V CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

PIBIC/CNPq/UFCG-2009

O PRINCÍPIO DO MÁXIMO APLICADO À EQUAÇÃO DE LAPLACE

Israel Buritî Galvão[1], Francisco Júlio Sobreira de Araújo Correia[2], Luiz Mendes de Albuquerque Neto[3]

RESUMO

As Equações Diferenciais Parciais constituem uma das principais áreas da Matemática devido a sua imensa aplicabilidade em vários ramos da ciência e das engenharias, como também pela sua riqueza teórica, na qual se inserem várias das mais importantes idéias matemáticas. O propósito de nosso trabalho foi o estudo do Princípio do Máximo aplicado a essas equações. Além de seminários semanais, desenvolvemos algumas pesquisas sobre o assunto, visando um maior esclarecimento sobre as aplicações desse conceito a unicidade de soluções de uma equação clássica: a Equação de Laplace.

.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais, princípios do máximo e dependência contínua

THE MAXIMUM PRINCIPLE FOR THE LAPLACE EQUATION

Partial differential equations constitute a major area in mathematics not only because its applications in various branches of science and engineering but also for their theoretical richness in which several of the most important mathematical ideas are used. The main objective of our work is the study of the maximum principle for the Laplace equation with respect to the existence and uniqueness of a solution and its continuous dependence in relation to the initial data and initial boundary values.

Keywords: partial differential equations, Laplace equation, maximum principles and continuous dependence.

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são indispensáveis na modelagem de problemas em muitas áreas que, naturalmente, carecem de suporte matemático em varias de suas fases de desenvolvimento, fazendo assim com que seu estudo seja de suma importância para as ciências. Nosso maior objetivo é o estudo dos Princípios do Máximo para as equações de Laplace e do Calor e a aplicação desses resultados para a obtenção de unicidade de solução para a equação de Laplace, a dependência contínua da solução desta equação em relação aos dados de fronteira, unicidade de solução para a equação do Calor e a dependência contínua da solução desta equação em relação aos dados iniciais.

MATERIAL E MÉTODOS

O trabalho foi desenvolvido por meio do estudo da bibliografia proposta, além de pesquisas extras desenvolvidas sobre o assunto. Foram realizadas exposições com uma frequência de uma vezes por semana na presença do orientador e do co-orientador.

[1] Aluno de Curso de Matemática, Depto. de Matemática e Estatística, UFCG, Campina Gande , PB, E-mail: galvao.mat@gmail.com

[2] Matemática, Prof. Dr., Depto. de Matemática e Estatística, UFCG, Campina Grande, PB, E-mail: julio@dme.ufcg.edu.br

[3] Matemático, Prof. Ms, Depto. de Matemática e Estatística, UFCG, Campina Grande, PB, E-mail: mendes@dme.ufcg.edu.br

RESULTADOS E DISCUSSÃO

1. Preliminares

Inicialmente consideremos $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 1\}$ e que $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 0\}$, tomaremos a *distância* entre dois pontos quaisquer do $\mathbb{R}^n$ como sendo

$$|x - y| = \left[\sum_{j=1}^{n} (x - y)^2\right]^{1/2}.$$

Chamaremos de *bola aberta centrada em* x_0 *de raio* r, o conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}, \text{ com } r > 0$$

Dizemos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ é aberto se, dado $x_0 \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq \Omega$. E dizemos que dado $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado se $(F^C)_{\mathbb{R}^n}$ é aberto.

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dizemos que o conjunto $\bar{A}$ é o fecho de A se $\bar{A}$ é o menor conjunto fechado, tal que $\bar{A} \supseteq A$, isto é, se B é fechado e $B \supset A$, então $B \supset \bar{A}$.

Chamamos interior de A, e denotaremos por $IntA$, o maior conjunto aberto contido em A, isto é, se B é aberto e $B \subset A$, então $B \subset IntA$.

Definimos a fronteira de A, a qual será denotada por ∂A, como sendo o conjunto $\partial A = \{x \in \bar{A}; x \notin IntA\}$.

Definição 1.1. Dada uma função u duas vezes diferenciável, definimos o laplaciano de u por

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

A equação $\Delta u = 0$ é chamada de *Equação de Laplace*.

Temos por Problema de Dirichlet no Retângulo o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & em\ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $f \in C(\partial\Omega)$ é dada e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é o retângulo aberto $\Omega = (0, a) \times (0, b)$.

E como problema de transmissão de Calor em uma barra finita, temos

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = 0 = u(l, t)\,, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x)\,, & x \in [0, l], \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $f \in C([0, l])$, satisfaz a condição do compatibilidade $f(0) = 0 = f(l)$.

Definição 1.2. Dada uma função u duas vezes diferenciável em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que u é harmônica se

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0.$$

Vejamos também alguns resultados e definições sobre Séries de Fourier.

Definição 1.3. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado. Os números a_n, com $n \geq 0$, e b_n, com $n \geq 1$, definidos abaixo são denominados *coeficientes de Fourier* de f.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \qquad n \geq 0 \tag{1.3}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx, \qquad n \geq 1. \tag{1.4}$$

Definição 1.4. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, dizemos que f é *seccionalmente contínua* se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades, todas de primeira espécie, em qualquer intervalo limitado.

Definição 1.5. Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, dizemos que f é *seccionalmente diferenciável* se ela for seccionalmete contínua, diferenciável a menos de um número finito de pontos e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.

O resultado a seguir nos fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f.

Teorema 1.1. (TEOREMA DE FOURIER) *Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável, de período $2L$. Temos que a série de Fourier de f, converge em cada ponto x, para $[f(x^+)+f(x^-)]/2$, ou seja,*

$$\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$onde\ f(x^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)\ e\ f(x^+) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$

Teorema 1.2. (TEOREMA SOBRE A INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE FOURIER) *Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de período $2L$, seccionalmente contínua e*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right)$$

sua série de Fourier. Então,
i) a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de f; ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_a^b cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_a^b sen\frac{n\pi x}{L}dx\right);$$

ii) a função $F(x) = \int_0^x [f(t) - (a_0/2)]dt$ possui período $2L$, é contínua, tem derivada F' seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier.

Teorema 1.3. (TEOREMA SOBRE CONVERGÊNCIA UNIFORME DA SÉRIE DE FOURIER) *Sendo f uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e tal que a derivada primeira é de quadrado integrável. Então, temos que a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f.*

Aqui enunciaremos alguns resultados que serão aplicados para demonstrar os Princípios do Máximo.

Lema 1.4. (TERCEIRA IDENTIDADE DE GREEN) *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^2$ um domínio limitado onde $\partial\Omega$ é uma união finita de curvas suaves. Seja $F:\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 em $\bar{\Omega}$. Então, qualquer que seja $\xi \in \Omega$,*

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial F_\xi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}F_\xi\right)ds + \int_{\bar{\Omega}} F_\xi(\eta)\,\Delta u(\eta)d\eta,$$

onde n é a normal externa unitária.

Teorema 1.5. (TEOREMA DO VALOR MÉDIO) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e seja u uma função harmônica em Ω. Então, para quaisquer que sejam $\xi \in \Omega$ e $R > 0$ com $\overline{B(\xi;R)} \subseteq \Omega$,*

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(\xi;R)} uds$$

2. Unicidade da solução do problema (1.1)

Aqui apresentaremos alguns resultados necessários para a obtenção da unicidade de solução para o problema de Dirichlet no retângulo.

Inicialmente, tal problema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & em\ (0,a)\times(0,b), \\ u(x,0) = f_0(x), & u(x,b) = f_2(x), \quad \forall x \in [0,a], \\ u(y,0) = f_1(y), & u(a,y) = f_3(y), \quad \forall y \in [0,b], \end{cases} \tag{2.1}$$

O qual supomos que as condições de compatibilidade $f_0(0) = f_1(0)$, $f_0(a) = f_3(a)$, $f_3(b) = f_2(a)$ e $f_2(0) = f_1(b)$, são satisfeitas.

Resolvendo o caso $f_0 = f_1 = f_2 \equiv 0$, ou seja,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \ em \ \ (0,a)\times(0,b), \\ u(x,0) = 0 = u(x,b)\ , \quad x \in [0,a], \\ u(0,y) = 0\ , \quad u(a,y) = f(y)\ , \quad y \in [0,b], \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $f \in C([0,b])$ satisfaz $f(0) = 0 = f(b)$. Obtemos

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{senh(k\pi x/b)}{senh(k\pi a/b)} sen\left(\frac{k\pi y}{b}\right)\ , \qquad \forall\ x \in [0,a], y \in [0,b] \tag{2.3}$$

que é uma possível solução para o problema (2.2).

Teorema 2.1. *Seja $f \in C([0,b])$ diferenciável em $(0,b)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC([0,b])$ e suponhamos que $f(0) = 0 = f(b)$. Então a série dada por (2.3) converge uniformemente em $[0,a]\times[0,b]$, $u \in C([0,a]\times[0,b]) \cap C^\infty([0,a]\times[0,b])$ e u é solução de (2.2).*

Teorema 2.2. *Seja o intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, finito ou infinito, suponhamos que $F \in C([a,b]\times I)$ de forma que a derivada parcial $\partial F/\partial y$ existe e seja contínua em $[a,b]\times I$. E seja*

$$f(y) = \int_a^b F(x,y)dx\ , \qquad y \in I. \tag{2.4}$$

Então f é continuamente diferenciável em I e

$$f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dx\ , \qquad y \in I. \tag{2.5}$$

3. Unicidade da solução do problema (1.2)

Agora apresentaremos resultados pertinentes ao processo de obtenção da unicidade de solução para o problema de transmissão de calor em para barra finita.

Primeiramente, consideremos o problema (1.2), onde $f \in C([0,l])$, pois procuramos soluções $u \in C^2((0,l)\times(0,+\infty)) \cap C([0,l]\times[0,+\infty))$, satisfaz a condição de compatibilidade $f(0) = 0 = f(l)$. O mesmo tem por candidato a solução

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{l^2}t}\ , \qquad x \in [0,l]\ , \qquad t \geq 0, \tag{3.1}$$

onde

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx\ , n \in \mathbb{N},$$

Vejamos agora, alguns resultados bastantes úteis.

Teorema 3.1. *Seja $f \in C([0,l])$ satisfazendo $f(0) = 0 = f(l)$ e suponha que f é diferenciável em $[0,l]$, a menos de um número finito de pontos, com $f' \in SC([0,l])$. Então a série em (3.1) converge uniformemente em $[0,l]\times[0,+\infty)$ para uma função $u \in C([0,l]\times[0,+\infty)) \cap C^\infty([0,l]\times(0,+\infty))$ que é uma solução do problema (1.2).*

Teorema 3.2. *Se o problema* (1.2) *admitir solução em $C^2((0,l)\times(0,+\infty)) \cap C([0,l]\times[0,+\infty))$, ela é única.*

Mudando as condições de contorno homogêneas para não-homogêneas, temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}\ , & (x,t) \in (0,l)\times(0+\infty), \\ u(0,t) = T_1\ , & u(l,t) = T_2\ , \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x)\ , & x \in [0,l], \end{cases} \tag{3.2}$$

com T_1, T_2 constantes e f satisfazendo

$$f(0) = T_1\ , \qquad f(l) = T_2. \tag{3.3}$$

Teorema 3.3. *Seja $f \in C([0,l])$, se f é diferenciável em $(0,l)$, a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC([0,l])$ e se f satisfaz a condição de compatibilidade* (3.3), *então o problema* (3.2) *possui única solução em $C([0,l] \times [0,+\infty)) \cap C^2((0,l) \times (0,+\infty))$, e esta é dada por*

$$u(x,t) = (T_2 - T_2)\frac{x}{l} + T_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_n \, sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2}{l^2}t} \qquad (3.4)$$

sendo

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(f(x) - \frac{T_2 - T_1}{l}y - T_1\right) sen\left(\frac{k\pi y}{l}\right) dy \ , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Mais ainda, a série em (3.4) *converge uniformemente em $\mathbb{R} \times [0,+\infty]$ e $u \in C^\infty([0,l] \times (0,+\infty))$.*

4. Princípios do máximo

Nesta seção demonstraremos os princípios do máximo para as equações de Laplace e do Calor, e os utilizaremos para mostrar unicidade e dependência contínua de soluções em relação aos dados iniciais e de contorno para esses tipos de EDP's.

4.1. Princípios do Máximo Para Funções Harmônicas

Nesta subseção estudaremos algumas propriedades de funções harmônicas, assim como o Princípio do Máximo, que nos permitirá estabelecer resultados sobre unicidade de soluções para EDP's envolvendo esse tipo de funções.

Teorema 4.1 (PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA FUNÇÕES HARMÔNICAS) *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ contínua em $\overline{\Omega}$ e harmônica em Ω. Suponha que u atinja seu máximo em Ω, ou seja, existe $\xi_0 \in \Omega$ tal que $u(\xi) \le u(\xi_0)$ qualquer que seja $\xi \in \Omega$. Então u é constante em $\overline{\Omega}$.*

Antes da demonstração do Teorema 4.1, consideremos o seguinte fato: dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$, se a função $f: S \to \mathbb{R}$ é contínua em S, se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de qualquer fechado $F \subseteq \mathbb{R}$ é fechada em S. Notemos que, como $f^{-1}(\mathbb{R} - F) = f^{-1}(\mathbb{R}) - f^{-1}(F) = S - f^{-1}(F)$, isto equivale a condição: a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de qualquer aberto $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberta em S, isto é, para cada $x \in f^{-1}(A)$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(f(x); \varepsilon_x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - f(x)| < \varepsilon_x\} \subseteq A$.

Demonstração:

Por hipótese, u é limitada e atinge máximo em Ω, ou seja, existe $\xi_0 \in \Omega$ tal que

$$u(\xi_0) = M = \max\{u(\xi): \xi \in \overline{\Omega}\}. \qquad (4.1)$$

Seja $S = \{\xi \in \Omega : u(\xi) = M\}$. Como $u(\xi_0) = M$, então $S \neq \emptyset$ e como S é imagem a inversa do fechado $\{M\}$ pela continuidade de $u|_{\overline{\Omega}}$, temos que S é fechado em $\overline{\Omega}$.

Mostremos que S é aberto em Ω. Tomemos $\xi \in S$ arbitrário e $R > 0$ tal que $\overline{B(\xi;R)} \subseteq \Omega$. Como u é harmônica, pelo Teorema 1.5, temos que

$$M = u(\xi) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi;r)} u ds \ , \qquad \forall r \in (0,R). \qquad (4.2)$$

Mostremos agora que $B(\xi;R) \subseteq S$. Suponhamos por absurdo que $B(\xi;R) \not\subseteq S$, então existe $\eta \in B(\xi;R)$ tal que $\eta \notin S$, logo $u(\eta) < M = u(\xi)$. Como u é contínua, existe uma vizinhança V de η em B($\xi;R$) tal que $u(V) < M$. Tomando $r = |\xi - \eta|$, $N = V \cap \partial B(\xi;r)$ e com (4.1) e (4.2), temos

$$\begin{aligned} M = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi;r)-N} u ds + \frac{1}{2\pi r}\int_N u ds &\le \frac{M}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi;r)-N} ds + \frac{1}{2\pi r}\int_N u ds \\ &< \frac{M}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi;r)-N} ds + \frac{M}{2\pi r}\int_N ds = M. \end{aligned}$$

que é um absurdo. Portanto $B(\xi;R) \subseteq S$ e S é aberto. Sendo $\overline{\Omega}$ conexo, $S \neq \emptyset$ e S é aberto e fechado em Ω, temos que $S = \overline{\Omega}$. Portanto u constante em $\overline{\Omega}$. ∎

Corolário 4.2 (PRINCÍPIO DO MÍNIMO PARA FUNÇÕES HARMÔNICAS) *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ contínua em $\overline{\Omega}$ e harmônica em Ω. Suponha que u atinja seu mínimo em Ω, ou seja, existe $\xi_0 \in \Omega$ tal que $u(\xi) \ge u(\xi_0)$ qualquer que seja $\xi \in \Omega$. Então u é constante em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração: Basta aplicar o teorema 4.1 para $u = -v$

■

Observação: O máximo e o mínimo de uma função real harmônica em Ω e contínuas em $\bar{\Omega}$ são atingidos em $\partial\Omega$, desde que Ω seja um domínio limitado, pois nesse caso u de fato é limitada e atinge um máximo e um mínimo.

Analisemos o caso do mínimo: como Ω é limitado, temos que $\bar{\Omega}$ é limitado e fechado, assim, um compacto. Então u é contínua em um compacto, logo u atinge máximo e mínimo em $\bar{\Omega}$. Se $\min u$ é atingido em Ω, pelo princípio do mínimo, u é constante em $\bar{\Omega}$, logo $\min u$ é atingido em $\partial\Omega$. E supondo que $\min u$ não é atingido em Ω, como $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, então $\min_{\bar{\Omega}} u$ é atingido em $\partial\Omega$. De modo análogo verificamos para o máximo.

Corolário 4.3. *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *um domínio limitado,* $f \in C(\Omega)$ *e* $g \in (\partial\Omega)$. *Então existe no máximo uma solução do problema*

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Demonstração:

Sejam u, v soluções de (4.3) e $w = u - v$, então $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ é harmônica em Ω, logo atinge máximo e mínimo em $\partial\Omega$. Como $w|_{\partial\Omega} \equiv 0$, então $w \equiv 0$,e portanto, $u \equiv v$.

■

Vejamos agora uma aplicação do princípio do máximo para funções harmônicas, com respeito a dependência contínua da não homogeneidade e unicidade de solução.

Teorema 4.4. *Consideremos o problema* (4.3) *onde* $f \in C(\Omega)$ *e* $g \in (\partial\Omega)$. *Então, a solução do problema* (4.3) *depende continuamente da condição de contorno* g, *isto é, se* u_g *e* u_h *são soluções de* (4.3) *com condições de contorno* g *e* h, *respectivamente, então*

$$\|u_g - u_h\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c\|g - h\|_{C(\Omega)},$$

onde $c > 0$ *é uma constante que não depende de* u_g, u_h, f *e* g.

Demonstração:

Como $\partial\Omega$ e $\bar{\Omega}$ são compactos, então

$$\|g\|_{C(\partial\Omega)} := \sup_{(x,t)\in\partial\Omega} |g(x,y)| = \max_{(x,t)\in\partial\Omega} |g(x,y)|$$

e

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{(x,t)\in\bar{\Omega}} |u(x,y)| = \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}} |u(x,y)|.$$

Observemos agora que se u_g e u_h são soluções de (4.3) com condição de contorno g e h, respectivamente, então $u := u_g - u_h$ satisfaz

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g - h \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelos princípios do máximo e do mínimo para equações harmônicas, temos

$$\max_{\bar{\Omega}} u(x,y) = \max_{\partial\Omega} u(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial\Omega} |g(x,y) - h(x,y)| = \|g - h\|_{C(\partial\Omega)}$$

e

$$\min_{\Omega} u(x,t) = \min_{\partial\Omega} u(x,t) \geq \min_{(x,y)\in\partial\Omega} (-|g(x,y) - h(x,y)|) = -\max_{(x,y)\in\partial\Omega} |f(x,y) - h(x,y)| = -\|g - h\|_{C(\partial\Omega)}.$$

Com isso,

$$-\|g - h\|_{C(\partial\Omega)} \leq \min_{\bar{\Omega}} u \leq u(x,y) \leq \max_{\bar{\Omega}} u \leq \|g - h\|_{C(\partial\Omega)},$$

ou seja, $|u(x,y)| \leq \|g - h\|$, para todo $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Logo

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \max |u(x,y)| \leq \|g - h\|_{C(\partial\Omega)}.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon > 0$ temos que

$$\|g - h\|_{C(\partial\Omega)} < \delta \;\Rightarrow\; \|u_g - u_h\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|g - h\|_{C(\partial\Omega)} < \delta = \varepsilon.$$

Portanto, a solução de (4.3) depende continuamente da condição de contorno.

■

CONCLUSÕES

Os Princípios do Máximo são uma poderosa ferramenta, em análise matemática, basta observarmos o quando de trabalho eles podem nos poupar, quando se trata não só de verificar unicidade de soluções, como a dependência contínua dessas soluções em relação aos dados iniciais do problema. Com isso, temos que os Princípios do Máximo são indispensáveis no estudo das Equações Diferenciais.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W. E. Boyce & R. Di Prima, **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, Ed. LCT, 1994.

FIGUEIREDO, D. G. Figueiredo, **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, 4ª edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

IÓRIO, V. Iório, **EDP Um curso de Graduação**, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2005

LIMA, Elon Lages, **Curso de Análise Vol. 1**, 12ª edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

_____, **Curso de Análise Vol. 2**, 10ª edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.