VI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

PIBIC/CNPq/UFCG-2009

INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES DA FÍSICA MATEMÁTICA

Renato Silva Pereira[1], Angelo Roncalli F. Holanda[2]

RESUMO

Este trabalho é voltado para o estudo das equações diferenciais parciais (EDP), em especial a equação do calor, visando à obtenção de suas soluções através de séries de Fourier. Utilizando o método de separação de variáveis chegamos a possíveis soluções para problemas de condução do calor numa barra sobre certas condições e a partir daí, aplicando a teoria apresentada sobre séries de Fourier obtemos as devidas soluções.

Palavras-chave: edp, separação de variáveis, séries de Fourier

INTRODUCTION THE EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL PHYSICS

ABSTRACT

This work is dedicated to the study of partial differential equations (PDE), in particular the heat equation, in order to obtain their solutions by means of Fourier series. Using the method of separation of variables we arrive at possible solutions to problems of heat conduction in a bar on certain conditions and from there, applying the theory presented on the Fourier series we obtain the appropriate solutions.

Keywords: pde, separation of variables, Fourier series of

INTRODUÇÃO

O estudo das equações diferenciais parciais (EDP) é muito importante. Muitos problemas físicos são descritos por meio de EDP's. Assim devemos buscar ferramentas matemáticas para resolver essas equações. Uma dessas ferramentas é a teoria das séries de Fourier, essencial para determinar soluções formais de um problema que envolva EDP. Mas, primeiramente precisamos de alguns resultados básicos da teoria das equações diferenciais parciais, como veremos.

Neste trabalho apresentaremos uma parte da teoria das Séries de Fourier, que utilizaremos para obtenção de soluções de problemas relacionados à condução do calor numa barra sujeita a certas condições laterais. Tendo em vista o método de separação de varáveis podemos chegar a um determinado candidato à solução do problema em estudo e, através de alguns resultados sobre séries de Fourier podemos obter a solução.

[1] Aluno do Curso de Licenciatura em Matemática, Unidade Acadêmica de Educação-CES, UFCG, Cuité, PB, E-mail: renatosilva.ufcg@gmail.com

[2] Prof. Doutor, Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística, UFCG, Campina Grande, PB, E-mail: angelo.holanda@gmail.com

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes $x, y, z, t, \dots$, e derivadas parciais de uma função $u = u(x, y, z, t, \dots)$. De forma geral um EDP de n variáveis independentes é uma equação da forma

$$F\left(x_1, \dots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \qquad (1)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, F é uma função dada e $u = u(x)$ é a função a ser determinada. Podemos classificar as EDP's segundo a ordem e a linearidade. A ordem de uma EDP é a maior ordem de derivação que ocorre na equação. Uma EDP é dita linear se é de primeiro grau na variável dependente u e em todas as suas derivadas parciais, caso contrário ela é não-linear. Assim, uma EDP linear de segunda ordem é uma equação da forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0.$$

Se $u = u(x, y)$ é uma função de duas variáveis a equação acima se torna

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y) = 0. \qquad (2)$$

Nós estamos interessados apenas nas soluções clássicas da eq.(2), isto é, soluções u que sejam duas vezes diferenciáveis, e para tais soluções temos $u_{xy} = u_{yx}$.

Uma EDP é homogênea se o termo independente for identicamente nulo. Dessa forma, a eq.(2) será homogênea se $G(x, y) \equiv 0$.

A parte da equação que contem as derivadas de maior ordem é chamada de parte principal da EDP. Em muitos casos a parte principal determina propriedades da solução da equação.

Existem ainda as chamadas equações semilineares, que são equações não-lineares cuja parte principal é linear. A forma geral de uma EDP semilinear de segunda ordem é

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\, D_i D_j u = f(x, u, D_1 u, \dots, D_n u).$$

Linearidade e Superposição

Considere a equação do tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0. \qquad (3)$$

Denotemos por k a ordem da equação, $k = 1$ ou $k = 2$. Note que se $k = 1$, então $a_{ij} \equiv 0$ quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e existe $j, 1 \le j \le n$, tal que $b_j \not\equiv 0$.

A equação (3) pode ser escrita na forma

$$Lu = f, \qquad (4)$$

onde $f(x) = -d(x)$, e

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\, D_j u(x) + c(x) u(x). \qquad (5)$$

Como a cada função u (suficientemente diferenciável) corresponde uma única função Lu, definimos assim, a transformação L, como segue.

Definição 1

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e suponha que as funções a_{ij}, b_j e c, com $1 \leq i, j \leq n$ são contínuas em Ω e toma valores reais, então

$$L: C^k(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$$
$$u \longmapsto Lu,$$

onde Lu é dado pela relação anterior e $C^k(\Omega)$ é o conjunto das funções $u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ k vezes diferenciáveis (respectivamente contínuas).

O fato de que a eq.(3) é linear implica que o operador L definido em (5) é um operador linear, isto é, L leva a função f identicamente nula nela mesma e

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv,$$

Quaisquer que sejam u e v no domínio de L e α um número real. Podemos associar à EDP não homogênea (4) a EDP linear homogênea

$$Lu = 0, \tag{6}$$

Que é chamada de equação linear homogênea associada à eq.(4). Neste caso, se $u_1, \dots, u_n$ satisfazem a eq.(5) e $\alpha_1, \dots, \alpha_2$são escalares, então

$$\sum_{j=1}^{m} a_j u_j$$

é também solução de (5). Esse resultado é conhecido como o princípio da superposição em sua forma finita. A seguir apresentaremos esse princípio em sua forma infinita.

Proposição 1 (Princípio da superposição)

Seja L um operador linear parcial de ordem k cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ é um conjunto de funções de classe C^k em Ω satisfazendo a EDP linear homogênea (5). Então, se $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω, u satisfaz (5).

Mais tarde aplicaremos essa proposição ao trabalharmos com o método de separação de variáveis para obter soluções de problemas de condução do calor.

Condições de Contorno e Iniciais

Em geral, no caso de EDP's, procuramos soluções definidas em um aberto $\Omega, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Quando $n = 1$, é natural substituir os extremos do intervalo pelo bordo $\partial\Omega$ da região Ω. Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (condições de contorno) temos um *problema de valores de contorno*.

Da mesma forma quando impomos o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo de uma curva (condições iniciais) temos um *problema de Cauchy* ou *problema de valor inicial*. Um problema que envolve as duas condições é chamado de *problema de valores inicial e de fronteira* ou *problema misto.* Consideremos o seguinte problema envolvendo a equação de onda

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$
$$u(x, 0) = f(x), x \in \mathbb{R}^n,$$
$$u_t(x, 0) = g(x), x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $n = 1,2$ ou 3 e Δ é o *laplaciano* em $\mathbb{R}^n$. Esse é um exemplo de problema de Cauchy.

Séries de Fourier

O estudo das séries de Fourier tem importância significativa no que diz respeito à obtenção da solução de uma EDP. Em particular, estaremos interessados em determinar funções $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que podem ser expressas através da relação

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T se $f(x+T) = f(x)$ para todo x. Em geral, se T é um período para a função f, então kT também é, onde $n \in \mathbb{Z}$. O menor período positivo é chamado de *período fundamental.*

Por exemplo, o período fundamental T da função $\sin n\pi x/L$ é $T = 2L/n$.

Definição 2 (Convergência pontual)

Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n: I \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções reais definidas em um subconjunto I de $\mathbb{R}$, convergirá pontualmente se, para cada $x_0 \in I$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convergir. Isto é, dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe um inteiro N, dependendo de ε e de x_0, tal que

$$\left|\sum_{n}^{m} u_j(x_0)\right| < \varepsilon$$

para todos $n < m$, tais que $\geq N$.

Definição 3 (Convergência uniforme)

Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergirá uniformemente, se, dado $\varepsilon > 0$, existir um N, dependendo apenas de ε (e não de x), tal que

$$\left|\sum_{n}^{m} u_j(x)\right| < \varepsilon$$

para todos $m > n \geq N$.

Um artifício que podemos usar para determinar se uma série de funções converge, é o de majorar a série de funções por uma série numérica. O *teste M de Weierstrass* assegura a convergência uniforme e a absoluta através de uma majoração. Dizemos que uma série $\sum u_n(x)$ converge absolutamente se a série $\sum |u_n(x)|$ dos valores absolutos convergir.

Teste M de Weierstrass

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções $u_n: I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em um subconjunto I de $\mathbb{R}$. Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que

$$|u_n(x)| \leq M_n, \forall x \in I,$$

E que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente e absolutamente em I.

Proposição 2

Suponha que as funções u_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então, a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.

Proposição 3

Suponhamos que as funções u_n sejam integráveis em um intervalo I e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x)$ convirja uniformemente. Então,

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x)\,dx.$$

Proposição 4

Suponhamos que as funções $u_n\,(x)$ definidas em um intervalo I sejam continuamente deriváveis e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n\,(x)$ das derivadas convirja uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x)$ convirja. Então,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Agora, considere a expressão

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{7}$$

e suponha que a série presente em (7) convirja uniformemente. Decorre da proposição (2) que f deve ser contínua e, além disso, periódica de período 2π. Logo, pela proposição (3) podemos integrar ambos os membros de (7) para obter

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx.$$

Da mesma forma, usando as relações de ortogonalidade abaixo

$(i)\ \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0, n, m \geq 1;$

$(ii)\ \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} L, n = m \geq 1, \\ 0, n \neq m, n, m \geq 1; \end{cases}$

$(iii)\ \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} L, n = m \geq 1, \\ 0, n \neq m, n, m \geq 1, \end{cases}$

podemos obter expressões para a_n e b_n. A saber,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, n \geq 0 \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, n \geq 1 \tag{9}$$

Definição 4

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado; em particular, $\int_{-L}^{L} |f(x)|dx < \infty$. Os números $a_n, n \geq 0$, e $b_n, n \geq 1$, dados em (8) e (9) são definidos como os coeficientes de Fourier da função f.

Sempre que for possível determinar os coeficientes de Fourier de f, podemos escrever

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{10}$$

significando que a expressão à direita do sinal ($\sim$) é a série de Fourier da função f. A seguir, veremos algumas condições suficientes para que a função f seja igual a sua série de Fourier.

Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Isto é, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto $(a_j, a_{j+1}), j = 1, \ldots, n-1$, e existem os limites

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \to a_j+} f(x) \;\; e \;\; f(a_j - 0) = \lim_{x \to a_j-} f(x).$$

Por exemplo, a função sinal de x, definida por

$$sign(x) = \begin{cases} +1, x > 0; \\ \;\; 0, x = 0; \\ -1, x < 0, \end{cases}$$

é uma função seccionalmente contínua.

Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$, para $|x| \leq 1$ e periódica de período 2, é seccionalmente diferenciável.

Teorema 1 (de Fourier)

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f, dada em (10), converge, em cada ponto x, para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é,

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Teorema 2 (sobre a integração de séries de Fourier)

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua e seja

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

sua série de Fourier. Então
i) a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de f; mais precisamente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_a^b \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n \int_a^b \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right);$$

ii) a função $F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \left(\frac{a_0}{2}\right)\right] dt$ é periódica de período $2L$, contínua, tem derivada F' seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-b_n}{n}\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e

$$\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x).$$

A partir de agora, vamos estudar a equação do calor e tendo em vista o que foi apresentado a respeito de séries de Fourier, vamos chegar às soluções de problemas envolvendo esta equação. Comecemos com o problema da condução do calor.

O problema da condução do calor numa barra

Seja $\Re$ a região do plano (x,t) determinda por $0 < x < L$ e $t > 0$, e $\bar{\Re}$ a união de $\Re$ com sua fronteira que é formada pelas semi-retas $\{x = 0, t > 0\}$ e $\{x = L, t > 0\}$ e pelo segmento $\{0 \le x \le L, t = 0\}$. Suponhamos que as temperaturas nas extremidades da barra sejam mantidas iguais a zero, constantemente. O problema da condução do calor consiste em determinar uma função real $u(x,t)$ definida em $\bar{\Re}$ que satisfaça

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx}, \text{ em } \Re; \\ &u(x,0) = f(x), 0 \le x \le L; \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

onde $f:[0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada.

Tendo em vista o *Método de Fourier* vamos usar separação de variáveis para procurar soluções $u(x,t)$ do problema de valores inicial e de fronteira (PVIF) (11) na forma

$$u(x,t) = F(x)G(t). \tag{12}$$

Substituindo (12) na equação do calor, obtemos

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t),$$

ou ainda,

$$\frac{1}{K}\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Esta última igualdade nos sugere que tanto o lado esquerdo como o direito independem de x e de t. Isto é,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{1}{K}\frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma, \tag{13}$$

onde σ é um parâmetro independente de x e de t. Note que, pela primeira das equações de (13), F deve satisfazer o problema de valor inicial

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0, 0 < x < L \\ F(0) = F(L) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Vejamos os valores de σ para os quais F satisfaz o problema (14). Evidentemente, estamos interessados em soluções $F \not\equiv 0$, caso contrário teríamos $u \equiv 0$, o que não nos interessa. Temos três casos a considerar:

i) se $\sigma > 0$, temos

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}$$

e daí, as constantes c_1 e c_2 devem ser solução do sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0, \end{cases}$$

ou seja, $c_1 = c_2 = 0$. Logo, $F \equiv 0$.

ii) se $\sigma = 0$, então

$$F(x) = c_1 x + c_2.$$

Logo, obtemos $c_1 = c_2 = 0$ e, portanto, $F \equiv 0$.

iii) se $\sigma < 0$, fazendo $\sigma = -\lambda^2$, obtemos

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Daí, devemos ter

$c_1 = 0$ e $c_2 \sin \lambda L = 0.$

Como queremos $c_2 \neq 0$, segue que

$$\sin \lambda L = 0,$$

o que nos dá $\lambda L = n\pi$, onde n é um inteiro não-nulo. Os valores de $-\sigma = \lambda^2$

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

são chamados os *valores próprios* ou *autovalores* do problema dado em (14), e as funções

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

são chamadas as *funções próprias* ou *autofunções* do problema dado em (14).
Consideremos agora, a segunda equação em (13)

$$G'(t) - \sigma K G(t) = 0.$$

Sua solução geral é dada por

$$G(t) = c e^{\sigma K t}.$$

Assim, para cada $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, temos uma solução

$$u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{15}$$

à qual satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira, presentes no problema (11). Note ainda, que

$$u_n(x,0) = \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Com isso, $u_n(x)$ só seria solução de (11) se f fosse da forma

$$f(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Sabemos pelo *Princípio da Superposição* que qualquer combinação linear de soluções da equação do calor também é solução. Logo, qualquer expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t),$$

onde os c_n são constantes e os u_n são as funções definidas em (15), satisfaz a equação do calor e as condições de fronteiras do problema (11). Daí, se a condição inicial f for da forma

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

então, a solução de (11) será

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Suponhamos agora, que a função dada f possa ser expressa em uma série da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{16}$$

Então, neste caso, a solução do problema (11) deve ser

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{17}$$

Concluímos assim, que os c_n devem ser os coeficientes de Fourier da função f, dada em $[0,L]$, e estendida no resto de $\mathbb{R}$ de modo a ser ímpar e periódica de período $2L$. Ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx.$$

Do teorema de Fourier, f tem que ser contínua, satisfazer a igualdade $f(0) = f(L) = 0$ e ainda, f'deve ser seccionalmente contínua.

Para entender o que é uma solução do PVIF (11), precisamos dos seguintes resultados.

Definição 5 (solução do PVIF 11)

Uma função $u: \bar{\Re} \longrightarrow \Re$ é uma solução do PVIF (11) se ela for contínua em $\bar{\Re}$, tiver derivadas parciais u_t e u_{xx} em $\Re$, e satisfizer às três relações em (11).

No caso de estarmos trabalhando com outros tipos de condições iniciais, precisamos de uma definição que não leve em consideração a igualdade (16).

Definição 6 (solução do PVIF 11)

Considere a região $\hat{\Re}$ dada por

$$\hat{\Re} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le L, t > 0\}.$$

Uma função contínua $u: \hat{\Re} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do PVIF (11), se

$$\begin{aligned} &u_t = Ku_{xx}, 0 < x < L, t > 0,\\ &u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0,\\ &\lim_{t\to 0}\int_0^L u(x,t)\varphi(x)dx = \int_0^L f(x)\varphi(x)dx, \end{aligned}$$

Para toda função φ seccionalmente contínua em $[0,L]$.

Teorema 3

Se f for de quadrado integrável em $[0,L]$, então a expressão (17) define uma função em $\hat{\Re}$ que é solução do PVIF (11) no sentido da definição (6).

Teorema 4

Seja $f: [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $f(0) = f(L) = 0$ e tal que a derivada f' exista em $[0,L]$ e seja de quadrado integrável. Então a expressão (17) define uma função contínua em $\bar{\Re}$, que é solução do PVIF (11) no sentido da definição (5).

Consideremos uma barra com uma extremidade isolada termicamente e a outra mantida a $0°C$. O problema consiste em determinar uma função $u(x,t)$ definida em $\bar{\Re}$ tal que

$$\begin{aligned} & u_t = K u_{xx}, \text{em } \Re; \\ & u(0,t) = u_x(L,t) = 0, t > 0; \\ & u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \tag{18}$$

Usando separação de variáveis chegamos ao problema

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0, \\ F(0) = F'(L) = 0, \end{cases} \quad t > 0,$$

que tem como autovalores $\sigma_n = -(2n-1)^2\pi^2/4L^2, n = 1,2,\ldots,$ e autofunções $F_n(x) = sin(2n-1)\pi x/2L$. Logo, a solução do PVIF (18) deve ser

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2 Kt/(4L^2)} \, sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

onde os coeficientes c_n devem ser tais que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}.$$

Assim, devemos definir f de modo a ser uma função ímpar e periódica de período $4L$. Além disso, f deve assumir valores de $[L, 2L]$ e, para isso, pomos $f(x) = f(2L - x)$ em $[L, 2L]$. Logo, podemos obter a seguinte expressão para os coeficientes c_n

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \, sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}.$$

CONCLUSÕES

Vários são os problemas físicos descritos através das equações diferenciais parciais e por isso, torna-se essencial determinar suas soluções e propriedades a respeito. Diante do que foi apresentado, notamos que o estudo das séries de Fourier é de fundamental importância no que diz respeito às EDP's, pois suas soluções são expressas através de tais séries.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.** 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

IÓRIO, Valéria. **EDP, um curso de graduação.** 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.