UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SIMONE DOS SANTOS HENRIQUES COSTA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM APLICADAS NA DIGESTÃO DE ANIMAIS RUMINANTES

CUITÉ - PB

2023

SIMONE DOS SANTOS HENRIQUES COSTA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM APLICADAS NA DIGESTÃO DE ANIMAIS RUMINANTES

TCC apresentado ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco

CUITÉ - PB

2023

C837e Costa, Simone dos Santos Henriques.

Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem aplicadas na digestão de animais ruminantes. / Simone dos Santos Henriques Costa. - Cuité, 2023.
48 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2023.
"Orientação: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco".
Referências.

1. Equações diferenciais. 2. Matemática aplicada. 3. Modelagem matemática. 4. Análise gráfica. 5. Equações diferenciais ordinárias. 6. Ruminantes - digestão - equações diferenciais. I. Franco, Célia Maria Rufino. II. Título.

CDU 514.745.8(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

SIMONE DOS SANTOS HENRIQUES COSTA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM APLICADAS NA DIGESTÃO DE ANIMAIS RUMINANTES

TCC apresentado ao curso de graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Aprovado em: 08 de fevereiro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br CELIA MARIA RUFINO FRANCO LEITE
Data: 22/02/2023 23:14:01-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco - UFCG/Campus Cuité

Orientadora

Documento assinado digitalmente
gov.br ALUIZIO FREIRE DA SILVA JUNIOR
Data: 22/02/2023 14:25:00-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Aluízio Freire da Silva Junior - UFCG/Campus Cuité

Examinador

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Profa. Msc. Maria de Jesus Rodrigues da Silva - UFCG/Campus Cuité

Examinador

CUITÉ-PB

2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus e a Virgem Maria por me conceder o dom da vida e da sabedoria.

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais, Francisco (Chiquinho) e Cícera (Alva) e também ao meu irmão Ivo, pelo infinito amor e por terem lutado incansavelmente pela minha educação e que nunca mediram esforços para que meus objetivos fossem alcançados, sempre me apoiando e dedicando carinho e paciência, como também não mediram esforços para me ajudar até aqui.

A Romildo, pela paciência, por me escutar, por ser meu grande amigo e companheiro de todas as horas e que sempre me apoia em todas as minhas decisões de minha vida. Obrigada pelo amor incondicional, você é meu alicerce.

A todas as amizades construída no Campus, pelo carinho e que me ajudaram a enriquecer meus conhecimentos, pela acolhida e momentos inesquecíveis durante essa caminhada.

Sou eternamente grata a todos os professores que contribuíram para o meu ensino e aprendizagem, agradeço à minha professora orientadora Célia Maria, por toda ajuda durante as orientações, sempre com muito compromisso, responsabilidade e dedicação, serei sempre grata, pois graças a confiança e incentivo consegui concluir esse trabalho, a dedicação e profissionalismo serão minha inspiração por toda a vida.

Aos professores componentes da banca, que aceitaram o convite, por se disponibilizar a examinar esse trabalho, como também dá sugestões para seu aprimoramento e assim enriquecer mais.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática, do Centro de Educação e Saúde (CES), pelos ensinamentos adquiridos ao longo dessa caminhada de graduação e pelo empenho em formar profissionais cada vez mais capacitados.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação acadêmica.

Muito obrigada a todos!

Este trabalho é dedicado aos meus pais, que não mediram esforços para me ajudar durante esta caminhada.

"Adquirir a sabedoria vale mais que o ouro; antes adquirir a inteligência que a prata."

(Provérbios 16:16)

RESUMO

Este trabalho consiste em fazer um estudo das Equações Diferenciais, aplicando esse conhecimento no modelo matemático para a digestão de animais ruminantes proposto por Blaxter, Graham e Wainman. Os animais ruminantes se caracterizam pela capacidade de regurgitar os alimentos ingeridos, remastigar e em uma nova deglutição. Primeiramente foi realizado um estudo bibliográfico, que expõe a história e o conceito das Equações Diferenciais, dando destaque a alguns matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento, apresentando as definições, classificações, métodos de solução e por fim, a aplicação na digestão em animais ruminantes, com análise gráfica da solução em um exemplo particular acerca do processo na digestão de animais ruminantes, abordando o tempo de permanência dos alimentos no sistema digestivo.

Palavras Chaves: Matemática Aplicada. Modelagem Matemática. Análise Gráfica.

ABSTRACT

This work consists in making a study of the Differential Equations, applying this knowledge in the mathematical model for the digestion of ruminant animals proposed by Blaxter, Graham and Wainman. Ruminant animals are characterized by the ability to regurgitate ingested food, rechew and swallow again. First, a bibliographical study was carried out, which exposes the history and concept of Differential Equations, highlighting some mathematicians who contributed to the development, presenting the definitions, classifications, solution methods and finally, the application in digestion in ruminant animals, with graphical analysis of the solution in a particular example about the process in the digestion of ruminant animals, addressing the time of permanence of food in the digestive system.

Key words: Aplicated math. Mathematical Modeling. Graphic Analysis..

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo das Equações Diferenciais é um campo extenso, que pode ser abordado de diferentes formas, dependendo da finalidade do estudo. Para Bassanezi e Ferreira Jr (1988, p.2) “(...) talvez seja o ramo da matemática que maior proximidade e interações tem experimentado com outras ciências, desde a sua origem, que se confunde mesmo com a do Cálculo Diferencial e Integral e da Mecânica Clássica”. Direcionando para a Matemática Aplicada, tais equações são utilizadas para descrever situações diversas, sendo de grande importância na conexão e interação da matemática com outras áreas.

As Equações Diferenciais constituem como ferramenta importante na modelagem de alguns problemas. Bassanezi (2002, p.16) cita que “A *modelagem matemática* consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”, sendo de suma importância para a compreensão de problemas reais, apresentando aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento.

Os modelos matemáticos são representações da realidade e sustentam inúmeras áreas de ensino, pesquisa e extensão, podendo ser usada como uma ferramenta para melhor entender e otimizar o desempenho de determinado sistema. O modelo a ser descrito neste trabalho, representa a passagem de alimentos e digestão em animais ruminantes. Saenz (2005, p.887) situa que "modelos matemáticos foram desenvolvidos para melhorar a compreensão e integrar a representação de diversos aspectos relacionados com a cinética de partículas ruminais”. Desta forma, através de estudos, são gerados modelos, nos quais cada dia se incorporam maior número de parâmetros e fazem destes modelos verdadeiros sistemas de integração biológica e econômica.

São classificados como poligástricos ou ruminantes, animais que têm capacidade de ruminar, consistindo na regurgitação dos alimentos ingeridos, na remastigação e em uma nova deglutição. O trato digestivo dos ruminantes apresenta algumas alterações devido à evolução, dando origem a mecanismos especiais que se diferenciam de outros animais. Essa alteração se deve principalmente ao tipo da dieta, a digestão de produtos de origem vegetal, que se baseia em alimentos com alto teor de fibras (OLIVEIRA; SANTOS, 2019), ocasionando um mecanismo particular. Como exemplos de animais ruminantes, estão os grupos dos: bovinos, ovinos, caprinos, bubalinos, girafas, veados, entre outros.

Deste modo, este trabalho consiste em fazer um estudo bibliográfico das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem, aplicando esse conhecimento no modelo matemático para a digestão de animais ruminantes proposto por Blaxter,Graham e Wainman (1956). O modelo é capaz de descrever o processo digestivo de animais ruminantes, abordando o tempo de permanência dos alimentos no sistema digestivo. A sua importância consiste em se poder estabelecer o valor nutricional de vários alimentos selecionados e a granulação para melhor aproveitamento na digestão de animais ruminantes (BASSANEZI, 1988).

No entanto, para podermos analisar esse problema matematicamente é preciso de antemão uma noção de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. Desta forma, reservamos a parte inicial desse trabalho para expor a base teórica que será de fundamental importância para o desenvolvimento das aplicações, para só então, apresentarmos uma aplicação das Equações Diferenciais de primeira ordem na digestão em animais ruminantes, apresentando um problema contextualizado, sendo estudado a análise gráfica. Por fim, apresentam-se as conclusões pertinentes a esse trabalho.

2 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Este capítulo contém uma abordagem introdutória à teoria das Equações Diferenciais, apresentando resumidamente o desenvolvimento histórico e sua importância nas aplicações, sendo, portanto, uma base para os capítulos seguintes.

2.1 Nota histórica

Convém destacar que a construção de conceitos envolvendo Equações Diferenciais, ocorreu devido às contribuições de vários matemáticos em diferentes períodos históricos. A formação das ideias das Equações Diferenciais se deu em um longo período de tempo, onde foram desenvolvendo ideias e aperfeiçoando métodos para o estudo e aplicações das Equações Diferenciais nas mais diversas áreas do conhecimento. Embora o valor e o reconhecimento de algumas descobertas matemáticas tenham recaído sobre grandes nomes, é preciso reconhecer que essa teoria é uma construção das ideias e resultados obtidos por muitos estudiosos desde o início da humanidade (PAULA, 2019).

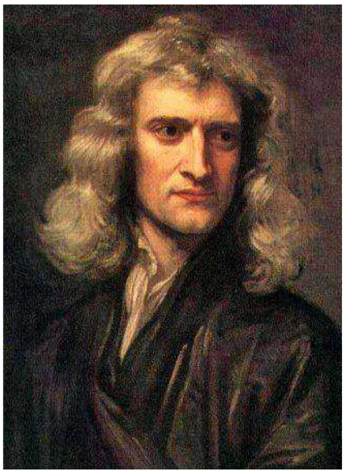
O progresso das Equações Diferenciais está interligado ao desenvolvimento da matemática e da física. Através do cálculo se inicia o estudo das Equações Diferenciais. Ao final do século XVII, Newton e Leibniz criadores do cálculo, instigados por problemas físicos, dão surgimento ao estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (FIGUEIREDO; NEVES, 2007). Para se chegar às definições atuais, muito foi estudado, modificado e aprimorado por vários estudiosos ao longo do tempo.

Em seu livro Boyce e Diprima (2006, p.15) relata que,

> Embora Newton tenha atuado relativamente pouco na área de equações diferenciais propriamente dita, seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler.

Isaac Newton, produziu obras importantes que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo, estabelecendo contribuições notáveis em diversas áreas de pesquisa, desenvolvendo alguns significados básicos que apoiaram no desenvolvimento das Equações Diferenciais. Eves (2011) cita que Newton demonstrou habilidade extraordinária na integração de algumas Equações Diferenciais, fornecendo desta forma a base para a sua aplicação.

Figura 1: Isaac Newton



Fonte: Retirada do site Info escola[1]

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), empenhou-se em várias áreas distintas, com personalidade autodidata, compunha-se uma boa notação matemática, e a notação para derivada dy/dx, assim como o sinal de integral são devido a ele. Concebeu as ideias fundamentais do cálculo de forma independente, sem nenhuma relação com Isaac Newton. Seus estudos em cálculo foram publicados em 1684, apesar de Newton ter obtido os resultados anteriormente. Entre os anos de 1691 e 1694, descobriu o método de separação de variáveis, redução de equações homogêneas e equações separáveis e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem. Viajava com frequência em missões diplomáticas e por ser conselheiro de diversas famílias reais, o que permitiu que mantivesse contato com outros matemáticos, principalmente os irmãos Bernoulli. Desse modo, foram resolvidos muitos problemas em equações diferenciais (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Figura 2: Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: Retirada do site Info Escola[2]

[1] Disponível em: https://www.infoescola.com/biografias/isaac-newton/ > acessado em 10/11/2022.
[2] Disponível em: https://www.infoescola.com/biografias/gottfried-leibniz/ > acessado em 10/11/2022.

A família Bernoulli, importante na história da matemática, manifestava especial talento, contribuindo com importantes descobertas para a ciência. Dentre os membros desta assinalável família, os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1740) estudaram sobre o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e expandir seus campos de aplicações. Relacionado com problemas de geometria e mecânica, encontraram soluções para equações diferenciais de primeira e segunda ordem (SIMÕES, 2014). Ambos fizeram contribuições significativas em diversas áreas da matemática. Jakob usou pela primeira vez a expressão integral com um sentido ligado ao cálculo (EVES, 2011) e usou os princípios de Newton para escrever equações para o movimento dos planetas. Johann, possivelmente foi o primeiro matemático a entender o cálculo de Leibniz, em 1696 apresentou o problema denominado "braquistócrona", que foi resolvida pelos irmãos Bernoulli e Newton, além de Leibniz. Nicolas Bernoulli (1687-1759), sobrinho de Jakob e Johann, escreveu intensamente sobre geometria e equações diferenciais e Daniel (1700- 1782), filho de Johann, foi um dos pioneiros no campo das Equações Diferenciais Parciais.

Figura 3:Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli e Daniel Bernoulli

Fonte: Compilação do autor[3]

Outro cientista que contribuiu no desenvolvimento das Equações Diferenciais foi Leonhard Euler (1707-1783), visto como um grande estudioso da matemática, em sua época. Boyer (1974 p.333) cita que "Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais(...)". Entre 1734 e 1769, Euler descobriu a condição para que equações diferenciais sejam exatas, desenvolveu a

[3] Disponíveis em: https://clube.spm.pt/news/curiosidades-sobre-o-matemtico-suo-jacob-bernoulli ; https://www.britannica.com/biography/Johann-Bernoulli; https://en.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli > acessado em 10/11/2022.

teoria de fatores integrantes, como também encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes e também para equações não-homogêneas. Usou com constância séries de potências para resolver equações diferenciais, sugeriu um procedimento numérico, fazendo contribuições importantes em equações diferenciais parciais e deu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Figura 4: Leonhard Euler

Fonte: Retirada do site Wikipedia[4]

Alguns outros matemáticos e cientistas da época contribuíram significativamente para a teoria associada às Equações Diferenciais, sendo eles Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Clairaut (1713-1765), Riccati (1676-1754), D' Alembert (1717-1783), Gauss (1777-1855), Bessel (1784-1846), entre outros (SIMÕES, 2014).

De acordo com Simões, "O século XVIII foi uma época de intenso desenvolvimento da teoria das equações diferenciais" (SIMÕES,2014, p.13) e até o final do século muitos métodos elementares para resolver equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos.

Do século XIX para os dias atuais, grandes contribuições foram dadas, muitas teorias foram desenvolvidas após o aparecimento das variáveis complexas e, devido a Gauss (1777-1855), Cauchy (1789-1857), Lispschitz (1832-1903) foram desenvolvidos muitos teoremas para a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais de primeira ordem.

Mesmo com as grandes contribuições de matemáticos e físicos, ainda assim predominavam famílias de equações diferenciais sem solução, o simples entendimento, não foi suficiente para resolver algumas destas equações, embora os métodos de integração numérica para estudar essas equações existissem no início do século XX, eles eram limitados pela quantidade de cálculos que precisava ser realizada manualmente.

[4] Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler > acessado em 10/11/2022.

O desenvolvimento das soluções de equações diferenciais ainda continua como objeto de pesquisa, e com os avanços tecnológicos, computadores cada vez mais poderosos permitem o estudo desses problemas que podem ser investigados com mais eficiência (BOYCE; DIPRIMA, 1985).

A partir dos estudos das Equações Diferenciais, outras áreas se desenvolveram, como: Álgebra Linear, Análise Funcional, Análise Numérica, Cálculo de Variação, Dinâmica de Fluidos, Teoria do Controle, Mecânica Quântica, entre outras (SIMÕES, 2014, p.15). O desenvolvimento das soluções para algumas equações diferenciais ainda continua a ser objeto de pesquisa, com problemas importantes e atrativos ainda não resolvidos.

3 INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste capítulo, serão apresentados conceitos, definições e exemplos preliminares para o estudo e compreensão sobre as Equações Diferenciais.

3.1 Terminologia e Definição

Para iniciar nosso estudo de Equações Diferenciais, precisamos de algumas terminologias comuns.

Variável Independente: Uma variável é chamada independente quando ela pode assumir qualquer valor arbitrário.

Variável Dependente: Uma variável é chamada dependente quando depende dos valores de outra variável.

Exemplo 1:

$$y = 10 + 2x$$

veja que o valor de y depende dos valores de x. Neste caso, o x é a variável independente e o y é a variável dependente já que depende dos valores de x.

Assim sendo, uma Equação Diferencial pode ser definida como uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Exemplo 2:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

Na equação, x é a variável independente e $y(x)$ é a variável dependente.

3.2 Classificação das Equações Diferenciais

As Equações Diferenciais são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

3.2.1 Classificação quanto ao tipo:

As Equações Diferenciais são classificadas quanto ao tipo em: Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Equações Diferenciais Parciais (EDPs).

Definição 1: Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente.

Exemplo 3:

$$\frac{dy}{dt} - 6y = 7$$

Na equação diferencial, $y = y(t)$ é a variável dependente e t é a variável independente. Deste modo, dispondo de uma única variável independente.

Definição 2: Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) contém derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo 4:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Na equação diferencial, u é a variável dependente e y e x são as variáveis independentes. Deste modo dispondo de duas variáveis independentes.

3.2.2 Classificação quanto à ordem:

A ordem de uma equação diferencial é definida de acordo com a derivada de maior ordem que nela se apresenta.

A ordem da derivada pode ser exemplificada nos exemplos que seguem.

Exemplo 5:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Na equação acima, a derivada de ordem maior é $\frac{d^2y}{dx^2}$, tendo em vista que $(\frac{dy}{dx})^3$ é uma derivada de primeira ordem elevada a terceira potência. Assim, por definição, temos uma Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem.

Exemplo 6:

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{2t^2} = 0$$

Na equação, a derivada de ordem maior é $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, ordem 4. Assim, temos uma Equação Diferencial Parcial de quarta ordem.

3.2.3 Classificação quanto a linearidade:

Uma outra classificação das equações diferenciais é se elas são lineares ou não

Definição 3: Uma equação diferencial é chamada de linear quando pode ser escrita na forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\ a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1\,(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

As equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são de primeiro grau.

(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Uma equação que não satisfaz (i) e (ii) é chamada de não-linear.

Exemplo 7:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{dy}{dx}-5y=e^x$$

Na equação acima, todos os termos envolvendo y tem potência 1 e seus coeficientes estão em função apenas de x, que é a variável independente. Com isso, podemos afirmar que é uma equação linear.

Exemplo 8:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2e^x\frac{d^2x}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}=x^4$$

A equação do Exemplo 8 é uma equação não linear devido à expressão $y\frac{dy}{dx}$, depende da variável independente y.

Neste trabalho, focaremos no estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). As derivadas ordinárias serão escritas com a notação de Leibniz (dy/dx) ou com a notação linha (y').

3.3 Equação Diferencial Ordinária

3.3.1 Caracterização

Podemos expressar uma equação diferencial ordinária de ordem n sendo x a variável independente e y a variável dependente, na forma geral

$$F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n})=0 \qquad (1)$$

onde F é uma função de valores reais de $n+2$ variáveis, $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$, e onde $\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$

Em algumas situações, podemos isolar o termo de mais alta ordem $\frac{d^ny}{dx^n}$ e escrever a equação (1) como

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) \tag{2}$$

onde f é uma função contínua de valores reais.

3.3.2 Solução de uma EDO

Definição 4: É denominada solução de uma equação diferencial de ordem n, qualquer função *f* definida em um intervalo *I* que tem pelo menos *n* derivadas contínuas em *I*, que, quando substituída na equação diferencial ordinária reduz a equação a uma identidade.

Exemplo 9:

A função $y = e^{2x}$ é uma solução para a equação diferencial ordinária $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Calculando as derivadas, temos:

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$$

$$\frac{d^2}{dx}(e^{2x}) = 4e^{2x}$$

Agora, substituindo na equação diferencial ordinária:

$$4e^{2x} - 3(2e^{2x}) + 2e^{2x} = 0 \Rightarrow$$

$$4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0 \Rightarrow$$

$$(4-6+2)(e^{2x}) = 0$$

$$0 = 0.$$

Assim, concluímos que $y = e^{2x}$ é solução de $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

3.3.3 Soluções Explícitas e Implícitas

Definição 5: A função $y(x)$ que, quando substituída por y em uma EDO, satisfaz a equação para x no intervalo I, é chamada de solução explicita para a equação em I.

Vimos no Exemplo 8, que $y(x) = e^{2x}$ é solução da equação $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$. Neste caso, dizemos que é solução explícita da equação, pois a variável y está expressa unicamente em função da variável x.

Definição 6: Uma relação $G(x, y) = 0$ é considerada uma solução implícita para uma EDO no intervalo I , se definir uma ou mais soluções explícitas em I.

Exemplo 10:[5] A relação

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{3}$$

é uma solução implícita da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \tag{4}$$

no intervalo $-5 < x < 5$.

Por diferenciação implícita, obtemos

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Reescrevendo a equação, isolando o $\frac{dy}{dx}$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

que é a equação inicial dada.

Deste modo, quando calculamos a derivada implícita da expressão $x^2 + y^2 - 4 = 0$ e isolamos o $\frac{dy}{dx}$, encontramos exatamente a igualdade presente em (4), logo constatamos implicitamente que a relação dada é solução de (4).

A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define duas funções diferenciais explícitas $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $(-2,2)$.

[5] Exemplo extraído de Zill, D. G. e Cullen, M. R. (2007, p.6)

3.4 Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem

3.4.1 Equações Separáveis

Definição 7: Uma equação de primeira ordem é dita separável ou de variáveis separáveis quando pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}\,,\ h(y) \neq 0\ . \tag{5}$$

Método de solução:

Se reescrevermos a equação, multiplicando os dois lados da equação por dx e por $h(y)$,

$$h(y)dy \ = \ g(x)dx$$

Integrando em ambos os membros temos:

$$\int h(y)dy \ = \ \int g(x)dx + C \tag{6}$$

A equação (6) é o procedimento na resolução para equações diferenciais separáveis.

Exemplo 11: Seja a equação diferencial

$$(1+x)dy - y\,dx = 0$$

Reescrevendo,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{(1+x)}$$

Integrando em ambos os membros temos,

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{(1+x)} \Rightarrow$$

$$ln|y| = ln|1+x| + c_1$$

$$e^{ln|y|} = e^{ln|1+x|+c1} \Rightarrow$$

$$y = e^{ln|1+x|+c1} \Rightarrow$$

$$y = e^{ln|1+x|}e^{c1} \Rightarrow$$

$$y = |1+x|e^{c1}$$

$$y = \pm e^{c1}(1+x)$$

Renomeando $\pm e^{c_1}$ como C, obtemos

$$y = C(1+x).$$

3.4.2 Problema de valor inicial

A solução de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) pode conter uma ou mais constantes indeterminadas. Essas constantes podem ser fixadas aplicando uma ou mais condições iniciais. Assim, o problema de resolver uma EDO com condição inicial dada é chamado de Problema de Valor Inicial (PVI). Para Bassanezi e Ferreira Jr (1988, p.16), "O problema de valor inicial é chamado também de *problema de Cauchy* para a equação diferencial(...)". Nesse estudo, daremos atenção aos problemas de primeira ordem.

Um PVI é composto por uma equação diferencial junto com o estabelecimento do valor da função desejada em um ponto. Formalmente um problema de valor inicial é definido pelas equações:

$$\frac{dy}{dt} = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{(condição inicial)}$$

em que x_0 pertence ao intervalo I.

Assim, além da equação diferencial, definimos o valor da função desejada em um tempo (argumento) inicial.

O teorema a seguir, nos dá condições suficientes para garantir existência e unicidade de soluções a partir de um problema de valor inicial.

Teorema 1: Seja R uma região definida por $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$ que contém o ponto (x_0, y_0). Se $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são funções contínuas em R, então existe um intervalo I centrado no ponto x_0 e uma única função $y = y(x)$ definida em I que satisfaz o PVI.

As condições do Teorema 1, apresenta apenas uma condição suficiente, ou seja, se caso as funções $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ não forem contínuas na região R dada então nada pode ser afirmado acerca da solução do PVI.

3.4.3 Equações Homogêneas

Dizemos que f é uma função homogênea de grau n, se satisfaz $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, para algum número real n.

Exemplo 12:[6]

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + 5y^2$$
$$f(tx,ty) = (tx)^2 - 3(tx)(ty) + 5(ty)^2 \Rightarrow$$
$$f(tx,ty) = t^2x^2 - 3t^2xy + 5t^2y^2 \Rightarrow$$
$$f(tx,ty) = t^2[x^2 - 3xy + 5y^2] = t^2f(x,y) \Rightarrow$$
$$f(tx,ty) = t^2f(x,y).$$

A função é homogênea de grau dois

Exemplo 13:[7]

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 1$$
$$f(tx,ty) = t^3x^3 + t^3y^3 + 1$$
$$f(tx,ty) \neq t^3f(x,y).$$

A função não é homogênea, pois $t^3 \neq f(x,y) = t^3x^3 + t^3y^3 + t^3$.

Se $f(x,y)$ for uma função homogênea de grau n, podemos escrever:

$$f(x,y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right); \qquad (7)$$

$$f(x,y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right). \qquad (8)$$

Uma Equação Diferencial de primeira ordem homogênea é definida em termos de funções homogêneas.

Definição 8: Uma equação diferencial da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (9)$$

é chamada de homogênea se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

Ou seja, a Equação (9) é chamada de homogênea se $M(tx,ty) = t^nM(x,y)$ e $N(tx,ty) = t^nN(x,y)$.

Método de solução:

Encontramos uma solução para uma EDO homogênea, transformando a equação por meio de uma substituição. Substituindo $y = ux$ ou $x = vy$, em que u e v são as novas variáveis independentes, e elas serão transformadas em EDOs separáveis.

---

[6] Exemplo extraído de Zill, D. G. e Cullen, M. R. (2007, p.53)
[7] Exemplo extraído de Zill, D. G. e Cullen, M. R. (2007, p.53)

Para isso, iremos considerar como primeiro caso $y = ux$, então sua diferencial é $dy = udx + xdu$.

Substituindo em (9),

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)[udx + xdu] = 0$$

Por (7) podemos reescrever:

$$x^n M(1, u)dx + x^n N(1, u)[udx + xdu] = 0$$

ou

$$[M(1, u) + uN(1, u)]dx + xN(1, u)du = 0$$

Assim,

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0$$

Analogamente, para o segundo caso em que $x = vy$, sua diferencial é $dx = vdy + ydv$, transformaremos a Equação homogênea (10), em uma EDO separável, pela substituição algébrica.

Pela homogeneidade, a equação (10) pode ser escrita como

$$M(vy, y)[vdy + ydv] + N(vy, y)dy = 0$$

Por (9) podemos reescrever:

$$y^n M(v, 1)[vdy + ydv] + y^n N(v, 1)dy = 0$$

$$[vM(v, 1) + N(v, 1)]dy + yM(v, 1)dv = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{M(v, 1)dv}{vM(v, 1) + N(v, 1)}$$

Exemplo 14:[8] Seja

$$(x - y)dx + xdy = 0 \qquad (10)$$

temos que, tanto $M(x, y)$ quanto $N(x, y)$, são homogêneas de grau um. Se $y = ux$, então $dy = udx + xdu$.

Substituindo em (10),

$$(x - ux)dx + x(udx + xdu) = 0$$

$$xdx - uxdx + xudx + x^2du = 0 \Rightarrow$$

$$xdx + x^2du = 0 \Rightarrow$$

$$x^2du = -xdx \Rightarrow$$

$$du = \frac{-x}{x^2}\, dx \Rightarrow$$

[8] Exemplo extraído de Nagle, Saff e e Snider (2012, p.53)

$$du = \frac{-1}{x}dx$$

Chegamos em uma equação separável, integrando os dois lados:

$$\int 1\, du = \int -\frac{1}{x}dx$$

$$u = -\ln|x| + c$$

Expressando a solução em termos das variáveis originais x e y, ficamos:

$$\frac{y}{x} = -\ln|x| + c$$

Deste modo,

$$y = -xln|x| + xc.$$

3.4.4 Equações Lineares de primeira ordem

Uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem pode ser expressa na forma padrão como:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x), \tag{11}$$

em que p e g são funções dadas da variável independente x.

Assim, procuramos uma solução para (11) em um intervalo *I* no qual as funções $p(x)$ e $g(x)$ sejam funções contínuas. Para resolver a Equação (11), usaremos o método dos "fatores integrantes", que consiste em multiplicar a equação diferencial por uma função fator de integração $\mu(x,y)$, transformando-a em uma equação facilmente integrável.

Deste modo, multiplicando ambos os lados da equação (11) por uma função indeterminada $\mu(x)$, teremos:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \tag{12}$$

Observe que o lado esquerdo da equação (12), pode ser escrito como a derivada do produto de [$\mu(x)$y], ou seja:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y$$

desde que:

$$\frac{d\mu(x)}{dx}y = \mu(x)p(x)y$$

ou ainda,

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x)$$

desta forma supondo $\mu(x) > 0$, tem-se:

$$\frac{\frac{d\mu(x)}{dx}}{\mu(x)} = p(x) \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{1}{\mu(x)} = p(x) \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = p(x)dx$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos:

$$ln|\mu(x)| = \int p(x)dx \Rightarrow$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \quad (13)$$

Agora, voltando para (12), temos que:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)g(x)$$

Assim, novamente pelo Teorema Fundamental do cálculo,

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)\,dx + c \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)g(x) + c \quad (14)$$

onde c é uma constante arbitrária. A Equação (14) fornece uma família de soluções de um único parâmetro para (11). Essa forma é denominada de solução geral da Equação Diferencial linear de primeira ordem.

Exemplo 15: Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 50e^{-10x} ,$$

note que a equação é linear e já está na forma padrão, e temos que $p(x) = 2$ e $g(x) = 50e^{-10x}$.

Deste modo, determinando o fator integrante $\mu(x)$, temos por (13):

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} \Rightarrow$$

$$\mu(x) = e^{2x}$$

Substituindo na equação (14),

$$y(x) = \frac{1}{e^{2x}}\int e^{2x}50e^{-10x} + c \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{50}{e^{2x}}\int e^{-8x} + c \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{50}{e^{2x}}(-\frac{1}{8}e^{-8x}) + ce^{-2x} \quad \Rightarrow$$

$$y(x) = -\frac{25}{4}e^{-10x} + ce^{-2x}.$$

É a solução geral para a equação diferencial linear de primeira ordem.

3.4.5 Existência e unicidade de solução

Em alguns casos, garantir que um problema de valor inicial (PVI) tem solução e unicidade antes de tentar resolvê-lo, muitas das vezes torna-se vantajoso. Deste modo, o teorema a seguir, nos permite averiguar se existe solução única para equações lineares.

Teorema 2: Se as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto $I: \alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$y' + p(t)y = g(t)$$

Para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0,$$

em que y_0 é um valor arbitrário dado.

4 APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM: DIGESTÃO EM ANIMAIS RUMINANTES

Neste capítulo, iremos apresentar um modelo para digestão de animais ruminantes, formulado a partir de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. Em seguida, faremos uma análise gráfica para um exemplo particular.

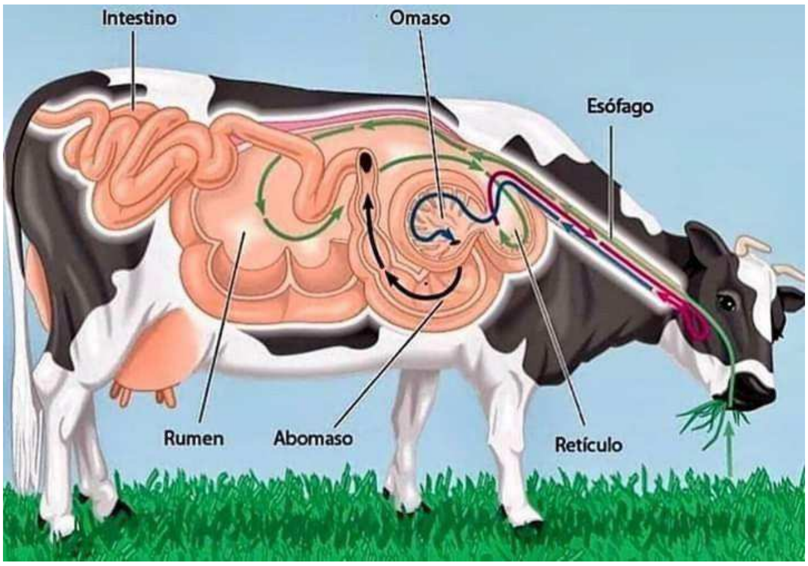
4.1 Digestão em Animais Ruminantes

O estômago dos ruminantes é dividido em quatro compartimentos, assim caracterizados: rúmen, retículo, omaso e abomaso (coagulador). Os três primeiros compartimentos do estômago dos ruminantes (rúmen, retículo e omaso), conhecido como pré-estômago, abrigam os microrganismos, portanto, possuem atividade fermentativa. O abomaso é conhecido como estômago verdadeiro, pois é o único compartimento que possui enzimas utilizadas no processo de digestão química.

O processo de digestão começa pela boca, o alimento é deglutido após um breve período de mastigação, chegando no primeiro compartimento denominado rúmen, onde se desencadeia o processo de ruminação, depois o alimento passa para o segundo compartimento, o retículo, onde ocorre a formação de pequenos bolos de comida que retornam para a cavidade oral para ser mastigado e, novamente é ingerido, destinando-se para o omaso, para que assim ocorra a reabsorção da água presente no bolo alimentar. Esse bolo cai no compartimento abomaso, que é um compartimento estrutural e funcionalmente comparável ao estômago de animais não-ruminantes, e é nele que o bolo alimentar irá ser digerido pelas enzimas presentes neste compartimento. Bassanezi e Ferreira Jr (1988), mencionam em seu livro que o fluxo do rúmen para o abomaso e do abomaso para o duodeno é aproximadamente contínuo.

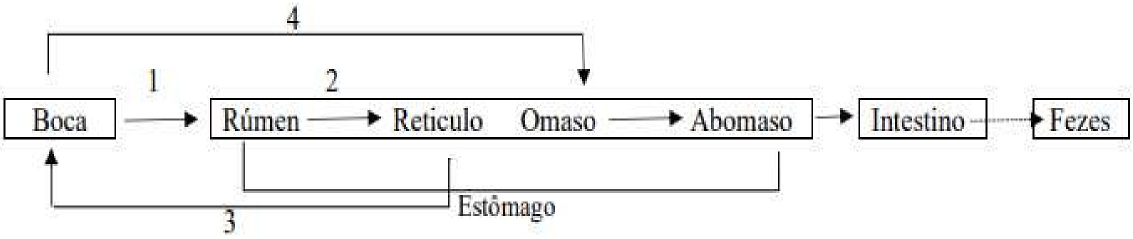
A digestão que se iniciou no abomaso, é completada no intestino delgado, sofrendo a ação de outras enzimas do trato digestivo. É no intestino delgado (especialmente no duodeno e jejuno) onde ocorre a maior parte da digestão e absorção dos nutrientes, ao passo que a maior parte dos carboidratos já foi fermentada no rúmen. “Em seguida, na forma de fezes são eliminados de maneira intermitente” (BASSANEZI; FERREIRA JR, 1988, p.72). A figura 5 representa o esquema simplificado deste processo.

Figura 5: Sistema digestivo bovinos



Fonte: Retirada do site Mundo Educação [9]

Figura 6: Representação simplificada do estômago de ruminantes



Fonte: Adaptado de BASSANEZI; FERREIRA JR (1988)

Na Figura 5, as setas indicam a passagem de alimento, sendo que as setas contínuas indicam o fluxo contínuo e o fluxo intermitente é indicado pela seta pontilhada. A seta 1 corresponde a passagem do alimento da boca para o rúmen, a seta 2 representa a passagem do alimento do rúmen para o retículo, a seta 3 corresponde a passagem do bolo alimentar formada no retículo para a boca, e a seta 4 representa o direcionamento do bolo alimentar da boca para o omaso.

[9] Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/biologia/digestao-dos-ruminantes.htm > acessado em 13/12/2023.

4.2 Modelo Matemático para digestão de animais ruminantes

Conforme Bassanezi e Ferreira Jr (1988), o modelo matemático proposto por Blaxter, Graham e Wainman (1956), será apresentado a seguir.

Considere,

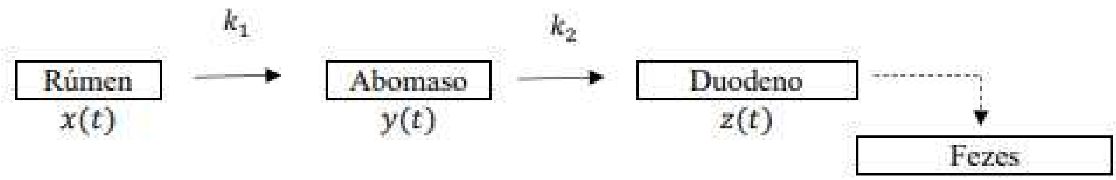
$x = x(t)$ a quantidade de alimento no rúmen, no instante t;

$y = y(t)$ a quantidade de alimento no abomaso, no instante t;

$z = z(t)$ a quantidade de alimento que chegou no duodeno, até o instante t.

Seja "q" a quantidade de alimento ingerida pelo animal ruminante no instante $t = 0$, em que se encontra no início do processo de digestão. Como o alimento vai diretamente para o rúmen, então $x(0) = q$ e $y(0) = z(0) = 0$. Em qualquer instante t, temos $x(t) + y(t) + z(t) = q$ (constante). A Figura 6 mostra o diagrama compartimental do modelo.

Figura 7: Diagrama compartimental do modelo



Fonte: Adaptado de BLAXTER; GRAHAM; WAINMAN (1956)

Na Figura 6, k_1e k_2 são constantes que representam as taxas de mudança do alimento de um compartimento para o outro

As seguintes hipóteses para o fluxo do alimento são assumidas:

1- O alimento sai do rúmen com uma taxa proporcional à quantidade de alimento que está neste compartimento, isto é, a taxa de decrescimento $\frac{dx}{dt}$ é proporcional a x.

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x \tag{1}$$

em que $k_1 > 0$.

2- O alimento sai do abomaso com uma taxa proporcional à quantidade que está neste compartimento. Assim, é bastante razoável supor que

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y \tag{2}$$

pois no mesmo instante entra $k_1 x$ e sai $k_2 y$, em que $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$.

4.2.1 Solução do modelo

A Equação (1) é uma EDO de primeira ordem separável, ou seja, podemos reescrevê-la da seguinte maneira,

$$\frac{dx}{x} = -k_1 dt$$

Utilizando o cálculo integral temos:

$$\int \frac{dx}{x} = \int -k_1 dt$$

Resolvendo as integrais acima, obtemos

$$x(t) = ke^{-k_1 t},$$

onde k é a constante de integração. Usando a condição inicial $x(0) = q$, segue que

$$x(t) = qe^{-k_1 t}. \tag{3}$$

Agora, substituindo (3) na Equação (2), obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = k_1 q e^{-k_1 t} - k_2 y \tag{4}$$

Para obter a solução da Equação (4), vamos utilizar o método dos fatores integrantes, apresentado no Capítulo 3.

Reescrevendo a Equação (4) como

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 q e^{-k_1 t} \tag{5}$$

o fator de integração é

$$e^{\int k_2 dt} = e^{k_2 t} \tag{6}$$

Assim, multiplicando (5), pelo fator de integração (6), obtemos:

$$e^{k_2 t} \frac{dy}{dt} + e^{k_2 t} k_2 y = e^{k_2 t} k_1 q e^{-k_1 t} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}[e^{k_2 t} y] = k_1 q e^{k_2 t - k_1 t}$$

Integrando esta última equação, temos:

$$e^{k_2 t} y = \int k_1 q e^{k_2 t - k_1 t} dt + C \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{k_1 q}{e^{k_2 t}} \int e^{(k_2 - k_1)t} dt + \frac{C}{k_2 t} \tag{7}$$

Se $k_1 \neq k_2$, então $k_2 - k_1 \neq 0$, assim resolvendo a integral em (7), obtemos:

$$y(t) = \frac{k_1 q}{e^{k_2 t}} \frac{1}{(k_2 - k_1)} e^{(k_2 - k_1)t} + Ce^{-k_2 t} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)} e^{-k_1 t} + Ce^{-k_2 t} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)} e^{-k_1 t} + Ce^{-k_2 t} \quad (8)$$

Deste modo, usando a condição inicial $y(0) = 0$, temos

$$y(0) = \frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)} + C = 0$$

$$C = -\frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)}$$

Assim, substituindo o valor encontrado de C, na Equação 8, obtemos:

$$y(t) = \frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)} e^{-k_1 t} - \frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)} e^{-k_2 t}$$

$$y(t) = \frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} \text{-} e^{-k_2 t}) \text{ para } k_1 \neq k_2. \quad (9)$$

Se $k_1 = k_2$, da Equação (7) temos:

$$y(t) = \frac{k_1 q}{e^{k_2 t}} \int dt + \frac{C}{k_2 t}$$

$$y(t) = \frac{k_1 q}{e^{k_2 t}} t + Ce^{-k_2 t} \quad (10)$$

Considerando $y(0) = 0$, temos

$$y(0) = C = 0$$

Substituindo na Equação 10, obtemos:

$$y(t) = \frac{k_1 q}{e^{k_2 t}} t$$

que podemos reescrever na forma:

$$y(t) = k_1 q t e^{-k_2 t} \text{ para } k_1 = k_2 . \quad (11)$$

Vamos obter agora uma equação para descrever $z(t)$.

Para calcular a quantidade de alimento que chega no duodeno até o instante t, usamos

$$z(t) = q - [x(t) + y(t)] \quad (12)$$

Se $k_1 \neq k_2$,

$$z(t) = q - [qe^{-k_1 t} + \frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} \text{-} e^{-k_2 t})]$$

$$z(t) = q - [\frac{(k_2 - k_1) q e^{-k_1 t} + k_1 q e^{-k_1 t} - k_1 q e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1}]$$

$$z(t) = q - [\frac{q e^{-k_1 t} k_2 - q e^{-k_1 t} k_1 + k_1 q e^{-k_1 t} - k_1 q e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1}]$$

$$z(t) = q - [\frac{q e^{-k_1 t} k_2 - k_1 q e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1}]$$

isto é,

$$z(t) = q - \frac{q}{k_2 - k_1}(k_2 e^{-k_1 t} \text{ - } k_1\, e^{-k_2 t}) \tag{13}$$

Se $k_1 = k_2$,

$$z(t) = q - qe^{-k_1 t} - qk_1 te^{-k_1 t}$$

ou seja,

$$z(t) = q[1 - e^{-k_1 t}(1 + k_1 t)] \tag{14}$$

Fazendo $t \to \infty$ na Equação 14, temos que $z \to q$, isto é, quando t for suficientemente grande, todo alimento chega no intestino.

Estamos interessados em avaliar a excreção fecal depois que o animal foi alimentado com uma quantidade constante q. Desta forma, pode-se estabelecer alimentos selecionados para serem melhor aproveitados na digestão.

Equação para a quantidade de fezes

Consideramos que $z(t)$ é o total de alimentos que chegou no duodeno até o instante t, incluindo o alimento que já foi excretado. Observamos que quando o alimento chega no intestino ele é excretado depois de um certo tempo. “A defecção (excreção final) é definida como a eliminação dos resíduos (fezes) e excremento do trato gastrointestinal.” (TEIXEIRA, 1996, p. 131). A excreção fecal é um processo intermitente e, portanto, não faremos a representação de tal fenômeno por uma equação diferencial. Suponhamos que, em média, cada excreção se dê num intervalo de tempo igual a τ horas, isto é, existe um “delay” (atraso) do duodeno para as fezes, denotado por τ. O alimento presente no duodeno no instante de tempo t, aparece nas fezes no instante $\tau + t$. (BLATER; GRAHAM; WAINMAM, 1956). Assim, a quantidade de fezes produzida em qualquer tempo $t > \tau$ é, em média, a quantidade de alimentos que chegou no intestino até o tempo $t - \tau$. Se indicarmos por $f(t)$ a quantidade de fezes produzida até o instante t, temos:

$$f(t) \simeq z(t - \tau) \qquad \text{para todo } t > \tau$$

Se $k_1 \neq k_2$, da Equação 13, temos:

$$f(t) \simeq q - \frac{q}{k_2 - k_1}[k_2 e^{-k_1(t-\tau)} \text{- } k_1\, e^{-k_2(t-\tau)}] \tag{15}$$

para todo $t \geq \tau$.

Se $k_1 = k_2$, da Equação 14, temos:

$$f(t) \simeq q\,[1 - e^{-k_1(t-\tau)}\,(1 + k_1(t - \tau))] \tag{16}$$

para todo $t \geq \tau$.

4.2.2 Aplicação

Para ilustrar o modelo, vamos considerar um problema hipotético.

Problema: Suponha que em um instituto na área de Alimentação de Animais Ruminantes, pesquisadores interessados sobre estratégias de manejo para alcançar maior eficiência alimentar e econômica, deseja-se analisar a alimentação de bovinos, para assim obter a melhor forma de nutrição e de digestão. Para isso, considera-se que o animal ingeriu 14 kg de um determinado tipo de alimento no instante $t = 0$. Considerando as taxas de transferência entre os compartimentos sendo $k_1 = 3$ e $k_2 = 2$, determine:

a) A quantidade de alimento no rúmen no instante t.

b) A quantidade de alimento no abomaso no instante t.

c) A quantidade de alimento que chegou no duodeno no instante t.

d) A quantidade de fezes no instante t, considerando $\tau = 0{,}5$ horas .

e) Calcule depois de quanto tempo 90% dos 14 kg ingeridos, foi excretado. Nesse tempo, quanto alimento existe no rúmen, no abomaso e no intestino?

f) Faça uma análise da excreção fecal considerando que a excreção se dê num intervalo de tempo de $\tau = 0{,}5$ horas.

Solução:

Dados do problema

$q = 14$ (quantidade total de alimentos ingeridos pelo animal em kg/dia)

$k_1 = 3$ e $k_2 = 2$ (taxas de transferências entre os compartimentos rúmen, abomaso e duodeno).

a) A função que determina a quantidade de alimento no rúmen, no instante t é:

$$x(t) = qe^{-k_1 t} \Rightarrow$$

$$x(t) = 14e^{-3t}. \tag{17}$$

b) Como $k_1 \neq k_2$, a equação $y(t)$ (quantidade de alimento no abomaso) é dada por:

$$y(t) = \frac{k_1 q}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

Substituindo os dados fornecido no problema,

$$y(t) = \frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)}(e^{-k_1 t} \text{-} e^{-k_2 t}) \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{(3\ .\ 14)}{(2-3)}(e^{-3t} - e^{-2t}) \Rightarrow$$
$$y(t) = -42(e^{-3t} - e^{-2t}) \Rightarrow$$
$$y(t) = -42e^{-3t} + 42e^{-2t}. \quad (18)$$

Então a função $y(t)$ determina a quantidade de alimento no abomaso em qualquer instante t.

c) Para calcular a quantidade de alimento que chega no duodeno até o instante t, usamos

$$z(t) = q - [x(t) + y(t)] \Rightarrow$$
$$z(t) = 14 - [(14e^{-3t}) + (-42e^{-3t} + 42e^{-2t})] \Rightarrow$$
$$z(t) = 14 + 28e^{-3t} - 42e^{-2t}. \quad (19)$$

d) A função que determina a quantidade de fezes, para $k_1 \neq k_2$, é dada por:

$$f(t) \simeq q - \frac{q}{k_2 - k_1}[\,k_2 e^{-k_1(t-\tau)} - k_1\, e^{-k_2(t-\tau)}] \Rightarrow$$

Considerando $\tau = 0{,}5$ horas (Intervalo de tempo de cada excreção) e $k_1 = 3$ e $k_2 = 2$.

Assim, obteremos:

$$f(t) \simeq 14 - \frac{14}{2-3}[\,2e^{-3(t-0{,}5)} - 3\, e^{-2(t-0{,}5)}] \Rightarrow$$
$$f(t) \simeq 14 + 14(2e^{-3t+1{,}5} - 3\, e^{-2t+1}) \Rightarrow$$
$$f(t) \simeq 14 + 28e^{-3t+1{,}5} - 42\, e^{-2t+1}. \quad (20)$$

e) A função que determina a quantidade de fezes para $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ e $q = 14$ é:

$$f(t) \simeq 14 + 28e^{-3t+1{,}5} - 42\, e^{-2t+1}$$

Como 90% de 14 é 12,6 , queremos encontrar o instante t.

Portanto, a solução é dada por:

$$g(t) = 1{,}4 + 28e^{-3t+1{,}5} - 42\, e^{-2t+1}$$

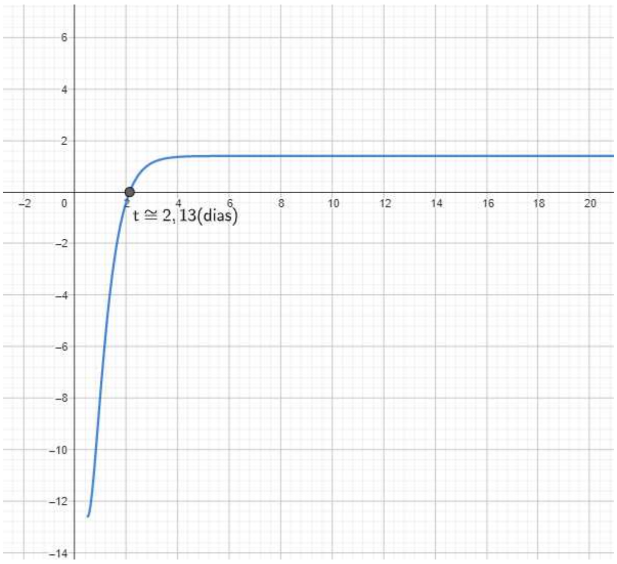
Resolvendo para t,

$$t \cong 0{,}1099 \; e \; t \cong 2{,}13.$$

Como $t \cong 0{,}1099$, não está no domínio de $f(t)$, pois $t > \tau = 0{,}5$. Então consideramos $t \cong 2{,}13$, que está no domínio.

A Figura 1 mostra o gráfico da função $g(t)$, observa-se que o gráfico intercepta o eixo t em $t \simeq 2{,}13$, o que corresponde aos 90% do que foi excretado.

Figura 8: Gráfico da função $g(t)$



Autoria Própria (2022)

Para determinar a quantidade de alimento que existe no rúmen, neste tempo, voltamos a Equação (17). Assim,

$$x(2{,}13) = 14e^{-3(2{,}13)} \Rightarrow$$

$$x(2{,}13) \cong 0.02349 \text{ kg}$$

A Equação (18), determina a quantidade de alimento no abomaso em qualquer instante t, no problema proposto. Deste modo,

$$y(2{,}13) = -42e^{-3(2{,}13)} + 42e^{-2(2{,}13)} \Rightarrow$$

$$y(2{,}13) \cong 0.52264 \text{ kg}$$

A Equação (19), determina a quantidade de alimento que chega no intestino (duodeno).

$$z(2{,}13) = 14 + 28e^{-3(2{,}13)} - 42e^{-2(2{,}13)}$$

$$z(2{,}13) \cong 13.45385 \text{ kg}$$

Agora, suponhamos que estejamos analisando esse mesmo animal, com a mesma quantidade de alimento ingerida no dia e com as taxas de transferências iguais, ou seja $k_1 = k_2$=3. Assim, teremos:

$q = 14$ (quantidade total de alimentos ingeridos pelo animal em kg/dia)

$k_1 = k_2 = 3$ (taxas de transferências entre os compartimentos (rúmen, abomaso e duodeno).

Neste caso,

$$x(t) = 14e^{-3t}. \tag{21}$$

Como $k_1 = k_2$, a equação fornecida para calcular a quantidade de alimento no abomaso é dada por:

$$y(t) = k_1 q e^{-k_1 t} \Rightarrow$$
$$y(t) = 42te^{-3t}. \tag{22}$$

Para calcular a quantidade de alimento que chega no duodeno, usamos:

$$z(t) = q[1 - e^{-k_1 t}(1 + k_1 t)] \Rightarrow$$
$$z(t) = 14[1 - e^{-3t}(1 + 3t)] \Rightarrow$$
$$z(t) = 14 - 14e^{-3t} - 42te^{-3t}. \tag{23}$$

E, para calcular a quantidade de fezes, usamos:

$$f(t) \simeq q\,[1\ -\ e^{-k_1(t-T)}\left(1 + k_1(t - \tau)\right)] \Rightarrow$$
$$f(t) \simeq 14\,[1\ -\ e^{-3(t-0{,}5)}\left(1 + 3(t - 0{,}5)\right)] \Rightarrow$$
$$f(t) \simeq 14\,[1\ -\ e^{-3t+1{,}5}\,(1 + 3t - 1{,}5)] \Rightarrow$$
$$f(t) \simeq 14\,[1\ -\ e^{-3t+1{,}5}\,(3t - 0{,}5)] \Rightarrow$$
$$f(t) \simeq 14\,[1\ -\ 3\mathrm{t}e^{-3t+1{,}5} + 0{,}5e^{-3t+1{,}5}] \Rightarrow$$
$$f(t) \simeq 14\ - 42\mathrm{t}\,e^{-3t+1{,}5} + 7e^{-3t+1{,}5}. \tag{24}$$

4.2.3 Análise gráfica da solução do problema aplicado

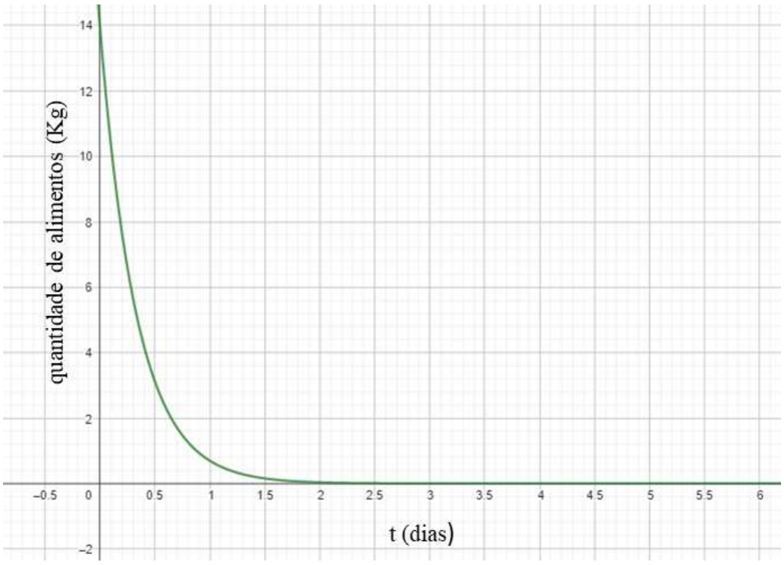
É possível fazer uma análise gráfica da solução do problema aplicado e obter informações valiosas sobre o processo digestivo. Para isso, foi utilizado o *software* Geogebra[10] no esboço dos gráficos e nos cálculos das derivadas das equações, no qual será analisado a solução do problema em que $k_1 \neq k_2$.

Estudo do $x(t)$- Quantidade de alimento no rúmen

Na Figura 8, é apresentada a curva que descreve a quantidade de alimento que sai do rúmen, em função do tempo.

[10] Software de matemática dinâmico, disponível em: https://www.geogebra.org/calculator

Figura 9: Gráfico da função $x(t) = 14e^{-3t}$



Fonte: Autoria própria (2022)

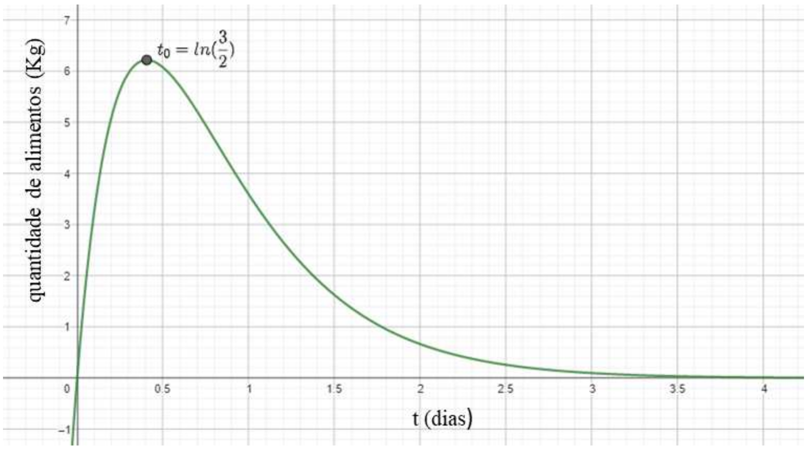
A quantidade de tempo que um animal passa ruminando é afetada pela espécie, raça, características físicas e químicas da dieta, estado de saúde, ingestão de ração e nível de produção. A duração total dos processos de mastigação (primeira mastigação e ruminação) depende do teor de fibras dos alimentos. De acordo com Howard e Wattiaux (2018), as partículas fibrosas permanecem no rúmen de 20 a 48 horas. Contudo, algumas partículas são digeridas mais rapidamente e tendem a ficar no rúmen por um período mais curto de tempo. O período de permanência de uma partícula no retículo - rúmen depende substancialmente de suas características físicas, como por exemplo, o tamanho da partícula e a densidade específica.

O processo de ruminação estimula a produção de saliva para ajudar a bloquear o PH ruminal e diminuir o tamanho da partícula da ração. A trituração do material fibroso no retículo - rúmen pode ser considerada como um processo que envolve a transferência de partículas grandes de um reservatório de ruminação para outro de partículas pequenas e, a partir daí, são descarregadas para o omaso (THIAGO, 1984).

Estudo do $y(t)$- Quantidade de alimento no abomaso

Conforme o alimento parcialmente digerido passa pelo omaso, a água é absorvida, reduzindo o volume de material que chega ao abomaso. Como mostra a Figura 9, podemos perceber que quando $t \to \infty, y(t) \to 0$, isto é, em um tempo longo, o bolo alimentar que se encontrava no abomaso já foi destinado para o próximo compartimento (intestino). Pelo gráfico, observa-se que $y(t)$ é estritamente crescente para o intervalo $0 \leq t < t_0 \cong 0{,}4056$ e estritamente decrescente para o intervalo $t \geq t_0$.

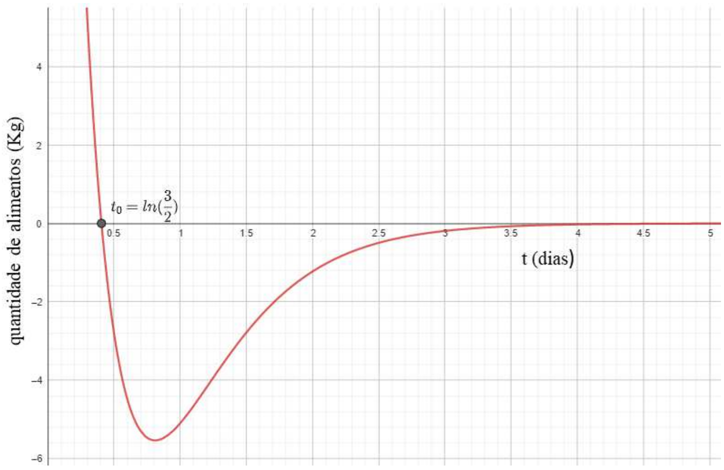
Figura 10: Gráfico da função $y(t) = -42e^{-3t} + 42e^{-2t}$



Fonte: Autoria própria (2022)

Analisando a expressão da derivada primeira, $y'(t)$, existe um único valor t, no domínio considerado, no qual ela se anula, $t_0 \cong 0{,}4054$, sendo positiva para os valores de t tal que $0 \leq t < t_0$ e negativa para $t > t_0$. O ponto t_0 é um ponto de máximo local e também será um ponto de máximo absoluto da função $y(t)$. Em $y(t_0) = 6{,}22$ Kg, é a quantidade máxima de alimento que chega no abomaso para este caso.

Figura 11: Gráfico da derivada primeira de $y(t)$

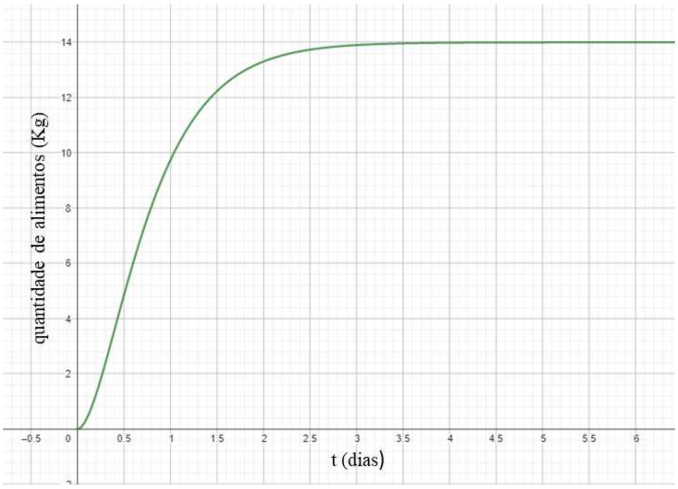


Fonte: Autoria Própria (2022)

Estudo do $z(t)$- Quantidade de alimento que chega no duodeno

A Figura 11 mostra o gráfico da função $z(t)$, que é dada pela Equação (19), onde é possível observar que seu comportamento é sempre crescente e tende a estabilizar com o decorrer do tempo, quando todo o alimento chega no intestino

Figura 12: Gráfico da função $z(t) = 14 + 28e^{-3t} - 42e^{-2t}$



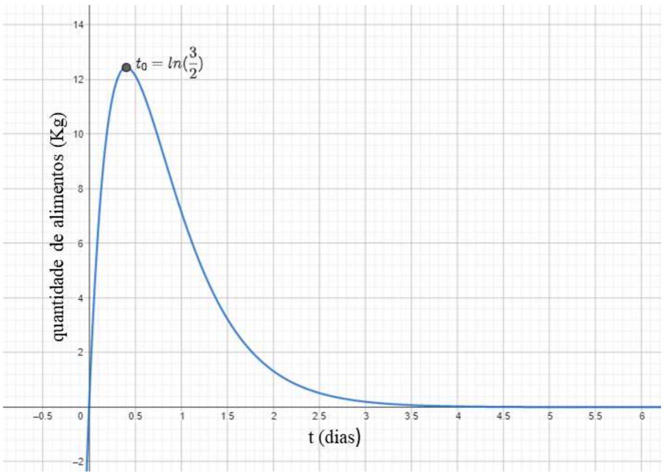
Fonte: Autoria Própria (2022)

Para avaliar de que forma se dá a quantidade de alimento que chega no duodeno, iremos fazer o estudo das derivadas primeira e segunda de $z(t)$ dada na Equação (19). Os gráficos das derivadas da função foram obtidos utilizando o *software* Geogebra.

A função derivada primeira $\frac{dz}{dt}$ representa a taxa de variação instantânea da função $z(t)$ e, neste caso, $\frac{dz}{dt} > 0$ para todo $t > 0$.

Analisando a Figura 12, o esboço da curva da derivada primeira de $z(t)$, claramente se percebe o ponto de máximo que é atingido $t_0 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$, o valor correspondente no eixo horizontal, que no caso é o tempo (dias). Observa-se que a derivada primeira, $\frac{dz}{dt}$ é estritamente crescente no intervalo $0 \leq t < t_0$ e estritamente decrescente no intervalo $t \geq t_0$.

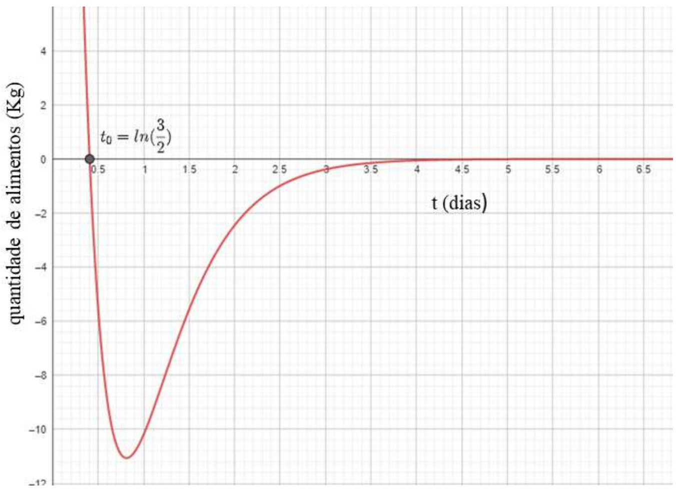
Figura 13: Gráfico da derivada primeira de $z(t)$



Fonte: Autoria Própria (2022)

Na Figura 13 é apresentado o gráfico da derivada segunda $\frac{d^2z}{dt^2}$. onde podemos perceber que existe um único valor de t, no domínio que foi considerado, onde ela se anula, em $t_0 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \cong 0{,}4054$. O ponto t_0 onde a derivada segunda é zero é um ponto de máximo local e também será um máximo absoluto da função derivada primeira. Assim, em $t_0 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \cong 0{,}4054$, a função $z(t)$ tem um ponto de inflexão, que corresponde ao ponto de crescimento máximo. A partir deste ponto $t_0 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$, o alimento chega ao intestino de forma mais lenta e tende a estabilizar ficando próximo de 14 kg, já que $\frac{dz}{dt} \to 0$. Percebemos também que o ponto t_0 onde $y(t)$ assume o seu valor máximo é o mesmo ponto onde $z(t)$ tem um ponto de inflexão.

Figura 14:Gráfico da derivada segunda de z(t)

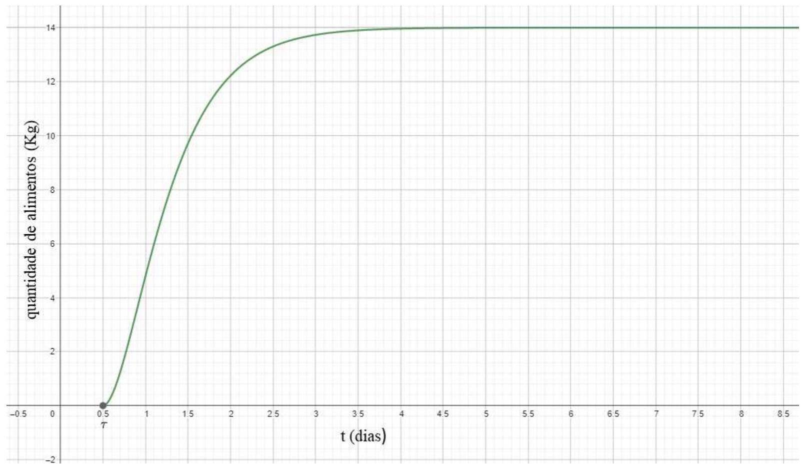


Fonte: Autoria Própria (2022)

Estudo do $f(t)$- Quantidade de fezes produzidas até o instante t

A Figura 14 mostra o gráfico de $f(t)$ dada na Equação (24).

Figura 15: Gráfico de $f(t) = 14 + 28e^{(-3t+1,5)} - 42e^{(-2t+1)}$

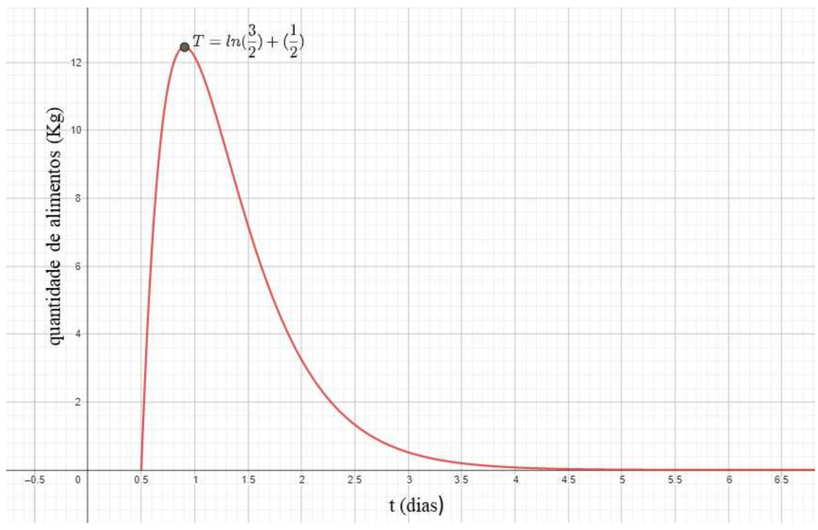


Fonte: Autoria Própria (2022)

Análogo à equação de $z(t)$, a equação $f(t)$ é sempre crescente, mas tende a estabilizar com o decorrer do tempo. Vamos estudar a quantidade de fezes produzidas em função do tempo t.

Para a função $f(t)$ do modelo, a derivada primeira será positiva para todo $t > \tau = 0{,}5$. A sua fórmula não se anula para nenhum valor de $t > 0{,}5$.

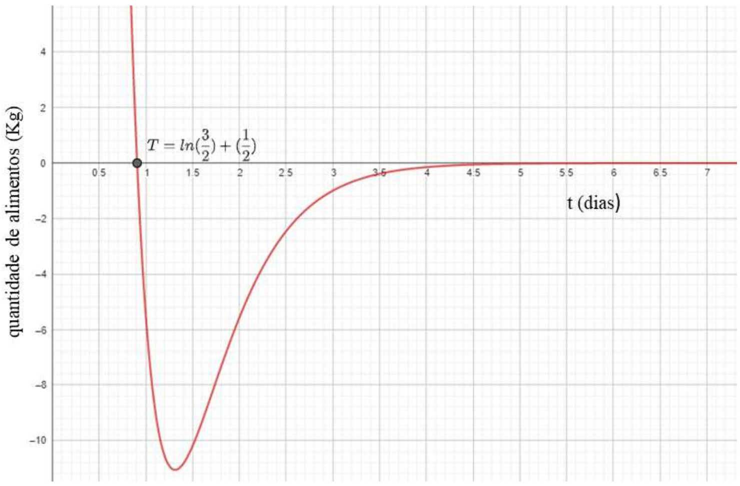
Figura 16: Gráfico da derivada primeira de $f(t)$



Fonte: Autoria Própria (2022)

Analisando a expressão da derivada segunda, $\frac{d^2t}{dt^2}$, existe um único valor t, no domínio considerado, no qual ela se anula, $T = t_0 + \tau \cong 0{,}9054$, sendo positiva para os valores de t tal que $0 \leq t \leq T$. Portanto, a derivada primeira $\frac{df}{dt}$, é estritamente crescente para $0 \leq t \leq T$ e estritamente decrescente para $t \geq T$ e o ponto T é um ponto de máximo local , e também será um ponto de máximo absoluto da função da derivada primeira. Isto significa em $t = T$ a taxa de crescimento das fezes é máxima e que após $t = T$, se mantivermos o mesmo tipo de alimentação, a taxa de crescimento das fezes tende a zero.

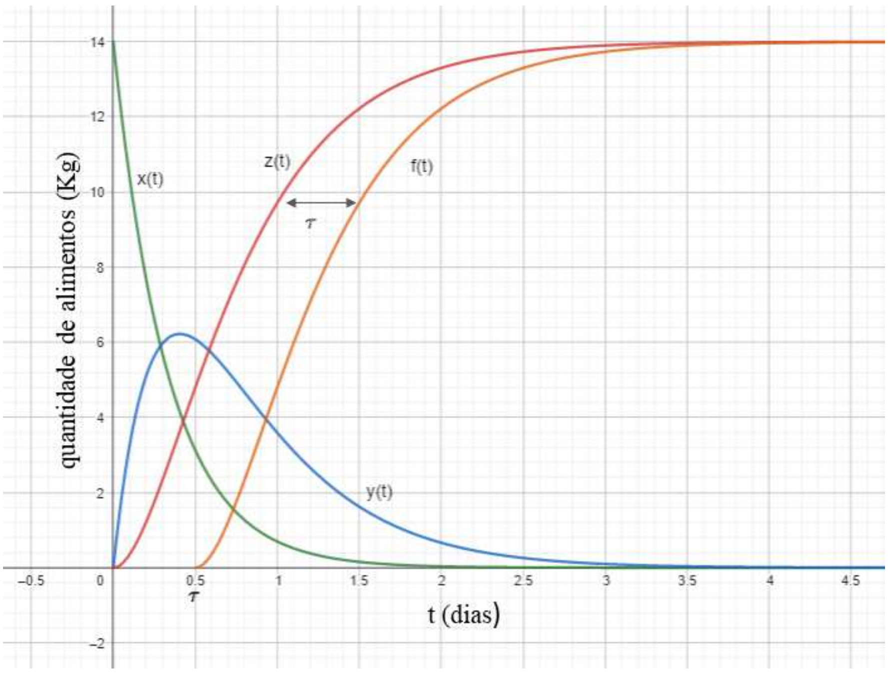
Figura 17: Gráfico da derivada segunda de $f(t)$



Fonte: Autoria Própria (2022)

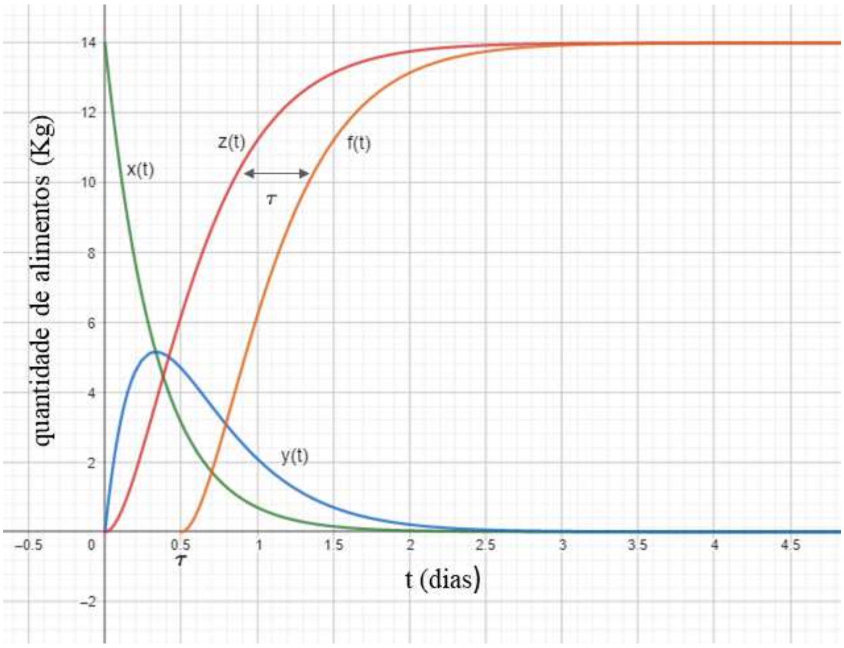
Os gráficos a seguir descrevem o comportamento da solução do modelo e uma comparação das curvas de $x(t), y(t), z(t)$ e $f(t)$. Na Figura 17 tem-se o caso em que $k_1 \neq k_2$ e a Figura 18 a representação para o caso $k_1 = k_2$.

Figura 18: Representação geométrica da solução do problema proposto para $k_1 \neq k_2$



Fonte: Autoria própria (2022)

Figura 19: Representação geométrica da solução do problema proposto para $k_1 = k_2$



Fonte: Autoria própria (2022)

A taxa de mudança (passagem) é uma ferramenta essencial que possibilita interpretar e entender a cinética de digestão dos alimentos e o comportamento dos nutrientes ao longo do trato gastrintestinal, está associada a uma série de fatores interligados, como ingestão, digestão e aproveitamento do alimento.

Diversos fatores podem interferir na taxa de passagem, sendo esses classificados como fatores relacionados a dieta e ao animal. O aumento nos níveis de consumo resulta em maior quantidade de alimento disponível no rúmen, com o aumento da entrada de alimento o resultado será o aumento da taxa de desaparecimento, promovendo um aumento na taxa de passagem.

CONCLUSÃO

A partir da elaboração deste trabalho, podemos perceber que as Equações Diferenciais vêm sendo estudadas há muito tempo, e a importância que elas têm, abordando assuntos relacionados nas mais diversas áreas. Neste trabalho, foi possível estudar uma aplicação das Equações Diferenciais relacionada com a digestão de animais ruminantes, esta aplicação é no mínimo curiosa, por ser uma aplicação pouca vista no contexto matemático.

A relevância desse trabalho deve-se ao fato de trazer uma abordagem de conhecimentos estudados na matemática, de forma a possibilitar um aprofundamento no conhecimento científico inerente às Equações Diferenciais, além disso, mostra uma aplicação de tais equações, em que pode ser observado a vasta abrangência dos conceitos envolvendo equações diferenciais.

Podemos concluir que, apesar de o modelo ser relativamente simples, sob o ponto de vista matemático, o mesmo consiste em modelar o processo digestivo de animais ruminantes, utilizando como ferramenta as Equações Diferenciais Ordinárias, abordando o tempo de permanência dos alimentos no sistema digestivo, o mesmo também descreve o fenômeno de excreção fecal de animais ruminantes, portanto, é de grande importância para fornecer um método eficiente na preparação de alimentos, já que a permanência de um alimento no sistema digestivo é um dos fatores responsáveis pelo melhor aproveitamento deste alimento.

Por fim, consideramos que os objetivos foram alcançados e esperamos que outras pessoas, através desse trabalho, possam aprimorar seus conhecimentos sobre esse tema de grande importância e que sirva de base e/ou inspiração para estudos futuros.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA, Wilson Castro. Equações Diferenciais com Aplicações. São Paulo: Editora Harbra, 1988.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino - aprendizagem com Modelagem Matemática. 3ª Ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BLAXTER, KL; GRAHAM, N. McC; WAINMAN, FW. Some observations on the digestibility of food by sheep, and on related problems. British Journal of Nutrition, v. 10, n. 2, pág. 69-91, 1956.

BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC 2006.

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução HYGINO H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FIGUEREIDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. Equações diferenciais aplicadas. - Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

Nagle, R. Kent Equações diferenciais / R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider; [tradução Daniel Vieira]. – 8. ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

OLIVEIRA, Vinicius da Silva; SANTOS, Ana Caroline Pinho dos; VALENÇA, Roberta de Lima. Desenvolvimento e fisiologia do trato digestivo de ruminantes. **Ci. Anim.**, p. 114-132, 2019.

PAULA, Elton Weiglas de. Uma Introdução às Equações Diferenciais Parciais: As séries de Fourier e as Equações de Ondas, 2019.

SAENZ, Edgar Alain Collao. Modelagem da redução do tamanho de partículas na alimentação de ruminantes. *Ciência e Agrotecnologia* 29 (2005): 886-893.

SIMÕES, C. A. E. Equações diferenciais na física. Dissertação (Mestrado), 2014.

TEIXEIRA, J. C. Fisiologia digestiva dos animais ruminantes. Lavras: UFLA/FAEPE. 270p. 1996.

Thiago, L.R.L.S. Fatores afetando o consumo e utilização de forrageiras de baixa qualidade por ruminantes - revisão. Brasília-D F. EMBRAPA-DDT, 1984.

HOWARD, W. T.; WATTIAUX, M. A. Processo digestivo na vaca de leite. University of wisconsin-madison. [S.l.], p. 4. 2018.

ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R., Equações Diferenciais. Vol 1. 3 ed. São Paulo: Pearson 2007.