

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Um Estudo Sobre Dimensões Extras

Alex de Albuquerque Silva

CAMPINA GRANDE

- Outubro / 2009 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

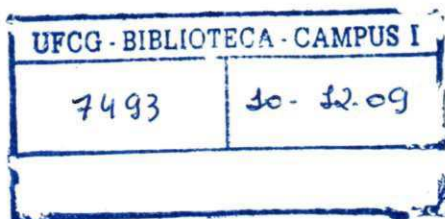
Um Estudo Sobre Dimensões Extras

Alex de Albuquerque Silva

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- Outubro /2009 -



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586e

2009

Silva, Alex de Albuquerque.

Um estudo sobre dimensões extras /Alex de Albuquerque Silva. —
Campina Grande, 2009.

91 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Referências.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia.

1. *Hiperespaço* 2. Dimensões Extras. 3. Problema da Hierarquia. 4. Teorias de
Imersão. I. Título.

CDU 531-4(043)

ALEX DE ALBUQUERQUE SILVA

UM ESTUDO SOBRE DIMENSÕES EXTRAS

Dissertação aprovada em 05/11/2009

BANCA EXAMINADORA

Fábio Leal de Melo Dahia

(Presidente)

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Unidade Acadêmica de Física - UFCG

Francisco de Assis de Brito

(Membro interno)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física - UFCG

Carlos Augusto Romero Filho

(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
Departamento de Física - UFPB

Para meus Pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo a Deus, o Eterno de Israel que, com sua perfeita sabedoria tem traçado meus caminhos.

Ao Prof. Fábio Leal de Melo Dahia, por sua disponibilidade, atenção e todo tipo de ajuda. Por sua grande paciência, a qual teve um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Francisco de Assis de Brito, pelo incentivo que recebi em diversos momentos e pela sua contribuição na minha formação.

A meus pais, irmãos, parentes e amigos, pelo apoio, confiança e incentivo.

Aos colegas da universidade, em especial Patrício José Felix, Hermes de Souza Jesuíno, Heydson Henrique Brito e Adiel Lemos, por toda ajuda concedida.

A todos que participaram efetivamente para a conclusão deste trabalho.

A CAPES/CNPQ pelo suporte financeiro.

RESUMO

De acordo com o nosso senso comum, ao que parece o espaço-tempo possui quatro dimensões. Contudo, existem razões, do ponto de vista da física teórica, para se acreditar na existência de dimensões extras. Mas se estas dimensões existem, as teorias devem ser capazes de explicar como elas estão escondidas das nossas observações. Neste trabalho, consideramos alguns modelos teóricos de dimensões superiores, tentando estabelecer a principal diferença entre os mecanismos utilizados em cada um deles para esconder as dimensões extras. Iniciamos com a teoria de Kaluza-Klein que postula a existência de dimensões extras compactas cujo comprimento é da ordem da escala de Planck. Em seguida, nós estudamos um modelo de branas, conhecido como modelo ADD, no qual as dimensões extras ainda são compactas mas cuja escala é muito maior que a escala de comprimento de Planck. Finalmente, no cenário de dimensões extras deformadas (warped extra dimensions), consideramos o modelo de uma única dimensão extra compacta (RSI) e o modelo RSII, no qual a dimensão extra tem uma escala infinita.

ABSTRACT

The space-time seems to have four dimensions according to our common sense. However there are reasons, from the viewpoint of theoretical physics, to believe in the existence of extra dimensions. But if there are extra dimensions, theories must be able to explain how they are hidden from our observation. In this work, we consider some models of higher dimensional theories, trying to establish the main difference concerning the mechanism used by them in order to hide the extra dimensions. We start with Kaluza-Klein theories which postulate the existence of compact extra dimensions, whose length is of the order of the Planck scale. Then, we study a brane world model, known as ADD model, in which extra dimensions are still compact, but whose scale can be much greater than the Planck length. Finally, in the scenario of warped extra dimensions, we consider the model of only one compact warped dimensions (RSI) and the RSII model, in which the extra dimension has an infinite scale.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Teoria de Kaluza-Klein	5
2.1	A Condição Cilíndrica	6
2.2	Mecanismo de Compactação de Klein	8
3	Dimensões Extras de Grande Escala: Modelo ADD	13
3.1	Localização da Matéria	14
3.1.1	Confinamento da Matéria	14
3.1.2	Densidade de Energia na Brana	16
3.1.3	Localização de Férmions	18
3.2	Potencial Gravitacional em Dimensões Extras	22
3.2.1	Potencial Gravitacional em um Espaço com uma Dimensão Extra Compacta.	25
3.3	Escala Fundamental do Comprimento da Dimensão Extra	28
3.3.1	Comprimento de Planck	28
3.3.2	Comprimento de Planck em Dimensões Extras	30
3.3.3	Constantes Gravitacionais e a Compactação	31
3.3.4	Dimensões Extras de Grande Escala e o Problema da Hierarquia . .	32
4	Cenário de Branas: Modelo RSI	34
4.1	Cenário de Branas : Modelos Randall-Sundrum	34
4.1.1	Modelo RSI	35

4.1.2	Linearização da Gravidade na Brana	39
4.1.3	Espectro de Massa dos Grávitons	43
5	Modelo RSII	49
5.1	Modos KK Contínuos	50
5.2	Função de Green	51
5.3	A Fonte e o Gauge	58
5.3.1	Transformação de Coordenadas	59
5.4	O Campo Gravitacional	63
5.4.1	A métrica estática com simetria esférica na brana	64
6	Comentários e Conclusões	67
A	Volumes em Dimensões Extras	72
B	Integral de Contorno no Plano Complexo	76
B.1	Teorema do Resíduo	76
B.2	Integrais no Plano Complexo	77
C	Constantes de Normalização das Autofunções	79
D	Integrais	85
E	Transformação de Coordenadas	87

Capítulo 1

Introdução

Em 1916 Albert Einstein apresentou ao mundo sua teoria da Relatividade Geral, na qual a gravidade deixava de ser vista como uma força e passava a ser considerada como pura propriedade geométrica do espaço-tempo. Entretanto, Einstein queria mais que isso. Segundo ele, não apenas a gravidade, mas também a teoria eletromagnética de Maxwell poderia ser escrita como propriedade da geometria do espaço-tempo. O eletromagnetismo seria visto, então, não mais como uma força, mas como deformação do espaço-tempo. A idéia de Einstein era desenvolver uma teoria de unificação das interações gravitacional e eletromagnética, a qual daria conta de explicar todos os fenômenos da natureza. Contudo sua tentativa de unificar estas grandezas não teve tanto êxito como ele sonhava.

É neste cenário de tentativas de unificar as interações fundamentais da natureza que surgem as teorias de dimensões extras. A primeira delas foi desenvolvida pelos físicos e matemáticos Theodor Kaluza e Oskar Klein, e ficou conhecida como teoria de Kaluza-Klein. Em sua teoria, Kaluza apresenta um modo de unificar a gravidade com o eletromagnetismo postulando a existência de uma quinta dimensão do espaço-tempo. Posteriormente, Klein fornece uma justificativa para explicar a razão pela qual esta dimensão extra é invisível.

Desde então, mais duas interações fundamentais foram descobertas, as interações fraca e forte. As interações fracas são responsáveis por certos tipos de decaimento radioativo, enquanto que as interações fortes mantêm os prótons e neutrons presos no interior dos

átomos, e juntamente com estas interações, surgiram novas teorias na tentativa de unificá-las, e a grande maioria destas teorias exigem a existência de dimensões extras.

Em nosso trabalho, vamos fazer uma revisão sobre as teorias de dimensões extras, apresentando alguns modelos dentro deste cenário, que se distinguem essencialmente pelo mecanismo por meio do qual as dimensões extras ficam mantidas escondidas da observação.

De início vamos tratar do modelo de Kaluza-Klein, que introduz a idéia inicial das dimensões extras. Neste modelo, o universo possui cinco dimensões, onde quatro destas dimensões são do tipo espaço e uma é o tempo [20], e a dimensão extra está enrolada, formando um círculo de raio l . Esta última hipótese referente à topologia da dimensão extra é fundamental para explicar a razão dessa dimensão estar escondida das observações experimentais. No modelo de Kaluza-Klein, admite-se usualmente que o raio l é da ordem do comprimento de Planck, $10^{-35}m$. Como veremos, sendo l desta magnitude, a dimensão extra se torna indetectável dentro da escala de energia disponível atualmente.

Em seguida vamos tratar de modelos nos quais o Universo observável é considerado como uma hipersuperfície que estaria imersa em um Universo com dimensão superior, denominado espaço ambiente. São as conhecidas teorias de imersão, nas quais a hipersuperfície, também chamada de brana (em uma alusão a uma membrana), contém a matéria e os campos quadrimensionais usuais em um estado de confinamento.

Há diferentes mecanismos de localização. No contexto da teoria de campo, por exemplo, o aprisionamento dos férmions, pode ser explicado por meio da interação com um campo escalar, como veremos no capítulo 3.

Os férmions e os campos localizados na brana não se propagam ao longo da dimensão extra, para energias baixas. Assim, nestes modelos o confinamento explicaria a ausência de traços de dimensões extras nos dados empíricos.

Ainda, neste modelo, o único campo que pode se propagar na dimensão extra é o campo gravitacional. Assim, para evitar conflito com os dados experimentais, é necessário impor a hipótese de que a dimensão extra é compacta. No entanto, ao contrário do que

ocorre no modelo de Kaluza-Klein, o raio da dimensão extra pode ser bem maior do que o comprimento de Planck, chegando até a ordem do micron, sem conflito com a experiência. A razão é que só agora os testes envolvendo a força gravitacional estão sendo realizados na escala microscópica [32].

Esses modelos de imersão, dentre os quais se destaca o modelo ADD [17], surgiram no final da década de 1990, tendo como principal inspiração a tentativa de resolver o problema da hierarquia entre a escala de Planck 10^{18}GeV a eletrofraca 10^3GeV . No entanto, para que isso seja alcançado de maneira consistente fenomenologicamente é necessário a existência de pelo menos duas dimensões extras [27].

Nos dois últimos capítulos discutimos os modelos de dimensões extras propostos em 1999 por Lisa Randall e por Raman Sundrum [14, 15]. Esses, também, são modelos de imersão. Eles se distinguem do modelo ADD quanto às características das dimensões extras. Eles mostram que a existência de uma única dimensão extra é fenomenologicamente viável, desde que o espaço ambiente possua uma constante cosmológica negativa ajustada ao valor da tensão da brana.

Existem dois modelos neste cenário; o primeiro chamamos de RSI e o segundo de RSII. Basicamente, a diferença entre estes modelos está no fato de que no modelo RSI a dimensão extra tem comprimento finito, isto é, ela é compacta devido à existência de duas branas com tensões iguais e com sinais contrários localizadas em pontos fixos do espaço ambiente, enquanto que no modelo RSII a segunda brana é removida, de forma que a dimensão extra passa a ter um comprimento infinito. Um ponto importante desses modelos é que a métrica que descreve o espaço tempo é modificada por um fator de deformação do espaço, conhecido na literatura como "warping factor", que surge devido aos efeitos da constante cosmológica e da tensão da brana [20]. Este fator é uma função da coordenada extra e decai da brana de tensão positiva até a brana de tensão negativa ao longo desta dimensão [23]. Segundo estes modelos, o espaço ambiente não perturbado é um espaço anti-de Sitter de 5 dimensões (AdS_5) e a métrica induzida na brana é a métrica de Minkowski. Nestes dois modelos, mesmo as dimensões possuindo dimensões

de comprimentos grandes, chegando até mesmo a infinito, como é o caso do modelo RSII, elas são imperceptíveis a baixas energias. Isto se deve ao fato da métrica que descreve o espaço-tempo ser modificada pelo fator de deformação.

Por fim, no modelo RSII discutimos o campo gravitacional criado por uma distribuição de matéria isolada que se encontra confinada na brana. No limite de campo fraco, verificamos que a métrica na brana é a solução de Schwarzschild na primeira aproximação. Calcularemos, também, as correções dessa solução devido a existência das dimensões extras.

Capítulo 2

Teoria de Kaluza-Klein

"Em abril de 1919, Einstein recebeu uma carta de um matemático desconhecido, Theodor Kaluza, da Universidade de Königsberg, na Alemanha. Num artigo curto, de apenas algumas páginas, este matemático estava propondo uma solução para um dos maiores problemas do século. Em poucas linhas, Kaluza estava unindo a teoria da gravidade de Einstein com a teoria da luz de Maxwell, introduzindo a quinta dimensão, isto é, quatro dimensões de espaço e uma dimensão de tempo."

(Michio Kaku em "Hiperespaço")

Em um artigo publicado em 1921, Kaluza [24] propõe a unificação entre a teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a relatividade geral de Einstein, levando em consideração um espaço-tempo de cinco dimensões. Kaluza supôs que a dimensão extra seria uma dimensão espacial z , de forma que o conjunto completo das coordenadas em um espaço-tempo (4+1)-dimensional seria (x^μ, z) , $\mu = 0, 1, 2, 3$.

As equações de Einstein em cinco dimensões sem o tensor energia-momento 5-dimensional são [24]:

$$G_{AB} = 0 \tag{2.0.1}$$

ou de maneira equivalente:

$$R_{AB} = 0 \tag{2.0.2}$$

onde $G_{AB} \equiv R_{AB} - Rg_{AB}/2$ é o tensor de Einstein 5-dimensional, R_{AB} e $R = g_{AB}R^{AB}$ são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente, em cinco dimensões, e $g_{AB}(A, B = 0, 1, 2, 3, 4)$ é a métrica 5-D. A ausência de matéria nestas equações vêm da suposição adotada por Kaluza de que o universo em dimensões mais altas está vazio. Neste mundo, onde uma das dimensões é o tempo e as outras quatro são dimensões espaciais, a métrica g_{AB} quando vista do espaço-tempo físico contém as seguintes partes:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(\mu, \nu = 0, \dots, 3), & \quad \text{a métrica do espaço-tempo ordinário 4-dimensional;} \\ g_{\mu z} = g_{z\nu}, & \quad \text{um 4-campo vetorial;} \\ g_{zz}, & \quad \text{um campo escalar.} \end{aligned}$$

Assim, no geral, nós identificamos a parte quadridimensional de g_{AB} como sendo $g_{\mu\nu}$, a parte $g_{\mu z}$ com A_μ (o potencial eletromagnético) e a parte g_{zz} com ϕ (o campo escalar). Uma maneira de parametrizar g_{AB} é a seguinte:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & -\kappa \phi^2 A_\mu \\ -\kappa \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix} \quad (2.0.3)$$

A assinatura da métrica 4-dimensional é tomada como sendo (+ - - -) e utilizamos as unidades $c = \hbar = 1$.

2.1 A Condição Cilíndrica

Kaluza ainda impôs a condição cilíndrica à sua teoria, ou seja, exigiu que a derivada de todas as componentes da métrica g_{AB} com respeito à quinta dimensão seja nula [11]

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0 \quad (2.1.4)$$

Essa exigência vem do fato que a dimensão extra não é observada. Não vemos uma quinta dimensão na Natureza, assim os fenômenos físicos ocorreriam em uma variedade 4-dimensional inserida em um universo de 5 dimensões.

O tensor de Ricci e os símbolos de Christoffel em cinco dimensões são definidos em termos da métrica g_{AB} exatamente como em quatro dimensões [1]:

$$R_{AB} = \partial_C \Gamma_{AB}^C - \partial_B \Gamma_{AC}^C + \Gamma_{CD}^C \Gamma_{AB}^D - \Gamma_{BD}^C \Gamma_{AC}^D \quad (2.1.5a)$$

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2} g^{CD} (\partial_A g_{DB} + \partial_B g_{DA} - \partial_D g_{AB}) \quad (2.1.5b)$$

Podemos utilizar a condição cilíndrica (2.1.4) em (2.1.5a). Com a métrica dada por (2.0.3), o tensor de Ricci em 5 dimensões se reduz às seguintes equações de campo:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{EM} - \frac{1}{\phi} [\nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \square \phi], \quad (2.1.6)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3 \frac{\partial^\mu \phi}{\phi} \quad (2.1.7)$$

$$\square \phi = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.1.8)$$

onde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$ é o tensor de Einstein em 4 dimensões, $T_{\mu\nu}^{EM} \equiv g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4 - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}$ é o tensor energia-momento eletromagnético, e $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, corresponde ao tensor eletromagnético de Maxwell. Se o campo escalar for constante no espaço-tempo, então, as duas primeiras equações acima são justamente as equações de Einstein e as equações de Maxwell:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \phi^2 T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (2.1.9)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.10)$$

Contudo a condição, $\phi = cte$ só é consistente com a equação (2.1.8) quando $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$.

Podemos também obter os mesmos resultados através da linguagem variacional. As equações de Einstein no vácuo podem ser obtidas através da ação de Einstein - Hilbert;

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.1.11)$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$ e R é o escalar de curvatura. As equações de Maxwell sem fontes surgem da ação

$$S_{EM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.1.12)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético. Juntando (2.1.11) e (2.1.12) obtemos as equações de Einstein - Maxwell para a gravidade acoplada ao campo eletromagnético. Contudo, Kaluza considerou somente a gravidade em cinco dimensões descrita pela ação

$$S_{EM} = -\frac{1}{16\pi G_{(5)}} \int d^4x dz \sqrt{-\hat{g}} \hat{R} \quad (2.1.13)$$

e $G_{(5)}$ é a constante gravitacional em cinco dimensões.

Novamente usando a métrica (2.0.3) e as definições (2.1.5a), e impondo a condição cilíndrica obtemos:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \phi \left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4} \phi^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{2}{3\kappa^2} \frac{\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi}{\phi^2} \right) \quad (2.1.14)$$

Esta ação descreve a gravidade quadridimensional juntamente com o eletromagnetismo e o campo escalar sem massa de Klein-Gordon [23]. Originalmente, na tentativa de se livrar deste campo escalar, Kaluza simplesmente o removeu fixando $\phi = 1$. Então, (2.1.14) é precisamente a ação de Einstein-Maxwell para a gravidade e o eletromagnetismo.

Com a suposição (2.1.4), Kaluza obteve êxito, derivando as equações de campo do eletromagnetismo e da gravidade em 4 dimensões por meio de uma única teoria de cinco dimensões. Desta forma, demonstrando que a TRG, quando interpretada como uma teoria de cinco dimensões no vácuo, ($G_{AB} = 0$), contém a Relatividade Geral em quatro dimensões na presença de um campo eletromagnético, ($G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{EM}$), juntamente com as leis de Maxwell do eletromagnetismo.

2.2 Mecanismo de Compactação de Klein

Em 1926 o matemático Oscar Klein introduziu alguns aperfeiçoamentos na teoria de Kaluza. Antes de tudo, é bom enfatizar que a compactação é distinta da condição cilíndrica, sendo ela apenas um mecanismo que explica a Natureza aparentemente quadrimen-

sional do universo. Klein supôs que a 5ª coordenada deveria ter a topologia de um círculo e a escala de comprimento muito pequena.

Vamos agora, discutir os efeitos dessas hipóteses.

Topologia de um Círculo (S^1)

Considere um campo escalar $\phi(x^\mu, z)$ definido no espaço de 5 dimensões. Se a quinta dimensão tem a topologia de um círculo, então, devemos ter:

$$\phi(x^\mu, z) = \phi(x^\mu, z + 2\pi l) \quad (2.2.15)$$

onde l representa o raio da quinta dimensão

Na verdade, podemos concluir que qualquer campo será periódico com respeito à quinta coordenada. Desta forma todos os campos podem ser expandidos em séries de Fourier:

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, z) = \sum_n g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l} \quad (2.2.16a)$$

$$\phi(x^\mu, z) = \sum_n \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l} \quad (2.2.16b)$$

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_n A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l} \quad (2.2.16c)$$

onde o índice (n) refere-se ao n -ésimo modo de Fourier. Os campos são independentes da coordenada extra apenas no modo zero ($n = 0$).

Vamos discutir os efeitos da quinta dimensão sobre o campo escalar. Por simplicidade vamos admitir que o cilindro é homogêneo e que a métrica é plana. Em cinco dimensões, a equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa é:

$$\square_{(5)}\phi = 0 \quad (2.2.17)$$

onde $\square_{(5)} = \square - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador D'Alembertiano em 5 dimensões. A equação (2.2.17) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Seguindo este método escrevemos.

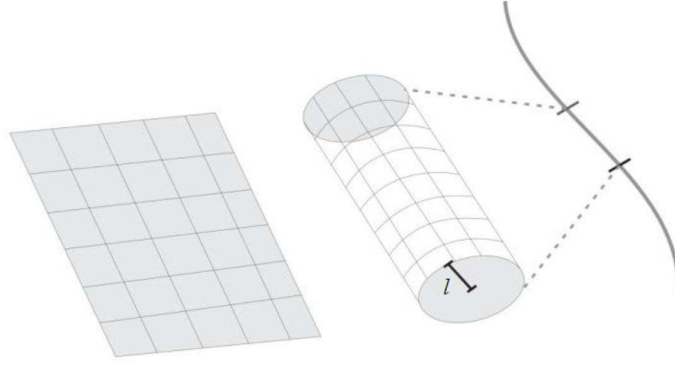


Figura 2.1: Dimensão extra no Modelo de Kaluza-Klein. As quatro dimensões espaciais formam um "cilindro" onde as três dimensões usuais (x^1, x^2, x^3) são infinitas e a 4ª dimensão (z) é um círculo de raio l

$$\phi(x^\mu, z) = \chi(x^\mu) \varphi(z) \quad (2.2.18)$$

então, substituindo (2.2.18) em (2.2.17) obtemos

$$\frac{1}{\chi(x^\mu)} \square \chi(x^\mu) + \frac{1}{\varphi(z)} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2.19)$$

O primeiro termo desta equação é uma função só de x^μ e o segundo termo é uma função só de z , a única maneira que esta equação pode ser satisfeita para todos os valores de x^μ e z é que cada termo seja igual a uma constante e que a soma destas constantes seja igual a zero, assim temos:

$$\frac{1}{\chi(x^\mu)} \square \chi(x^\mu) = C \quad (2.2.20)$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = -C \quad (2.2.21)$$

De (2.2.20) temos ainda

$$\square \chi(x^\mu) = C \chi(x^\mu) \quad (2.2.22)$$

Esta equação nada mais é que a equação de Klein-Gordon num espaço-tempo de 4 dimensões onde a constante C representa a massa do campo. Resolvendo (2.2.21)

encontramos

$$\varphi(z) = A \sin(\sqrt{C}z) + B \cos(\sqrt{C}z) \quad (2.2.23)$$

Desta forma utilizando as devidas condições de contorno dadas por (2.2.15), ou seja,

$$\phi(0) = \phi(2\pi l) \quad (2.2.24)$$

Verificamos que os valores permitidos para a constante C são:

$$C = \frac{n^2}{l^2} \quad (2.2.25)$$

Portanto, C é não-negativa, então podemos escrever $C = m^2$. Isto reforça a interpretação de que esta constante faz o papel de massa para o campo 4-D. De fato, para cada valor permitido de m , temos:

$$\square \chi^{(n)}(x^\mu) = m_n^2 \chi^{(n)}(x^\mu) \quad (2.2.26)$$

onde

$$m_n^2 = \frac{n^2}{l^2} \quad (2.2.27)$$

Sendo assim, do ponto de vista quadrimensional, $\chi(x^\mu, z)$ pode ser decomposto em um modo zero ($n = 0$) sem massa, ($\phi^{(0)}$), e num conjunto de modos que chamaremos genericamente de modos de Kaluza-Klein (KK). Cada modo KK carrega uma energia da ordem de n/l , (a ordem da massa de repouso), e, portanto, não podem ser excitados em processos envolvendo energias inferiores àquele patamar. De um ponto de vista quadrimensional cada modo KK pode ser interpretado como um tipo diferente de partícula com massa $m_n = |n|/l$.

Escala Pequena

Se l for suficientemente pequeno, a energia necessária para estimular os modos com $n \neq 0$ seria tão grande que estaria fora do alcance experimental e assim, somente o modo zero ($n = 0$), que independe da coordenada (z), seria observado, como é exigido na teoria de

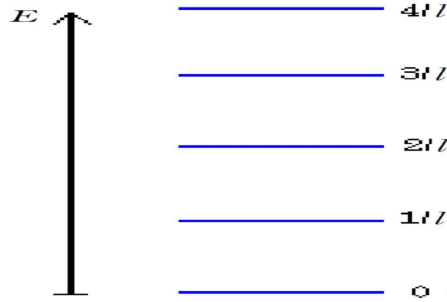


Figura 2.2: Torre de Kaluza-Klein

Kaluza. A dimensão extra aparecerá quando a energia disponível nos aceleradores for da ordem de:

$$E \sim \frac{1}{l} \quad (2.2.28)$$

Então, para tentar explicar o fato de que até agora nenhuma dimensão extra foi observada, comumente a escala de compactação é adotada como sendo da ordem do comprimento de Planck, ou seja,

$$l_p \equiv (\hbar G/c^3)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-35} m \quad (2.2.29)$$

Desta forma a massa dos estados excitados seriam da ordem da massa de Planck, ou seja, $M_p \approx 10^{19} GeV$. Tal escala de comprimento assegura que as dimensões extras estão além do alcance da observação, considerando o nível de energia da ordem de 1Tev atingida nos aceleradores mais potentes atualmente [34].

Capítulo 3

Dimensões Extras de Grande Escala: Modelo ADD

Entre os modelos de dimensões extras, o modelo ADD [17] também é conhecido como modelo de dimensões extras de grande escala. Em contraste com o modelo proposto por Kaluza, que possui dimensões extras compactas com comprimentos da ordem do comprimento de Planck, no modelo ADD as dimensões extras, que ainda são compactas, podem atingir a escala de comprimento submilimétrica, sem conflitos com a experiência [32].

Historicamente podemos dizer que o modelo ADD surge como uma tentativa de resolver o chamado problema da Hierarquia. Posto resumidamente, este problema consiste em explicar a enorme discrepância de magnitude entre a escala eletro-fracas e a escala de Planck. O modelo se baseia na hipótese de que a matéria e os campos estão confinados numa hipersuperfície (quadrimensional) e apenas a gravidade pode se propagar ao longo da dimensão extra.

Quando Klein introduziu a idéia de compactação da dimensão extra no modelo teórico de Kaluza, ele imaginou a compactação como um mecanismo que explicasse a natureza aparentemente quadrimensional do universo. De fato, uma dimensão extra enrolada em um pequenino círculo com um tamanho próximo ao comprimento de Planck será indetectável. No modelo ADD as dimensões extras estão escondidas por meio de um mecanismo de confinamento da matéria e dos campos na hipersuperfície. O confinamento é uma

idéia já bem conhecida na literatura e nas seções iniciais deste capítulo vamos ilustrar esse mecanismo estudando o modelo de localização de férmions numa parede de domínio proposto por Rubakov e Shaposhnikov [19], no qual o modo zero dos férmions está preso a parede e não pode se propagar ao longo da dimensão extra.

Em seguida, discutiremos as características da gravitação nesse modelo.

3.1 Localização da Matéria

Nosso universo de $(3+1)$ dimensões pode ser imaginado como uma hipersuperfície imersa em um espaço de dimensões extras, na qual toda a matéria ordinária se encontra presa. A esta hipersuperfície 3D imersa em um universo de dimensões superiores denominamos 3-brana, onde o número 3 se refere ao número de dimensões espaciais da hipersuperfície. Desta forma, uma brana é uma subvariedade em um espaço ambiente maior.

3.1.1 Confinamento da Matéria

Para ilustrar o mecanismo de confinamento, vamos construir uma teoria de localização de férmions em um modelo que admite a existência de uma dimensão extra z [18]. Consideremos um campo escalar $\phi = \phi(x^\mu, z)$, cuja ação é dado por:

$$S = \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (3.1.1)$$

onde $A = 0, 1, 2, 3, 4$ e $V(\phi)$ é o potencial escalar.

A fim de obtermos uma solução do tipo parede de domínios, vamos considerar o seguinte potencial

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - \nu^2)^2 \quad (3.1.2)$$

O comportamento deste potencial é descrito pela figura (3.1)

Para este potencial temos dois valores de menor energia $\phi = -\nu$ e $\phi = \nu$. Notamos ainda que para, $\phi = 0$, existe um máximo instável.

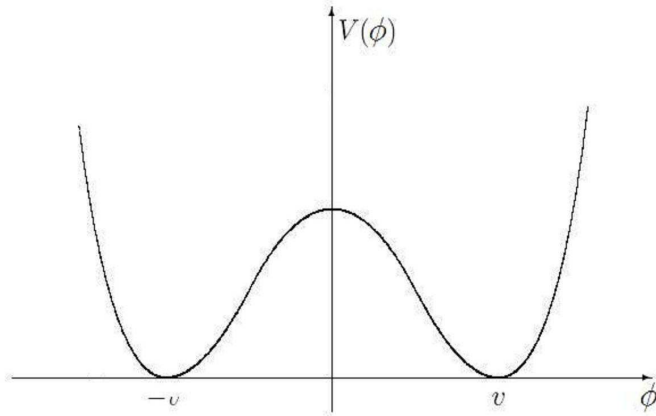


Figura 3.1: Gráfico do potencial escalar em função do campo

Para obter a equação dinâmica do campo, devemos utilizar as equações de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_A \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_A \phi)} \right] = 0 \quad (3.1.3)$$

Aplicando a Lagrangiana acima, obtemos:

$$\square_{(5)} \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.1.4)$$

onde $\square_{(5)} = \partial_A^2 = \eta^{AB} \partial_A \partial_B$. Assim

$$\partial_0^2 \phi - \partial_\mu^2 \phi + \frac{\lambda^2}{2} \phi (\phi^2 - \nu^2) = 0$$

Queremos, agora, obter uma solução conhecida como parede de domínio. Para isto, vamos considerar uma solução estacionária e que depende apenas de z . Neste caso, a equação de campo se reduz a:

$$-\frac{d^2 \phi_0(z)}{dz^2} + \frac{\lambda^2}{2} \phi_0 (\phi_0^2 - \nu^2) = 0 \quad (3.1.5)$$

Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{d\phi_0}{dz} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} (\phi_0^2 - \nu^2)^2 \right] = 0 \quad (3.1.6)$$

A solução que procuramos tem a seguinte forma [18]

$$\phi_0(z) = v \tanh\left(\frac{\lambda\nu z}{2}\right) \quad (3.1.7)$$

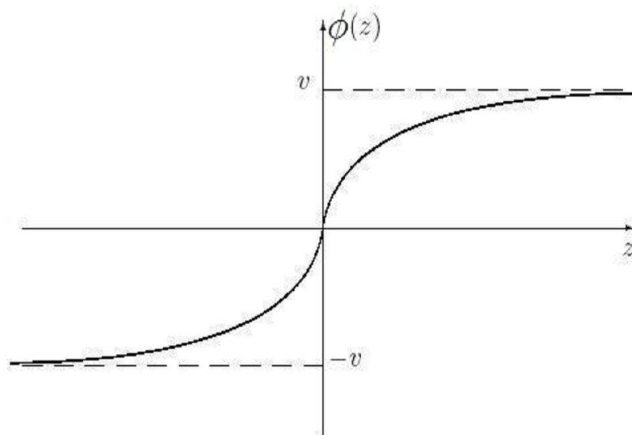


Figura 3.2: Solução do tipo parede de domínio.

Observe que: $\phi_0(z \rightarrow -\infty) = -\nu$ e $\phi_0(z \rightarrow +\infty) = +\nu$. Por isto, essa solução é conhecida como parede de domínio, porque ela separa os dois estados de menor energia do campo ϕ . Em outras palavras, esta configuração de campo conecta os estados fundamentais $\phi = \nu$ em $z = +\infty$ e $\phi = -\nu$ em $z = -\infty$. Ela também costuma ser chamada de kink.

3.1.2 Densidade de Energia na Brana

Vamos agora discutir algumas propriedades da parede de domínio. Consideremos inicialmente a densidade de energia correspondente ao kink. Seja H_0 a densidade de Hamiltoniana associada ao campo ϕ . Esta grandeza, como sabemos, tem unidades de densidade de energia. Como estamos considerando um espaço com cinco dimensões ($4 + 1$), H_0 terá unidades de energia por 4-volume (4 dimensões espaciais). Assim, integrando H_0 com respeito à dimensão extra, obtemos a densidade de energia (energia por 3-volume) do campo:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} H_0 dz \quad (3.1.8)$$

Como sabemos, a Hamiltoniana H_0 é dada por $H_0 = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$, onde $\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ é o momento canonicamente conjugado a $\dot{\phi}$.

Segue, então, que para o campo escalar, temos:

$$H_0 = \frac{1}{2}(\partial_A \phi)^2 + \frac{\lambda^2}{8}(\phi^2 - \nu^2)^2 \quad (3.1.9)$$

Notamos que $\phi = -\nu$ e $\phi = +\nu$ são soluções da equação de movimento (3.1.4) com energia zero, pois para esta solução $H_0 = 0$.

Considerando a solução ϕ_0 do tipo parede de domínio, dada em (3.1.7), encontramos

$$H_0 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{\cosh^4(\frac{\lambda \nu z}{2})} \quad (3.1.10)$$

Temos portanto a seguinte distribuição de energia, ilustrada na figura (3.3)

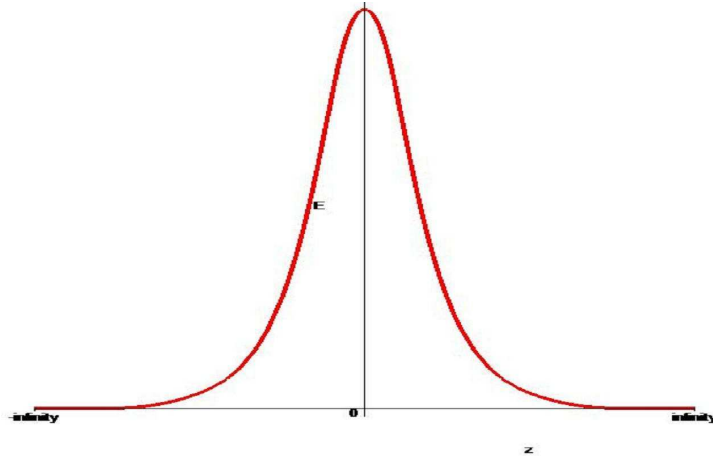


Figura 3.3: Densidade de energia da brana localizada em $z = 0$

Com isso concluímos que a energia está concentrada em torno de $z = 0$. Quanto maior λ , maior a concentração. Assim, podemos dizer que λ introduz uma escala que pode ser interpretada como o inverso da espessura da parede de domínio.

Conhecendo H_0 , podemos agora calcular a densidade de energia da parede de domínio. De (3.1.8), temos:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{\cosh^4(\frac{\lambda \nu z}{2})} dz = \frac{2\lambda \nu^3}{3} \quad (3.1.11)$$

No limite $\lambda \rightarrow \infty$, em que a espessura da parede vai a zero, se σ for mantido constante, a parede de domínio dará origem a uma estrutura conhecida como 3-brana.

3.1.3 Localização de Férmions

Vamos agora introduzir férmions neste modelo. Sabemos que férmions são descritos por espinores (ψ), e que a equação do movimento dos férmions é a equação de Dirac.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (3.1.12)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac, que obedecem à seguinte álgebra [9]:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} 1 \quad (3.1.13)$$

onde γ é unitário e anti-hermitiano, ou seja, $(\gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^{-1}$ e $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$.

Assim, temos a equação de Dirac em um espaço-tempo de quatro dimensões. A partir da equação (3.1.12) podemos escrever a seguinte ação

$$S = \int d^4x (i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi), \quad (3.1.14)$$

de onde vem a lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi \quad (3.1.15)$$

Agora vamos escrever a equação de Dirac para um espaço-tempo de cinco dimensões. Neste caso as matrizes de Dirac são [19]:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \quad (3.1.16)$$

$$\Gamma^z = -i\gamma^5$$

explicitamente, $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$

As matrizes Γ^A satisfazem à mesma álgebra das matrizes γ^μ , ou seja,

$$\Gamma^A \Gamma^B + \Gamma^B \Gamma^A = 2g^{AB} \mathbf{1} \quad (3.1.17)$$

Admitindo que a lagrangiana do campo de Dirac em 5-D tem a mesma forma (3.1.15), ou seja,

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (3.1.18)$$

a ação será então dada por

$$S_{1/2} = \int d^4x dz (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - m\bar{\Psi}\Psi) \quad (3.1.19)$$

o que implica a seguinte equação para o campo de Dirac em 5-D:

$$(i\Gamma^A\partial_A - m)\Psi = 0 \quad (3.1.20)$$

Vamos, agora, estudar o comportamento dos férmions, descritos pelo campo de Dirac, numa parede de domínio. Para isto, vamos admitir que o férmion interage com o campo escalar por meio de uma interação do tipo Yukawa.

Neste caso, a ação da interação toma a seguinte forma:

$$S_{int} = -h \int d^4x dz \phi \bar{\Psi}\Psi \quad (3.1.21)$$

onde h é uma constante de acoplamento.

Assim, a ação total será a ação do campo de Dirac mais a ação da interação, ou seja $S = S_{1/2} + S_{int}$, com o campo ϕ descrito pela solução ϕ_0 , da parede de domínio.

$$S = \int d^4x dz (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - h\phi_0\bar{\Psi}\Psi) \quad (3.1.22)$$

Para o caso em que consideramos um férmion sem massa, ou seja, $m = 0$, temos:

$$S = \int d^4x dz (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - h\phi_0\bar{\Psi}\Psi) \quad (3.1.23)$$

A partir desta ação, obtemos a seguinte equação do movimento:

$$i\Gamma^A \partial_A \Psi - h\phi_0 \Psi = 0, \quad (3.1.24)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$i\Gamma^z \partial_z \Psi + i\Gamma^\mu \partial_\mu \Psi - h\phi_0 \Psi = 0 \quad (3.1.25)$$

Vamos tentar resolver a equação acima pelo método da separação de variáveis. Então, propomos $\Psi_{(5)}(x, z) = \psi(x) f(z)$, onde $\psi(x)$ é o espinor de Dirac em 4-D. Obtemos então

$$i\Gamma^z \psi(x) \partial_z f(z) + i\Gamma^\mu f(z) \partial_\mu \psi(x) - h\phi_0 \psi(x) f(z) = 0 \quad (3.1.26)$$

Podemos dividir a expressão acima pela função $f(z)$. Logo

$$i\Gamma^z \psi(x) \frac{\partial_z f(z)}{f(z)} + i\Gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - h\phi_0 \psi(x) = 0 \quad (3.1.27)$$

Se impusermos a seguinte restrição ao espinor:

$$\gamma^5 \psi = -\psi, \quad (3.1.28)$$

obteremos de (3.1.27) a seguinte equação:

$$\left[\frac{1}{f(z)} \partial_z f(z) + h\phi_0 \right] \psi(x) - i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0 \quad (3.1.29)$$

Portanto, para satisfazer a equação acima devemos ter

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = m\psi(x) \quad (3.1.30)$$

onde a constante m é interpretada como a massa do spinor em 4-D [8, 10]. Assim (3.1.29) torna-se:

$$\frac{df(z)}{dz} = (m - h\phi_0) f(z) \quad (3.1.31)$$

Para o caso de uma partícula sem massa $m = 0$, ou seja, para o modo zero, temos

$$\frac{df(z)}{dz} = -h\phi_0 f(z) \quad (3.1.32)$$

A equação (3.1.32) pode ser facilmente resolvida. Admitindo que $f(z)$ tende a zero no infinito, como condição de contorno, encontramos:

$$f(z) = \exp\left(-h \int_0^z \phi_0(z) dz\right) \quad (3.1.33)$$

Já o espinor $\psi(x)$ satisfaz à equação de Dirac quadrimensional. No entanto devemos lembrar que (3.1.28) impõe uma condição para o espinor $\psi(x)$. Esta restrição pode ser interpretada da seguinte forma. Sabemos que o espinor pode ser escrito em função de duas componentes [9, 10]:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (3.1.34)$$

onde $\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ e $\psi_R = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ são os espinores de Weyl. Em termos desses espinores, a equação (3.1.28) é equivalente a condição $\psi_L = -\psi_R$, ou seja, os espinores de Weyl não são independentes entre si. Para o modo zero ($m = 0$), esta condição (3.1.28), portanto, não implica nenhuma restrição física, já que as partículas de massa nula apresentam quiralidade bem definida.

A solução para o modo zero pode ser escrita, então, como:

$$\psi_0 = \exp\left(-\int_0^z h\phi_0(z) dz\right) \psi_L(x) \quad (3.1.35)$$

A partir desta equação podemos concluir que o modo zero fermiônico (férmions 4-D) está localizado próximo de $z = 0$, isto é, na parede de domínio e que para $|z|$ muito grande, o modo zero cai exponencialmente ao longo da dimensão extra.

A partir de equação (3.1.31) podemos determinar os valores possíveis para m , o que constitui uma espécie de massa dos modos KK . De acordo com Rubakov [19] o espectro de massa tem a seguinte característica apresentada na figura (3.4).

A característica fundamental deste espectro é que existe um salto entre o modo zero e os demais modos proporcionais a $m_5 = h\nu$. Assim, se ν for muito grande, então os modos com massa estariam inacessíveis do ponto de vista experimental. Desta maneira, o modelo torna-se compatível com os dados empíricos.

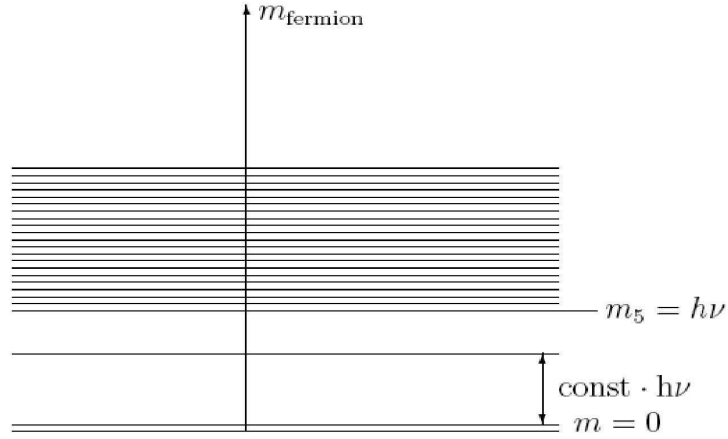


Figura 3.4: Espectro de massa do fermions presos na brana. O *hiato* entre o modo zero ($m = 0$) e os modos contínuos é proporcional a $h\nu$. A parte contínua tem início em $m_5 = h\nu$.

3.2 Potencial Gravitacional em Dimensões Extras

No modelo ADD, a matéria e os campos estão localizados na brana. Na seção anterior examinamos um mecanismo de confinamento para os férmions. Os outros campos também estão confinados por diferentes mecanismos. No modelo ADD, o único campo que não está "aprisionado" é o campo gravitacional. Nesta seção pretendemos discutir os efeitos da dimensão extra sobre o campo gravitacional. Vamos começar nossa discussão estudando os efeitos das dimensões extras no potencial gravitacional Newtoniano. No contexto clássico, o campo gravitacional \vec{g} satisfaz à equação:

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \quad (3.2.36)$$

onde ρ é a densidade de massa da matéria.

Vamos usar essa equação para determinar o campo gravitacional de um corpo de massa m com simetria esférica. Considere um corpo de massa m , uma 2-esfera $S^2(r)$ de raio r centrada em torno de corpo massivo e uma 3-bola $B^3(r)$ cujo contorno é a 2-esfera [7]. Integramos ambos os lados de (3.2.36) sobre a 3-bola

$$\int_{B^3} (\nabla \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G \int_{B^3} \rho dV \quad (3.2.37)$$

Utilizando o teorema da divergência do lado esquerdo de (3.2.37) e levando em consid-

eração que a integral da densidade de matéria sobre todo o volume da 3-bola nos fornece a massa total do corpo, nós temos

$$\int_{S^2} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm \quad (3.2.38)$$

Para um corpo com simetria esférica, $\vec{g}(r)$ é radial e depende apenas de r .

Assim, sobre a superfície de $S^2(r)$, temos

$$g \int_{S^2} dA = -4\pi Gm \quad (3.2.39)$$

onde a área da esfera é $4\pi r^2$, assim

$$g(r) = -\frac{Gm}{r^2} \quad (3.2.40)$$

ou

$$\vec{g}(r) = -\frac{Gm}{r^2} \hat{e}_r \quad (3.2.41)$$

onde $\hat{e} = \vec{r}/|\vec{r}|$ é o vetor unitário na direção do raio da esfera.

Este é, portanto, um resultado já conhecido para o campo gravitacional de um corpo de massa m em um espaço-tempo de 4 dimensões. Vamos agora, calcular o campo gravitacional deste mesmo corpo em um espaço com n dimensões espaciais. Então, novamente consideremos o corpo de massa m e uma esfera $S^{n-1}(r)$ de raio r centrada no corpo de massa m , esta esfera é o contorno da Bola $B^n(r)$. Novamente integramos ambos os lados da equação (3.2.36) sobre a Bola $B^n(r)$:

$$\int_{B^n} (\nabla \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G^{(n)} \int_{B^n} \rho dV \quad (3.2.42)$$

contudo

$$\int_{B^n} (\nabla \cdot \vec{g}) dV = \text{Fluxo de } \vec{g} \text{ através de } S^{n-1}(r) \equiv \Phi_m \quad (3.2.43)$$

De (3.2.42), temos

$$\Phi_m = -4\pi G^{(n)}m \quad (3.2.44)$$

Por outro lado, calculando o lado esquerdo de (3.2.42), por meio do teorema da divergência, obtemos:

$$\Phi_m = g(r) \text{Vol}(S^{n-1}) \quad (3.2.45)$$

Mas o volume de uma esfera em um espaço de dimensões extras é determinado por [7] (*ver apêndice A*)

$$\text{Vol}(S^{n-1}(r)) = r^{n-1} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (3.2.46)$$

Portanto utilizando (3.2.45) e (3.2.46) em (3.2.44), temos

$$\vec{g}(r) = -\frac{2\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2-1}} \frac{G^{(n)}m}{r^{n-1}} \hat{e}_r \quad (3.2.47)$$

Para o caso usual em que temos 3 dimensões espaciais ($n = 3$), recobramos a lei de Newton do inverso do quadrado da distância. Em dimensões superiores o campo gravitacional cai mais rápido a distâncias grandes. Na proximidade do corpo massivo, contudo o campo cresce mais rapidamente.

O campo gravitacional é conservativo; assim

$$\vec{\nabla} \times \vec{g}(r) = 0 \quad (3.2.48)$$

Isto nos permite concluir que \vec{g} pode ser representado como o gradiente de uma função escalar. Assim, podemos escrever

$$\vec{g}(r) = -\vec{\nabla}\phi \quad (3.2.49)$$

onde ϕ é chamado de potencial gravitacional.

No caso de um campo radial, o potencial ϕ poderá ter no máximo uma dependência em r , desta forma a equação (3.2.49) se reduz a

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dr}\hat{e}_r = -\vec{g}(r) \quad (3.2.50)$$

Se utilizamos (3.2.47), teremos

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{2\Gamma(n/2) Gm}{\pi^{n/2-1} r^{n-1}} \quad (3.2.51)$$

Logo,

$$\phi(r) = \frac{2\Gamma(n/2) Gm}{\pi^{n/2-1} (2-2n) r^{n-2}} \quad (3.2.52)$$

Este, portanto, é o potencial gravitacional para longas distâncias gerado por uma massa num espaço com n dimensões espaciais. Devemos ressaltar que as dimensões consideradas aqui são não-compactas.

3.2.1 Potencial Gravitacional em um Espaço com uma Dimensão Extra Compacta.

Vamos determinar de forma explícita o potencial gerado por uma massa que se encontra em um universo multidimensional no qual a dimensão extra é compacta.

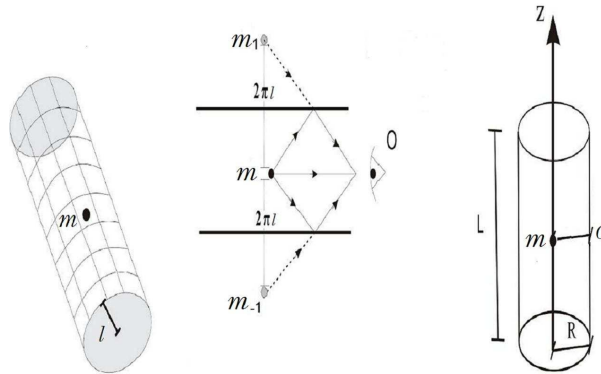


Figura 3.5: Na primeira figura, temos a massa localizada em um determinado ponto do nosso universo. Já na figura seguinte, o cilindro é representado por um espaço "aberto" com as identificações topológicas (o observador sente a influência de várias imagens topológicas). Na última figura, temos uma situação onde o observador está muito distante da massa e observa uma distribuição praticamente contínua destas massas

Um certo observador, que está localizado num certo ponto O , observa a massa localizada em um ponto do universo. Como a dimensão extra do universo é compacta e possui

a topologia de um círculo, as linhas de força que se originam na massa m darão voltas em torno do espaço (devido a forma cilíndrica que este possui) até atingir o observador localizado no ponto O .

Podemos pensar nesta situação de uma maneira mais simples. Vamos considerar que podemos cortar o cilindro e então desenrolá-lo. Temos agora um plano e no centro deste plano está colocada a nossa massa. Ainda nesta situação o observador em O será atingido pelas diversas linhas de força que tem origem na massa. Do seu ponto de vista, ele não estará sofrendo a ação de apenas uma única massa, mas sim de várias outras massas (m_1, m_2, \dots) espalhadas ao longo de uma linha que passa pelo centro da massa. A estas supostas massas observadas por O daremos o nome de imagens topológicas. A distância mínima entre as massas será de $2\pi l$, que é justamente o tamanho do comprimento da dimensão extra. Se o observador se encontra a uma distância R muito maior que l , as massas estarão aparentemente distribuídas uniforme e continuamente ao longo da dimensão extra. Poderemos portanto, utilizar a lei de Gauss para calcular o campo gerado por esta linha de massa [28].

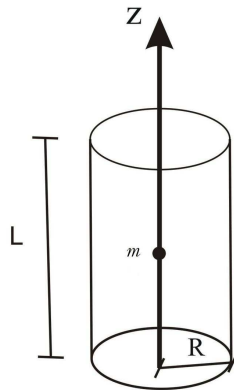


Figura 3.6: Superfície Gaussiana em torno da linha de imagens topológicas

A situação que estamos discutindo pode ser representada como está descrito na Figura (3.6), onde as massas estão situadas no eixo que representa a dimensão extra. O cilindro de altura L corresponde a nossa ‘superfície’ Gaussiana. Como estamos num espaço com quatro dimensões espaciais, a base do cilindro é uma esfera, em vez de ser um círculo [28].

Consideremos novamente a lei de Gauss como apresentada em (3.2.38) onde a integral de área é realizada sobre a superfície gaussiana

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G_5 M_{int}$$

onde M_{int} é a quantidade de massa topológica contida na linha contínua dentro da superfície gaussiana cilíndrica. Bem, as massas topológicas estão dispostas ao longo de uma linha que passa por cada uma delas e a distância de separação de uma imagem topológica para outra é de $2\pi l$, assim, o número de cargas contidas numa linha de comprimento L (comprimento da superfície gaussiana cilíndrica) será igual a $\frac{L}{2\pi l}$. Com isso temos que M_{int} será

$$M_{int} = \frac{L}{2\pi l} m \quad (3.2.53)$$

onde l é o raio da dimensão extra.

Considerando a simetria da distribuição de matéria, podemos concluir que \vec{g} terá simetria cilíndrica. Assim, \vec{g} é perpendicular a dimensão extra e dependerá apenas da coordenada radial R da superfície Gaussiana. Segue, então, que

$$g(R) \int dA = -4\pi G_5 \left(\frac{L}{2\pi l} m \right) \quad (3.2.54)$$

como a base deste cilindro é uma esfera, assim a área do "cilindro" será $(4\pi R^2) L$, onde R é o raio do cilindro Gaussiano. Portanto

$$g(R) (4\pi R^2) L = -4\pi G_5 \left(\frac{L}{2\pi l} m \right) \quad (3.2.55)$$

$$\vec{g}(R) = -\frac{G_5 m}{2\pi R^2 l} \hat{e}_R \quad (3.2.56)$$

O potencial gravitacional será então

$$\phi(R) = -\left(\frac{G_5 m}{2\pi l} \right) \frac{1}{R} \quad (3.2.57)$$

Se identificarmos

$$G_4 = \frac{G_5}{2\pi l} \quad (3.2.58)$$

obtemos

$$\phi(R) = -4\pi \frac{G_4 m}{R} \quad (3.2.59)$$

Portanto, para grandes distâncias comparadas com o raio da dimensão extra, recuperamos a expressão válida no espaço de $(3 + 1)$ -dimensões.

3.3 Escala Fundamental do Comprimento da Dimensão Extra

3.3.1 Comprimento de Planck

A gravitação é descrita pela Teoria da Relatividade Geral. Contudo, quando tratamos de campos fracos e baixas velocidades a Teoria da Relatividade Geral recai na Teoria Newtoniana da gravitação. Portanto, sob determinadas circunstâncias a gravitação Newtoniana é suficiente para entendermos aspectos físicos. Aqui, vamos utilizá-la para calcular o comprimento de Planck em várias dimensões e investigar como as constantes gravitacionais se comportam quando existem dimensões espaciais compactas [7].

Em nosso universo 4-dimensional as leis da gravitação de Newton nos garantem que a força de atração entre dois corpos com massa varia com o inverso do quadrado da distância de separação entre estes corpos, ou seja

$$|\vec{F}^{(4)}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.3.60)$$

Contudo, como foi demonstrado nas seções anteriores, esta lei não é válida num espaço com mais dimensões.

A constante gravitacional em quatro dimensões G possui o seguinte valor numérico:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \quad (3.3.61)$$

As unidades de medidas envolvidas são.

$$[G] = [\text{força}] \frac{L^2}{M^2} = \frac{ML}{T^2} \cdot \frac{L^2}{M^2} = \frac{L^2}{MT^2} \quad (3.3.62)$$

Além disso vamos recordar que

$$[c] = \frac{L}{T} \quad , \quad [\hbar] = \frac{ML^2}{T} \quad (3.3.63)$$

Como podemos verificar, a análise das dimensões dessas grandezas físicas fica definida em termos de três unidades básicas: comprimento, massa e tempo. No estudo da gravitação, por conveniência, utilizamos o sistema de unidades naturais. Neste sistema as unidades básicas de comprimento, massa e tempo são definidas de maneira que as três constantes fundamentais c , \hbar e G tomem valores numéricos iguais a um. Estas novas unidades são chamadas de *comprimento de Planck* l_p , *massa de Planck* m_p e *tempo de Planck* t_p . Pela construção, nestas novas unidades, temos:

$$G = 1 \cdot \frac{l_p^3}{m_p t_p^2} \quad (3.3.64)$$

$$c = 1 \cdot \frac{l_p}{t_p} \quad (3.3.65)$$

$$\hbar = 1 \cdot \frac{m_p l_p^2}{t_p} \quad (3.3.66)$$

Podemos então, obter l_p , m_p e t_p em termos de c , \hbar e G

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,61 \cdot 10^{-33} \text{cm} \quad (3.3.67)$$

$$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,4 \cdot 10^{-44} \text{s} \quad (3.3.68)$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,17 \cdot 10^{-5} \text{gm} \quad (3.3.69)$$

Como essas quantidades envolvem as constantes G , que representa a gravitação, c (Relatividade Especial) e \hbar (quântica), é comum admitir-se que estes valores representam a escala na qual os efeitos da gravidade quântica podem ser importantes.

3.3.2 Comprimento de Planck em Dimensões Extras

O comprimento de Planck como está definido em (3.3.67) é uma grandeza quadrimensional. Podemos calcular o comprimento de Planck em qualquer dimensão utilizando as constantes c , \hbar e $G^{(\eta)}$. Aqui η representa o número de dimensões do espaço-tempo. Para determinar o comprimento de Planck em várias dimensões devemos determinar as unidades de $G^{(\eta)}$. Consideremos o potencial gravitacional ϕ de uma distribuição de massa em $(3 + 1)$ -dimensões:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_m \quad (3.3.70)$$

onde ρ_m é a densidade volumétrica de massa, ou seja, a massa por unidade de 3-volume.

Em um espaço com η dimensões, a equação acima toma a forma

$$\nabla^2 \phi^{(\eta)} = 4\pi G^{(\eta)} \rho_m \quad (3.3.71)$$

e agora, ρ_m a massa por unidade de $(\eta - 1)$ -volume.

Comparando (3.3.70) com (3.3.71) e admitindo que ϕ e $\phi^{(\eta)}$ tem as mesmas unidades, então, as unidades de $G^{(\eta)}$ são dadas por:

$$[G^{(\eta)}] \frac{M}{L^{\eta-1}} = [G] \frac{M}{L^3} \quad (3.3.72)$$

$$[G^{(\eta)}] = L^{\eta-4} [G] \quad (3.3.73)$$

Para o caso especial em que temos um espaço-tempo de 5 dimensões

$$[G^{(5)}] = L [G] \quad (3.3.74)$$

ou seja, no caso de 5 dimensões extras a constante gravitacional $[G^{(5)}]$ possui um fator de comprimento a mais que $[G]$. Podemos assim, calcular o comprimento de Planck em cinco dimensões utilizando (3.3.67), ou seja,

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

Escrevendo as unidades de G em termos das unidades de c e \hbar , encontramos:

$$[G] = \frac{[c]^3 L^2}{[\hbar]} \quad (3.3.75)$$

Da relação (4.1.56), segue que

$$[G^{(5)}] = \frac{[c]^3 L^3}{[\hbar]} \quad (3.3.76)$$

Logo,

$$\begin{aligned} (l_p^{(5)})^3 &= \frac{G^5 \hbar}{c^3} \\ (l_p^{(5)})^3 &= \frac{G \hbar G^{(5)}}{c^3 G} \\ (l_p^{(5)})^3 &= l_p^2 \frac{G^{(5)}}{G} \end{aligned} \quad (3.3.77)$$

De uma maneira mais geral, para um universo com η dimensões do espaço-tempo, temos a relação:

$$(l_p^{(\eta)})^{\eta-2} = \frac{G^{(\eta)} \hbar}{c^3} = l_p^2 \frac{G^{(\eta)}}{G} \quad (3.3.78)$$

3.3.3 Constantes Gravitacionais e a Compactação

A idéia das dimensões extras compactas já foi apresentada em seções anteriores onde havíamos apresentado a compactação como um mecanismo que mantém as dimensões extras escondidas. Neste cenário, os valores das constantes da Natureza, como o comprimento de Planck, para um espaço-tempo de quatro dimensões, seriam na verdade um valor efetivo, enquanto que o comprimento de Planck fundamental seria estabelecido no espaço ambiente $(l_p^{(\eta)})$.

Consideremos a situação mais simples, na qual temos apenas uma única dimensão extra com a topologia de um pequeno círculo de raio l .

Em (3.2.58) determinamos a relação entre G^5 e a constante gravitacional efetiva G^4 (em quatro dimensões). Neste universo de dimensões compactadas onde o comprimento

da dimensão compactada é igual a $2\pi l$, temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} G^4 &= \frac{G^{(5)}}{2\pi l} \\ \frac{G^{(5)}}{G^4} &= 2\pi l = l_c \end{aligned} \quad (3.3.79)$$

onde l_c é o comprimento da dimensão extra. Portanto as constantes gravitacionais em diferentes dimensões diferem por um fator da ordem do comprimento da dimensão extra compacta. Este resultado pode ainda ser generalizado para o caso em que temos η dimensões extras

$$\frac{G^{(\eta)}}{G^4} = (l_c)^{\eta-4} \quad (3.3.80)$$

Por simplicidade, estamos admitindo que as dimensões extras tem o mesmo comprimento l_c .

3.3.4 Dimensões Extras de Grande Escala e o Problema da Hierarquia

A partir das relações (3.3.78) e (3.3.80), podemos escrever l_c (comprimento da dimensão extra) em função do comprimento de Planck em η dimensões (l_p) e em η -dimensões ($l_p^{(\eta)}$)

$$l_c = l_p^{(\eta)} \left(\frac{l_p^{(\eta)}}{l_p} \right)^{\frac{2}{\eta-4}} \quad (3.3.81)$$

O problema da Hierarquia poderia ser resolvido se admitíssemos que o comprimento de Planck no espaço de η dimensões fosse da mesma ordem da escala eletro-frac, ou seja $l_p^{(\eta)} \approx 10^{-18} \text{cm}$. Impondo esta condição em (3.3.81) e sabendo que $l_p = 10^{-33} \text{cm}$, obtemos uma relação entre o tamanho da dimensão extra l_c e o número de dimensões extras do espaço:

$$l_c = 10^{-18} (10^{15})^{2/\eta-4} \quad (3.3.82)$$

Desta relação verificamos que para o caso de uma única dimensão extra, $l_c \sim 10^{12} \text{cm}$, que é vinte vezes maior que a distância entre a Terra e a Lua. Claramente este resultado é

inconsistente com as observações, uma vez que uma dimensão extra com um comprimento tão grande seria facilmente percebida na Natureza. Assim, a idéia de um universo com uma única dimensão extra deve ser descartada neste modelo [27]. Para o caso que $\eta = 6$ (duas dimensões extras) a dimensão extra teria um comprimento de

$$l_c \sim 0,01mm \tag{3.3.83}$$

Esta é a distância até onde as leis Newtonianas da gravitação foram testadas [32]. Portanto, um modelo com duas dimensões extras é aceitável. Assim, desvios das leis do inverso do quadrado da gravitação, nesta escala, seriam um forte indício da existência de dimensões extras.

Observe que quanto maior o número de dimensões extras menor é o comprimento da dimensão extra. Mas, mesmo no caso em que $\eta = 10$ (6 dimensões extras), como proposto pelas teorias das supercordas [27], o tamanho seria $l_c \approx 10^{-13}cm$, portanto, ainda maior que o comprimento de Planck.

Capítulo 4

Cenário de Branas: Modelo RSI

4.1 Cenário de Branas : Modelos Randall-Sundrum

No capítulo anterior apresentamos o modelo ADD que tem como principal motivação a possibilidade de resolver o problema da Hierarquia. Vimos que naquele modelo o Universo deveria possuir no mínimo 2 dimensões extras compactas e, em contraste com o modelo Kaluza-Klein, a escala destas dimensões seria muito maior do que a escala de Planck.

Devemos enfatizar que no modelo ADD, as dimensões extras formam um espaço plano (sem curvatura). Outro aspecto importante é que, para evitar conflitos com os dados experimentais, o modelo precisa de pelo menos duas dimensões extras.

Os modelos de Randall-Sundrum (RS), assim como o modelo ADD, são modelos de brana. Mas, eles se distinguem do ADD, por mostrar que um modelo de cinco dimensões não é incompatível com os dados experimentais. Isto é possível, como iremos verificar neste capítulo, admitindo-se que o espaço ambiente possui uma constante cosmológica negativa ajustada à tensão da brana.

Há dois modelos: RSI e RSII. O modelo RSI propõem a existência de duas branas em vez de uma brana. Neste modelo cada brana é caracterizada por uma densidade de matéria por unidade de 3-volume. Chamamos essa densidade de tensão da brana. Neste modelo a dimensão extra está compactada devido à existência dessas duas branas. No modelo RSII uma das branas é retirada, de maneira que a dimensão extra terá um comprimento infinito, ou seja, a dimensão extra não é compacta.

4.1.1 Modelo RSI

Este é um modelo no qual a dimensão extra está compactada devido à introdução de duas branas no espaço ambiente. Admite-se também que a dimensão extra possui a topologia do espaço S^1/Z_2 . Esse espaço pode ser descrito da seguinte forma. Seja $\theta \in [-\pi, \pi]$ a coordenada angular que rotula os pontos de um círculo S^1 . O espaço S^1/Z_2 é obtido identificando-se os pontos θ e $-\theta$. Com relação a esta operação há dois pontos "fixos", $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. As branas são acomodadas nestes pontos. Cada brana possui uma densidade de energia também chamada de tensão da brana (σ). A brana com tensão positiva ($+\sigma$) é colocada em $z = 0$; a outra com tensão negativa ($-\sigma$) está localizada em $z = z_c$. Dessa forma, z_c mede o comprimento da dimensão extra, onde $z \equiv \theta l$, e l corresponde ao raio da dimensão extra.

A métrica deste modelo possui a seguinte forma [14]

$$ds^2 = a^2(z)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2 \quad (4.1.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski 4-D e $a(z)$ é o fator de deformação ("warp factor") dado por

$$a(z) = e^{-\kappa|z|} \quad (4.1.2)$$

onde κ será determinado pelas soluções das equações de Einstein. O comportamento da função $a(z)$ em S^1/Z_2 está ilustrado na figura (4.1)

As equações de Einstein no espaço ambiente são

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = T_{AB} \quad (4.1.3)$$

onde T_{AB} é o tensor energia momento, o qual possui uma contribuição da constante cosmológica do espaço ambiente (Λ) e da tensão das branas, de maneira que

$$T_{AB} = \Lambda g_{AB} + 8\pi G_{(5)}\tau_{AB} \quad (4.1.4)$$

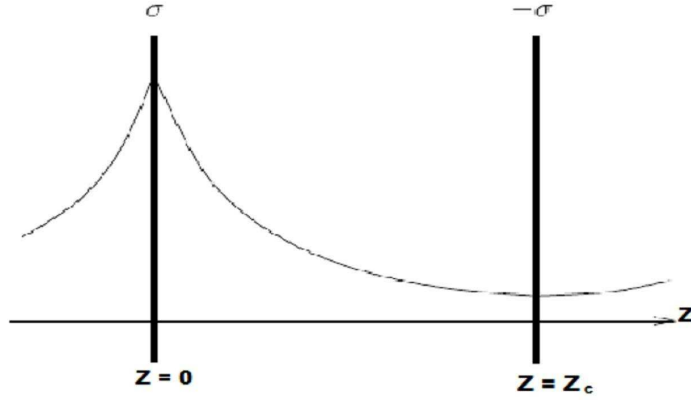


Figura 4.1: comportamento do fator de warp

onde $G_{(5)}$ é constante gravitacional em cinco dimensões e τ_{AB} , que descreve o conteúdo energético da brana, é dado por

$$\tau_{AB} = \begin{cases} T_{\mu\nu} = \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z) - \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z - z_c) \\ T_{Az} = 0 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

A condição $T_{Az} = 0$ significa que não há fluxo de energia entre a brana e o espaço ambiente.

Iremos resolver as equações de Einstein utilizando a métrica dada em (4.1.1):

$$g_{AB} = \begin{bmatrix} a^2(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

As componentes não-nulas dos símbolos de Christoffel são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0z}^0 &= \Gamma_{z0}^0 = \frac{a'}{a} \\ \Gamma_{00}^z &= aa' \\ \Gamma_{ii}^z &= -aa' \\ \Gamma_{iz}^i &= \Gamma_{zi}^i = \frac{a'}{a} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

onde o símbolo ' significa derivadas com respeito a z .

Para o tensor de Ricci temos

$$\begin{aligned}
R_{00} &= 3(a')^2 + aa'' \\
R_{ii} &= -3(a')^2 - aa'' \\
R_{zz} &= -4 \left(\frac{a''}{a} \right)
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

O escalar de curvatura será, portanto, dado por:

$$R = 12 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + 8 \left(\frac{a''}{a} \right) \tag{4.1.9}$$

Desta maneira, as componentes do tensor de Einstein são:

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(5)} \left[-3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a''}{a} \right) \right] \tag{4.1.10a}$$

$$G_{\mu z} = 0 \tag{4.1.10b}$$

$$G_{zz} = g_{zz}^{(5)} \left[-6 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] \tag{4.1.10c}$$

Temos portanto as componentes do tensor de Einstein. Vamos agora escrever as equações.

Assim, utilizando as componentes obtidas juntamente com o tensor energia momento dado por (4.1.4), temos

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_{(5)} [\sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z) - \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z - z_c)] + \Lambda g_{\mu\nu}^{(5)} \tag{4.1.11a}$$

$$G_{\mu z} = 0 \tag{4.1.11b}$$

$$G_{zz} = 8\pi G_{(5)} \Lambda g_{zz}^{(5)} \tag{4.1.11c}$$

Portanto, (4.1.11b) é automaticamente satisfeita e (4.1.11a) e (4.1.11c) impõem as equações abaixo:

$$\left[-3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a''}{a} \right) \right] = \tag{4.1.12a}$$

$$8\pi G_{(5)} [\sigma \delta(z) - \sigma \delta(z - z_c)] + \Lambda$$

$$\left[-6 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] = \Lambda \tag{4.1.12b}$$

No intervalo $0 < z < z_c$, onde a função $a(z)$ é regular, as equações acima serão satisfeitas se

$$\kappa^2 = -\frac{1}{6}\Lambda \quad (4.1.13)$$

Segue portanto, que a constante cosmológica deve ser negativa.

Vamos agora estudar a equação (4.1.12a) nos pontos $z = 0$ e $z = z_c$. Integrando z no intervalo $-\varepsilon < z < \varepsilon$, com ε pequeno, podemos determinar o efeito da brana de tensão positiva sobre a solução. Observando que a equação (4.1.12a) pode ser reescrita como

$$-3\frac{d}{dz}(a'a) = 8\pi G_{(5)}a^2[\sigma\delta(z) - \sigma\delta(z - z_c)] + \Lambda a^2 \quad (4.1.14)$$

obtemos, após a integração em torno de $z = 0$, a seguinte relação

$$-3a'a|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 8\pi G_{(5)}\sigma \quad (4.1.15)$$

No espaço S^1/Z_2 , os campos devem ser simétricos com relação às branas, uma vez que θ e $-\theta$ correspondem ao mesmo ponto. Assim, a' é descontínua em $z = 0$ (e também em $z = z_c$).

Em torno de $z = 0$, temos:

$$a'(\varepsilon) = -\kappa e^{-\kappa\varepsilon} \quad (4.1.16)$$

$$a'(-\varepsilon) = \kappa e^{-\kappa\varepsilon} \quad (4.1.17)$$

Logo, da equação (4.1.15), no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, temos a relação:

$$6\kappa = 8\pi G_{(5)}\sigma \quad (4.1.18)$$

De maneira análoga, integrando a equação (4.1.12a) em torno de z_c , obtemos

$$-3a'a|_{z_c-\varepsilon}^{z_c+\varepsilon} = -8\pi G_{(5)}(e^{-2z_c})\sigma \quad (4.1.19)$$

Levando em conta a simetria de reflexão em torno da brana em z_c , temos:

$$a'(z_c + \varepsilon) = \kappa e^{-\kappa(z_c - \varepsilon)} \quad (4.1.20)$$

$$a'(z_c - \varepsilon) = -\kappa e^{-\kappa(z_c - \varepsilon)} \quad (4.1.21)$$

logo, a equação (4.1.19) reproduz exatamente a condição (4.1.15).

Portanto a métrica (4.1.1) é solução do problema se

$$\kappa^2 = -\frac{1}{6}\Lambda$$

e se a tensão da brana está ajustada ao valor da constante cosmológica do espaço ambiente de acordo com a expressão

$$\sigma^2 = -\frac{3}{32\pi^2 G_{(5)}^2} \Lambda \quad (4.1.22)$$

4.1.2 Linearização da Gravidade na Brana

Um dos critérios importantes para verificar a validade das soluções é examinar se no regime de campo fraco as soluções obtidas reproduzem o comportamento já conhecido. Nesta seção iremos discutir a linearização da equação de Einstein no cenário das branas, procurando identificar as correções causadas pela dimensão extra. Nosso ponto de partida é a métrica

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B \quad (4.1.23)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = a^2(z)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, z) \quad (4.1.24)$$

$$g_{zz} = -1 \quad (4.1.25)$$

ou seja,

$$ds^2 = [a^2(z)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, z)] dx^\mu dx^\nu - dz^2 \quad (4.1.26)$$

O tensor $h_{\mu\nu}$ é o termo da perturbação que satisfaz à condição $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, de forma que podemos ignorar quantidades deste tipo com ordem maior que um. Além disso, vamos adotar um sistema de coordenadas no qual as componentes $h_{\mu z} = 0$ [14].

A métrica inversa de $g_{\mu\nu}$ em primeira aproximação será

$$g^{\mu\nu} = a^{-2}(z)\eta^{\mu\nu} - a^{-4}h^{\mu\nu}(x, z) \quad (4.1.27)$$

onde levantamos os índices com a métrica de Minkowski.

Usando estes resultados, as equações de Einstein podem ser agora linearizadas. O que desejamos com esta linearização é obter as equações do campo para a perturbação $h_{\mu\nu}$.

Iniciamos calculando os símbolos de Christoffel.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}a^{-2}(z)\eta^{\sigma\rho} (h_{\rho\mu,\nu} + h_{\rho\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\rho}) \quad (4.1.28a)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^z = \frac{1}{2} [2aa'\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}] \quad (4.1.28b)$$

$$\Gamma_{\nu 5}^\sigma = \Gamma_{5\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{a'}{a} \right) \delta_\nu^\sigma + a^{-2}h_\nu^\sigma - 2 \left(\frac{a'}{a^3} \right) h_\nu^\sigma \right] \quad (4.1.28c)$$

A partir das equações acima, podemos calcular as componentes do tensor de Ricci:

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}a^{-2}(z) [h_{\nu,\sigma,\mu}^\mu + h_{\sigma,\rho,\mu}^\rho - \eta^{\mu\rho}h_{\sigma\nu,\rho,\mu} - h_{\mu,\sigma,\nu}^\mu] + \frac{1}{2}h''_{\sigma\nu} \quad (4.1.29)$$

$$+ 2 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 h_{\sigma\nu} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} \right) h_\mu^\mu - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 h_\mu^\mu \right] \eta_{\sigma\nu} + (3a'^2 + aa'') \eta_{\sigma\nu}$$

$$R_{\sigma z} = -\frac{1}{2}a^{-2} (h_{\nu,\sigma}^{\nu'} - h_{\sigma,\rho}^{\rho'}) + \left(\frac{a'}{a^3} \right) (h_{\nu,\sigma}^\nu - h_{\sigma,\nu}^\nu) \quad (4.1.30)$$

$$R_{zz} = -\frac{1}{2}a^{-2}h''_{\sigma\sigma} + \frac{a'}{a^3}h'_{\sigma\sigma} + \left[\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} \right] h_\sigma^\sigma - 4 \left(\frac{a''}{a} \right) \quad (4.1.31)$$

Se introduzirmos matéria na brana (a causa da perturbação da métrica), as equações de Einstein serão

$$G_{AB} = 8\pi G_{(5)}T_{AB}^{mat} + 8\pi G_{(5)}\tau_{AB}^{brana} + \Lambda g_{AB} \quad (4.1.32)$$

onde T_{AB}^{mat} e τ_{AB}^{brana} são os tensores energia-momento da matéria e da brana respectivamente e Λ é a constante cosmológica no espaço ambiente. As equações de Einstein podem ainda ser escritas da seguinte forma

$$R_{AB} = 8\pi G_{(5)} \left(T_{AB}^{mat} - \frac{1}{3} T_{CD}^{mat} g^{CD} g_{AB} \right) + 8\pi G_{(5)} \left(\tau_{AB}^{brana} - \frac{1}{3} \tau_{CD}^{brana} g^{CD} g_{AB} \right) - \frac{2}{3} \Lambda g_{AB} \quad (4.1.33)$$

Desenvolvendo o lado direito das equações (4.1.33), obtemos

$$R_{\sigma\nu} = 8\pi G_{(5)} \delta(z) \left(T_{\sigma\nu}^{(mat)} - \frac{1}{3} T_{\alpha}^{\alpha (mat)} \eta_{\sigma\nu} \right) - 8\pi G_{(5)} \frac{\sigma}{3} (\delta(z) - \delta(z - z_c)) [a^2(z) \eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu}] - \frac{2}{3} \Lambda [a^2(z) \eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu}] \quad (4.1.34)$$

$$R_{\sigma z} = 0 \quad (4.1.35)$$

$$R_{zz} = \frac{8\pi G_{(5)}}{3} \delta(z) a^{-2} T_{\sigma}^{\sigma} + \frac{8\pi G_{(5)}}{3} [4\sigma (\delta(z) - \delta(z - z_c))] \quad (4.1.36)$$

Usando as equações de Einstein para a métrica não perturbada (4.1.12a) obtemos

$$\frac{1}{2} a^{-2}(z) [h_{\nu,\sigma,\mu}^{\mu} + h_{\sigma,\rho,\mu}^{\rho} - \eta^{\mu\rho} h_{\sigma\nu,\rho,\mu} - h_{\mu,\sigma,\nu}^{\mu}] + \frac{1}{2} h_{\sigma\nu}'' + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} \right) h_{\mu}^{\mu} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 h_{\mu}^{\mu} \right] \eta_{\sigma\nu} \quad (4.1.37)$$

$$+ 2\kappa [\delta(z) - \delta(z - z_c)] h_{\sigma\nu} - 2\kappa^2 h_{\sigma\nu} = 8\pi G_{(5)} \delta(z) \left(T_{\sigma\nu}^{(mat)} - \frac{1}{3} T_{\alpha}^{\alpha (mat)} \eta_{\sigma\nu} \right)$$

$$-\frac{1}{2} a^{-2} (h_{\nu,\mu}^{\nu} - h_{\mu,\rho}^{\rho}) + \left(\frac{a'}{a^3} \right) (h_{\nu,\mu}^{\nu} - h_{\mu,\nu}^{\nu}) = 0 \quad (4.1.38)$$

$$-\frac{1}{2} a^{-2} h_{\mu}^{\mu\prime\prime} + \frac{a'}{a^3} h_{\mu}^{\mu\prime} + \left[\frac{a''}{a^3} - \left(\frac{a'^2}{a^4} \right) \right] h_{\mu}^{\mu} = \frac{8\pi G_5 a^2}{3} \delta(z) T^{(mat)} \quad (4.1.39)$$

É possível mostrar [14] que no vácuo, podemos escolher um gauge (sistema de coordenadas) no qual $h_{\mu\nu}$ é transverso e possui traço nulo, ou seja, satisfaz às condições:

$$\partial_{\mu} h_{\nu}^{\mu} = h_{\mu}^{\mu} = 0 \quad (4.1.40)$$

Observe que impondo o gauge (4.1.40) as equações (4.1.38) e (4.1.39) são satisfeitas na região externa automaticamente. Assim, nossa atenção se volta para a equação (4.1.37), que na região externa à fonte, assume a seguinte forma

$$h''_{\sigma\nu} - 2[2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z) + 2\kappa\delta(z - z_c)]h_{\sigma\nu} - a^{-2}\partial^\mu\partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0 \quad (4.1.41)$$

Para determinar a solução da equação (4.1.41), procederemos da seguinte forma. Vamos estudar a equação no intervalo $0 < z < z_c$. Neste intervalo, os termos proporcionais a delta se anulam e a equação se reduz a :

$$h''_{\sigma\nu} - 4\kappa^2 h_{\sigma\nu} - a^{-2}\partial^\mu\partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0 \quad (4.1.42)$$

Uma vez encontradas as soluções de (4.1.42), os efeitos das deltas de Dirac sobre as soluções serão determinados, integrando-se (4.1.41), em torno de $z = 0$ e $z = z_c$

Considere primeiro a brana localizada em $z = 0$. Integrando a equação (4.1.41) no intervalo $-\varepsilon < z < \varepsilon$ para ε pequeno, encontramos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [h''_{\sigma\nu} - 2[2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z) + 2\kappa\delta(z - z_c)]h_{\sigma\nu} - a^{-2}\partial^\mu\partial_\mu h_{\sigma\nu}] dz = 0 \quad (4.1.43)$$

O segundo e quinto termos da integração se anulam para $\varepsilon \rightarrow 0$ se admitimos que a métrica é contínua sobre a brana. Assim, utilizando as propriedades da delta de Dirac, temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [[h'_{\sigma\nu}(\varepsilon) - h'_{\sigma\nu}(-\varepsilon)] + 4\kappa h_{\sigma\nu}(0)] = 0 \quad (4.1.44)$$

No espaço S^1/Z_2 os campos devem ser simétricos em relação a brana. Segue então, que $h'_{\sigma\nu}(0^+) = -h'_{\sigma\nu}(0^-)$, logo [17, 21, 22]

$$(h'_{\sigma\nu} + 4\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=0} = 0 \quad (4.1.45)$$

Usando o mesmo raciocínio para a brana em $z = z_c$, encontramos

$$(h'_{\sigma\nu} + 4\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=z_c} = 0 \quad (4.1.46)$$

As equações (4.1.45) e (4.1.46) podem ser entendidas como condições de contorno que devem ser impostas às soluções da equação (4.1.42), a fim de que sejam também soluções da equação (4.1.41).

Como veremos mais adiante, esta condição de contorno implicará a quantização do espectro de massa dos grávitons visto pelos observadores quadrimensionais.

4.1.3 Espectro de Massa dos Grávitons

Estamos interessados em discutir a solução da equação (4.1.42). Vamos tentar resolver aquelas equações empregando o método de separação de variáveis. Assim, propomos que a solução tem a forma

$$h_{\sigma\nu}(x, z) = \Psi(z)\Phi_{\sigma\nu}(x) \quad (4.1.47)$$

Substituindo (4.1.47) em (4.1.42), obtemos

$$\Phi_{\sigma\nu}(x)\partial_z^2\Psi(z) - \Psi(z)a^{-2}\square\Phi_{\sigma\nu}(x) - 4\kappa^2[\Psi(z)\Phi_{\sigma\nu}(x)] = 0 \quad (4.1.48)$$

multiplicando a última equação por $\frac{1}{\Psi(z)\Phi_{\sigma\nu}(x)}$ e rearranjando os termos, convenientemente podemos verificar que (4.1.48) possui solução se existir alguma constante C tal que

$$\Psi''(z) - 4\kappa^2\Psi(z) + C\Psi(z) = 0 \quad (4.1.49)$$

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x) = -C\Phi_{\sigma\nu}(x) \quad (4.1.50)$$

Mais adiante, verificaremos que a constante C (constante de separação) existe e na verdade pode assumir diferentes valores. Um resultado importante é que os valores possíveis são todos não-negativos. Assim, podemos escrever $C = m^2$ e neste caso a equação (4.1.50) pode ser reescrita como:

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x) + m^2\Phi_{\sigma\nu}(x) = 0 \quad (4.1.51)$$

Esta equação é uma equação de Klein - Gordon para um campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$ de massa m . O campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$ depende apenas das coordenadas da brana. Assim, pode ser interpretado como o campo de um "gráviton" (perturbação linear da métrica) de massa m , pelos observadores confinados na brana. Para cada m permitido, corresponderá um campo $\Phi_{\sigma\nu}^{(m)}(x)$, que é conhecido como modo KK.

A outra equação obtida é a seguinte:

$$\Psi_{(m)}''(z) - 4\kappa^2\Psi_{(m)}(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi_{(m)}(z) = 0 \quad (4.1.52)$$

Vamos agora nos concentrar na solução de (4.1.52). Uma solução particularmente importante é o caso de $m = 0$. Para este valor, a equação diferencial acima se reduz à seguinte equação

$$\Psi_0''(z) - 4\kappa^2\Psi_0(z) = 0 \quad (4.1.53)$$

Esta é uma equação bem conhecida [4] e a solução que satisfaz às condições de contorno (4.1.45) e (4.1.46) é:

$$\Psi_0(z) = C_0 e^{-\kappa|z|} \quad (4.1.54)$$

onde C_0 é uma constante.

Esta solução é conhecida como o modo zero ($m = 0$). Como veremos, ela é de fundamental importância para a recuperação do comportamento quadrimensional do campo gravitacional na brana, para longas distâncias.

Por meio de uma mudança de coordenadas, onde fazemos $x = \frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}$, obtemos de (4.1.52):

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\Psi(x)}{dx} + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \Psi(x) = 0 \quad (4.1.55)$$

Esta equação apresenta a forma de uma equação diferencial de Bessel com índice $n = 2$. A solução mais geral para este tipo de equação tem a seguinte forma [4, 13]:

$$\Psi_{(m)}(z) = AJ_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) + BN_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) \quad (4.1.56)$$

onde $J_2(z)$ e $N_2(z)$ são as funções de Bessel de ordem 2 de primeira e segunda espécies respectivamente. Para determinar as constantes A e B , devemos impor as condições de contorno (4.1.45) e (4.1.46) em $z = 0$ e $z = z_c$.

De acordo com a condição de contorno imposta em $z = 0$, temos portanto

$$AJ_2'\left(\frac{m}{\kappa}\right) + BN_2'\left(\frac{m}{\kappa}\right) + \frac{2\kappa}{m}AJ_2\left(\frac{m}{\kappa}\right) + \frac{2\kappa}{m}BN_2\left(\frac{m}{\kappa}\right) = 0 \quad (4.1.57)$$

Podemos utilizar a seguinte relação de recorrência [13] para as funções de Bessel

$$J_n'(n) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{x}J_n(z) \quad (4.1.58)$$

A mesma relação de recorrência é válida para $N_n(z)$.

Logo, usando (4.1.58) em (4.1.57), obtemos

$$AJ_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) + BN_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) = 0 \quad (4.1.59)$$

assim

$$\frac{A}{B} = \frac{-N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)} \quad (4.1.60)$$

Sendo assim, temos

$$\Psi(z) = C_m \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)N_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)J_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) \right] \quad (4.1.61)$$

onde C_m é uma constante de normalização.

Agora vamos impor a condição de contorno em $z = z_c$, obtemos

$$N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right) + J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)N_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right) = 0 \quad (4.1.62)$$

ou seja

$$\frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right)} = \frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)} \quad (4.1.63)$$

Os valores permitidos para m são as raízes da equação (4.1.63). Portanto, o espectro de massa dos grávitons será determinado pelo conjunto de soluções da equação (4.1.63). Vimos que $m = 0$ é uma solução. Queremos agora determinar o próximo valor permitido, m_1 . Se admitirmos que m_1 é pequeno comparado com κ , então, podemos expandir as funções de Bessel do lado direito da equação.

Para pequenos valores de seus argumentos, as funções tem a seguinte expansão:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2} (n+1)!} + \dots \quad (4.1.64)$$

$$N_n(x) = -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n + \dots \quad (4.1.65)$$

Assim, para $n = 1$, o caso de interesse, em primeira aproximação, encontramos:

$$J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) = \frac{m}{2\kappa} \quad (4.1.66)$$

$$N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) = -\frac{1}{\pi} \frac{2\kappa}{m} \quad (4.1.67)$$

Agora consideremos a razão $\frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}$, quando $m \ll \kappa$, o lado direito da eq. (4.1.63) será dado por:

$$\frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)} \sim -\pi \left(\frac{m}{2\kappa}\right)^2 \quad (4.1.68)$$

Logo, em primeira ordem de $\frac{m}{\kappa}$, podemos escrever:

$$\frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c}\right)} \simeq 0 \quad (4.1.69)$$

Segue, então, que para satisfazer (4.1.63) devemos ter

$$J_1\left(\frac{m_1}{\kappa} e^{\kappa z_c}\right) \simeq 0 \quad (4.1.70)$$

Portanto, m_1 corresponde a primeira raiz da função $J_1\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c}\right)$.

O comportamento da função de Bessel $J_1(x)$ é ilustrado pelo gráfico da figura (4.2)

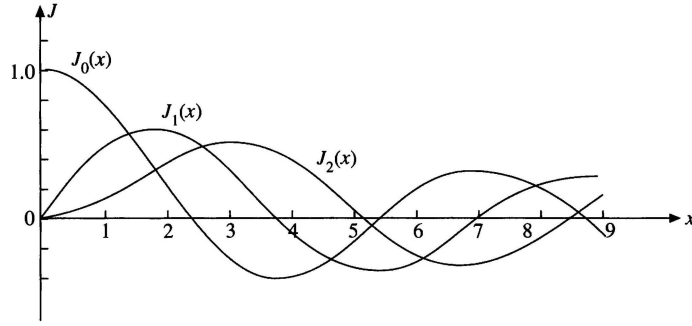


Figura 4.2: Funções de Bessel

Uma análise gráfica para a função $J_1(x)$ nos mostra que $J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right)$ possui infinitas raízes. A primeira destas raízes está em $\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c} = 0$, ou seja, que corresponde a um gráviton sem massa. Para a raiz seguinte, temos $\frac{m_1}{\kappa}e^{\kappa z_c} \simeq 3,8$. Esta segunda raiz representa o primeiro modo com massa do gráviton, existindo assim um salto no espectro da massa dos grávitons de modo análogo ao que ocorrer com o espectro do gráviton na teoria de Kaluza-Klein. O próximo nível, neste espectro, seria representado pela raiz seguinte, ou seja, a terceira raiz da função de Bessel e assim por diante. Logo para $J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right) \simeq 0$, devemos ter que

$$\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c} \simeq cte \quad (4.1.71)$$

onde, para as primeiras raízes, essa constante é da ordem de 1. Assim, para os primeiros valores de m teríamos

$$m \simeq \kappa e^{-\kappa z_c} \quad (4.1.72)$$

Notamos que a massa dos grávitons depende do tamanho da dimensão extra. Assim, se escolhermos z_c suficientemente pequeno, podemos garantir que a massa do 1º modo KK é muito grande ($m \sim k$). Neste caso a energia necessária para excitar o primeiro modo massivo seria muito alta e fora do alcance dos nossos instrumentos. Por causa disto, os grávitons com massa ainda não teriam sido detectados. Estes grávitons massivos não podem ser vistos por um observador quadridimensional que habita a brana. Para este

observador apenas os grávitons sem massa podem ser observados na escala de energia dos aceleradores de partículas atuais.

Capítulo 5

Modelo RSII

Os modelos do tipo Randall-Sundrum (*RS*) tratam de branas, (que podem ser entendidas como paredes de domínios no contexto da teoria de campos) nas quais toda a matéria ordinária encontra-se confinada por meio de algum mecanismo de aprisionamento, como por exemplo, por meio da interação do tipo Yukawa com um campo escalar, como descrito no capítulo 3.

Neste cenário, nosso universo quadridimensional pode ser imaginado como uma brana imersa num espaço maior que possui 5 dimensões. No primeiro modelo deste cenário (o RSI) a dimensão extra é compacta devido à existência de uma outra brana. Assim, temos uma brana com tensão positiva e outra com tensão negativa, que são postas em pontos fixos do espaço ambiente a uma certa distância finita uma da outra. Desta forma a dimensão extra possui um comprimento finito.

Vamos agora tratar do segundo modelo do cenário RS, o qual denominamos por RS2. Neste modelo, a brana de tensão negativa é retirada de cena. Fazemos com que sua posição z_c esteja a uma distância infinita da brana de tensão positiva e desta maneira a dimensão extra deixa de ser compacta e passa assim a ser uma dimensão extra de comprimento infinito.

5.1 Modos KK Contínuos

No capítulo anterior, vimos que os modos KK eram caracterizados pela constante m , que poderia ser interpretada como a massa do gráviton. Vimos também que os valores permitidos de m formavam um conjunto discreto e dependiam de z_c . De fato, para o 1º modo KK a massa era dada por $m \sim \kappa e^{-\kappa z_c}$. Assim, no limite $z_c \rightarrow \infty$, não há saltos entre as massas dos modos KK . De fato, removendo-se a segunda brana, a condição de contorno (4.1.46) deixa de ser aplicada e como consequência m pode assumir qualquer valor real não negativo. Em outras palavras, o espectro de massa torna-se contínuo.

À primeira vista, poderíamos pensar que essa característica seria fenomenologicamente desastrosa para o modelo, uma vez que os modos KK leves (grávitons com massa pequena) seriam acessíveis mesmo a baixas energias e poderiam colocar a teoria em conflito com os testes experimentais. No entanto, como veremos, devido à existência de um modo zero normalizável, o campo gravitacional apresenta um comportamento quadridimensional para longas distâncias.

Vamos iniciar nossa discussão considerando a normalização das funções de onda que descrevem os modos KK . Como vimos, no capítulo anterior, os modos KK satisfazem à equação:

$$\Psi''_{(m)}(z) - 4\kappa^2 \Psi_{(m)}(z) + \frac{m^2}{a^2} \Psi_{(m)}(z) = 0 \quad (5.1.1)$$

Esta equação pode ser entendida como uma equação de autovalores de um operador de Sturm-Liouville. De acordo com a teoria de Sturm-Liouville, as autofunções associadas a autovalores discretos são normalizáveis e as autofunções correspondentes a autovalores contínuo podem ser normalizadas no sentido distribucional, ou seja, segundo a delta de Dirac.

Vamos, agora, estudar com mais detalhes o espectro de massa dos grávitons analisando a equação 5.1.1. A primeira observação importante é a de que os autovalores devem ser não-negativos. Isso segue da condição de que as autofunções devem ser finitas no limite $z \rightarrow \infty$. A razão física que fundamenta esta condição é a hipótese de que não há informação

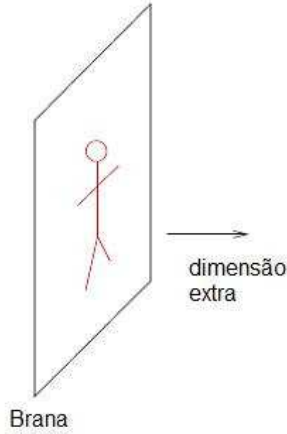


Figura 5.1: dimensão extra no modelo RSII

vindo do infinito em direção à brana [31].

Outra característica fundamental é a existência do modo zero normalizável. De fato, para $m = 0$, encontramos a seguinte solução

$$\Psi_0(z) = C_0 e^{-kz} \quad (5.1.2)$$

Esta solução é normalizável mesmo para $z_c \rightarrow \infty$, como podemos verificar. De fato

$$\int_0^\infty dz C_0^2 (e^{-kz})^2 = \frac{C_0^2}{2k} \quad (5.1.3)$$

Assim, escolhendo $C_0^2 = \sqrt{2\kappa}$, encontramos o modo zero como norma unitária:

$$\Psi_0(z) = \sqrt{2\kappa} e^{-kz} \quad (5.1.4)$$

Os demais autovalores formam um espectro contínuo e como já dissemos as autofunções correspondentes podem ser normalizadas no sentido distribucional.

No Apêndice C, encontramos as constantes de normalização das autofunções. As autofunções normalizadas são dadas por

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \frac{[J_1(\frac{m}{\kappa})N_2(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}) - N_1(\frac{m}{\kappa})J_2(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z})]}{\sqrt{J_1(\frac{\kappa}{m})^2 + N_1(\frac{\kappa}{m})^2}} \quad (5.1.5)$$

5.2 Função de Green

A equação (4.1.42) governa o comportamento do campo gravitacional linearizado $h_{\mu\nu}$ no vácuo. Pretendemos, agora, determinar, o campo produzido por um corpo confinado

na brana.

Com esta finalidade, temos, então, que estudar as equações de campo com fonte. Seguiremos aqui o método baseado na função de Green.

Podemos entender a função de Green como um tipo de função usada para resolver equações diferenciais não-homogêneas sujeitas a condições de contorno e cujo termo de fonte é uma função delta de Dirac. Fisicamente, uma função delta de Dirac pode representar um evento específico que acontece em um ponto do espaço (\vec{x}') em um determinado instante de tempo (t'). A função de Green representa a função potencial que nos diz qual a influência daquele evento em um ponto \vec{x} do espaço e num instante de tempo t .

Vamos, agora, estudar a solução da equação não-homogênea, ou seja, da equação:

$$[\partial_z^2 - 2(2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z)) - a^{-2}\square^{(4)}] h_{\mu\nu} = 2\Sigma_{\mu\nu} \quad (5.2.6)$$

o termo $\Sigma_{\mu\nu}$ faz o papel de fonte para $h_{\mu\nu}$ mas não deve ser confundida com o tensor energia-momento da matéria. A razão é que a equação de campo original para $h_{\mu\nu}$ é a equação (4.1.37). No lado direito desta equação podemos identificar o tensor energia-momento da matéria (T_{AB}^{mat}). Mas, devemos lembrar que esta equação foi obtida no sistema de coordenadas gaussiano adaptado a brana, uma vez que fixamos a condição $h_{Az} = 0$ e a brana é localizada em $z = 0$. No entanto, a equação (5.2.6) é válida no gauge RS , onde as condições adicionais $\partial_\mu h_\nu^\mu = h_\mu^\mu = 0$, são impostas. Aplicando estas condições na equação (5.2.6), verificamos que a fonte no gauge RS , deve satisfazer às condições

$$\partial_\mu \Sigma_\nu^\mu = 0 \quad (5.2.7a)$$

$$\Sigma_\mu^\mu = 0 \quad (5.2.7b)$$

Na próxima seção trataremos de relacionar $\Sigma_{\mu\nu}$ com $T_{\mu\nu}^{mat}$.

Segundo o formalismo da função de Green, a solução da equação (5.2.6) é dada por:

$$h_{\mu\nu} = \int dz' d^4x' G(x, z; x', z') \Sigma_{\mu\nu} \quad (5.2.8)$$

onde $G(x, z, x', z')$, a chamada função de Green, deve satisfazer à equação:

$$[\partial_z^2 - 2[2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z)] - a^{-2}\square^{(4)}] G(x, z; x', z') = \delta^4(x - x')\delta(z - z') \quad (5.2.9)$$

De acordo com a teoria de Sturm-Liouville, a função de Green pode ser construída a partir das soluções da equação homogênea.

Como vimos, a equação homogênea pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis, cuja aplicação nos dá:

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x) + m^2\Phi_{\sigma\nu}(x) = 0 \quad (5.2.10)$$

$$\Psi''(z) - 2[2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z)]\Psi(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi(z) = 0 \quad (5.2.11)$$

Essas equações podem ser estudadas, como já comentamos anteriormente, no contexto da teoria de Sturm-Liouville. Um resultado extremamente importante dessa teoria é o de que o conjunto completo das autofunções forma uma base completa para o espaço de funções normalizáveis e que satisfazem às mesmas condições de contorno das autofunções [5].

Um conjunto completo de autofunções do operador D 'Alambertiano que aparece na equação (5.2.10), é dado pelas ondas planas $\frac{1}{(2\pi)^4} \exp(ik_\mu x^\mu)$ com $k_\mu k^\mu = m^2$. O fator $1/(2\pi)^4$ é um fator de normalização.

Em relação a equação (5.2.11), vimos que as autofunções associadas, já normalizadas são dadas por:

$$u_0(z) = \sqrt{2\kappa} e^{-\kappa z} \quad (5.2.12)$$

$$u_m(z) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \frac{[J_1(\frac{m}{\kappa})N_2(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}) - N_1(\frac{m}{\kappa})J_2(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z})]}{\sqrt{J_1(\frac{\kappa}{m})^2 + N_1(\frac{\kappa}{m})^2}} \quad (5.2.13)$$

Da teoria de Sturm-Liouville segue, então, que as funções $\frac{1}{(2\pi)^4} \exp(ik_\mu x^\mu) u_m(z)$ constituem uma base para as funções em cinco dimensões. Logo, a função de Green pode ser decomposta nesta base, ou seja, podemos escrever

$$G(x, z; x', z') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} b_{(0k)} u_0(z) e^{ikx} + \int \int dm b_{mk} u_m(z) e^{ikx} \quad (5.2.14)$$

para algum conjunto de coeficientes $b_{(0k)}$ e b_{mk} , que podem depender de x' e z' , e que devem ser determinados pela equação (5.2.9).

Substituindo (5.2.14) em (5.2.9), encontramos após usarmos as equação (5.2.10) e (5.2.11), a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \int b_{(0k)} \frac{k^2}{a^2} u_0(z) \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^4} d^4 k \\ & + \int \int \left[\frac{k^2 - m^2}{a^2} \right] b_{(mk)} u_m(z) \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^4} dm d^4 k = \delta^4(x - x') \delta(z - z') \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Para obter os coeficientes da expansão vamos multiplicar a equação acima por $u_{\tilde{m}}(z) e^{-i\tilde{k}x}$ e integramos em x e z :

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k^2 b_{(0k)} \left[\int dz u_0(z) u_{\tilde{m}}(z) a^{-2} \int d^4 x e^{ix(k-\tilde{k})} \right] \\ & + \int \int [k^2 - m^2] b_{(mk)} \left[\int dz u_m(z) u_{\tilde{m}}(z) a^{-2} \int d^4 x e^{ix(k-\tilde{k})} \right] dm d^4 k \\ & = \int dz u_{\tilde{m}}(z) \delta(z - z') \int d^4 x e^{-i\tilde{k}x} \delta^4(x - x') \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Usando as condições de ortogonalidade:

$$\delta(k - \tilde{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x e^{ix(k-\tilde{k})} \quad (5.2.17)$$

$$\delta(m - \tilde{m}) = \int dm u_m(z) u_{\tilde{m}}(z) a^{-2} \quad , \quad m > 0 \quad (5.2.18)$$

$$\delta_{(\tilde{m}0)} = \int d\tilde{m} u_0(z) u_{\tilde{m}}(z) a^{-2} \quad (5.2.19)$$

obtemos:

$$\int d^4 k b_{(0k)} k^2 \delta_{(\tilde{m}0)} \delta(k - \tilde{k}) + \int [k^2 - m^2] b_{(mk)} \delta(k - \tilde{k}) \delta(m - \tilde{m}) dm d^4 k = u_{\tilde{m}}(z') e^{-i\tilde{k}x'} \quad (5.2.20)$$

$$b_{(0\tilde{k})} \tilde{k}^2 \delta_{(\tilde{m}0)} + [\tilde{k}^2 - \tilde{m}^2] b_{(\tilde{m}\tilde{k})} = u_{\tilde{m}}(z') e^{-i\tilde{k}x'} \quad (5.2.21)$$

Portanto:

$$b_{(0\kappa)} = \frac{u_0(z')e^{-ikx}}{k^2}, \quad \tilde{m} = 0 \quad (5.2.22)$$

$$b_{(m\kappa)} = \frac{u_m(z')e^{-ikx}}{[k^2 - m^2]}, \quad \tilde{m} > 0 \quad (5.2.23)$$

Assim, a função de Green é dada por:

$$\begin{aligned} G(x, z; x', z') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{u_0(z')u_0(z)e^{ik(x-x')}}{k^2} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \int dm \frac{u_m(z)u_m(z')}{[k^2 - m^2]} \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

Lembrando que o modo zero é descrito pela função de onda:

$$u^0(z) = \sqrt{\kappa}e^{-2\kappa z} \quad (5.2.25)$$

Podemos escrever a função de Green completa da seguinte forma:

$$G(x, z; x', z') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \left[\frac{\kappa e^{-2\kappa(z+z')}}{k^2} + \int dm \frac{u_m(z)u_m(z')}{[k^2 - m^2]} \right] \quad (5.2.26)$$

Com a função de Green, poderemos calcular o campo gravitacional, ou melhor, $h_{\mu\nu}$ para qualquer distribuição de energia

Contudo estamos interessados unicamente no caso estacionário para o qual a função de Green é determinada por [20]

$$G(\vec{x}, z; \vec{x}', z') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(x, z; x', z') \quad (5.2.27)$$

ou seja,

$$G(\vec{x}, z; \vec{x}', z') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \left[\frac{\kappa e^{-2\kappa(z+z')}}{k^2} + \int dm \frac{u_m(z)u_m(z')}{[k^2 - m^2]} \right] \right]$$

Vamos inicialmente realizar a integração em dt' . Observe que:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 - m^2} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{e^{ik^0(t-t') - i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{(k^0)^2 - \omega_k^2} \quad (5.2.28)$$

onde $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Se definimos $t' = \tau + t$, temos:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik^0 \tau - i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')}}{(k^0)^2 - \omega_k^2} d\tau = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')}}{(k^0)^2 - \omega_k^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^0 \tau} d\tau \right] \quad (5.2.29)$$

Por meio da definição da função delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^0 \tau} d\tau = 2\pi \delta(k^0) \quad (5.2.30)$$

a relação (5.2.29) fica da seguinte forma, quando integramos com respeito à coordenada k^0 :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')}}{(k^0)^2 - \omega_k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^0 \tau} d\tau &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')}}{(k^0)^2 - \omega_k^2} 2\pi \delta(k^0) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')}}{m^2 + \vec{k}^2} \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

onde utilizamos o fato de $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

No apêndice D, calculamos a integral (5.2.31) explicitamente. Encontramos o seguinte resultado

$$\int dt' \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(x - x')}}{[m^2 + \vec{k}^2]} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mR}}{R} \quad (5.2.32)$$

onde $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Segue, então que:

$$\int \int dt' d^4 k \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik(x - x')}}{[k^2 - m^2]} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mR}}{R} \quad (5.2.33)$$

Alguns comentários sobre (5.2.33) são pertinentes. Vemos que no caso de modo zero, em que $m = 0$, recuperamos o potencial Newtoniano que cai com o inverso da distância. Já para os modos KK com massa, as interações são mediadas por um gráviton com massa e caem exponencialmente com a distância. A partir desse resultado podemos escrever a função de Green independente do tempo:

$$G(x, z; x', z') = \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \right) \kappa e^{-2\kappa(z+z')} + \int_0^\infty dm u_m(z) u_m(z') \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mR}}{R} \right) \quad (5.2.34)$$

Consideremos, agora, uma partícula com massa localizada na brana em $z = 0$ [15]. O potencial estático gerado pela partícula num ponto sobre a brana ($z' = 0$) será, de acordo com (5.2.34), dado por:

$$G(x, z; x', z') = -\frac{\kappa}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi R} \int_0^\infty dm [u_m(0)]^2 e^{-mR} \quad (5.2.35)$$

onde $u_m(0)$ são os autos-estados dos grávitons (ver seção anterior) avaliados na brana, ou seja:

$$u_m(0) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \frac{[N_1(\frac{m}{\kappa})J_2(\frac{m}{\kappa}) - J_1(\frac{m}{\kappa})N_2(\frac{m}{\kappa})]}{\sqrt{J_1(\frac{m}{\kappa})^2 + N_1(\frac{m}{\kappa})^2}} \quad (5.2.36)$$

Vamos agora calcular o potencial num ponto sobre a brana distante da fonte. Considere $R \gg \kappa^{-1}$. Em (5.2.35), devido a exponencial decrescente, sabemos que a integral é significativa apenas para $m < m^*$ onde m^* é da ordem de $1/R$. Assim, temos.

$$\kappa R \gg 1$$

$$mR < m^* R \sim 1$$

Essa condição implica que na integral (5.2.35) podemos admitir que $\frac{m}{\kappa} \ll 1$.

Sendo assim, podemos expandir as funções de Bessel para pequenos argumentos (4.1.64), (4.1.65):

$$J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) = \frac{m}{2\kappa}, \quad J_2\left(\frac{m}{\kappa}\right) = \left(\frac{m}{2\kappa}\right)^2 \quad (5.2.37)$$

$$N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) = -\frac{1}{\pi} \frac{2\kappa}{m}, \quad N_2\left(\frac{m}{\kappa}\right) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2\kappa}{m}\right)^2 \quad (5.2.38)$$

Desta forma, na aproximação de primeira ordem em m/κ obtemos.

$$[u_m(0)]^2 = \frac{m}{\kappa} \quad (5.2.39)$$

Logo, a função de Green será dada pela expressão

$$G(x, z; x', z') = -\frac{\kappa}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi\kappa R} \int_0^\infty m e^{-mR} dm \quad (5.2.40)$$

Integrando por partes, obtemos finalmente a função de Green:

$$G(x, z; x', z') = -\frac{\kappa}{4\pi R} \left[1 + \frac{1}{\kappa^2 R^2} \right] \quad (5.2.41)$$

Já foi apresentado acima o significado físico da função de Green, e vimos que ela representa a função potencial. Sendo assim, de (5.2.41), concluímos que a função de Green, devido ao modo zero, recupera o caráter quadridimensional mais um termo de correção do potencial gravitacional para longas distâncias. A contribuição dos modos KK com massa se manifesta como uma correção da função de Green e carrega, portanto, os efeitos da dimensão extra.

5.3 A Fonte e o Gauge

Nesta seção pretendemos estabelecer a relação entre $\Sigma_{\mu\nu}$, a fonte do campo $h_{\mu\nu}$ no gauge RS , com $T_{\mu\nu}$, tensor energia-momento da matéria dada nas coordenadas gaussianas.

Considere a equação de campo para $h_{\mu\nu}$, nas coordenadas gaussianas (\bar{x}^μ, \bar{z}) . Nas coordenadas gaussianas adaptadas à brana, a localização da brana é descrita pela equação $\bar{z} = 0$, mesmo com a perturbação, pois admitimos que $h_{Az} = 0$. Nestas coordenadas, os campos são simétricos com relação a \bar{z} , uma vez que \bar{z} mede a distância transversal de um ponto com respeito à brana.

A equação (4.1.37) nos fornece, após integrá-la em torno de \bar{z} no intervalo $-\varepsilon < \bar{z} < \varepsilon$ e tomarmos o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, uma relação entre a descontinuidade da primeira derivada da métrica (associada à curvatura extrínseca da brana) e o conteúdo energético distribuído na brana. Essa relação é conhecida como condição de junção de Israel e nosso caso, levando-se em conta a simetria de reflexão nos dá:

$$\frac{1}{2} [\bar{h}'_{\mu\nu}(0^+) - \bar{h}'_{\mu\nu}(0^-)] + 2\kappa\bar{h}_{\mu\nu} = 8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right) \quad (5.3.42)$$

$$(2\kappa + \partial_z) \bar{h}_{\mu\nu} = 8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) \quad (5.3.43)$$

Esta equação nos dá então a dependência do campo $\bar{h}_{\mu\nu}$ com o tensor energia-momento confinado na brana, nas coordenadas Gaussianas.

5.3.1 Transformação de Coordenadas

Procuramos, agora, uma equação análoga à (5.3.43), que nos forneça a relação entre $h_{\mu\nu}$, a métrica perturbada no gauge RS , e a fonte.

Para isto vamos considerar a relação entre $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$.

Sob uma transformação de coordenadas infinitesimal:

$$\bar{x}^A = x^A + \xi^A(x) \quad (5.3.44)$$

Podemos mostrar (ver apêndice E) que os "campos" \bar{h}_{AB} e h_{AB} estão relacionados da seguinte forma:

$$\bar{h}_{MN} = h_{MN} - \gamma_{AN} \xi_{,M}^A - \gamma_{AM} \xi_{,N}^A - \xi^A(x) \gamma_{MN,A} \quad (5.3.45)$$

onde γ_{AB} corresponde a métrica de fundo, que no nosso caso é

$$\gamma_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\mu z} = 0, \quad \gamma_{zz} = -1 \quad (5.3.46)$$

e $\xi^A(x)$ é uma função de todas as coordenadas tal que $\xi^A(x) \ll 1$.

Em ambos os sistemas de coordenadas, temos

$$\bar{h}_{zz} = h_{zz} = 0 \quad (5.3.47a)$$

Segue então, de (5.3.45), a relação:

$$\bar{h}_{zz} = h_{zz} - (\gamma_{Az} \xi_{,z}^A + \gamma_{Az} \xi_{,z}^A) - \xi^A(x) \gamma_{zz,A} \quad (5.3.48)$$

Para os termos entre parêntesis as únicas componentes não nulas da métrica de fundo são aquela em que $A \equiv z$. Enquanto que o último termo, qualquer que seja o valor de A ,

irá se anular. Assim, utilizando (5.3.47a) concluímos que

$$\xi^5_{,z} = 0 \quad (5.3.49)$$

De onde concluímos que a função ξ^5 não possui dependência da coordenada extra.

Logo

$$\xi^5 \equiv \xi^5(x^\mu) \quad (5.3.50)$$

Agora consideremos as componentes da perturbação ($M = \mu$ e $N = z$) dadas por (5.3.47a)

$$\bar{h}_{\mu z} = h_{\mu z} - (\gamma_{A\mu} \xi^A_{,z} + \gamma_{Az} \xi^A_{,\mu}) - \xi^A(x) \gamma_{\mu z, A} \quad (5.3.51)$$

Considerando que nos dois gauges temos

$$\bar{h}_{\mu z} = h_{\mu z} = 0 \quad (5.3.52)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} \xi^{\nu}_{,z} + \gamma_{zz} \xi^5_{,\mu} &= 0 \\ \gamma_{\mu\nu} \xi^{\nu}_{,z} &= \xi^5_{,\mu} \end{aligned} \quad (5.3.53)$$

multiplicando (5.3.53) pela métrica de fundo inversa $\gamma^{\mu\alpha}$, obtemos

$$\xi^{\alpha}_{,z} = \gamma^{\mu\alpha} \xi^5_{,\mu} \quad (5.3.54)$$

como $\gamma^{\mu\alpha} = e^{-2\kappa|z|} \eta^{\mu\alpha}$, então,

$$\xi^{\alpha}_{,z} = e^{2\kappa|z|} \eta^{\mu\alpha} \xi^5_{,\mu} \quad (5.3.55)$$

Obtemos assim uma equação diferencial para as funções ξ^α . Por integração direta de(5.3.55), com respeito a variável z , encontramos:

$$\xi^\alpha(x, z) = \frac{1}{2\kappa} e^{2\kappa|z|} \eta^{\mu\alpha} \xi_{,\mu}^5 + F^\alpha(x^\alpha) \quad (5.3.56)$$

onde $F^\alpha(x)$ é uma função oriunda da integração, a qual não possui dependência com a coordenada extra.

Uma vez obtida as condições necessárias para $\xi^\alpha(x)$ e $\xi^5(x^\mu)$ a fim de satisfazer às condições (5.3.47a) e (5.3.52) nas coordenadas Gaussianas e no gauge RS , resta-nos agora obter a relação entre $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$. Mais uma vez, fazendo uso das expressão (5.3.45) com $M = \mu$ e $N = \nu$, encontramos

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\gamma_{A\nu} \xi_{,\mu}^A + \gamma_{A\mu} \xi_{,\nu}^A) - \xi^A(x) \gamma_{\mu\nu,A} \quad (5.3.57)$$

Para os termos entre parêntesis os únicos termos não nulos são aqueles em que $A = \alpha$ onde $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$. Com isso, temos

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\gamma_{\alpha\nu} \xi_{,\mu}^\alpha + \gamma_{\alpha\mu} \xi_{,\nu}^\alpha) - \xi^\alpha(x) \gamma_{\mu\nu,\alpha} - \xi^z(x) \gamma_{\mu\nu,z} \quad (5.3.58)$$

e como $\gamma_{\mu\nu,\alpha} = 0$ pois a métrica de fundo não possui dependência com as coordenadas 4-dimensionais, a equação acima se reduz a:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\gamma_{\alpha\nu} \xi_{,\mu}^\alpha + \gamma_{\alpha\mu} \xi_{,\nu}^\alpha) - \xi^z(x) \gamma_{\mu\nu,z} \quad (5.3.59)$$

Substituindo $\gamma_{\mu\nu} = e^{-2\kappa|z|} \eta_{\mu\nu}$ e usando (5.3.56), (5.3.59) nos dá:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} \partial_\mu \partial_\nu \xi^z - 2\kappa e^{-2\kappa|z|} \eta_{\mu\nu} \xi^z + 2e^{-2\kappa|z|} \partial_{(\mu} \eta_{\nu)\alpha} F^\alpha \quad (5.3.60)$$

Substituindo (5.3.60) em (5.3.43), encontramos

$$\begin{aligned} (2\kappa + \partial_z) \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{\kappa} \partial_\mu \partial_\nu \xi^5 - 2e^{-2\kappa z} \partial_{(\mu} \eta_{\nu)\alpha} F^\alpha + 2\kappa e^{-2\kappa z} \eta_{\mu\nu} \xi^5 \right) \\ = 8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) \\ (2\kappa + \partial_z) h_{\mu\nu} + 2\partial_\mu \partial_\nu \xi^5 = 8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) \end{aligned} \quad (5.3.61)$$

Portanto,

$$(2\kappa + \partial_z) h_{\mu\nu} = 8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) + 2\partial_\mu \partial_\nu \xi^5 \quad (5.3.62)$$

Sendo assim, podemos interpretar os termos do lado direito da igualdade acima como termos de fonte do campo gravitacional $h_{\mu\nu}$ no novo gauge. Definimos portanto,

$$\Sigma_{\mu\nu} = 8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) + 2\partial_\mu \partial_\nu \xi^5 \quad (5.3.63)$$

e assim, temos, a equação procurada.

$$(2\kappa + \partial_z) h_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} \quad (5.3.64)$$

No gauge RS , temos a condição $h_\mu^\mu = 0$, como vimos, isto implica que $\Sigma_\mu^\mu = 0$. Para garantirmos essa condição, devemos ter

$$\Sigma_\mu^\mu = 8\pi G_5 \left(\eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} T \right) + 2\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \xi^5 = 0 \quad (5.3.65)$$

$$8\pi G_5 \left(-\frac{1}{3} T \right) + 2\partial^\mu \partial_\mu \xi^5 = 0 \quad (5.3.66)$$

Escrevendo $\square^{(4)} = \partial^\mu \partial_\mu$, temos a equação:

$$\square \xi^5 = \frac{4\pi G_5}{3} T \quad (5.3.67)$$

Portanto, para que o traço de $h_{\mu\nu}$ seja nulo, como é exigido no gauge RS , a função ξ^5 deve obedecer a equação (5.3.67). Da definição (5.3.44), ξ^5 nos dá a transformação entre as coordenadas z e \bar{z} . Explicitamente;

$$\bar{z} = z + \xi^5(x) \quad (5.3.68)$$

Nas coordenadas Gaussianas, a posição da brana é dada pela equação $\bar{z} = 0$. Logo, no gauge RS , a posição da brana será dada pela equação $z = -\xi^5(x)$. Portanto, neste gauge, a brana é descrita como uma hipersuperfície curva, quando há matéria confinada na brana.

5.4 O Campo Gravitacional

Pela transformação de coordenadas realizada anteriormente para o sistema de coordenadas Gaussianas Normais, temos que

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\kappa e^{-2\kappa|z|}\eta_{\mu\nu}\xi^5 - \frac{1}{\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\xi^5 - 2e^{-2\kappa z}\partial_{(\mu}\eta_{\nu)}F^\alpha \quad (5.4.69)$$

Podemos separar $h_{\mu\nu}$ em duas partes, uma contribuição referente a um corpo massivo e a outra devido ao desvio da brana. Então

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(mat)} + 2\kappa e^{-2\kappa|z|}\eta_{\mu\nu}\xi^5 + h_{\mu\nu}^{(\xi)} - \frac{1}{\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\xi^5 - 2e^{-2\kappa z}\partial_{(\mu}\eta_{\nu)}F^\alpha \quad (5.4.70)$$

como $h_{\mu\nu}$ é uma solução de (5.2.6), esta solução pode ser obtida por meio do método da função de Green, logo

$$h_{\mu\nu} = 2 \int d^4x' dz' G(x, z; x', z') \Sigma_{\mu\nu}(x') \delta(z') \quad (5.4.71)$$

de forma que temos

$$h_{\mu\nu}^{(mat)} = 16\pi G_5 \int d^4x' dz' G(x, z; x', z') \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T \right) \quad (5.4.72)$$

$$h_{\mu\nu}^{(\xi)} = 4 \int d^4x' dz' G(x, z; x', z') \partial_\mu\partial_\nu\xi^5 \quad (5.4.73)$$

onde fizemos uso do fato de que

$$\Sigma_{\mu\nu} = 8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T \right) + 2\partial_\mu\partial_\nu\xi^5 \quad (5.4.74)$$

Podemos portanto escolher $F^\alpha(x^\alpha)$ de maneira apropriada de modo que os 3 últimos termos em (5.4.70) se anulem [23] em $z = 0$. Portanto, em $z = 0$ a perturbação adquire a seguinte expressão

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi G_5 \int d^4x' G(x, 0; x', 0) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T \right) + 2\kappa\eta_{\mu\nu}\xi^5 \quad (5.4.75)$$

5.4.1 A métrica estática com simetria esférica na brana

Se consideramos agora a existência de uma massa pontual M que permanece em repouso na brana, esta massa "deformará" o espaço-tempo, isto é, provocará uma perturbação na métrica do espaço tempo. Vamos portanto calcular essa perturbação. O tensor energia momento de um corpo com massa localizado na brana é dado por [23]

$$T_{\mu\nu} = M\delta^{(3)}(\vec{x})\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0 \quad (5.4.76)$$

A equação que descreve o desvio da brana devido a presença do corpo com massa é dado por (5.3.67), ou seja

$$\square\xi^5 = \frac{4\pi G_5}{3}T$$

onde T é o traço do tensor energia momento. Utilizando (5.4.76) e calculando o seu traço, encontramos

$$T = M\delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (5.4.77)$$

Assim, temos:

$$\square\xi^5 = \frac{4\pi G_5}{3}M\delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (5.4.78)$$

Como o Campo produzido é estático, o operador d'Alambertiano \square se reduz ao Laplaciano em 3 dimensões, ou seja,

$$\nabla^2\xi^5 = -\frac{4\pi G_5}{3}M\delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (5.4.79)$$

Sabemos que

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta(\vec{x}) \quad (5.4.80)$$

Portanto

$$\xi^5 = \frac{G_5 M}{3r} \quad (5.4.81)$$

onde definimos $r = |\vec{x}|$ [23]

Como vimos, a perturbação da métrica é dividida em duas partes, uma referente à matéria na brana e a outra devido ao desvio da brana. A parte da perturbação que diz respeito à matéria é dada por (5.4.72). Utilizando a função de Green estacionária (5.2.41), temos:

$$h_{\mu\nu}^{(mat)} = 16\pi G_5 \int d^3 x' G(x, 0; x', 0) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) \quad (5.4.82)$$

Para o tensor energia-momento dado em (5.4.76), temos

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) = \left(\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \right) M \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (5.4.83)$$

Portanto, (5.4.82) fica escrito como

$$h_{\mu\nu}^{(mat)} = -16\pi G_5 \int d^3 x' \frac{\kappa}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \left(1 + \frac{1}{2\kappa^2 |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) \left(\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \right) M \delta^{(3)}(\vec{x}') \quad (5.4.84)$$

$$h_{\mu\nu}^{(mat)} = -4\kappa G_5 M \left(\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \right) \int d^3 x' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{2\kappa^2 |\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) \delta^{(3)}(\vec{x}') \quad (5.4.85)$$

$$h_{\mu\nu}^{(mat)} = -4\kappa G_5 M \left(\frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{1}{2\kappa^2 |\vec{x}|^3} \right) \left(\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (5.4.86)$$

fazendo $r = |\vec{x}|$, obtemos:

$$h_{\mu\nu}^{(mat)} = -\frac{4\kappa G_5 M}{r} \left(1 + \frac{1}{2\kappa^2 r^2} \right) \left(\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (5.4.87)$$

De (5.4.75), sabemos que

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(mat)} + 2\kappa \eta_{\mu\nu} \xi^5 \quad (5.4.88)$$

Assim, usando (5.4.81) e (5.4.87):

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{4\kappa G_5 M}{r} \left(1 + \frac{1}{2\kappa^2 r^2}\right) \left(\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}\right) + \frac{2\kappa G_5 M}{3r} \eta_{\mu\nu} \quad (5.4.89)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{4\kappa G_5 M}{r} \left(1 + \frac{1}{2\kappa^2 r^2}\right) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \frac{2\kappa G_5 M}{r} \eta_{\mu\nu} \left(1 + \frac{1}{3\kappa^2 r^2}\right) \quad (5.4.90)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{2\kappa G_5 M}{r} \left[\left(1 + \frac{1}{3\kappa^2 r^2}\right) \eta_{\mu\nu} - \left(2 + \frac{1}{\kappa^2 r^2}\right) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \right] \quad (5.4.91)$$

Esta é portanto a perturbação da métrica da brana [16] causada pelo corpo puntiforme de massa M . Se considerarmos $G_4 = \kappa G_5$ temos, finalmente.

$$\bar{h}_{00} = -\frac{2G_4 M}{r} \left[\left(1 + \frac{2}{3\kappa^2 r^2}\right) \right] \quad (5.4.92)$$

e

$$\bar{h}_{ij} = -\frac{2G_4 M}{r} \left[\left(1 + \frac{1}{3\kappa^2 r^2}\right) \delta_{ij} \right] \quad (5.4.93)$$

Assim, o elemento de linha no gauge de área será:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_4 M}{r} - \frac{4G_4 M}{3\kappa^2 r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2G_4 M}{r} - \frac{3G_4 M}{3\kappa^2 r^2}\right)} - r^2 d\Omega^2 \quad (5.4.94)$$

Recuperamos assim, o resultado da Relatividade Geral no limite de campo fraco. Observe que na expressão (5.4.94), o termo adicional é o termo de correção para o potencial devido a dimensão extra.

Capítulo 6

Comentários e Conclusões

Nesse trabalho realizamos um estudo sobre as dimensões extras no universo e apresentamos alguns modelos dessa teoria. A idéia da existência de dimensões extras vem sendo postulada desde a década de 20. Na tentativa de unificar a gravidade com o eletromagnetismo, Theodor Kaluza e Oskar Klein [11] desenvolveram uma teoria, na qual a existência de uma dimensão extra é de fundamental importância. Novos modelos de dimensões extras surgiram mais recentemente. O modelo conhecido por ADD foi proposto por Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Georgi Dvali [17], no qual o problema da hierarquia fica resolvido quando se supõe a existência de dimensões extras. Um outro modelo que estudamos neste trabalho são os modelos do cenário Randall-Sundrum (RS) desenvolvidos por Lisa Randall e por Raman Sundrum. Nos modelos ADD, RSI e RSII, o universo é visto como uma hipersuperfície imersa em um espaço ambiente maior, na qual todos os campos exceto a gravidade estão confinados.

No universo multidimensional, postulado na teoria de Kaluza-Klein, a métrica do espaço-tempo em cinco dimensões é parametrizada de uma forma específica, na qual se identifica a métrica do espaço-tempo usual, um campo escalar e um campo vetorial. Além disto, as derivadas da métrica com respeito à dimensão extra são consideradas nulas e este seria um dos motivos pelo qual não observamos esta dimensão extra. A razão física dessa condição é a hipótese de que a dimensão extra possui a topologia de um círculo com um raio muito pequeno, da ordem do comprimento de Planck, e desta forma o universo

teria uma forma cilíndrica. Assim, a dimensão extra no modelo Kaluza-Klein é uma dimensão compacta. Para um observador 4-dimensional os campos são constituídos de um modo zero juntamente com modo com massa, definidos como modo KK. Cada modo KK carrega uma energia inversamente proporcional ao raio do círculo. Portanto, como o raio da circunferência da dimensão extra é da ordem do comprimento de Planck, os modos KK não podem ser excitados em processos de baixas energias, exceto o modo zero, que não depende da dimensão extra.

Nas teorias de imersão, o confinamento dos campos desempenha um papel fundamental. Na literatura, existem diversos modelos de aprisionamento do campo. Utilizamos o modelo de localização de férmions proposto por Rubakov e por Shaposhnikov [19] como ilustração. Neste cenário, toda a matéria encontra-se presa numa hipersuperfície (3+1)-dimensional denominada de 3-brana inserida em um universo de dimensões extras. No contexto da teoria de campo, esta hipersuperfície nada mais é do que uma parede de domínio, no limite de espessura nula. Neste modelo, se admitiu a existência de apenas uma dimensão extra. Os férmions com massa nula, estão presos à parede por meio de uma interação do tipo Yukawa com o campo escalar. Existe um salto entre o modo zero e os modos contínuos que representam os férmions 5-dimensionais que se propagam ao longo da dimensão extra. Portanto, esse mecanismo que aprisiona a matéria numa brana é um aspecto importante da teoria ao explicar por que as dimensões extras não são observadas.

Tanto a matéria como os outros campos do modelo padrão (com exceção da gravidade) estão presos a brana, ou seja, linhas de campo elétrico e magnético por exemplo, não podem se propagar ao longo da dimensão extra. Apenas os grávitons podem se propagar livremente em dimensões superiores. Podemos utilizar a analogia das bolas de bilhar movendo-se na superfície de uma mesa de jogos apresentada por Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Geogi Dvali. Nesta analogia, as partículas do modelo padrão, como elétrons e prótons, são bolas as bolas de bilhar, enquanto que a mesa de jogos seria a brana. Neste exemplo, temos um universo bidimensional. Quando duas bolas se chocam, elas produzem ondas sonoras que se propagam em 3 dimensões. Estas ondas sonoras são

análogas a grávitons, que podem viajar no espaço de dimensões extras. Se a energia do choque for suficientemente grande, as ondas sonoras que são produzidas, levarão embora alguma energia da superfície.

Como o único campo que se propaga na direção da dimensão extra é o campo gravitacional, estudamos os efeitos que as dimensões extras causam sobre este campo. No entanto, em dimensões superiores não-compactas, o campo gravitacional cai mais rapidamente com a distância do que prevê a lei do inverso do quadrado, válida no espaço com três dimensões espaciais. Porém no modelo ADD a exemplo de Kaluza-Klein, as dimensões são compactas embora podendo ter comprimento grande quando comparado aquele outro modelo. Determinamos, então, o potencial gravitacional gerado por um corpo de massa m em um universo deste tipo que possui uma única dimensão extra. Como a dimensão extra possui a topologia circular, o universo apresentará uma forma cilíndrica e neste caso as linhas de campo que se propagam ao longo deste universo, darão voltas em torno dele. Se existe um observador na proximidades de m , as linhas de campo provenientes dessa massa chegarão até o observador depois de percorrerem o cilindro e então o observador sentirá a influência do campo gravitacional gerado por várias massas que estarão dispostas ao longo da mesma linha que passa pelo centro de m . A estas diversas massas demos o nome de imagens topológicas e estas massas estão separadas por uma distância igual ao comprimento da dimensão extra. Consideramos ainda a situação em que o observador encontra-se a uma distância muito grande quando comparado com o raio da dimensão extra e para esta situação o observador vê um fio de massa, ou seja, uma distribuição uniforme de massa ao longo da dimensão extra e concluímos que para grandes distâncias, quando comparadas com o raio da dimensão extra, recuperamos o potencial gravitacional gerado por m em um espaço com 3 dimensões espaciais não compactas.

O principal objetivo do modelo ADD está na tentativa de resolver o problema da hierarquia. Assim, este problema seria resolvido se a escala de Planck em um espaço multidimensional, fosse da mesma ordem que a escala eletro-fraca. Neste caso, teríamos uma relação entre o comprimento das dimensões extras l_c e o número de dimensões extras

$(\eta - 4)$ dada por $l_c = 10^{-18}(10^{15})^{2/\eta-4}$. Portanto, para evitar conflito com os dados experimentais, o modelo precisa de no mínimo duas dimensões extras; neste caso l_c seria da ordem do milímetro.

Outros modelos de Dimensões extras que estudamos foram os modelos desenvolvidos por Lisa Randall e Raman Sundrum. Assim como no ADD, os modelos de Randall-Sundrum (RS), como são conhecidos, são modelos de brana, ou modelos de imersão. Estes modelos diferem do ADD quando se trata do números de dimensões extras do universo e pela maneira como elas estão escondidas, no que diz respeito ao campo gravitacional. No modelo ADD, o campo gravitacional reproduz o comportamento quadrimensional porque as dimensões extras são compactas. Nos modelos RS, isso acontece devido o fato da métrica ser modificada por um fator de deformação denominado de "warping factor". Assim, não temos um espaço-plano (sem curvatura) como ocorre no modelo ADD, e por causa disso no modelo (RSI) basta uma dimensão extra para tentar solucionar o problema da hierarquia.

No modelo RSI, o universo é constituído por duas branas e dessa maneira a dimensão extra possui um comprimento finito, temos assim uma dimensão compacta. Ainda no modelo RSI, discutimos o espectro de massa dos grávitons. Notamos que existe um modo zero (grávitons sem massa) e que os modos massivos dependem do tamanho da dimensão extra, formando um espectro de massa discreto. Para uma dimensão extra de comprimento suficientemente pequeno, a massa do primeiro modo massivo dos grávitons é muito grande sendo necessário, portanto, uma energia muito alta para excitar este modo. Se admitirmos que, esta energia está fora do alcance experimental atual, isto explicaria porque os grávitons massivos não foram encontrados ainda. A detecção futura deste grávitons do modo KK seria um forte indício da existência de uma dimensão extra no universo.

Já no modelo RSII, uma das branas é removida. Com isso o comprimento da dimensão extra torna-se infinito. Neste caso, a massa dos grávitons pode assumir qualquer valor real não-negativo. Com isso concluimos que no modelo RSII os espectro de massa torna-

se contínuo. No entanto, ainda existe um modo zero $m = 0$ normalizável. E é graças a este modo zero que o campo gravitacional apresenta um comportamento quadridimensional, para longas distâncias, apesar da existência da dimensão extra com escala infinita.

Estudamos ainda, neste modelo, o campo gravitacional gerado por uma distribuição de matéria localizada na brana. Consideramos uma fonte esférica e estacionária. A métrica difere da métrica de Schwarzschild por um termo de correção consequência da dimensão extra suposta pelo modelo.

Uma perspectiva deste trabalho consiste em calcular a emissão de ondas gravitacionais e a energia irradiada no modelo RSII, por uma fonte de campo gravitacional, mais especificamente um sistema binário de duas estrelas, por exemplo.

Apêndice A

Volumes em Dimensões Extras

Já que estamos dissertando sobre teorias de dimensões extras, vamos apresentar uma breve análise sobre *Esferas* e seus volumes nestas teorias. Vamos inicialmente estabelecer as definições de *Esferas* e *Bolas* [7].

Considere o espaço de 3 dimensões, com coordenadas x_1, x_2, x_3 . Neste espaço a 3-*Bola* (B^3) será a região definida por:

$$B^3(R) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \quad (\text{A.1})$$

esta região está envolvida por 2-*Esfera*

$$S^2(R) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \quad (\text{A.2})$$

onde o índices superiores em B e S denotam a dimensionalidade do espaço em questão[cite7].

Vejamos um exemplo em espaço de dimensões inferiores. Em um espaço de 2 dimensões, B^2 é um disco em 2 dimensões envolvido por um círculo de raio unitário S^1 . Logo, podemos generalizar estas definições de *Bolas* e *Esferas* para um espaço com n dimensões arbitrárias, onde as *Bolas* e *Esferas* formam um sub-espaço de \mathbb{R}^n . Assim, uma *Bola* será definida por:

$$B^n(R) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2 \quad (\text{A.3})$$

esta região está envolvida por uma *Esfera* $S^{n-1}(R)$

$$S^{n-1}(R) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = R^2 \quad (\text{A.4})$$

Esta discussão pode causar confusão quando for preciso utilizar as definições de comprimento, área e volume de modo que independente do número de dimensões do espaço sempre iremos nos referir a volumes. Assim, se o espaço possui uma única dimensão, tomamos o volume como sendo o comprimento. Se o espaço possui duas dimensões o volume será a área, e neste contexto os espaços de dimensões superiores possuirão somente volume [7].

De posse desta definição, então os volumes das esferas em uma e em duas dimensões serão:

$$Vol(S^1(R)) = 2\pi R \quad (\text{A.5})$$

$$Vol(S^2(R)) = 4\pi R^2 \quad (\text{A.6})$$

Percebemos que o volume da esfera tem unidades de comprimento elevado a potência da dimensão espacial. Então, o volume de uma esfera de raio R está relacionado com o volume de uma esfera de raio unitário por:

$$Vol(S^{n-1}(R)) = R^{n-1} Vol(S^{n-1}). \quad (\text{A.7})$$

Perceba que usando (A.7) recuperamos as expressões (A.5) e (A.6).

Precisamos agora definir o volume da *Esfera* de raio unitário S^{n-1} . No espaço \mathbb{R}^n , a coordenada radial é definida por

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (\text{A.8})$$

Consideremos a seguinte integral

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 dx_2 \dots dx_n e^{-r^2} \quad (\text{A.9})$$

Para resolver esta integral, vamos seguir dois caminhos diferente. Primeiro, calculando o produto de n integrais gaussianas, obtemos

$$I_n = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i e^{-x_i^2} = (\sqrt{\pi})^n = \pi^{\frac{n}{2}} \quad (\text{A.10})$$

Por outro lado, podemos fatiar o espaço \mathbb{R}^n em cascas esfericas concêntricas. Desta maneira, a região $r = cte$ corresponde a esfera $S^{n-1}(r)$. O volume entre cascas esféricas localizadas em r e $r + dr$ é igual a:

$$Vol(S^{n-1}(r))dr \quad (\text{A.11})$$

e por isso a integral I_n assume a seguinte forma:

$$I_n = \int_0^{\infty} dr Vol(S^{n-1}(r))e^{-r^2} \quad (\text{A.12})$$

Utilizando (A.7) temos

$$I_n = Vol(S^{n-1}) \int_0^{\infty} dr r^{n-1} e^{-r^2} \quad (\text{A.13})$$

Aqui, podemos fazer uma mudança de coordenadas da seguinte forma $t = r^2$. Segue, então, que

$$I_n = Vol(S^{n-1}) \int_0^{\infty} dt e^{-t} r^{\frac{n}{2}-1} \quad (\text{A.14})$$

Lembrando da definição da função gama [13],

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{n-1} \quad (\text{A.15})$$

Podemos, reescrever (A.14) como:

$$I_n = \frac{1}{2} Vol(S^{n-1}) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad (\text{A.16})$$

Então, comparando (A.10) com (A.16) finalmente encontramos

$$Vol(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (\text{A.17})$$

Podemos então verificar:

$$\begin{aligned} Vol(S^1) &= Vol(S^{2-1}) = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi \\ Vol(S^2) &= Vol(S^{3-1}) = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4\pi \\ Vol(S^3) &= Vol(S^{4-1}) = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Então usando (A.17)

$$Vol(S^{n-1}(R)) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} R^{n-1} \tag{A.19}$$

A expressão (A.19) estabelece o volume em um espaço com n dimensões extras arbitrárias.

Apêndice B

Integral de Contorno no Plano Complexo

Vamos, agora, demonstrar a solução da seguinte integral apresentada no capítulo 4:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{m^2 + k^2} e^{ikR} dk = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{k + im} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{k - im} dk \right] \quad (\text{B.1})$$

Para resolução deste tipo de integral faremos uso do teorema dos resíduos que é bem conhecido na Teoria das variáveis complexas [5].

B.1 Teorema do Resíduo

Considere uma função $f \equiv f(z)$ que é bem definida numa determinada região do plano complexo, exceto em um número finitos de singularidades isoladas z_1, z_2, \dots, z_n . Então, seja C um caminho fechado que envolve os pontos singulares, de maneira que sobre C e no seu interior a função f é analítica exceto nos pontos z_1, z_2, \dots, z_n . Então

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n (\text{res. } f)(z_j) \quad (\text{B.2})$$

onde $(\text{res. } f)(z_j)$ é a resíduo da função f em z_j e a integral é calculada no sentido anti-horário ao longo de [4]

B.2 Integrais no Plano Complexo

Podemos, agora, fazer uso do teorema do resíduo para calcular a integral (B.1). Os pontos singulares ou pólos da função são $\pm im$. Para calcular esta integral, vamos integrar ao longo de um caminho fechado C (um semicírculo de raio L) e tomar o limite $L \rightarrow \infty$. Se a integral da parte "curva" for a zero quando L vai ao infinito, a integral em C deve convergir para a integral ao longo do eixo real, reproduzindo, portanto, a integral (B.1)

Consideremos a primeira integral do lado direito da relação (B.1), que tem como pólo o ponto $-im$. Vamos verificar qual o caminho C mais adequado, o semi-círculo inferior figura (B.1) ou superior figura (B.2). Considere, primeiro o semi-círculo inferior. Ao longo deste caminho a variável de integração pode ser escrita como $k = \alpha - i\beta^2$. Neste caso, a integral seria dada por

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_C \frac{e^{i\alpha R} e^{-\beta^2 R}}{k + im} dk \quad (B.3)$$

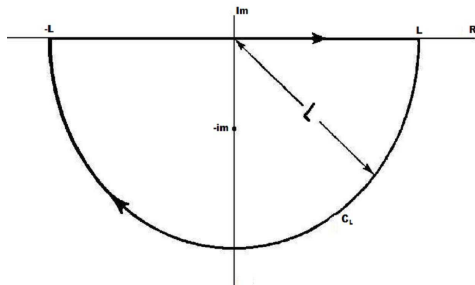


Figura B.1: Semicírculo inferior de raio L

No limite $L \rightarrow \infty$, esta integral diverge, portanto, podemos verificar que esse contorno não é conveniente para nossos propósitos.

Vamos tomar o contorno por cima. Agora, $k = \alpha + i\beta^2$, conforme a figura (B.2)

A integral será, então;

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_C \frac{e^{i\alpha R} e^{-\beta^2 R}}{k + im} dk \quad (B.4)$$

Vemos, que neste contorno a integral converge quando $L \rightarrow \infty$. Mais do que isso, a integral ao longo do arco vai a zero neste limite, ou seja;

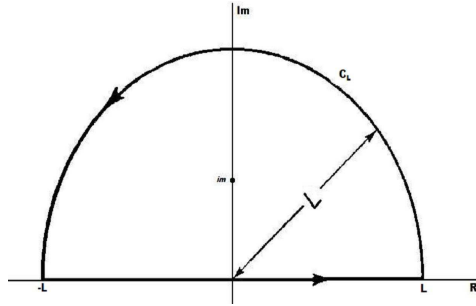


Figura B.2: Semicírculo superior C_L de raio L .

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\text{arco}} \frac{e^{i\alpha R} e^{\beta^2 R}}{k + im} dk = 0 \quad (\text{B.5})$$

Sendo assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{k + im} dk = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_C \frac{e^{ikR}}{k + im} dk \quad (\text{B.6})$$

Agora, usando o teorema do resíduo, sabemos que a integral (B.6) é nula porque o pólo está fora do contorno. Portanto

$$\int_C \frac{e^{ikR}}{k + im} dk = 0 \quad (\text{B.7})$$

Podemos, agora, aplicar o mesmo raciocínio para a segunda integral da equação (B.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{k + im} dk = 2\pi i e^{-mR} \quad (\text{B.8})$$

e assim, a nossa integral assume a seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} e^{ikR} dk = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mR}}{R} \quad (\text{B.9})$$

Apêndice C

Constantes de Normalização das Autofunções

No capítulo 5 discutimos o espectro de massa dos grávitons, de forma que precisamos encontrar as constantes de normalização das autofunções.

Vamos iniciar nossa discussão considerando a normalização das funções de onda que descrevem os modos KK . Como vimos, no capítulo (4), os modos KK satisfazem à equação.

$$\Psi_m''(z) - 4\kappa^2\Psi_m(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi_m(z) = 0 \quad (C.1)$$

De maneira análoga, para um outro valor $\Psi_{\tilde{m}}(z)$, teríamos

$$\Psi_{\tilde{m}}''(z) - 4\kappa^2\Psi_{\tilde{m}}(z) + \frac{\tilde{m}^2}{a^2}\Psi_{\tilde{m}}(z) = 0 \quad (C.2)$$

Vamos multiplicar (C.1) por $\Psi(\tilde{m}x)$ e (C.2) por $\Psi(mx)$ e subtrair as expressões encontradas

$$\Psi_{\tilde{m}}(z)\Psi_m''(z) - \Psi_m(z)\Psi_{\tilde{m}}''(z) = \frac{\tilde{m}^2 - m^2}{a^2}\Psi_m(z)\Psi_{\tilde{m}}(z) \quad (C.3)$$

podemos ainda reescrever o termo da lado esquerdo da equação acima como uma derivada, assim obtemos

$$\frac{d}{dz}[\Psi_{\tilde{m}}(z)\Psi_m'(z) - \Psi_m(z)\Psi_{\tilde{m}}'(z)] = \frac{\tilde{m}^2 - m^2}{a^2}\Psi_m(z)\Psi_{\tilde{m}}(z) \quad (C.4)$$

integrando no intervalo $[0, z]$, encontramos

$$\int_0^z \frac{d}{dz} [\Psi_{\tilde{m}}(z) \Psi'_m(z) - \Psi_m(z) \Psi'_{\tilde{m}}(z)] dz = (\tilde{m}^2 - m^2) \int_0^z \frac{1}{a^2} \Psi_m(z) \Psi_{\tilde{m}}(z) dz \quad (C.5)$$

logo

$$\frac{[\Psi_{\tilde{m}}(z) \Psi'_m(z) - \Psi_m(z) \Psi'_{\tilde{m}}(z)]_0^z}{(\tilde{m}^2 - m^2)} = \int_0^z \frac{1}{a^2} \Psi_m(z) \Psi_{\tilde{m}}(z) dz \quad (C.6)$$

Substituindo os limites de integração na expressão da direita em (C.6), temos que o termo para $z = 0$ se anula uma vez que impomos as condições de contorno neste ponto. Contudo, para o limite superior da integração, $z \rightarrow \infty$, devemos fazer uma análise assintótica da função de onda.

As funções de onda dos modos KK que são soluções da equação (C.1) são na realidade uma combinação linear das funções de Bessel de primeira e segunda espécies. De fato, vimos no capítulo (4) que:

$$\Psi_m(z) = C_m \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) N_2\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}\right) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) J_2\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}\right) \right] \quad (C.7)$$

onde C_m é uma constante de normalização. Podemos ainda escrever a função acima em termos de uma nova variável definida por $x = \frac{e^{\kappa z}}{\kappa}$. Neste caso temos

$$\Psi_m(z) = C_m \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) N_2(mx) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) J_2(mx) \right] \quad (C.8)$$

Observe que quando $z \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty$.

A derivada de $\Psi(z)$ fica

$$\Psi'_m(z) = (\kappa x) \frac{d\Psi_m(mx)}{dx} \quad (C.9)$$

Com isso a derivada de (C.8) será

$$\Psi'_m(z) = C_m \kappa x \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \frac{dN_2(mx)}{dx} - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \frac{dJ_2(mx)}{dx} \right] \quad (C.10)$$

No limite $x \rightarrow \infty$, as funções de Bessel podem ser escritas em suas formas assintóticas. O comportamento assintótico das funções de Bessel de primeiro e segundo tipo é dado por [13]

$$J_2(mx) = \sqrt{\frac{2}{\pi mx}} \cos\left(mx - \frac{5}{4}\pi\right) \quad (\text{C.11a})$$

$$N_2(mx) = \sqrt{\frac{2}{\pi mx}} \sin\left(mx - \frac{5}{4}\pi\right) \quad (\text{C.11b})$$

Os argumentos das funções seno e cosseno irão se reduzir a mx uma vez que estamos tratando do limite assintótico de x e neste caso $mx \gg \frac{5}{4}\pi$, portanto teremos

$$J_2(mx) = \sqrt{\frac{2}{\pi mx}} \cos(mx) \quad (\text{C.12a})$$

$$N_2(mx) = \sqrt{\frac{2}{\pi mx}} \sin(mx) \quad (\text{C.12b})$$

Portanto derivando as expressões assintóticas para $J_2(mx)$ e $N_2(mx)$, temos

$$\frac{dJ_2(mx)}{dx} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi mx^3}} \cos(mx) - m\sqrt{\frac{2}{\pi mx}} \sin(mx) \quad (\text{C.13a})$$

$$\frac{dN_2(mx)}{dx} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi mx^3}} \sin(mx) + m\sqrt{\frac{2}{\pi mx}} \cos(mx) \quad (\text{C.13b})$$

Como estamos tratando do comportamento assintótico, o primeiro termo destas derivadas é pequeno quando comparado ao segundo termo e podemos desprezá-lo, uma vez que $x \rightarrow \infty$, $x^{-3/2} \ll x^{-1/2}$. Assim:

$$\frac{dJ_2(mx)}{dx} = -m\sqrt{\frac{2}{\pi mx}} \sin(mx) \quad (\text{C.14a})$$

$$\frac{dN_2(mx)}{dx} = m\sqrt{\frac{2}{\pi mx}} \cos(mx) \quad (\text{C.14b})$$

Desta forma, a expressão em (C.9) será

$$\Psi'_m(z) = C_m \kappa m x \sqrt{\frac{2}{\pi m x}} \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \cos(mx) + N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \sin(mx) \right] \quad (\text{C.15})$$

Podemos agora obter as constantes de normalização C_m da função de onda dos modos KK. Para tanto, devemos escolher o C_m de tal forma que o lado esquerdo de (C.6) seja

igual a função Delta de Dirac $\delta(m - \tilde{m})$. Tendo esse objetivo em mente, devemos proceder da seguinte maneira. De início consideremos o produto entre $\Psi_{\tilde{m}}\Psi'_m$ e entre $\Psi_m\Psi'_{\tilde{m}}$ separadamente:

$$\Psi_{\tilde{m}}\Psi'_m = C_m C_{\tilde{m}} \frac{2\kappa}{\pi} \sqrt{\frac{m}{\tilde{m}}} \left\{ \left[J_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) \sin(\tilde{m}x) - N_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) \cos(\tilde{m}x) \right] \right. \\ \left. \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \cos(mx) + N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \sin(mx) \right] \right\} \quad (C.16)$$

$$\Psi_m\Psi'_{\tilde{m}} = C_m C_{\tilde{m}} \frac{2\kappa}{\pi} \sqrt{\frac{\tilde{m}}{m}} \left\{ \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \sin(mx) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \cos(mx) \right] \right. \\ \left. \left[J_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) \cos(\tilde{m}x) + N_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) \sin(\tilde{m}x) \right] \right\} \quad (C.17)$$

Definindo $\Delta m = \tilde{m} - m$, obtemos subtraindo (C.17) de (C.16) e usando as relações trigonométricas para $\sin(A \pm B)$ e $\cos(A \pm B)$, a seguinte expressão:

$$[\Psi_{\tilde{m}}(z)\Psi'_m(z) - \Psi_m(z)\Psi'_{\tilde{m}}(z)] = C_m C_{\tilde{m}} \frac{2m\kappa}{\pi} \sqrt{\frac{1}{m\tilde{m}}} \\ \left\{ \left[N_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right)N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) + J_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right)J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \right] \sin[\Delta mx] \right. \\ \left. + \left[N_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right)J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) - J_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right)N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \right] \cos[\Delta mx] \right\} \\ + C_m C_{\tilde{m}} \frac{2\kappa\Delta m}{\pi} \sqrt{\frac{1}{m\tilde{m}}} \\ \left\{ \left[N_1\left(\frac{\Delta m}{\kappa}\right)N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \cos(mx) \sin(\tilde{m}x) \right. \right. \\ \left. - J_1\left(\frac{\Delta m}{\kappa}\right)J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \cos(\tilde{m}x) \sin(mx) \right] \\ + \left[J_1\left(\frac{\Delta m}{\kappa}\right)N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \cos(\tilde{m}x) \cos(mx) \right. \\ \left. - N_1\left(\frac{\Delta m}{\kappa}\right)J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \sin(\tilde{m}x) \sin(mx) \right] \right\} \quad (C.18)$$

No lado esquerdo da equação (C.6), o denominador pode ser escrito como

$$\tilde{m}^2 - m^2 = (\tilde{m} - m)(\tilde{m} + m) = \Delta m(\tilde{m} + m) \quad (C.19)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi_{\tilde{m}}(z)\Psi'_m(z) - \Psi_m(z)\Psi'_{\tilde{m}}(z)}{(\tilde{m}^2 - m^2)} &= \frac{C_m C_{\tilde{m}} \frac{2m\kappa}{\pi} \sqrt{\frac{1}{m\tilde{m}}}}{\Delta m (\tilde{m} + m)} \\
&\left\{ \left[N_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) + J_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \right] \sin[\Delta m x] \right. \\
&+ \left. \left[N_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) - J_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \right] \cos[\Delta m x] \right\} \\
&\frac{C_m C_{\tilde{m}} \frac{2\kappa\Delta m}{\pi} \sqrt{\frac{1}{m\tilde{m}}}}{\Delta m (\tilde{m} + m)} \\
&\left\{ \left[N_1\left(\frac{\Delta m}{\kappa}\right) N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \cos(mx) \sin(\tilde{m}x) \right. \right. \\
&- \left. \left. J_1\left(\frac{\Delta m}{\kappa}\right) J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \cos(\tilde{m}x) \sin(mx) \right] \right. \\
&+ \left. \left[J_1\left(\frac{\Delta m}{\kappa}\right) N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \cos(\tilde{m}x) \cos(mx) \right. \right. \\
&- \left. \left. N_1\left(\frac{\Delta m}{\kappa}\right) J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) \sin(\tilde{m}x) \sin(mx) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Queremos mostrar que a expressão acima é proporcional a delta de Dirac $\delta(\tilde{m} - m)$ no limite que $z \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$).

Isso pode ser verificado, integrando (C.20) com respeito a \tilde{m} , no intervalo $a \leq \tilde{m} \leq b$. Vamos considerar cada termo separadamente.

Considere inicialmente os quatro últimos termos de (C.20). Eles tem a seguinte forma

$$\int_a^b F(\tilde{m}) \sin(\tilde{m}x) d\tilde{m} \text{ ou } \int_a^b F(\tilde{m}) \cos(\tilde{m}x) d\tilde{m} \tag{C.21}$$

onde $F(\tilde{m})$ é uma função bem comportada de \tilde{m} no intervalo (a, b) . Assim, de acordo com o lema de Riemann-Lebesgue[*cite 35*] essas expressões se anulam no limite $x \rightarrow \infty$.

O primeiro termo em (C.20) tem a forma

$$\int_a^b d\tilde{m} C_m C_{\tilde{m}} \frac{2m\kappa}{\pi} \sqrt{\frac{1}{m\tilde{m}}} \frac{[N_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) + J_1\left(\frac{\tilde{m}}{\kappa}\right) J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)] \sin[\Delta m x]}{m + \tilde{m}} \frac{1}{\Delta m} \tag{C.22}$$

sabemos que $\frac{\sin[\Delta m x]}{\Delta m}$ é uma sequência delta convergente, para $x \rightarrow \infty$, mais precisamente o limite é igual a $\pi\delta(\tilde{m} - m)$. Assim, admitindo que a função que a multiplica é bem comportada, no intervalo (a, b) , temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^b d\tilde{m} C_m C_{\tilde{m}} \frac{2m\kappa}{\pi} \sqrt{\frac{1}{m\tilde{m}}} \frac{[N_1(\frac{\tilde{m}}{\kappa})N_1(\frac{m}{\kappa}) + J_1(\frac{\tilde{m}}{\kappa})J_1(\frac{m}{\kappa})]}{m + \tilde{m}} \frac{\sin[\Delta m x]}{\Delta m} \\
= C_m^2 \frac{\kappa}{m} \left[J_1^2\left(\frac{m}{\kappa}\right) + N_1^2\left(\frac{m}{\kappa}\right) \right] = 1
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Se m pertence ao intervalo $[a, b]$ e zero no caso contrário.

Para termos um resultado igual a unidade em (C.23), devemos então escolher

$$C_m = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{J_1\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2 + N_1\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2}} \tag{C.24}$$

O segundo termo

$$\int_a^b d\tilde{m} C_m C_{\tilde{m}} \frac{2m\kappa}{\pi} \sqrt{\frac{1}{m\tilde{m}}} \frac{[N_1(\frac{\tilde{m}}{\kappa})J_1(\frac{m}{\kappa}) - J_1(\frac{\tilde{m}}{\kappa})N_1(\frac{m}{\kappa})]}{m + \tilde{m}} \frac{\cos[\Delta m x]}{\Delta m} \tag{C.25}$$

Se $m \notin [a, b]$, a integral acima é do tipo anterior (C.18), portanto, vai a zero no limite $x \rightarrow \infty$. O problema acontece quando integramos \tilde{m} em torno de m , por causa do denominador que vai a zero ($\Delta m \rightarrow 0$). No entanto, note que o numerador também tende a zero. Assim, (C.25) também é do tipo (C.21), logo tende a zero. Assim, Finalmente

$$\int_0^z \frac{1}{a^2} \Psi_m(z) \Psi_{\tilde{m}}(z) dz = \delta(\tilde{m} - m) \tag{C.26}$$

Com a escolha (C.24), ou seja, para

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \frac{[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)N_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)J_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right)]}{\sqrt{J_1\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2 + N_1\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2}} \tag{C.27}$$

Apêndice D

Integrais

Desejamos a integral a seguir que aparece no capítulo (5).

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{(k^0)^2 - \omega_k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^0\tau} d\tau = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{m^2 + \vec{k}^2} \quad (\text{D.1})$$

Na integral D.1 temos um produto interno entre os vetores \vec{k} e $(\vec{x} - \vec{x}')$ de forma que este produto pode ser escrito como

$$\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}') = kR \cos \theta \quad (\text{D.2})$$

onde $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{m^2 + \vec{k}^2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ikR \cos \theta}}{m^2 + \vec{k}^2} \quad (\text{D.3})$$

em coordenadas esfericas temos que $d^3 k = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ikR \cos \theta}}{m^2 + \vec{k}^2} = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{e^{-ikR \cos \theta}}{m^2 + \vec{k}^2} k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi \quad (\text{D.4})$$

$$= - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(iR)} \int_0^\infty (e^{ikR} - e^{-ikR}) \frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} dk \quad (\text{D.5})$$

$$= - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(iR)} \int_0^\infty e^{ikR} \frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} dk - \int_0^\infty e^{-ikR} \frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} dk \quad (\text{D.6})$$

Podemos fazer uma mudança de variável na última integral em (D.6) então,

$$k \rightarrow -k$$

$$dk \rightarrow -dk$$

logo temos

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ikR \cos \theta}}{m^2 + \vec{k}^2} &= - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(iR)} \int_0^\infty e^{ikR} \frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} dk - \int_0^{-\infty} e^{ikR} \frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} dk \\ &= - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(iR)} \int_{-\infty}^\infty \frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} e^{ikR} dk \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

O integrando ainda pode ser escrito da seguinte forma

$$\frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k + im} + \frac{1}{k - im} \right] \quad (\text{D.8})$$

E a integral em (D.7) será escrita da seguinte maneira

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} e^{ikR} dk = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikR}}{k + im} dk + \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikR}}{k - im} dk \right] \quad (\text{D.9})$$

Estas integrais podem ser resolvidas por meio de integrais de contorno no plano complexo, temos portanto

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikR}}{k + im} dk = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikR}}{k - im} dk = 2\pi i e^{-mR} \quad (\text{D.11})$$

então

$$- \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(iR)} \int_{-\infty}^\infty \frac{k}{m^2 + \vec{k}^2} e^{ikR} dk = - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(iR)} \frac{1}{2} 2\pi i e^{-mR} = - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mR}}{R} \quad (\text{D.12})$$

logo

$$\int dt' \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-x')}}{[k^2 - m^2]} \quad (\text{D.13})$$

Apêndice E

Transformação de Coordenadas

Consideremos uma transformação de coordenadas infinitesimal:

$$\bar{x}^A = x^A + \xi^A(x) \quad (\text{E.1})$$

Nas coordenadas Gaussianas a métrica \bar{g}_{AB} deve manter a mesma forma que g_{AB} , ou seja, a métrica no gauge *RS*. Utilizando a definição de tensor covariante [29] como sendo o ente matemático que muda de um sistema de coordenadas para outro com a matriz jacobiana. Assim, o tensor métrico obedece a seguinte transformação de coordenadas [2]

$$\bar{g}_{MN} = \frac{\partial x^A}{\partial \bar{x}^M} \frac{\partial x^B}{\partial \bar{x}^N} g_{AB} \quad (\text{E.2})$$

de modo que

$$g_{AB} = \gamma_{AB} + h_{AB} \quad (\text{E.3})$$

Vejamos, utilizando (E.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^A}{\partial \bar{x}^M} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^M} (x^A - \xi^A(x)) \\ \frac{\partial x^A}{\partial \bar{x}^M} &= \frac{\partial x^A}{\partial \bar{x}^M} - \frac{\partial \xi^A(x)}{\partial \bar{x}^M} \\ \frac{\partial x^A}{\partial \bar{x}^M} &= \delta_M^A - \frac{\partial \xi^A(x)}{\partial \bar{x}^M} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

e ainda substituindo (E.3) em (E.2) temos

$$\bar{g}_{MN} = \left(\delta_M^A - \frac{\partial \xi^A(x)}{\partial \bar{x}^M} \right) \left(\delta_N^B - \frac{\partial \xi^B(x)}{\partial \bar{x}^N} \right) (\gamma_{AB} + h_{AB}) \quad (\text{E.5})$$

mas como de uma forma geral a métrica de fundo pode ser uma função de todas as coordenadas, ou seja,

$$\gamma_{AB} \equiv \gamma_{AB} (x^C) \quad (\text{E.6})$$

no nova sistema de coordenadas

$$\gamma_{AB} (x^C) = \gamma_{AB} (\bar{x}^C - \xi^C(x)) \quad (\text{E.7})$$

expandindo até primeira ordem de ξ , temos

$$\gamma_{AB} (x^C) = \gamma_{AB} (\bar{x}^C) - \xi^C(x) \frac{\partial \gamma_{AB}}{\partial x^C} \quad (\text{E.8})$$

Logo, o tensor métrico no novo sistema de coordenadas será

$$\bar{g}_{MN} = \left(\delta_M^A - \frac{\partial \xi^A(x)}{\partial \bar{x}^M} \right) \left(\delta_N^B - \frac{\partial \xi^B(x)}{\partial \bar{x}^N} \right) \left(\gamma_{AB} (\bar{x}^C) - \xi^C(x) \frac{\partial \gamma_{AB}}{\partial x^C} + h_{AB} \right) \quad (\text{E.9})$$

desprezando os termos de segunda ordem

$$\bar{g}_{MN} = \bar{\gamma}_{MN} + h_{AB} - \gamma_{AN} \xi_{,M}^A - \gamma_{BM} \xi_{,N}^B - \xi^C(x) \gamma_{MN,C} \quad (\text{E.10})$$

onde $\xi_{,M}^A = \frac{\partial \xi^A}{\partial x^M}$

Esta expressão deve manter a mesma forma que (E.3), ou seja,

$$\bar{g}_{MN} = \bar{\gamma}_{MN} + \bar{h}_{MN} \quad (\text{E.11})$$

Então comparando (E.10) com (E.11), temos que:

$$\bar{h}_{MN} = h_{MN} - \gamma_{AN} \xi_{,M}^A - \gamma_{AM} \xi_{,N}^A - \xi^A(x) \gamma_{MN,A} \quad (\text{E.12})$$

Bibliografia

- [1] Carroll, S. M. - *Lectures Notes on General Relativity* (Institute for Theoretical Physics, California, 1997),
- [2] d'Inverno, R. *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press) ,
- [3] Spiegel, M. R. *Mathematical Handbook*, Schaum's Outline series,
- [4] Arfken, G.B. and Weber, H.J. *Mathematical Methods for Phycists* 6^a edição,
- [5] Morse, P. M. and Feshbach, H. *Methods of Theoretical Physics, Volume 1 Mchanics* McGraw-Hill Book Company 1953,
- [6] Morse, P. M. and Feshbach, H. *Methods of Theoretical Physics, Volume 2 Mchanics* McGraw-Hill Book Company 1953,
- [7] Zwiebach B. *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press 2004),
- [8] Greiner W. *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations* 3^a edição Springer,
- [9] Sakurai J.J. *Advanced Quantum Mechanics* Addison-Wesley Publishing Company, Inc 1985,
- [10] Bjorken, J.D. And Drell S. D. *Relativistic Quantum Mchanics* McGraw-Hill Book Company,
- [11] Michio Kaku, *Quantum Field Theory A modern introduction* Oxford University Press,
- [12] Lemos, N. *Mecânica Analítica* 1^a edição ed. Livraria da Física,

- [13] Carmen L. R. B. Notas de Física matemática ed. Livraria da Física,
- [14] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett.**83**, 3370 (1999),
- [15] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett.**83**, 4690 (1999),
- [16] J. Garriga and T. Tanaka, Phys. Rev. Lett.**84**, 2778 (2000),
- [17] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys.Lett.**B 429** 263 (1998) ,
- [18] V. A. Rubakov Phys.Usp.**44**:8713 (2001),
- [19] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B 125**, 139 (1983),
- [20] Gregory Gabadadze, *ICTP Lectures on Large Extra Dimensions* [hep-ph/0308112],
- [21] F. Dahia, C. Romero, Phys.Lett.**B 651** :232 (2007),
- [22] Ruth Gregory, Braneworld Black Holes,Lect.Notes Phys.**769**:259 (2009),
- [23] R. Whisker, *Braneworld Black Holes* arXiv:0810.1534 [gr-qc];
- [24] J.M. Overduin, P.S. Wesson, Phys.Rept.**283**:303 (1997),
- [25] Alex Pomarol Phys.Lett.**486**:153 (2000),
- [26] M. J. Duff *Kaluza-Klein Theory in Perspective, in Stockholm 1994, The Oskar Klein centenary* 22 e-Print: hep-th/9410046
- [27] M. Shifman. *Large Extra Dimensions: Becoming acquainted with an alternative paradigm.* Jul 2009. 33pp e-Print: arXiv:0907.3074
- [28] Lemos, A. S. and Dahia F. Um estudo sobre o mecanismo de ocultação de dimensões extras. PIBIC/CNPq/UFCG-2009
- [29] Henrique Fleming, "Introdução aos Tensores", na página do autor <http://hfleming.com/rosto2.php#notas>
- [30] Marion, J.B. and Thornton, S, Classical Dynamics of Particles e Systems

- [31] S. B. Giddings, E. Katz and L. Randall, Linearized gravity in brane backgrounds,"JHEP 0003, 023 (2000) [hep-th/0002091].
- [32] C. D. Hoyle, U. Schmidt, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, D. J. Kapner and H. E. Swanson, Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for 'large' extra dimensions,"Phys. Rev. Lett. 86, 1418 (2001) [hep-ph/0011014]; Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law,"Phys. Rev. D 70, 042004 (2004) [hep-ph/0405262].
- [33] Figueiredo, Djairo Guedes de, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. CNPq, 1977.
- [34] C. Sivaram, "What is Special About the Planck Mass?", [gr-qc/0707.0058].