2 Violação da Invariância de Lorentz

Nesse capítulo, vamos tratar da quebra de simetria de Lorentz (VL) ou violação da invariância de Lorentz. Mostraremos um pouco da ideia de como o formalismo que sugere essa violação surge dentro do contexto do modelo padrão além de apresentar um exemplo concreto de como essa teoria pode modificar o eletromagnetismo conhecido.

### 2.1 Violação da simetria de Lorentz: O modelo padrão mínimo estendido (MPE)

A busca pela violação de Lorentz é uma tarefa difícil do ponto de vista experimental em relação ao nosso atual nível de precisão dos experimentos. Contudo, a ideia de que essa violação aconteça é bastante interessante, pois pode implicar em uma nova física em um domínio pouco explorado e até mesmo nunca acessado por teorias atuais.

Vários são os modelos propostos para tentar descrever essa nova teoria. Contudo, como já argumentado, ela deve, em certos limites, retomar os resultados obtidos pela relatividade geral e o modelo padrão. Sabendo hoje do sucesso experimental de ambas teorias, é coerente então partir delas para, mais especificamente, do MP, para descrever uma que englobe a violação de simetria de Lorentz [1]. Como já sabemos, sistemas físicos podem ser descritos através de uma lagrangeana. Suponha então que queremos construir uma lagrangeana que seja composta por uma parte que englobe a física conhecida até então mais uma parte que traga em si essa quebra de simetria. Seria razoável escrever [1]:

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{MP} + \mathcal{L}_{RG} + \mathcal{L}_{VL}. \quad (2.1)$$

Essa lagrangeana seria, então uma teoria mais completa. O termo  $\mathcal{L}_{MP}$  representa a lagrangeana do modelo padrão,  $\mathcal{L}_{RG}$  corresponde ao termo da relatividade geral e  $\mathcal{L}_{VL}$  são os termos que incorporam a quebra de simetria. A soma  $\mathcal{L}_{MP} + \mathcal{L}_{RG}$  deve ser invariante por transformações de Lorentz e os efeitos de  $\mathcal{L}_{VL}$  devem ser bem menores do que os de  $\mathcal{L}_{MP}$  e  $\mathcal{L}_{RG}$ . Ou seja, qualquer modificação/extensão do MP ou da RG deve se apresentar como correções tão pequenas que não podem ser detectadas por nossos atuais experimentos. Além disso, em certos limites de validade, essas correções, por serem pequenas, podem ser desprezadas, retomando a teoria conhecida. Na Eq. (2.1), o termo  $\mathcal{L}_{VL}$ , que incorpora a quebra de simetria de Lorentz, deve, a partir desse argumento, possuir coeficientes não determinados que são muito pequenos, ou seja, a própria estrutura de  $\mathcal{L}_{VL}$  deve ser bem pequena, caso contrário, provavelmente, já se teria detectado violações de Lorentz. Na construção de uma teoria efetiva que incorpore tais correções é necessário assumir que, mesmo sendo pequenos, esses termos existem.

Contudo, o que se tem hoje é uma proposta de extensão do MP que não leva em conta a RG. O modelo padrão mínimo estendido (do inglês, Standard Model Extension) proposto por Alan Kostelecky e D. Colladay é a teoria que incorpora todos os possíveis termos que possam quebrar a simetria de Lorentz ([1], [12], [13], [14]) dentro do MP. Em geral, podemos escrever a lagrangeana do modelo padrão mínimo estendido (MPE) como uma soma de termos dos setores fermiônicos, bosônicos, de gauge, etc, em que cada setor apresenta os termos de correção:

$$\mathcal{L}_{MPE} = \mathcal{L}'_{f\acute{e}rmi\acute{o}ns} + \mathcal{L}'_{b\acute{o}s\acute{o}ns} + \mathcal{L}'_{gauge} + \dots \quad (2.2)$$

onde,  $\mathcal{L}'_{f\acute{e}rmi\acute{o}ns} = \mathcal{L}_{f\acute{e}rmi\acute{o}ns} + \mathcal{L}_{VL}$  e assim por diante. A lagrangeana modificada  $\mathcal{L}'_{f\acute{e}rmi\acute{o}ns}$  seria composta pela parte conhecida  $\mathcal{L}_{f\acute{e}rmi\acute{o}ns}$  mais os termos que introduzem a VL,  $\mathcal{L}_{VL}$ .

Mesmo no MP, existe a ideia de que um grupo de simetria pode ser quebrada de forma espontânea. Como argumentado por [1], essa quebra espontânea envolve a quebra da simetria de calibre (ou de gauge). Nesse mecanismo, a existência de um campo de Higgs induz a quebra de simetria. Esse mecanismo explica a produção de massa de alguns tipos de bósons. Além disso, o campo de Higgs esta intrinsecamente ligado a existência do bóson de Higgs, previsão do MP que foi descoberto em 2012. Dessa forma, a ideia de que a simetria de Lorentz pode ser quebrada de forma espontânea encontra suporte nesse mecanismo de quebra de simetria de calibre. A ideia básica é que a violação espontânea de Lorentz poderia ocorrer em uma teoria covariante subjacente de Lorentz na escala de Planck [12]. Basicamente, poderíamos supor que campos tensoriais (vetores por exemplo) realizam quebra de simetria espontânea de Lorentz semelhante a quebra de simetria de calibre resultante do campo de Higgs. Esses campos tensoriais (campo de fundo) poderiam definir direções preferenciais no espaço-tempo, violando a invariância de Lorentz de forma espontânea. Seria, portanto, razoável supor que os coeficientes indeterminados de  $\mathcal{L}_{VL}$  sejam tensores.

Outro ponto importante a ser observado diz respeito as transformações de partícula e observador. Basicamente, nas transformações de observador, o sistema de eixos (sistema de referência) é rotacionado enquanto o sistema físico em estudo se mantém parado. Para esse tipo de transformação, ou seja, em que há uma mudança de sistema de referência (ver Fig. 1), a física deve se manter inalterada, uma vez que a Relatividade Restrita impõe que as leis da física são as mesmas em todos os sistemas referenciais inerciais. Dessa forma, os termos que incorporam a violação de simetria de Lorentz devem aparecer frente as transformações tipo partícula, ou seja, quando o sistema de referência se mantém parado enquanto que o sistema físico (uma partícula por exemplo) é girado em um mesmo ângulo de uma transformação de observador, só que no sentido inverso. Para que isso aconteça, citamos o mesmo argumento defendido por [1]. A lagrangeana que incorpora a quebra de simetria de Lorentz,  $\mathcal{L}_{VL}$  deve se manter invariante da mesma forma que uma lagrangeana se mantém invariante na RR, ou seja, os tensores devem estar com todos os



índices contraídos de forma covariante. Sendo assim, um dos possíveis termos para  $\mathcal{L}_{VL}$  é escrever algo do tipo:

$$\mathcal{L}_{VL} \sim k^\mu \mathcal{O}_\mu(\phi, \psi, A, \dots), \quad (2.3)$$

com  $\mathcal{O}_\mu(\phi, \psi, A, \dots)$  representando uma expressão de campos físicos (campos escalares, espinoriais, vetoriais...). Adotaremos índices gregos variando de 0 a 3 ( $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) e os índices latinos variando de 1 a 3 ( $i, j, \dots = 1, 2, 3$ ), em que  $x^0 = t$  e  $x^i = (x, y, z)$ . Tomaremos ainda a assinatura  $(- + + +)$ .

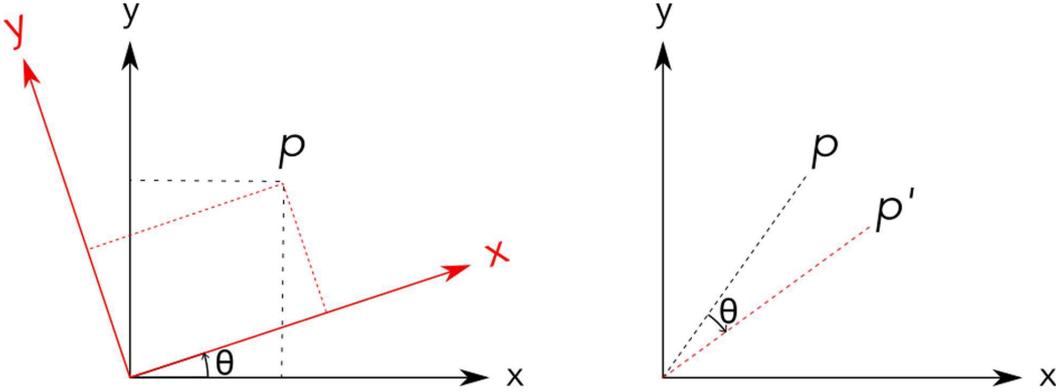


Figura 1 – Diferença de transformação de observador (a esquerda) e de partícula (a direita).  
Fonte: [1]

Voltemos ao cenário do SME. Por exemplo, para o setor de férmions de Dirac de spin  $\frac{1}{2}$ , a lagrangeana que quebra a simetria de Lorentz é dada por ([12], [13], [14]):

$$\mathcal{L}_{f\acute{e}rmions} = \frac{1}{2} i \bar{\psi} \Gamma^\nu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi - \bar{\psi} M \psi, \quad (2.4)$$

onde as correções se encontram na massa e nas matrizes de Dirac, respectivamente

$$M := m + a_\mu \gamma^\mu + b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + \frac{1}{2} H^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

e

$$\Gamma^\nu = \gamma^\nu + c^{\mu\nu} \gamma_\mu + d^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\mu + e^\nu + i f^\nu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu\nu} \sigma_{\lambda\mu}, \quad (2.6)$$

em que  $\psi$  designa um campo espinorial (a barra significa complexo conjugado),  $m$  é a massa para férmions que é considerada nesse caso como diferente de zero. Os primeiros termos nas duas equações são os termos usuais de uma teoria para férmions. Os parâmetros  $a_\mu, b_\mu, c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}, e_\mu, f_\mu, g_{\lambda\mu\nu}$  e  $H^{\mu\nu}$  são reais e introduzem a quebra de simetria de Lorentz. Além disso, os coeficientes  $a_\mu, b_\mu$  e  $H^{\mu\nu}$  tem dimensão de massa enquanto os outros coeficientes não tem dimensão,  $c_{\mu\nu}$  e  $d_{\mu\nu}$  são considerados com traço nulo,  $g_{\lambda\mu\nu}$  anti-simétricos em seus dois primeiros índices e  $H_{\mu\nu}$  anti-simétricos [15]. Segundo [15] essa lagrangeana serve como um modelo para férmion em uma situação potencialmente realista em que a extensão do modelo padrão surge como o limite de baixa energia da violação

espontânea de Lorentz em uma teoria fundamental na escala de Planck. Alguns desses fatores podem, contudo, serem eliminados em uma redefinição de campo sem alterar, no entanto, a física ([12], [15]).

As matrizes  $\gamma^\mu$  bem como  $\gamma_5\gamma^\mu$  e  $\sigma^{\mu\nu}$  possuem propriedades convencionais das matrizes de Dirac, ou seja, preservam uma álgebra que gera a álgebra de Clifford, em que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu},$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (2.7)$$

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Para o setor de bósons, a langrangiana que traz os termos com quebra de simetria de Lorentz para um campo massivo é dada por:

$$\mathcal{L}_{bósons} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}k_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi, \quad (2.8)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar,  $m$  é a massa e  $k_{\mu\nu}$  é um tensor constante para a quebra de simetria de Lorentz. Esse tensor pode ser representado em forma de uma matriz quadrática formada por coeficientes reais e adimensionais. Em 1 + 1 dimensões do espaço-tempo, a forma matricial desse tensor é dada por [16]:

$$k_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Novamente, se  $k_{\mu\nu} = 0$ , retomamos a teoria usual para bósons. De fato, esse modelo será essencial em nossa discussão mais adiante sobre os efeitos da violação da quebra de simetria de Lorentz no movimento browniano quântico (Capítulo 3). Uma vez que  $k_{\mu\nu} = 0$ , recuperamos resultados conhecidos.

Na eletrodinâmica quântica (QED) o modelo estendido que traz a quebra de simetria, para o setor de fótons, é dado pela seguinte lagrangeana [14]

$$\mathcal{L}_{fóton} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\kappa\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}A^\lambda F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (2.10)$$

aqui,  $F_{\mu\nu}$  é o tensor de campo eletromagnético,  $A^\lambda$  é o quadri-potencial e  $j^\mu$  a quadri-corrente. Os coeficientes  $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$  e  $(k_{AF})^\kappa$  introduzem a quebra de simetria na teoria. O tensor  $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ , possui 19 componentes independentes e pode ser dividido em duas partes, uma contendo 10 componentes, semelhante ao tensor de Weyl na RG e outra com 9 componentes análogo ao tensor de Ricci sem traço [13]. De forma mais simples, esses coeficientes podem ser considerados como constantes, preservando a conservação de energia e de momento [14].

Estamos apresentando esse modelo para exemplificar uma situação em que a quebra de simetria pode influenciar em uma teoria já consolidada como o eletromagnetismo. Vamos apresentar um exemplo de como a teoria que descreve ondas eletromagnéticas se propagando no vácuo pode ser modificada. É possível prever alguns fenômenos que podem ocorrer e que possam a ser um dia detectados, como uma comprovação da existência da quebra de simetria de Lorentz.

É importante ressaltar que todos esses modelos aqui apresentados preservam a estrutura de calibre usual do modelo padrão  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  [12], onde  $SU(3)$  é o grupo de calibre de interação forte e  $SU(2) \times U(1)$  o grupo de calibre de interação eletrofraca.

## 2.2 Eletromagnetismo com violação de Lorentz

Antes de qualquer coisa, imaginemos ondas luminosas (ondas eletromagnéticas) se propagando no vácuo. Partiremos do pressuposto de que a quebra de simetria realmente ocorre. Ondas luminosas em propagação no vácuo podem ser consideradas como fótons se propagando no espaço vazio. Sendo assim, a Eq. (2.10) representa a lagrangeana que descreve essa situação. Não vamos considerar fontes, de forma que o termo  $j^\mu A_\mu$  é nulo na Eq. (2.10).

Na teoria conhecida, ou seja, sem violação de Lorentz, temos a seguinte lagrangeana chamada de lagrangeana de Maxwell:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (2.11)$$

lembrando que estamos partindo do caso sem fontes. Aqui, temos que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ ,  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$  e  $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$ .

Sendo

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

é possível escrever as equações de Maxwell no vácuo da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

em que  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ .  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são os campos elétrico e magnético respectivamente. A primeira Eq. de (2.13) é a lei de Gauss, a segunda é a Lei de Gauss para o eletromagnetismo, a terceira é a Lei de Faraday da indução e a quarta é a Lei de Ampère

Contudo, quando temos ondas se propagando na matéria, ou seja, em meios em que a velocidade da luz é diferente de  $1^1$ , essas equações são escritas da seguinte forma

<sup>1</sup> Estamos usando o sistema de medidas naturais para essa descrição

modificada, para meios lineares e isotrópicos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

onde  $\vec{D} = \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$  e  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , em que  $\vec{D}$  é o deslocamento elétrico,  $\vec{P}$  é chamado de momento de dipolo por unidade de volume ou simplesmente polarização,  $\vec{H}$  é o vetor magnetização,  $\epsilon$  é a permissividade elétrica e  $\mu$  é a permeabilidade magnética.

Escrevemos essas equações também para compararmos os resultados introduzindo a quebra de simetria de Lorentz. A partir da Lagrangeana (2.10), podemos escrever a equação do movimento derivando em relação a  $A^\mu$ :

$$\partial_\alpha F_\mu^\alpha + (k_F)_{\mu\alpha\beta\gamma} \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + (k_{AF})^\alpha \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma} = 0, \quad (2.15)$$

que podemos entender como sendo uma extensão não homogênea das equações de Maxwell na forma covariante na presença de quebra de simetria de Lorentz. Diferente de  $\epsilon$  que é a permissividade elétrica das equações de Maxwell,  $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$  nessa equação é um símbolo totalmente antissimétrico.

Podemos escrever, essa equação de forma usual. Para isso, é necessário fazer uma análise que simplifique a teoria. Essa simplificação pode ser alcançada utilizando-se certas combinações lineares para os coeficientes  $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$  (para mais detalhes dessas escolhas ver a referência [14]). Essas combinações permitem escrever as seguintes equações para os campos elétrico e magnético:

$$\vec{D}' \equiv (1 + \kappa_{DE}) \cdot \vec{E} + \kappa_{DB} \cdot \vec{B}$$

e

$$\vec{H}' \equiv (1 + \kappa_{HB}) \cdot \vec{B} + \kappa_{HE} \cdot \vec{E}, \quad (2.16)$$

os coeficientes  $\kappa_{DE}, \dots, \kappa_{HE}$  são coeficientes para introduzir a quebra [14].

Usando essas combinações, as novas definições de  $\vec{D}'$  e  $\vec{H}'$  (o índice linha é apenas para diferenciar das definições dos vetores dados em 2.14) dadas por (2.16) e fazendo  $(k_{AF})^\kappa = 0$  por simplicidade, podemos escrever as equações de Maxwell modificadas que incorporam a violação de simetria de Lorentz sem fontes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}' = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}' = \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Perceba a semelhança entre essas equações e as equações de Maxwell para o eletromagnetismo na matéria [Eqs. (2.14)]. Ou seja, é possível, com a introdução dos termos violadores de Lorentz, escrever equações de propagação da onda eletromagnética no vácuo semelhantes as equações de propagação dessas ondas em meios dielétricos quando não há esses termos violadores. Em meios dielétricos, fenômenos como birrefringência e a

polarização da luz surgem. A birrefringência ocorre quando a luz, polarizada, passa por um material com diferentes índices de refração, fazendo com que essa luz sofra fenômenos de dupla refração, resultando em dois raios refratados. Se as Eqs (2.17) são válidas, poderíamos esperar que esse fenômeno poderia, a princípio, ocorrer mesmo no vácuo.

A partir de agora, vamos considerar um exemplo em que a polarização surge naturalmente como efeito da quebra de simetria (os detalhes das definições utilizadas podem ser vistos em [13]).

Sendo assim, considere que o único termo não nulo dos coeficientes da Eq. (2.10) é  $(k_F)_{0i0j} = -\frac{1}{2}\beta_i\beta_j$ . Dessa forma, a lagrangeana de (2.10) ficará:

$$\mathcal{L}_{fóton} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{1}{8}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})^2, \quad (2.18)$$

onde o vetor  $\vec{\beta}$  produz a quebra de simetria. A partir disso, podemos escrever as equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\beta} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}); \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{\beta} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}). \quad (2.19)$$

Revisemos agora, algumas ideias sobre polarização de ondas. Imaginemos que temos uma onda transversal se propagando em uma direção  $z$ . Essa onda pode ser polarizada em duas direções perpendiculares: a de propagação, no sentido do eixo  $x$  (polarização vertical) e na sentido de  $y$  (polarização horizontal). Podemos, para um campo elétrico oscilante, por exemplo, escrever uma equação que descreva essas duas direções de polarização. Teríamos algo do tipo:

$$\vec{E}(z, t) = E_x \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} + E_y \hat{y} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.20)$$

Lembremos também a relação entre o vetor de onda e o momento dado por  $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ , sendo  $\hbar$  a constante de Planck reduzida, ou seja,  $\hbar = \frac{h}{2}$ . E ainda, temos a relação entre momento e frequência angular dada por  $pc = \hbar\omega$  em que  $c$  é a velocidade da luz no vácuo <sup>2</sup>.

A partir das Eqs. (2.18) e (2.19) é possível encontrar dois casos de polarização. Um caso é chamado “ordinário” em que temos:

$$(p_o)^2 = 0, \quad (2.21)$$

em que o quadri-momento  $p_o$  obedece a relação de dispersão usual  $(p_o^0)^2 - (\vec{p}_o)^2 = 0$ , com  $p^\mu = (p^0, \vec{p}) = (\omega, \vec{k})$ <sup>3</sup>

O outro caso é chamado de “extraordinário”, onde

$$(p_e)^2 = -\frac{(\vec{\beta} \times \vec{p}_e)^2}{1 + \vec{\beta}^2}, \quad (2.22)$$

<sup>2</sup> Aqui não estamos usando a unidade natural somente para lembrar ao leitor sobre a forma dessas relações

<sup>3</sup> A partir de agora, adotaremos o sistema de unidades naturais em que  $c = \hbar = 1$

onde o quadri-momento  $p_e$  obedece uma relação de dispersão modificada dada por  $(p_e^0)^2 - (\vec{p}_e)^2 = -\frac{(\vec{\beta} \times \vec{p}_e)^2}{1 + \beta^2}$

Vamos considerar, contudo, que queremos escrever uma onda polarizada em termos do vetor  $\vec{A}$ . Vamos escrever algo semelhante a (2.20). Suponhamos que as duas direções de polarização da Eq. (2.20) serão representadas pelos dois modos de polarização (ordinário e extraordinário) oriundos da teoria com quebra de simetria de Lorentz. De forma geral, podemos escrever:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = c_o \hat{A}_o e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - p^0 t)} + c_e \hat{A}_e e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - p^0 t)}. \quad (2.23)$$

Fazendo  $\alpha = |\vec{p}| / p^0$ , podemos escrever esses dois modos de polarização pelas relações  $\alpha_o = 1$  e  $\alpha_e = \sqrt{1 + |\vec{\beta}|^2}$ . Usando isso na relação anterior e escrevendo em termos de seno e cosseno através da formula de Euler, tomando apenas a parte real de  $\vec{A}$ ,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = c_o \hat{A}_o \cos[p^0(x - t)] + c_e \hat{A}_e \cos[p^0(x \sqrt{1 + |\vec{\beta}|^2} - t)]. \quad (2.24)$$

Podemos escrever essa expressão em termos do campo elétrico através da relação  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ , considerando um potencial  $V = 0$  (considerando o caso sem fontes),

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -p^0 (c_o \hat{A}_o \sin[p^0(x' - t)] + c_e \hat{A}_e \sin[p^0(x' \sqrt{1 + |\vec{\beta}|^2} - t)]), \quad (2.25)$$

onde consideramos a distancia  $x' = |\vec{x}|$ , tal que:

$$x' = \frac{\pi}{2p^0 \left( \sqrt{1 + |\vec{\beta}|^2} - 1 \right)}. \quad (2.26)$$

A Eq. (2.25) representa um modo de polarização elíptica que oscila entre modos ordinário e extraordinário quando a onda percorre uma distancia  $x'$ . Seria, portanto um efeito causado pela quebra de simetria: uma onda eletromagnética (luz) poderia ser polarizada mesmo no vácuo. Esse efeito, se detectado, poderia ser uma comprovação da existência da violação de simetria de Lorentz. Contudo, como já argumentado, nosso limite de precisão nos experimentos ainda não permitiu a medida de tais efeitos. Porém, os experimentos que buscam, até o momento sem sucesso, a busca por tais efeitos, acabam por gerar dados experimentais que se possa atribuir limites a esses coeficientes violadores ( $k_F$  e  $k_{AF}$ , por exemplo, desse modelo) de forma que esses modelos aqui apresentados possam ser consistentes com as observações.

## 2.3 Métrica análoga a partir do Modelo Abelian de Higgs

Vamos apresentar agora a forma como obtemos a métrica que será a base dessa dissertação a partir do modelo abeliano de Higgs estendido com uma modificação do setor escalar que viola a invariância de Lorentz. É possível a partir desse modelo escrever

métricas acústicas (métricas análogas) de buracos negros acústicos [17], por exemplo e estudar alguns fenômenos, como efeito de super-ressonância de um buraco negro acústico rotativo com quebra de simetria de Lorentz [18]. A lagrangiana que descreve esse modelo é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - b|\phi|^4 + k^{\mu\nu}D_\mu\phi^*D_\nu\phi, \quad (2.27)$$

onde  $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$  e  $b$  e  $e$  são termos de interação e  $\phi^*$  um campo escalar complexo e  $k^{\mu\nu}$  é um tensor constante em que sua representação matricial é

$$k^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  sendo parâmetros constantes.

Para derivar a métrica que queremos, tomemos  $\alpha = 0$  e façamos uma decomposição da forma  $\phi = \sqrt{\rho(x,t)}\exp(iS(x,t))$ , com  $\rho$  sendo uma densidade e  $S$  seriam uma fase. Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \rho\partial_\mu S\partial^\mu S - 2e\rho A_\mu\partial^\mu S + e^2\rho A_\mu A^\mu + m^2\rho - b\rho^2 \\ & + k^{\mu\nu}\rho(\partial_\mu S\partial_\nu S - 2eA_\mu\partial_\nu S + e^2A_\mu A_\nu) + \frac{\rho}{\sqrt{\rho}}(\partial_\mu\partial^\mu + \epsilon_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu)\sqrt{\rho}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

em que  $e$  e  $b$  são termos de interação. A partir dessa lagrangeana, podemos escrever as seguintes equações do movimento:

$$-\partial_t [\tilde{\beta}_+\rho(\dot{S} - eA_t)] + \partial_i [\tilde{\beta}_-\rho(\partial^i S - eA^i)] = 0 \quad (2.30)$$

e

$$\frac{(\tilde{\beta}_+\partial_t^2 - \tilde{\beta}_-\partial_i^2)\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \tilde{\beta}_+(\dot{S} - eA_t)^2 - \tilde{\beta}_-(\partial_i S - eA_i)^2 + m^2 - 2b\rho = 0, \quad (2.31)$$

onde  $\tilde{\beta}_\pm \equiv 1 \pm \beta$  e  $\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial t}$ . A Eq. (2.30) é a equação da continuidade e Eq. (2.31) é uma equação que descreve um líquido hidrodinâmico com o primeiro termo sendo denominado de chamado potencial quântico (termo de correção quântica).

Consideremos agora perturbações do tipo  $\rho = \rho_0 + \rho_1$  e  $S = S_0 + S_1$ . Essas Eqs do movimento ficaram da seguinte forma:

$$-\partial_t [\tilde{\beta}_+\rho_0\dot{S}_1 + \tilde{\beta}_+\rho_1(\dot{S}_0 - eA_t)] + \partial_i [\tilde{\beta}_-\rho_0\partial^i S_1 + \tilde{\beta}_-\rho_1(\partial^i S_0 - eA^i)] = 0 \quad (2.32)$$

e

$$2\tilde{\beta}_+(\dot{S}_0 - eA_t)\dot{S}_1 - 2\tilde{\beta}_-(\partial_i S_0 - eA_i)\partial_i S_1 - b\rho_1 + (\tilde{\beta}_+D_{t2} + \tilde{\beta}_-D_{i2})\rho_1 = 0, \quad (2.33)$$

onde, definimos as seguintes quantidades,

$$D_{t2}\rho_1 = -\frac{1}{2}\rho_0^{-\frac{3}{2}}(\partial_t^2\sqrt{\rho_0})\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_0^{-\frac{3}{2}}\partial_t^2(\rho_0^{-\frac{1}{2}}\rho_1) \quad (2.34)$$

e

$$D_{i2}\rho_1 = -\frac{1}{2}\rho_0^{-\frac{3}{2}}(\partial_i\partial^i\sqrt{\rho_0})\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_0^{-\frac{3}{2}}\partial_i\partial^i(\rho_0^{-\frac{1}{2}}\rho_1). \quad (2.35)$$

Dessa forma, chamando  $\mathcal{D}_2 = \tilde{\beta}_+D_{t2} + \tilde{\beta}_-D_{i2}$ ,  $\omega_0 = -\dot{S}_0 + eA_t$  e  $\vec{v}_0 = \nabla S_0 + e\vec{A}$ , sendo esse último um campo de velocidade local, chegamos a uma equação de onda para a perturbação  $S_1$  em torno de  $S_0$  da forma

$$\begin{aligned} & \partial_t \left[ \left( -\frac{b\rho_0}{2\tilde{\beta}_-} + \frac{\mathcal{D}_2\rho_0}{2\tilde{\beta}_-} - \frac{\tilde{\beta}_+}{\tilde{\beta}_-}\omega_0^2 \right) \dot{S}_1 - \omega_0\vec{v}_0 \cdot \nabla S_1 \right] \\ & + \nabla \cdot \left[ -\omega_0\vec{v}_0\dot{S}_1 + \left( \frac{b\rho_0}{2\tilde{\beta}_+} - \frac{\mathcal{D}_2\rho_0}{2\tilde{\beta}_+} \right) \nabla S_1 - \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+}\vec{v}_0 \cdot \nabla S_1\vec{v}_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Comparando com a equação de Klein-Gordon no espaço tempo curvo, podemos ver que essa equação toma a forma de

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\mu\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)S_1 = 0, \quad (2.37)$$

quando tomamos

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{b\rho_0}{2\tilde{\beta}_-} + \frac{\mathcal{D}_2\rho_0}{2\tilde{\beta}_-} - \frac{\tilde{\beta}_+}{\tilde{\beta}_-}\omega_0^2 & \vdots & & -\omega_0v_0^j \\ \dots\dots\dots & \ddots & & \dots\dots\dots \\ -\omega_0v_0^i & \vdots & \left( \frac{b\rho_0}{2\tilde{\beta}_+} - \frac{\mathcal{D}_2\rho_0}{2\tilde{\beta}_+} \right) \delta^{ij} - \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+}v^iv^j & \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Uma vez que o termo  $\mathcal{D}_2$  é pequeno [17], em termos da métrica de um buraco negro acústico, temos:

$$g_{\mu\nu} = \frac{b\rho_0\tilde{\beta}_-^{\frac{1}{2}}}{2c_s\sqrt{1 + \frac{c_s^2}{\tilde{\beta}_+} - \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+}v^2}} \begin{pmatrix} -\left( \frac{c_s^2}{\tilde{\beta}_+} - \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+}v^2 \right) & \vdots & & -v^j \\ \dots\dots\dots & \ddots & & \dots\dots\dots \\ -v^i & \vdots & \left( \frac{\tilde{\beta}_+}{\tilde{\beta}_-} + \frac{c_s^2}{\tilde{\beta}_-} - \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+}v^2 \right) \delta^{ij} + \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+}v^iv^j & \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

onde definimos  $c_s^2 = \frac{b\rho_0}{2\omega_0}$  como sendo a velocidade local do som no fluido e  $v^2 = \sum_i^3 v^iv^i$  a velocidade do fluido com  $v^i = \frac{v_0^i}{\omega_0}$ . É esse tensor métrico que gera o elemento de linha (métrica) que será base desse trabalho e que será discutido no Capítulo 4.

No próximo capítulo, vamos tratar de um outro fenômeno de origem quântica que será importante para nosso trabalho.



## 3 Movimento Browniano

Vamos tratar agora um pouco sobre as flutuações quânticas em campos escalares que dão origem ao movimento browniano quântico. Esse capítulo é de suma importância, pois a partir dele mostraremos a origem de boa parte do formalismo utilizado nesta dissertação. Para isso, descreveremos brevemente o movimento browniano clássico, a partir da descrição de um formalismo específico, o formalismo de Langevin. Depois, na seção 3.2 vamos descrever também o formalismo para o caso quântico.

### 3.1 Movimento Browniano Clássico

O termo movimento browniano (MB) surgiu devido os estudos do botânico inglês Robert Brown em 1827. Brown, ao estudar o deslocamento de grãos de pólen suspensos em um fluido (água no caso), percebeu que os mesmos descreviam um tipo de trajetória irregular e errático. O mesmo fenômeno foi observado, pelo mesmo Brown, em partículas inorgânicas de cinzas. Isso o convenceu de que aquele “vai e vem” irregular tinha propriedades físicas [19]. Mais ainda, experimentos subsequentes mostraram que esse tipo de comportamento é bem mais geral.

A partir desse estudo inicial de Brown, outros cientistas passaram a se dedicar a investigação desse fenômeno, principalmente após Einstein (1905) e também Smoluchowski (1906), publicarem trabalhos com as primeiras explicações sobre o MB. Antes deles, diversas tentativas de explicar o fenômeno surgiram. Alguns experimentos mostravam que o efeito dependia da viscosidade do fluido, tamanho da partículas e da temperatura [20]. A explicação final veio justamente com Einstein em seu artigo de 1905. Ele não somente explicou e descreveu o MB, como seu trabalho também serviu para posterior avanço e aceitação da teoria atômico-molecular além de fornecer uma boa estimativa para o número de Avogadro.

Na realidade, aquele deslocamento em zigue-zague das partículas de pólen é causado pela colisão das mesmas com as moléculas do fluido. A solução de Einstein é baseada em um tratamento difusivo. Contudo, para nosso tratamento do movimento browniano quântico (MQB) levando-se em conta uma quebra de simetria de Lorentz, iremos utilizar o tratamento proposto por Langevin, conhecido como variável estocástica ou de força flutuante [20]. Vamos descrever a ideia desse formalismo inicialmente de forma clássica [20] para depois passar a forma quântica.

Como já dito, a ideia desse formalismo é considerar uma força aleatória  $F_a(t)$  que varie rapidamente em comparação com o tempo de observação. Seria, portanto, uma força flutuante que tem valor esperado <sup>1</sup> igual a zero devido a sua rápida variação e que obedece as seguintes relações:

$$\langle F_a(t) \rangle = 0; \quad \langle F_a(t)F_a(t') \rangle = \Gamma\delta(t - t'), \quad (3.1)$$

em que  $\Gamma$  é uma constante.

A origem dessa força vem da colisão constante das moléculas do fluido com as partículas em suspensão. A partir disso, o próximo passo é escrever uma equação diferencial que leve em consideração, além dessa força, uma outra relacionada a viscosidade do fluido e uma força externa, ou seja:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\rho\vec{v} + \vec{F} + F_a\vec{e}_a(t), \quad (3.2)$$

em que  $\vec{F}$  é uma força externa,  $\rho$  é um parâmetro relacionado a viscosidade do fluido,  $\vec{v}$  é a velocidade de uma partícula se movendo no fluido e  $m$  é a massa da partícula.

Essa equação pode ser reescrita na forma de uma equação estocástica (por isso o nome dado ao tratamento de Langevin) da forma:

$$\frac{dv}{dt} = -bv + A(t), \quad (3.3)$$

onde consideramos a força externa nula ( $F = 0$ ), por simplicidade além de considerar um caso unidimensional e definimos  $b = \rho/m$  e  $A(t) = F_a(t)/m$ .

A solução dessa equação (para mais detalhes ver a referência [20]) é da forma:

$$v(t) = v_0 e^{-bt} + e^{-bt} \int_0^t A(t') e^{bt'} dt'. \quad (3.4)$$

Para se calcular a relação de dispersão para a velocidade devemos levar em conta as relações (3.1). Dessa forma, temos

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-bt}. \quad (3.5)$$

Para calcular a variância, tomemos a diferença  $v - \langle v \rangle$  para obtermos

$$v - \langle v \rangle = e^{-bt} \int_0^t A(t') e^{bt'} dt'. \quad (3.6)$$

Tomando o quadrado dessa diferença, achamos:

$$(v - \langle v \rangle)^2 = e^{-2bt} \int_0^t \int_0^t A(t') A(t'') e^{b(t'+t'')} dt' dt'', \quad (3.7)$$

<sup>1</sup> Apesar de ser um termo da mecânica quântica, o utilizaremos aqui para fazer o “link” com o caso quântico desse fenômeno

na qual, aplicando a segunda relação da Eq. (3.1) encontramos a seguinte relação de dispersão de velocidade:

$$(\Delta v)^2 = \frac{\Gamma}{2b}(1 - e^{-2bt}), \quad (3.8)$$

em que utilizamos a relação  $(\Delta v)^2 = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$ . O valor da constante  $\Gamma$  é calculado sabendo-se que para tempos longos, comparados os tempos de flutuação de  $F_a(t)$ , obtém-se o regime estacionário, o que leva  $\langle v \rangle = 0$  e levando-se em conta também que, nesse limite de tempo, o teorema da equipartição (distribuição maxwelliana), que diz que a energia cinética média de uma partícula corresponde a  $k_B T/2$ , é válido [20], [21]. Dessa forma temos:

$$\Gamma = \frac{2bk_B T}{m}, \quad (3.9)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura.

É mais conveniente, contudo, calcular o deslocamento quadrático médio. Para isso, basta lembrar que podemos encontrar a função posição integrando a equação  $v(t) = dx/dt$  para um caso unidimensional. Fazendo isso e utilizando novamente as relações de (3.1) e o resultado da Eq (3.4), pode-se chegar a

$$(\Delta x)^2 = 2\frac{k_B T}{mb}t, \quad (3.10)$$

ou ainda,

$$(\Delta x)^2 = 2Dt \quad (3.11)$$

que é a mesma relação encontrada por Einstein em seu tratamento com base na equação de difusão, onde  $D = k_B T/mb$  é o coeficiente de difusão <sup>2</sup>.

O objetivo dessa seção foi somente mostrar um pouco da natureza do movimento browniano clássico e um pouco de seu tratamento. Agora, vamos descrever a ideia geral do movimento browniano quântico.

## 3.2 Movimento Browniano Quântico

A ideia é de que, assim como uma força clássica flutuante provoca deslocamento aleatório em uma partícula em suspensão em um fluido, flutuações quânticas também podem provocar movimento semelhante ao MB. Essa possibilidade tem sido bastante estudada nos últimos anos. O ponto de partida é considerar que partículas, que podem ser vistas como pontuais clássicas [5] ou até mesmo como pacotes de ondas [22], interagem com um campo flutuante no vácuo. São essas flutuações que induzem o movimento browniano.

<sup>2</sup> Lembre que, no sistema natural de unidades,  $k_B$  é igual a 1. Deixamos ele nessas equações para que o leitor possa ver a forma original das mesmas

Não é bem claro, contudo, se essas flutuações podem ser observadas no estado de vácuo de Minkowski, embora, como pode ser visto em [7] exista uma argumentação de que sim. Outros ainda argumentam que tais efeitos podem ser observados, principalmente quando se considera placas refletoras [4], [5], [6] ou topologia não triviais [8].

É possível também que o movimento browniano aconteça quando se considera flutuações quânticas do vácuo em uma geometria depende do tempo, como por exemplo, uma geometria em expansão (que vai ser nosso caso de interesse). Nesse caso, vamos considerar partículas que se movem em uma geometria de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) tendo como base as referências [4] e [5]. O espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker é um espaço em expansão e pode ser descrito por uma equação da métrica que supõe a homogeneidade e isotropia do universo bem como uma dependência do fator de escala do universo com o tempo (dependência temporal da componente espacial). Em coordenadas cartesianas, essa métrica é dada por:

$$ds_{FRW}^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.12)$$

em que  $dt \rightarrow cdt$ , onde  $c = 1$  é a velocidade da luz no vácuo no sistema natural e  $a(t)$  é o fator de escala

A métrica conforme fica, fazendo  $dt = a(\eta)d\eta$ , onde  $\eta$  é o tempo conforme

$$ds_{FRW}^2 = a^2(\eta) (-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.13)$$

Acontece que muitas previsões teóricas que envolvem a RG e a TQC são difíceis de serem observadas. Contudo, nos últimos anos, estudos desenvolvidos em modelos análogos, tem possibilitado um melhor entendimento dessas previsões. É possível simular fenômenos como a produção de partículas cosmológicas e a radiação Hawking, que são fenômenos semi-clássicos e estuda-los em modelos análogos (para mais detalhes, ver [9]). A ideia geral gira em torno de considerar que, em um fluido sem viscosidade e irrotacional, como por exemplo um condensado de Bose-Einstein (CBE), perturbações linearizadas reproduzem a mesma equação de movimento que pode descrever um campo escalar sem massa em um espaço-tempo curvo (o CBE tem se mostrado um bom sistema para estudo e compreensão desses fenômenos. Esse fato será ilustrado mais adiante).

Sendo assim, nessa dissertação estamos interessados em analisar o movimento browniano quântico em um modelo análogo a FRW, no contexto da quebra de simetria de Lorentz. Para isso, vamos apresentar primeiramente um formalismo para descrever o movimento de uma partícula pontual que se move em um fluido em uma geometria análoga modelada por um CBE em expansão isotrópica. Em uma temperatura próxima a  $T = 0K$ , as características ondulatórias da matéria se sobressaem no CBE. Porém, considerando que em um sistema real, a temperatura  $T = 0K$  não é alcançada perfeitamente, sempre haverá alguns átomos do condensado que podem ser considerados como partículas. É no

movimento desses átomos que estamos interessados. Essas partículas interagem com um campo flutuante que, no condensado será representado por propagações de perturbações acústicas ou, em outras palavras, fónons. Lembrando também que a geometria análoga deve representar uma geometria de FRW, ou seja, que depende do tempo e expande-se de forma homogênea e isotrópica.

Para uma partícula que se move em um espaço curvo, a equação do movimento (segunda lei de Newton) é dada por (ver [4] [5] para mais detalhes do que se segue):

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad (3.14)$$

onde  $u^\mu$  é a quadri-velocidade e  $f^\mu$  a quadri-força que age sobre uma partícula de massa  $m$  e tempo próprio  $\tau$ . Além disso temos que

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta, \quad (3.15)$$

em que  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  são os símbolos de Christoffel dados por:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (3.16)$$

e  $g^{\mu\nu}$  é o tensor métrico que pode ser retirado da métrica (3.12). Daremos mais detalhes adiante.

Vamos, então considerar uma direção qualquer  $i$ , uma vez que o fluido (CBE), como considerado, é isotrópico. Assim, podemos escrever a Eq. (3.14):

$$m \frac{Du^i}{dt} = f'^i. \quad (3.17)$$

Tomamos aqui o limite não relativístico em que  $\tau \rightarrow t$  para mais tarde utilizarmos a métrica análoga onde iremos considerar a velocidade do som pequena, da ordem de  $10^{-3}m/s$  [10] (o índice com linha é apenas nomenclatura para facilitar a escrita mais tarde).

Podemos então considerar algo semelhante ao tratamento estocástico do formalismo de Langevin, onde temos uma força ( $f'^i$ ) composta por uma componente flutuante quantizada ( $f^i$ ), que varia rapidamente, mais um termo clássico não flutuante ( $f_{ext}^i$ ) e escrever algo semelhante a Eq. (3.2). Porém, vamos levar em consideração que não há viscosidade no CBE. As características da componente flutuante são semelhantes as do caso clássico, de forma mais importante, a relação  $\langle f^i \rangle = 0$ . Assim, podemos reescrever a Eq. (3.17) como sendo

$$m \frac{Du^i}{dt} = f^i + f_{ext}^i. \quad (3.18)$$

Para uma métrica do tipo (3.12), a equação acima pode ser escrita utilizando também as Eqs. (3.15) e (3.16) como:

$$m \frac{du^i}{dt} + 2m \frac{\dot{a}}{a} u^i = f^i + f_{ext}^i, \quad (3.19)$$

onde  $\dot{a} = da/dt$

Porém, vamos lembrar que estamos trabalhando em um modelo análogo em que partículas se movem em um condensado de Bose-Einstein. Nesse caso, iremos utilizar uma métrica análoga. Contudo, como se pode ver mais detalhes em [5], essa métrica análoga é semelhante a dada pela Eq. (3.13):

$$ds_{eff}^2 = a_{eff}^2(\eta) \left( -c_0^2 d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \right), \quad (3.20)$$

com  $c_0$  sendo a velocidade constante de propagação de som no condensado. O subscrito “eff” designa métrica efetiva. Nesse caso, o tensor métrico é dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} n_0 \\ c_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_s^2 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

aqui,  $n_0$  está relacionado a densidade de partículas. O fator de escala da métrica é dado por:

$$a_{eff}^2(t) = \frac{c_0}{c_s(t)}, \quad (3.22)$$

em que  $c_s(t)$  é a velocidade do som dependente do tempo no condensado. Perceba que, desse modo,  $a(t)$  aumenta quando  $c_s(t)$  diminui. Isso mantém, dessa forma, a expansão desejada da métrica análoga comparada à métrica de FRW.

Devido a semelhança entre as Eqs. (3.13) e (3.20), esses resultados podem ser estendidos para a métrica análoga, de forma que a Eq. (3.19) também é válida para a Eq. (3.20). Então, podemos analisar dois casos a partir de agora. O primeiro caso é considerar uma força externa  $f_{ext}^i = 2m\dot{a}u^i$ , com  $a = a_{eff}(t)$ , na Eq. (3.19). Esse caso representa uma situação em que temos partículas se movimentando dentro do condensado e uma força externa as mantém ligadas, de forma que localmente, esse sistema formado pelas partículas não sentem a expansão do condensado, ou seja, não seguindo a geodésica. Para compreender melhor esse sistema, poderíamos pensar nele como sendo o sistema terra e lua, em que, por mais que o universo se encontre em expansão, localmente não se percebe tal expansão. A esse sistema, daremos o nome de caso ligado. Assim, levando em consideração essa força externa, a Eq. (3.19) ficará:

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{f^i}{m}. \quad (3.23)$$

Integrando essa equação ficamos com

$$u^i(t, r) = \frac{1}{m} \int_0^{t_f} f^i(t, r) dt. \quad (3.24)$$

onde  $u(t=0) = 0$

Aqui, podemos então calcular a função de correlação para a velocidade levando em consideração que  $\langle f^i \rangle = 0$  e que

$$\langle (\Delta u^i)^2 \rangle = \langle u^i(t_1, r_1) u^i(t_2, r_2) \rangle - \langle u^i(t_1, r_1) \rangle \langle u^i(t_2, r_2) \rangle, \quad (3.25)$$

logo, teremos

$$\langle u^i(t_1, r_1)u^i(t_2, r_2) \rangle = \frac{1}{m^2} \int_0^{t_f} \int_0^{t_f} dt_1 dt_2 \langle f^i(t_1, r_1)f^i(t_2, r_2) \rangle. \quad (3.26)$$

A força para uma partícula escalar interagente com um campo escalar em um espaço curvo, contudo, é dada por [11]

$$f^\mu = qg^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (3.27)$$

onde  $q$  é um termo de interação. Para uma métrica do tipo (3.12) e como estamos interessados em um termo de força  $f^i$ , teremos:

$$f^i(t, r) = qa^{-2}(t)\partial_i \phi, \quad (3.28)$$

dessa forma, Eq. (3.26) poderá ser reescrita na forma:

$$\langle (\Delta u^i)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2} \int_0^{t_f} \int_0^{t_f} dt_1 dt_2 a^{-2}(t_1)a^{-2}(t_2)\partial_{i_1}\partial_{i_2} \langle \phi(t_1, r_1)\phi(t_2, r_2) \rangle_{FRW}. \quad (3.29)$$

A função  $\langle \phi(t_1, r_1)\phi(t_2, r_2) \rangle_{FRW}$  é chamada de função de correlação de dois pontos no espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker. Podemos relaciona-la ao espaço-tempo de Minkowski (plano), pois não sabemos a forma de  $\phi(t_1, r_1)\phi(t_2, r_2)$  em FRW, porém sabemos seu formato no espaço-tempo de Minkowski (ver Apêndice C):

$$\langle \phi(t_1, r_1)\phi(t_2, r_2) \rangle_M = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + r^2} \right], \quad (3.30)$$

que pode ser calculada utilizando o método das funções de Green [23].

Para relacionar esses dois espaços, podemos usar as relações que podem ser vistas com mais detalhes no capítulo 3 de [23]. Essas relações são:

$$\phi_{FRW} = \Omega^{\frac{(2-n)}{2}} \phi_M \quad (3.31)$$

e

$$\eta_{\mu\nu} = \Omega^{-2} g_{\mu\nu} \quad (3.32)$$

para  $n = 4$  (espaço-tempo quadri-dimensional), onde  $\Omega$  é uma função e o subscrito  $M$  significa o espaço-tempo de Minkowski.

Dessa forma, chegamos a  $\Omega^{\frac{(2-n)}{2}} = a^{-1}(\eta)$ , onde  $n = 4$  representa a dimensão do espaço-tempo. Dessa forma, podemos ver que a relação entre as funções de correlação do espaço-tempo FRW e de Minkowski é dada por:

$$\langle \phi(\eta_1, r_1)\phi(\eta_2, r_2) \rangle_{FRW} = a^{-1}(\eta_1)a^{-1}(\eta_2)\langle \phi(\eta_1, r_1)\phi(\eta_2, r_2) \rangle_M, \quad (3.33)$$

em que  $\eta$  é o tempo conforme. Dessa forma, utilizando uma transformação de tempo do tipo  $dt = a(\eta)d\eta$ , sendo  $\eta$  o tempo conforme, a Eq. (3.29) ficará da seguinte forma:

$$\langle (\Delta u^i)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2} \int_0^{\eta_f} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1)a^{-2}(\eta_2)\partial_{i_1}\partial_{i_2} \langle \phi(\eta_1, r_1)\phi(\eta_2, r_2) \rangle_M, \quad (3.34)$$

ou ainda mudando para a velocidade própria utilizando  $v = a_f u$ , uma vez que na geometria FRW em consideração, a distância adequada é definida em termos da distância de coordenadas,  $r$ , por  $l_f = a_f r$  em um tempo  $\eta = \eta_f$ .

$$\langle (\Delta v^i)^2 \rangle = \frac{q^2 a_f^2}{m^2} \int_0^{\eta_f} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle \phi(\eta_1, r_1) \phi(\eta_2, r_2) \rangle_M. \quad (3.35)$$

Perceba que aqui temos o fator de escala aparecendo dentro do integrando. Na literatura, existem vários tipo de forma que se pode ser atribuído ao fator de escala. Para o nosso objetivo que é representar uma espaço em expansão, o fator de escala que utilizaremos é:

$$a^2(\eta) = a_0^2 + a_1^2 \tanh(\eta/\eta_0), \quad (3.36)$$

que é similar ao que se pode medir experimentalmente [24]. Aqui, temos que

$$a_0^2 = \frac{a_f^2 + a_i^2}{2} \quad (3.37)$$

e

$$a_1^2 = \frac{a_f^2 - a_i^2}{2}, \quad (3.38)$$

em que  $a_f = a(\eta = \eta_f)$  e  $a_i = a(\eta = \eta_i)$ .

Substituindo essa equação, a Eq. (3.30) na Eq. (3.35), tomando o limite de coincidência, ou seja, quando  $x = x'$  na relação (3.30), uma vez que  $r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$  e usando o método de integração por resíduos (ver apêndice A), é possível chegar ao seguinte resultado para a relação de dispersão de velocidade:

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{2q^2 B}{\pi^4 m^2 c_0^4 \eta_0^2} \left( \zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right), \quad (3.39)$$

onde  $\zeta$  é a função zeta de Riemann e  $B$  uma constante que depende dos parâmetros do fluido  $c_0$  e  $c_{sf}$ , essa última, a velocidade no tempo final de expansão  $\eta_f$ . Ela é dada por:

$$B = \frac{c_0}{4c_{sf}} \left( 1 - \frac{c_{sf}}{c_0} \right). \quad (3.40)$$

Esse é o resultado para a relação de dispersão de velocidade para o caso ligado. Perceba que esse resultado é uma constante.

Um outro caso a ser considerado é fazer a força externa  $f_{ext}$  da Eq. (3.19) igual a zero. É o que chamamos de caso livre (em oposição ao caso ligado discutido até o presente momento), em que as partículas podem sentir os efeitos da expansão. Nesse caso, ficaríamos com a seguinte equação do movimento,

$$\frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} (a^2 u^i) = \frac{f^i}{m}, \quad (3.41)$$

ou, integrando

$$u^i(t, r) = \frac{1}{m a^2(t_f)} \int_0^{t_f} a^2(t) f^i(t, r) dt. \quad (3.42)$$



Dessa forma, utilizando a relação dada pela Eq. (3.25), podemos chegar a uma equação semelhante a Eq. (3.26) para a correlação de velocidade, só que agora para o caso livre. Assim, temos:

$$\langle (\Delta u^i)^2 \rangle = \frac{1}{m^2 a_f^4} \int_0^{t_f} \int_0^{t_f} dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) \langle f^i(t_1, r_1) f^i(t_2, r_2) \rangle_{FRW}. \quad (3.43)$$

Perceba que, ao contrario da Eq. (3.26), temos o fator de escala da métrica dentro do integrando. Podemos fazer então o mesmo percurso realizado para o caso ligado e ver que podemos reescrever essa equação em termos do tempo conforme e da velocidade própria da seguinte forma:

$$\langle (\Delta v^i)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2 a_f^2} \int_0^{\eta_f} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 d\eta_2 \partial_{i1} \partial_{i2} \langle \phi(\eta_1, r_1) \phi(\eta_2, r_2) \rangle_M. \quad (3.44)$$

Utilizando a Eq. (3.30) teremos uma relação com integrais que segundo [5] é semelhante as integrais que aparecem para o espaço-tempo plano de Minkowski. Contudo, essas integrais de (3.44) são divergentes e para se retirar essa divergência, adota-se um procedimento de renormalização. Esse processo consiste em subtrair da função de dois pontos que temos, a parte correspondente no espaço-tempo de Minkowski. Ou seja,

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_R = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle - \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M, \quad (3.45)$$

onde temos,  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_R$  é a função de dois pontos renormalizada (que queremos),  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle$  a função de dois pontos que temos e  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M$  a função de dois pontos de Minkowski.

Como aqui  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle$  é igual a  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M$ , teremos que  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_R = 0$ . Dessa forma, é fácil verificar que o resultado da dispersão para a velocidade no caso livre será zero, uma vez que teremos, aplicando-se essa condição de renormalização integrais com integrando nulo. Então, concluímos que:

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = 0. \quad (3.46)$$

Existem outros casos que podem ser tratados, como por exemplo, considerar um plano refletor (uma barreira). Nesse caso, o resultado acima não é nulo. Porém, esse caso não é de nosso interesse nesse trabalho. Esses dois casos (ligado e livre) serão nossa base de estudo para analisar os efeitos de quebra de simetria de Lorentz no próximo capítulo.



## 4 Movimento Browniano com Quebra de Simetria de Lorentz

Até aqui, apresentamos dois pontos de grande importância para o que se segue. Mostramos um pouco da ideia por trás da teoria que sugere que a simetria de Lorentz pode ser violada e algumas formas de como isso pode ocorrer. Além disso, mostramos um pouco do formalismo que descreve um tipo de fenômeno quântico que induz partículas pontuais a descreverem um movimento semelhante ao movimento browniano, devido a flutuações do vácuo em uma geometria análoga. Nesse capítulo, vamos discutir como um pode influenciar o outro, ou seja, como a violação de simetria de Lorentz pode influenciar no movimento de uma partícula em uma geometria semelhante a de Friedmann-Robertson-Walker que é uma geometria em expansão (dependente do tempo).

Antes de qualquer coisa, vamos propor uma alteração na Eq. (3.27). O modelo que será base de nosso trabalho será o modelo Abelian de Higgs estendido com uma modificação do setor escalar que viola a invariância de Lorentz. É possível a partir desse modelo escrever métricas acústicas (métricas análogas) de buracos negros acústicos, por exemplo. A lagrangiana que descreve esse modelo é dada por [17], [18]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - b|\phi|^4 + k^{\mu\nu}D_\mu\phi^*D_\nu\phi, \quad (4.1)$$

onde  $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$  e  $b$  e  $e$  são termos de interação e  $\phi^*$  um campo escalar complexo.

Vamos escrever a equação do movimento a partir da equação de Euler-Lagrange que vamos escrever da seguinte forma:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi^*} = 0. \quad (4.2)$$

Assim, teremos para o primeiro termo da Eq. (4.2)

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^*)} = \partial_\alpha \left[ \partial_\mu\phi g^{\mu\beta} \frac{\partial(\partial_\beta\phi^*)}{\partial(\partial_\alpha\phi^*)} - ieA_\mu\phi g^{\mu\beta} \frac{\partial(\partial_\beta\phi^*)}{\partial(\partial_\alpha\phi^*)} + k^{\mu\nu}D_\nu\phi \frac{\partial(\partial_\mu\phi^*)}{\partial(\partial_\alpha\phi^*)} \right]. \quad (4.3)$$

Usando a definição  $\frac{\partial(\partial_\beta\phi^*)}{\partial(\partial_\alpha\phi^*)} = \delta_\beta^\alpha$  teremos que:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^*)} = \partial_\alpha \left[ \partial_\mu\phi g^{\mu\beta} \delta_\beta^\alpha - ieA_\mu\phi g^{\mu\beta} \delta_\beta^\alpha + k^{\mu\nu}D_\nu\phi \delta_\mu^\alpha \right],$$

ou ainda,

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^*)} = \partial_\alpha [g^{\alpha\nu} + k^{\alpha\nu}] D_\nu\phi. \quad (4.4)$$

Calculando o termo  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*}$ , teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = ieA^\mu \partial_\mu \phi + e^2 A_\mu A^\mu \phi + m^2 \phi - 2b|\phi|^2 \phi - ik^{\mu\nu} A_\mu D_\nu \phi. \quad (4.5)$$

Desse modo, podemos escrever a equação do movimento como sendo:

$$\partial_\alpha [g^{\alpha\nu} + k^{\alpha\nu}] D_\nu \phi - \left( ieA^\mu \partial_\mu \phi + e^2 A_\mu A^\mu \phi + m^2 \phi - 2b|\phi|^2 \phi - ik^{\mu\nu} A_\mu D_\nu \phi \right) = 0. \quad (4.6)$$

Se desconsiderarmos todos os termos de interação e considerarmos um campo sem massa, podemos a partir do primeiro termo dessa equação tirar a correção da força. Como temos o termo  $g^{\alpha\nu} + k^{\alpha\nu}$ , podemos propor que a Eq. (3.27) pode ser substituída pela seguinte equação de força corrigida:

$$f^\mu = q(g^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}) \nabla_\nu \phi. \quad (4.7)$$

A princípio, poderíamos usar um tensor métrico qualquer nessa equação. Contudo, para ter mais coerência com a proposta do trabalho, utilizaremos um tensor métrico tirado da própria lagrangeana do modelo abeliano de Higgs com quebra de simetria de Lorentz. Uma vez que  $k^{\mu\nu}$  é um tensor constante, que é o mesmo que aparece em (4.1) que produz a quebra de simetria de Lorentz, e é dado por:

$$k^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

a partir da langrangeana, pode-se calcular o tensor métrico (para mais detalhes ver [17]):

$$g_{\mu\nu} = \frac{b\rho_0 \tilde{\beta}_\pm^{\frac{1}{2}}}{2c_s \sqrt{1 + \frac{c_s^2}{\tilde{\beta}_+} - \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+} v^2}} \begin{pmatrix} -\left(\frac{c_s^2}{\tilde{\beta}_+} - \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+} v^2\right) & \vdots & & -v^j \\ \dots\dots\dots & \ddots & & \dots\dots\dots \\ -v^i & \vdots & \left(\frac{\tilde{\beta}_+}{\tilde{\beta}_-} + \frac{c_s^2}{\tilde{\beta}_-} - \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+} v^2\right) \delta^{ij} + \frac{\tilde{\beta}_-}{\tilde{\beta}_+} v^i v^j & \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

onde  $\tilde{\beta}_\pm = 1 \pm \beta$ . Os pontos foram colocados para que não fosse necessário escrever todos os elementos da matriz.

Vamos considerar uma métrica diagonal fazendo  $v = 0$ . Isso significa dizer que estamos considerado o fluxo de fundo igual a zero. Além disso, vamos considerar a velocidade do som no condensado bem pequena (da ordem de  $10^{-3}m/s$  [10]) de forma que podemos escrever uma métrica efetiva:

$$d\bar{s}_{eff}^2 = \frac{b\rho_0 \tilde{\beta}_\pm^{\frac{1}{2}}}{2c_s} \left[ \frac{-c_s^2}{\tilde{\beta}_+} dt'^2 + \frac{\tilde{\beta}_+}{\tilde{\beta}_-} (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) \right]. \quad (4.10)$$

Chamando  $W^{-2} = \frac{\tilde{\beta}_+}{\tilde{\beta}_-^{\frac{1}{2}}}$  e  $W^2 = \frac{\tilde{\beta}_-^{\frac{1}{2}}}{\tilde{\beta}_+}$ , ficamos com

$$d\tilde{s}_{eff}^2 = \frac{-b\rho_0}{2}W^2c_s dt'^2 + \frac{b\rho_0}{2c_s}W^{-2}(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2). \quad (4.11)$$

Nosso objetivo é escrever uma métrica análoga semelhante a métrica de Minkowski dada pelas Eqs. (3.12) e (3.13). Para simplificar e escrever essa métrica vamos chamar ainda  $\Omega_0^2 = \frac{b\rho_0}{2c_0}$  e introduzir o fator  $h(t') = \left(\frac{c_s(t')}{c_0}\right)^2$ . Substituindo isso em (4.11) ficamos com

$$d\tilde{s}_{eff}^2 = -W^2\Omega_0^2c_0^2h(t')^{\frac{1}{2}}dt'^2 + W^{-2}\Omega_0^2h(t')^{-\frac{1}{2}}(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2).$$

Nessa equação, podemos ainda colocar  $\Omega_0^2c_0^2h(t')^{-\frac{1}{2}}$  em evidência e chamar  $ds^2 = d\tilde{s}^2\Omega_0^{-2}$  para escrever

$$ds^2 = -W^2c_0^2a^{-2}(t')dt'^2 + a^2(t')W^{-2}(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2), \quad (4.12)$$

onde chamamos  $h(t')^{-\frac{1}{2}} = a^2(t')$  onde  $a(t')$  é o fator de escala da métrica. Fazemos agora a seguinte mudança de coordenada tempo,  $a^{-2}(t')dt'^2 = dt^2$ . Substituindo na equação acima, ficamos com:

$$ds^2 = W^2[-c_0^2dt^2 + a^2(t)W^{-4}(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)]. \quad (4.13)$$

A parte entre colchetes dessa métrica é bem semelhante a métrica de Minkowski (ver Eq. 3.12), exceto pelo termo  $W^{-4}$  na parte espacial. Como esse termo é o que carrega a quebra de simetria, vamos redefinir, dessa forma, o termo  $W^{-4}(dx'^i)^2 = (dx^i)^2$  para reescrever essa métrica da seguinte forma:

$$ds^2 = W^2[-c_0^2dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)]. \quad (4.14)$$

Olhando agora apenas para a parte entre colchetes, perceba que temos algo bem semelhante a Eq. (3.12). Vamos então redefinir essa equação escrevendo  $\tilde{d}s^2 = W^{-2}ds^2$ , de forma que ficamos com:

$$\tilde{d}s^2 = -c_0^2dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.15)$$

Agora temos uma métrica análoga semelhante a métrica FRW dada pela Eq. (3.12). Escrevendo em termos do tempo conforme, fazemos a seguinte substituição

$$dt = a(\eta)d\eta$$

para reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\tilde{d}s^2 = a^2(\eta)[-c_0^2d\eta^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2)], \quad (4.16)$$

que é uma métrica conforme semelhante a de Minkowski da Eq. (3.13). É essa métrica que utilizaremos a partir de agora para tentar fazer algo semelhante ao que foi descrito no Capítulo 3, devido a semelhança dessa métrica com a métrica de Minkowski, em que  $g_{\mu\nu}$  é dado por, para uma métrica conforme:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -c_s^2 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

## 4.1 Caso ligado

Assim como descrito no Capítulo 3, vamos analisar dois casos em que podemos ter movimento browniano quântico. Primeiramente, vamos analisar o caso ligado buscando detalhar alguns pontos em comum com o caso livre. Para o caso ligado temos a seguinte equação.

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{f^i}{m}, \quad (4.18)$$

que integrando ficamos com

$$u^i = \frac{1}{m} \int_0^{t_f} f^i dt, \quad (4.19)$$

onde atribuímos  $u(t=0) = 0$

Tiramos da lagrangeana (4.1), uma correção na força. Como escrevemos  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  na forma da Eq. (4.17), faremos  $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}$  para escrever

$$f^\mu = q(\tilde{g}^{\mu\nu} + k^{\mu\nu})\nabla_\nu\phi, \quad (4.20)$$

onde  $k^{\mu\nu}$  é dado pela Eq. (2.28).

Estamos interessados na dispersão para a tri-velocidade uma vez que, assim como falado no Capítulo 3, estamos considerando um fluido isotrópico e homogêneo. Dessa forma, considerando uma direção  $i$ , podemos escrever:

$$f^i = q(\tilde{g}^{i\nu} + k^{i\nu})\nabla_\nu\phi$$

ou ainda, abrindo os termos

$$f^i = q[(\tilde{g}^{i0} + k^{i0})\partial_0\phi + (\tilde{g}^{ij} + k^{ij})\partial_j\phi]. \quad (4.21)$$

Agora vamos considerar  $\alpha = 0$ , o que nos leva a  $k^{i0} = 0$  e  $k^{ij} = 0$  para  $i$ . Isso nos leva a:

$$f^i = q(\tilde{g}^{ii} + k^{ii})\partial_i\phi = q[a^{-2}(t) + \beta]\partial_i\phi. \quad (4.22)$$

Assim, podemos escrever uma expressão para a dispersão de velocidades, utilizando as Eqs. (4.19) e (3.25).

$$\begin{aligned} \langle u^i(t_1, r_1)u^i(t_2, r_2) \rangle &= \frac{q^2}{m^2} \int_0^{t_f} \int_0^{t_f} dt_1 dt_2 \{ [a^{-2}(t_1) + \beta] [a^{-2}(t_2) + \beta] \} \\ &\times \partial_{1i}\partial_{2i}\langle \phi(t_1, r_1)\phi(t_2, r_2) \rangle_{FRW}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Agora, vamos utilizar uma relação de transformação entre os campos de espaço curvo para o espaço plano utilizando as Eqs. (3.31) e (3.32). Nessas equações, o termo  $\Omega$  vem do fator de escala da métrica conforme. Em nosso caso,  $\Omega^{\frac{(2-n)}{2}} = a^{-1}(\eta_1)$ , pois  $n = 4$  que representa a dimensão do espaço-tempo. Assim, usando isso em (4.23) e abrindo os termos e usando uma mudança de tempo coordenada para tempo conforme da forma  $dt = a(\eta)d\eta$ , teremos:

$$\begin{aligned} \langle u^i(t_1, r_1)u^i(t_2, r_2) \rangle &= \frac{q^2}{m^2} \int_0^{\eta_f} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 d\eta_2 \left[ a^{-2}(\eta_1)a^{-2}(\eta_2) \right. \\ &+ \left. \beta a^{-2}(\eta_1) + \beta a^{-2}(\eta_2) + \beta^2 \right] \\ &\times \partial_{1i}\partial_{2i}\langle \phi(\eta_1, r_1)\phi(\eta_2, r_2) \rangle_M. \end{aligned} \quad (4.24)$$

O último termo dentro do cochetes ( $\beta^2$ ) gera o que chamamos de termos de Minkowski. Precisamos, então, fazer um processo de renormalização realizado antes na seção 3.2, que consiste em de subtrair da função de dois pontos o termo correspondente ao de Minkowski. Dessa forma, último termo não contribui. Abrindo os termos e separando as integrais temos,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u^i)^2 \rangle &= \frac{q^2}{m^2} \int_0^{\eta_f} d\eta_2 a^{-2}(\eta_2) \int_0^{\eta_f} d\eta_1 a^{-2}(\eta_1) \partial_{1i}\partial_{2i}\langle \phi_1\phi_2 \rangle_M + \\ &+ \frac{q^2\beta}{m^2} \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_0^{\eta_f} d\eta_1 a^{-2}(\eta_1) \partial_{1i}\partial_{2i}\langle \phi_1\phi_2 \rangle_M + \\ &+ \frac{q^2\beta}{m^2} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 \int_0^{\eta_f} d\eta_2 a^{-2}(\eta_2) \partial_{1i}\partial_{2i}\langle \phi_1\phi_2 \rangle_M. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A função de dois pontos é dada no espaço de Minkowski pela Eq. (3.30). Só para relembrar, essa equação é:

$$\langle \phi(\eta_1, r_1)\phi(\eta_2, r_2) \rangle_M = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + r^2} \right], \quad (4.26)$$

em que  $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$  e  $(\Delta x^i)^2 = (x_1^i - x_2^i)^2$ . Assim, temos que

$$\partial_{1i}\partial_{2i}\langle \phi(\eta_1, r_1)\phi(\eta_2, r_2) \rangle_M = \partial_{1i}\partial_{2i} \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + r^2} \right]. \quad (4.27)$$

Vamos tomar uma direção específica, direção x por exemplo, teremos

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2}\langle \phi(\eta_1, r_1)\phi(\eta_2, r_2) \rangle_M = \frac{1}{4\pi^2} \frac{2}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^2} + \frac{1}{4\pi^2} \frac{8\Delta x^2}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^3}, \quad (4.28)$$

Substituindo (4.28) em (4.25), ficaremos com três integrais que podem ser separadas e renomeadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{q^2}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 a^{-2}(\eta_2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 a^{-2}(\eta_1) \left[ \frac{1}{4\pi^2} \frac{2}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi^2} \frac{8\Delta x^2}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^3} \right], \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{q^2\beta}{m^2} \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 a^{-2}(\eta_1) \left[ \frac{1}{4\pi^2} \frac{2}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^2} + \frac{1}{4\pi^2} \frac{8\Delta x^2}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^3} \right] \quad (4.29)$$

e

$$I_3 = \frac{q^2\beta}{m^2} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 a^{-2}(\eta_2) \left[ \frac{1}{4\pi^2} \frac{2}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^2} + \frac{1}{4\pi^2} \frac{8\Delta x^2}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^3} \right].$$

Assim, podemos escrever a equação (4.25) como

$$\langle (\Delta u^x)^2 \rangle = I_1 + I_2 + I_3. \quad (4.30)$$

Essas integrais podem ser resolvidas a partir do método de integração por resíduos apresentado no Apêndice A quando utilizamos um fator de escala da forma:

$$a^2(\eta) = a_0^2 + a_1^2 \tanh\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right). \quad (4.31)$$

o que foi o mesmo utilizado no Capítulo 3.

Perceba que mudamos os limites de algumas integrais para de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Isso foi feito para que podermos usar o método de integração por resíduos. Essa mudança não acarreta nenhuma inconsistência física, devido o comportamento da função de dois pontos dada por (3.30) que tende a zero quando  $t \rightarrow \pm\infty$  bem como, também pela a forma do fator de escala escolhido que tende a zero quando  $t \rightarrow 0$ .

Podemos então substituir a Eq. (4.31) na Eq. (4.29). Fazendo isso, encontraremos polos de segunda e primeira ordem, respectivamente

$$\eta_1 = \pm \frac{r}{c_0} + \eta_2 \quad (4.32)$$

e

$$\eta_{1k} = \eta_0 \pi i \left( k - \frac{1}{2} \right) - \frac{\eta_0}{2} \ln \left( \frac{\Upsilon^2 + 1}{\Upsilon^2 - 1} \right) \quad (4.33)$$

em que  $\Upsilon^2 = a_0^2/a_1^2$ .

Dessa forma, utilizando o método de integração por resíduos e tomando o limite de coincidência em  $I_2$  e  $I_3$ , ou seja, quando  $x_1 = x_2$  o que leva a  $r^2 = 0$  em  $I_2$  e  $I_3$ , os resultados das integrais da Eq. (4.29) serão:

$$I_1 = \frac{q^2 8A}{4\pi^4 m^2 a_1^4 c_0^4 \eta_0^2} S_2,$$



$$I_2 = -\frac{q^2 \beta i \eta_0 B}{\pi m^2 a_1^2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3c_0^4 (\eta_{1k} - \eta_f)^3} - \frac{1}{3c_0^4 \eta_{1k}} \right] \quad (4.34)$$

e

$$I_3 = -\frac{q^2 \beta i \eta_0 B}{\pi m^2 a_1^2} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{3c_0^4 (\eta_{2l} - \eta_f)^3} - \frac{1}{3c_0^4 \eta_{2l}} \right].$$

Os resultados  $I_2$  e  $I_3$  são idênticos de forma que podemos uni-los em um único somatório fazendo  $l = k$ . Além disso, usando esses resultados na equação (4.30), ficamos com

$$\langle (\Delta u^x)^2 \rangle = 2 \frac{q^2 A}{\pi^4 m^2 a_1^4 c_0^4 \eta_0^2} S_2 - 2 \frac{q^2 \beta i \eta_0 B}{3c_0^4 \pi m^2 a_1^2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\eta_k - \eta_f)^3} - \frac{1}{\eta_k} \right], \quad (4.35)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes dadas por  $A = \sinh^4 \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{a_0^2 + a_1^2}{a_0^2 - a_1^2} \right) \right]$  e  $B = A^{\frac{1}{2}}$ . Tomamos a forma dos parâmetros  $a_0^2$  e  $a_1^2$  como sendo a mesma descrita em [5]:

$$a_0^2 = \frac{a_f^2 + a_i^2}{2} \quad (4.36)$$

e

$$a_1^2 = \frac{a_f^2 - a_i^2}{2}, \quad (4.37)$$

em que  $a_i$  é o fator de escala em  $\eta_i$  ou seja, quando  $c_0 = c_s(\eta_i)$ . Podemos então concluir que  $a_i^2 = 1$  a partir da Eq. (3.22). Além disso, podemos definir  $a_f^2 = c_0/c_{sf}$  com  $c_{sf} = c_s(\eta_f)$ . A partir disso, podemos escrever esses parâmetros em termos dos parâmetros do fluido,  $c_0$  e  $c_s(\eta)$  e, dessa forma, escrever as constantes  $A$  e  $B$  em termos desses parâmetros. Disso tiramos que  $A = \frac{a_1^8}{a_f^4}$  e  $B = \frac{a_1^4}{a_f^2}$ .

Agora vamos escrever a equação (4.35) em função da velocidade própria através da relação  $v^x = a_f u^x$ , definido a partir da definição de distância  $l_f = a_f r$  mais apropriada a essa geometria. Assim,

$$\langle (\Delta v^x)^2 \rangle = \frac{2q^2 a_1^4}{\pi^4 m^2 c_0^4 \eta_0^2 a_f^2} S_2 + \frac{2q^2 \beta \eta_0 a_1^2}{3c_0^4 \pi m^2} \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{i}{(\eta_k - \eta_f)^3} - \frac{i}{\eta_k^3} \right] \right\}. \quad (4.38)$$

Agora, sabendo que  $\eta_k = \eta_0 \pi i \left( k - \frac{1}{2} \right) - \eta_0 f$  que é o polo definido, onde  $f = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{a_0^2 + a_1^2}{a_0^2 - a_1^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{c_0}{c_{sf}} \right)$ , podemos reescrever o somatório da equação (4.38) da seguinte forma:

$$-\frac{1}{\eta_0^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{i}{\left[ \pi i \left( k - \frac{1}{2} \right) - f - \varepsilon \right]^3} - \frac{i}{\left[ \pi i \left( k - \frac{1}{2} \right) - f \right]^3} \right\} = \frac{F_k}{\eta_0^3} \quad (4.39)$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro adimensional definido como  $\varepsilon = \frac{\eta_f}{\eta_0}$ .

Vamos lembrar também que nas integrais  $I_2$  e  $I_3$  já foi tomado o limite de coincidência. Porém, ainda não tomamos esse limite em  $I_1$ . Para  $I_1$ , temos que,

$$S_2 = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(p-1)}{\left[p^2 + \frac{r^2}{c_0^2 \eta_0^2 \pi^2}\right]^2}. \quad (4.40)$$

Tomando o limite de coincidência nessa equação, as somas  $F_k$  e  $S_2$  calculadas com ajuda de um software têm o seguinte resultado:

$$S_2 = \zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \quad (4.41)$$

e

$$F_k = \frac{1}{2\pi^3} \left[ \psi^{(2)} \left( \frac{if}{\pi} + \frac{1}{2} \right) - \psi^{(2)} \left( \frac{2if + 2i\varepsilon + \pi}{2\pi} \right) \right], \quad (4.42)$$

onde  $\zeta$  é a função zeta de Riemann e  $\psi^{(2)}$  é a função poligama. Essa função é complexa de forma que vamos usar somente a parte real dela. Podemos, então reescrever a equação (4.38) da seguinte forma:

$$\langle (\Delta v^x)^2 \rangle = \frac{2q^2 B}{\pi^4 m^2 c_0^4 \eta_0^2} \left( \zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right) + \frac{2q^2 \beta}{3c_0^4 \pi m^2 \eta_0^2} \left( \frac{c_0}{c_{sf}} B \right)^{\frac{1}{2}} \text{Re} [F_k]. \quad (4.43)$$

Vamos reorganizar essa Eq. para podermos analisar o resultado graficamente. Inicialmente, coloquemos todos os termos comuns em evidência na Eq. (4.43):

$$\langle (\Delta v^x)^2 \rangle = \frac{2q^2 B}{\pi m^2 c_0^4 \eta_0^2} \left\{ \frac{1}{\pi^3} \left( \zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right) + \frac{\beta B^{-\frac{1}{2}}}{3} \left( \frac{c_0}{c_{sf}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Re} [F_k] \right\}. \quad (4.44)$$

Agora, vamos analisar graficamente esse resultado. Da Eq. (4.44) podemos tirar que:

$$G(\varepsilon) = \frac{\pi m^2 c_0^4 \eta_0^2}{2q^2 B} \langle (\Delta v^x)^2 \rangle = \frac{1}{\pi^3} \left( \zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right) + \frac{\beta B^{-\frac{1}{2}}}{3} \left( \frac{c_0}{c_{sf}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Re} [F_k] \quad (4.45)$$

O gráfico da Figura 2 a seguir mostra a plotagem da função  $G(\varepsilon)$  definida pela Eq. (4.45). Para essa traçar o gráfico, foi estipulado um valor para  $c_0/c_{sf}$ , levando em consideração que  $c_{sf}$  é menor que  $c_0$ . A partir disso, calculamos os valores da constante  $B$  dado pela Eq. (3.40) na Eq. (4.45) e de  $f$  presente em  $F_k$ , nas Eqs. (4.39) e (4.42). Para a curva em azul os valores usados foram os seguintes:

$$\frac{c_0}{c_{sf}} = 1,1; \quad B = 0,00227; \quad f = 0,0467. \quad (4.46)$$

Já para a curva em laranja, fizemos uma pequena variação da razão das velocidades  $c_0/c_{sf}$ . Os valores utilizados foram:

$$\frac{c_0}{c_{sf}} = 1,2; \quad B = 0,00833; \quad f = 0,0911. \quad (4.47)$$

Também foi atribuído um valor para  $\beta$ . De acordo com [18], utilizamos o valor de  $\beta = 3,6 \times 10^{-8}$ .

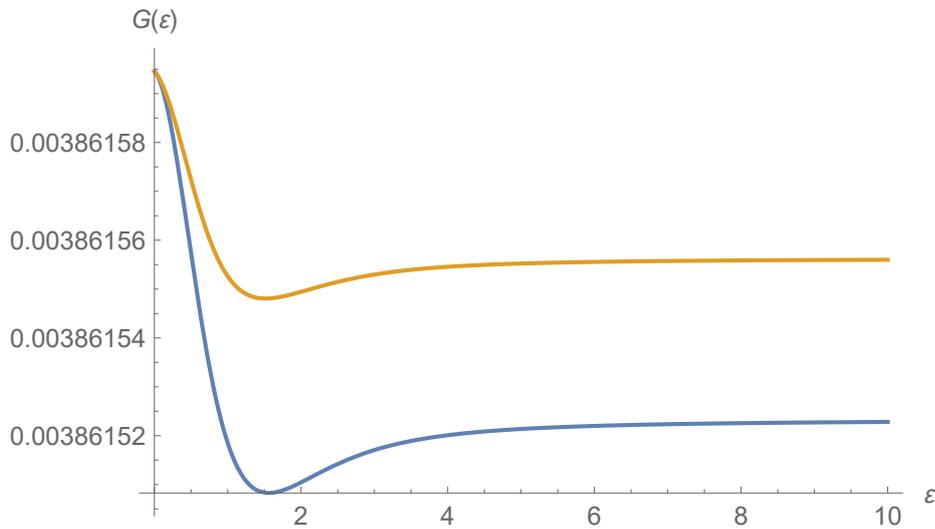


Figura 2 – gráfico  $G \times \varepsilon$  da eq. (4.45) devido a contribuição da quebra de Lorentz para o caso ligado

Perceba que a quebra de simetria interfere diminuindo o valor da dispersão de um valor constante. Para valores grandes de  $\varepsilon$  (tempos grandes), contudo, temos que  $G(\varepsilon)$  tende a valores constante. De fato, como nossa variável tempo se encontra no somatório dada pela Eq. (4.39), tomando o limite em que  $\varepsilon \rightarrow \infty$  temos um valor constante dado pela função poligama. O gráfico (3) também mostra isso.

$$F_k = \frac{\psi^{(2)}\left(\frac{if}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2\pi^3}. \quad (4.48)$$

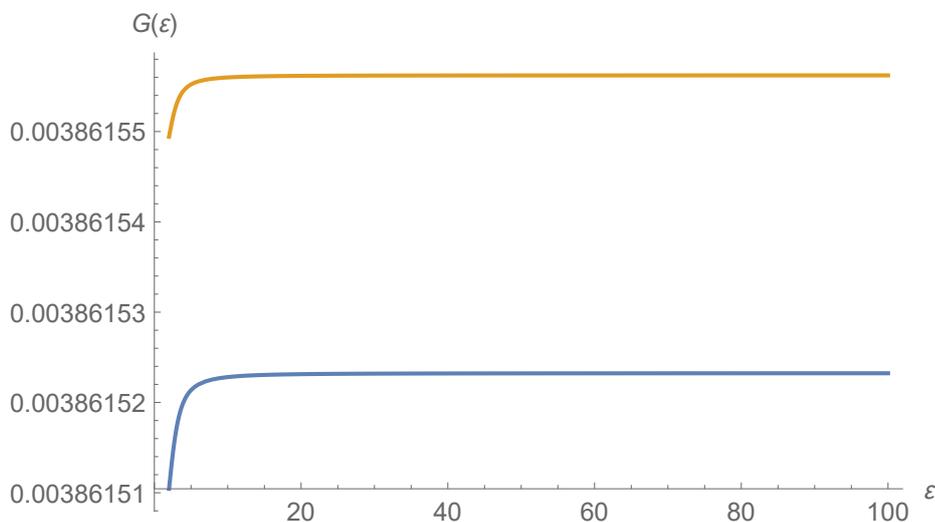


Figura 3 – gráfico  $G \times \varepsilon$  da eq. (4.45) para  $\varepsilon \rightarrow \infty$

Perceba que quando fazemos  $\beta = 0$  na Eq. (4.45), retomamos ao valor encontrado na literatura [5] para a dispersão de velocidade que é o mesmo valor dada pela Eq. (3.39).

## 4.2 Caso Livre

Vamos tratar agora do caso livre, ou seja, uma situação em que não há nenhuma força externa. Nesse caso, teremos a mesma Eq. (3.41) do caso livre sem quebra de simetria

$$\frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} (a^2 u^i) = \frac{f^i}{m} \quad (4.49)$$

que integrando ficamos com

$$u^i(t, r) = \frac{1}{ma_f^2} \int_0^{t_f} dt a^2(t) f^i(t, r). \quad (4.50)$$

Lembrando que estamos interessados na dispersão da tri-velocidade em que

$$\langle (\Delta u^i)^2 \rangle = \langle u_1^i u_2^i \rangle - \langle u_1^i \rangle \langle u_2^i \rangle.$$

Dessa forma, a relação de dispersão da tri-velocidade será dada por:

$$\langle (\Delta u^i)^2 \rangle = \langle u^i(t_1, r_1) u^i(t_2, r_2) \rangle = \frac{1}{m^2 a_f^4} \int_0^{t_f} \int_0^{t_f} dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) \langle f^i(t_1, r_1) f^i(t_2, r_2) \rangle, \quad (4.51)$$

onde a força será dada pela Eq. (4.22) do caso ligado. Assim vamos considerar que a Eq. (2.28) do caso ligado é uma matriz diagonal e que, nessa situação devemos ter  $i = j$  na Eq. (4.21). Nosso limite de integração será de 0 até  $t_f$ . Dessa forma, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u^i)^2 \rangle &= \frac{q^2}{m^2 a_f^4} \int_0^{t_f} \int_0^{t_f} dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) [a^{-2}(t_1) + \beta] [a^{-2}(t_2) + \beta] \\ &\times \partial_{1i} \partial_{2i} \langle \phi(t_1, r_1) \phi(t_2, r_2) \rangle_{FRW} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, podemos perceber que alguns fatores de escala serão cancelados. Além disso, aplicado a relação dada pela Eq. (3.30) para mudar do espaço  $FRW$  para o espaço de Minkowski e fazendo a mudança  $dt = a(\eta)d\eta$ , a equação anterior ficará:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u^i)^2 \rangle &= \frac{q^2}{m^2 a_f^4} \int_0^{\eta_f} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 d\eta_2 [\beta a^2(\eta_2) + \beta a^2(\eta_1) \\ &+ \beta^2 a^2(\eta_1) a^2(\eta_2)] \partial_{1i} \partial_{2i} \langle \phi(\eta_1, r_1) \phi(\eta_2, r_2) \rangle_M. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta u^i)^2 \rangle &= \frac{q^2}{4\pi^2 m^2 a_f^4} \left[ \partial_{1i} \partial_{2i} \int_0^{\eta_f} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 d\eta_2 \langle \phi(\eta_1, r_1) \phi(\eta_2, r_2) \rangle_M \right. \\
&+ \beta \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_0^{\eta_f} d\eta_1 a^2(\eta_1) \partial_{1i} \partial_{2i} \langle \phi(\eta_1, r_1) \phi(\eta_2, r_2) \rangle_M \\
&+ \beta \int_0^{\eta_f} d\eta_1 \int_0^{\eta_f} d\eta_2 a^2(\eta_2) \partial_{1i} \partial_{2i} \langle \phi(\eta_1, r_1) \phi(\eta_2, r_2) \rangle_M \\
&\left. + \beta^2 \int_0^{\eta_f} d\eta_2 a^2(\eta_2) \int_0^{\eta_f} d\eta_1 a^2(\eta_1) \partial_{1i} \partial_{2i} \langle \phi(\eta_1, r_1) \phi(\eta_2, r_2) \rangle_M \right]. \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Podemos perceber como já comentado no caso ligado, que a primeira integral da Eq. (4.54) é um termo chamado de Minkowski puro que precisa ser renormalizado subtraindo o mesmo na equação. Dessa forma, esse termo não irá influenciar em nossos cálculos. As demais integrais podem ser resolvidas através do método de integração por resíduos. Faremos uma breve descrição agora da forma que os resultados foram obtidos para essas integrais, uma vez que para utilizar a integração por resíduos foi preciso algumas manipulações matemáticas. O termo  $4\pi^2$  surge da função de dois pontos, que será dada pela Eq. (3.30). Colocamos ele em evidência para não carregar as notações das integrais que surgirão mais a frente. Assim, tomando o limite de coincidência<sup>1</sup> definimos:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{2}{c_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 a^2(\eta_2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \right], \\
I_5 &= \frac{2}{c_0^4} \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \right] \quad (4.55)
\end{aligned}$$

e

$$I_6 = \frac{2}{c_0^4} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 a^2(\eta_2) \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \right]$$

onde  $I_4$  é o último termo de (4.54),  $I_5$  e  $I_6$  correspondem ao segundo e terceiro termos de (4.54).

Agora, vamos fazer algumas manipulações para resolver essas integrais. Primeiramente, observe que podemos escrever:

$$\frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4} = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right]. \quad (4.56)$$

Assim,  $I_4$  da Eq. (4.55) fica da seguinte forma:

$$I_4 = \frac{2}{c_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 a^2(\eta_2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \left\{ -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right] \right\}. \quad (4.57)$$

Perceba que usando a regra de derivação do produto podemos ter:

$$\frac{d}{d\eta_1} \left\{ a^2(\eta_1) \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right] \right\} = a^2(\eta_1) \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right] \right\} + \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)]. \quad (4.58)$$

<sup>1</sup> Fazer isso aqui não interfere no resultado final. você pode verificar esse fato. Fizemos isso aqui para facilitar a escrita das equações

Integrando essa equação de  $-\infty$  a  $\infty$ , o primeiro termo da esquerda vai a zero, de forma que teremos a seguinte igualdade:

$$a^2(\eta_1) \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right] \right\} = -\frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)].$$

Logo, através de uma integração por partes ficamos com:

$$I_4 = \frac{2}{3c_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 a^2(\eta_2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right] \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)] \quad (4.59)$$

Perceba que esse “truque” pode também ser usado para  $I_5$  e  $I_6$ . Contudo, como no caso de  $I_4$  temos dois fatores de escala, podemos usar esse procedimento mais uma vez. Sendo assim, a Eq. (4.55) poderá ser reescrita como:

$$I_4 = -\frac{1}{3c_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \frac{d}{d\eta_2} [a^2(\eta_2)] \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^2} \right] \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)],$$

$$I_5 = \frac{2}{3c_0^4} \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right] \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)] \quad (4.60)$$

e

$$I_6 = -\frac{2}{3c_0^4} \int_0^{\eta_f} d\eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right] \frac{d}{d\eta_2} [a^2(\eta_2)].$$

Iremos exemplificar os próximos passos utilizando  $I_4$  da Eq. (4.60). Mas o procedimento para as demais integrais é o mesmo. Vamos tomar a mesma forma do fator de escala que utilizamos no caso ligado, ou seja, vamos escrever  $a^2(\eta) = a_0^2 + a_1^2 \tanh(\eta/\eta_0)$ . Fazendo essa substituição na Eq. (4.60), ficamos com os seguintes polos para  $I_4$ :

$$\eta_{1k} = \eta_0 \pi i \left( k + \frac{1}{2} \right); \quad \eta_{2l} = \eta_0 \pi i \left( l - \frac{1}{2} \right). \quad (4.61)$$

A mesma forma desses polos podem ser escritas para  $I_5$  e  $I_6$ , porém, apenas uma vez, devido que nessas integrais o fator de escala aparecer apenas uma vez. Como  $I_4$  possui dois fatores de escala, escrevemos esses dois polos. Para  $I_5$  e  $I_6$ , tomamos a primeira forma da Eq. (4.61).

Dessa forma, utilizando o método de integração por resíduos, os resultados das integrais da Eq. (4.60) serão:

$$I_4 = \frac{8a_1^4}{c_0^4 \eta_0^2 \pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(k+m)+1]^4} \right\},$$

$$I_5 = \frac{4\pi i a_1^2}{3c_0^4 \eta_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[\pi i (k + \frac{1}{2}) - n]^3} - \frac{1}{[\pi i (k + \frac{1}{2})]^3} \right\} \quad (4.62)$$

e

$$I_6 = \frac{4\pi i a_1^2}{3c_0^4 \eta_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[\pi i(l + \frac{1}{2}) - n]^3} - \frac{1}{[\pi i(l + \frac{1}{2})]^3} \right\}$$

Para  $I_4$ , o método de integração por resíduos foi utilizado duas vezes devido a presença de dois fatores de escala. Para  $I_5$  e  $I_6$  o método foi utilizado apenas uma vez. Perceba, contudo que essas integrais também são duplas como  $I_4$ . Para resolver a segunda integral de  $I_5$  e  $I_6$ , foi utilizado uma integração por substituição.

Olhando agora para  $I_4$  na Eq. (4.62), vamos chamar  $p = k + m$  no somatório. Fazendo isso, podemos escrever um único somatório no qual cada termo se repete  $p + 1$  para cada combinação de  $k + m$ . A tabela a seguir mostra esse fato para algumas combinações de  $k$  e  $m$ .

Tabela 1 – algumas combinações para  $p = k + m$ 

$m \setminus k$	0	1	2	3	...
0	p=0	p=1	p=2	p=3	...
1	p=1	p=2	p=3	p=4	...
2	p=2	p=3	p=4	p=5	...
3	p=3	p=4	p=5	p=6	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Perceba que, por exemplo  $p = 0$ , esse termo se repete  $p + 1 = 1$  vez. Da mesma forma, para  $p = 1$ , esse valor se repete  $p + 1 = 2$  vezes. Já para  $p = 3$  temos  $p + 1 = 4$  repetições para esse valor de  $p$ , e assim sucessivamente. Dessa forma, podemos escrever:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(k + m) + 1]^4} \right\} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{[p + 1]^3}, \quad (4.63)$$

onde para evitar a contagem dupla de termos, dividimos a equação por  $p + 1$ . Então, pela definição da função zeta de Riemann, temos:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{[p + 1]^3} = \zeta(3). \quad (4.64)$$

Podemos perceber ainda que  $I_5$  e  $I_6$  são bem semelhantes a não ser pelos índices de soma. Como são resultados independentes, vamos uni-las em um único somatório chamando  $l = k$ . Lembrando que definimos  $\varepsilon$  como  $\varepsilon = \eta_f / \eta_0$ . Dessa forma ficamos com:

$$I_4 = \frac{8a_1^4}{c_0^4 \eta_0^2 \pi^2} \zeta(3) \quad (4.65)$$

e

$$I'_5 = I_5 + I_6 = \frac{8\pi a_1^2}{3c_0^4 \eta_0^2} F_k \quad (4.66)$$

onde, para esse caso:

$$F_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{i}{\left[ \pi i \left( k + \frac{1}{2} \right) - \varepsilon \right]^3} - \frac{i}{\left[ \pi i \left( k + \frac{1}{2} \right) \right]^3} \right\}. \quad (4.67)$$

Agora, com os resultados de (4.65) e (4.66), voltemos a Eq. (4.54) para obter a seguinte equação para a dispersão de velocidade, na direção  $x$

$$\langle (\Delta u^x)^2 \rangle = \frac{q^2}{4\pi^2 m^2 a_f^4} \left\{ \beta^2 \frac{8a_1^4}{c_0^4 \eta_0^2 \pi^2} \zeta(3) + \beta \frac{8\pi a_1^2}{3c_0^4 \eta_0^2} \text{Re} [F_k] \right\}. \quad (4.68)$$

Tendo as definições (4.36) e (4.37) do caso ligado, e lembrando que definimos  $B = a_1^4/a_f^2$  e ainda definindo  $C = a_1^2/a_f^2$ , podemos escrever:

$$\langle (\Delta v^x)^2 \rangle = \frac{2q^2 \beta^2 B}{\pi^4 m^2 c_0^4 \eta_0^2} \zeta(3) + \frac{2q^2 \beta C}{3\pi m^2 c_0^4 \eta_0^2} \text{Re} [F_k], \quad (4.69)$$

onde ainda fizemos a mudança para a velocidade própria usando  $v^x = a_f u^x$

Vamos agora fazer uma análise gráfica do termo de primeira ordem da Eq. (4.69). Para isso, assim como no caso ligado, atribuímos um valor para as constantes  $B$  e  $C$  sabendo que ela pode ser escrita em termos dos parâmetros do fluido da forma:

$$B = \frac{c_0}{4c_{sf}} \left( 1 - \frac{c_{sf}}{c_0} \right) \quad (4.70)$$

e

$$C = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c_{sf}}{c_0} \right). \quad (4.71)$$

Reorganizando a Eq. (4.69), teremos:

$$G'(\varepsilon) = \frac{\pi m^2 c_0^4 \eta_0^2}{2q^2} \langle (\Delta v^x)^2 \rangle = \frac{\beta^2 B}{\pi^3} \zeta(3) + \frac{\beta C}{3} \text{Re} [F_k]. \quad (4.72)$$

A soma  $F_k$ , dada pela Eq. (4.67), calculada através da ajuda de um software será:

$$F_k = \frac{14\zeta(3) + \psi^{(2)}\left(\frac{i\varepsilon}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2\pi^3} \quad (4.73)$$

da qual utilizamos apenas a parte real.

Assim, podemos plotar o gráfico de  $G'(\varepsilon)$  mostrado na figura 4.



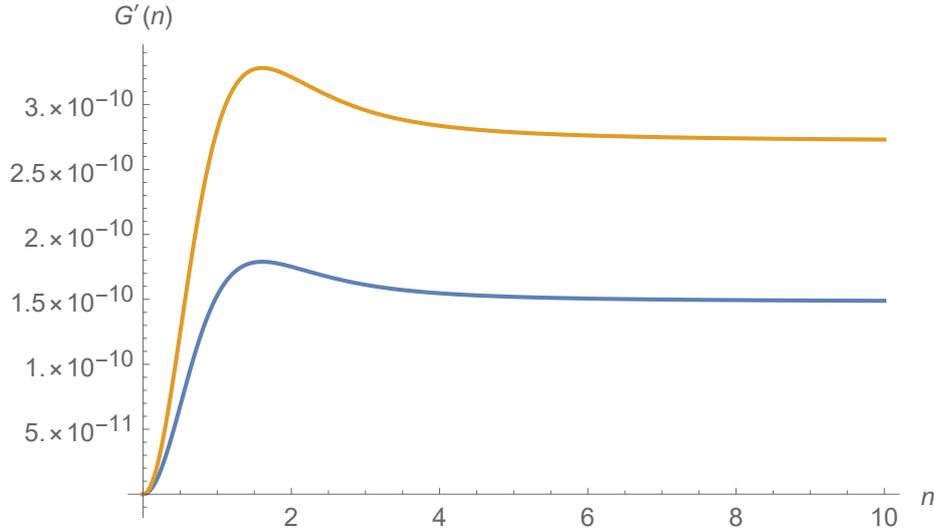


Figura 4 – gráfico  $G' \times \varepsilon$  da Eq. (4.72) devido a contribuição da quebra de Lorentz para o caso livre.

A curva em azul foi plotada para os valores de  $B = 0,00227$  e  $C = 0,04545$  e a curva em laranja para  $B = 0,00833$  e  $C = 0,08333$ , para os valores de razão de velocidade  $c_0/c_{sf}$  de 1,1 e 1,2 respectivamente.

Perceba que esse resultado é condizente com o caso livre descrito na seção 3.2 em que não havia MBQ, ou seja, a dispersão é nula quando  $\beta = 0$ . Quando  $\varepsilon = 0$  (corresponderia a um tempo inicial  $\eta = 0$ ) o valor da dispersão é nulo. Porém conforme o tempo cresce, diferente do caso livre apresentado na subseção 3.2, o resultado deixa de ser nulo e passamos a ter um valor de dispersão de velocidade<sup>2</sup> diferente de zero, consequência da quebra de simetria. Dessa forma podemos concluir que dentro de um cenário onde ocorre quebra de simetria de Lorentz podemos esperar que haja movimento browniano em uma situação que usualmente o resultado seria nulo. Para  $\varepsilon \rightarrow \infty$  (tempos grandes),  $G'(\varepsilon)$  tende a uma valor constante. Dessa forma, na Eq. (4.69), podemos desconsiderar os termos de segunda ordem em  $\beta$  e considerar a Eq. (4.72) como sendo o nosso resultado. Aqui, atribuímos um valor  $\beta = 3,6 \times 10^{-8}$ , como no caso ligado.

Perceba também que, quando fazemos  $\beta = 0$  na (4.72), teremos uma dispersão nula como esperado da literatura [5]

Para tempos grandes ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ ) temos que a soma  $F_k$  será:

$$F_k = \frac{7\zeta(3)}{\pi^3} \quad (4.74)$$

Podemos ver também esse resultado graficamente.

<sup>2</sup> lembre-se que  $G'(\varepsilon)$  está relacionado com a dispersão através da Eq. (4.72)

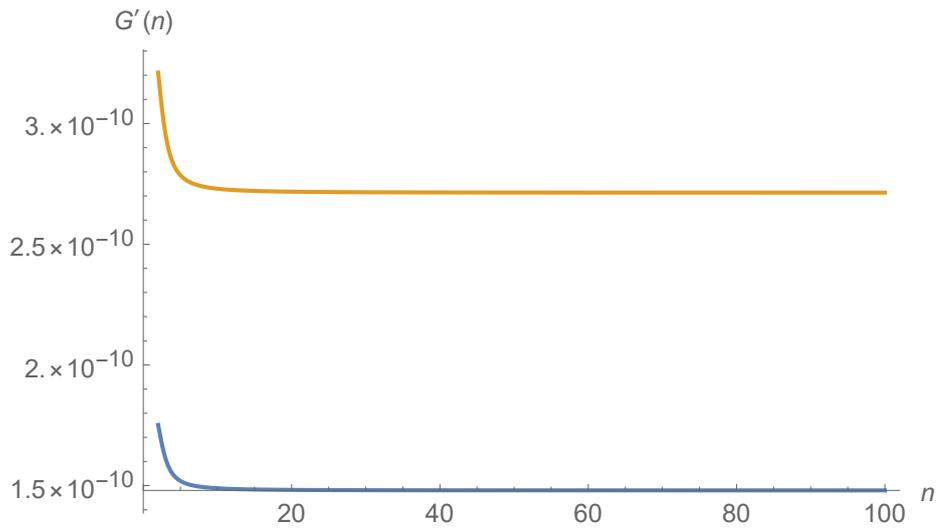


Figura 5 – gráfico  $G' \times \varepsilon$  da eq. (4.72) quando  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Tanto no caso livre quanto no caso ligado, os dois valores utilizados para a razão  $c_0/c_{sf}$  foram estipulados para as análises gráficas. A variação dessa razão provoca um deslocamento da curva como pode ser vista nos gráficos acima, o que significa uma mudança no valor da dispersão de velocidade.

## 5 Conclusões

Nessa dissertação apresentamos no Capítulo 2 possíveis maneiras que a simetria de Lorentz possa ser violada em alguns setores do SME. No Capítulo 3 na seção 3.2, falamos sobre o movimento browniano quântico e apresentamos o formalismo que pode descrever esse fenômeno em uma geometria dependente do tempo. No Capítulo 4, com base nos formalismos apresentados anteriormente, fizemos uma investigação acerca dos efeitos que surgem em uma partícula que, se movendo em uma geometria análoga semelhante a geometria de FRW, pode apresentar movimento browniano quântico também na presença de uma violação de simetria de Lorentz.

Para o caso ligado em que as partículas estão unidas por uma força externa, percebemos que o cenário com ocorrência de violação de simetria de Lorentz influencia a dispersão de velocidade das partículas no condensado diminuindo-a até um valor constante, embora nos primeiros instantes ocorra uma variação. Para o caso livre, ou seja, quando não há força externa que mantenha as partículas ligadas, ocorre, de certa forma, o contrário, uma vez que a quebra de simetria poderia provocar uma dispersão de velocidade nas partículas que não se obteria em um caso sem quebra, a menos que fosse considerado algum tipo de fronteira como proposto por [5]. Essa dispersão começa nula e aumenta a medida que o tempo passa.

Outro ponto que merece destaque é a relação dos resultados com a razão  $c_0/c_{sf}$ . Mudança dessa razão pode provocar um deslocamento das curvas como podem ser visto nos gráficos das Figuras (2) e (4), ou seja, aumentando ou diminuindo valor final de dispersão.

Como esperado de uma teoria com quebra de simetria de Lorentz, nossos resultados apresentam pequenas correções que são difíceis de serem detectadas. No entanto, como modelos fenomenológicos para quebra de simetria de Lorentz ainda são escassos, nosso propósito com esse trabalho foi o de fornecer mais uma alternativa onde tal fenômeno possa, em um futuro próximo, ser observado. O uso de um CBE como possível laboratório para se testar os efeitos discutidos no Capítulo 4 nos parece ser promissor, uma vez que ele já está sendo utilizado como laboratório para a construção de modelos para métrica de FRW [25] e de buracos negros [9].

Como perspectiva para futuros trabalhos envolvendo esse tema, podemos considerar os termos apenas de  $\alpha$  na Eq. (2.28) ou até mesmo todos os termos ou ainda considerar que as partículas poderiam ser tratadas como pacotes de ondas como proposto por [22]. Essas são possibilidades de trabalhos a serem considerados. Por fim, fica a expectativa também de, dentro da aceitação e correção dessa dissertação, a produção e publicação de

artigos dos resultados aqui obtidos.

# Referências

- 1 FERRARI, A. F. A busca por violações da simetria de Lorentz: testando os princípios da relatividade restrita na escala de Planck. **REVISTA BRASILEIRA DO ENSINO DE FÍSICA**, v. 41, n. 4, 2019. Citado 6 vezes nas páginas [15](#), [24](#), [25](#), [29](#), [30](#) e [31](#).
- 2 R. Gambini e J. Pullin. *A first course in Loop Quantum Gravity*. Oxford University Press, Oxford, 2011. Citado na página [25](#).
- 3 KOSTELECKY, V. A. SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **PHYSICAL REVIEW D**, v. 39, 1989. Citado na página [25](#).
- 4 BÉSSA, C. H.G. BEZERRA, V.B. FORD, L.H. J. **MATH. PHYS. (N.Y.)** 50, 062501, 2009 Citado 3 vezes nas páginas [26](#), [42](#) e [43](#).
- 5 BÉSSA, C.H.G. BEZERRA, V.B. MELLO, E.R. B. MOTA, H.F. Quantum Brownian motion in an analog Friedmann-Robertson-Walker geometry. **PHYSICAL REVIEW D**, v. 95, p. 1-15, 26 abr. 2017. Acesso em: 6 out. 2019. Citado 10 vezes nas páginas [26](#), [41](#), [42](#), [43](#), [44](#), [47](#), [55](#), [58](#), [63](#) e [65](#).
- 6 YU, H. FORD, L.H. Vacuum fluctuations and Brownian motion of a charged test particle near a reecting boundary. **PHYSICAL REVIEW D**, v. 70, 065009. set. 2004. Citado 2 vezes nas páginas [26](#) e [42](#).
- 7 GOUR, G. SRIRAMKUMAR, L. Will Small Particles Exhibit Brownian Motion in the Quantum Vacuum? **FOUNDATIONS OF PHYSICS**, v. 29, p. 1917–1949, dez 1999. Citado 2 vezes nas páginas [26](#) e [42](#).
- 8 BESSA, C.H.G. REBOUÇAS, M.J. Electromagnetic vacuum uctuations and topologically induced motion of a charged particle. arXiv:1910.08694. Citado 2 vezes nas páginas [26](#) e [42](#).
- 9 BARCELÓ, C. LIBERATI, S. VISSER, M. Analogue Gravity. **LIVING REVIEWS IN RELATIVITY**, v. 14, n. 3, maio, 2011. Citado 4 vezes nas páginas [26](#), [42](#), [65](#) e [80](#).
- 10 NOVA, J. R. M. GOLUBKOV, K. KOLOBOV, V. I. STEINHAEUER, J. L. Observation of thermal Hawking radiation and its temperature in an analogue black hole. **NATURE**, v. 569, p. 688–691, 2019. Citado 3 vezes nas páginas [26](#), [43](#) e [50](#).
- 11 POISSON, E. POUND, A. VEGA, I. The Motion of Point Particles in Curved Spacetime. **LIVING REVIEWS IN RELATIVITY** v. 7, n. 6, 2004. <https://doi.org/10.12942/lrr-2004-6> Citado na página [45](#).

- 12 KOSTELECKY, V. A. LEHNERT, R. Stability, Causality, and Lorentz and CPT Violation. **PHYSICAL REVIEW D**, v. 63, 065008, 2001. Citado 4 vezes nas páginas [30](#), [31](#), [32](#) e [33](#).
- 13 COLLADAY, D. KOSTELECKY, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **PHYSICAL REVIEW D**, v. 58, 116002, 1998. Citado 4 vezes nas páginas [30](#), [31](#), [32](#) e [35](#).
- 14 BAILEY, Q. G. KOSTELECKY, V. A. Lorentz-Violating Electrostatics and Magnetostatics. **PHYSICAL REVIEW D**, v. 70, 076006, 2004. Citado 4 vezes nas páginas [30](#), [31](#), [32](#) e [34](#).
- 15 KOSTELECKY, V. A. Gravity, Lorentz Violation, and the Standard Model. **PHYSICAL REVIEW D**, v. 69, 105009, 2004. Citado 2 vezes nas páginas [31](#) e [32](#).
- 16 BARRETO, M.N. BAZEIA, D. MENEZES, R. Defect Structures in Lorentz and CPT Violating Scenarios. **PHYSICAL REVIEW D**, v. 73, 065015, 2006. Citado na página [32](#).
- 17 ANACLETO, M. A. BRITO, F. A. PASSOS, E. Acoustic black holes from Abelian Higgs model with Lorentz symmetry breaking. **PHYSICS LETTERS B**, v. 694, ed. 12, p. 149-157, 2010. Citado 4 vezes nas páginas [37](#), [38](#), [49](#) e [50](#).
- 18 ANACLETO, M. A. BRITO, F. A. PASSOS, E. Superresonance effect from a rotating acoustic black hole and Lorentz symmetry breaking. **PHYSICS LETTERS B**, v. 703, ed. 5, p. 609-613, 2011. Citado 3 vezes nas páginas [37](#), [49](#) e [57](#).
- 19 SALINAS, Sílvio R. A. Einstein e a teoria do movimento browniano. **REVISTA BRASILEIRA DO ENSINO DE FÍSICA**, v. 27, n. 2, p. 263 - 269, 2005. Citado na página [39](#).
- 20 SILVA, J. M.; LIMA, J. A. S. Quatro abordagens para o movimento browniano. **REVISTA BRASILEIRA DO ENSINO DE FÍSICA**, v. 29, n. 1, p. 25-35, 1 mar. 2007. Citado 3 vezes nas páginas [39](#), [40](#) e [41](#).
- 21 SALINAS, Sílvio R. A. Introdução a Física Estatística. 2. ed. São Paulo: Editora da universidade de São Paulo, 2008, p. 397-423. Citado 2 vezes nas páginas [41](#) e [79](#).
- 22 SERIU, M. WU, C. H. Smearing effect due to the spread of a probe particle on the Brownian motion near a perfectly reflecting boundary. **PHYSICAL REVIEW A**, v. 80, 052101, 2009. Citado 2 vezes nas páginas [41](#) e [65](#).
- 23 BIRRELL, N. D. DAVIES, P. C. W. Quantum fields in curved space. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982. Citado 2 vezes nas páginas [45](#) e [81](#).

- 
- 24 ECKEL, S. KAMUR, A. JACOBSON, T. SPIELMAN, I. B. CAMPBELL, G. K. A. Rapidly Expanding Bose-Einstein Condensate: An Expanding Universe in the Lab. **PHYSICAL REVIEW X**. v. 8, 021021, 2018. Citado na página 46.
- 25 JAIN, P. WEINFURTNER, S. VISSER, M. GARDINER, C. W. Analog model of a Friedmann-Robertson-Walker universe in Bose-Einstein condensates: Application of the classical field method. **PHYSICAL REVIEW A**. v. 76, 033616, 2007. Citado na página 65.
- 26 BOAS, Mary. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. John Wiley Sons. ed. 3, 2005. Citado na página 73.
- 27 ADHIKARI, S. K. Symmetry breaking, Josephson oscillation and self-trapping in a self-bound three-dimensional quantum ball. **SCIENTIFIC REPORTS**, v. 7, 2017. Citado na página 80.





# Apêndices



## APÊNDICE A – Teorema do resíduo

Vamos aqui descrever brevemente a ideia por trás do chamado teorema do resíduo que pode ser aplicado para a resolução de integrais que apresentam singularidades, como as integrais que aparecem em nosso problema. Nosso objetivo aqui é apresentar conceitos importantes para entender e aplicar esse teorema. Para mais detalhes, pode-se ler o capítulo 14 da referência [26]. Vamos então, ver algumas definições que serão úteis ao nosso entendimento do teorema do resíduo.

Seja uma função  $f(z)$ . Podemos dizer que ela é analítica se a derivada de  $f(z)$ , ou seja  $f'(z)$ , existe em todos os pontos de  $z$ . Contudo, pode haver um ponto  $z_0$  em que a função não é analítica. Esse ponto é chamado de ponto singular ou singularidade de  $f(z)$ . Por exemplo, imaginemos a seguinte função:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad (\text{A.1})$$

em  $z = 1$ , a função não é analítica, pois nesse ponto a função não converge. Então, podemos dizer que para essa função,  $z_0 = 1$  é uma singularidade de  $f(z)$ .

Dessa forma, podemos definir o que chamamos de polo de uma função. Se existe um número inteiro  $n$  tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \{(z - z_0)^n f(z)\} \neq 0. \quad (\text{A.2})$$

Então, se  $z = z_0$ , dizemos que  $z_0$  é um polo da função  $f(z)$  de ordem  $n$ . O polo é dito simples quando  $n = 1$ .

É possível então calcular o resíduo de uma função que apresenta singularidades. Para isso, é necessário escrever uma série de Laurent que é dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \quad (\text{A.3})$$

Assim, fazendo essa expansão, podemos encontrar a seguinte definição para o resíduo de uma função  $f(z)$ :

$$Res(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]. \quad (\text{A.4})$$

Se temos um polo simples, ou seja, quando  $n = 1$  teremos que o resíduo será dado por:

$$Res(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]. \quad (\text{A.5})$$

Dessa forma, podemos anunciar o teorema do resíduo. Deixaremos como exemplo de aplicação desse teorema e dos conceitos mostrados aqui, a resolução de uma das integrais que aparecem em nosso problema descrito na Capítulo 4.

Imagine uma região  $R$  delimitada por uma curva fechada  $C$ . Tomemos uma função  $f(z)$  analítica exceto dentro do contorno  $C$  devido as singularidades  $a, b, c, d, e, \dots$  (ver a imagem 6), em que cada ponto de singularidade possui um resíduo. O teorema do resíduo diz que

$$\int f(z)dz = 2\pi i \times \text{soma de todos os resíduos dentro de } C. \quad (\text{A.6})$$

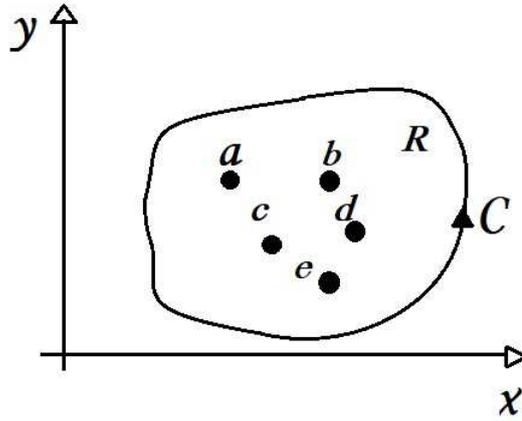


Figura 6 – Ilustração de uma região  $R$  delimitada por uma curva  $C$  em que existem pontos de singularidades. Fonte: criada pelo autor

A grande questão é, agora, calcular os resíduos e, para isso é necessário identificar os polos. Para exemplificar, vamos calcular a integral dada pela Eq. (4.60), no caso para  $I_4$ . A integral em questão é:

$$I_4 = -\frac{1}{3c_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \frac{d}{d\eta_2} [a^2(\eta_2)] \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^2} \right] \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)]. \quad (\text{A.7})$$

Vamos aplicar o teorema do resíduo. Usando a forma do fator de escala  $a(\eta)$  dada pela Eq. (3.36) podemos escrever essa equação da seguinte forma:

$$I_4 = -\frac{1}{3c_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \frac{d}{d\eta_2} [a^2(\eta_2)] \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \frac{a_1^2}{\eta_0 \cosh^2(\eta_1/\eta_0)} \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^2} \right]. \quad (\text{A.8})$$

Olhemos para a integral mais a direita. Perceba que temos dois pontos de singularidade. O primeiro é quando  $\eta_1 = \eta_2$ . Esse é um polo de ordem 2. O segundo ponto é quando fazemos  $\cosh^2(\eta_1/\eta_0) = 0$ . Como  $\cosh z$  é uma função periódica, podemos escrever o polo:

$$\eta_{1k} = \eta_0 \pi i \left( k + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.9})$$

com  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Dessa forma, aplicando o teorema do resíduo, podemos escrever

$$I_4 = -\frac{1}{3c_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \frac{d}{d\eta_2} [a^2(\eta_2)] [2\pi i \sum Res(f)], \quad (\text{A.10})$$

onde fizemos, utilizando o teorema do resíduo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \frac{a_1^2}{\eta_0 \cosh^2(\eta_1/\eta_0)} \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^2} \right] = 2\pi i \sum Res(f), \quad (\text{A.11})$$

com  $f$  sendo igual a todo o integrando do lado esquerdo.

Vamos agora calcular o resíduo utilizando a Eq. (A.4). Como temos polos de segunda ordem, faremos  $n = 2$ . A vantagem do teorema do resíduo é que podemos escolher o contorno que queremos. Dessa forma, vamos escolher o contorno dado pela Eq. (A.9) escolhendo os valores positivos para  $k$ , pois dessa forma, podemos contornar a outra singularidade  $\eta_1 = \eta_2$ . Veja na figura (7) a representação gráfica desses polos e do contorno escolhido.

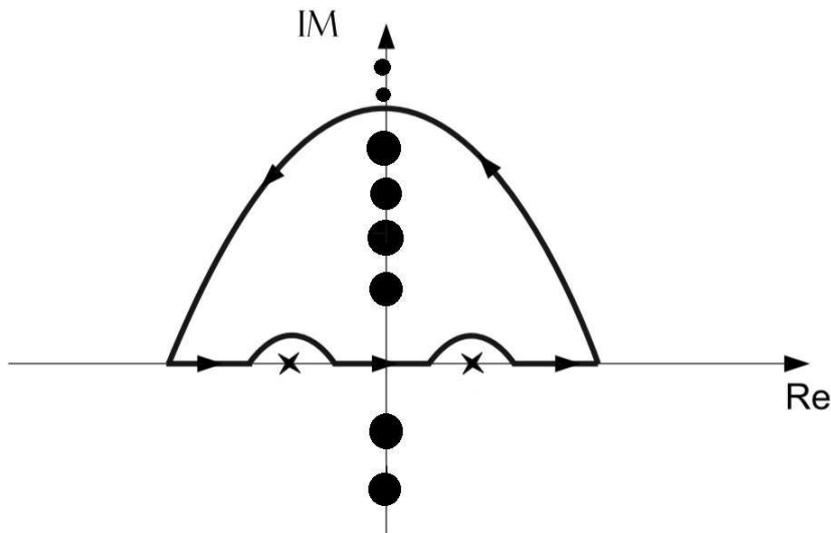


Figura 7 – Representação gráfica dos polos e do contorno escolhido. O símbolo x representa o polo  $\eta_1 = \eta_2$  que queremos contornar. Os pontos representam os polos  $\eta_{1k}$ . Perceba que existem infinitos polos  $\eta_{1k}$ , um para cada valor de  $k$ . Fonte: criada pelo autor

Dessa forma, vamos calcular o resíduo com o contorno escolhido. Temos da Eq. (A.4)

$$Res(f) = \lim_{\eta_1 \rightarrow \eta_{1k}} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{d\eta_1^{2-1}} \left\{ (\eta_1 - \eta_{1k})^2 \frac{a_1^2}{\eta_0 \cosh^2(\eta_1/\eta_0)} \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^2} \right] \right\}. \quad (\text{A.12})$$

Para continuar, fazemos uma expansão no cosseno em torno de  $\eta_{1k}$ .

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) &= \cosh^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right) + \frac{2 \cosh\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right) (\eta_1 - \eta_{1k})}{\eta_0} + \\ &+ \frac{\operatorname{senh}^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right) (\eta_1 - \eta_{1k})^2}{\eta_0^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Essa expansão fará aparecer no denominador da equação anterior termos do tipo  $\operatorname{cosh}(\eta_{1k}/\eta_0)$  que, por nossa definição de polo serão nulos. Além disso, ao se aplicar os limites podemos ver que somente o último termo dessa função aparecerá dentro da derivada. Assim, o resíduo ficará:

$$\operatorname{Res}(f) = \lim_{\eta_1 \rightarrow \eta_{1k}} \frac{d}{d\eta_1} \left\{ (\eta_1 - \eta_{1k})^2 \frac{a_1^2 \eta_0}{[\operatorname{senh}^2(\eta_{1k}/\eta_0)(\eta_1 - \eta_{1k})^2 + \dots]} \left[ \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^2} \right] \right\}. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo o resultado dessa equação na Eq. (A.10) ficamos com o seguinte resultado para  $I_4$ :

$$I_4 = \frac{4\pi i \eta_0 a_1^2}{3c_0^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}^2(\eta_{1k}/\eta_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \left[ \frac{1}{(\eta_{1k} - \eta_2)^3} \right] \frac{d}{d\eta_2} [a^2(\eta_2)]. \quad (\text{A.15})$$

Perceba que agora temos uma integral na variável  $\eta_2$ . Para resolve-la, vamos novamente utilizar o teorema do resíduo. De novo, utilizando a forma do fator de escala como sendo a dada pela Eq. (3.36) ficamos como:

$$I_4 = \frac{4\pi i \eta_0 a_1^2}{3c_0^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}^2(\eta_{1k}/\eta_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \frac{a_1^2}{\eta_0 \cosh^2(\eta_2/\eta_0)} \left[ \frac{1}{(\eta_{1k} - \eta_2)^3} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Mais uma vez, temos dois tipos de polos. O primeiro,  $\eta_2 = \eta_{1k}$  é um polo imaginário. O segundo, vamos escrever por conveniência como sendo;

$$\eta_{2l} = \eta_0 \pi i \left( l - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.17})$$

Ou seja, novamente teremos infinitos polos. Contudo, podemos contornar os polos  $\eta_2 = \eta_{1k}$  tomando apenas os valores negativos para  $l$ , ou seja,  $l = 0, -1, -2, -3, \dots$ . A figura (8) apresenta a representação desse contorno escolhido.

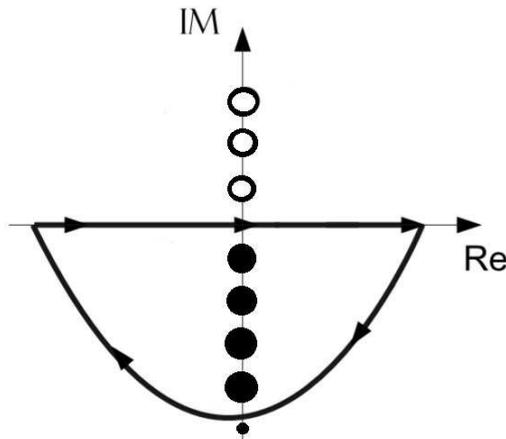


Figura 8 – Representação gráfica dos polos e do contorno escolhido. O círculo fechado representa o polo  $\eta_2 = \eta_{1k}$  que queremos contornar. Os pontos representam os polos  $\eta_{2l}$ . Perceba que existem infinitos polos  $\eta_{2l}$ , um para cada valor de  $l$ .  
Fonte: criada pelo autor

Dessa forma, usando o teorema do resíduo e fazendo o mesmo procedimento realizado anteriormente teremos o seguinte resultado para a integral:

$$I_4 = \frac{4\pi i \eta_0 a_1^2}{3c_0^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sinh^2(\eta_{1k}/\eta_0)} \left\{ -2\pi i a_1^2 \eta_0 \sum_{l=0}^{-\infty} \frac{1}{\sinh^2(\eta_{2l}/\eta_0)} \left[ \frac{3}{(\eta_{1k} - \eta_{2l})^4} \right] \right\}, \quad (\text{A.18})$$

onde o sinal negativo é devido o contorno que escolhemos por baixo como na figura (8).

Substituindo os valores dos polos dadas pelas Eqs. (7) e (A.17) na equação anterior e utilizando a identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos teremos o resultado final (salvo algumas manipulações que podem ser feitas)

$$I_4 = \frac{8\pi^2 a_1^4 \eta_0^2}{c_0^4 \eta_0^4 \pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{-\infty} \frac{1}{(k - l + 1)^4}. \quad (\text{A.19})$$

ou ainda, para efeito de organização, podemos fazer  $-l = m$  para encontrar exatamente o resultado apresentado para essa integral nos resultados na Eq. (4.62):

$$I_4 = \frac{8a_1^4}{c_0^4 \eta_0^2 \pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(k + m + 1)^4}. \quad (\text{A.20})$$





# APÊNDICE B – Condensado de Bose-Einstein

Apresentamos aqui um pequeno resumo sobre condensado de Bose-Einstein.

O estado em que podemos encontrar a matéria muito depende do grau de agitação das moléculas que, como sabemos da termodinâmica está diretamente relacionado a temperatura. Existe uma fase da matéria formada por bósons em que os átomos que a compõem passam a "mostrar" mais os efeitos quânticos em escala macroscópica. Esse estado da matéria conhecido pelo nome de condensado de Bose-Einstein (CBE) é atingido quando os bósons estão a uma temperatura próxima do zero absoluto ( $T \sim 0K$ ), fazendo com que essas partículas atinjam o mais baixo estado quântico. Esse estado foi teorizado por Einstein através dos trabalhos realizados pelo físico indiano Satyendra Nath Bose. A temperatura em que esse estado acontece deve ser inferior a:

$$T_0 = \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2mk_B} \left[ \frac{4\pi^2}{\gamma\Gamma(3/2)\zeta(3/2)} \right] \quad (\text{B.1})$$

onde  $\zeta$  é a função zeta de Riemann,  $n$  é a densidade de partículas,  $m$  é a massa por bóson e  $k_B$  é a constante de Boltzmann. Para mais detalhes ver [21]

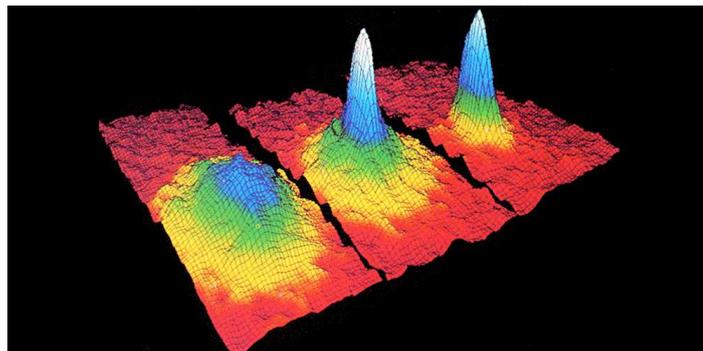


Figura 9 – Ilustração da formação do condensado de Bose-Einstein. Conforme a temperatura diminui (da esquerda para a direita), as características quânticas ficam mais visíveis em escala macroscópica. Fonte: nobelprize.org

Em 1995, experimentos realizados por Eric Cornell, Carl Wieman e colaboradores, no Instituto Conjunto do Laboratório de Astrofísica, mostraram que é possível encontrar um condensado em um gás diluído de rubídio, em que seus átomos são resfriados até uma temperatura da ordem  $T_0 = 170nK$  e confinados magneticamente. Hoje, outros condensados de Bose-Einstein já foram obtidos com outros tipos de elemento, como com

cloreto de níquel e até mesmo com sódio 23. Além disso, recentemente, em 2017, um estudo realizado pelo físico Sadhan Adhikari, do Instituto de Física Teórica da UNESP [27] investiga outro fenômeno "estranho" que pode ocorrer no condensado de Bose-Einstein: A quebra de simetria espontânea que ocorre nesse sistema físico.

Por fim, vale ressaltar que o condensado de Bose-Einstein também tem se mostrado como um fluido em que pode-se estudar fenômenos que não conseguimos acessar diretamente, na criação de modelos análogos desses fenômenos . Um bom exemplo disso é o estudo da existência da radiação hawking em buracos negros. O condensado de Bose-Einstein poderia confinar fónons, formando assim buracos acústicos. A referência [9] trás uma boa discussão sobre modelos análogos e gravitação análoga.

# APÊNDICE C – Função de dois pontos pelo método da função de Green

Vamos aqui descrever a forma de obter, via método das funções de Green, a função de dois pontos dada pela Eq. (3.30). Nossa discussão será baseada na referência [23].

Uma função de Green é útil para encontrar soluções de equações diferenciais do tipo

$$\hat{L}\psi(x) = f(x). \quad (\text{C.1})$$

onde  $\hat{L}$  é um operador de segunda ordem que atua sobre uma função qualquer  $\psi(x)$  e  $f(x)$  é uma função que representa um termo de fonte.

A ideia é que, ao invés de resolvê-la, podemos encontrar a solução para a seguinte equação:

$$\hat{L}G(x, x') = \delta(x, x') \quad (\text{C.2})$$

onde  $G(x, x')$  é chamada função de Green. Dessa forma, a solução de (C.1) deveria obedecer a seguinte relação:

$$\psi(x) = \int dx' G(x, x') f(x') \quad (\text{C.3})$$

Assim, para encontrar (3.30), imaginemos que o operador  $\hat{L}$  seja da forma  $(\square + m^2)$ . Podemos ter a seguinte equação:

$$(\square + m^2)G(x, x') = -\delta^{(4)}(x, x'), \quad (\text{C.4})$$

onde o  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$  é o operador d'Alembertiano. Logo, a Eq. (C.4) seria a solução da equação de Klein-Gordon que descreve o movimento de uma campo de massa  $m$ . Tomando a transformada de Fourier de  $G(x, x')$  e de  $\delta^{(4)}(x, x')$  dadas por

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik\Delta x} \tilde{G}(k) \quad (\text{C.5})$$

e

$$\delta^{(4)}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik\Delta x}, \quad (\text{C.6})$$

e aplicando em (C.4), obtemos a seguinte equação

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left( -\frac{(k^0)^2}{c_0^2} + |\vec{k}|^2 + m^2 \right) e^{-ik\Delta x} \tilde{G}(k) = \delta^{(4)}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik\Delta x}. \quad (\text{C.7})$$

com  $-k\Delta x = \vec{k} \cdot \vec{r} - k^0 \Delta t$ , em que  $r^2 = (x^i - x'^i)^2$  e  $\Delta t = t - t'$ .

Perceba que para essa igualdade se manter devemos ter:

$$\left(-\frac{(k^0)^2}{c_0^2} + |\vec{k}| + m^2\right) \tilde{G}(k) = 1, \quad (\text{C.8})$$

o que nos permite escrever:

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\frac{(k^0)^2}{c_0^2} - \omega^2}. \quad (\text{C.9})$$

com  $\omega^2 = |\vec{k}|^2 + m^2$ . Além disso, veja que mantemos um  $c_0$  em vez de  $c$  que é a velocidade da luz. Por mais que estejamos o sistema de unidades naturais, mantemos  $c_0$  pois, em nosso trabalho, estaremos tratando da velocidade do som, uma vez que trabalharemos com modelos análogos.

Dessa forma, podemos escrever a forma de  $G(x, x')$ :

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4 c_0} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0\Delta t}}{\frac{(k^0)^2}{c_0^2} - \omega^2}. \quad (\text{C.10})$$

Podemos calcular a integral em  $k^0$  através do método de integração por resíduos (Apêndice A). Isso porquê, quando olhamos para essa integral, percebemos que temos polos em  $k^0 = \pm c_0\omega$ . A escolha dos contornos podem nos fornecer dois tipos de funções de frequência positiva e negativa, respectivamente, que são definidas por:

$$G^+(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - c_0\omega\Delta t)} \quad (\text{C.11})$$

e

$$G^-(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} + c_0\omega\Delta t)}, \quad (\text{C.12})$$

chamadas funções de Wightman. Como já sabemos o que queremos e para ser objetivos, iremos calcular a função de frequência positiva dada pela Eq. (C.11). Para facilitar, tomemos o caso sem massa de forma que  $\omega = k$ . Assim, ficamos com:

$$G^+(x, x') = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - c_0k\Delta t)}. \quad (\text{C.13})$$

Fazendo uma transformação para coordenadas esféricas, de forma que  $d^3\vec{k} = k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi$  chegamos a:

$$G^+(x, x') = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty k \sin\theta dk d\theta d\varphi e^{ikr \cos\theta - ic_0k\Delta t} \quad (\text{C.14})$$

ou ainda

$$G^+(x, x') = \frac{-1}{2r(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \left[ e^{-ik(c_0\Delta t - r)} - e^{-ik(c_0\Delta t + r)} \right]. \quad (\text{C.15})$$

onde usamos a identidade  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos\theta$ .

Perceba agora que temos uma integral divergente. Para contornar esse problema, podemos usar um artifício matemático fazendo uma mudança de variável da forma  $c_0\Delta t \rightarrow c_0\Delta t - i\epsilon$  e depois fazer  $\epsilon \rightarrow 0$ . Dessa forma, podemos reescrever:

$$G^+(x, x') = \frac{-1}{2r(2\pi)^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dk \left[ e^{-ik(c_0\Delta t - r - i\epsilon)} - e^{-ik(c_0\Delta t + r - i\epsilon)} \right]. \quad (\text{C.16})$$

Logo, facilmente chegamos a:

$$G^+(x, x') = \frac{-1}{2r(2\pi)^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ \frac{ie^{-ik(c_0\Delta t - r - i\epsilon)}}{(c_0\Delta t - r - i\epsilon)} - \frac{ie^{-ik(c_0\Delta t + r - i\epsilon)}}{(c_0\Delta t + r - i\epsilon)} \right] \right\}. \quad (\text{C.17})$$

Tomando o limite:

$$G^+(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(-c_0^2\Delta t^2 + r^2)}, \quad (\text{C.18})$$

que é semelhante ao que queríamos chegar.



# Anexos





# ANEXO A – Configurações de plotagens e somas

Configurações utilizadas no software Wolfram Mathematica para as somas e plotagens dos gráficos presentes nos resultados.

## A.0.1 Caso ligado

$$b = -(I/(Pi * I * (k - 1/2) - m - t)^3 - I/(Pi * I * (k - 1/2) - m)^3)$$

$$\frac{i}{(-m+i(-\frac{1}{2}+k)\pi)^3} - \frac{i}{(-m+i(-\frac{1}{2}+k)\pi-t)^3}$$

$$d = -(I/(Pi * I * (o - 1/2) - p - t)^3 - I/(Pi * I * (o - 1/2) - p)^3)$$

$$\frac{i}{(-p+i(-\frac{1}{2}+o)\pi)^3} - \frac{i}{(-p+i(-\frac{1}{2}+o)\pi-t)^3}$$

$$c = \text{Sum}[b, \{k, 1, \text{Infinity}\}]$$

$$\frac{\text{PolyGamma}[2, \frac{1}{2} + \frac{im}{\pi}] - \text{PolyGamma}[2, \frac{2im + \pi + 2it}{2\pi}]}{2\pi^3}$$

$$e = \text{Sum}[d, \{o, 1, \text{Infinity}\}]$$

$$\frac{\text{PolyGamma}[2, \frac{1}{2} + \frac{ip}{\pi}] - \text{PolyGamma}[2, \frac{2ip + \pi + 2it}{2\pi}]}{2\pi^3}$$

$$F = \text{Re}[c]$$

$$\frac{\text{Re}[\text{PolyGamma}[2, \frac{1}{2} + \frac{im}{\pi}] - \text{PolyGamma}[2, \frac{2im + \pi + 2it}{2\pi}]]}{2\pi^3}$$

$$H = \text{Re}[e]$$

$$\frac{\text{Re}[\text{PolyGamma}[2, \frac{1}{2} + \frac{ip}{\pi}] - \text{PolyGamma}[2, \frac{2ip + \pi + 2it}{2\pi}]]}{2\pi^3}$$

$$a = 1/Pi^3 * (\text{Zeta}[3] - Pi^4/90) + j * (3/Pi^3 * (\text{Zeta}[3] - Pi^4/90) + B^{-1/2} * l^{1/2} * F)$$

$$\frac{-\frac{\pi^4}{90} + \text{Zeta}[3]}{\pi^3} + j \left( \frac{\sqrt{l} \text{Re}[\text{PolyGamma}[2, \frac{1}{2} + \frac{im}{\pi}] - \text{PolyGamma}[2, \frac{2im + \pi + 2it}{2\pi}]]}{2\sqrt{B}\pi^3} + \frac{3(-\frac{\pi^4}{90} + \text{Zeta}[3])}{\pi^3} \right)$$

$$u = 1/Pi^3 * (\text{Zeta}[3] - Pi^4/90) + j * (3/Pi^3 * (\text{Zeta}[3] - Pi^4/90) + A^{-1/2} * s^{1/2} * H)$$

$$\frac{-\frac{\pi^4}{90} + \text{Zeta}[3]}{\pi^3} + j \left( \frac{\sqrt{s} \text{Re}[\text{PolyGamma}[2, \frac{1}{2} + \frac{ip}{\pi}] - \text{PolyGamma}[2, \frac{2ip + \pi + 2it}{2\pi}]]}{2\sqrt{A}\pi^3} + \frac{3(-\frac{\pi^4}{90} + \text{Zeta}[3])}{\pi^3} \right)$$

$$m = 0.0467$$

$$B = 0.00227$$

$$l = 1.1$$

$$s = 1.2$$

$$A = 0.00833$$

$$p = 0.0911$$

$$j = 3.6 * 10^{-8}$$

$$0.0467$$

$$0.00227$$

$$1.1$$

$$1.2$$

$$0.00833$$

$$0.0911$$

$$3.60000000000000005^{*-8}$$

$$\text{Plot}\{a, u\}, \{t, 0, 10\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{n, G[n]\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{1, 2\}$$

$$\text{Plot}\{a, u\}, \{t, 2, 100\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{n, G[n]\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{1, 2\}$$

### A.0.2 Caso livre

$$a = I * (1 / (\text{Pi} * I * (k + 1/2) - t)^3 - 1 / (\text{Pi} * I * (k + 1/2))^3)$$

$$b = I * (1 / (\text{Pi} * I * (l + 1/2) - t)^3 - 1 / (\text{Pi} * I * (l + 1/2))^3)$$

$$i \left( -\frac{i}{(\frac{1}{2}+k)^3 \pi^3} + \frac{1}{(i(\frac{1}{2}+k)\pi - t)^3} \right)$$

$$i \left( -\frac{i}{(\frac{1}{2}+l)^3 \pi^3} + \frac{1}{(i(\frac{1}{2}+l)\pi - t)^3} \right)$$

$$c = \text{Sum}[a, \{k, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$d = \text{Sum}[b, \{l, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\frac{\text{PolyGamma}\left[2, \frac{1}{2} + \frac{it}{\pi}\right] + 14\text{Zeta}[3]}{2\pi^3}$$

$$\frac{\text{PolyGamma}\left[2, \frac{1}{2} + \frac{it}{\pi}\right] + 14\text{Zeta}[3]}{2\pi^3}$$

$$F = \text{Re}[c]$$

$$T = \text{Re}[d]$$

$$\frac{\text{Re}\left[\text{PolyGamma}\left[2, \frac{1}{2} + \frac{it}{\pi}\right]\right] + 14\text{Zeta}[3]}{2\pi^3}$$

$$\frac{\text{Re}\left[\text{PolyGamma}\left[2, \frac{1}{2} + \frac{it}{\pi}\right]\right] + 14\text{Zeta}[3]}{2\pi^3}$$

$$Q = A * B * F$$

$$R = H * B * T$$

$$\frac{AB\left(\text{Re}\left[\text{PolyGamma}\left[2, \frac{1}{2} + \frac{it}{\pi}\right]\right]\right) + 14\text{Zeta}[3]}{2\pi^3}$$

---

$$\frac{BH(\operatorname{Re}[\operatorname{PolyGamma}[2, \frac{1}{2} + \frac{it}{\pi}]] + 14\operatorname{Zeta}[3])}{2\pi^3}$$

$$A = 0.04545$$

$$H = 0.08333$$

$$B = 3.6 * 10^{-8}$$

$$0.04545$$

$$0.08333$$

$$3.6000000000000005^{-8}$$

$$\text{Plot}[\{Q, R\}, \{t, 0, 10\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\gamma, (G')[\gamma]\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{1, 2\}]$$