UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PÉRICLES DENNYS SANTANA COSTA

APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NOS TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA

CUITÉ - PB 2023

PÉRICLES DENNYS SANTANA COSTA

APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NOS TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Orientador: Prof. Drº. Aluízio Freire da Silva Junior

CUITÉ – PB 2023

C837a Costa, Péricles Dennys Santana.

Aplicações dos números complexos na geometria euclidiana plana nos Teoremas de Menelaus e Ceva. / Péricles Dennys Santana Costa. - Cuité, 2023.
45 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2023.
"Orientação: Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior".
Referências.

1. Geometria euclidiana. 2. Números complexos. 3. Teoremas de Menelaus e Ceva. 4. Geometria euclidiana plana. I. Silva Junior, Aluízio Freire da. II. Título.

CDU 514.12(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

PÉRICLES DENNYS SANTANA COSTA

APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA NOS TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Aprovado em: 09 de Fevereiro 2023

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
ALUIZIO FREIRE DA SILVA JUNIOR
Data: 13/02/2023 10:56:57-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior (Orientador)
Universidade Federal de Campina Grande- UFCG

Glageane da Silva Souza

Prof^a^. Dr^a^. Glageane da Silva Souza (Membro I)
Universidade Federal de Campina Grande- UFCG

Marciel Medeiros de Oliveira

Prof. Me. Marciel Medeiros de Oliveira (Membro II)
Universidade Federal de Campina Grande- UFCG

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos inicialmente vão para Deus que com ele nada desse sonho seria possível, seguidamente vai para meu pai Joselino Bezerra da Costa e minha mãe Luciana Xavier de Santana Costa, essas duas pessoas que citei foram minha base para me manter no curso, apesar de muitas das vezes passar dificuldades por ser de uma família humilde nunca me faltou força de vontade e incentivo deles para poder realizar meu sonho em ser professor.

Dedico esse próximo parágrafo a família da minha namorada que me ajudou bastante nessa caminhada, minha sogra Eudésia a meu sogro Jonas e especialmente para a minha namorada, amiga, companheira de todas as horas Joana Larissa Vicente da Silva, minha namorada teve o papel fundamental de me aguentar durante todo o curso junto com ela passando momentos bons e ruins, mas sempre esteve comigo me apoiando me ajudando em tudo.

Aos meus queridos professores Aluízio, Marciel e Glageane queria lhes dizer que vocês mudam vidas, só por ser esses professores de coração enorme, sempre ajudando como podem seus alunos e vendo suas dificuldades, um exemplo maior sou eu que muitas das vezes pensei em desistir do curso por conta da dificuldade, mas ao assistir suas aulas suas brincadeiras piadas me confortaram demais para poder realizar o meu sonho e seguir seus passos para tornar-se um bom professor.

E por fim não poderia deixar de agradecer a meus amigos Mateus Ferreira, Cleano Gomes, David e Franscisco, queria agradecer a todos eles pois o curso em si necessita disso de amizades para que podemos conseguir nosso objetivo e essas pessoas facilitaram minha vida no curso em relação a tudo.

“ Se você não pode mudar seu destino, mude sua atitude”
(Roronoa Zoro-one-piece)

RESUMO

Neste trabalho o enfoque é em uma revisão bibliográfica das aplicações dos números complexos sobre os teoremas de Menelaus e Ceva, teoremas esses bem conhecidos no meio da matemática. As aplicações dos pontos destes teoremas usando a parametrização dos complexos ainda é pouca vista no nosso dia a dia, mas que é bem interessante quando aplicada de maneira correta, a junção dos complexos com a geometria euclidiana plana faz surgir novos meios de utilizar a matemática. Sendo assim, de antemão neste trabalho falaremos primeiro da história de como todo o conjunto foi desenvolvido, desde dos primeiros problemas de raízes de números negativos apresentados na matemática até os dias atuais. Depois foi necessário destacar as propriedades que compõe o conjunto numérico e alguns conceitos da Geometria euclidiana plana, feito isto, seguimos para as demonstrações que é o objetivo principal deste trabalho, assim demonstrando os teoremas que foram citados acima.

Palavras chaves: Números complexos; Teoremas de Menelaus e Ceva; Geometria euclidiana plana.

ABSTRACT

In this work the focus is on a bibliographic review of the applications of complex numbers on the theorems of Menelaus and Ceva, these theorems well known in the field of mathematics. The applications of the points of these theorems using the parameterization of complexes is still little seen in our daily lives, but which is very interesting when applied correctly, the combination of complexes with flat Euclidean geometry gives rise to new ways of using mathematics. Therefore, beforehand in this work we will first talk about the history of how the whole set was developed, from the first problems of roots of negative numbers presented in mathematics to the present day. Afterwards, it was necessary to highlight the properties that make up the numerical set and some concepts of flat Euclidean geometry.

Keywords: Complex numbers; Theorems of Menenlaus and Cevas; Plane euclidean Geometry.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como finalidade abordar a história dos números complexos com base nas contribuições significativa de diversos matemáticos que colaboraram para o desenvolvimento do conjunto. Logo em seguida, seguiremos com apresentação do conjunto numérico e suas propriedades para que possamos demonstrar dois teoremas muito importante na geometria plana, teoremas esses que são de "Menelaus e Ceva''.

Prosseguindo iremos utilizar nesse trabalho dois ramos da matemática a introdução dos conceitos da geometria plana e os números complexos, trabalhando em conjunto vamos mostrar o papel fundamental para a demonstração dos teoremas abordados. Entretanto para prosseguir com a demonstração dos teoremas citado é necessário ter uma visualização geometricamente da proposição. E a visualização em matemática, permite uma organização de relações. Também pode dar pelo menos uma apreensão e o que a visualização apreende pode ser o início de uma série de transformações, o que faz o seu poder inventivo (DUVAL 1999).

O objetivo do determinado estudo tem como base uma revisão de literatura sobre geometria plana e nas propriedades dos números complexos, para que possamos observar a grande importância na demonstração dos teoremas de Menelaus e Ceva.

Dessa forma iremos revisar diversas referências sobre o tema para poder mostrar a real importância dos números complexos e suas aplicações em diversos ramos do nosso cotidiano e não só na matemática em si. Mas o enfoque deste trabalho será apenas a aplicação dos teoremas citados acima.

A vista disso, é necessária uma revisão de literatura sobre o determinado tema (Aplicações dos números complexos na geometria euclidiana plana) para o leitor entender a temática especifica que vai ser tratada durante o trabalho, pois as revisões têm a função de preencher as lacunas existentes na literatura através da combinação de diferentes pesquisas bibliográficas (CORDEIRO, 2007).

E nesse sentindo, para entendermos o presente trabalho é necessária uma dominação básica dos conteúdos de geometria euclidiana plana e dos números complexos.

1. HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo é abordado a história dos números complexos desde a criação do conjunto até o surgimento completo desse novo conjunto numérico. Para esta abordagem tivemos como base os livros de Iezzi (1977), Fundamentos Elementares da Matemática (volume 6), Tatiana Roque (2012), História da Matemática e Boyer (2003) História da Matemática.

1.1 SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Como nasce um problema? Vejamos que sempre é através de alguma necessidade que está precisando para suprir algo relacionado ao que está sendo trabalhado. Sendo assim, o surgimento dos números complexos veio para dar respostas aos para problemas que desafiaram matemáticos durante séculos, problemas esses que surge por exemplo ao tentarmos calcular raízes quadradas de números negativos.

Daí então, tivemos diversos matemáticos que trabalharam duramente nos estudos de raízes quadradas de números negativos, mas o surgimento mesmo dos números complexos ocorreu no século XVI, com o matemático Scipione Del Ferro (1465 - 1526) que hipoteticamente desenvolveu a solução para a equação de terceiro grau do tipo $x^3 + px = q$. Entretanto seus trabalhos não foram publicados devido a sua morte, mas foram passados para alguns dos seus alunos.

Um dos alunos de Del Ferro chamada de Antônio Maria Fior desafiou o matemático italiano Tartaglia (1499 – 1557) para tentar desenvolver a solução da equação de terceiro grau $x^3 + px = q$, Tartaglia não só conseguiu resolver essa equação, mas também desenvolveu uma técnica para encontrar a solução geral para qualquer equação da forma $x^3 + px^2 = q$, sendo assim, Tartaglia já estava começando a entender realmente o problema que estava por vim com o avanço das suas soluções.

Outro matemático que também se interessou por esse desafio foi Girolamo Cardano (1501 - 1576). Inicialmente Cardano queria que Tartaglia compartilhasse a solução que ele desenvolveu para as equações cúbicas nesse formato $x^3 + px^2 = q$, mas essa tentativa de obter as soluções compartilhadas por Tartaglia não teve êxito no começo, mesmo prometendo colocar os créditos para ele em seus futuros trabalhos. No ano de 1545 Cardano conseguiu convencer Tartaglia e através das suas resoluções publicou um livro chamado ‘‘*Ars Magna*’’, mas não deu os créditos que foi prometido para ele.

Cardano (1501-1576) era um matemático que trabalhava com quantidades negativas, tendo em mente que no século XV e XVI era bastante difícil trabalhar com essas unidades, devido a consistências dessas operações, então Cardano admitir quantidade negativas como raízes de equações, mas ele designava como soluções " fictícias". Isso mostra que naquela época o reconhecimento da utilidade prática dessas quantidades, não era considerada números. Entretanto, Cardano não conseguia compreender as soluções das equações cúbicas tratada por Del Ferro e Tartaglia que sempre envolviam as raízes quadradas de números negativos, diante desse pressuposto Cardano não seguiu em diante nos estudos.

Por fim, outro matemático que se interessou sobre raízes quadradas de números negativos foi o italiano Rafael Bombeli (1526 – 1572), que defendia a existência dos números imaginários para resolução de equação do 3° grau era essencial para compreender e resolver essas equações. Nesse contexto em 1572, Bombeli publicou um livro chamado *L' Álgebra* em que nele constava processos operatórios com raízes quadradas de números negativos, desta forma Bombeli deu a percepção para outros matemáticos contribuir para esse novo conjunto numérico que estava sendo criado.

1.2 O SURGIMENTO DO TERMO "NÚMEROS IMAGINÁRIOS"

Os primeiros conceitos de números imaginários foram introduzidos por René Descartes (1596 – 1650) ao ser indagado sobre uma equação de terceiro grau $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Logo, através dos seus estudos imaginou que por ser uma equação de grau 3 teriam necessariamente de ter 3 três raízes para essa equação. Mas ao fazer a análise da equação e tentar achar suas raízes conseguiu somente a raiz real dada pelo número 2, a partir dessa conclusão Descartes designou que as vezes as raízes de uma equação podem ser falsas ou reais, vários métodos para tentar achar as formas para encontrar as raízes que faltavam foram desenvolvidos, mas que não tiveram êxito. Assim conseguiu designar que existem raízes que não conseguimos deixar de ser imaginárias, dessa forma surgiu o primeiro conceito de raízes imaginárias.

Para falarmos do termo imaginário, agora vamos prosseguir mais adiante e falar sobre o matemático Cardano. Cardano foi uns dos pioneiros a desenvolver uma técnica para resolver equações do terceiro grau que envolvia raízes quadradas de números negativos, mas um dos seus discípulos chamado Bombelli (1526-1572), compreendeu melhor o termo imaginário e conseguiu introduzir melhor na álgebra dos números complexos, todavia Bombelli afirmava que os números complexos eram inúteis e “sofisticados”.

1.3 A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO NUMÉRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Para a construção do conjunto dos números complexos diversos matemáticos tiveram contribuições, porém em nosso estudo vamos focar nos matemáticos Thomas Harriot, Girard, Descartes, Gaspar Wessel, Abraham de Moivre, Carl Friedrich Gauss.

Harriot nasceu em 1560, foi um pensador contemporâneo que sempre foi envolvido no meio das ciências matemáticas, decidiu trabalhar em várias áreas, entre elas, navegação, astronomia, ótica, geometria e álgebra. Fundou a escola inglese de álgebra e umas das suas principais contribuições foi na criação de uma linguagem simbólica sempre dando destaque aos números negativos, mas não admitia números negativos como raízes de equações. Também teve contribuição em desenvolver um método para solucionar as raízes positivas de equações de 3° e 4° grau. Sendo assim, Harriot ganhou fama de grande matemático naquela época com seus trabalhos em análise matemática que elevou o status da álgebra, que servia para resoluções de problemas aritméticos.

Figura 1- Thomas Harriot (1560-1621)

Fonte: High alyitude observatory, 2003.

Albert Girard nasceu em 1595 e de início trabalhou como professor de matemática, engenharia, óptica e música. Com todas suas despesas financiadas pela a corte, teve boa parte da sua vida dedicada a trabalha com álgebra e trigonometria tendo também influência no desenvolvimento das fórmulas para cálculo da área de triângulo e na parte da álgebra desenvolveu esboços para o teorema fundamental da álgebra. Umas das principais intervenções foi que ele admitiu números negativos como raízes de equações. Girard nos seus trabalhos escreveu um livro chamado *Invention nouvelle en l'algébre,* no ano de 1629. Neste livro é demonstrado que equações podiam ter raízes negativas e imaginárias.

Figura 2- Albert Girard (1595-1632).

Fonte: Biblioteca do Museu Oceanográfico D. Carlos I, Aquário Vasco da Gama, 2007.

Descartes nasceu em 31 de março de 1596 na cidade na francesa La Haye, foi um matemático e filósofo renomado naquela época considerado por muitos o " Pai da Filosofia Moderna", afamado como uns dos maiores pensadores importante no período moderno e pai da matemática moderna. Em relação às suas grandes façanhas, teve grande influência na revolução dos números complexos interpretando geometricamente os termos aritméticos. Em suas pesquisas científicas conseguiu desenvolver uma junção entre a álgebra e a geometria assim denominando um novo ramo da matemática, a geometria analítica. Sendo assim, essa nova geometria criada teve papel fundamental para a criação dos cálculos diferencial e integral.

Figura 3- René Descartes (1596-1650).

Fonte: Conhecimento científico, 2005.

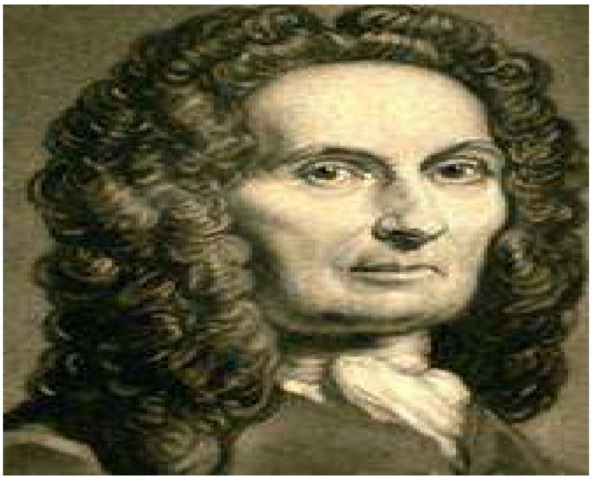
Caspar Wessel foi um matemático e cartógrafo norueguês que nasceu em 1745, estudou na universidade de Copenhage, mas devido a situações financeiras não conseguiu terminar o curso de direito, dessa forma prosseguiu sua carreira trabalhista na área da cartografia onde serviu a comissão Dinamarquesa de Agrimensura. Nesse meio tempo, Wessel se dedicou a trabalhos relacionados a matemática, porém por muitos tempos seus trabalhos passaram despercebido e só em 1897 foi redescoberto e perceberam a grande façanha que tinha desenvolvido, que era descrever a interpretação geométrica dos números complexos como pontos no plano complexos e como vetores.

Figura 4- Caspar Wessel (1745 -1818).

Fonte: Mac tutor, 2000.

Abraham de Moivre foi um matemático francês que nasceu na cidade de Vitry, mas boa parte da sua carreira profissional se desenvolveu na Inglaterra. Nos seus estudos focou no desenvolvimento da geometria analítica, sendo assim uns dos pioneiros a trabalhar nessa nova área que estava surgindo naquela época. Também teve grande contribuições na teoria das probabilidades, em relação aos números complexos teve a grande ideia grande de relacionar operações mais avançadas com números complexos envolvendo a trigonometria.

Figura 5- Abraham de Moivre (1667-1754).



Fonte: Modelo estatística, 2013.

Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777, em Brunsvique na Alemanha. Conhecido também como príncipe da matemática foi um matemático que teve diversas contribuições em ramos das exatas entre elas dando enfoque para a teoria dos números, em relação a teoria dos números sua grande descoberta foi o método dos mínimos quadrados e a prova da reciprocidade quadrática. Também foi intitulado como físico e astrônomo e na sua carreira acadêmica sua grande tese de doutorado foi de solucionar os problemas de equações algébricas, que assim deu origem ao famoso teorema fundamental da álgebra.

Figura 6- Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Fonte: Info escola, 2022.

Dando sequência ao trabalho agora vamos apresentar os números complexos na visão de Cardano e Hamilton.

1.4 NÚMEROS COMPLEXOS DE GIROLAMO CARDANO A WILLIAM ROWAN HAMILTON

Cardano iniciou seus trabalhos resolvendo o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40, provou (multiplicando) que $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$, raízes de $x^2+40=10x$, constituem a solução. Além disso, desenvolveu uma fórmula que mais tarde iria ficar conhecida por "fórmula de Cardano" a qual podemos segue abaixo.

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27}+\frac{n^2}{4}}+\frac{n}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27}+\frac{n^2}{4}}-\frac{n}{2}}$$

Entretanto ao aplicar sua fórmula na equação $x^3=15x+4$, obteve o resultado $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, sendo assim, o grande impasse de Cardano era saber que x=4 era uma raiz dessa equação, porém não sabia como transformar essa expressão no número 4.

Apesar disso, os números complexos por muito tempo passaram a ser um mistério e só a partir do século XVIII para o XIX que começaram a aprofundar os estudos desse novo conjunto que estava sendo construído.

Figura 7- Girolamo Cardano (1501 – 1576).

Fonte: Ciência fotografia, 2019.

Os primeiros avanços Hamilton em relação aos números complexos foi um artigo desenvolvido e publicado em 1833. No artigo Hamilton introduziu a álgebra formal dos números complexos, que tinha como foco básico o conceito que para ele os números eram formados por pares ordenados de números reais, com quais definiam as seguintes operações.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b).\,(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Nesse formato, temos a ideia de um par ordenado (a,0) que corresponde ao número real "a" é igual ao par ordenado $(-1, 0) = -1$, tal que, tomando $i = (0, -1)$, $i^2 = (0, -1).\,(0, -1) = (-1, 0) = -1$. Dessa forma aparecia uma explicação lógica para a simbologia $\sqrt{-1}$.

Seguindo seus estudos Hamilton decidiu da um passo mais adiante e começou a trabalhar buscando uma álgebra que fosse para vetores no espaço tridimensional e dedicou boa parte da sua vida nesse novo trabalho. Durante seus estudos teve como descoberta dos quartérnions que era representado da seguinte maneira $a + bi + cj + dk,$ em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$. Sendo assim esse novo trabalho foram considerados por muitos naquela época como um grande avanço na matemática.

Figura 8- William Rowan Hamilton (1805 - 1865).

Fonte: Enterprise Ireland Portrait Gallery, 2004.

Prosseguindo após esse breve capítulo que apresentamos sobre a história dos números complexos, iremos apresentar a estrutura desse novo conjunto.

2. ESTRUTURA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Nesse novo capítulo iremos apresentar as propriedades do conjunto dos números complexos. A base principal desta apresentação o livro de Iezzi (1977) fundamentos de matemática elementar e as dissertações de Breno Arcanjo Cruz (2019) aplicações dos números complexos á geometria analítica plana, Vitail José Rocha (2014) números complexos e o teorema fundamental da álgebra e Leonardo de Mattos Bastos (2013) números complexos e geogebra.

2.1 OPERAÇÕES COM PARES ORDENADOS

Considere o conjunto dos números reais denotado por $\mathbb{R}$ e o produto cartesiano entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, dado por:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \; e \; y \in \mathbb{R}\}$$

Isto é, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x,y) em que x e y são números reais.

Para definirmos igualdade, adição e multiplicação, iremos considerar dois pares ordenados (a,b) e (c,d), no conjunto do $\mathbb{R}^2$.

Igualdade:

Dado dois pares ordenados, só serão iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e segundos termos iguais.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \quad e \quad b = d$$

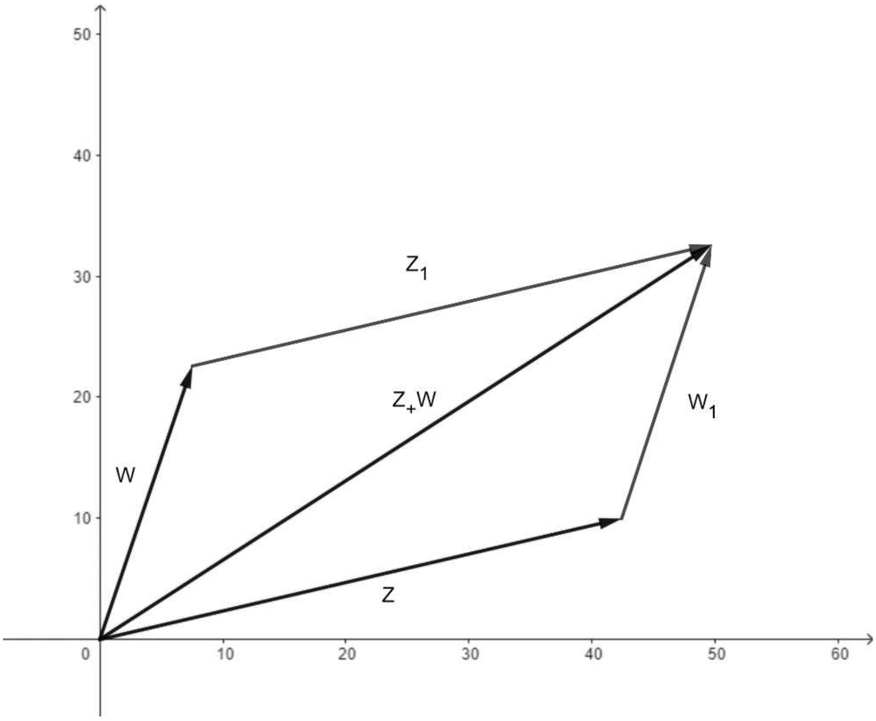
Adição:

A soma entre dois pares ordenados é definida da seguinte maneira soma os dois primeiros termos de cada par ordenado e novamente fazendo o mesmo procedimento para o segundo termo. Assim a adição de pares ordenados ficará representado por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, \;\; b + d)$$

Geometricamente a soma de pares ordenados é representado da seguinte maneira:

Figura 9- Soma entre dois números complexos



Fonte: Autoria própria, 2022.

Multiplicação:

O produto entre dois pares ordenados é dado da seguinte maneira o primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos dos primeiros termos de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, \ \ ad + bc)$$

O conjunto dos números complexos é representado por $\mathbb{C}$, sendo assim é definido por o conjunto dos pares ordenados de números reais nos quais são válidas as três propriedades a cima " igualdade, adição e multiplicação". É comum representar cada elemento da seguinte forma (x, y) pertencente aos $\mathbb{C}$ com o símbolo z:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \quad sendo \quad x, y \ \ \in \mathbb{R}$$

Desta forma através das propriedades de adição e multiplicação iremos denotar o uso da associatividade, comutatividade, elemento neutro e por fim a existência do elemento simétrico.

Sendo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, na adição, temos:

Associatividade:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \ \ \forall z_1, z_2, z_3 \ \in \ \mathbb{C}$$

Comutatividade:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Existência do elemento neutro:

$$\exists \ e_a \ \in \mathbb{C} \mid \ z + e_a = z, \ \forall z \ \in \mathbb{C}$$

Existência do elemento simétrico:

$$\forall z \ \in \mathbb{C}, \ \exists z' \ \in \mathbb{C} \mid \ z + z' = e_a$$

Seguindo de maneira análoga, tomando $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, na multiplicação, temos:

Associatividade:

$$(z_1 . z_2) . z_3 = z_1 . (z_2 . z_3), \ \ \forall z_1, z_2, z_3 \ \in \mathbb{C}$$

Comutativa:

$$z_1 . z_2 = z_2 . z_1, \ \ \forall z_1, z_2 \ \in \mathbb{C}$$

Existência do elemento neutro:

$$\exists \ e_m \ \in \mathbb{C} \mid \ z . e_m = z, \ \forall z \ \in \mathbb{C}$$

Existência do elemento inverso:

$$\forall z \ \in \mathbb{C}^*, \ \exists z'' \ \in \mathbb{C} \mid \ z.z'' = e_m$$

Prosseguindo, desta forma vamos ver a propriedade da divisão e como é desenvolvida nos complexos.

Divisão:

$$z = \frac{z_1}{z_2} \ \ se \ \ z_1 = z_2.z \ \ z_2 \neq 0$$

Avançando chegamos a propriedade distributiva onde iremos ver a imersão entre a multiplicação e adição.

Distributividade adição e multiplicação:

$$z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3, \ \ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

Definindo essas propriedades, será de suma importância para o decorrer do trabalho, pois iremos necessitar para demonstrar os teoremas de Menelaus e Ceva nos próximos capítulos.

2.2 FORMAÇÃO ALGÉBRICA DA ESTRUTURA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dado um subconjunto R' contido nos complexos formado pelos pares ordenados dos quais o segundo termo é zero, temos:

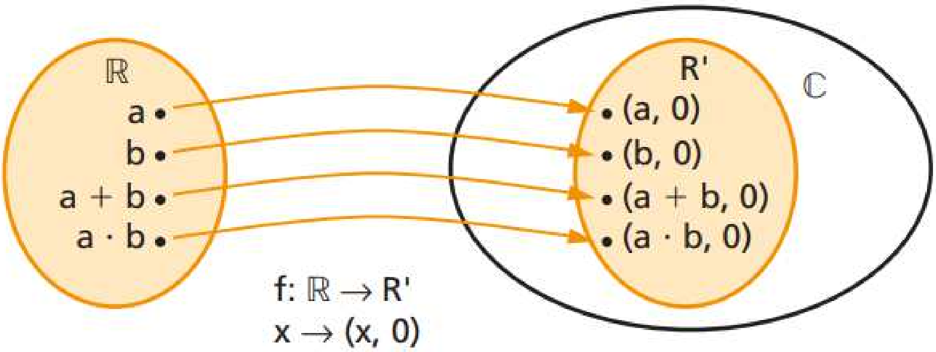
$$R' = \ \ [(a,b) \in \mathbb{C} | \ \ b = 0]$$

Observe que os pares ordenados em R', tem as seguintes formas;

$$(0,0), (1,0), (a,0), (b,0), (a+b,0), (a.b,0), \ldots$$

É possível definir uma aplicação $f: R \to R'$, que leva cada x pertencente ao reais, ao par $(x, 0) \in R'$.

Figura 11 - Relação entre conjuntos



Fonte: Iezzi, 1977.

Vale destacar algumas características, primeiramente note que f é bijetora:

De fato, todo par (x,0) pertencente a R' é correspondido, logo f é sobrejetora e $x \in \mathbb{R}$.

Dados $x\ e\ x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, os seus correspondentes $(x,0) \in R'\ e\ (x',0) \in R'$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados, logo f é injetora.

Seguindo a análise, notemos que f conserva as operações de adição e multiplicação, sendo assim, segue abaixo:

Á soma de $a + b$, com $a\ e\ b\ \in \mathbb{R}$, está relacionado ao par $(a + b, 0)$, que é a soma dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de $a\ e\ b$, respectivamente:

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$

Em relação ao produto ab, com $a\ e\ b\ \in \mathbb{R}$, está associado o par $(ab, 0)$, que é o produto dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de $a\ e\ b$ respectivamente:

$$f(ab) = (ab, 0) = (ab - 0.0, a.0 + 0.b) = (a, 0).\,(b, 0) = f(a).\,f(b)$$

Assim pelo o fato de existir uma aplicação bijetora $f : \mathbb{R} \to R'$ que conserva as operações de adição e produto, dizemos que $\mathbb{R}$ e R' são isomorfos.

Com a ideia de isomorfismo trabalhando com o par ordenado $(x, 0)$ leva a resultados semelhantes ao obtidos ao trabalhar com x, assim mostra a equivalência abaixo:

$$x = (x, 0), \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Aceitando essa identidade chegamos à conclusão que em particular $0 = (0,0),\ 1 = (1,0)\ e\ \mathbb{R} = R'$. Portanto a estrutura dos números reais passa a ser considerado subconjunto do corpo dos números complexos:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2.3 UNIDADE IMAGINÁRIA

Denotamos como unidade imaginária a letra i, que representa o par ordenado $(0, 1)$. Dessa forma e usando a multiplicação já apresentado:

$$i^2 = i.\,i = (0,1).\,(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) = -1$$

Isto é, $i^2 = -1$. Além disso, se aplicarmos as propriedades associativa da multiplicação, verificando que aplicando:

$$i^3 = i^2.\,i = (-1).\,i = -i$$
$$i^4 = i^2.\,i^2 = (-1).\,(-1) = 1$$

Em geral, para $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i$$

2.4 FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dado dois números complexos, na forma $z = (x, y)$, denotamos da seguinte maneira:

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y.0 - 0.1, y.1 + 0.0) = (x,0) + (y,0).\,(0,1)$$

Denotaremos como forma algébrica:

$$z = x + yi$$

Dessa forma chegamos à conclusão que todo número complexo pode ser representado de forma algébrica. Onde podemos observar que a parte real equivale a x e a parte imaginária a yi.

Denotamos um número complexo como real, todo número complexo cujo sua parte imaginária seja nula:

$$z = x + 0i$$

De maneira análoga, iremos somente ter um número complexo imaginário puro, se somente se, sua parte real do número complexo for nula:

$$z = 0 + yi$$

A forma algébrica $(x + yi)$ é bastante utilizada por sua praticidade na representação dos números complexos e também nas operações que definimos anteriormente, porém vamos precisar defini-las novamente para essa nova maneira de trabalhar com números complexos:

Igualdade

Dado dois números complexos $a + bi = c + di \Leftrightarrow \; a = c, \; e \; b = d$, logo pela a definição só teremos a igualdade de números complexos, se e somente, se, as partes reais e imaginárias forem iguais.

Adição

Dados dois números complexos são denotados a soma da seguinte maneira:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ou seja, é somado parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária, sendo assim é representado a soma.

Multiplicação

Dado dois números complexos quaisquer é denotado a multiplicação da seguinte maneira:

$$(a+bi).(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Isto é, a multiplicação de dois números complexos é o resultado do desenvolvimento de $(a+bi).(c+di)$, dessa forma aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$(a+bi).(c+di) = a(c+di) + bi(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

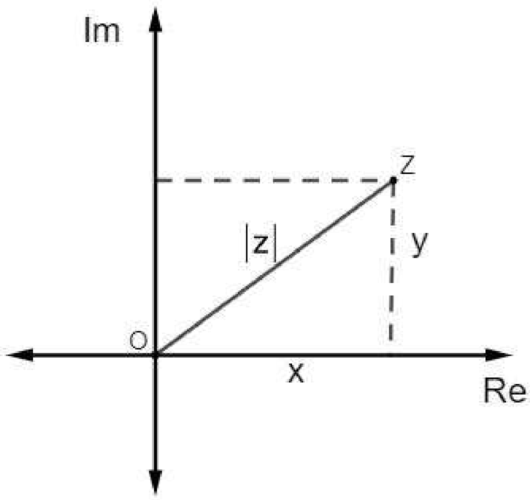
2.5 REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS COMO SEGMENTO DIRECIONADO

Dado um número complexo qualquer como um par ordenado (x, y) que representa o número complexo z, é fácil representar com coordenadas cartesianas retangulares em um ponto no plano x0y. Sendo assim, para cada número complexo, temos um único ponto agregado.

É notório também observar que o número complexo z pode ser denotado como um segmento orientado, nesse caso consideramos como um vetor, onde a origem será no par ordenado $(0, 0)$ que levará até o ponto (x, y). Entretanto a representação que são mais usuais são a vetorial e a por pontos.

A seguir iremos ver uma representação geométrica de um número complexo, no plano x0y que será denotado como plano complexo ou plano de Argand Gauss referência ao grande matemático que desenvolveu esse plano.

Figura 12- Plano de Argand Gauss



Fonte: Prepara enen (2014)

Desta forma é fácil compreender as operações do conjunto dos números complexos geometricamente usando o plano de Argand Gauss, devido aos estudos na geometria analítica para uma melhor compreensão desse conjunto.

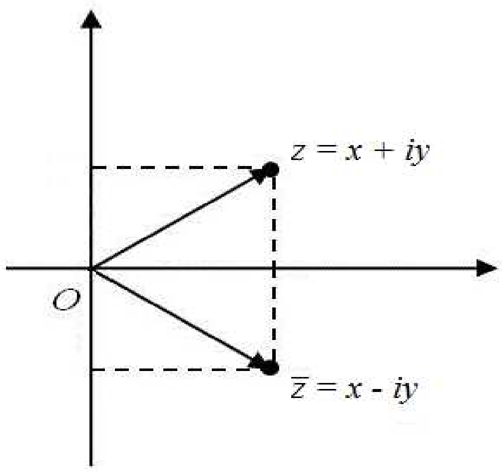
2.6 DEFINIMOS O CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Definimos como conjugado de um número complexo $z = x + yi$ ao complexo $\overline{z} = x - yi$.

$$z = x + yi \Leftrightarrow \overline{z} = x - yi$$

A seguir representaremos o número complexo na sua forma geométrica:

Figura 13- Representação geometricamente do conjugado



Fonte: Wiki ciências (2012)

Além disso, também temos as propriedades do conjugado da soma e o do produto, que podem ser demonstradas as operações de distributividade em relação a subtração e a multiplicação a divisão.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Analisando a primeira definição do conjugado da soma, chegamos a conclusão que a soma de um número complexo com o seu conjugado o resultado é duas vezes a parte real dele.

$$z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2Re(z)$$

Da mesma forma iremos analisar para a diferença de um número complexo e seu conjugado, concluímos que, o resultado é um número imaginário puro.

$$z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = 2Im(z)i$$

2.7 VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO COMPLEXO QUALQUER

Chama-se norma de um número complexo todo $z = x + yi$ ao número real não negativo.

$$N(z) = x^2 + y^2$$

Assim, o módulo ou valor absoluto de z é denotado como número real não negativo.

$$| z |= \sqrt{N(z)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

É notório observar que geometricamente o valor absoluto de um número complexo Z representa a distância do ponto à origem do plano complexo. Sendo assim, é de fácil análise algumas das propriedades abaixo.

O módulo de um número complexo é igual ao módulo do seu conjugado:

$$|z|=|\bar{z}|$$

A multiplicação de um número complexo pelo o conjugado é igual ao seu módulo ao quadrado:

$$z.\overline{z} = |z|^2$$

Segue também as definições do produto e do quociente e valor absoluto:

$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

2.8 FORMA TRIGONOMÉTRICA

Argumento:

Dado um número complexo qualquer representado na forma algébrica $z = x + yi$, não nulo, ao ângulo θ tal que:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}, \text{ em que } \rho = |z|$$

Observamos que:

Z≠0 garante que ρ ≠0. Então, existe ao menos um ângulo θ satisfazendo a definição, pois:

$$cos^2\,\theta + sen^2\theta = (\frac{x}{\rho})^2 + (\frac{y}{\rho})^2 = \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

Logo, fixado o complexo $z \neq 0$, estão fixados $\cos\theta$ e $\sin\theta$, mas o ângulo θ pode assumir infinitos valores, congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Assim, o complexo $z \neq 0$ tem argumento

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi$$

Em que θ_0, chamado de argumento principal de z, é tal que:

$$cos\theta_0 = \frac{x}{\rho}, sen\theta_0 = \frac{y}{\rho} \quad e \quad 0 \preceq \theta_0 \prec 2\pi$$

Desta forma, dado um número complexo $z = x + yi$, não nulo, temos:

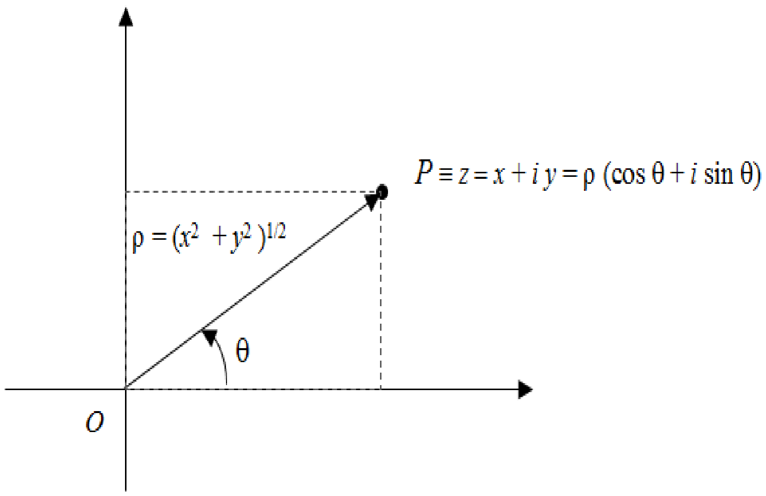
$$z = x + yi = \rho.(\frac{x}{\rho} + i.\frac{y}{\rho})$$

Portanto denotamos como forma trigonométrica ou polar de z:

$$z = \rho.(cos\theta + i.sen\theta)$$

A forma polar é muito usual para operações que envolve potencialização e radiciação nos complexos.

Figura 14- Representação geométrica na forma polar



Fonte: Wiki ciências (2012)

Além disso, para representamos um número complexo geometricamente por coordenadas polares temos que ter θ igual ao argumento de Z e $r = |z| \geq 0$. Portanto:

$$x = rcos(\theta) \quad y = rsen(\theta)$$

Deste modo, poderemos escrever o número complexo na forma polar, assim:

$$z = rcos(\theta) + irsen(\theta) = r(cos(\theta) + isen(\theta))$$

Para chegarmos na função exponencial dos números complexos primeiro vamos falar de Euler que teve a brilhante ideia de trabalhar com funções exponenciais e números complexos e através da expansão em série de Taylor, em torno das funções $e^x, \operatorname{sen} x, \cos x$, observando a expansão da série de Taylor, em torno das funções, teremos:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} \dots$$

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} \dots$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} \dots$$

Desta forma substituindo y por ix em e^y, teremos a chamada fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

E por fim considerando o complexo $z = a + bi$ na forma polar de $z = |z| \cos\theta + i \sin\theta$, iremos ter a forma exponencial de um número complexo:

$$z = |z| e^{i\theta}$$

Utilizar a forma exponencial é de suma importância para facilitar cálculos e para compreender as interpretações no plano complexo.

2.9 RAIZ ENÉSIMA

Dado um número complexo z, definimos raiz enésima de z e apresentado como $\sqrt[n]{z}$, a um número complexo Z_k tal que $Z_k^n = z$.

$$\sqrt[n]{z} = z_k \Leftrightarrow z_k^n = z$$

Dados o número complexo $z = \rho.\,(cos\theta + isen\theta)$ e o número natural $n(n \geq 2)$, logo existem n raízes enésimas de Z que são representada na forma a seguir:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}.\,[cos(\frac{\theta}{n} + k.\,\frac{2\pi}{n}) + i.\,sen(\frac{\theta}{n} + k.\,\frac{2\pi}{n})]$$

Em que $\sqrt[n]{\rho}$ em que N é pertence aos inteiros.

3.0 CONDIÇÕES PARA COLINEARIDADE NO PLANO COMPLEXO

Para podemos apresentar as condições de colinearidade é necessário provar primeiro a proposição a seguir.

Proposição: Dado três pontos distintos $z_1, z_2\ e\ z_3$ pertencente ao complexos, só serão colineares se, e somente se,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$$

Prova:

($\Rightarrow$)

A colinearidade dos pontos $z_1, z_2\ e\ z_3$ é correspondente ao ângulo $\widehat{z_2 z_1 z_3}$ ser igual a 0 ou a π, ou seja $\arg(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}) \in \{0, \pi\}$, o que é equivalente a $(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1})$ pertencente aos reais.

($\Leftarrow$)

Se temos $\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)$ pertencente aos reais, então pela a forma polar $\rho.\,(cos\theta + i.\,sen\theta)$, seguimos:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| [cos(\theta) + isen(\theta)] \in \mathbb{R}$$

Logo, $i.\sin\theta = 0 \leftrightarrow \theta = \in (0, \pi)$

.

$$arg(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}) = 0 \quad arg(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}) = \pi$$,

Desta forma os pontos $Z_{1,}Z_2\ e\ Z_3$ são colineares.

3.1 EQUAÇÃO DA RETA NOS COMPLEXOS

Dados dois números complexos qualquer z_1 e z_2 é possível determinar uma reta que passa exatamente pelo ponto z_1 na direção do vetor z_2, determinada por essa equação:

$$z(t) = z_1 + z_2 t,\ t \in \mathbb{R}$$

Desta forma conseguimos perceber que $z(t)$ é denominada como equação paramétrica paralela ao vetor z_2 que contém o número complexo z_1. Logo para definimos a diferença entre os complexos $z_1\ e\ z_2$ que pertencem a reta r, denotaremos a equação da reta como:

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \rightarrow r(t) = z_1 + (z_1 - z_2)t \end{cases}$$

Apresentando a proposição temos que, se $z_1\ e\ z_2$ pontos de uma reta qualquer r, então existe um t que satisfaça a equação abaixo:

$$z(t) = \frac{1}{1+t} z_1 + \frac{t}{1+t} z_2 = \frac{z_1 + t z_2}{1+t},\ t \in \mathbb{R}$$

3.2 PONTO DE INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS

Dado duas retas $r\ e\ s$, com os complexos $z_1\ e\ z_2$, $z_3\ e\ z_4$ pela a equação da reta teremos:

$$r : z_r(u) = \frac{z_1 + u z_2}{1+u} \quad e \quad s : z_s(v) = \frac{z_3 + v z_4}{1+v}$$

Além disso para acharmos o ponto de interseção entre as duas retas, simplesmente iremos igualar as equações:

$$\frac{z_1 + u z_2}{1+u} = \frac{z_3 + v z_4}{1+v}$$

Então manipulando as equações chegaremos que:

$$(1+v)(z_1+uz_2)=(1+u)(z_3+vz_4)$$

Sendo assim poderemos substituir os parâmetros u e v por:

$$-u=\frac{z-z_1}{z-z_2},\ u\succ 0 \quad -v=\frac{z-z_3}{z-z_4},\ v\succ 0$$

Portanto os pontos de interseção das retas z_r e z_s será denominado dessa forma $z=z_r=z_s$, assim z representa exatamente o ponto de interseção das retas.

Desta forma como foi apresentado o corpo dos números complexos e algumas propriedades, podemos partir para as demonstrações dos teoremas de Menelaus e Ceva.

4 TEOREMAS

4.1 TEOREMA DE MENELAUS

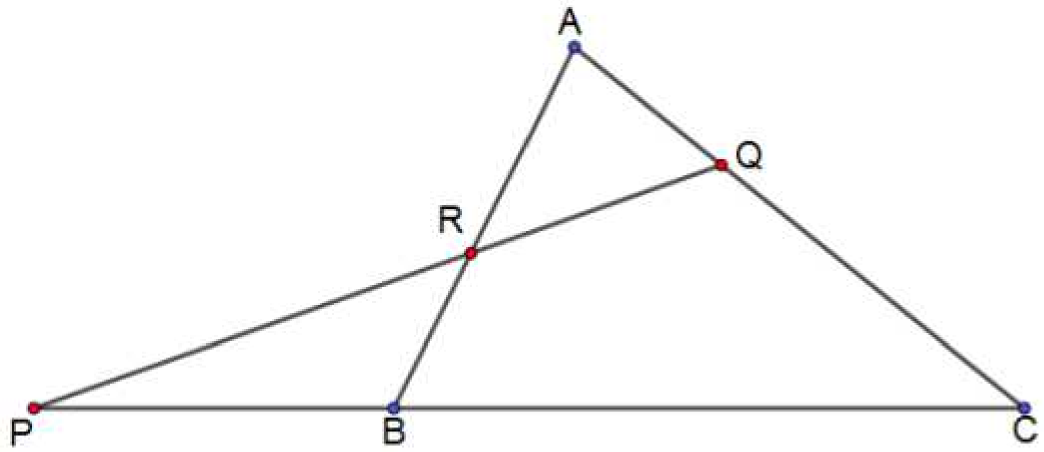
Teorema: (Teorema de Menelaus)

Sejam o triângulo ABC e $p, q\ e\ r$ pontos sobre a reta suportes dos segmentos orientados BC, CA e AB nessa ordem, todos distintos dos vértices de ABC. Então:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -1$$

se, e somente se, $p, q\ e\ r$ forem colineares.

Figura 14- Representação geométrica do Teorema de Menelaus

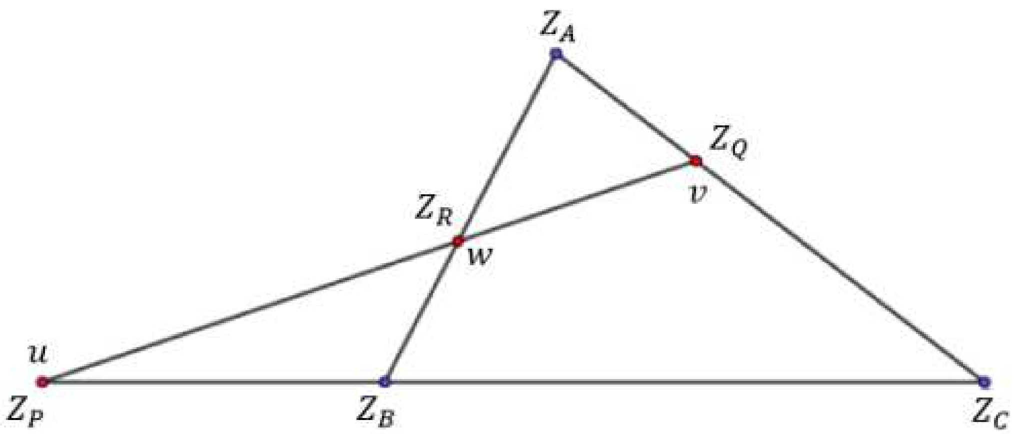


Fonte: Breno Arcanjo (2019)

Sendo assim, para demonstrar teremos que tomar os vértices do triângulo ABC como números complexos quaisquer e da mesma forma teremos que fazer para os pontos $p, q\ e\ r$. Logo para os vértices teremos $z_a, z_b\ e\ z_c$ e para os pontos $z_p = u, z_q = v\ e\ z_r = w$.

Desta forma a representação geométrica do teorema de Menelaus ficará representado desta maneira:

Figura 15- representação geométrica do teorema de Menelaus nos complexos



Fonte: Breno Arcanjo (2019)

Portanto, pelas propriedades que apresentamos anteriormente no capítulo II e também como sabemos que z_p, z_q e z_r são pontos pertencentes a mesma reta, então podemos representá-los da seguinte maneira:

$$z_P = \frac{z_B + uz_C}{1+u} \Rightarrow u = \frac{z_P - z_B}{z_C - z_P}$$

$$z_Q = \frac{z_C + vz_A}{1+v} \Rightarrow v = \frac{z_Q - z_C}{z_A - z_Q}$$

$$z_R = \frac{z_A + wz_B}{1+w} \Rightarrow w = \frac{z_R - z_A}{z_B - z_R}$$

Posto isto, feito a parametrização, o teorema de Menelaus pode ser rescrito:

$$\frac{z_B z_P}{z_P z_C} . \frac{z_C z_Q}{z_Q z_A} . \frac{z_A z_R}{z_R z_B} = \frac{(z_P - z_B)}{(z_C - z_P)} . \frac{(z_Q - z_C)}{(z_A - z_Q)} . \frac{(z_R - z_A)}{(z_B - z_R)} = u.v.w = -1$$

Isso só irá ocorrer se, e somente se, z_P, z_Q e z_R forem colineares.

Então para provarmos, teremos que verificar se z_P, z_Q e z_R pertencem a mesma reta, usando determinante podemos analisar se o determinante é igual a 0 quando $u.v.w = -1$, se isso ocorrer, logo teremos que os pontos são colineares.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_P & z_Q & z_R \\ \overline{z_P} & \overline{z_Q} & \overline{z_R} \end{vmatrix}$$

Seguindo os cálculos do determinante e substituindo os pontos complexos pelas as propriedades apresentadas, ficaremos da seguinte maneira:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_P & z_Q & z_R \\ \overline{z_P} & \overline{z_Q} & \overline{z_R} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{z_B+uz_C}{1+u} & \frac{z_C+vz_A}{1+v} & \frac{z_A+wz_B}{1+w} \\ \frac{\overline{z_B}+u\overline{z_C}}{1+u} & \frac{\overline{z_C}+v\overline{z_A}}{1+v} & \frac{\overline{z_A}+w\overline{z_B}}{1+w} \end{vmatrix} =$$

Fazendo o produto da primeira, segunda e terceira coluna por $(1+u), (1+v)$ e $(1+w)$, teremos:

$$= \frac{1}{(1+\mathrm{u})} \cdot \frac{1}{(1+\mathrm{v})} \cdot \frac{1}{(1+\mathrm{w})} \begin{vmatrix} 1+u & 1+v & 1+w \\ z_B+uz_C & z_c+vz_A & z_A+wz_B \\ \overline{z_B}+u\overline{z_C} & \overline{z_C}+v\overline{z_A} & \overline{z_A}+w\overline{z_B} \end{vmatrix}$$

Desta forma, é necessário mostrar que o determinante dessa matriz é nulo quando os pontos $u.v.w = -1$:

$$\begin{vmatrix} 1+u & 1+v & 1+w \\ z_B+uz_C & z_c+vz_A & z_A+wz_B \\ \overline{z_B}+u\overline{z_C} & \overline{z_C}+v\overline{z_A} & \overline{z_A}+w\overline{z_B} \end{vmatrix}$$

De fato, fazendo $C_1 = C_1 - uC_2 + uv.C_3$, onde $C_1, C_2 \; e \; C_3$ representam primeira, segunda e terceira coluna, então obteremos:

$$\mathrm{C}_1 = \begin{bmatrix} 1+u \\ z_B + uz_C \\ \overline{z_B} + u\overline{z_C} \end{bmatrix} - u \begin{bmatrix} 1+v \\ z_c + vz_A \\ \overline{z_C} + v\overline{z_A} \end{bmatrix} + uv \begin{bmatrix} 1+w \\ z_A + wz_B \\ \overline{z_A} + w\overline{z_B} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u - u - uv + uv + uvw + 1 \\ uz_C - uz_C + uvz_A - uvz_A + uvwz_B \quad + z_B \\ u\overline{z_C} - u\overline{z_C} - uv\overline{z_A} + uv\overline{z_A} + uvw\overline{z_B} \; + \overline{z_B} \end{bmatrix}$$

Sendo assim, teremos que a coluna C_1 vai ser nula, portanto:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1+v & 1+w \\ 0 & z_c + vz_A & z_A + wz_B \\ 0 & \overline{z_C} + v\overline{z_A} & \overline{z_A} + w\overline{z_B} \end{vmatrix} = 0$$

Portanto os pontos $z_P, z_Q \; e \; z_R$ são colineares, quando fazemos $uvw = -1$.

$(\Leftarrow)$

Para a volta da demonstração teremos que mostrar que a matriz:

$$\begin{vmatrix} 1+u & 1+v & 1+w \\ z_B + uz_C & z_c + vz_A & z_A + wz_B \\ \overline{z_B} + u\overline{z_C} & \overline{z_C} + v\overline{z_A} & \overline{z_A} + w\overline{z_B} \end{vmatrix} = 0$$

sendo assim, teremos $uvw = -1$.

Analogamente, tomando $C_1 = C_1 - uC_2 + uv.C_3$, onde C_1, C_2 e C_3 representam a primeira, segunda e terceira coluna, assim teremos:

$$\begin{vmatrix} uvw+1 & 1+v & 1+w \\ uvwz_B + z_B & z_c + vz_A & z_A + wz_B \\ uvw\overline{z_B} + \overline{z_B} & \overline{z_C} + v\overline{z_A} & \overline{z_A} + w\overline{z_B} \end{vmatrix} = (uvw+1)\begin{vmatrix} 1 & 1+v & 1+w \\ z_B & z_c + vz_A & z_A + wz_B \\ \overline{z_B} & \overline{z_C} + v\overline{z_A} & \overline{z_A} + w\overline{z_B} \end{vmatrix}$$

Desta forma agora fazendo $C_3 = -wC_1' + C_3$, teremos:

$$(uvw+1)\begin{vmatrix} 1 & 1+v & 1+w \\ z_B & z_c + vz_A & z_A + wz_B \\ \overline{z_B} & \overline{z_C} + v\overline{z_A} & \overline{z_A} + w\overline{z_B} \end{vmatrix} = (uvw+1)\begin{vmatrix} 1 & 1+v & 1 \\ z_B & z_c + vz_A & z_A \\ \overline{z_B} & \overline{z_C} + v\overline{z_A} & \overline{z_A} \end{vmatrix} = 0$$

Fazendo novamente $C_2 = -vC_3' + C_2$, iremos obter:

$$(uvw+1)\begin{vmatrix} 1 & 1+v & 1 \\ z_B & z_c + vz_A & z_A \\ \overline{z_B} & \overline{z_C} + v\overline{z_A} & \overline{z_A} \end{vmatrix} = (uvw+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_B & z_c & z_A \\ \overline{z_B} & \overline{z_C} & \overline{z_A} \end{vmatrix} = 0$$

Como por definição do teorema de Menelaus onde colocamos z_A, z_B e z_C como vértices do triângulo, chegamos a conclusão que $uvw + 1 = 0$, portanto $uvw = -1$.

4.2 TEOREMA DE CEVA

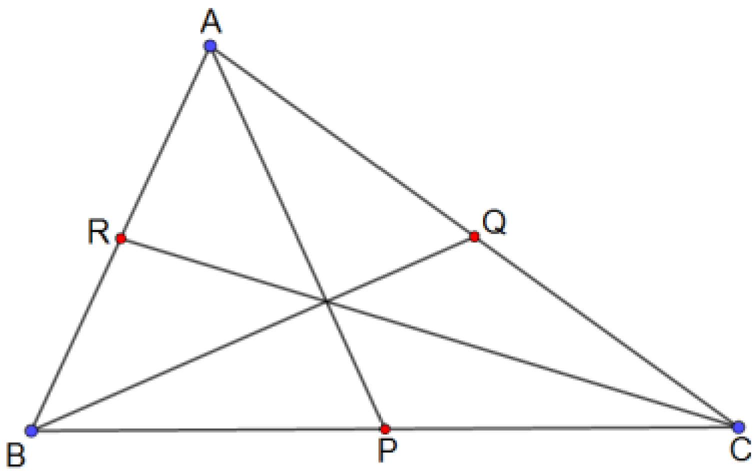
Teorema: (Teorema de Ceva)

Seja ABC um triângulo qualquer e $P, Q\ e\ R$ pontos situados respectivamente sobre as retas suportes dos lados $BC, CA\ e\ AB$, temos que:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1$$

se, e somente se, as retas que contém os segmentos $AP, BQ\ e\ CR$ forem concorrentes em um único ponto.

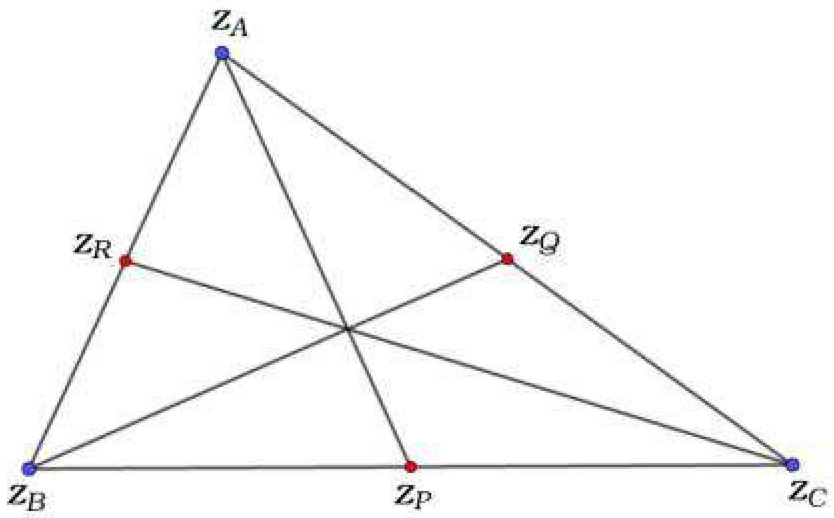
Figura 16- Representação geométrica do teorema de Ceva



Fonte: Breno Arcanjo (2019)

Sendo assim, podemos prosseguir para a demonstração, sejam o triângulo com vértices $A, B\ e\ C$, denotamos os vértices como $A = z_A$, $B = z_B$ e $C = z_c$ e os pontos $P, Q\ e\ R$ também iremos representar por $P = z_P$,$Q = z_Q$ e $R = z_R$, Logo a representação geométrica do teorema de Cevas nos números complexos ficará da seguinte maneira:

Figura 17- Representação geométrica do teorema de Cevas no conjunto dos números complexos



Fonte: Breno Arcanjo (2019)

Portanto, a partir desta representação, podemos parametrizar os vértices e os pontos dados.

$$z_P = \frac{z_B + uz_C}{1+u}\ ;\ z_Q = \frac{z_C + vz_A}{1+v}\ ;\ z_R = \frac{z_A + wz_B}{1+w}$$

Desta maneira com os vértices e os pontos parametrizados podemos substituir no teorema de Cevas:

$$\frac{z_B z_P}{z_P z_C} \cdot \frac{z_C z_Q}{z_Q z_A} \cdot \frac{z_A z_R}{z_R z_B} = \frac{(z_P - z_B)}{(z_C - z_P)} \cdot \frac{(z_Q - z_C)}{(z_A - z_Q)} \cdot \frac{(z_R - z_A)}{(z_B - z_R)} = u.v.w = 1$$

Se, e somente se, as retas suportes de $(z_A - z_P), (z_B - z_Q)\ e\ (z_C - z_R)$ forem concorrentes em um único ponto.

$(\Rightarrow)$

Nessa primeira parte da demonstração cuja em mostrar que as retas suportes dos vetores $(z_A - z_P), (z_B - z_Q)\ e\ (z_C - z_R)$ são concorrentes em um único ponto, quando $uvw = 1$.

Sendo assim basta verificar o determinante da matriz abaixo se é nulo quando $uvw = 1$.

$$\begin{vmatrix} z_A - z_P & z_B - z_Q & z_C - z_R \\ \overline{z_A} - \overline{z_P} & \overline{z_B} - \overline{z_Q} & \overline{z_C} - \overline{z_R} \\ z_A\overline{z_P} - \overline{z_A}z_P & z_B\overline{z_Q} - \overline{z_B}z_Q & z_C\overline{z_R} - \overline{z_C}z_R \end{vmatrix}$$

Parametrizando os números complexos da matriz acima, teremos:

$$\begin{vmatrix} z_A \dfrac{z_B + uz_C}{1+u} & z_B \dfrac{z_C + vz_A}{1+v} & z_C \dfrac{z_A + wz_B}{1+w} \\ \overline{z_A} \dfrac{\overline{z_B} + u\overline{z_C}}{1+u} & \overline{z_B} \dfrac{\overline{z_C} + v\overline{z_A}}{1+v} & \overline{z_C} \dfrac{\overline{z_A} + w\overline{z_B}}{1+w} \\ z_A \dfrac{\overline{z_B} + u\overline{z_C}}{1+u} - \overline{z_A} \dfrac{z_B + uz_C}{1+u} & z_B \dfrac{\overline{z_C} + v\overline{z_A}}{1+v} - \overline{z_B} \dfrac{z_C + vz_A}{1+v} & z_C \dfrac{\overline{z_A} + w\overline{z_B}}{1+w} - \overline{z_C} \dfrac{z_A + wz_B}{1+w} \end{vmatrix}$$

Fazendo o produto da primeira, segunda e terceira coluna por $(1+u), (1+v)\ e\ (1+w)$, iremos percebe que:

$$\begin{vmatrix} (1+u)z_A - (z_B + uz_C) & (1+v)z_B - (z_C + vz_A) & (1+w)z_C - (z_A + wz_B) \\ (1+u)\overline{z_A} - (\overline{z_B} + u\overline{z_C}) & (1+v)\overline{z_B} - (\overline{z_C} + v\overline{z_A}) & (1+w)\overline{z_C} - (\overline{z_A} + w\overline{z_B}) \\ (1+u)\{z_A(\overline{z_B} + u\overline{z_C}) - \overline{z_A}(z_B + uz_C) & (1+v)\{z_B(\overline{z_C} + v\overline{z_A}) - \overline{z_B}(z_C + vz_A) & (1+w)\{z_C(\overline{z_A} + w\overline{z_B}) - \overline{z_C}(z_A + wz_B) \end{vmatrix}$$

Agora vamos analisar se realmente o produto entre $uvw = 1$, fazendo $C_2 = C_2 + v.C_1 + uvC_3$, onde $C_1, C_2\ e\ C_3$ representam a primeira, segunda e terceira coluna, logo teremos:

$$\begin{vmatrix} (1+u)z_A-(z_B+uz_C) & 0 & (1+w)z_C-(z_A+wz_B) \\ (1+u)\overline{z_A}-(\overline{z_B}+u\overline{z_C}) & 0 & (1+w)\overline{z_C}-(\overline{z_A}+w\overline{z_B}) \\ (1+u)\{z_A(\overline{z_B}+u\overline{z_C})-\overline{z_A}(z_B+uz_C) & 0 & (1+w)\{z_C(\overline{z_A}+w\overline{z_B})-\overline{z_C}(z_A+wz_B) \end{vmatrix}$$

Concluímos que, como a matriz acima tem a segunda coluna nula, portanto o seu determinante será igual a 0, logo $uvw = 1$.

$(\Leftarrow)$

Na volta da demonstração iremos mostrar que:

$$\begin{vmatrix} (1+u)z_A-(z_B+uz_C) & (1+v)z_B-(z_C+vz_A) & (1+w)z_C-(z_A+wz_B) \\ (1+u)\overline{z_A}-(\overline{z_B}+u\overline{z_C}) & (1+v)\overline{z_B}-(\overline{z_C}+v\overline{z_A}) & (1+w)\overline{z_C}-(\overline{z_A}+w\overline{z_B}) \\ (1+u)\{z_A(\overline{z_B}+u\overline{z_C})-\overline{z_A}(z_B+uz_C) & (1+v)\{z_B(\overline{z_C}+v\overline{z_A})-\overline{z_B}(z_C+vz_A) & (1+w)\{z_C(\overline{z_A}+w\overline{z_B})-\overline{z_C}(z_A+wz_B) \end{vmatrix} = 0$$

Para assim termos $uvw = 1$.

Desta forma, para visualizarmos se a matriz a cima é nula, iremos tomar $C_2 = C_2 + v.C_1 + uvC_3$ onde C_1, C_2 e C_3 representa a primeira, segunda e terceira coluna, colocando $uvw - 1$ em evidência, segue as contas analogamente ao teorema anterior de Menelaus para chegarmos ao que queríamos.

$$(uvw-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_B & z_c & z_A \\ \overline{z_B} & \overline{z_C} & \overline{z_A} \end{vmatrix} = 0$$

É notório observar que como z_A, z_B e z_C são vértices do triângulo, temos $uvw - 1 = 0$, logo por essa equação $uvw = 1$, o que demonstra que as retas suportes $(z_A - z_P)$, $(z_B - z_Q)$ e $(z_C - z_R)$ são concorrentes em um único ponto se, e somente se, $uvw = 1$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante muito tempo os números complexos têm sido um grande problema na matemática, especificamente durante o século XVI, onde descobriram o primeiro problema que envolvia cálculo de raízes quadradas de números negativos, diante disso foi necessário um grande avanço matemático para poder desenvolver ferramentas que fosse possível trabalhar com esse novo conjunto numérico que estava surgindo, a relevância desse novo conjunto foi de suma importância para o desenvolvimento da matemática moderna, como por exemplo utilizar $\sqrt{-1} = i$, deu o início total para o desenvolvimento de novas fórmulas e propriedades para que fosse possível utiliza-lo de maneira coerente.

Desta forma, as aplicações dos números complexos em diversas áreas ainda é um ramo que está em crescimento, porém neste trabalho buscamos utilizar nos teoremas de Menelaus e Ceva, assim demonstrando com utilização dos complexos os dois teoremas citados.

Portanto, neste trabalho vemos que o objetivo de demonstrar os teoremas através da aplicação dos números complexos foi concluído com sucesso e que esse trabalho sirva de expiração para outras pessoas que pensem em trabalhar nessa área tão nobre da matemática.

REFERÊNCIAS

BASTOS, L. **Números Complexos e Geogebra,** 2013. 51f. Dissertação (de Mestrado), Programa de pós-graduação em matemática em rede nacional, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

BOYER, B. Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2003

CORDEIRO, Alexander Magno *et al*. **Systematic review**: a narrative review. Revista do colégio Brasileiro de Cirurgiões, v. 34, n. 6, p. 428-431, 2007.

CRUZ, B. **Aplicações dos números complexos à Geometria Analítica Plana.** 2019. 67f. Dissertação (de Mestrado), Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal Ouro Preto, Ouro Preto, 2019.

DUVAL, Raymond. **Aprendizagens intelectuais**. Caderno do curso ministrado na PUC-SP, Fevereiro/1999.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**, **volume 6**: Complexos, polinômios, equações. Atual Editora. 1993.

ROCHA, V. **Números complexos e o teorema fundamental da algebra.** 2014. 86f. Dissertação (de Mestrado), Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

ROQUE, T. **História da Matemática**, uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar 2012.