UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Érico Felintro de Andrade

UMA PROPOSTA PARA O APROFUNDAMENTO DO ENSINO DE LOGARITMOS: AS ESCALAS LOGARÍTMICAS.

Campina Grande - PB
Agosto/2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Érico Felintro de Andrade

UMA PROPOSTA PARA O APROFUNDAMENTO DO ENSINO DE LOGARITMOS: AS ESCALAS LOGARÍTMICAS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Marcelo Carvalho Ferreira

Campina Grande - PB
Agosto/2023

A553p Andrade, Érico Felintro de.

Uma proposta para o aprofundamento do ensino de logaritmos: as escalas logarítmicas / Érico Felintro de Andrade. - Campina Grande, 2023.

89 f. : color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira."

Referências.

1. Logaritmo. 2. Escalas Logarítmicas. 3. Aplicações das Escalas. 4. Abordagem Didática. 5. Ensino Médio. I. Ferreira, Marcelo Carvalho. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/093

Érico Felintro de Andrade

UMA PROPOSTA PARA O APROFUNDAMENTO DO ENSINO DE LOGARITMOS: AS ESCALAS LOGARÍTMICAS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 18 de agosto de 2023:

Marcelo Carvalho Ferreira

Dr. Marcelo Carvalho Ferreira
Orientador

Natan de Assis Lima

Dr. Natan de Assis Lima
Examinador Externo - UEPB

Leomaq F. S. Bernardo

Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo
Examinador Interno - UFCG

Campina Grande - PB
Agosto/2023

À minha filha Maria Beatriz, à minha avó Maria Neli e à minha esposa Leila Araújo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e por me permitir desfrutar de saúde para poder cursar o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

À minha avó Maria Neli, por todo o suporte desde o início de minha vida e por sempre me incentivar a buscar, através dos estudos, a minha qualificação pessoal e profissional.

Ao meu avô, Amaro Pedro de Andrade (*in memorian*), que sempre me orientou a trilhar caminhos que me permitissem desfrutar de novos conhecimentos além de me ensinar sobre dedicação em tudo que me oportunizasse melhorar a minha condição de vida e consequentemente da minha família.

À minha esposa Leila Araújo, por todo o apoio, incentivo e compreensão sempre que precisei me ausentar dos mais variados momentos em família, para me dedicar ao Mestrado.

Aos meus familiares, pelos incentivos e conselhos em algumas vezes que pensei não conseguir concluir o curso, de modo especial aqueles que dedicaram parte de suas rotinas para cuidar de minha filha enquanto eu precisava me dedicar aos estudos, vocês foram peças essenciais para que eu conseguisse chegar até aqui.

Aos amigos de turma do Mestrado Profissional André Macedo, Andreson Aquino, Benildo Virginio, Carlos Gonzaga, Cláudio Teodista, Eli Azevedo, Erivan Barbosa, Gilmar Veríssimo, Gilvandro Correia, Idalice Maria, João Evayr, Rafael Macedo, Wellington Rodrigues e Wirander Pereira por estarem diariamente disponíveis para juntos estudarmos em grupo de forma remota, debatendo os conteúdos, resolvendo problemas, nos preparando para o tão “temido” Exame Nacional de Qualificação - ENQ e motivando de forma coletiva toda a nossa turma, visando uma maciça aprovação tanto nas disciplinas quanto no ENQ.

Às equipes gestoras, aos alunos e colegas de trabalho das escolas Brigadeiro Eduardo Gomes e Escola de Referência em Ensino Médio Professora Benedita de Morais Guerra, por todas as frases incetivo e palavras de motivação, além de compreenderem a necessidade do meu afastamento legal de algumas atividades, enquanto estava dedicado à minha qualificação profissional. De modo especial a dois deles que partiram desta vida terrena, mas enquanto aqui estiveram também me incentivaram sempre, o Professor Luciano Tavares *in Memorian* e Professor Edízio Lima *in Memorian.*

Ao meu amigo, desde a graduação, Professor Me. Bruno Pereira, por incansáveis vezes ter me incentivado a prestar o Exame Nacional de Acesso - ENA e assim poder cursar o PROFMAT, por sempre estar disponível para me ajudar quando tinha alguma dificuldade na minha preparação para o ENQ, além de disponibilizar alguns livros que me auxiliaram nas quatro disciplinas básicas, bem como outros materiais que me permitiram ter um suporte literário durante o curso.

Ao também amigo de profissão Edson Luiz, por também disponibilizar um vasto material que me permitiu ter várias referências como suporte para cursar as disciplinas e avaliações das disciplinas, bem como para o Exame Nacional de Qualificação.

Aos professores da minha turma do PROFMAT da UFCG, Dr. José de Arimateia Fernandes, Dr. Marcelo Carvalho Ferreira, Dr. José Fernando Leite Aires, Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho, Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, Dr. Romildo Nascimento de Lima (Coordenador do Programa), Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer e Dra. Deise Mara, que mesmo em um período atípico, com a pandemia de COVID-19, brilhantemente conseguiram nos fazer compreender os conteúdos e nos apoiaram em todos os momentos de dificuldade e nos motivaram a concluir com sucesso esta nossa jornada.

Ao Dr. Marcelo Carvalho Ferreira, desta vez como meu orientador, por me auxiliar com paciência, muita dedicação e sabedoria na construção desta dissertação.

A todos os funcionários da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, de modo especial aos da Unidade Acadêmica de Matemática - UAMAT, de modo particular à Secretária Isabela da Silva Souza, por sempre realizar o seu trabalho de maneira cordial e paciente quando por mim foi solicitada algumas vezes para refazer declarações que precisavam entregar no meu processo de afastamento para curso na Secretaria de Educação de Pernambuco.

Ao Professor Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo da UFCG, e ao Professor Dr. Natan de Assis Lima da UEPB, por terem aceito o convite para comporem a Banca Examinadora da minha dissertação.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pela oferta do curso junto à UFCG, que permite a nós professores de matemática do país agregar conhecimentos de alto nível à nossa carreira profissional, elevando assim a qualidade do Ensino de Matemática nas Escolas em que lecionamos.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

"Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grandes... comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades."

John Napier, Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614)

Resumo

Buscamos, na construção deste trabalho, propor uma abordagem mais didática dos logaritmos aos docentes e discentes do Ensino Médio, contemplando as escalas logarítmicas. Iniciamos contando um pouco da história de alguns precursores no tema e as contribuições dadas para o seu desenvolvimento. Após introduzir o logaritmo natural, fazemos uma abordagem dos principais teoremas sobre as funções logarítmicas e exponenciais. Em seguida, apresentamos algumas aplicações das escalas logarítmicas para o estudo de certas grandezas e finalmente concluímos sugerindo algumas propostas de sequências didáticas para serem aplicadas em sala de aula.

Palavras-chave: Logaritmo. Escalas Logarítmicas. Aplicações.

Abstract

We sought, in the development of this work, to propose a more didactic approach to logarithms for high school teachers and students, taking in consideration logarithmic scales. We begin by briefly recounting the history of some pioneers in the subject and their contributions to its development. After introducing the natural logarithm, we delve into the main theorems concerning logarithmic and exponential functions. Then, we present some applications of logarithmic scales for the study of certain magnitudes, and finally, we conclude by suggesting some proposals for didactic sequences to be applied in the classroom.

Keywords: Logarithm. Logarithmic Scales. Applications.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O ensino de logaritmos é uma parte importante da preparação para exames nacionais, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e outros vestibulares. Uma compreensão sólida desse conteúdo é fundamental para que os alunos prossigam nos estudos em cursos universitários que requerem um bom conhecimento em matemática, como engenharias, ciências exatas e economia.

A nossa proposta para o aprofundamento do ensino de logaritmos, surge da dificuldade que nós, docentes do Ensino Básico, sentimos ao levarmos para a sala de aula este conteúdo e torná-lo atrativo para os educandos. A maioria dos livros didáticos não diferem nas propostas de ensino deste conteúdo e, além disso, são raros ou inexistentes livros didáticos que contemplem alguma seção que explorem em seus textos as escalas logarítmicas e suas aplicações nos vários contextos presentes no cotidiano dos alunos.

Tomando como norte a Base Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que traz na seção que contempla a área de matemática e suas tecnologias o seguinte trecho:

> No Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.

Buscamos elaborar um material que inicia situando o leitor no contexto geográfico e histórico de surgimento do tema, explorando um breve apanhado histórico dos principais estudiosos que contribuíram para o desenvolvimento deste. Em seguida, fazemos uma abordagem diferente das encontradas nos livros didáticos onde apresentamos a função logarítmica a partir da noção de área sob uma faixa de hipérbole, e os principais resultados sobre logaritmos e suas demonstrações. Definimos a função exponencial como a inversa da função logarítmica, seguidas de suas propriedades. Dando continuidade, abordamos as escalas linear e logarítmica e exploramos as aplicações das escalas logarítmicas para o estudo de grandezas como a escala de magnitude de terremotos, a escala de decibéis, a escala de pH e em gráficos financeiros. Por fim, propomos algumas sequências didáticas que facilitam ao docente a exposição deste conteúdo de forma mais dinâmica, possibilitando aos discentes compreender a necessidade de fazer uso das escalas logarítmicas em algumas situações e em quais casos elas são mais eficientes para representações em gráficos.

Elaboramos três propostas de sequências didáticas visando desenvolver nos alunos habilidades para a construção de escalas logarítmicas manualmente ou com auxílio de calculadoras, assim como contextualizar a utilização de escalas logarítmicas para representação de informações, além de praticar a resolução de exercícios contemplados em vestibulares e outras fontes para uma melhor concepção das habilidades desenvolvidas.

Finalmente, no Apêndice apresentamos uma proposta utilizando o Microsoft Excel, para plotagem de gráficos em escalas logarítmicas com o intuito de proporcionar aos discentes experiências exitosas que ajudem no desenvolvimento das habilidades específicas contidas na BNCC (BRASIL, 2018).

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Propor, através de sequências didáticas, um aprofundamento no ensino dos logaritmos por meio de aplicações das escalas logarítmicas para docentes e alunos do Ensino Médio.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Descrever um pouco da história da descoberta e desenvolvimento dos logaritmos, fazendo um breve apanhado histórico das principais contribuições de três dos principais precursores no desenvolvimento do tema: John Napier, Jost Bürgi e Henry Briggs;
- Demonstrar os principais resultados sobre logaritmos;
- Explanar sobre os diferentes significados de escalas;
- Definir escalas lineares e escalas logarítmicas;
- Expor algumas aplicações das escalas logarítmicas no estudo de certas grandezas em algumas áreas do conhecimento, através de análises de gráficos de ações na área de finanças, as escalas de magnitude de terremoto nas áreas de geografias e/ou física, e a escala de intensidade sonora também na área de física etc.;
- Propor sequências didáticas que possam ser utilizadas para estudo e construção de escalas logarítmicas;
- Mostrar através de uma sequência de procedimentos como gerar um gráfico em escala logarítmica no Microsoft Excel.

1.2 Organização

Esta dissertação é composta por seis capítulos, cada um abordando um conteúdo específico, conforme apresentamos em resumo a seguir:

- No capítulo um, desenvolvemos a introdução da nossa dissertação.
- No capítulo dois, apresentamos um pouco da história dos logaritmos por meio de um breve apanhado sobre as contribuições dos três principais responsáveis pelo descobrimento dos logaritmos, o escocês John Napier, o suíço Jost Bürgi e o inglês Henry Briggs.
- No capítulo três, apresentamos os principais resultados sobre os logaritmos e suas demonstrações.
- No capítulo quatro, ilustramos aplicações da escala logarítmica para o estudo de certas grandezas, as quais contemplam alguns exemplos em finanças, escala Richter, escala de decibéis e escala de pH.
- No capítulo cinco, sugerimos três sequências didáticas para aplicação em sala de aula, que contêm o que pretendemos desenvolver de habilidades sobre o tema, além dos objetivos gerais, objetivos específicos, conteúdo da aula e uma lista de exercícios para fixação dos conteúdos.
- No capítulo seis, apresentamos as conclusões da nossa dissertação.
- Por fim, deixamos como sugestão uma breve explicação de como gerar gráficos com eixos em escalas logarítmicas no Microsoft Excel.

2 Um pouco da história dos logaritmos

A história dos logaritmos tem seu início entre séculos XVI e XVII, e sua etimologia remonta à tradução de conceitos gregos *logos* que significa *razão* e *arithmos* que significa *número*. Os logaritmos foram desenvolvidos objetivando simplificar, tornar mais rápido e precisos os complicados cálculos envolvendo as operações de multiplicação e divisão de números muito grandes que demandavam bastante tempo dos astrônomos e navegadores da época. Serviram também como uma das ferramentas fundamentais para o desenvolvimento das ciências e da matemática ao longo dos séculos. Com o avanço da tecnologia, as calculadoras e computadores foram desenvolvidos, tornando assim as tabelas (*tábuas*) de logaritmos cada vez menos usuais para realizar cálculos do cotidiano. Ressalta-se que os logaritmos continuam tendo grande importância, auxiliando nos cálculos de certas grandezas nas mais diversas áreas das ciências e tecnologias.

Neste capítulo, pretendemos realizar um apanhado histórico dos logaritmos, desde seus primeiros aparecimentos até os desenvolvimentos mais recentes. Inicialmente, faremos uma breve apresentação dos principais responsáveis pelo descobrimento dos logaritmos: John Napier e Joost Bürgi. Em seguida, também discorreremos brevemente sobre a contribuição de Henry Briggs no desenvolvimento dos logaritmos.

2.1 Um breve apanhado sobre a história de John Napier

Figura 1 – John Napier (1550-1617)

Fonte: (SCOTT, 2023)

Entre o final do século XVI e início do Século XVII, com o avanço das Navegações e da Astronomia, os logaritmos surgiram para simplificar extensos cálculos aritméticos envolvendo as operações de multiplicação e divisão. Associados a esse surgimento, sobrepõe-se duas personalidades: John Napier e Henry Briggs.

O barão escocês John Napier, que foi matemático, físico, astrônomo, astrólogo e teólogo, iniciou seus estudos sobre os logaritmos por volta de 1594. Antes de publicar os resultados de suas pesquisas, procurava construir um conjunto de tábuas (tabelas) e de regras que tornassem mais simples os engenhosos cálculos que os astrônomos da época necessitavam fazer. Conseguiu em 1614, três anos antes de sua morte, publicar seu trabalho no livro intitulado de *Mirifici logarithmorum canonis descripitio*, cujo significado se traduz em *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*. O trabalho de Napier foi rapidamente difundido e fortemente utilizado por astrônomos, astrólogos e navegadores (entre outros) da época e que fizeram uso dessa nova tecnologia por quase um século.

Napier teve uma segunda obra, publicada postumamente em 1619 e intitulada *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, que em tradução livre significa *Uma construção da maravilhosa regra dos Logaritmos*. Com a morte de John Napier em 1617, a publicação da obra foi levada a cabo pelo seu filho Robert Napier. Nela, Napier faz um convite ao leitor para seguir o seu método de construção, seus cálculos, sua tabela ou tábua de logaritmos (vide Figura 3) e o raciocínio utilizado. Esta obra possui uma linguagem mais acessível e notavelmente distinta daquela na obra *Descriptio*, onde os cálculos eram exaustivos e complexos ao abordar a definição dos logaritmos.

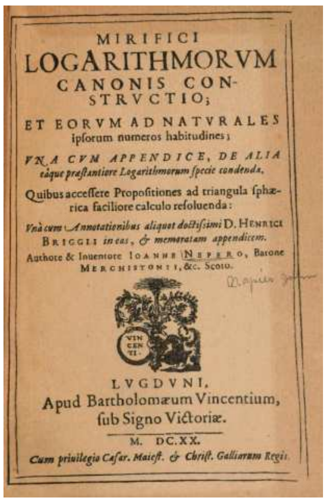
As capas originais das obras *Mirifici logarithmorum canonis descripitio* e *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, são mostradas, respectivamente, nas Figuras 2 e 3.

Figura 2 – Capa do Livro Descriptio


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis deſcriptio,
Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Ampliſsimi, Facillimi, &
expeditiſsimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.

Fonte: (NORMAN, 2021)

Figura 3 – Capa do Livro - Constructio


MIRIFICI
LOGARITHMORVM
CANONIS CON-
STRVCTIO;
ET EORVM AD NATVRALES
ipſorum numeros habitudines;
VNA CVM APPENDICE, DE ALIA
eâque præſtantiore Logarithmorum ſpecie condenda.
Quibus acceſſere Propoſitiones ad triangula ſphærica faciliore calculo reſoluenda:
Vnà cum Annotationibus aliquot doctiſsimi D. HENRICI
BRIGGII in eas, & memoratam appendicem.
Authore & Inuentore IOANNE NEPERO, Barone
MERCHISTONII, &c. Scoto.
LVGDVNI,
Apud Bartholomæum Vincentium,
ſub Signo Victoriæ.
M. DC.XX.
Cum priuilegio Cæſar. Maieſt. & Chriſt. Galliarum Regis.

Fonte: (NORMAN, 2021)

Conforme (LIMA, 2016, p. 2):

> Uma tábua de logaritmos consiste em duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, chamado o seu *logaritmo*. Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. Finalmente, para extrair a raiz n-ésima de um número basta dividir o logaritmo de um número pelo índice da raiz.

Napier fez uma associação dos termos de uma progressão geométrica,

$$b, b^2, b^3, b^4, \ldots, b^n, \ldots$$

aos termos de uma progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

de modo que, ao multiplicar dois termos b^m e b^p da progressão geométrica, há uma relação com a soma dos termos m e p da progressão aritmética.

Considerando a tabela a seguir, envolvendo potências de $b = 2$, vamos calcular, a título de exemplo, $8 \cdot 16$ e a raiz quadrada de 256:

2^n	n
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
$\vdots$	$\vdots$

Observe que

- 8 na coluna à esquerda corresponde a 3 na coluna à direita;
- 16 na coluna à esquerda corresponde a 4 na coluna à direita;
- $3 + 4 = 7$ e 7 na coluna à direita corresponde a 128 na coluna à esquerda.

Portanto,

$$\boxed{8 \cdot 16 = 128}$$

pode ser obtido reduzindo uma multiplicação a uma simples operação de adição.

Para saber o valor de $\sqrt{256}$, a partir de observação da coluna à direita, faz-se $8 \div 2 = 4$. Então, a partir de observação da coluna à esquerda, obtém-se $\sqrt{256} = 16$.

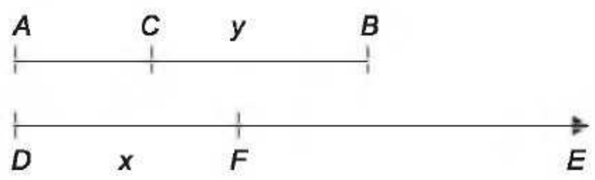
É válido observar que um método tão elaborado só possui utilidade prática se preenchemos as grandes lacunas entre os números da tabela e podemos fazer isto de duas maneiras. Uma é usar os expoentes fracionários e a outra é escolher um número pequeno o suficiente como base para que as potências aumentem suficientemente devagar. Entretanto, não se conheciam, plenamente, naquela época, potências da forma $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Sendo assim, Napier teve que trabalhar de forma a definir a base como um número suficientemente pequeno para que a potência aumentasse vagarosamente. Ele utilizou o número $0{,}9999999 = 1 - 10^{-7}$, que é bem próximo de 1, como base.

Segundo (EVES, 2011), Napier explica os princípios do seu trabalho em termos geométricos da seguinte maneira:

Considere um segmento de reta AB e uma semirreta DE, de origem D, conforme a Figura 4 a seguir. Suponhamos que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância $\overline{CB}$, e que F se mova com velocidade uniforme. Napier definiu então $\overline{CB}$ como o logaritmo de $\overline{DF}$. Isto é, pondo $\overline{DF} = x$ e $\overline{CB} = y$, logo,

$$y = Nap \cdot \log x.$$[1]

Figura 4 – Segmento AB e Semirreta DE

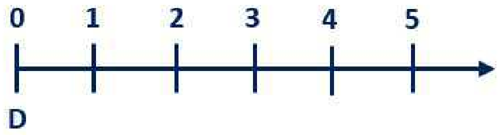


No livro *e: a história de um número* (MAOR, 2003), o autor expõe um exemplo prático da explicação de Napier: Supondo que o segmento AB representa uma unidade

[1] Tal notação pode ser encontrada em (EVES, 2011) onde *Nap · log* significa "logaritmo neperiano".

de comprimento, e marcamos segmentos iguais, de comprimento arbitrário, ao longo da semirreta DE a partir de D; Denominemos as extremidades de 0, 1, 2, 3, e assim por diante.

Figura 5 – Semirreta com origem em D.



Fonte: O Autor.

Como F se move com uma velocidade uniforme, ele vai percorrer estes segmentos em intervalos de tempo iguais. Quando C começa a se mover a partir de A, F encontra-se em 0 (o ponto D); quando C chega na metade de AB, F encontra-se em 1; e quando C cobriu 3/4 de AB, F chegou em 2, e assim por diante. Como y mede a distância que C ainda tem de percorrer para chegar em B, temos a seguinte tabela:

Tabela 1 – Tabela de PA e PG

y	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	...
x	0	1	2	3	4	5	6	...

Fonte: Elaborada pelo autor.

John Napier introduziu em seus textos, definições e resultados que permitiram um gigantesco avanço em diversas áreas do conhecimento além da matemática, principalmente o comércio, a navegação e a astronomia. Tendo sido aceitos pela comunidade científica de então, foram usados como base para muitos outros estudiosos de sua época, bem como dos séculos posteriores. Portanto, podemos concluir que a conceituação sobre logaritmos, que são estudadas ainda hoje, tem como base os trabalhos desenvolvidos por Napier, os quais foram aprimorados e aplicados em outros campos da ciências e tecnologias.

2.2 Um breve apanhado sobre a história de Joost Bürgi

Figura 6 – Jost Bürgi (1552-1632)

Fonte: Wikipédia.

Jost Bürgi foi, além de fabricante de instrumentos astronômicos e relojoeiro, um matemático amador suíço que, de maneira independente do que foi produzido por Napier, também descobriu os logaritmos. Há fortes indícios e evidências de que Johannes Kepler, com quem Bürgi trabalhou como assistente em Praga, teve a ideia de sua terceira lei do movimento planetário a partir da concepção sobre logaritmos de Bürgi, pois o próprio Kepler escreve na introdução de seu trabalho sob título *Tabelas de Rodolfo* (1627), conforme consta em (O'CONNOR; ROBERTSON, 2010):

> *... como auxiliares de cálculo, Justus Byrgius foi levado a esses mesmos logaritmos muitos anos antes do surgimento do sistema de Napier; mas sendo um homem indolente e muito pouco comunicativo, em vez de criar seu filho para o benefício público, ele o abandonou ao nascer.*

Assim como Napier, Bürgi buscava construir tabelas e regras que tornassem mais simples os engenhosos cálculos que os astrônomos da época necessitavam realizar.

Acredita-se que Bürgi tenha começado a utilizar logaritmos por volta de 1588, embora a data exata de sua descoberta não seja claramente estabelecida pelos historiadores, porém, ele apenas publicou seus resultados em 1620, cerca de seis anos após a publicação do livro de Napier sobre os logaritmos.

Em seu livro intitulado "Arithmetische und Geometrische Progrefs Tabulen", que em tradução livre significa "Tabelas Aritméticas e Geométricas de Progressões", Bürgi apresenta suas tabelas logarítmicas e trigonométricas, as quais tiveram uma ampla aceitação e utilização por astrônomos e matemáticos da época.

Figura 7 – Capa do Livro Arithmetische

Fonte: daten.digitale-sammlungen.de.

Bürgi e Napier adotaram bases logarítmicas diferentes em seus trabalhos. Bürgi considerou uma progressão geométrica cuja razão era maior e muito próxima de 1 ($1,0001 = 1 + 10^{-4}$), com o intuito de obter os termos da sequência muito próximos e que permitissem, assim, a realização de cálculos com boas aproximações. Enquanto Bürgi considerou o primeiro termo de sua progressão geométrica como sendo 10^8, Napier partiu de um número menor para o primeiro termo da sua, a saber, 10^7. Sendo assim, as principais diferenças entre Bürgi e Napier estão nas terminologias e nos valores numéricos adotados para o início do trabalho.

Possivelmente, antes de se dedicar aos logaritmos, Bürgi tenha trabalhado nas cidades de Nuremberg, Augsburg e Cremona como relojoeiro, pois eram as cidades com um maior desenvolvimento de relojoaria. Devido a sua alta habilidade, supõe-se que tenha auxiliado na construção de um relógio astronômico projetado pelo professor Konrad Dasypodius, da Universidade de Estrasburgo e, por meio dessa construção, tenha adquirido sua experiência em matemática, mesmo não havendo aprendido a língua da ciência da época, o latim. Sua vasta experiência em matemática e astronomia então adquiridas eram semelhantes as de alunos que conviviam em círculos científicos na cidade de Estrasburgo.

Figura 8 – Relógio e Globo de Bürgi feitos no século XVI

Fonte: (O'CONNOR; ROBERTSON, 2010)

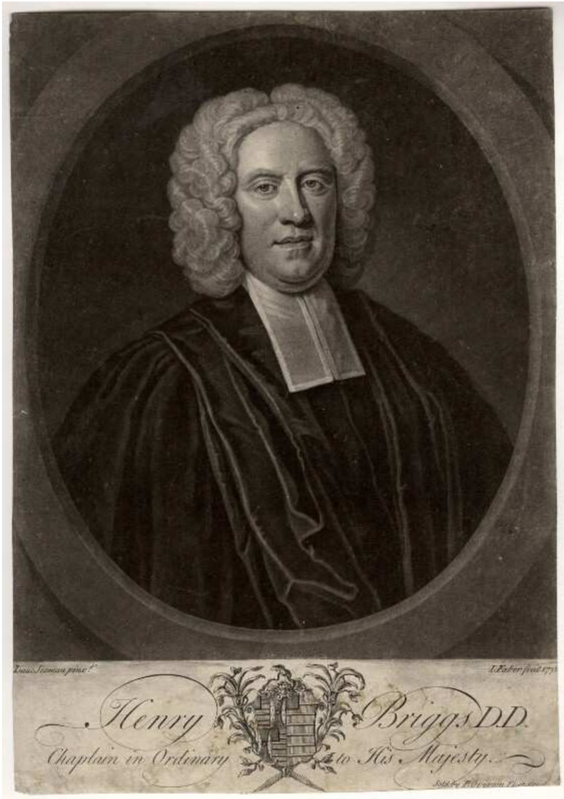
Apesar de suas significativas contribuições para a matemática, Bürgi não recebeu o reconhecimento merecido em sua época, havendo sido seu trabalho ofuscado pelo trabalho de Napier. Isso foi devido ao fato de Napier ter se antecipado na publicação dos resultados dos seus estudos sobre o tema. (LIMA, 2016) cita que a influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior que a de Bürgi, devido às suas publicações e seu relacionamento com professores universitários. Contudo, o legado de Bürgi como um pioneiro nas pesquisas sobre logaritmos e suas aplicações na trigonometria é amplamente reconhecido na atualidade. Ele é considerado uma figura de grande importância na história da matemática, e suas contribuições continuam sendo objeto de estudo e apreço por parte dos matemáticos.

No Brasil, são raros os livros didáticos onde encontramos alguma seção que informe as contribuições de Joost Bürgi ao estudo dos logaritmos. Alguns materiais citam que ele foi um dos pioneiros, porém explanam com uma maior frequência as contribuições de Napier e Briggs (cuja contribuição no desenvolvimento dos logaritmos abordaremos na próxima seção). Sugerimos aos docentes uma abordagem mais ampla sobre a história deste notável matemático que teve significativa contribuição no avanço dos estudos sobre logaritmos, os quais continuam sendo relevantes nos mais diversos campos científicos e tecnológicos, tais como engenharias, ciência da computação e física.

Bürgi faleceu em 31 de janeiro de 1632 em Kassel, onde atualmente está localizada a Alemanha, deixando contribuições que serviram como base para o avanço da matemática e da astronomia, influenciando assim diversas gerações de estudiosos nessas áreas.

2.3 Um breve apanhado sobre a história de Henry Briggs

Figura 9 – Henry Briggs (1561 - 1630)



Fonte: Wikipédia.

Henry Briggs, matemático inglês, é conhecido por sua publicação das tabelas de logaritmos de Napier e sua significativa contribuição para a aceitação dos logaritmos pela comunidade científica. Na verdade, ele é considerado o principal responsável pela divulgação e uso dos logaritmos. Ele foi pioneiro no ensino de geometria no então, recém fundado, Gresham College, localizado em Londres e mais tarde em Oxford.

Em 1610, em uma de suas cartas escritas ao seu amigo James Usher, Briggs revelou-se bastante entusiasmado com astronomia, dando atenção especial aos estudos de elipses. Briggs ficou extremamente impressionado ao ler o trabalho de Napier sobre logaritmos, já que a astronomia foi um tema que exigiu diversos cálculos complexos e compreendeu a grande ajuda que os logaritmos forneciam para os envolvidos no campo da astronomia.

Briggs já havia publicado duas tabelas anos antes da obra *Descriptio* de Napier, uma em 1602 titulada *A Table to find the Height of the Pole* (Uma tabela para encontrar a altura do polo) e outra em 1610, sob o título *Tables for the Improvement of Navigation* (Tabelas para a melhoria da navegação), o que demonstra que ele também estava profundamente envolvido na criação de tabelas que servissem como auxílio nos cálculos astronômicos.

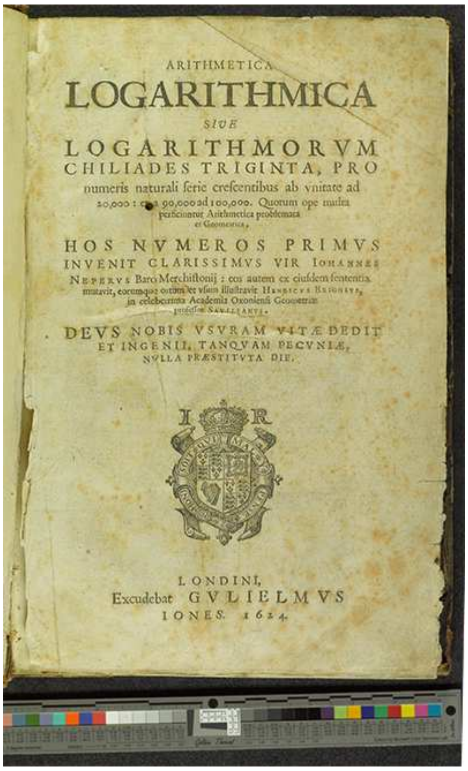
Após ter contato com a invenção de Napier, Briggs, assim como todos os renomados matemáticos da época, ficou bastante entusiasmado com tal obra. Tanto que, segundo (BRUCE, 2006), em sua última carta ao amigo Usher, datada de 10 de março de 1615, Briggs escreve

> *"Naper, senhor de Markinston (sic), colocou minha cabeça e minhas mãos em um trabalho com seus novos e admiráveis logaritmos. Espero vê-lo neste verão, se Deus quiser, pois nunca vi um livro que me agradasse mais e me deixasse mais maravilhado."*

Ainda em 1615, Briggs viajou até a Escócia e visitou Napier em seu castelo, e conforme (MAOR, 2003), durante essa visita, Napier e Briggs concordaram, após diversas possibilidades, que as tábuas seriam mais úteis se sofressem alterações de modo que o logaritmo de 1 fosse igual a 0, ou seja, $1 = 10^0$, e, o logaritmo de base 10 estivesse relacionado a uma potência conveniente de 10. Em linguagem moderna significa dizer que se um número positivo N for escrito como 10^L, então L é o logaritmo de N, escrito como $log_{10}\ N$ ou simplesmente $log\ N$. Atualmente estes logaritmos são denominados logaritmos decimais. Embora seja bastante comum encontrarmos em livros didáticos e em livros sobre a história da matemática que Briggs foi responsável por adotar os logaritmos com $log\ 1 = 0$ e, apesar de logaritmos com $log\ 1 = 0$ serem apresentados pela primeira vez no trabalho de Briggs, ele atribui a Napier a autoria da ideia.

No ano de 1617, Briggs publicou uma obra contendo os logaritmos de 1 a 1000, cada um com 14 casas decimais. Em 1624, foi publicada a obra *Arithmetica Logarithmica*, que incluía os logaritmos de base 10 de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, também calculados com 14 casas decimais.

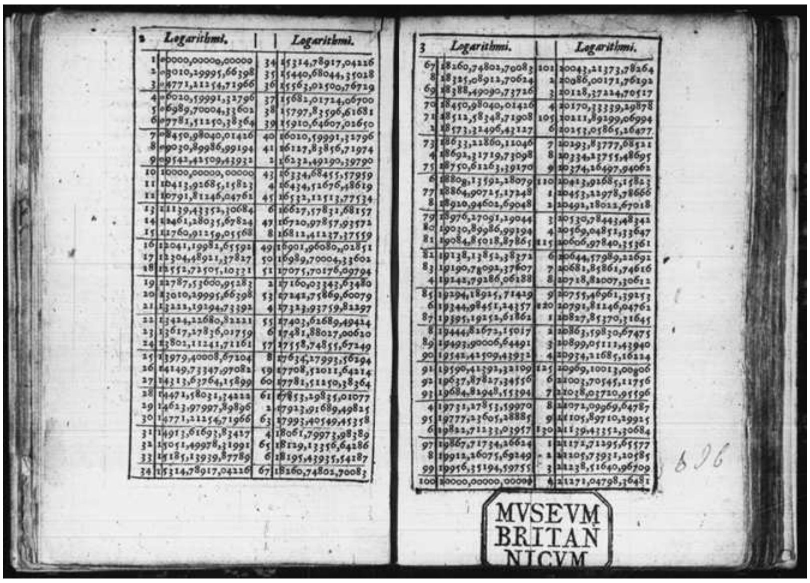
Figura 10 – Capa do Livro Arithmetica Logarithmica



Fonte: Mathematical Association of America

A Figura 11 a seguir mostra duas páginas do livro Arithmetica Logarithmica de Briggs, onde é possível observar uma tábua com logaritmos decimais do 1 ao 100 aproximados com 14 casas decimais

Figura 11 – Tábua de logaritmos de base 10 de Briggs



Fonte: Wikipédia

As tabelas completas contendo os logaritmos dos números naturais entre 20.000 e 90.000 foram publicadas na Holanda em 1628 por Adriaan Vlac (1600 - 1667), um editor holandês, também desenvolvedor de tabelas de logaritmos, e em Londres no ano de 1633, cerca de três anos após a morte de Briggs, ocorrida em 26 de janeiro de 1630, em Oxford, Inglaterra.

Briggs teve sua vida marcada marcada por seu intenso compromisso com a matemática e seu desejo de torná-la mais acessível e aplicável. Deixou um legado permanente na história da matemática, além de seus trabalhos serem essenciais para o avanço da ciência e da tecnologia em seu tempo e posteriores.

Dentre tantas contribuições, a de maior importância foi a popularização dos logaritmos e o desenvolvimento da Tabela Briggsiana, que simplificou e acelerou os cálculos científicos. Sua dedicação à matemática e seu trabalho incansável tiveram um impacto profundo na forma como a disciplina é praticada e ensinada até os dias atuais.

3 Principais Teoremas sobre logaritmos

Neste capítulo serão apresentados os principais resultados sobre logaritmos e suas demonstrações. Utilizaremos (LIMA, 2016), (LIMA, 2013) (LIMA et al., 2016) como principais fontes para consulta das demonstrações dos resultados abordados.

3.1 Área de uma faixa de hipérbole

Para a definição da área de uma faixa de hipérbole, consideramos no plano um sistema de eixos cartesianos. Seja H o ramo positivo do gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, isto é,

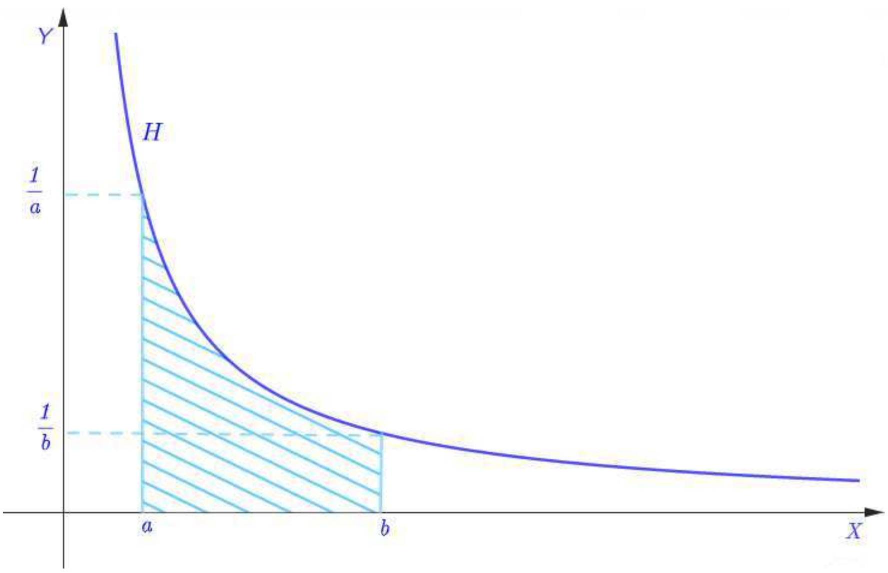
$$H = \left\{(x, y); x > 0, y = \frac{1}{x}\right\}.$$

Define-se uma *faixa de hipérbole* ao seguinte conjunto:

$$H_a^b = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\},$$

onde $0 < a < b$.

Figura 12 – Área da faixa de hipérbole no intervalo [a, b]



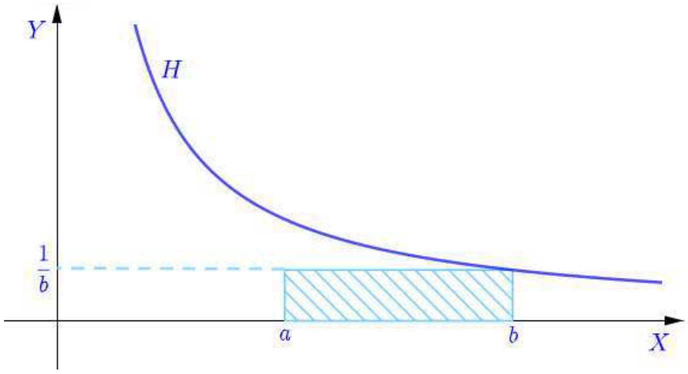
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1.1 Propriedade Fundamental

A seguir listaremos algumas definições e demonstraremos o que, de acordo com (LIMA, 2016), é o fato mais importante a respeito das áreas das faixas de hipérbole, expresso no Teorema 3.1.

No que segue, denotaremos por R_a^b o retângulo de base $[a, b]$ e altura $\frac{1}{b}$ inscrito em H, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 13 – Retângulo de base $[a, b]$ e altura $\frac{1}{b}$ inscrito em H.

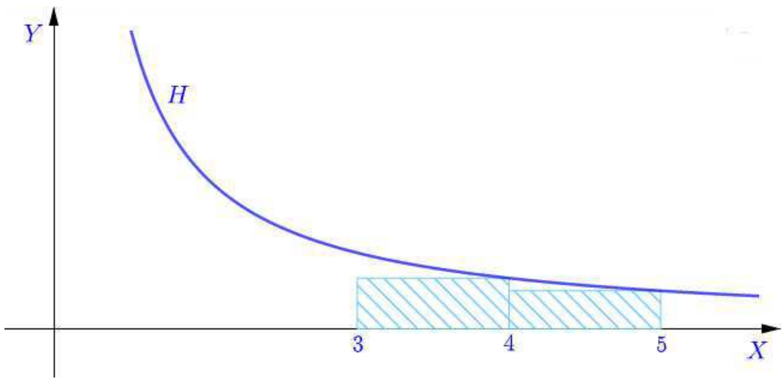


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.1. *Denominaremos de* ***polígono retangular*** *a um polígono formado por um número finito de retângulos adjacentes* $R_{a'}^{b'}$ *do tipo acima e o denotaremos por* P_a^b, *caso inicie em* $x = a$ *e finde em* $x = b$. *Observe que qualquer* P_a^b *está contido em* H_a^b.

Exemplo 1. $P_3^5 = R_3^4 \cup R_4^5$

Figura 14 – Polígono Retangular P_3^5



Fonte: Elaborado pelo autor.

Escreveremos $A\left(R_a^b\right)$ e $A\left(P_a^b\right)$ para indicar as áreas de R_a^b e P_a^b, respectivamente.

Definição 3.2. *A **área** $A\left(H_a^b\right)$ da faixa de hipérbole H_a^b é, o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares em H_a^b.*

Teorema 3.1. *Seja qual for $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.*

Para a demonstração do Teorema 3.1, faz-se a utilização dos dois lemas que seguem.

Lema 3.2. *Para todo número real $k > 0$, os retângulos inscritos em H de bases $[a, b]$ e $[ak, bk]$ têm a mesma área.*

Demonstração. A área de R_a^b é

$$A\left(R_a^b\right) = (b-a)\cdot\frac{1}{b} = 1 - \frac{a}{b}.$$

Analogamente, a área de R_{ak}^{bk} é

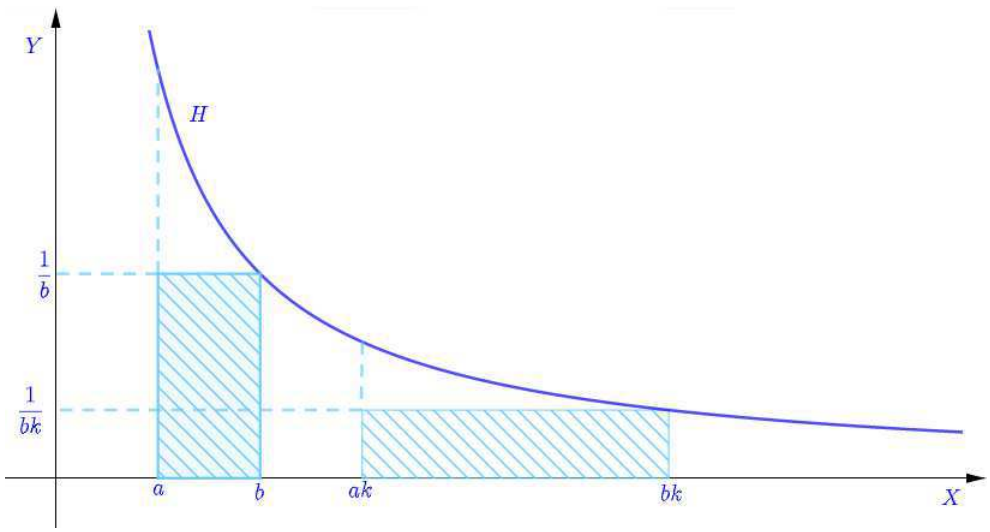
$$A\left(R_{ak}^{bk}\right) = (bk-ak)\cdot\frac{1}{bk} = 1 - \frac{a}{b}.$$

Portanto,

$$A\left(R_a^b\right) = A\left(R_{ak}^{bk}\right).$$

■

Figura 15 – Áreas R_a^b e R_{ak}^{bk}



Fonte: Elaborado pelo autor.

Lema 3.3. *Seja $k > 0$. Se P_a^b é um polígono retangular em H_a^b, então o polígono retangular P_{ak}^{bk} em H_{ak}^{bk} tem a mesma área que P_a^b.*

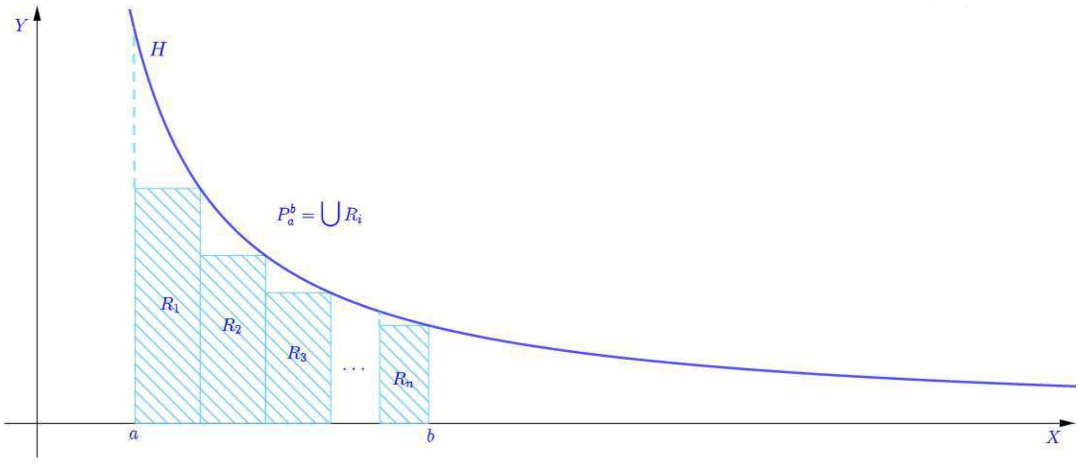
Demonstração. Como $P_a^b = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, onde R_i, $i = 1, \ldots, n$, são retângulos contidos em H_a^b, pelo Lema 3.2, os retângulos correspondentes R_i' em H_{ak}^{bk} têm a mesma área. Logo

$$\begin{aligned} A\left(P_a^b\right) &= \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} A(R_i') \\ &= A\left(P_{ak}^{bk}\right). \end{aligned}$$

■

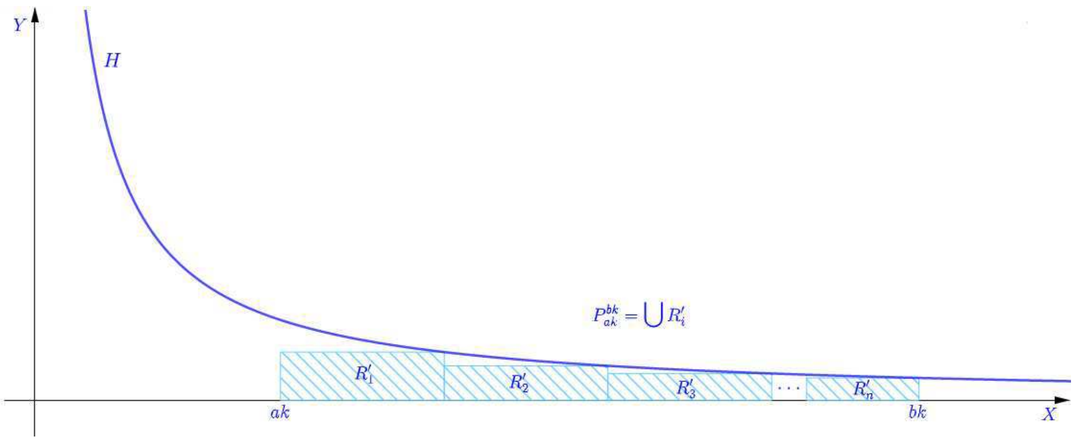
Esquematicamente,

Figura 16 – Área da Região Retangular P_a^b



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 – Área da Região Retangular R_{ak}^{bk}



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando os Lemas 3.2 e 3.3 acima, faremos agora a demonstração do Teorema 3.1.

Demonstração. Seja P_a^b um polígono retangular em H_a^b. A área de P_a^b é uma aproximação por falta de $A\left(H_a^b\right)$. Pelo Lema 3.3, a área de P_a^b é igual a área de P_{ak}^{bk}, que é uma aproximação por falta da área de H_{ak}^{bk}.

Analogamente, se $P_{a'}^{b'}$ é um polígono retangular em H_{ak}^{bk}, usado para aproximar por falta a sua área, pelo Lema 3.3, o polígono retangular correspondente $P_{\frac{a'}{k}}^{\frac{b'}{k}}$ em H_a^b tem a mesma área e é uma aproximação por falta para a área de H_a^b.

Portanto, isso significa que as áreas destas duas regiões são números que possuem exatamente as mesmas aproximações por falta, e desse modo são iguais.

■

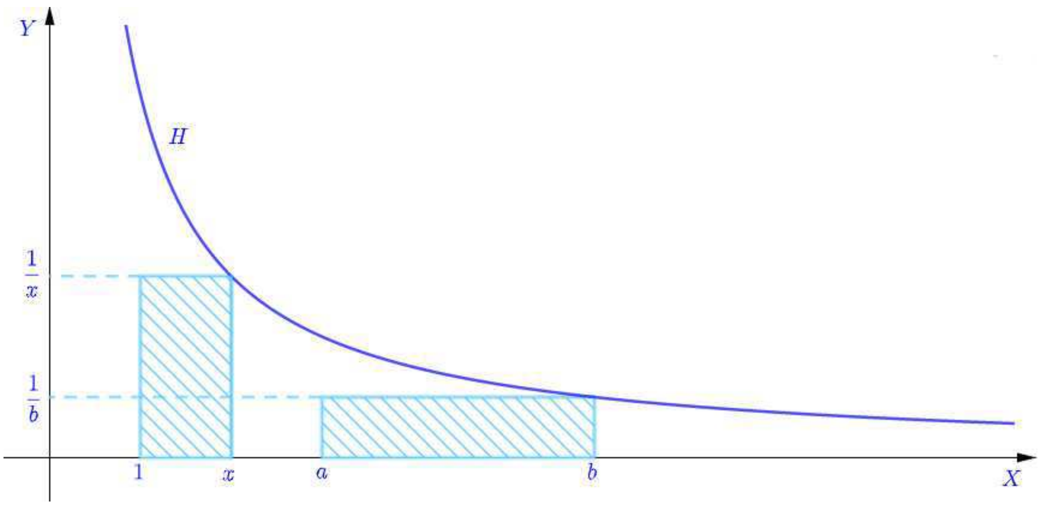
3.1.2 Propriedades Operacionais

Propriedade 1. Decorre do Teorema 3.1 acima que, para qualquer faixa H_a^b, existe uma faixa H_1^x de mesma área.

De fato,

$$A(H_a^b) = A(H_1^{b/a}) = A(H_1^x),\ x = b/a.$$

Figura 18 – Área da faixa $H_a^b = A\left(H_1^x\right)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Propriedade 2. Quando $a < c < b$, tem-se

$$[a, b] = [a, c] \cup [c, b].$$

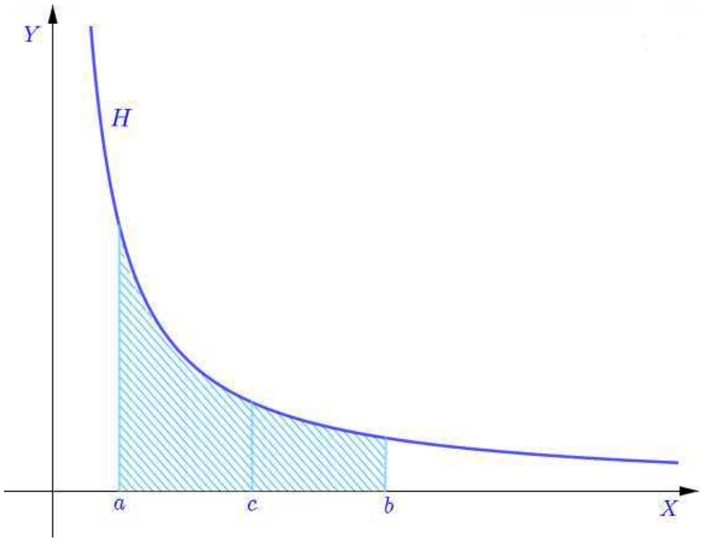
Logo,

$$H_a^b = H_a^c \cup H_c^b$$

e, assim,

$$A\left(H_a^b\right) = A\left(H_a^c\right) + A\left(H_c^b\right).$$

Figura 19 – Área da faixa H_a^b, com $a < c < b$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Fazendo as convenções

$$A\left(H_a^a\right) = 0,\ A\left(H_a^b\right) = -A\left(H_b^a\right), \text{ para } b < a,$$

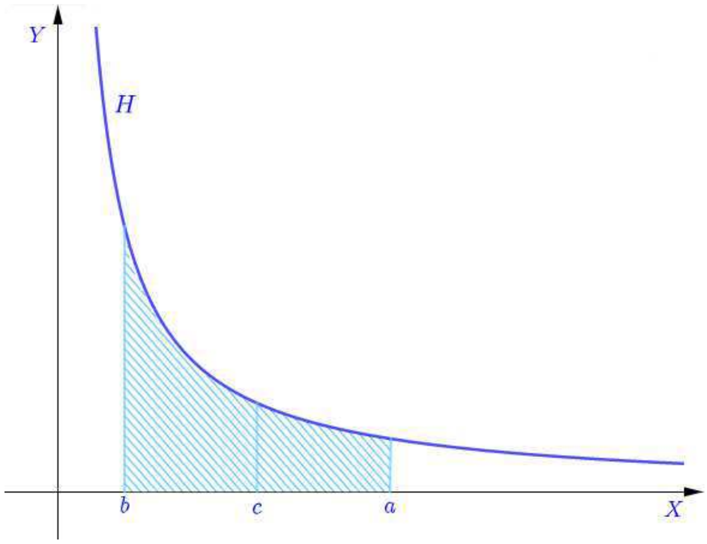
é possível mostrar que para os casos

$$a < b < c;\ b < a < c;\ b < c < a;\ c < a < b;\ c < b < a,$$

ainda é válido que $A\left(H_a^b\right) = A\left(H_a^c\right) + A\left(H_c^b\right)$.

Mostraremos para o caso $b < c < a$, conforme Figura 20 que segue.

Figura 20 – Área da faixa H_a^b, com $b < c < a$



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\begin{aligned} A\left(H_a^b\right) &= -A\left(H_b^a\right) \\ &= -\left(A\left(H_b^c\right) + A\left(H_c^a\right)\right) \\ &= -\left(-A\left(H_c^b\right) - A\left(H_a^c\right)\right) \\ &= A\left(H_a^c\right) + A\left(H_c^b\right). \end{aligned}$$

As demonstrações dos demais casos são análogas à acima, desenvolvida para o caso $b < c < a$.

Propriedade 3. Seja $k > 0$. Para $b < a$, obtemos

$$A\left(H_a^b\right) = A\left(H_{ak}^{bk}\right).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} A\left(H_a^b\right) &= -A\left(H_b^a\right) \\ &= -A\left(H_{bk}^{ak}\right) \\ &= A\left(H_{ak}^{bk}\right). \end{aligned}$$

■

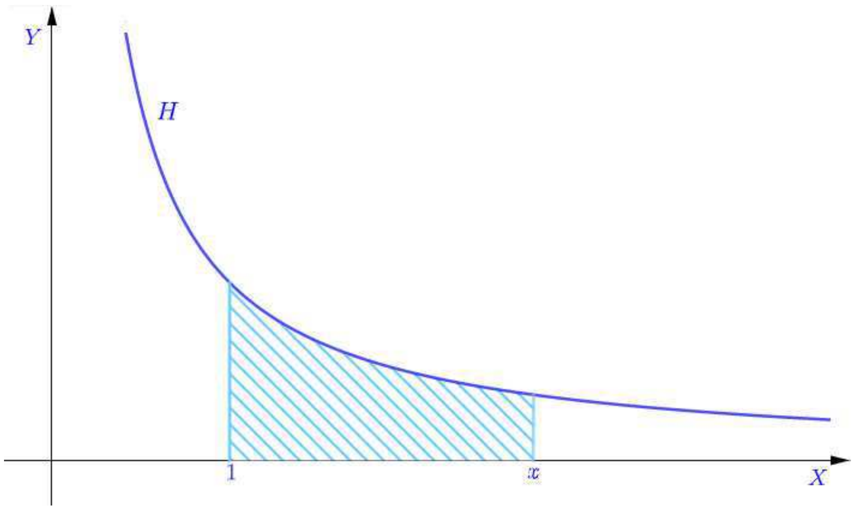
3.2 Definição de Logaritmo Natural

Definiremos a função *Logaritmo Natural* a partir do conceito de área sob a faixa de uma hipérbole e de suas propriedades demonstradas na seção anterior.

Definição 3.3. *Seja x um número real positivo. Definiremos o* ***logaritmo natural de x*** *denotado por $\ln x$, como*

$$\ln x = \begin{cases} A\left(H_1^x\right), & se\ x \geq 1, \\ -A\left(H_x^1\right), & se\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Figura 21 – Área hachurada é igual a $\ln x$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 3.4. *A função* ***Logaritmo Natural*** *(ln) fica definida da seguinte forma*

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \ln x$$

cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ dos números reais positivos.

A cada número real $x > 0$, a função ln faz corresponder seu logaritmo natural, $\ln x$. Algumas consequências imediatas dessa definição são:

1. Para $0 < x < 1$, a função *Logaritmo Natural* assume valores negativos.

2. Para $x = 1$ a função se anula, pois

$$\ln 1 = H_1^1 = 0.$$

3. Decorre diretamente da definição que para $x > 1$, temos $\ln x > 0$.

4. A função $\ln x$ não está definida para $x \leq 0$.

5. A função *Logaritmo Natural* é crescente, pois:

   (i) Para $x > y > 1$, tem-se

$$H_1^x \supset H_1^y \Rightarrow \ln x = A\left(H_1^x\right) > \ln y = A\left(H_1^y\right).$$

   (ii) Para $0 < y < x < 1$, tem-se

$$H_y^1 \supset H_x^1 \Rightarrow A\left(H_y^1\right) > A\left(H_x^1\right) \Rightarrow -A\left(H_y^1\right) < -A\left(H_x^1\right) \Rightarrow \ln y < \ln x.$$

   Portanto, $\ln x$ é crescente.

Teorema 3.4. *O logaritmo de um produto é igual a soma dos logaritmos dos seus fatores, ou seja,*

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \; \forall \; x, y > 0.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= A\left(H_1^{xy}\right) \\ &= A\left(H_1^x\right) + A\left(H_x^{xy}\right) \\ &= A\left(H_1^x\right) + A\left(H_1^y\right) \\ &= \ln x + \ln y. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.5. *Para todo $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ e $b > 0$, temos*

(i) $\ln b^n = n \cdot \ln b.$
(ii) $\ln b^{-n} = -n \cdot \ln b.$
(iii) $\ln b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \cdot \ln b.$

A Função *Logaritmo Natural* é sobrejetiva. Faremos a demonstração a seguir, porém será necessário um Lema, mais alguns fatos sobre os números reais.

Lema 3.6. *Seja $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ a função Logaritmo Natural. Dados arbitrariamente dois números reais $a < b$, existe $x > 0$ tal que $a < \ln x < b$.*

Demonstração do Lema 3.6

(i) Observe que $\ln 2 = A\left(H_1^2\right) > 0$ e seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \dfrac{\ln 2}{b - a}$.

Um tal k existe, pois $\mathbb{N}$ é ilimitado.

(ii) Decorre de (i) que

$$\frac{\ln 2}{k} < b - a. \quad (*)$$

Denotaremos $\dfrac{\ln 2}{k} = p$.

(iii) Os múltiplos inteiros de p, ou seja, np, com $n \in \mathbb{Z}$, decompõem a reta real em intervalos justapostos. Portanto, de $(*)$, pelo menos um múltiplo de p pertence ao intervalo (a, b).

(iv) Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a < np < b$. Então,

$$np = n \cdot \frac{\ln 2}{k} = \frac{n}{k} \cdot \ln 2 = \ln 2^{\frac{n}{k}}.$$

(v) Concluímos que para $x = 2^{\frac{n}{k}}$, tem-se $a < \ln x < b$.

■

Para demonstração do próximo Teorema, utilizaremos alguns fatos sobre números reais.

Decorre da construção dos números reais, consultada em (LIMA, 2013), que se $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \cdots$$

onde α_0 é a parte inteira e α_n pode assumir os valores $0, 1, 2, \ldots, 9$. Daí, para todo $n > 0$, o número

$$\beta_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}$$

é tal que

$$\beta_n \leq \alpha$$

e

$$\alpha - \beta_n < \frac{1}{10^n}.$$

. Sejam então $x < \alpha$ e $n \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{10^n} < \alpha - x.$$

Portanto,

$$\alpha - \beta_n < \frac{1}{10^n} < \alpha - x,$$

e, assim,

$$\beta_n > x.$$

Definição 3.5. *Dizemos que uma função f é* ***ilimitada superiormente*** *se dado $M > 0$ existe x no domínio de f tal que $f(x) > M$.*

Lema 3.7. *A função Logaritmo Natural é ilimitada superiormente.*

Demonstração. Dado $M > 0$, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{M}{\ln 2}.$$

Ou seja, $n \cdot \ln 2 > M$, ou

$$\ln 2^n > M.$$

Finalmente, basta considerarmos $x = 2^n$. ∎

Teorema 3.8. *A função Logaritmo Natural é sobrejetiva, isto é, dado que qualquer número real p, existe sempre um (único) número real positivo q tal que $\ln q = p$.*

Demonstração. Demonstremos inicialmente para um número real positivo. Dado $p > 0$ determinaremos $q > 0$ tal que $\ln q = p$. Encontraremos a representação decimal de q dada por

$$q = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Em seguida, mostraremos que $\ln q = p$.

(i) Determinação de a_0. Como a função ln é crescente e ilimitada, seja $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a_0 + 1$ é o menor inteiro tal que

$$\ln(a_0 + 1) > p.$$

Então

$$\ln a_0 \leq p < \ln(a_0 + 1).$$

(ii) Determinação de a_1. Considerando os números

$$a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, \ldots, a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1,$$

devem existir dois números consecutivos β_1 e $\beta_1 + \frac{1}{10}$ desta sequência, tais que

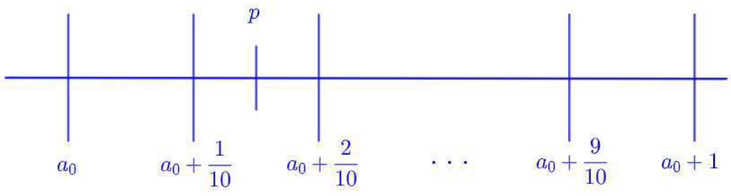
$$\ln \beta_1 \leq p < \ln\left(\beta_1 + \frac{1}{10}\right),$$

ou seja, existe a_1 inteiro, $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que

$$\beta_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$$

e

$$\ln \beta_1 \leq p \leq \ln\left(\beta_1 + \frac{1}{10}\right).$$



(iii) Determinação de a_2. Analogamente, entre os números

$$\beta_1, \beta_1 + \frac{1}{10^2}, \beta_1 + \frac{2}{10^2}, \ldots, \beta_1 + \frac{9}{10^2}, \beta_1 + \frac{1}{10},$$

devem existir dois números β_2 e $\beta_2 + \frac{1}{10^2}$ desta sequência, tais que

$$\ln \beta_2 \leq p < \ln\left(\beta_2 + \frac{1}{10^2}\right),$$

ou seja, existe a_2 inteiro, $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que, pondo

$$\beta_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2},$$

tem-se

$$\ln \beta_2 \leq b < \ln\left(\beta_2 + \frac{1}{10^2}\right).$$

(iv) Prosseguindo analogamente, obtemos

$$\beta_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

tal que

$$\ln \beta_n \leq p < \ln\left(\beta_n + \frac{1}{10^n}\right).$$

Seja $q = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$

(v) Mostraremos que devemos ter $\ln q = p$. Supondo que $\ln q < p$, pelo Lema 3.6 existe $x > 0$ tal que

$$\ln q < \ln x < p.$$

(vi) Como ln é crescente, pelo item (v) temos $q < x$.

(vii) De (vi), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x - q > \frac{1}{10^n}$, ou seja, $q + \frac{1}{10^n} < x$.

$(viii)$ Portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta_n + \frac{1}{10^n} \leq q + \frac{1}{10^n} < x.$$

Como ln é crescente, pela desigualdade acima, obtemos

$$\ln\left(\beta_n + \frac{1}{10^n}\right) < \ln x.$$

Por outro lado, pelo item (iv),

$$p < \ln\left(\beta_n + \frac{1}{10^n}\right)$$

e, portanto, $p < \ln x$, contrariando o item (v).

(ix) Analogamente, supondo $\ln q > p$, pelo Lema 3.6, existe $x > 0$ tal que

$$\ln q > \ln x > p.$$

Com argumentação similar ao item $(viii)$, concluímos que $\ln q < p$, mas isso é contraditório.

Pela tricotomia dos números reais, temos $\ln q = p$, pois não pode ocorrer $\ln q < p$ ou $\ln q > p$.

Demonstremos agora a sobrejetividade de f para um número real negativo.

Para $p < 0$, temos $-p > 0$, logo pelo que foi demonstrado acima, existe $q > 0$ tal que

$$\ln q = -p.$$

Pela propriedade $n \cdot \ln x = \ln x^n$ segue que

$$\ln q^{-1} = -\ln q = -(-p) = p.$$

Portanto, f é sobrejetiva. ■

A seguir, faremos a demonstração do Teorema Fundamental da Função *Logaritmo Natural*. Tal demonstração será feita sequencialmente nos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e por fim nos irracionais. Para tal, iremos utilizar a seguinte definição:

Se $0 < b \neq 1$, $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, define-se $b^x = y$, onde $y > 0$ satisfaz $\ln y = x \cdot \ln\ b$.

Teorema 3.9. *Existe $a > 0$ tal que $\ln a^x = x$, $\forall x > 0$.*

Demonstração. Como a função logarítmica é sobrejetiva, existe $a > 0$ tal que $\ln a = 1$.

(i) para $m \in \mathbb{N}$, é válido que

$$\begin{aligned} \ln a^m &= \ln \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m\ fatores} \\ &= \underbrace{\ln a + \ln a + \ln a + \ldots + \ln a}_{m\ parcelas} \\ &= 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \\ &= m. \end{aligned}$$

(ii) Pelo item (i) para $-m$, com $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} m + \ln(a^{-m}) &= \ln a^m + \ln a^{-m} \\ &= \ln(a^m \cdot a^{-m}) \\ &= \ln a^0 \\ &= \ln 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\ln(a^{-m}) = -m.$$

(iii) Pelo item (ii) para $r \in \mathbb{Q}$; $r = \frac{m}{n}$, em que $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} n \cdot \ln\,(a^r) &= \underbrace{\ln a^r + ... + \ln a^r}_{n\ parcelas} \\ &= \ln \underbrace{(a^r \cdot a^r \cdot a^r \cdot ... \cdot a^r)}_{n\ fatores} \\ &= \ln((a^r)^n) \\ &= \ln a^{rn} \\ &= \ln a^m \\ &= m. \end{aligned}$$

Logo,

$$n \cdot \ln a^r = m \Rightarrow \ln a^r = \frac{m}{n} = r.$$

(iv) Para $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, por definição

$$\ln a^x = x \cdot \ln a = x \cdot 1 = x.$$

■

O número cujo logaritmo natural é igual a 1 é um número irracional e doravante será denotado por e. Ele é dito número de Euler. Tem-se $e \approx 2,718281828$. Não é o escopo de nosso trabalho explicitar suas propriedades. Para mais detalhes desse número consultar o capítulo 8 do livro (LIMA, 2016), bem como (MAOR, 2003), que explana sobre a história deste número.

3.3 Função Exponencial

Na construção da função exponencial, utilizaremos o fato de que a função logarítmica é sobrejetiva.

Definição 3.6. *Pela bijetividade da função Logaritmo Natural, existe uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *inversa da função Logaritmo Natural. Do Teorema 3.9, deduzimos que* $f(x) = e^x$*, onde e é o* ***número de Euler****.*

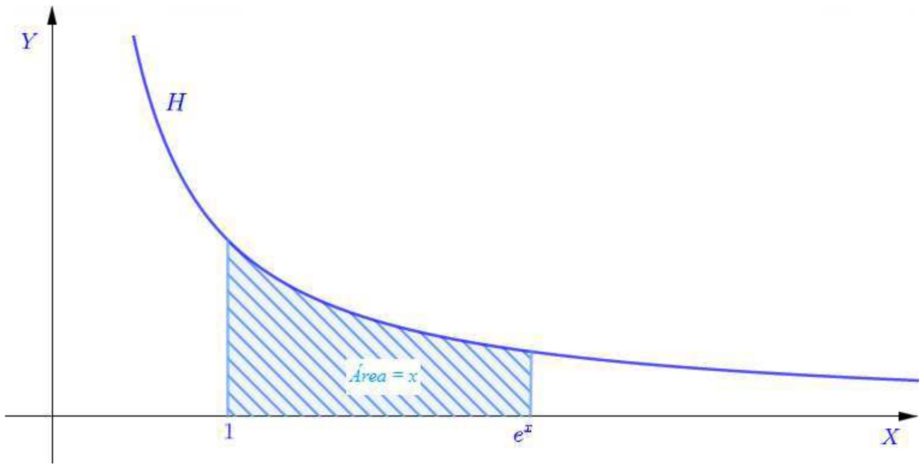
Portanto, temos a equivalência

$$x = \ln y \Leftrightarrow y = e^x. \quad (**)$$

A função $f(x) = e^x$ lê-se *função exponencial de base e*.

De $(**)$, segue que $x = \ln y$ é o expoente ao qual deve-se elevar a base e para obter y.

Figura 22 – Representação da área de medida x



Fonte: Elaborado pelo Autor.

3.3.1 Propriedades da Função Exponencial

Listaremos a seguir algumas propriedades decorrentes da Definição 3.6:

(i) $e^{\ln x} = x, \forall\, x > 0.$

(ii) $\ln e^x = x, \forall\, x \in \mathbb{R}.$

(iii) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}.$

(iv) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$

(v) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}.$

(vi) $e^{k \cdot x} = (e^k)^x.$

A título de exemplo, demonstraremos o item (iv).

Demonstração. Como

$$\ln(e^x \cdot e^y) = \ln e^x + \ln e^y = x + y,$$

$e^x \cdot e^y$ é o número real cujo logaritmo natural é igual a $x + y$. Decorre disto e da definição 3.6 que

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

■

3.4 Logaritmos em Outras Bases

Dizemos que a função *logaritmo natural* é de base e, devido a $(**)$. Podem ser consideradas funções logarítmicas em outras bases, porém todas elas diferem somente por um fator multiplicativo.

Definição 3.7. *Dado* $0 < a \neq 1$. *Dizemos que* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *é uma função logarítmica de base a se* $f(x) = \log_a x$, *onde*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Decorre imediatamente desta definição e das propriedades dos logaritmos naturais as seguintes propriedades de $\log_a x$.

(i) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\forall\ x, y > 0$.
(ii) $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x$ - $\log_a y$, $\forall\ x, y > 0$.
(iii) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$, $\forall\ x > 0,\ r \in \mathbb{R}$.
(iv) Para $0 < \alpha \neq 1$, $\log_\alpha x = \dfrac{\ln a}{\ln \alpha} \cdot \log_a x$.

Demonstraremos, a título de exemplo, a propriedade (iii) listada acima. Para demonstração das demais, basta seguir os procedimentos de maneira análoga aos utilizados a seguir. De fato,

$$\begin{aligned} \log_a x^r &= \frac{\ln x^r}{\ln a} \\ &= r \cdot \frac{\ln x}{\ln a} \\ &= r \cdot \log_a x. \end{aligned}$$

Definição 3.8. *Definimos por função exponencial a qualquer função* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, *onde* $\varphi(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, *para algum* $0 < a \neq 1$.

Observe que:

(i) $f(x) = \log_a x$ é invertível, pois $\ln x$ o é;
(ii) $\log_a a = \dfrac{\ln a}{\ln a} = 1$. Daí, $\log_a a^x = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto g(x) = a^x$$

é a inversa de f. Ela é dita *Função Exponencial de Base* a. Tem-se

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Da Definição 3.8, decorrem as propriedades:

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
(ii) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
(iii) $a^{(k \cdot x)} = (a^k)^x$.

Vamos demonstrar a propriedade do item (iii), e para isto vamos utilizar logaritmos.

$$\log_a[(a^k)^x] = x \cdot \log_a(a^k) = k \cdot x.$$

Logo

$$a^{k \cdot x} = (a^k)^x.$$

4 Aplicações da Escala Logarítmica para o Estudo de Certas Grandezas

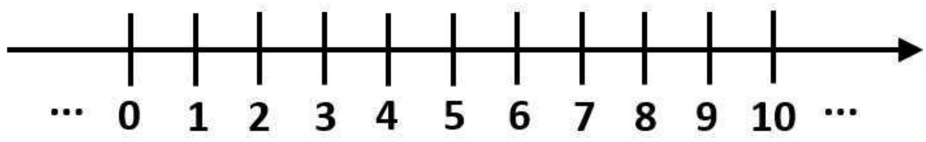
Neste capítulo, discorreremos sobre grandezas cuja a representação em uma escala logarítmica é mais adequada do que aquela em escala aritmética. A partir dessa etapa, desenvolveremos ideias sobre como apresentar o conteúdo aos discentes do Ensino Médio.

Dentre os possíveis significados da palavra escala encontrados em (HOUAISS; VILLAR, 2011), contemplamos os seguintes:

- relação entre as proporções de uma representação e as do objeto representado <*escala de um mapa*>;
- porto ou lugar determinado em que transportes coletivos param para abastecimento, embarque ou desembarque de carga ou passageiros etc.;
- tabela de horários de trabalho;
- série de graus ou níveis, dispostos segundo a importância de cada um <*escala de valores*>;
- **e. Celsius** escala de temperatura baseada em dois pontos fixos: o de fusão do gelo e o de ebulição da água, aos quais se atribuem os valores 0 e 100, respectivamente, estando ambos sob pressão de uma atmosfera;
- **e. Richter** escala que mede o grau de intensidade dos tremores de terra.

A definição de escala a qual no referimos em nosso texto é aquela cuja representação gráfica é utilizada na matemática para mostrar a ordem e a magnitude dos números reais. A reta numérica clássica, da Figura 23 a seguir, que comumente é utilizada para ordenar e comparar números reais, é um bom exemplo ao que estamos nos referindo.

Figura 23 – Reta Numérica

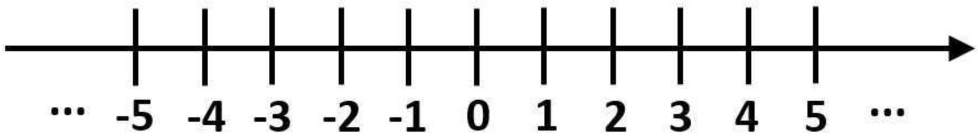


Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1 Escala Linear

Na reta numérica, existe uma diferença de exatamente uma unidade de comprimento entre os números 0 e 1. Essa mesma distância está entre os números 10 e 11, ou -2 e -1. Independentemente da localização na reta, a distância que separa um número x e $x + p$, $p > 0$ fixo, é invariável e não sofre alterações. As escalas lineares baseiam-se nessa invariância e são muito úteis para medições no mundo real. Podemos usar como exemplos as trenas utilizadas na engenharia civil e a régua escolar.

Figura 24 – Reta Numérica Padrão



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um outro exemplo prático: digamos que traçamos um gráfico onde esteja representado o tempo gasto por cada participante em uma prova de marcha atlética na categoria infanto-juvenil (15 a 16 anos). Podemos rotular marcas de escala igualmente espaçadas em um eixo como 0, 5, 10, 15, 20, etc. O nome do eixo pode ser "tempo (em minutos)". Neste caso, quando movemos uma marca para a direita, sempre adicionamos 5 minutos, conforme Figura 25 abaixo.

Figura 25 – Eixo em Escala Linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

Digamos que um atleta gastou doze minutos para completar a prova. Indicaremos em nosso gráfico dois quintos do comprimento a partir de 10 entre as marcas de 10 e 15 minutos.

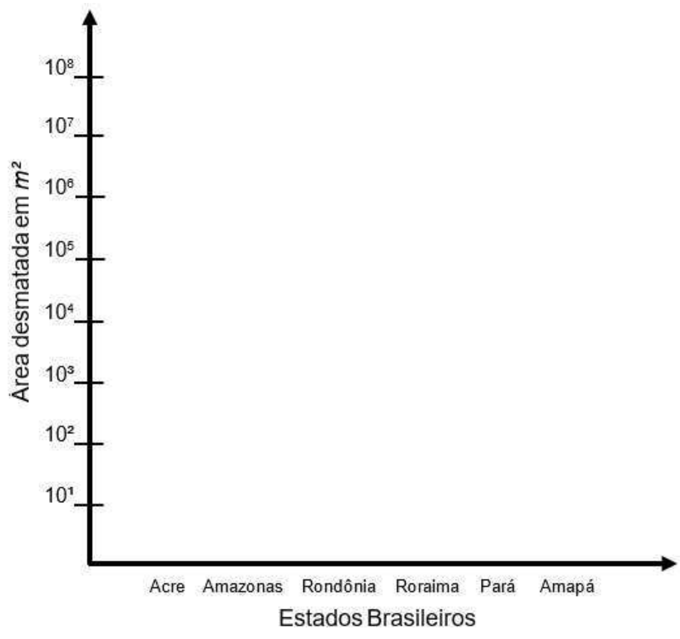
Portanto, destacamos que a escala linear é uma ferramenta bastante utilizada em diversas áreas do conhecimento, além das já citadas no início desta seção, tais como a física, economia, matemática e estatística, entre outras; e tais utilidades se dão principalmente pelo fato de sua simples e fácil compreensão.

4.2 Escala Logarítmica

Uma escala logarítmica apresenta diferenças significativas em relação a uma escala linear. Nesse tipo de escala, uma distância fixa entre dois pontos no eixo separa duas potências de uma determinada base $b > 0$. Portanto, uma escala logarítmica é aumentada ou diminuída por um fator específico.

As escalas logarítmicas são amplamente utilizadas em diversas áreas do conhecimento, desde as ciências e engenharias até a economia e finanças. Elas permitem representar fenômenos que possuem um amplo conjunto de valores de forma mais compacta e visualmente intuitiva. Por exemplo, a energia liberada durante um terremoto, a intensidade das ondas sonoras, uma área vasta de floresta, a quantidade de células em um organismo multicelular ou o número de moléculas no ar. Imaginemos que estejamos trabalhando com um projeto de pesquisa sobre a quantidade de metros quadrados desmatados na floresta amazônica e haja a necessidade de criar uma escala simplificada para representar a área desmatada nos diferentes estados que sejam cobertos pelo bioma da amazônia. Podemos decidir por usar uma escala na qual marquemos pontos no eixo que separem potências inteiras de 10, ou seja, cada ponto no eixo representa uma potência de base 10 em metros quadrados desmatados, conforme podemos observar no eixo vertical da Figura 26 que segue.

Figura 26 – Gráfico com Eixo em Escala Logarítmica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, podemos representar de forma simplificada a quantidade de área desmatada nos diferentes estados utilizando essa escala, o que facilita a comparação e análise dos dados em nosso projeto de pesquisa imaginário.

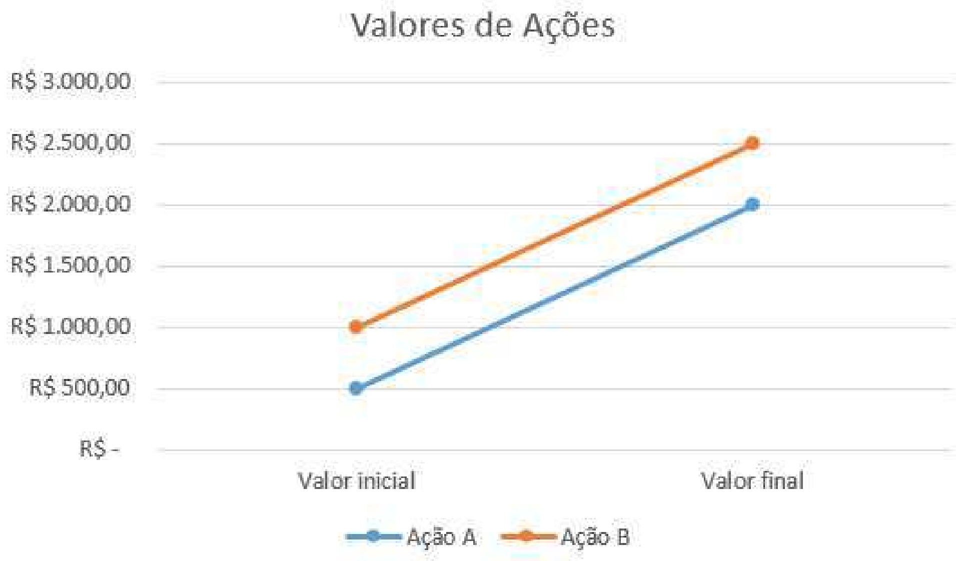
Há duas razões essenciais para a utilização de escalas logarítmicas em tabelas e gráficos. A primeira razão se dá pelo fato de podermos representar dados que apresentam uma variação em ampla faixa de magnitude, comprimindo seus valores, tornando mais fácil a visualização e a comparação entre eles. Ao utilizar uma escala logarítmica, a amplitude dos valores é distribuída de modo mais equilibrado, tornando a visualização mais clara e facilitando a comparação entre diferentes pontos. A segunda razão é a variação percentual. Nesse caso, analisar a variação relativa dos valores em determinadas situações do cotidiano é mais pertinente do que a análise da variação absoluta. Uma escala logarítmica permite que a variação percentual seja visualizada de maneira mais consistente, pois os incrementos ao longo da escala são proporcionais em termos percentuais. Isso pode ser especialmente útil ao lidar com fenômenos que seguem uma lei de potência ou que apresentam um crescimento exponencial, onde a variação relativa é mais significativa do que a variação absoluta. Essas são as duas razões principais pelas quais as escalas logarítmicas são utilizadas em tabelas e gráficos, proporcionando uma representação visual mais adequada e facilitando a interpretação dos dados.

4.3 Algumas motivações para se aprofundar nos estudos das escalas logarítmicas

Atual e frequentemente assistimos anúncios em plataformas digitais ou em canais de TV em que os principais produtos oferecidos são “aprender a investir no mercado de ações”, “conquistar sua independência financeira”, “conquistar o seu primeiro milhão de reais” etc. Por esse motivo, nesta seção pretendemos fazer com que o leitor consiga realizar uma observação mais aprofundada de gráficos que são normalmente utilizados no mercado financeiro.

Inicialmente, observemos os dois gráficos a seguir, onde ilustra-se os comportamentos das ações A e B, com investimento inicial de $R\$ \ 500,00$ e $R\$ \ 1.000,00$, respectivamente.

Figura 27 – Gráfico de Ações em Escala Linear



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Gráfico de Ações em Escala Logarítmica

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 27 podemos visualizar a variação da projeção dos valores das ações A e B ao longo do tempo e notar que as linhas mantêm-se a uma distância constante entre si. Isto ocorre porque a variação entre os valores iniciais e finais é de $R\$\ 1.500,00$ em cada uma delas. Já no gráfico da Figura 28 o comportamento muda, o que pode nos levar em um primeiro momento a pensar que tais gráfico representam ações distintas daquelas na Figura 27 . Conforme percebemos ao realizarmos a leitura dos gráficos, o eixo que representa os valores das ações na Figura 28 apresenta estrutura distinta daquele na Figura 27. O primeiro é um eixo em escala linear e o segundo é um eixo em escala logarítmica de base 10.

Pelo comportamento do gráfico da Figura 28, é fácil perceber que o investimento na ação A é mais vantajoso em comparação com o investimento na ação B. Isto se dá porque o gráfico em escala logarítmica evidencia a variação percentual dos preços, enquanto que o gráfico em escala linear apresenta uma variação absoluta dos preços.

Em outro caso, digamos que você se decida pesquisar sobre algumas possibilidades de investimento, e dentre as opções com potencial crescimento para 2023 está o ativo do Banco do Brasil - BBSA3. Os gráficos 29 e 30 a seguir, foram plotados no site *TradingView*[1] e mostram dados no mesmo período do BBSA3. A diferença é que o primeiro é representado em escala linear e o segundo em escala logarítmica.

Figura 29 – Gráfico da Ação BBAS3 em Escala Linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

[1] <https://br.tradingview.com/>.Acesso em 07/04/2023

Figura 30 – Gráfico da Ação BBAS3 em Escala Logarítmica

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos destacar algumas características que aparecem nos gráficos 29 e 30

$*$ No gráfico em escala linear uma variação de preços de $R\$ \ 5,00$ a $R\$ \ 10,00$, por exemplo, corresponde a um aumento de $R\$ \ 5,00$. Analogamente, uma variação de $R\$ \ 25,00$ a $R\$ \ 30,00$. Ou seja, neste tipo de escala os *tokens* (ícones em vermelho e verde) possuem medidas de crescimento iguais.

$**$ No gráfico em escala logarítmica, as mesmas variações exemplificadas anteriormente correspondem, respectivamente, a variações de 100% e 20%, ou seja, os ícones não possuem o mesmo padrão de crescimento.

$***$ É bastante perceptível que o gráfico da figura 30 mostra um comportamento do rendimento do ativo durante todo o período sem grandes oscilações nas medidas dos tokens. A conclusão que podemos obter com esse tipo de análise é que investir neste ativo é um procedimento seguro, pois observa-se que o mesmo tem crescido no longo prazo e as oscilações no gráfico plotado em escala logarítmica facilitam na tomada de decisão sobre a possibilidade de investimento no mesmo.

4.4 Escala Richter

As imagens que compõem a Figura 31 a seguir foram obtidas a partir de reportagens contidas em sites da internet após pesquisa no buscador Google.com, entre fevereiro e junho de 2023. O texto da pesquisa foi: "Terremoto na Turquia". Mas o que significa o título *"Terremoto de magnitude 7,8"* na imagem a seguir? O trecho da frase que pode nos despertar curiosidade é “magnitude 7,8”, pois, como uma magnitude relativamente pequena pode causar tantos danos, acarretando em tantas mortes e feridos quanto aquelas vistas nos noticiários da TV, rádio e internet?

Figura 31 – Notícias Sobre Terremotos


BBC NEWS BRASIL

Notícias Brasil Internacional Economia Saúde Ciência Tecnologia Vídeos

Terremoto de magnitude 6,4 atinge área na Turquia já devastada por tremores

REUTERS

Família tenta se proteger durante novo tremor na Turquia

CNN BRASIL — ASSISTA AGORA AO VIVO

Terremoto de magnitude 7,8 deixa mais de 2.300 mortos na Turquia e na Síria

Um dos terremotos mais fortes a atingir a região em um século tirou os moradores de suas camas por volta das 4h da manhã desta segunda-feira

2 de 17

O terremoto ocorreu a 23 km a leste de Nurdagi, na província de Gaziantep, na Turquia, a uma profundidade de 24,1 km. É um dos mais fortes a atingir a região me mais de um século, segundo o Instituto Geológico dos Estados Unidos.

Crédito: Getty Images

g1 MUNDO

fique por dentro Febre maculosa Feriados de 2023 Carro com desconto Guia de compras

Terremoto de magnitude 7,8 atinge a Turquia e Síria e mata milhares

Tremor, o maior na região desde 1939, durou mais de um minuto e meio, gerou dezenas de réplicas e também foi sentido em Israel, no Líbano, no Iraque e no Chipre. Milhares de pessoas ainda estão desaparecidas.

Por g1

05/02/2023 23h24 · Atualizado há 4 meses

g1 MUNDO

fique por dentro Febre maculosa Feriados de 2023 Carro com desconto Guia de compras

Terremoto de magnitude 7,8 na Turquia é o mais forte desde 1939

Mais de 3 mil pessoas morreram e milhares ficaram feridas devido ao abalo sísmico que atingiu também a Síria na manhã desta segunda. Entenda por que fatores como a profundidade do tremor, suas réplicas e a quantidade de energia liberada podem explicar a destruição.

Por Roberto Peixoto, g1

06/02/2023 09h26 · Atualizado há 4 meses

Fonte: Google.com

Antes de mais nada deve-se explicar que esse tipo de título de reportagem se baseia na escala Richter, escala logarítmica mais conhecida e utilizada para determinar a intensidade de terremotos, a qual foi desenvolvida no Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech) por Charles F. Richter e Beno Gutenberg, em 1935. Usualmente quando é apresentada, é introduzida uma tabela contendo intervalos de magnitudes e alguns dos possíveis efeitos que terremotos com magnitudes compreendidas entre os intervalos descritos podem causar. Assim, mostra-se uma tabela do tipo abaixo, sendo raras aquelas vezes em que é apresentado aos leitores a fórmula desenvolvida por Richter e Gutenberg para se determinar a magnitude de um terremoto.

Tabela 2 – Tabela de efeitos dos terremotos

Magnitude Richter	***Efeitos***
Menor que 3,5	Geralmente não sentidos, mas gravados.
Entre 3,5 e 5,4	Às vezes sentidos, mas raramente causam danos
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causam pequenos danos a prédios bem construídos, mas podem danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Podem ser destrutivos em áreas em um raio de até 100km do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grandes terremotos. Podem causar sérios danos numa grande faixa.
8,0 ou mais	Enormes terremotos. Podem causar grandes danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

A fórmula desenvolvida por Richter e Guntenberg é

$$M = \log_{10}\left(\frac{A \cdot \Delta t^3}{1,62}\right),$$

onde

- M é a intensidade do terremoto;
- A é a amplitude das ondas (em milímetros) medida com um sismógrafo[2];
- Δt é o intervalo de tempo (em segundos) entre a onda superficial (S) e a onda de pressão máxima (P).

Um outro fato a se observar é a energia dissipada, pois é ela a causadora das possíveis destruições após um terremoto, e para isto devemos considerar a fórmula

$$E = A^{\frac{3}{2}}.$$

A título de exemplo, vamos verificar (através de cálculo) quais as consequências na variação um grau a mais na magnitude de um terremoto. Para isto, basta manipularmos a fórmula desenvolvida por Richter e Gutemberg descrita acima e considerando A_M como a amplitude para magnitude M, obtemos

$$M = \log_{10}\left(\frac{A_M \cdot \Delta t^3}{1,62}\right) \Rightarrow \frac{A_M \cdot \Delta t^3}{1,62} = 10^M \Rightarrow A_M = \frac{10^M \cdot 1,62}{\Delta t^3}. \qquad (i)$$

Ao considerarmos o aumento de um grau na magnitude do terremoto, deduzimos

$$A_{M+1} = \frac{10^{M+1} \cdot 1,62}{\Delta t^3} \Rightarrow A_{M+1} = 10 \cdot \frac{10^M \cdot 1.62}{\Delta t^3} \overset{(i)}{\Rightarrow} A_{M+1} = 10 \cdot A_M.$$

[2] É o aparelho que registra os movimentos do solo.

Ou seja, um aumento de 1 grau na escala da magnitude de um terremoto, reflete numa amplitude multiplicada por 10, causando um maior alcance. Portanto, se considerarmos uma variação de 6 para 9 graus na escala de magnitude de um terremoto, teremos uma amplitude multiplicada por $10^3 = 1.000$ vezes, o que pode causar efeitos muito mais devastadores.

Analogamente, se considerarmos E_M a energia dissipada para magnitude M, para a variação de 1 (uma) unidade de grau na escala Richter, a energia dissipada pode ser calculada da seguinte forma:

$$E_M = (A_M)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow E_{M+1} = (A_{M+1})^{\frac{3}{2}} = (10 \cdot A_M)^{\frac{3}{2}} = 10^{\frac{3}{2}} \cdot (A_M)^{\frac{3}{2}} \approx 31,6 \cdot E_M.$$

Portanto, ao compararmos dois terremotos com a variação de 1 unidade de grau na escala Richter, a energia dissipada em um deles é capaz de causar danos de aproximadamente 32 vezes maior do que aquela dissipada no outro, o que de fato é assustador.

4.5 Escala de Decibéis

O som é uma parte essencial da vida humana e está presente em diversas atividades como a música, a engenharia, o meio ambiente, a saúde etc. Ele pode nos proporcionar sensações de tranquilidade, bem como de estresse. Sendo assim, a necessidade de conhecer e saber quantificar a quantidade de som que o nosso sistema auditivo consegue suportar é frequente. No que se refere à medidas sonoras, é comum nos depararmos com a sigla *dB*, que é a abreviação de decibel.

Segundo (CUNHA, 2016), o decibel tem sua origem em métodos empregados para quantificar a perda de sinal em circuitos telegráficos e telefônicos, tendo sido os estudos sobre esta escala desenvolvidos pelo cientista escocês e inventor do telefone, Alexander Graham Bell (1847-1922). Ele percebeu que a variação de som que o ouvido pode sentir não acompanha uma escala linear e sim uma escala logarítmica. Em física a intensidade do som é definida como a potência sonora recebida por unidade de área de uma superfície, ou seja, é uma medida que descreve a quantidade de energia que uma onda sonora transporta por unidade de área em uma determinada direção. Essa grandeza é fundamental para entender a percepção da amplitude ou volume do som por nossos ouvidos. A intensidade do som está diretamente relacionada com a amplitude da onda sonora. Quanto maior a amplitude, mais energia a onda transporta e, consequentemente, maior será a intensidade do som.

A escala de decibéis é uma medida baseada na potência em watts. O limite mais baixo de som audível pelo ouvido humano tem uma intensidade de aproximadamente 10^{-12} watts por metro quadrado $(\frac{W}{m^2})$. Por outro lado, o ouvido humano é capaz de detectar sons com uma intensidade tão alta quanto $10^2\ \frac{W}{m^2}$. Devido à ampla variação entre esses extremos, é conveniente utilizar uma medida que se baseie em potências de 10. Essa medida relativa da intensidade sonora é chamada de decibel (dB).

Uma fórmula que relaciona a intensidade sonora N em $\frac{W}{m^2}$ à sua intensidade relativa D em decibéis é expressa da seguinte maneira:

$$D = 10 \log \left(\frac{N}{10^{-12}} \right). \tag{4.1}$$

A seguir, apresentamos uma tabela que indica a intensidade do som em $\frac{W}{m^2}$, assim como os valores correspondentes em decibéis para alguns sons comuns.

Figura 32 – Tabela de Intensidades do Som e suas Respectivas Intensidades Relativas

.

Intensidade do som (watts/ metro quadrado)		Intensidade relativa (decibéis)
10^2	Espingarda	140
10^1	Martelete de pedra	130
10^0	Trovão	120
10^{-1}	Sirene de ambulância	110
10^{-2}	Escola de Dança	100
10^{-3}	Furadeira elétrica	90
10^{-4}	Cortador de grama	80
10^{-5}	Secador de cabelo	70
10^{-6}	Conversa normal	60
10^{-7}	Geladeira	50
10^{-8}	Conversa silenciosa	40
10^{-9}	Biblioteca	30
10^{-10}	Sussurrar a 1,5 m	20
10^{-11}	Respiração normal	10
10^{-12}	Quase inaudível	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que à medida que os valores de decibéis na coluna da direita aumentam em 10, as intensidades correspondentes na coluna da esquerda são multiplicadas por 10. Assim, se o número de decibéis aumenta em 20, a intensidade do som se multiplica por $10 \cdot 10$ ou 10^2. Se você aumentar o número de decibéis por 40, você multiplica os watts por metro quadrado por $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, ou 10^4.

Em geral, um aumento de n dB multiplica a intensidade do som por $10^{\frac{n}{10}}$.

Exemplo 2. *Quantas vezes mais intenso é um som de 90 decibéis em relação a um som de 60 decibéis?*

Solução: Utilizando a expressão $10^{\frac{n}{10}}$*, afere-se tal aumento na intensidade. Como* $90 - 60 = 30$*, a intensidade do som é ampliada em* $10^{\frac{30}{10}} = 10^3 = 1000\frac{W}{m^2}$*. Portanto,* *um som de 90 decibéis é 1.000 vezes mais intenso em comparação com um som de 60 decibéis.*

Exemplo 3. *(exercicios.brasilescola.uol.com.br) Durante um show, a intensidade sonora nas proximidades do palco era de aproximadamente* $1\frac{W}{m^2}$*. Sabendo que a intensidade mínima para a audição humana é de* $10^{-12}\frac{W}{m^2}$*, determine o nível de intensidade sonora na região do palco.*

Solução: Da fórmula 4.1, obtemos

$$\begin{aligned} D &= 10\log(\frac{1}{10^{-12}}) \\ &= 10(\log 1 - \log 10^{-12}) \\ &= 10(\log 1 + 12\log 10) \\ &= 10(0 + 12) \\ &= 10 \cdot 12 \\ &= 120\ dB. \end{aligned}$$

Portanto, o nível de intensidade sonora na região do palco é de 120 dB.

Assim, os valores em decibéis aparentam ser lineares somente à primeira vista. A título de ilustração, do exemplo 1 acima, concluímos que o ouvido percebe um som de 90 decibéis em comparação com um som inicial de 60 decibéis como um som 1.000 vezes mais intenso. Adicionalmente, utilizando a fórmula 4.1 acima, se você conhece a intensidade de um som, pode encontrar sua intensidade relativa em decibéis.

Apresentou-se assim mais uma aplicação das escalas logarítmicas em alguns contextos do nosso cotidiano, em virtude do som ser algo presente na vida das pessoas, e que os estudos sobre tal objeto do conhecimento tem sido frequentemente aprofundado, haja vista que, conforme alguns estudos, a exposição prolongada ou repetida a sons com intensidade igual ou superior a 85 decibéis, pode causar perda permanente da audição, tornando-se assim um problema de saúde.

4.6 Escala de Potencial Hidrogeniônico - pH

A medida quantitativa da acidez ou basicidade de soluções aquosas e outras soluções líquidas é chamada de *Potencial Hidrogeniônico*, habitualmente conhecido por pH. O termo, amplamente usado em química, biologia e agronomia, é uma medida que representa os valores de concentração de íons hidrônio $[H^+]$ em uma solução.

Tal concentração normalmente é expressa numericamente em uma escala com intervalo de 0 a 14, onde 7 é a medida de uma solução considerada neutra, como é o caso da água pura que possui um pH igual a 7 neste intervalo, enquanto uma solução com pH menor que 7 é classificada como ácida e uma solução com pH maior que 7 é considerada básica ou alcalina. Tais valores podem ser precisamente medidos utilizando um instrumento conhecido como peagômetro.

Figura 33 – Escala de pH e o grau de acidez de algumas substâncias comuns.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

É importante observar que quanto menor o valor do pH, mais ácida será a solução. Isso ocorre devido à natureza logarítmica da escala de pH, onde o mesmo é definido como o negativo do logaritmo da concentração dos íons.

A escala de pH foi proposta em 1909 pelo bioquímico dinamarquês Peter Lauritz Sorensen (1868-1939), na qual o pH é determinado pela concentração molar de íons hidrônio presentes em uma solução aquosa, expressa em equivalentes por litro, mol/L. (NOVAIS, 2023) afirma que: "Quando desenvolveu tal escala, Sorensen era o químico chefe dos laboratórios da cervejaria Carlsberg. Com objetivo de aprimorar a qualidade de seu produto e estudando fermentação, o químico dinamarquês desenvolveu tal escala."

A fórmula para calcular o pH é dada por

$$pH = -log[H^+] \tag{4.2}$$

que pode ser reescrita, levando em consideração que o logaritmo utilizado é de base 10, da seguinte forma:

$$H^+ = 10^{-pH}. \tag{4.3}$$

Assim, conhecendo a molaridade de hidrônios, saberemos classificá-lo.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4. *Se uma solução tiver uma concentração de hidrônio de* $3,6 \cdot 10^{-8}$ *mol/L essa solução seria ácida ou alcalina?*

Solução: Substituindo os valores dados na questão em (4.2), e com o auxílio de uma calculadora, obtemos

$$\begin{aligned} pH &= -log[H^+] \\ &= -log[3,6 \cdot 10^{-8}] \\ &\approx -[-7,44] \\ &\approx 7,4. \end{aligned}$$

Portanto, por estar com valor maior que 7, essa solução é considerada alcalina ou básica.

Exemplo 5. *(Udesc/2009) "Chuva ácida" é um termo que se refere à precipitação, a partir da atmosfera, de chuva com quantidades de ácidos nítrico e sulfúrico maiores que o normal. Os precursores da chuva ácida vêm tanto de fontes naturais, tais como vulcões e vegetação em decomposição, quanto de processos industriais, principalmente emissões de dióxido de enxofre e óxidos de nitrogênio resultantes da queima de combustíveis fósseis.*

O pH da água da chuva considerado normal é de 5,5 (devido à presença de ácido carbônico proveniente da solubilização de dióxido de carbono). Um químico monitorando uma região altamente industrializada observou que o pH da água da chuva era igual a 4,5. Considerando que a acidez está relacionada com a concentração de H_3O^+*, é correto afirmar que a água com pH 4,5 era:*

a) duas vezes mais básica que o normal.

b) duas vezes mais ácida que o normal.

c) dez vezes mais básica que o normal.

d) dez vezes mais ácida que o normal.

e) cem vezes mais ácida que o normal.

Solução: Para determinar quantas vezes mais ácida é uma solução com pH igual a 4,5 em comparação com uma solução de pH igual a 5,5, vamos utilizar a escala logarítmica de pH.

Utilizando a equação (4.3), obtemos:

Para o $pH = 5,5$:

$$\begin{aligned} H^+ &= 10^{-pH} \\ &= 10^{-5,5} \end{aligned}$$

Para o $pH = 4,5$:

$$\begin{aligned} H^+ &= 10^{-pH} \\ &= 10^{-4,5} \end{aligned}$$

Neste caso, a solução de pH 4,5 é considerada mais ácida e a solução de pH 5,5 é considerada menos ácida. Logo, a diferença de pH entre as duas soluções pode ser calculada da seguinte forma:

$$\frac{10^{-4,5}}{10^{-5,5}} = 10^{-4,5-(-5,5)} = 10^1.$$

Portanto, a solução com pH igual a 4,5 é 10 vezes mais ácida do que aquela com pH 5,5.

Este último exemplo nos faz perceber que a diferença de uma unidade na escala de pH representa uma variação de 10 vezes na concentração de íons hidrônio (H^+). Essa relação de variação em potências de 10 é devido à natureza logarítmica da escala de pH, onde cada unidade de Potencial Hidrogeniônico representa um fator de 10 na concentração de íons hidrônio.

5 Sequências Didáticas: Logaritmos e Escalas Logarítmicas

Para (ZABALA, 1998), "*Sequência didática é como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.*" Para além dessa afirmação, a leitura dessa obra nos permite inferir que a importância dessas sequências reside no fato de que elas oferecem uma estrutura sólida de planejamento e desenvolvimento do currículo de forma coerente e progressiva aos educadores e, isso é essencial para garantir que os conteúdos sejam abordados de maneira apropriada de acordo com as necessidades e características específicas dos alunos, levando em consideração seu nível de desenvolvimento, estilo de aprendizagem e interesses.

Uma das notáveis características das sequências didáticas de Zabala é o destaque na personalização da educação. Elas possibilitam aos professores a flexibilidade necessária para adaptar as atividades de acordo com o contexto da sala de aula e as habilidades dos alunos. Isso não apenas torna o ensino mais relevante, mas também envolve os estudantes de forma mais ativa em seu próprio processo de aprendizagem. Ao seguir uma sequência didática bem planejada, os alunos são incentivados a explorar tópicos, refletir sobre conceitos e construir o conhecimento de forma progressiva.

A seguir, propomos três sequências didáticas em que, por meio de atividades selecionadas, esperamos demonstrar a efetividade de aplicação da nossa proposta de aprofundamento no estudo de logaritmos em turmas do Ensino Médio. A BNCC (BRASIL, 2018) propõe que as habilidades relacionadas ao estudo das funções logarítmicas sejam desenvolvidas em turmas do 1º ao 3º ano do ensino médio e, a partir disto, o Currículo de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2021) do Ensino Médio traz em seu organizador curricular da disciplina de matemática, habilidades que contemplam os estudos e aplicações das funções logarítmicas, de forma mais específica, em turmas do 2º Ano do Ensino Médio.

Iniciamos tomando como documentos norteadores para a nossa proposta de aprofundamento do estudo dos logaritmos em turmas do Ensino Médio, a Base Comum Curricular (BNCC) e o Currículo de Pernambuco do Ensino Médio. Dentre as habilidades contidas nas competências gerais da etapa do Ensino Médio da BNCC, encontramos apenas duas que estão relacionadas ao conteúdo *logaritmos*, conforme a Figura 34 a seguir:

Figura 34 – Um Recorte das Habilidades da BNCC

HABILIDADES
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT403) Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.

Fonte: Brasil, 2021.

O Currículo de Pernambuco é um documento que foi elaborado tomando como referencial a BNCC e nele é possível encontrar na seção nomeada *Organização Curricular*, onde constam as habilidades (EM13MAT305PE21) e (EM13MAT403PE35), que foram elaboradas com base nas habilidades da Base Comum Curricular (EM13MAT305) e (EM13MAT403), respectivamente, conforme Figura 35 a seguir:

Figura 35 – Um Recorte das Habilidades do Currículo de Pernambuco

MATEMÁTICA		
2º ANO		
HABILIDADES DA ÁREA BNCC	HABILIDADES ESPECÍFICAS DO COMPONENTE	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	(EM13MAT305PE21) Resolver e elaborar situações- problema, envolvendo funções logarítmicas, interpretando a variação das grandezas em contextos diferentes como, por exemplo, o estudo da radioatividade, Matemática Financeira, entre outros, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Funções Logarítmicas: variação de grandezas
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	(EM13MAT403PE35) Analisar e estabelecer relações, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponenciais e logarítmicas expressas em tabelas e em planos cartesianos para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento ou decrescimento, raízes, entre outras) de cada função, destacando-as como funções inversas.	Funções Exponenciais e Logarítmicas: relações, representações e características.

Fonte: Currículo de Pernambuco, 2022.

Propostas de Sequências Didáticas sobre Logaritmos e Escalas Logarítmicas

Sugerimos aos professores que desejem trabalhar a nossa proposta de aprofundamento do ensino de logaritmos, três propostas de sequências didáticas nas quais buscamos proporcionar aos alunos uma compreensão mais robusta sobre a aplicação dos logaritmos na construção de escalas, bem como no entendimento de forma mais aprofundada de algumas escalas que nos deparamos em nosso cotidiano, como a escala de decibéis e a escala Richter, além de compreender o uso deste tipo de escala em gráficos de ativos financeiros.

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA 01

A nossa primeira proposta para o aprofundamento no estudo dos logaritmos em sala de aula está dividida em três partes. Na primeira, fazemos uma revisão da definição de logaritmos e revisitamos as propriedades básicas sem necessariamente realizar todas as demonstrações, além de explanarmos o que são escalas lineares e escalas logarítmicas. Na segunda parte, propomos uma atividade prática onde o educador sugere a construção de algumas escalas logarítmicas a partir de uma sequência de passos, visando desenvolver nos educandos habilidades que os permitam construir tais escalas e aplicá-las em situações do cotidiano, fazendo-se o uso de ferramentas tecnológicas ou não. Por fim, propomos algumas atividades onde os alunos possam utilizar os conhecimentos adquiridos e as habilidades desenvolvidas na construção de escalas em paralelo com as definições, para resolver alguns problemas envolvendo aplicações das escalas logarítmicas nas diversas áreas do conhecimento e em questões de vestibulares.

Assim, sugerimos dois encontros de 50 minutos para aplicação desta proposta, visando um aproveitamento do tempo com acompanhamento qualitativo na construção das escalas.

Objetivo Geral:

Definir escala linear e escala logarítmica e desenvolver a habilidade de construir uma escala logarítmica, seguindo uma sequência de passos.

Objetivos Específicos:

◦ Definir logaritmo;
◦ Revisitar as propriedades operatórias dos logaritmos;

∘ Definir escala;
∘ Explanar sobre as escalas linear e logarítmica;
∘ Construir uma escala logarítmica.

1 Revisão da Definição e das Propriedades Básicas de Logaritmos

A princípio, vamos considerar os seguintes questionamentos:

Q_1: Qual o valor de x quando 3 é elevado a x resultando em 81?

Solução: $3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$.

Q_2: Qual o valor de x quando 5 é elevado a x resultando em $\dfrac{1}{25}$?

Solução: $5^x = \dfrac{1}{25} \Leftrightarrow 5^x = \dfrac{1}{5^2} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

Os valores $x = 4$ e $x = -2$, nesta ordem, nas soluções dos questionamentos Q_1 e Q_2, são denominados respectivamente, o logaritmo de 81 na base 3, representado por $\log_3 81 = 4$ e o logaritmo de $\dfrac{1}{25}$ na base 5, representado por $\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$. Assim, podemos concluir que Logaritmos são expoentes e defini-los de modo mais preciso,

> *Sejam $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$, o logaritmo de número x na base a é representado por $\log_a x$ e pode ser definido como o expoente y ao qual devemos elevar a base a para obter o resultado x. Em outras palavras, o logaritmo é a solução da equação exponencial $a^y = x$.*

Vejamos agora, algumas consequências da definição de logaritmo, que alguns autores costumam classificá-las como *propriedades dos logaritmos*. Tais consequências são derivadas das regras convencionais de exponenciação.

Suponha que b é um número real positivo e diferente de 1, e x_1 e x_2 são números reais positivos. São válidas as seguintes propriedades:

(1) $\boxed{\log_a 1 = 0}$

(2) $\boxed{\log_a a = 1}$

(3) $\boxed{a^{\log_a x} = x}$

(4) $\boxed{\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2}$

(5) $\boxed{\log_a \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_b x_1 - \log_a x_2}$

(6) $\boxed{\log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_b x;\ (\alpha \in \mathbb{R})}$

2 Escalas Lineares e Logarítmicas

2.1 Definindo Escala

A palavra *escala* é composta por vários significados em diferentes áreas do conhecimento. Mais comumente, nos deparamos com esta palavra no sentido de uma relação de proporção entre quantidades e é expressa como uma razão ou uma fração, indicando a quantidade de redução ou ampliação aplicada, como por exemplo em uma maquete que representa o projeto de construção de uma nova escola.

Nesta aula, trataremos de um significado específico de escala, representada por um eixo nivelado de valores que mede algo em intervalos regulares. A reta numérica clássica é um exemplo clássico que podemos associar ao conceito que adotaremos para a nossa aula.

2.2 O que é uma Escala Linear?

Uma escala linear é um sistema de medição ou representação que segue uma progressão constante e uniforme de um valor para outro. Nesse tipo de escala, a dois intervalos de iguais comprimentos em um eixo correspondem diferenças iguais entre seus respectivos pares de extremos. Assim, a distância de uma unidade de medida entre os pontos 0 e 1 é a mesma entre os pontos 7 e 8.

As escalas lineares são facilmente encontradas no nosso cotidiano, pois são bastante utilizadas em gráficos, mapas, representações numéricas e muitos outros contextos para facilitar a compreensão e a visualização de dados. Elas fornecem uma representação direta e uniforme dos valores, permitindo uma leitura e interpretação fácil das informações apresentadas. Elas também são muito boas para medições comuns no dia a dia. Sua régua escolar, assim como as fitas métricas utilizadas pelos profissionais da construção civil são mais alguns bons exemplos que podemos citar.

2.3 O que é uma Escala Logarítmica?

Uma escala logarítmica é aquela na qual os números são representados como potências de uma base fixa, sendo os expoentes usados como valores para demarcar os intervalos de iguais comprimento no eixo. Porém, como nesse tipo de escala os valores aumentam exponencialmente, a dois intervalos de iguais comprimentos em um eixo, correspondem a diferenças distintas entre seus respectivos pares de extremos.

As escalas logarítmicas são usadas quando todas as medidas de uma grandeza são positivas e tomam valores em uma ampla faixa desde valores muito pequenos a muito grandes.

Imagine que precisamos medir uma quantidade muito grande de uma grandeza. Talvez minerais no solo, moléculas no ar ou a intensidade das ondas sonoras, por exemplo. Às vezes precisamos criar uma escala simplificada onde cada passo representa um grande número de unidades e também aumenta/diminui por um determinado fator. Se um cientista precisa medir bilhões ou mesmo trilhões de moléculas, pode-se apenas fazer uma escala logarítmica, onde a variação de 1 (uma) unidade representa um aumento por um fator de 10. Isso significaria que ir de 0 a 1 significa aumentar 10 unidades, e ir de 0 a 2 significa aumentar 100 unidades, porque $10^2 = 100$.

Existem algumas razões para usar escalas logarítmicas em tabelas e gráficos. uma delas é tornar mais fácil a leitura de gráficos nos quais a variação dos valores expostos é muito grande.

Duas escalas logarítmicas das quais você já deve ter ouvido falar são a escala de decibéis, que mede a intensidade relativa do som, e a escala Richter, que mede a intensidade dos terremotos.

3 Construindo uma Escala Logarítmica

Vamos construir uma escala logarítmica de base $a > 0$, seguindo a seguinte sequência de passos:

P_1: Inicialmente estabelece-se um comprimento padrão de medida, que denotaremos por N, e corresponderá a um intervalo entre duas potências inteiras, consecutivas da base a. Por exemplo, de 0,1 a 1, de 1 a 10, de 10 a 100, de 100 a 1000, se resolvermos trabalhar na base 10; Assim como 0,5 a 1, 1 a 2, 2 a 4 e assim sucessivamente, se resolvermos trabalhar com a base 2.

Para exemplificar, no que segue, tomaremos $N = 10$ cm e $a = 10$.

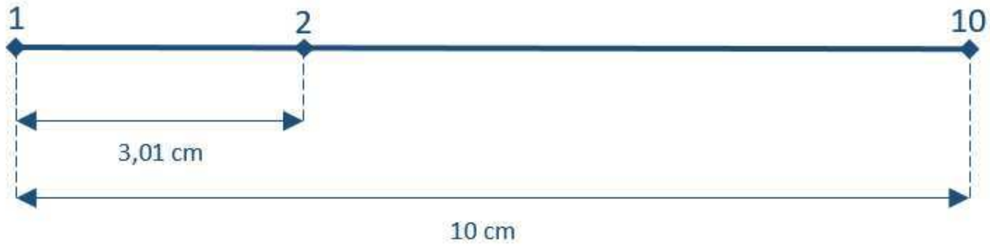
P_2: Como representaremos os números de 1 a 10 em escala logarítmica de base $a = 10$, os números de 1 e 10 são os que se localizam nos extremos dos segmentos com o intervalo de 1 a 10. Traçamos então um segmento de $N = 10$ cm.

P_3: Em seguida, marcamos no eixo o ponto correspondente a 2, por exemplo.

Para determinar a localização do ponto onde marcaremos o 2, devemos considerar que, como o $log\ 2 \approx 0,3010$, para um comprimento de $N = 10$ cm, a distância entre 1 e 2 será de aproximadamente

$$10 \text{ cm x } 0{,}3010 = 3{,}01 \text{ cm}$$

Figura 36 – Marcação do ponto correspondente ao número 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

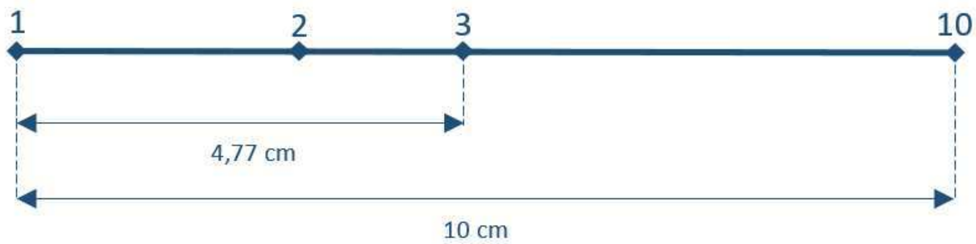
P_4: Analogamente, para determinar o ponto onde marcaremos o 3, como

$$log\ 3 \approx 0,4771,$$

a distância entre 1 e 3 será de aproximadamente

$$10 \text{ cm x } 0{,}4771 = 4{,}77 \text{ cm}$$

Figura 37 – Marcação do ponto correspondente ao número 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

P_5: Para marcar um número $1 < \alpha < 10$ qualquer, procedemos de maneira análoga aos passos anteriores. Ou seja, calculamos $log\ \alpha$ e então fazemos $10 \cdot log\ \alpha$, determinando assim a localização do ponto correspondente a α.

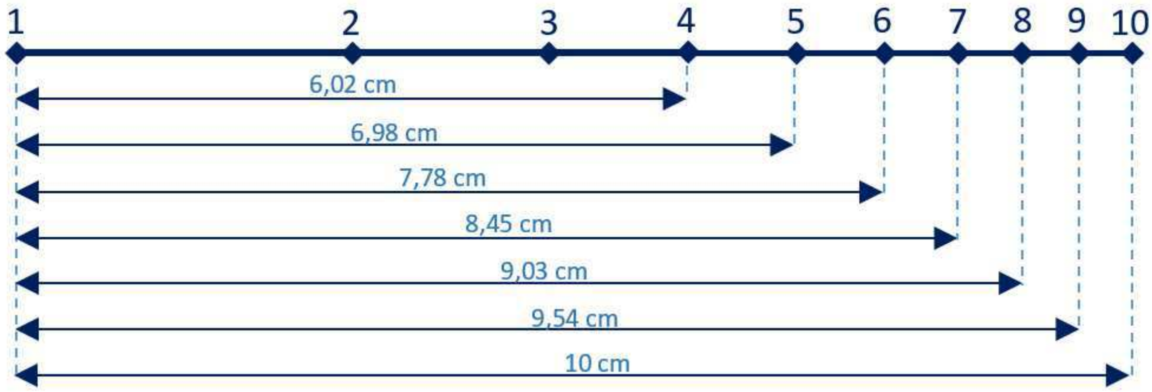
Exercício Resolvido

1. Trace um segmento de reta medindo $N = 10$ cm e continue marcando os pontos no eixo de acordo com a escala logarítmica de base 10, conforme procedemos nos itens P_2 e P_3. Determine os pontos onde devem ser marcados os valores de 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Solução: Com o auxílio de uma calculadora, obtemos as seguintes aproximações com três casas decimais: $log\ 4 \approx 0,602$, $log\ 5 \approx 0,698$, $log\ 6 \approx 0,778$, $log\ 7 \approx$

$0,845$, $log\ 8 \approx 0,903$, $log\ 9 \approx 0,954$. A partir daí, basta procedermos de modo análogo ao que fizemos em P_1, P_2 e P_3.

Figura 38 – Solução do Exercício Proposto Resolvido 01



Fonte: Elaborado pelo autor.

Exercícios Propostos

1. Em um eixo, marque pontos em escala logarítmica de base 10, com um intervalo entre as potências 10 e 100. Onde devem estar marcados os pontos correspondentes as dezenas de 20 a 90.

2. Em um eixo, marque pontos em escala logarítmica de base 10 entre as potências 10^{-1} e 10^{0}.

3. Utilizando o exercício 1, meça, com uma régua, a distância d_{12} entre os números 1 e 2. Em seguida meça a distância d_{14} entre 1 e 4. obtenha a soma D desses valores.

Feito isso, partindo do número 1, determine qual número corresponde a distância D.

4. Agora responda ao seguinte questionamento: qual número corresponde a distância $\tilde{D} = d_{14} + d_{15}$? Qual das propriedades dos logaritmos que explica o resultado?

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA 02

Na nossa segunda proposta, visamos expor de forma eficaz a aplicação das escalas logarítmicas na escala de intensidade sonora conhecida como a escala de decibéis e na escala de magnitude de terremotos, a escala Richter, através de um breve resumo explicativo sobre cada uma dessas escalas que estão fortemente presentes no nosso cotidiano, seja ao ouvir uma música em um momento de lazer ou em uma festa, ou seja ao assistirmos a um noticiário que nos reporta a um terremoto em algum lugar do mundo. Dando continuidade, propomos um exercício respondido seguido de uma lista proposta de exercícios para que os alunos possam desenvolver as habilidades contempladas na BNCC (BRASIL, 2018) e no Currículo de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2021).

Para aplicação desta proposta, também sugerimos dois encontros de 50 minutos.

Objetivo Geral:

Explanar a aplicação da escala logarítmica nas escalas de intensidade sonora e de magnitude de terremotos, proporcionando aos estudantes uma compreensão mais profunda das razões por trás da escolha de uma escala logarítmica para representar as mudanças nas unidades de medida nas escalas de decibéis e Richter, por meio de uma seleção de exercícios.

Objetivos Específicos:

◦ Explicar o que é a escala de intensidade sonora;
◦ Expor a fórmula para relacionar a intensidade sonora com a intensidade em decibéis, bem como apresentar a correspondência entre elas;
◦ Explanar a escala de magnitude de terremoto;
◦ Mostrar uma tabela de relações entre a magnitude e seus possíveis efeitos;
◦ Apresentar uma fórmula para encontrar a magnitude de um terremoto e assim poder inferir os possíveis efeitos;
◦ Praticar exercícios que tornem a compreensão dos conteúdos com mais significado.

1 A Escala de Decibéis

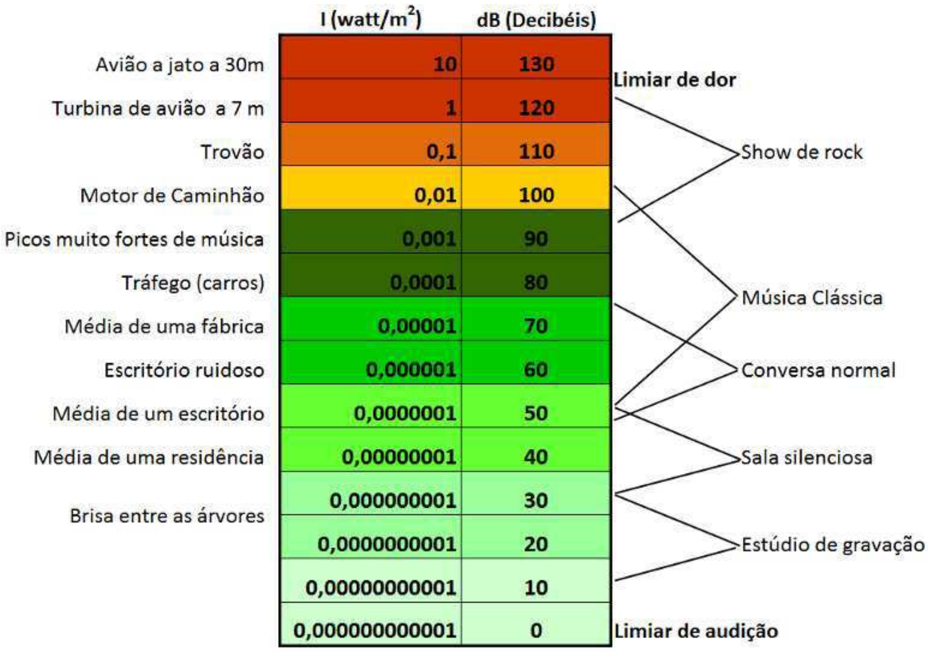
A variação de intensidade entre os sons mais sutis que necessitamos ouvir e os sons mais altos presentes nos mais diversos ambientes do nosso cotidiano é bastante significativa. O som mais silencioso que um ouvido humano pode captar tem uma intensidade de cerca de 10^{-12} watts por metro quadrado, ou seja, $0{,}000000000001\dfrac{w}{m^2}$. Todavia, o ouvido humano também pode ouvir sons com uma intensidade tão grande quanto $100\dfrac{w}{m^2}$. O decibel (dB) é uma unidade criada para mensurar a intensidade do som, é utilizada para descrever esta ampla gama de fenômenos sonoros, que vai desde o sussurro mais suave até o barulho ensurdecedor como o de um motor a jato. Devido à ampla variação na intensidade absoluta dos sons, a unidade dB é definida em termos de uma escala logarítmica.

Uma fórmula que relaciona a intensidade sonora N em $\dfrac{w}{m^2}$ à sua intensidade relativa D em decibéis é

$$D = 10\log\left(\frac{N}{10^{-12}}\right).$$

A Figura 39 a seguir, disponível em (GARZIN, 2022), mostra a intensidade do som em $\dfrac{w}{m^2}$ e os valores de decibéis correspondentes, para alguns sons comuns.

Figura 39 – Tabela de Decibéis



Fonte: abcmedseg.com.br

Observe que à medida que os valores de decibéis na coluna da direita aumentam em 10, as intensidades correspondentes na coluna da esquerda são multiplicadas por 10. Assim, se o número de decibéis aumenta em 20, a intensidade do som se multiplica por $10 \cdot 10$ ou 10^2. Se você aumentar o número de decibéis em 40, você multiplica os watts por metro quadrado por $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, ou 10^4.

Em geral, um aumento de n dB multiplica a intensidade do som por $10^{\frac{n}{10}}\frac{w}{m^2}$.

Exercício Resolvido

1. Devido a uma lei na França, os fabricantes tiveram que limitar a intensidade do som de seus MP3 players a 100 decibéis. Quantas vezes mais intensa é a intensidade máxima de 115 decibéis de um determinado MP3 player do que a intensidade limitada imposta na França?

Solução: É sabido que para uma variação de n decibéis corresponde uma variação de $10^{\frac{n}{10}} \frac{w}{m^2}$ na intensidade do som. Assim, levando em consideração a diferença no nível de decibéis $115 - 100 = 15dB$, obtemos

$$10^{\frac{15}{10}} = 10^{1,5} \approx 32$$

Portanto, a intensidade máxima do som é $32\frac{w}{m^2}$ mais intensa que o limite imposto na França.

Exercícios Propostos

1. Grunhir ao bater na bola tornou-se uma questão controversa no tênis profissional. Algumas pessoas estão preocupadas que esses sons altos sejam distrações injustas para o jogador adversário. Os grunhidos de Serena Williams foram medidos a uma intensidade sonora de $6,31 \cdot 10^{-4} \frac{w}{m^2}$. Encontre a intensidade relativa do som em decibéis.

2. A intensidade máxima de som do MP3 player da Melody é de 115 dB. Qual é a intensidade máxima do som em watts por metro quadrado?

3. (Retirado de Brasil Escola) Durante um jogo de futebol, a intensidade sonora é próxima de 80 dB. Supondo que, no momento do gol, a intensidade sonora torne-se 1000 vezes maior, qual é o valor do nível sonoro, em dB, no momento do gol?

4. (Retirado de Brasil Escola) Durante um show, a intensidade sonora nas proximidades do palco era de aproximadamente $1 \frac{w}{m^2}$. Sabendo que a intensidade mínima para a audição humana é de $10^{-12}\frac{w}{m^2}$, determine o nível de intensidade sonora na região do palco.

2 A Escala de Magnitude de Terremoto (*Escala Richter*)

É bastante comum, após ocorrer um terremoto em algum lugar do mundo, ouvir, assistir ou ler nos mais diversos veículos de notícias sobre a unidade de medida utilizada para descrever as magnitudes dos terremotos: Escala Richter. Tal escala foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Richter e Bueno Gutemberg, e é amplamente utilizada para medir a energia liberada por um terremoto nos dias atuais. A escala Richter é baseada em registros sísmicos e fornece uma medida da magnitude das ondas sísmicas geradas pelo terremoto.

A magnitude de um terremoto é determinada na escala Richter, usando o logaritmo da amplitude máxima registrada pelas ondas sísmicas. De maneira mais clara, isso significa que cada aumento de 1 unidade na escala Richter representa um aumento de 10 vezes na amplitude das ondas sísmicas e cerca de 31,6 vezes mais energia liberada. A tabela abaixo fornece uma breve descrição dos efeitos de terremotos de diferentes magnitudes.

Figura 40 – Tabela de Efeitos de Terremotos

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
De 3,5 a 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
De 5,5 a 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
De 6,1 a 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
De 7,0 a 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos numa grande faixa.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Fonte: (IEZZI et al., 2016)

Com base na Figura 40 acima, é válido ressaltar que existe uma diferença entre a magnitude de um terremoto e intensidade de um terremoto. A magnitude refere-se a medida da energia liberada pelo terremoto, enquanto a intensidade se refere aos efeitos observados e percebidos pelas pessoas e pelas estruturas afetadas.

No livro (SMOLE; DINIZ, 2020, pág. 100), é possível encontrar que a magnitude de um terremoto é medida da seguinte maneira: o sismógrafo registra duas ondas sísmicas, a primária P e a secundária S. Com base no intervalo de tempo entre elas Δt, e na amplitude das ondas sísmicas A, utiliza-se a função da escala Richter, também conhecida como escala de magnitude local M_L:

$$M_L = \log_{10}\, A + 3 \cdot \log_{10}\, (8 \cdot \Delta t) - 2,92 \Rightarrow M_L = \log_{10}\, (\frac{A \cdot \Delta t^3}{1,62})$$

Uma outra fórmula bastante utilizada para calcular a intensidade de um terremoto é a que segue

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\, (\frac{E}{E_0}),$$

onde, M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada pelo terremoto e E_0 é a energia liberada por um outro sismo usado como referência.

Exercício Resolvido

1. [codap.ufs.br] Há diversas formas de analisar a intensidade de um terremoto. Uma delas é a Escala Richter, que utiliza a fórmula $\boldsymbol{R} = \frac{2}{3} \cdot \log(\frac{E}{E_0})$, em que $\boldsymbol{R}$ é a magnitude do terremoto na escala Richter e E é a energia liberada pelo terremoto na unidade kWh, sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3} kWh$. Considerando $\log 7 = 0,85$, se um terremoto atingir a magnitude $7,5$ na Escala Richter, determine a energia liberada por ele, em kWh.

Solução: Utilizando a fórmula dada e as informações contidas na questão, obtemos

$$\begin{aligned}
R &= \frac{2}{3} \cdot \log(\frac{E}{E_0}) \Rightarrow \\
7,5 &= \frac{2}{3} \cdot \log(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}) \Rightarrow \\
7,5 \cdot \frac{3}{2} &= \log(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}) \Rightarrow \\
\frac{22,5}{2} &= log\ E - \log(7 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \\
11,25 &= \log E - (\log 7 + \log 10^{-3}) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11,25 &= \log E - (0,85 - 3\log 10) \Rightarrow \\
11,25 &= \log E - 0,85 + 3 \Rightarrow \\
\log E &= 11,25 - 2,15 \Rightarrow \\
\log E &= 9,1 \Rightarrow \\
E &= 10^{9,1}.
\end{aligned}$$

Portanto, a energia liberada pelo terremoto de magnitude 7,5 dado no problema é de $10^{9,1}$ kwh.

Exercícios Propostos

1. Um terremoto de 7,6 graus de magnitude na escala Richter é quantas vezes mais forte do que um de magnitude de 5,6 graus na mesma escala?

2. Se a magnitude de um terremoto na escala Richter for 1,4 maior que outro, quantas vezes mais força haverá no terremoto mais poderoso?

3. (Retirado de Portal da Obmep) Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando tsunamis. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é:

$$M = \tfrac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\tfrac{E}{E_0}\right),$$

onde M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada (em joules) e $E_0 = 10^{4,5}$ joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência. Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2011, que atingiu magnitude 9 na escala Richter?

4. (ENEM PPL 2018) Em março de 2011, um terremoto de 9,0 graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida pela escala Richter, é $R = \log(\frac{A}{A_0})$, em que A é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo, A_0 é uma amplitude de referência e log representa o logaritmo na base 10. A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é:

(a) 1,28 (b) 2,0 (c) $10^{\frac{9}{7}}$ (d) 100 (e) $10^9 - 10^7$.

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA 03

Esta terceira e última proposta de sequência didática, tem por finalidade expor aos discentes as diferenças entre os gráficos gerados em uma escala linear e em gráficos nos quais há a aplicação das escalas logarítmicas. Apresentamos tais diferenças em duas situações relacionadas a finanças e uma situação relacionada a pandemia de Covid-19. Sugerimos também uma lista de exercícios para fixação e aperfeiçoamento, onde buscamos questões de vestibulares, bem como questões disponíveis no Portal da Matemática.

Deixamos como sugestão adicional, uma atividade que pode ser trabalhada com os alunos em sala de aula, descrita no Apêndice - A, cuja finalidade é proporcionar aos discentes a experiência de criar gráficos em escala linear e escala logarítmica utilizando a ferramenta *Microsoft Excel*.

Para aplicação desta nossa terceira proposta de sequência didática, recomendamos tal como as duas primeiras, dois encontros de 50 minutos cada.

Objetivo Geral:

Despertar e desenvolver junto aos discentes a construção e análise de gráficos representados em eixos em escala linear como também em escala logarítmica, através de exemplos práticos presentes em nosso cotidiano.

Objetivos Específicos:

◦ Mostrar as diferenças entre gráficos gerados em escala linear e gráficos em escala logarítmica;

◦ Analisar com os alunos os comportamentos e características dos gráficos;

◦ Resolver exercícios visando contemplar questões sobre o conteúdo presentes em vestibulares

◦ Construir, com o auxílio de ferramentas tecnológicos, gráficos utilizando o *Microsoft*

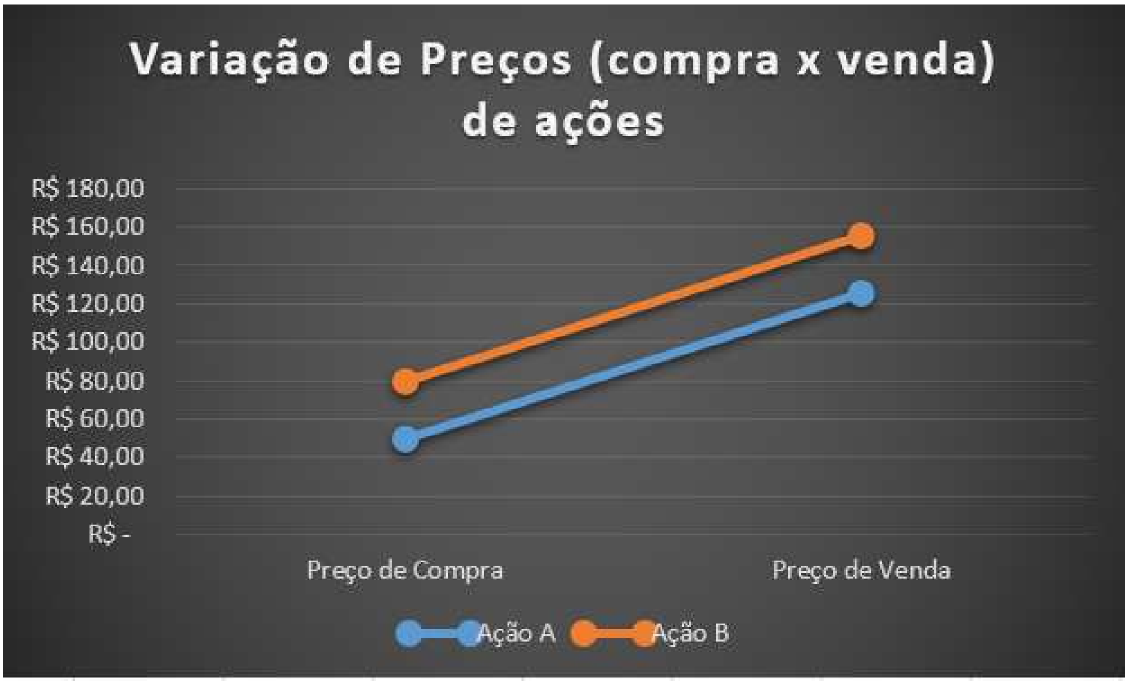
Excel.

1 Gráficos em Escala Logarítmica

Os gráficos em escala logarítmica representam a evolução de determinada grandeza com base em dados que são expressos em intervalos muito grandes ou muito pequenos. Ao analisar um gráfico em escala logarítmica, é fundamental recordar que uma mesma distância entre dois pares de pontos no eixo não representa uma diferença igual em termos absolutos, mas sim uma diferença proporcional. Por exemplo, em um gráfico em escala logarítmica de base 10, a distância entre 10 e 100 é a mesma que entre 100 e 1000. Isso ocorre porque cada unidade no eixo representa o múltiplo, pelo fator 10, da potência anterior. Isso possibilita apresentar uma grande quantidade de dados numéricos de forma compacta, tornando-se uma opção vantajosa.

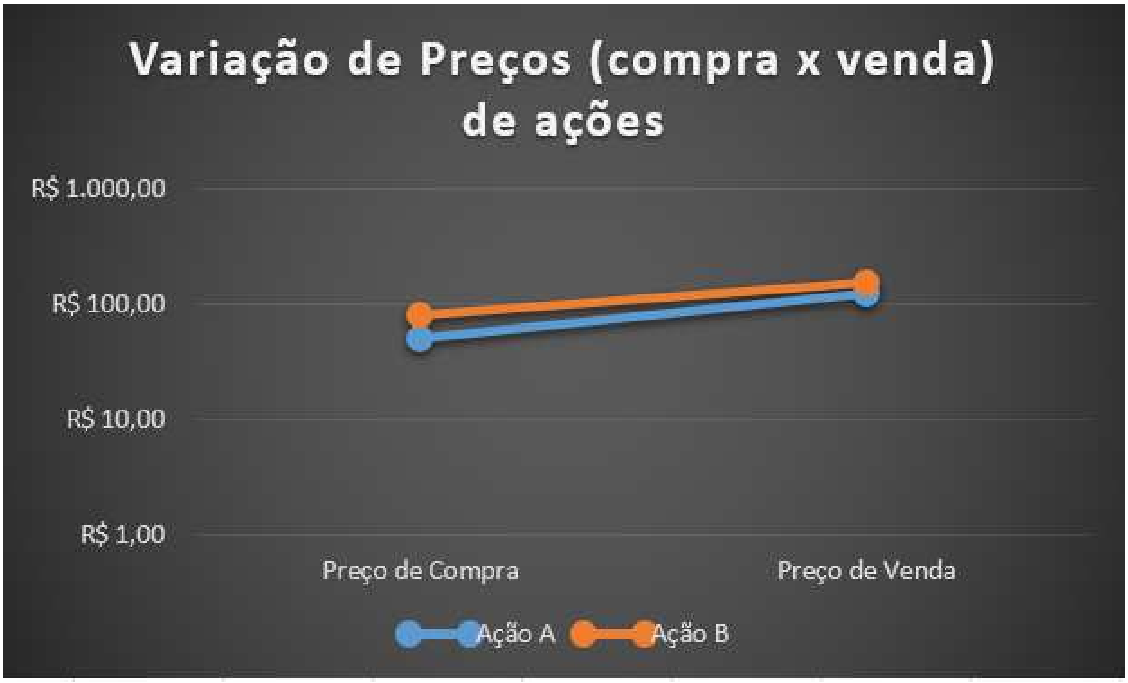
Os gráficos a seguir retratam diferenças entre gráficos em escala linear e gráficos em escala logarítmica, aplicados em diferentes situações do cotidiano com as quais podemos nos deparar.

Figura 41 – Gráfico em Escala Linear



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 42 – Gráfico em Escala Logarítmica



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Nos gráficos das Figuras 41 e 42 acima, temos o preço de compra e a projeção do preço de venda da Ação A ao valor de, respectivamente, R$ 50,00 e R$ 125,00 e o preço de compra e a projeção do preço de venda da Ação B ao valor de, respectivamente, R$ 80,00 e R$ 155,00. Note que no gráfico gerado em escala linear, a variação de preços das ações A e B têm características semelhantes e valores iguais a R$ 75,00, o que pode levar um iniciante em investimentos a optar pela ação B por gerar um montante maior, porém não mais vantajoso. Em contrapartida, no gráfico gerado em escala logarítmica, o comportamento das variações de preços facilita a análise de uma possível tomada de decisão sobre em qual das duas ações uma pessoa deva investir, pois, a projeção do lucro obtido na operação de compra e venda das ações é mostrado em valores percentuais, de modo que a variação de preços da ação A em comparação com a ação B, torna-se mais vantajosa haja vista o lucro percentual dela ser 31,25% maior que na mesma operação com a ação B.

Vejamos mais alguns exemplos, onde os dados foram inseridos em uma tabela e transformados em gráficos em escala linear e em escala logarítmica

Figura 43 – Gráfico em Escala Linear

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 44 – Gráfico em Escala Logarítmica

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Nos gráficos das figuras 43 e 44, acima, percebemos que, quando os valores dos lucros médios apresentam uma grande diferença, o gráfico mais indicado para fazer observações é o gráfico em escala logarítmica, pois no gráfico da Figura 43, os pontos que marcam os valores do lucro médio dos sete primeiros produtos não se mostram razoavelmente perceptíveis de maneira que determinar tais valores seja uma fácil tarefa, enquanto que no gráfico da Figura 44, a identificação dos valores dos lucros médios torna-se clara.

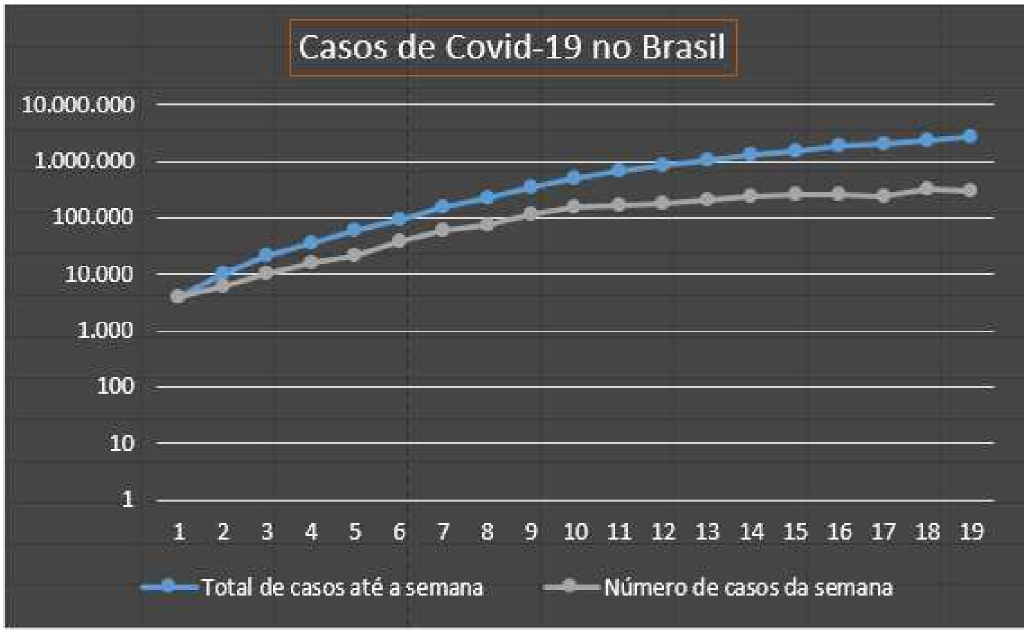
A pandemia de Covid-19, causada pelo vírus SARS-CoV-2 ou Novo Coronavírus, causou sérios impactos sociais, culturais, econômicos, políticos, históricos, na medicina, nos laboratórios, universidades etc., no mundo inteiro sem quaisquer precedentes recentes na história das epidemias.

Os gráficos a seguir retratam o número de casos informados semanalmente e o total de casos registrados no Brasil no período de 22/03/2020 a 01/08/2020. Estes dados estão disponíveis em (CONASS, 2023), site do Conselho Nacional de Secretários de Saúde - CONASS, onde consta também o número de óbitos causados pela covid-19 informados até a data atual.

Figura 45 – Gráfico em Escala Linear

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 46 – Gráfico em Escala Logarítmica



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Observando os gráficos das figuras 45 e 46 acima, podemos perceber no primeiro gráfico que os pontos que marcam tanto o total de casos até determinada semana, quanto aqueles pontos que marcam o número de casos da semana estão posicionados de modo que, determinar quaisquer valores que eles indicam se torna uma tarefa praticamente impossível se tivermos acesso apenas ao gráfico, sem os dados expostos de maneira mais detalhada, por outro lado, no gráfico em escala logarítmica da figura 46, tal tarefa fica mais fácil de ser executada (mesmo que por aproximações), pois, mais uma vez os dados possuem uma variação de números muito grande, e, sendo assim, o gráfico em escala logarítmica aparece como uma poderosa ferramenta de exposição de dados bem mais útil que o gráfico em escala linear.

Exercícios para Fixação e Aperfeiçoamento

1. (ENEM 2011 - Adaptada) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. Ela é descrita pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o $dina \cdot cm$. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de Janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe em $(dina \cdot cm)$?

a) $10^{-5,10}$ b) $10^{-0,73}$ c) 10^{12} d) $10^{21,65}$ e) $10^{27,00}$

2. (Unifor-CE) Desde tempos imemoriais, o homem vem buscando formas de medir e quantificar fenômenos naturais. Nesse processo, desenvolveu ferramentas físicas e abstratas para auxiliá-lo. Uma dessas ferramentas desenvolvidas foi o logaritmo na base 10, representado aqui por log. A medida da magnitude R de um terremoto, medido pela escala Richter, é $R = \log\frac{a}{T} + B$, onde a é a amplitude(em micrômetros) do movimento vertical do solo, que é informado em um sismógrafo; T é o período do abalo sísmico em segundos; e B é a amplitude do abalo sísmico, com distância crescente partindo do centro do terremoto. Em 16 de setembro de 2015, um terremoto de magnitude 8,3 atingiu o Chile, próximo a região de Valparaíso, deixando várias vítimas. Em 08 de setembro de 2017, um terremoto de magnitude 5,3 atingiu a região norte do Japão.

   Sabendo que os dois terremotos acima tiveram a mesma amplitude B e período T, podemos afirmar que o terremoto no Chile foi

   a) 2 vezes mais forte que o do Japão.

   b) 3 vezes mais forte que o do Japão.

   c) 10 vezes mais forte que o do Japão.

   d) 100 vezes mais forte que o do Japão.

   e) 1000 vezes mais forte que o do Japão.

3. (Cesgranrio) Quando a orelha humana é submetida continuamente a ruídos de nível sonoro superior a 85 dB, sofre lesões irreversíveis. Por isso, o Ministério do Trabalho estabelece o tempo máximo diário que um trabalhador pode ficar exposto a sons muito intensos. Esses dados são apresentados a seguir:

Nível sonoro (dB): 85; tempo máximo de exposição (h): 8

Nível sonoro (dB): 90; tempo máximo de exposição (h): 4

Nível sonoro (dB): 95; tempo máximo de exposição (h): 2

Nível sonoro (dB): 100; tempo máximo de exposição (h): 1

Observa-se, portanto, que a cada aumento de 5 dB no nível sonoro, o tempo máximo de exposição cai para a metade. Sabe-se ainda que, ao assistir a um Show de Rock, espectadores próximos às caixas de som estão expostos a um nível sonoro de 110 dB. O nível de intensidade sonora (N) é expresso em decibel (dB) por:

$$N = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

onde $I =$ intensidade sonora fornecida pela caixa de som; $I_0 =$ intensidade padrão, corresponde ao limiar da audição (para o qual $N = 0$). Para o nível de intensidade $N = 120dB$, a intensidade sonora fornecida pela caixa de som, deverá ser de:

a) $10^{14} I_0$ b) $10^{12} I_0$ c) $1200 I_0$ d) $120 I_0$ e) $12 I_0$

4. Supondo que $\log 3 = 0,477$ e $\log 103 = 2,013$, qual o tempo mínimo necessário para que uma população, que cresce 3% ao ano, triplique?

5. A área de uma floresta vem diminuindo 20% ao ano devido a exploração humana. Se isso continuar acontecendo, em quanto tempo a área desta floresta ficará reduzida a décima parte de sua área atual? (Utilize $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$)

6. Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e $p(t)$, o preço após t anos, pede-se:

a) A expressão para $p(t)$.

b) O tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. (Utilize $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$).

6 Conclusões

Diante do exposto em nossa dissertação, podemos concluir que as escalas logarítmicas desempenham um papel fundamental em diversas áreas do conhecimento, oferecendo uma perspectiva única na análise e representação de fenômenos complexos. A utilização deste material para aplicação das sequências didáticas, tem como foco desenvolver habilidades mais aprofundadas nos estudantes do Ensino Médio, que são nossos principais alvos em conjunto com os professores desta etapa de ensino. Essas escalas têm a capacidade de comprimir intervalos extensos, permitindo uma visualização mais clara e detalhada de dados que abrangem várias ordens de magnitude. Além disso, elas facilitam a identificação de padrões ocultos e relações não lineares, que muitas vezes passariam despercebidos em escalas lineares.

É importante ressaltar que o uso de escalas logarítmicas requer cuidado e compreensão, pois a natureza da escala pode levar a interpretações equivocadas ou erros de análise. Além disso, em alguns casos, a escolha entre escalas logarítmicas ou lineares pode depender do contexto específico do problema em questão. Como sugestão para futuros estudos, pensamos ser interessante investigar mais a fundo a aplicação de escalas logarítmicas em campos emergentes, como inteligência artificial, análise de dados e biologia molecular. Tornando ainda mais amplo o potencial dessa poderosa ferramenta de representação e análise.

Em suma, as escalas logarítmicas constituem um recurso valioso para compreender fenômenos complexos e expressar relações não lineares. Seu uso eficiente e compreensão adequada podem levar a descobertas significativas e avanços em várias áreas, contribuindo para o progresso do conhecimento humano.

Esperamos que nossa dissertação sirva como suporte para os docentes que desejem aprofundar os estudos dos logaritmos com seus alunos do Ensino Médio, bem como objeto de referência para futuros trabalhos científicos que busquem desenvolver um novo material com novas perspectivas.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2023. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 62 e 70.

BRUCE, I. *Briggs' ARITHMETICA LOGARITHMICA*. 2006. Disponível em: <https://www.17centurymaths.com/contents/albriggs.html>. Acesso em: 20 dez. 2022. Citado na página 27.

CONASS. *Situação de Saúde da População*. 2023. Disponível em: <https://www.conass.org.br/painelconasscovid19/>. Acesso em: 25 mai. 2023. Citado na página 80.

CUNHA, A. *O que é Decibel?* 2016. Disponível em: <https://embarcados.com.br/o-que-e-decibel/>. Acesso em: 14 abr. 2023. Citado na página 56.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática, tradução: Hygino H.* [S.l.]: Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011. Citado na página 21.

GARZIN, B. *Ruído no ambiente de trabalho*. 2022. Disponível em: <https://abcmedseg.com.br/ruido-no-ambiente-de-trabalho/>. Acesso em: 23 mai. 2023. Citado na página 71.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. d. S. Dicionário houaiss conciso. *São Paulo: Moderna*, 2011. Citado na página 47.

IEZZI, G. et al. *Matemática : ciências e aplicações : ensino médio*. [S.l.]: São Paulo: Saraiva, 2016. Citado na página 73.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. [S.l.]: Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 39.

LIMA, E. L. *Logaritmos*. [S.l.]: Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 20, 25, 30, 31 e 43.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do Ensino Médio*. [S.l.]: Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. Citado na página 30.

MAOR, E. *e: A História de um Número; tradução de Jorge Calife*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Record, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 21, 27 e 43.

NORMAN, J. *John Napier inventa logaritmos*. 2021. Disponível em: <https://www.historyofinformation.com/detail.php?id=367>. Acesso em: 10 dez. 2022. Citado na página 19.

NOVAIS, S. A. *O que é pH?* 2023. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/quimica/o-que-e-ph.htm>. Acesso em: 15 mai. 2023. Citado na página 59.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Joost Burgi, Biografia*. 2010. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Burgi/>. Acesso em: 18 dez. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

PERNAMBUCO. *Currículo de Pernambuco: Ensino Médio*. 2021. Disponível em: <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/?pag=1&cat=18&art=5428>. Acesso em: 11 mar. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 70.

SCOTT, J. F. *John Napier, Matemático Escocês*. 2023. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/John-Napier>. Acesso em: 10 dez. 2022. Citado na página 18.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Ser Protagonista: Matemática e suas tecnologias: Álgebra e educação financeira: Ensino Médio*. [S.l.]: São Paulo: Edições SM, 2020. Citado na página 74.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: ArtMed, 1998. Citado na página 62.

Apêndices

APÊNDICE A – Como Plotar Gráficos em Escala Linear e Logarítmica no Microsoft Excel

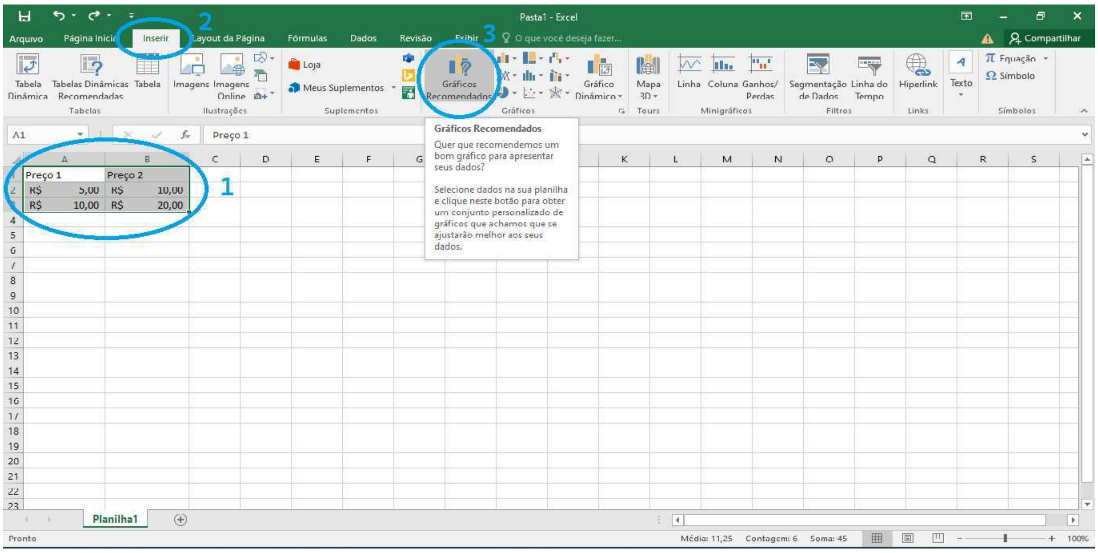
Nesta seção descreveremos uma sequência de procedimentos para ser feita no Microsoft Excel e mostraremos através de algumas imagens o passo a passo para que o leitor possa plotar gráficos em escalas lineares, bem como em escalas logarítmicas. Por ser um procedimento simples e de fácil execução, o docente pode aplicar no ambiente escolar com os estudantes sem muitas dificuldades.

Antes de iniciarmos, é importante ressaltar que os procedimentos sugeridos a seguir são voltados aos usuários do Sistema Operacional Windows e que possuam, previamente instalado em seus aparelhos, o pacote de aplicativos Microsoft Office, dentre os quais utilizaremos o Microsoft Excel.

Procedimentos a serem executados no Microsoft Excel por qualquer pessoa que nesta redação podemos nos referir como executor:

1. Em primeiro lugar abra um novo documento;
2. Preencha a planilha com os dados que você quer gerar o seu gráfico;
3. Selecione os dados e em seguida clique em Inserir > Gráficos Recomendados > Linha > OK. Conforme sequência 1, 2, 3, 4 e 5 circuladas nas figuras 47 e 48 a seguir;

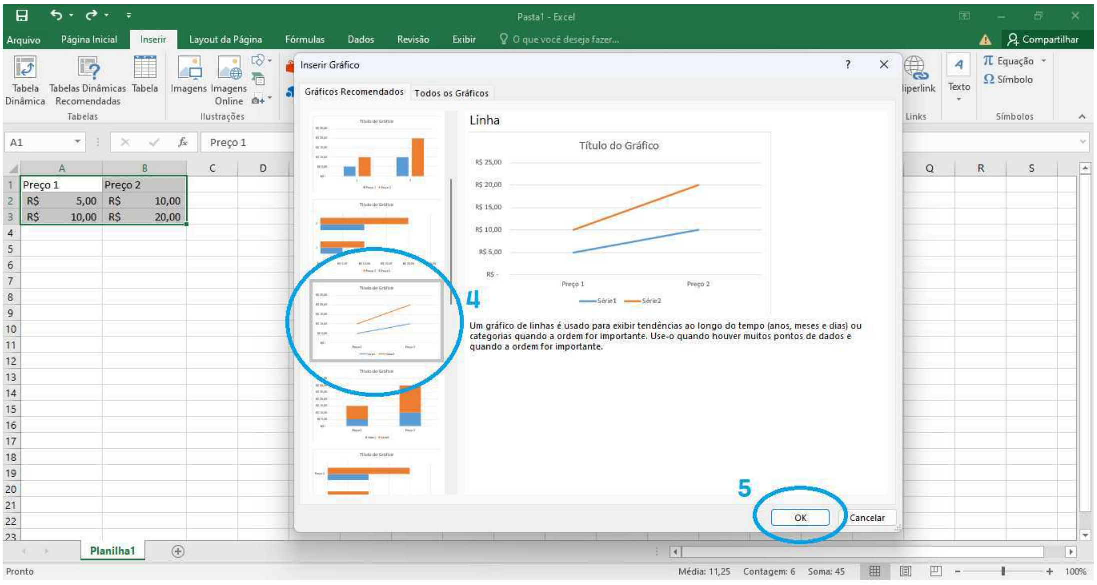
Figura 47 – Excel 1



.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 – Excel 2



.

Fonte: Elaborado pelo autor.

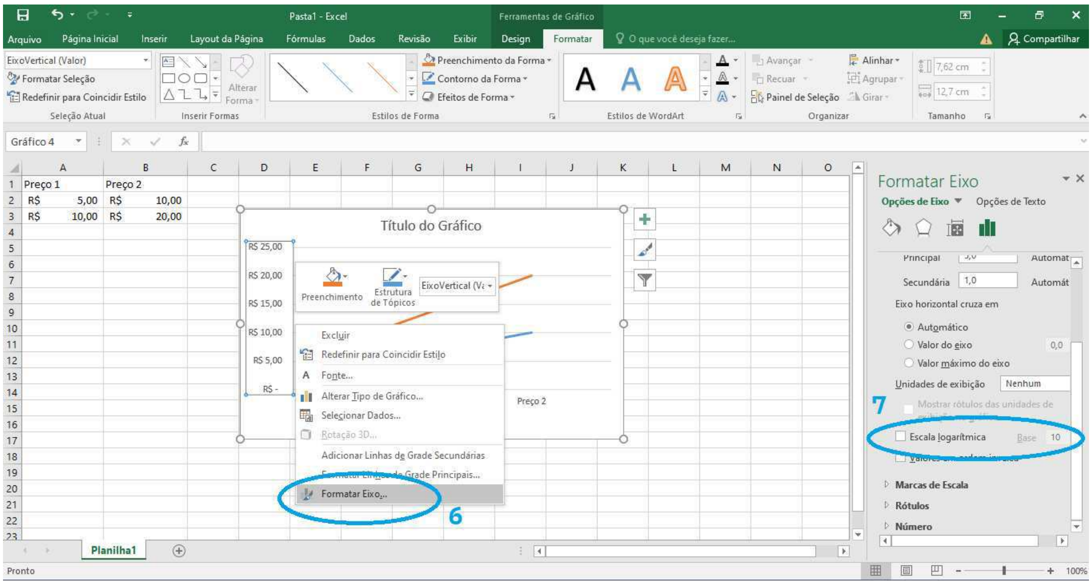
O gráfico que aparecerá no documento possui os valores do eixo vertical em escala linear e para alterar tais valores do eixo para escala logarítmica, devemos proceder conforme os itens a seguir:

4. Selecione o eixo vertical de valores e com o mouse posicionado sobre o mesmo eixo, clique com o botão direito do mouse e em seguida selecione a opção Formatar Eixo;

5. Aparecerá um Painel de Tarefas onde deve ser selecionada a caixinha Escala logarítmica, feito isso, será ativada automaticamente uma opção para alteração da base da escala na qual o executor pode realizar a mudança de base caso deseje;

6. Finalmente, o gráfico será automaticamente plotado em um eixo em escala logarítmica.

Figura 49 – Excel 3



.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação: Caso o executor deseje reverter o gráfico para um em escala linear, deve-se proceder de maneira análoga a dos itens [4.] e [5.] onde deverá desmarcar a opção Escala logarítmica.