



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Geovane Tavares Nogueira

**As recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem: um
olhar para as soluções particulares das
equações não homogêneas de 2ª ordem e
aplicações**

Campina Grande - PB

Abril/2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



Geovane Tavares Nogueira

**As recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem: um olhar
para as soluções particulares das equações não
homogêneas de 2ª ordem e aplicações**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB
Abril/2024

N778r

Nogueira, Geovane Tavares.

As recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem: um olhar para as soluções particulares das equações não homogêneas de 2ª ordem e aplicações / Geovane Tavares Nogueira. – Campina Grande, 2024.

159 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros".

Referências.

1. Matemática Aplicada. 2. Recorrências Lineares. 3. Conjunto Fundamental de Soluções. 4. Solução Particular. 5. Problemas de Contagem. I. Medeiros, Luiz Antônio da Silva. II. Título.


CDU 51(043)

Geovane Tavares Nogueira


As recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem: um olhar para as soluções particulares das equações não homogêneas de 2ª ordem e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.


Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 26 de abril de 2024:

Documento assinado digitalmente
 LUIZ ANTONIO DA SILVA MEDEIROS
Data: 27/05/2024 12:11:35-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros
Orientador - UFCG

Documento assinado digitalmente
 APARECIDO JESUINO DE SOUZA
Data: 27/05/2024 16:15:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Aparecido Jesuino de Souza
Membro externo - UFPB

Documento assinado digitalmente
 MARIA IONERIS OLIVEIRA SILVA
Data: 27/05/2024 12:06:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dra. Maria Ioneris Oliveira Silva
Membro externo - SEEPB

Documento assinado digitalmente
 LEOMAQUES FRANCISCO SILVA BERNARDO
Data: 27/05/2024 14:17:59-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo
Membro interno - UFCG

Campina Grande - PB
Abril/2024

“Dedico este trabalho à minha esposa e companheira de todas as horas, Jucimeri, que foi incansável no seu apoio e me deu muita força para que tudo fosse possível e ao meu filho, Noah, que acabou de chegar para alegrar ainda mais nossas vidas. ”

Agradecimentos

A Deus, pela proteção e saúde que tem me dado e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho.

A minha esposa Jucimeri Ismael, pela paciência, compreensão, carinho e incentivo para que conseguisse chegar ao final dessa etapa. Não existem palavras suficientes para expressar minha gratidão por tudo que você tem feito. Sou abençoado por ter alguém como você em minha vida.

Aos meus pais Geraldo e Arlete pelo amor, carinho e compreensão durante todo o tempo do curso, o que sempre me fez continuar e querer chegar ao final desta jornada.

Aos meus irmãos Aridomar e Leonardo por sempre torcerem por mim.

Aos meus pais de consideração Joacil e a sua esposa Francisca por todo auxílio e apoio de sempre.

As tias Albanete e Madalena pelos apoios e incentivos para que sempre buscasse melhorias através da educação.

A minha segunda família que Deus me proporcionou, meus sogros Socorro e José, e aos cunhados Mateus e Jucinaldo por todo o apoio nas minhas escolhas.

Aos grandes amigos Renato Oliveira e Maria Ioneris pelo apoio de sempre e incentivos para que realizasse mais essa etapa na minha vida.

Ao meu orientador Luiz Antônio, pela confiança e ensinamentos, principalmente, por me fazer refletir com criticidade sobre o tema abordado, proporcionando minha evolução enquanto professor/pesquisador. E por todos os ensinamentos nas três disciplinas ministradas durante o curso de mestrado. Os seus ensinamentos foram muito além dos conteúdos do currículo. Tivemos aprendizados importantes para a vida. A sua missão vai muito além da missão de um professor, é um verdadeiro mestre, soube despertar a nossa admiração de um modo único, e se tornou uma inspiração para nós.

Aos professores Aparecido Jesuíno, Leomaques, Maria Ioneris, Flank David e a Rodrigo Cohen por aceitarem participar da banca examinadora e pelas sugestões para melhoria deste trabalho.

Ao professor Leomaques por todos os ensinamentos nas disciplinas que lecionou durante esse mestrado e por ser uma pessoa que sempre demonstrou muito preocupado com seus alunos, mostrando uma de suas imensas virtudes, a humildade. Muito obrigado pela sua dedicação, paciência e carinho ao lecionar. Só tenho a te agradecer por ter feito parte da minha vida e tenha certeza de que tudo o que aprendi, vou levar por toda à vida. Ao senhor, toda gratidão e carinho!

A UFCG que me deu o incentivo e os meios necessários para correr atrás do meu sonho.

A todos os professores que fazem parte do programa de mestrado PROFMAT da UFCG, em especial, aos meus professores: Arimatéia, Daniel Cordeiro, Jaime, José Fernando, Leomaques, Luiz Antônio e Marcelo que me proporcionaram o maior bem do mundo: o conhecimento.

Aos verdadeiros amigos, Ruth e Tiago, que tive a honra de conhecê-los e compartilhar momentos incríveis dentro e fora do mestrado, que muitas das vezes me ajudaram e me orientaram neste árduo percurso acadêmico e que muito me ensinaram, estando ao meu lado, prontos para me ajudar sempre que necessário. Obrigado pela amizade, atenção e por serem tão solícitos.

Aos amigos Lucivaldo e Renato por todo apoio de sempre e por ter me proporcionado caminhar nessa jornada ao lado de vocês. A amizade de vocês levarei por toda a minha vida, obrigado por tudo o que fizeram por mim.

Aos demais colegas de turma: Alexandre, Antônia, Antônio, Flávia, Mozart, Pedro, Rejane, Renan, Silvana e Thiago por todas as contribuições durante o curso de Mestrado e pelas companhias nas sextas-feiras em Campina Grande. Tenho certeza que sem a ajuda de vocês, essa caminhada teria sido bem mais árdua.

Ao professor Romildo por ter coordenado o programa com muita maestria, onde sempre nos tratou com muita sensibilidade e por ter contribuído para que essa caminhada fosse menos pesada.

A secretária Isabela por ser sempre solícita quando precisei. A Aninha que representa os demais profissionais do departamento, meu muito obrigado pela dedicação.

Aos amigos, Luiz, Leomaques, Maria Ioneris, Aparecido, Jucimeri, Socorro, Noah, Antônio Duarte, Tiago, Ruth, Marcicleide, Renato, Lucivaldo, Marcos Antônio, Thiago, Flávia, Silvana e Aurino por prestigiarem a defesa desse trabalho.

Ao amigo Aurino, pelas viagens nas sextas-feiras e por sempre torcer para o meu sucesso.

Ao meus filhos pets, Amil, Palmeirense e Chocolate, que me distraíram em muitos momentos durante a realização desse trabalho.

A quem não mencionei e esteve presente ao meu lado, quero lembrar que não estão esquecidos, vocês foram imensamente importantes para a conclusão desta etapa.

Meu muito obrigado aqueles que contribuíram de alguma forma para a realização desse sonho.

*Ninguém baterá tão forte quanto a vida. Porém, não se trata de quão forte pode bater,
se trata de quão forte pode ser atingido e continuar seguindo em frente.*

É assim que a vitória é conquistada.

(Rock Balboa)

Resumo

Este trabalho aborda o uso de *Recorrências Lineares* de primeira e segunda ordem direcionado para alunos (professores da Educação básica) do Programa de Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT em rede nacional, com destaque, principalmente, ao estudo das recorrências lineares de segunda ordem não homogênea e suas técnicas empregadas na resolução de problemas. O grande diferencial deste trabalho para os encontrados na literatura é o olhar para a solução geral da recorrência linear como combinação de soluções linearmente independentes e para as soluções particulares das recorrências lineares de 2^a ordem não homogêneas, onde apresentaremos um método que reduzirá a quantidade de tentativas para a obtenção da solução particular para tais recorrências, isso ocorre quando estamos procurando uma fórmula fechada que dependa apenas de uma incógnita natural. Finalizaremos nosso trabalho com uma miscelânea de problemas que nos deparamos em diversas áreas da Matemática e que podemos modelar através das recorrências lineares de 1^a e 2^a ordem, tanto homogêneas como não homogêneas.

Palavras-chave: Recorrências. Conjunto fundamental de soluções. Solução particular. Problemas de contagem.

Abstract

This work addresses the use of first and second order Linear Recurrences aimed at students (basic education teachers) of the PROFMAT Professional Master's Program in Mathematics on a national network, with particular emphasis on the study of non homogeneous second order linear recurrences. and its techniques used in problem solving. The great differential of this work to those found in the literature is the look at the solutions of 2nd order homogeneous linear recurrences as a combination of linearly independent solutions and at the particular solutions of non-homogeneous 2nd order linear recurrences, where we will present a method that will reduce the number of attempts to obtain the particular solution for such recurrences. This occurs when we are looking for a closed formula that relies only on a natural unknown. We will finish our work with a miscellany of problems that we come across in various areas of Mathematics and that we can model through 1st and 2nd order linear recurrences, both homogeneous and non homogeneous.

Keywords: Recurrences. Core set of solutions. Particular solution. Counting problems.

Lista de tabelas

Tabela 1 – Cartelas de Cartões Mágicos	25
Tabela 2 – Representação do número 52 na base 2	27
Tabela 3 – Representação do número 21 na base 2	28
Tabela 4 – Representação dos números de 1 à 31 como potência de 2.	29
Tabela 5 – Montagem: cartelas de Cartões Mágicos dia de aniversário	29
Tabela 6 – Cartelas de Cartões Mágicos dia de aniversário preenchidas	30
Tabela 7 – Os 15 primeiros termos da recorrência $x_{n+1} = x_n + 5$	48
Tabela 8 – População de coelhos de Fibonacci	119
Tabela 9 – Os 12 elementos da recorrência dada	124
Tabela 10 – Restos não nulos na divisão por 5	127
Tabela 11 – Alguns valores para número piso.	128
Tabela 12 – Valores: número piso \times sequência x_n	129
Tabela 13 – Posição do corpo no instante n	147

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	15
1.1.1	Objetivo geral	15
1.1.2	Objetivos específicos	15
1.1.3	Metodologia utilizada no desenvolvimento do trabalho	16
1.2	Organização	16
2	RESULTADOS PRELIMINARES	17
2.1	Princípio de Indução Finita - PIF	17
2.2	Sequências elementares	31
2.2.1	Fórmulas posicionais e recorrências	31
2.2.2	Progressões	33
2.2.2.1	Progressão Aritmética - PA.	33
2.2.2.2	Progressão Geométrica - PG.	41
3	RECORRÊNCIAS	46
3.1	Recorrência Linear de 1ª Ordem	50
3.1.1	Resolução de recorrências lineares de primeira ordem homogênea	51
3.1.2	Resolução de recorrências lineares de primeira ordem não homogênea	52
3.2	Dependência e Independência Linear	55
3.3	Recorrência linear de 2ª ordem	59
3.3.1	Resolução de recorrências lineares de segunda ordem homogênea	60
3.3.2	Resolução de recorrências lineares de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes	75
4	SOLUÇÃO PARTICULAR DA RECORRÊNCIA LINEAR DE 2ª ORDEM NÃO HOMOGÊNEA	83
4.1	Método dos coeficientes a determinar	83
4.2	Caso Geral	87
4.3	Resolução de questões de recorrências lineares de 2ª ordem não homogênea via método apresentado	92
5	MISCELÂNEA DE PROBLEMAS ENVOLVENDO RECORRÊNCIAS	103
6	CONCLUSÕES	157

REFERÊNCIAS	159
--------------------	------------

1 Introdução

A motivação pela escolha do tema recorrências lineares ocorreu em função da riqueza e potencial que ele possui para a resolução de vários problemas em Matemática que são trabalhados na Educação Básica, mas que muitas das vezes é abordado em enunciados que iniciam com palavras do tipo: calcule ou determine. Esse tipo de abordagem acaba levando o aluno há desmotivação pela aprendizagem de Matemática.

Olhando para a Educação Básica, principalmente no Ensino Médio, sentimos a falta de uma abordagem envolvendo as recorrências recursivas com uma visão mais dedutiva e menos decorativa nas aulas de Matemática, uma vez que é trabalhado o tema de forma superficial no estudo das Progressões Aritméticas e Geométricas. E esses conteúdos envolvendo essas progressões é tido em muitas das vezes como decorativos, transparecendo que a resolução de problemas requer apenas aplicações de meras fórmulas matemáticas prontas e acabadas.

Diante dessa perspectiva, pensando na disciplina de Matemática Discreta (MA12) e no objetivo do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), que é o aprimoramento da formação profissional com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para a atuação docente, iremos abordar o tema com a finalidade de construir um material de apoio para os alunos (professores da Educação Básica) do programa e que posteriormente esses professores possam trabalhar com seus alunos em sala de aula, construindo o pensamento recursivo, principalmente nos problemas abordados nas olimpíadas de matemática.

Desta forma, salientamos que a resolução de problemas a partir de um pensamento recursivo vem de certa forma contribuir para o pensar matemático no sentido de desenvolver habilidades e incitar a criatividade para a resolução de diversos problemas no Ensino Básico.

O uso de recorrências em conteúdos de Matemática no Ensino Básico tem como objetivo desenvolver habilidades e estimular o aluno a construir sua própria solução, e por conseguinte aguçar o estudante a ter uma aproximação cada vez mais precisa na resolução de problemas.

A importância do tema ganha ênfase por agregar valores e disciplinar ainda mais a solução de vários problemas que são trabalhados no Ensino Básico, que passarão a serem resolvidos por meio de técnicas que deliberam uma lógica cadenciada a partir de casos particulares até a obtenção do caso geral, fazendo com que a resolução de vários problemas seja cada vez mais significativa, objetiva e clara no entendimento do aluno.

É própria da busca de padrões e fórmulas de recorrência, deter o olhar sobre diversas situações, analisar propriedades de forma intuitiva, refletir sobre casos particulares,

procurando chegar à generalização, formular conjecturas e procurar, posteriormente, a possível validação destas fórmulas. A propósito, Keith Devlin diz

[...] a Matemática é a ciência dos padrões, refletindo assim a ideia de transversalidade dos padrões, o que sugere que, mais do que um típico da Matemática, constituem uma qualidade associada a esta ciência. É uma forma de admirar e compreender o mundo em que vivemos, tanto a nível físico, como biológico e até mesmo sociológico, bem como o mundo escondido das nossas mentes, tornando visível o que é invisível ao olhar. (DEVLIN, 2002, p.9)

É pertinente destacar que o papel dos padrões e das fórmulas de recorrência se faz presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC é um documento de carácter normativo que tem como objetivo definir o conjunto orgânico e essencial para o aprendizado no cursar de toda a Educação Básica. Ela aprofunda e amplia alguns dos objetivos encontrados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que, são documentos que trazem um referencial padronizado de educação a ser atingido.

Nos (PCNs) a recursividade era observada de forma menos aprofundada no bloco de “Números e Operações” e objetivava, apenas, que o aluno utilizasse representações algébricas para expressar generalizações sobre regularidades observadas em sequências numéricas. Assim, o estudo da recursividade era, superficialmente, estudado em Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas.

É notória a importância atribuída aos padrões, já que estes permeiam vários temas do currículo, não só da Matemática, como também de outras disciplinas, além de promoverem uma melhor compreensão das suas respectivas capacidades matemáticas. Desta forma, espera-se construir um conhecimento matemático mais profundo, duradouro e sólido e diz-se

A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. (BRASIL, 2022, p.271)

Já nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN) há uma abordagem sobre a relevância do uso das generalizações em sala de aula, mesmo que diga apenas respeito ao campo algébrico:

[...] o estudo da álgebra constitui uma oportunidade bastante significativa para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e de generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p.115)

A procura por padrões de regularidades em atividades e a utilização de recorrências matemáticas em de sala de aula, possibilita ao aluno o estabelecimento de conexões entre a Matemática e o mundo real, construindo uma referência positiva da disciplina.

Sendo assim, a necessidade de abordar o tema de Recorrências se encontra fundamentado na BNCC quando esta propõe como Objetos de Conhecimento a descoberta e a verificação de padrões e sequências recursivas na sua Unidade Temática de Álgebra no desenvolvimento das habilidades dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, lançando assim, as bases para a construção e consolidação de um pensamento algébrico recursivo que se amplia nos Anos Finais do Ensino Fundamental e, também, no Ensino Médio.

O desenvolvimento desse trabalho teve fundamentação teórica bibliográfica baseada nos livros: Morgado e Carvalho (2022); Steffenon (2022); Gomes, Diniz e Gurgel (2021); Neto (2013); Lima (2013) e Hefez (2022). E, em obras acadêmicas que tratam sobre o tema trabalhado, buscado em banco de teses e dissertações e/ou periódicos que farei referências ao longo do trabalho.

Nesse trabalho, apresentamos um texto a partir de um raciocínio lógico dedutivo para apresentar as definições, propriedades, Teoremas, Proposições, Lemas e aplicações, sempre exemplificando de forma detalhada para uma melhor compreensão do leitor, com linguagem simples, clara e eficaz.

Desta forma, esperamos que o resultado que almejamos seja alcançado por professores e alunos na construção do processo de Ensino-Aprendizagem na resolução de problemas matemáticos envolvendo as recorrências lineares de 1^a e 2^a ordem, homogêneas e não homogêneas.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

- Abordar as recorrências lineares de 1^a e 2^a ordem, apresentando um método para as soluções particulares das recorrências de 2^a ordem não homogêneas. E além disso, abordar problemas que envolvem recorrências lineares em suas diversas variações/generalizações, a fim de aplicar os resultados obtidos no trabalho.

1.1.2 Objetivos específicos

- Identificar relação de recorrência em problemas de formas gerais;
- Utilizar as recorrências lineares em diversos problemas de contagem;
- Justificar através da independência linear o formato apresentado para a solução geral das recorrências lineares de 2^a ordem homogêneas;
- Apresentar um método para soluções particulares de uma recorrência linear de 2^a ordem não homogênea;

- Construir um material que sirva de motivação para os professores trabalharem recorrências lineares com seus alunos na educação básica;
- Abordar problemas que podem ser modelados por meio de recorrências em suas diversas áreas da matemática.

1.1.3 Metodologia utilizada no desenvolvimento do trabalho

Faremos uma revisão bibliográfica e desenvolveremos uma pesquisa científica, uma vez que o método que iremos utilizar para encontrar uma solução particular para as recorrências lineares de 2ª ordem não homogênea não encontramos na literatura Brasileira, porém existe um resultado demonstrado de forma bem simplificada na literatura America que podemos encontrar em Andrica e Bagdasar (2020). Sendo assim, o nosso trabalho se diferencia uma vez que trazemos todos os detalhes minuciosos desse resultado.

1.2 Organização

O trabalho está estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 1, apresentamos a introdução do nosso trabalho contendo a motivação da escolha do tema, os objetivos que almejamos alcançar e a forma que estruturamos o trabalho.

No Capítulo 2, abordamos os resultados preliminares a respeito do tema a ser desenvolvido como o Princípio de Indução Finita (PIF) e as sequências elementares: Progressões Aritméticas (PA's) e as Progressões Geométricas (PG's).

No Capítulo 3, apresentamos as recorrências lineares de primeira ordem, homogênea e não homogênea de forma superficial e fizemos um aprofundamento no estudo de recorrências lineares de segunda ordem, onde justificamos através da independência linear que a solução geral das recorrências homogêneas é escrita como combinação de soluções linearmente independentes.

O Capítulo 4 foi destinado a apresentação do método (pesquisa científica) para minimizar a quantidade de tentativas para encontrarmos uma solução particular para as recorrências lineares de 2ª ordem não homogênea.

No Capítulo 5, é explanado uma miscelânea de problemas que se faz uso de recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem homogêneas ou não homogêneas para obter sua solução. São problemas que nem imaginamos que podem ser resolvidos por meio de recorrência e que geralmente estão presentes em problemas de olimpíadas de Matemática.

Em seguida, traremos nossas considerações finais e por fim as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento desse trabalho.

2 Resultados preliminares

Neste capítulo abordaremos os resultados que dizem respeito ao Princípio de Indução Finita e as sequências elementares Progressões Aritméticas (PA's) e Progressões Geométricas (PG's) e contamos com o seguinte referencial teórico: Morgado e Carvalho (2022), Steffenon (2022), Gomes, Diniz e Gurgel (2021), Neto (2013), Lima (2013) e Hefez (2022).

2.1 Princípio de Indução Finita - PIF

O processo de contagem é o meio em que a maioria das pessoas têm seu primeiro contato com a Matemática. Mas, vale salientar segundo Morgado e Carvalho (2022), que aprender a contar tem duas etapas bem distintas assim como seus graus de complexidades.

1. Aprendemos a enunciar uma sequência de palavras (*um, dois, três, ...*), sem atribuir significado a elas;
2. Algum tempo depois, aprendemos a usar essa sequência para contar os elementos de um conjunto, ou seja, encontrar uma correspondência entre os elementos do conjunto e estas palavras que chamamos de números. Algo notável, que não costumamos a observar, é que, não importa como iremos fazer essa correspondência, o número final será sempre o mesmo, nesse caso, a esse número designamos o número de elementos de tal conjunto.

A mesma tarefa em duas etapas deve ser compreendida ao se estabelecer a fundamentação matemática apropriada para os números naturais, pois quando olhamos os números naturais como uma simples sequência, na verdade estamos diante do que chamamos de números ordinais, enquanto seu uso como instrumento de contagem nos remete a noção de número cardinal.

Mas, talvez você esteja se perguntando como podemos descrever matematicamente a estrutura do conjunto dos números naturais no sentido de números ordinais?

Se uma propriedade envolvendo números naturais vale para $1, 2, 3, \dots, 1000$, então vale sempre? Como podemos ter certeza da validade de uma certa propriedade para todos os números naturais?

A Matemática diferencia-se de outras ciências, pois para provarmos que um resultado vale num conjunto infinito, precisamos ter certeza de que isso foi testado ou provado para todos os elementos desse conjunto.

Como em outros ramos da Matemática, descrevemos a estrutura do conjunto dos números naturais por meio de uma lista de propriedades essenciais, chamadas de axiomas, que caracterizem a estrutura de sequência, sem ambiguidades ou propriedades supérfluas, isto é, que possam ser obtidas das demais.

Sendo assim, a definição concisa e precisa do conjunto dos números naturais (\mathbb{N}) foi dada pelo matemático italiano Giuseppe Peano¹ (1858-1932) no ano de 1889, onde propôs uma lista de axiomas, baseado na noção de sucessor de um número natural (intuitivamente, o que vem logo depois dele na lista dos números naturais). Os axiomas de Peano, que definem os números naturais são:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que é ainda um número natural.
2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.
4. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

A noção de sucessor de um número natural está intimamente relacionada à ideia de adição: tomar o sucessor de um número equivale a somar uma unidade ao número anterior. Os axiomas de Peano podem ser reescritos como podemos observar a seguir, representando como $n + 1$ o sucessor de n .

1. Todo número natural n tem um sucessor, representado por $n + 1$.
2. Se $m + 1 = n + 1$, então $m = n$.
3. Existe um único número natural, designado por 1, tal que $n + 1 \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
4. Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$, e se, além disso, $n + 1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Os axiomas enunciados anteriormente são fundamentais para a caracterização dos números naturais, mas, o último deles, é chamado de Axioma da Indução (Primeiro Princípio de Indução Matemática). Ele destaca-se por fornecer um mecanismo para garantir que um dado subconjunto X de \mathbb{N} inclui, na verdade, todos os elementos de \mathbb{N} .

¹ foi um matemático e glottologista italiano. Autor de mais de 200 livros e artigos, foi um dos fundadores da lógica matemática e da teoria dos conjuntos, para as quais ele também contribuiu bastante da notação.

Por essa razão, é um instrumento fundamental para construir definições e demonstrar Teoremas relativos a números naturais.

Para entender como o PIF funciona, considere um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in X$. Suponha ainda que saibamos que toda vez que um certo natural k estiver em X , então $k+1$ também estará em X . Então, $1 \in X$ assegura que $2 \in X$. Mas, por sua vez, $2 \in X$ nos permite concluir que $3 \in X$, e assim sucessivamente. Desta forma, concluímos que X contém todos os números naturais, ou seja, $X = \mathbb{N}$.

Aqui nos cabe a seguinte pergunta, como aplicar o PIF para se demonstrar algo em matemática? Para responder a essa pergunta, suponhamos dada uma propriedade $P(n)$ do número natural n , a qual desejamos provar sua validade para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo Assim, definamos um conjunto X pondo:

$$X = \{k \in \mathbb{N}; P(k) \text{ é verdadeira}\},$$

e observamos que,

$$X = \mathbb{N} \Leftrightarrow P(n) \text{ é verdadeira para todo número natural } n.$$

Assim, a fim de mostrarmos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, é suficiente mostrarmos que $X = \mathbb{N}$, ou ainda, pelo primeiro Princípio de Indução, que:

- $1 \in X$;
- $k \in X \Rightarrow k + 1 \in X$.

Por sua vez, a definição de X garante que mostrar os dois itens acima em termos da propriedade $P(n)$, equivale a mostrar que:

- i) $P(1)$ é válida;
- ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, a validez de $P(k)$ implica a validade de $P(k + 1)$.

A discussão acima pode ser resumida na seguinte *receita ou método* para demonstração por indução.

Proposição 2.1. *Dada uma propriedade $P(n)$ do número natural n , temos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ se, e somente se, as duas condições a seguir forem satisfeitas:*

- (a) $P(1)$ é verdadeira (*Base de Indução*);
- (b) $P(k)$ verdadeira (*Hipótese de indução*) $\Rightarrow P(k + 1)$ verdadeira (*Tese de indução*).

Para entendermos na prática como funciona uma demonstração por meio de indução, vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 1. Mostre que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual ao quadrado da quantidade de termos, ou seja, n^2 .

Demonstração: Como o k -ésimo natural ímpar é o número $2n - 1$, definamos a propriedade $P(n)$ da seguinte maneira:

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

para fazer a demonstração por indução, devemos verificar que:

i) $P(1)$ é válida;

ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, a validade de $P(k)$ implica a validade de $P(k + 1)$.

A verificação de i) é imediata, pois o primeiro número natural ímpar é o número 1 e isso é o mesmo que $1^2 = 1$. Para provarmos a validade de ii) suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para algum k natural, isto é,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

e queremos deduzir que $P(k + 1)$ também é verdadeira, isto é, devemos obter:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2.$$

Assim, por hipótese de indução temos:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2. \quad (2.1)$$

Agora, somando o termo $(2k + 1)$ a ambos os lados da igualdade de (2.1), obtemos:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1),$$

ou ainda,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2,$$

assim, mostramos que $p(k + 1)$ é verdadeira e portanto pelo PIF, segue que $p(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$ para todo número natural n .

Exemplo 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros quadrados perfeitos é igual a:

$$\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Demonstração: Como o n -ésimo quadrado perfeito é o número n^2 , a propriedade $P(n)$ é, neste caso:

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n - 1)^2 + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Vamos utilizar o PIF para mostrar a validade de $P(n)$.

i) *Caso base:* $P(1) : 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1.$

ii) *Hipótese de indução:* Suponhamos a validade de $P(k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2 = \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

iii) *Mostremos que supondo $P(k)$ verdadeira teremos $P(k+1)$ também verdadeira, isto é:*

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

De fato, por hipótese indutiva, teremos:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \quad (2.2)$$

Assim, somando $(k+1)^2$ a ambos os lados da igualdade de (2.2) tem-se:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}. \end{aligned}$$

Logo, é verdade a validade para $P(k+1)$ e portanto pelo PIF, $P(n)$ é verdade para todo número natural n .

Em alguns tipos de problemas podemos utilizar uma versão mais forte do Princípio de Indução Matemática, tal versão é útil para demonstrarmos propriedades que são válidas para números naturais a partir de um certo natural n_0 (o valor de n_0 pode ser 0 (zero), naqueles casos em que seja de interesse considerar 0 como um número natural).

Proposição 2.2 (Princípio de Indução Matemática - Forma Forte). *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n e seja n_0 um número natural. Suponhamos que:*

i) $P(n_0)$ é válida.

ii) Para todo $n \geq n_0$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n + 1)$.

Então $P(n)$ é válida para todo $n \geq n_0$.

O Princípio de Indução é um caso particular desse enunciado acima, para $n_0 = 1$. Para demonstrar a versão mais geral, recorreremos como antes, ao Axioma da Indução, mas tomando $X = \{n \in \mathbb{N} | P(n_0 + n - 1) \text{ é válida}\}$. Então, $1 \in X$, já que por i), $P(n_0 + 1 - 1) = P(n_0)$ é válida. Além disso, por ii), se $n \in X$, então $n + 1 \in X$. Logo, pelo Axioma da Indução, $X = \mathbb{N}$. Isso significa que $P(n_0 + n - 1)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que $P(n)$ é válida para todo $n \geq n_0$.

Exemplo 3. Mostre que $2^n > n^2$ para todo natural $n \geq 5$.

Solução: Observando alguns valores assumidos por 2^n e n^2 , dados na tabela a seguir, é fácil ver que não é verdade que 2^n seja maior que n^2 para todos os valores de n , mas a propriedade parece ser verdadeira para n maior do que 4.

n	n^2	2^n
1	1	2
2	4	4
3	9	8
4	16	16
5	25	32
6	36	64
7	49	128
8	64	256
9	81	512
10	100	1024
\vdots	\vdots	\vdots

Se $P(n)$ é a propriedade $2^n > n^2$, temos que $P(5)$ é verdadeira. Suponhamos, agora, que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, $2^k > k^2$ para algum $k \geq 5$. Multiplicando ambos os membros das desigualdades por 2, obtemos $2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$. Mas,

$$2k^2 - (k + 1)^2 = k^2 - 2k - 1 = (k - 1)^2 - 2.$$

Se $k \geq 5$, então:

$$(k - 1)^2 - 2 \geq (5 - 1)^2 - 2 = 14 > 0.$$

Daí, concluímos que $2 \cdot 2^k = 2^{k+1} > (k + 1)^2$, ou seja, que $P(k + 1)$ é verdadeira. Logo, pela generalização acima do PIF, a desigualdade vale para todo número natural maior do que 4.

Definição 2.1. Dado um número natural n , o produto de todos os naturais de 1 até n é chamado de fatorial de n e é representado, em símbolos, por $n!$ (onde se lê n -fatorial). Assim, temos:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Além disso, por convenção, definimos $0! = 1$.

Exemplo 4. Para todo natural $n \geq 4$, temos $n! > 2^n$.

Solução. Novamente, observando os valores assumidos por 2^n e $n!$, percebemos que não é verdade que $n!$ seja maior do que 2^n para os valores de n menores que 4.

n	2^n	$n!$
1	2	1
2	4	2
3	8	6
4	16	24
5	32	120
6	64	720
7	128	5040
8	256	40320
\vdots	\vdots	\vdots

A propriedade $P(n)$ que desejamos provar utilizando o PIF é dada por:

$$P(n) : n! > 2^n.$$

A validade de $P(4)$ segue de $4! = 24 > 16 = 2^4$. Suponhamos agora que $P(k)$ é verdadeira para um certo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 4$, ou seja, $k! > 2^k$.

Queremos deduzir a veracidade de $P(k+1)$, isto é, que $(k+1)! > 2^{k+1}$. Para isso veja que, pela suposição da veracidade de $P(k)$, temos:

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k! \stackrel{H}{>} (k+1) \cdot 2^k. \quad (2.3)$$

Por outro lado, segue de $k \geq 4$ que:

$$(k+1) \cdot 2^k \geq 2^{k+1}. \quad (2.4)$$

Em verdade, a desigualdade (2.4) vale para todo inteiro $k \geq 1$. Portanto, combinando as duas desigualdades (2.3) e (2.4) obtemos que:

$$(k+1)! > (k+1) \cdot 2^k \geq 2^{k+1} \Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1},$$

isto é, mostramos que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, pelo PIF concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 4$.

O resultado a seguir caracteriza o sistema de numeração binário.

Teorema 2.3. *Todo número natural pode ser escrito de modo único como soma de diferentes potências de 2 com expoentes inteiros não negativos e dois a dois distintos, denominada representação binária.*

Demonstração: Utilizaremos o Princípio de Indução Forte para mostrar a validade de tal resultado. Para $n = 1$, temos $1 = 2^0$ e veja que essa é a única representação possível. Suponha agora que o resultado desejado seja verdadeiro para todo natural menor que n .

Mostremos inicialmente que existe uma representação binária para n . Para isso, tome a maior potência de 2 menor ou igual a n , digamos 2^k . Então,

$$2^k \leq n < 2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1 = 2^k + 2^k,$$

de maneira que $0 \leq n - 2^k < 2^k$. Se $n - 2^k = 0$, nada mais há a fazer. Senão, $1 \leq n - 2^k < n$, e por hipótese de indução existem inteiros não-negativos, ou seja, $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_l$ tais que $n - 2^k = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_l}$.

Mas, como também temos $n - 2^k < 2^k$ (veja acima), segue que $2^{a_0} + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_l} < 2^k$ e daí $a_l < k$. Portanto,

$$n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_l} + 2^k,$$

com $0 \leq a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_l < k$.

Mostremos agora que a representação binária é única. Para tanto, suponha que,

$$n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_j} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \dots + 2^{b_l},$$

com $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_j$ e $0 \leq b_0 < b_1 < \dots < b_l$. Então,

$$\begin{aligned} 2^{a_j} &\leq 2^{a_0} + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_j} \\ &= 2^{b_0} + 2^{b_1} + \dots + 2^{b_l} \\ &\leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{b_l} \\ &= 2^{b_l+1} - 1, \end{aligned}$$

de maneira que $2^{a_j} < 2^{b_l+1}$ e, portanto, $a_j < b_l + 1$, isto é, $a_j \leq b_l$.

Agora, trocando os papéis de a_j e b_l , podemos concluir de forma totalmente análoga que $b_l \leq a_j$ e daí $a_j = b_l$. Denotando $a_j = b_l = k$, segue que,

$$n - 2^k = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_{j-1}} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \dots + 2^{b_{l-1}}.$$

Utilizando agora a parte de unicidade da hipótese de indução, segue de $n - 2^k < n$, que $j - 1 = l - 1$ e $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{j-1} = b_{j-1}$, ou ainda, que $a_i = b_i$ para

$i \in \{0, 1, 2, \dots, j\}$, isto é, a representação de $k + 1$ também é única, como queríamos. ■

O sistema binário permite-nos fazer a mágica com os Cartões Mágicos Binários, usando o seguinte roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense em um número de **0** à **63**, sem revelá-lo. Em seguida, são apresentadas as 6 cartelas conforme a Tabela 1 e o matemágico faz 6 perguntas.

Tabela 1 – Cartelas de Cartões Mágicos

[1]	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td><td>15</td></tr> <tr><td>17</td><td>19</td><td>21</td><td>23</td><td>25</td><td>27</td><td>29</td><td>31</td></tr> <tr><td>33</td><td>35</td><td>37</td><td>39</td><td>41</td><td>43</td><td>45</td><td>47</td></tr> <tr><td>49</td><td>51</td><td>53</td><td>55</td><td>57</td><td>59</td><td>61</td><td>63</td></tr> </table>	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	[2]	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>10</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>18</td><td>19</td><td>22</td><td>23</td><td>26</td><td>27</td><td>30</td><td>31</td></tr> <tr><td>34</td><td>35</td><td>38</td><td>39</td><td>42</td><td>43</td><td>46</td><td>47</td></tr> <tr><td>50</td><td>51</td><td>54</td><td>55</td><td>58</td><td>59</td><td>62</td><td>63</td></tr> </table>	2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31	34	35	38	39	42	43	46	47	50	51	54	55	58	59	62	63
1	3	5	7	9	11	13	15																																																												
17	19	21	23	25	27	29	31																																																												
33	35	37	39	41	43	45	47																																																												
49	51	53	55	57	59	61	63																																																												
2	3	6	7	10	11	14	15																																																												
18	19	22	23	26	27	30	31																																																												
34	35	38	39	42	43	46	47																																																												
50	51	54	55	58	59	62	63																																																												
[3]	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr> <tr><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td></tr> <tr><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td></tr> </table>	4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31	36	37	38	39	44	45	46	47	52	53	54	55	60	61	62	63	[4]	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr> <tr><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td></tr> <tr><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td></tr> </table>	8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31	40	41	42	43	44	45	46	47	56	57	58	59	60	61	62	63
4	5	6	7	12	13	14	15																																																												
20	21	22	23	28	29	30	31																																																												
36	37	38	39	44	45	46	47																																																												
52	53	54	55	60	61	62	63																																																												
8	9	10	11	12	13	14	15																																																												
24	25	26	27	28	29	30	31																																																												
40	41	42	43	44	45	46	47																																																												
56	57	58	59	60	61	62	63																																																												
[5]	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td></tr> <tr><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr> <tr><td>48</td><td>49</td><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td></tr> <tr><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td></tr> </table>	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	[6]	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td></tr> <tr><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td></tr> <tr><td>48</td><td>49</td><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td></tr> <tr><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td></tr> </table>	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
16	17	18	19	20	21	22	23																																																												
24	25	26	27	28	29	30	31																																																												
48	49	50	51	52	53	54	55																																																												
56	57	58	59	60	61	62	63																																																												
32	33	34	35	36	37	38	39																																																												
40	41	42	43	44	45	46	47																																																												
48	49	50	51	52	53	54	55																																																												
56	57	58	59	60	61	62	63																																																												

1. O número que você pensou está na primeira cartela?
2. Está na segunda cartela?
3. Está na terceira cartela?
4. Está na quarta cartela?
5. Está na quinta cartela?
6. Está na sexta cartela?

Ao final das 6 perguntas, o *matemágico* revela o número que a pessoa pensou! Como é possível o matemágico adivinhar o número que foi pensado por alguém da plateia?

Exemplo 5. *João estava na plateia e escolheu um certo número, logo respondeu ao mágico que seu número estava na cartelas [1], [3] e [5]. Qual foi o número que João escolheu?*

Solução: Da cartela [1], sabemos que o número de João será ímpar, pois na mesma só figuram números ímpares. Desta forma, podemos descartar todos os números pares da cartela 3, ficando com os seguintes possíveis números ímpares: $\{5, 7, 13, 15, 21, 23, 29, 31, 37, 39, 45, 47, 53, 55, 61, 63\}$.

Na cartela [5], também desconsideraremos todos os números pares, ficando com os seguintes números ímpares: $\{17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63\}$.

Sendo assim, como o número que João pensou deve estar presente somente nas 3 cartelas, teremos os seguintes números possíveis:

$$[1] \cap [3] \cap [5] = \{21, 23, 29, 31, 53, 55, 61, 63\}.$$

Veja que não tem como o mágico saber qual foi de fato o número pensado por João dentre esses elencados. Então, como o mágico advinha tal número?

Talvez esteja se questionando se realmente o *matemático* teria todo esse raciocínio na hora de fazer sua mágica acontecer, e vou logo te adiantando que não é necessário fazer tudo isso, basta utilizar um pouco de matemática, particularmente, o sistema de numeração em sua representação binária.

O sistema de numeração mais utilizado pelo homem é o sistema decimal (sistema de numeração na base 10). Nesse sistema utiliza-se dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Cada algarismo tem valor posicional, isto é, seu valor depende da posição que ocupa no número onde aparece escrito.

Já o sistema binário, é o sistema mais utilizado por máquinas, uma vez que os sistemas digitais trabalham internamente com dois estados (ligado/ desligado, verdadeiro/ falso, aberto/fechado). No sistema binário (ou sistema de numeração na base 2) utiliza-se dois algarismos: 0 e 1.

É sempre possível converter números inteiros de uma determinada base para outra, sendo essa conversão baseada em determinadas regras. Assim, por exemplo, para converter um número escrito na base 10 para a base 2, poderemos proceder da seguinte maneira:

- Efetuar divisões sucessivas por 2 até obter um quociente inferior a 2;
- Escrever ordenadamente o último quociente e todos os restos obtidos por ordem inversa (da direita para a esquerda). Vejamos:

Exemplo 6. *Converta o número 52 (base 10) para a base 2.*

Tabela 2 – Representação do número 52 na base 2

52	2				
(0)	26	2			
	(0)	13	2		
		(1)	6	2	
			(0)	3	2
				(1)	1

Escrevendo da direita para a esquerda os 0's e os 1's da Tabela 2, que representam o último quociente e os restos das divisões, respectivamente, vamos obter a representação do número 52 no sistema de numeração na base 2, ou seja,

$$(52)_{10} = (110100)_2$$

Já para obter o processo inverso, ou seja, converter um número representado na base 2 para a representação na base 10, faremos o seguinte procedimento:

- Multiplica-se cada algarismo do número na base 2 por 2 elevado à potência que define a sua posição, começando da direita para a esquerda;
- Adiciona-se os produtos obtidos (Soma);

Voltando ao exemplo anterior, vejamos como converter para a base 10 o número $(110100)_2$.

$$\begin{aligned} (110100)_2 &= (1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0)_{10} \\ &= (32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 0)_{10} \\ &= (52)_{10}. \end{aligned}$$

Esses 0's e 1's que aparecem na representação de um número decimal para a representação binária, responde como o mágico adivinha o número pensado por João. Pois a presença do “0” na sua representação significa que o número não figura na cartela, e a presença do “1” significará que o número figurará.

A ordem das cartelas é observada da direita para a esquerda (a quantidade de 1' e 0' na representação binária, representa a quantidade de cartelas a serem analisadas).

Sendo assim, a ordem em que figuram esses 1' e 0' é relevante, ou seja, o primeiro resto calculado na divisão representa a primeira cartela, o segundo resto a segunda cartela e assim por diante, sendo a ultima cartela representada pelo último quociente das divisões sucessivas por 2.

Veja o exemplo a seguir,

Exemplo 7. *Escreva o número 21 (base 10) para a base 2.*

Tabela 3 – Representação do número 21 na base 2

21	2			
(1)	10	2		
	(0)	5	2	
		(1)	2	2
			(0)	1

O número 21 é escrito na base 2 do seguinte modo: $(21)_{10} = (10101)_2$ significa que o 21 figurá nas cartelas [1],[3] e [5].

Já o número 52 que é escrito da seguinte maneira: $(52)_{10} = (110100)_2$ figurará nas cartelas [3],[5] e [6].

Ora, observando o primeiro número de cada uma dessas cartelas, concluímos que o número procurado é exatamente igual a soma desses primeiros números que figuram em tais cartelas, pois o primeiro número da cartela [3] é igual a 4, o da cartela [5] é 16 e o da cartela [6] é 32, logo $4 + 16 + 32 = 52$.

Sendo assim, vamos demonstrar que para descobrir o número pensado pela pessoa da plateia, devemos somar os primeiros números das cartelas em que a pessoa afirmou que seu número estava presente.

Veja que no sistema decimal, um número a pode ser escrito do seguinte modo:

$$a = a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

De modo análogo, o sistema binário utiliza sua decomposição a base 2, sendo assim, um número natural a pode ser escrito como:

$$a = b_n \cdot 2^n + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 + b_0.$$

Observe que, na representação binária aparecem apenas os algarismos zero ou um, que são os possíveis restos na divisão por 2. Se o número for ímpar implica que o resto será igual a 1 e se o número for par, terá resto igual a 0. Assim, todo número natural não nulo pode ser escrito como soma de potências de 2.

No caso das cartelas, temos números de 1 a 63, assim, podemos escrever qualquer um desses números como soma de potências de 2, isto é, seja n um número natural pertencente ao intervalo $[1;63]$, assim:

$$n = b_5 \cdot 2^5 + b_4 \cdot 2^4 + b_3 \cdot 2^3 + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 + b_0,$$

sendo os algarismos $b_0, b_1, b_2, \dots, b_5$ iguais a 0 ou 1 e, neste caso, a representação do número na base 2 é, exatamente, $b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$. Por exemplo temos:

- $18 = 16 + 2 = 2^4 + 2^1 = 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = (10010)_2$
- $62 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = (111110)_2$

Assim, basta observar que na primeira cartela do mágico estão os números para os quais $b_0 = 1$, isto é, aqueles que terminam em 1 quando escritos na base 2; na segunda cartela estão os números em que $b_1 = 1$; na terceira cartela estão aqueles para os quais $b_2 = 1$ e assim por diante. Isso mostra por que o truque do matemágico sempre funciona.

Como construir as cartelas?

Isso dependerá do objetivo que se pretende descobrir com a brincadeira "Mágica". Vamos supor que pretendemos descobrir o dia do aniversário de uma certa pessoa. Então os números presentes nas cartelas deverão pertencer ao intervalo $[1;31]$, desta forma, vamos escrever todos os números de 1 até 31 como potência de 2 ou soma de potências de 2, como podemos observar na Tabela 4.

Tabela 4 – Representação dos números de 1 à 31 como potência de 2.

1	=	2^0	17	=	$2^0 + 2^4$
2	=	2^1	18	=	$2^1 + 2^4$
3	=	$2^0 + 2^1$	19	=	$2^0 + 2^1 + 2^4$
4	=	2^2	20	=	$2^2 + 2^4$
5	=	$2^0 + 2^2$	21	=	$2^0 + 2^2 + 2^4$
6	=	$2^1 + 2^2$	22	=	$2^1 + 2^2 + 2^4$
7	=	$2^0 + 2^1 + 2^2$	23	=	$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^4$
8	=	2^3	24	=	$2^3 + 2^4$
9	=	$2^0 + 2^3$	25	=	$2^0 + 2^3 + 2^4$
10	=	$2^1 + 2^3$	26	=	$2^1 + 2^3 + 2^4$
11	=	$2^0 + 2^1 + 2^3$	27	=	$2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4$
12	=	$2^2 + 2^3$	28	=	$2^2 + 2^3 + 2^4$
13	=	$2^0 + 2^2 + 2^3$	29	=	$2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4$
14	=	$2^1 + 2^2 + 2^3$	30	=	$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$
15	=	$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$	31	=	$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$
16	=	2^4			

Observe que para representar os números de 1 até 31 utilizamos potências de 2 do tipo: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ e 2^4 , logo utilizamos 5 tipos de potências de base 2. Desta forma, montaremos 5 cartelas e na primeira célula de cada uma dessas cartelas, colocarei cada uma das potências de base 2 conforme a Tabela 5.

Tabela 5 – Montagem: cartelas de Cartões Mágicos dia de aniversário

1 * * *	2 * * *	4 * * *	8 * * *	16 * * *
* * * *	* * * *	* * * *	* * * *	* * * *
* * * *	* * * *	* * * *	* * * *	* * * *
* * * *	* * * *	* * * *	* * * *	* * * *

Agora vamos fazer o preenchimento das demais células de cada cartela, e para isso, vamos preencher de acordo com a representação do número como potência de 2. Veja que o próximo número a ser colocado nas cartelas é o número 3, porém, esse número na representação em potências de 2 é dado por:

- $3 = 2^0 + 2^1$.

Isso significa que o número 3 deve estar nas cartelas cujo primeiro número é 2^0 e 2^1 , ou seja, nas cartelas 1 e 2.

Os próximos números a serem colocados nas cartelas podem ser escritos como potências de 2 do seguinte modo:

- $5 = 2^0 + 2^2$. Ou seja, deve aparecer nas cartelas 1 e 3;
- $6 = 2^1 + 2^2$. Ou seja, aparece nas cartelas 2 e 3;
- $7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$. Ou seja, figurará nas cartelas 1, 2 e 3;
- $9 = 2^0 + 2^3$. Ou seja, aparecer nas cartelas 1 e 4.

Seguindo esse mesmo raciocínio preencheremos todos os números de 1 até 31. Faremos mais 2 casos para melhor entendimento.

- O número $25 = 2^0 + 2^3 + 2^4$. Ou seja, o número 25 estará nas cartelas 1, 4 e 5.
- O número $30 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$. Assim, figurará nas cartelas 2, 3, 4 e 5.

Portanto, após todas as análises para os números, obtemos a Tabela 6 contendo as cartelas preenchidas que podem ser utilizadas para descobrir o dia de aniversário de uma pessoa.

Tabela 6 – Cartelas de Cartões Mágicos dia de aniversário preenchidas

1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7	8	9	10	11
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15	12	13	14	15
17	19	21	23	18	19	22	23	*20	21	22	23	24	25	26	27
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31	28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Seguindo esse mesmo raciocínio, podemos construir as cartelas para qualquer intervalo de números que desejarmos. Fica a cargo do leitor verificar que os números das cartelas da Tabela 1 estão ordenados corretamente.

2.2 Sequências elementares

Uma sequência é uma estrutura discreta usada para representar uma lista ordenada. Por exemplo, $(1, 2, 3, 5, 8, 13)$ é uma sequência, com quantidade finita de termos, com seis termos e $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ é uma sequência com uma quantidade infinita de termos. Portanto, podemos classificar as sequências em finitas ou infinitas.

Uma **sequência infinita** de números reais é uma lista ordenada infinita (a_1, a_2, \dots) de números reais, isto é, uma lista infinita de números reais na qual especificamos quem é o primeiro número da lista (primeiro termo), quem é o segundo e assim por diante. Denotaremos uma sequência infinita como a vista anteriormente por $(a_k)_{k \geq 1}$, ou simplesmente por (a_k) .

Ademais, quando temos uma lista ordenada finita, (a_1, a_2, \dots, a_n) , de números reais, ou seja, uma lista finita de números reais na qual, assim como acontece com as sequências infinitas, conseguimos especificar o primeiro termo da lista, o segundo e todos aqueles pertencentes a tal lista, estaremos diante de **sequência finita** de números reais. Denotamos as sequências finitas por $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Em qualquer um dos casos acima, diremos que a_k é o (*k*-ésimo termo) da sequência. Nosso propósito com essa seção é estudarmos alguns tipos elementares de sequências que, pela frequência com que ocorrem na Matemática, merecem lugar de destaque. Quando a sequência abordada for finita, tomaremos o cuidado de diferenciá-la para não ter confusão com as infinitas.

2.2.1 Fórmulas posicionais e recorrências

Diz-se que a sequência $(a_k)_{k \geq 1}$ está definida por uma **fórmula posicional** se os valores $a_k \in \mathbb{R}$ forem dados por uma fórmula em k .

Exemplo 8. A sequência $(a_k)_{k \geq 1}$ dos quadrados perfeitos é a sequência $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$. Portanto, temos $a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$ e, mais geralmente, $a_k = k^2$ para $k \geq 1$ inteiro.

Para sequências definidas por fórmulas posicionais, é frequentemente útil listar os termos da mesma a partir do zero, isto é, denotar a sequência por $(a_k)_{k \geq 0}$. Tal notação pode parecer estranha a princípio, uma vez que o primeiro termo da sequência seria a_0 , o segundo seria a_1 e assim por diante. No entanto, a fim de simplificar a fórmula posicional que define os valores dos termos da sequência, é desejável se fazer assim, incorporando o zero aos números naturais para o conjunto dos índices.

Com tal notação alternativa, a sequência dos quadrados perfeitos, por exemplo, seria dada por $a_k = (k + 1)^2$, para todo $k \geq 0$. Também podemos citar que sequência formada pelas potências inteiras e não negativas de 2, $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ pode ser tanto

representada pela sequência de termo geral $a_k = 2^{k-1}$ com $k \geq 1$ quanto pela sequência $b_k = 2^k$ com $k \geq 0$. Veja que a última fórmula é mais simples do que a anterior.

Uma alternativa a fórmulas posicionais para os termos de uma sequência é uma definição **recursiva**, ou **por recorrência**, dos mesmos. Tal procedimento consiste em definir uma sequência em que cada termo, a partir de um certo índice k_0 , é obtido através dos termos anteriores a ele.

Exemplo 9. Considere a sequência $(a_k)_{k \geq 1}$ definida recursivamente por $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ e

$$a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}, \quad \forall k \geq 3, \quad (2.5)$$

encontre os quatro primeiros termos dessa sequência.

Solução. Fazendo $k = 3$ na recorrência (2.5), obtemos $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 5 - 2 = 8$. Fazendo $k = 4$ na mesma recorrência obtemos $a_4 = 2a_3 - a_2 = 11$, e assim por diante.

A relação (2.5) acima é a **relação de recorrência**, ou simplesmente a **recorrência** satisfeita pela sequência $(a_k)_{k \geq 1}$.

Note que cada termo é calculado em função dos dois termos imediatamente anteriores a ele. Assim, o conhecimento dos dois primeiros termos $a_1 = 2$ e $a_2 = 5$ permite calcular os demais termos dessa sequência. Mas, conhecer somente o valor de a_1 não bastaria, uma vez que (2.5) calcula cada termo em função dos dois termos imediatamente anteriores. Por outro lado, se mudássemos os valores de a_1 e a_2 , mas mantivéssemos a recorrência acima, em geral, mudaríamos os valores dos termos subsequentes da sequência. Por exemplo, considerando $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$ para a recorrência acima e calculando o valor do terceiro e do quarto termo, obteríamos $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ e $a_4 = 2a_3 - a_2 = 4$.

Através de translações sob os índices obtemos outras formas equivalentes para escrevermos a recorrência (2.5). Por exemplo, seja $k - 2$ igual a j e assim obtemos $k = j + 2$. Daí,

$$a_{j+2} = 2a_{j+1} - a_j, \quad \forall j \geq 1$$

(uma vez que $k \geq 3$). Esse procedimento evidencia que o nome que damos ao **índice** de uma sequência, não é relevante para sua definição. Também poderíamos reescrevê-la como:

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k, \quad \forall k \geq 1.$$

Aqui nos cabe uma pergunta muito interessante, *será que é possível obter uma fórmula posicional que define a sequência acima?* A resposta é que é possível e que veremos isso posteriormente neste trabalho.

Devemos ter cuidado quando definimos uma sequência listando alguns termos e, com isso, imaginar que definimos os demais. Por exemplo, a sequência $(1, 4, 9, 16, \dots)$ pode ter as leis de formação $a_n = n^2$ ou também $a_n = n^2 + b_n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, onde b_n é qualquer sequência.

Para $n = 1, 2, 3$ e 4 , então a_n retorna $1, 4, 9$ e 16 , respectivamente. Mas, para $n > 4$, então a_n dependerá da sequência b_n que for utilizada para definir a fórmula posicional.

Agora, vamos passar ao estudo de dois tipos de sequências que são bastante estudadas na disciplina de matemática principalmente no Ensino Médio, são as chamadas *Progressões Aritméticas* e *Progressões Geométricas*.

2.2.2 Progressões

Daremos continuidade ao estudo das sequências elementares discutindo as Progressões Aritméticas e posteriormente as Progressões Geométricas.

2.2.2.1 Progressão Aritmética - PA.

Definição 2.2. *Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada razão da progressão e representada pela letra r .*

O primeiro termo de uma PA costuma ser representado pela letra a . Assim, uma PA pode ser definida de maneira recursiva:

$$a_1 = a \text{ e } a_k = a_{k-1} + r \quad \text{para } k \geq 2.$$

Exemplo 10. *Se $(a_k)_{k \geq 2}$ é uma PA de razão r , prove que as sequências $(b_k)_{k \geq 2}$ e $(c_k)_{k \geq 2}$, definida por $b_k = a_{2k}$ e $c_k = a_{2k-1}$ para todo $k \geq 2$ inteiro, também são PA's, de razões iguais a $2r$.*

Prova: *Vamos analisar primeiramente a sequência b_k , então devemos mostrar que $b_k - b_{k-1} = 2r$ para todo $k \geq 2$. Pela definição de b_k e pelo fato de $(a_k)_{k \geq 2}$ ser uma PA de razão r , temos que:*

$$b_k - b_{k-1} = a_{2k} - a_{2(k-1)} = a_{2k} - a_{2k-2} = (a_{2k} - a_{2k-1}) + (a_{2k-1} - a_{2k-2}) = r + r = 2r.$$

Por outro lado, devemos mostrar que $c_k - c_{k-1} = 2r$. Assim,

$$\begin{aligned} c_k - c_{k-1} &= a_{2k-1} - a_{2(k-1)-1} = a_{2k-1} - a_{2k-3} = (a_{2k-1} - a_{2k-2}) + (a_{2k-2} - a_{2k-3}) \\ &= r + r \\ &= 2r, \end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar. ■

Vejamos mais um exemplo de PA's relacionadas com as fórmulas posicionais.

Exemplo 11. As sequências definidas por:

$$a_n = (3, 5, 7, 9, \dots), \quad b_n = (9, 4, -1, -6, \dots) \quad e \quad c_n = (13, 13, 13, \dots) \quad \forall n \geq 1.$$

são Progressões Aritméticas cujas razões valem 2, -5 e 0, respectivamente. Suas fórmulas posicionais são dadas por $a_{n+1} = 1 + 2n$, $b_n = 14 - 5n$ e $c_n = 13 + 0 \cdot n = 13$. Não é coincidência que os coeficientes associados a n nas fórmulas posicionais sejam iguais às razões das PA's. No resultado a seguir, justificaremos essas fórmulas.

Teorema 2.4. Se $(a_k)_{k \geq 1}$ é uma PA de razão r , então:

- a) $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para todo $n \geq 1$.
- b) $a_p = a_q + (p - q)r$, para quaisquer $p, q \geq 1$.
- c) Se $p + q = m + n$, então $a_p + a_q = a_m + a_n$, para $m, n, p, q \geq 1$.
- d) A soma dos n primeiros termos da PA é igual a

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Demonstração:

a) Observe no diagrama abaixo que para chegar a a_n a partir de a_1 são necessários $n - 1$ passos, onde cada passo corresponde a somar r ao termo anterior.

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} a_4 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} a_{n-1} \xrightarrow{+r} a_n$$

para chegarmos até a_n precisamos somar $(n - 1)$ vezes r a a_1 , isto é, $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

b) Pelo item **a)** temos que $a_p = a_1 + (p - 1)r$ e $a_q = a_1 + (q - 1)r$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} a_p - a_q &= [a_1 + (p - 1)r] - [a_1 + (q - 1)r] \\ &= a_1 + (p - 1)r - a_1 - (q - 1)r \\ &= pr - r - qr + r \\ &= (p - q)r. \end{aligned}$$

Desta forma, segue que: $a_p = a_q + (p - q)r$.

c) Suponha que $p + q = m + n$. Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
a_p + a_q &= [a_1 + (p-1)r] + [a_1 + (q-1)r] \\
&= a_1 + (p-1)r + a_1 + (q-1)r \\
&= 2a_1 + (p+q-2)r \\
&= 2a_1 + (m+n-2)r \\
&= a_1 + (m-1)r + a_1 + (n-1)r \\
&= a_m + a_n.
\end{aligned}$$

Isso nos permite escrever que $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$, ou seja, $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$ para todo $1 \leq k \leq n$.

d) A soma dos n primeiros termos da PA de primeiro termo a_1 é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \quad (2.6)$$

Essa soma pode ser reescrita como:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1. \quad (2.7)$$

Somando termo a termo as duas expressões de S_n (2.6) e (2.7), segue que:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Utilizando a observação do item **c)** de que $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ para todo $1 \leq k \leq n$, então teremos da igualdade acima que:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}} = n(a_1 + a_n).$$

$$\text{Portanto, } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

■

Exemplo 12. Calcule a soma dos n primeiros números inteiros pares positivos.

Solução: A sequência dos inteiros positivos pares, $2, 4, 6, 8, 10, \dots$, é uma PA de razão 2. Assim pelo item **a)** do Teorema 2.4, o n -ésimo inteiro positivo será:

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n.$$

Já a soma dos n primeiros termos desta sequência é obtida pelo item **d)** do Teorema 2.4. Desta forma teremos que:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \cdot (2 + 2n)}{2} = n(n+1) = n^2 + n.$$

Exemplo 13. Pelo Teorema 2.4, a soma dos n primeiros termos de uma PA de razão r é dada por:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{(2a_1 - r)n + rn^2}{2} = \frac{(2a_1 - r)n + rn^2}{2} \\ &= \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n. \end{aligned}$$

Note que, se $r \neq 0$, então S_n é um polinômio de segundo grau em n , desprovido de termo independente. Reciprocamente, todo polinômio do segundo grau em n , sem termo independente, é o valor da soma dos n primeiros termos de uma PA.

De fato, $P(n) = An^2 + Bn$ é a soma dos n primeiros termos da PA na qual $A = \frac{r}{2}$ e $B = a_1 - \frac{r}{2}$, ou seja, $r = 2A$ e $a_1 = A + B$.

Exemplo 14. Qual a soma de todas as frações irredutíveis, da forma $\frac{p}{72}$, que pertencem ao intervalo $[4, 7]$?

Solução. Ora, como $\frac{p}{72} \in [4, 7]$, tem-se que:

$$4 \leq \frac{p}{72} \leq 7 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot 72 \leq p \leq 7 \cdot 72 \quad \Rightarrow \quad 288 \leq p \leq 504.$$

Como queremos que a fração $\frac{p}{72}$ seja irredutível, além da condição $288 \leq p \leq 504$ devemos impor a condição adicional $\text{mdc}(p, 72) = 1$. Como $72 = 2^3 \cdot 3^2$, para que $\text{mdc}(p, 72) = 1$, o número p não pode possuir os fatores 2 e 3. Vamos analisar esses dois casos separadamente:

- Desde 288 até 504 os números que têm o fator 2 são os elementos do conjunto:

$$A = \{288, 290, 292, 294, \dots, 500, 502, 504\}.$$

Esses números são membros de uma PA de razão 2. Assim,

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \Rightarrow \quad 504 = 288 + (n-1) \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad n = 109.$$

Assim, existe 109 elementos no conjunto A que possuem fator 2 em sua formação, ou seja, números pares. Portanto, a soma de todos esses elementos será:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n \quad \Rightarrow \quad S_{109} = \frac{288 + 504}{2} \cdot 109 = 43164.$$

- Desde 288 até 504, os números que têm o fator 3 são os elementos do conjunto:

$$B = \{288, 291, 294, 297, \dots, 498, 501, 504\}.$$

Esses números fazem parte de uma PA de razão 3. Assim,

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \Rightarrow \quad 504 = 288 + (n-1) \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad n = 73.$$

Logo, existem 73 múltiplos de 3 no conjunto B . Portanto, a soma de todos esses elementos será:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n \Rightarrow S_{73} = \frac{288 + 504}{2} \cdot 73 = 28908.$$

- Note que existem números que apresentam o fator 2 e o fator 3 ao mesmo tempo, são os múltiplos de 6. Desde 288 até 504 os números que são múltiplos de 6, são os elementos do conjunto:

$$A \cap B = \{288, 294, 300, 306, \dots, 492, 498, 504\}.$$

Esses números são membros de uma progressão aritmética de razão 6. Assim,

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 504 = 288 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow n = 37.$$

Assim, há 37 múltiplos de 6 no conjunto $A \cap B$. Portanto, a soma de todos esses elementos será:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n \Rightarrow S_{37} = \frac{288 + 504}{2} \cdot 37 = 14652.$$

Diante disso, usando o fato de $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ tem-se que:

$$n(A \cup B) = 109 + 73 - 37 = 145,$$

ou seja, existem 145 números no intervalo de 288 a 504 que possuem fator 2 ou 3.

Ora, como de 288 até 504 existem 217 números, segue que existem $217 - 145 = 72$ números que não possuem o fator 2 ou 3.

Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{71}, x_{72}$ esses números. Assim, as frações:

$$\frac{x_1}{72}, \frac{x_2}{72}, \frac{x_3}{72}, \dots, \frac{x_{71}}{72}, \frac{x_{72}}{72}$$

são irredutíveis.

A soma dessas frações será:

$$S = \frac{x_1}{72} + \frac{x_2}{72} + \frac{x_3}{72} + \dots + \frac{x_{71}}{72} + \frac{x_{72}}{72} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{71} + x_{72}}{72}.$$

Por fim,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{72} &= (288 + 289 + \dots + 503 + 504) - (43164 + 28908 - 14652) \\ &= 28512. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$S = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{71} + x_{72}}{72} = \frac{28512}{72} = 396.$$

■

Agora, traremos alguns resultados que nos ajudarão a analisar as recorrências de primeira ordem, embora não seja o foco desse trabalho.

Definição 2.3. *Define-se para sequências, o operador diferença Δ da seguinte maneira,*

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Portanto, da definição acima segue imediatamente que uma sequência (a_n) é uma PA de 1ª ordem se, e somente se, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante (sequência estacionária).

De fato, se a_n é uma PA de razão r , então $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = r$. Por outro lado, se $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = r$, então $a_{n+1} = a_n + r$ define uma PA de primeiro termo a_1 e razão r .

O Teorema a seguir é conhecido como *Teorema Fundamental da Somação*, que é análogo discreto do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2.5 (Teorema Fundamental da Somação). *Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência, então*

$$\sum_{k=1}^n \Delta a_k = a_{n+1} - a_1.$$

Demonstração: *Veja que:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Delta a_k &= \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \Delta a_4 + \cdots + \Delta a_{n-1} + \Delta a_n \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &= (\cancel{a_2} - a_1) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_4} - \cancel{a_3}) + \cdots + (\cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}}) + (a_{n+1} - \cancel{a_n}) \\ &= a_{n+1} - a_1. \end{aligned}$$

■

Esta soma é conhecida como soma telescópica. O nome vem do fato de que, na simplificação da soma, uma parcela de cada expressão entre parênteses cancela uma parcela que aparece na próxima expressão entre parênteses, até que a soma toda colapse, como um telescópio retrátil, restando apenas duas parcelas.

A proposição a seguir é um resultado importante associado às progressões geométricas que abordaremos posteriormente.

Proposição 2.6. *Seja $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, então*

$$\sum_{k=1}^n q^k = q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}. \quad (2.8)$$

Demonstração: Note que $\Delta q^k = q^{k+1} - q^k = q^k(q - 1)$, assim, isolando o termo q^k nessa última expressão, obtemos que $q^k = \frac{1}{q-1} \Delta q^k$. Logo, poderemos reescrever (2.8) da seguinte maneira:

$$\sum_{k=1}^n q^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-q} \Delta q^k = \frac{1}{1-q} \sum_{k=1}^n \Delta q^k$$

Usando o Teorema 2.5 obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} \sum_{k=1}^n \Delta q^k &= \frac{1}{q-1} (q^{n+1} - q) \\ &= \frac{q^{n+1} - q}{q-1}. \end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q^{n+1} - q}{q-1}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 15. Sejam $a = 111111 \cdots 1$ um número de n algarismos e $b = 100000 \cdots 05$ um número de $n+1$ algarismos. Então $ab+1$ é um quadrado perfeito.

Solução: De fato, veja que pela Proposição 2.6 temos que:

$$\begin{aligned} a &= \underbrace{111111 \cdots 11}_{n \text{ algarismos}} = 1 + (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{n-1}) = 1 + \frac{10^n - 10}{9} \\ &= \frac{10^n - 1}{9}. \end{aligned}$$

Também podemos escrever que $b = 10^n + 5$ e daí,

$$ab + 1 = \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) \cdot (10^n + 5) + 1 = \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2,$$

o que já nos indica a sua raiz $\frac{10^n + 2}{3} = 333 \cdots 34$, com n algarismos.

Corolário 2.7 (Fórmula da Somação por Partes).

$$\sum_{k=1}^n a_{k+1} \Delta b_k = a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^n b_k \Delta a_k.$$

Demonstração: Note que:

$$\begin{aligned} \Delta(a_k b_k) &= a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k = a_{k+1} b_{k+1} + (a_{k+1} b_k - a_{k+1} b_k) - a_k b_k \\ &= a_{k+1} b_{k+1} - a_{k+1} b_k + b_k a_{k+1} - a_k b_k \\ &= a_{k+1} (b_{k+1} - b_k) + b_k (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_{k+1} \Delta b_k + b_k \Delta a_k. \end{aligned}$$

Logo, temos que $\Delta(a_k b_k) = a_{k+1} \Delta b_k + b_k \Delta a_k$. Por conseguinte, isolando o termo da direita, obtemos:

$$a_{k+1} \Delta b_k = \Delta(a_k b_k) - b_k \Delta a_k.$$

Sendo assim, segue que:

$$\sum_{k=1}^n a_{k+1} \Delta b_k = \sum_{k=1}^n [\Delta(a_k b_k) - b_k \Delta a_k] = \sum_{k=1}^n \Delta(a_k b_k) - \sum_{k=1}^n b_k \Delta a_k.$$

Agora, pelo Teorema Fundamental da Somação, temos que:

$$\sum_{k=1}^n \Delta(a_k b_k) = a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1.$$

Portanto, concluímos que :

$$\sum_{k=1}^n a_{k+1} \Delta b_k = a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^n b_k \Delta a_k,$$

conforme queríamos demonstrar. ■

No próximo exemplo, faremos a utilização da Fórmula da Somação por Partes para obter o resultado pretendido.

Exemplo 16. Calcule o valor do somatório em função de n e de q , onde ($q \in \mathbb{R}, q \neq 1$).

$$\sum_{k=1}^n k \cdot q^k.$$

Solução: Note que $\Delta q^k = q^{k+1} - q^k = q^k(q-1)$ e assim, $q^k = \frac{1}{q-1} \Delta q^k$, logo, podemos escrever,

$$\sum_{k=1}^n k \cdot q^k = \sum_{k=1}^n k \frac{1}{q-1} \Delta q^k = \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^n k \cdot \Delta q^k.$$

Por outro lado, aplicaremos a fórmula de somação por partes:

$$\sum_{k=1}^n a_{k+1} \Delta b_k = a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^n b_k \Delta a_k.$$

Fazendo $a_{k+1} = k$ e $b_k = q^k$, temos que $a_k = k-1$ e $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = k - (k-1) = 1$. Assim como, $a_1 = 0$ e $b_1 = q$. Desta forma, segue que:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot q^k = \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^n k \Delta q^k = \frac{1}{q-1} \left(n \cdot q^{n+1} - 0 \cdot q - \sum_{k=1}^n q^k \cdot 1 \right).$$

Vimos também que $\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q^{n+1} - q}{q-1}$ e assim, teremos,

$$\sum_{k=1}^n k \cdot q^k = \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^n k \Delta q^k = \frac{1}{q-1} \left(n \cdot q^{n+1} - \frac{q^{n+1} - q}{q-1} \right).$$

Como,

$$n \cdot q^{n+1} - \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} = \frac{nq^{n+2} - nq^{n+1} - q^{n+1} + q}{q - 1} = \frac{q^{n+1}(nq - n - 1) + q}{q - 1},$$

concluimos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot q^k &= \frac{1}{q - 1} \cdot \left[\frac{q^{n+1}(nq - n - 1) + q}{q - 1} \right] \\ &= \frac{q^{n+1}(nq - n - 1) + q}{(q - 1)^2} \\ &= \frac{n(q - 1)q^{n+1} - q(q^n - 1)}{(q - 1)^2}. \end{aligned}$$

2.2.2.2 Progressão Geométrica - PG.

Outra classe bastante útil de sequências é a classe formada pelas *Progressões Geométricas* e traremos aqui um problema bastante interessante, que costuma deixar os alunos intrigados e os professores desconfiados! O problema supracitado foi adaptado a partir de um problema de exame nacional de MAA (*Mathematical Association of America*) e traz na sua solução uma relação com a lei de formação de uma PG.

Exemplo 17. *Uma pessoa, começando com R\$64,00, faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião (da aposta). Se ele ganhar três e perder também três dessas apostas, pode-se afirmar que essa pessoa:*

- Ganha dinheiro.*
- Nem ganha e nem perde dinheiro.*
- Perde R\$27,00.*
- Perde R\$37,00.*
- Ganha ou perde dinheiro, mas isso dependerá da ordem em que ocorrerem suas vitórias e derrotas.*

Comentário. *Em geral, os alunos escolhem uma ordem para ver o que aconteceu; aliás, essa é até uma boa estratégia. Por exemplo, se ela vence as três primeiras apostas e perde as últimas três, o seu capital evoluiu de acordo com o esquema:*

$$64 \mapsto 96 \mapsto 144 \mapsto 216 \mapsto 108 \mapsto 54 \mapsto 27.$$

Se ela começou com R\$64,00 e terminou com R\$27,00, significa que ela perdeu no final das contas, o valor de R\$37,00. Já houve grande progresso ao analisarmos as alternativas, pois conseguimos eliminar as alternativas a, b e c.

Em seguida os alunos costumam experimentar uma outra ordem para essas vitórias e derrotas, por exemplo, em ordens alternadas. Suponhamos que essa pessoa começou ganhando, então obtêm-se o seguinte esquema:

$$64 \mapsto 96 \mapsto 48 \mapsto 72 \mapsto 36 \mapsto 54 \mapsto 27.$$

Veja que nessa ordem escolhida, a pessoa também perdeu a quantia de R\$37,00.

Em seguida, escolhem outra ordem para essas vitórias e derrotas, torcendo para que a pessoa não termine com a quantia de R\$27,00, o que permitiria concluir que a resposta seria a alternativa (e).

Mas, infelizmente isso não foi possível, e a pessoa terminou as rodadas com R\$27,00 e permanecem na dívida, Alguns se dispõem a tentar outras ordens possíveis, mas logo desistem, pois um dos alunos que gostava muito da parte de análise combinatória, calculou a quantidade de ordens possíveis, na qual resultou em 20 ordens possíveis para tal situação.

Solução. A melhor maneira de abordar problemas nos quais há uma grandeza variável, da qual é conhecida a taxa (porcentagem) de variação, é concentrar a atenção, não na taxa de variação da grandeza, e sim no valor da grandeza depois da variação.

Nesse problema, devemos pensar da seguinte maneira: cada vez que ganha, o capital aumenta $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ do que valia; cada vez que perde, o capital diminui $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ do que valia.

Pensando desta maneira, fica subentendido que se a pessoa vencer as três primeiras apostas e perder as três últimas, a evolução de seu capital dá-se de acordo com o esquema abaixo:

$$64 \mapsto \underbrace{64 \cdot \frac{3}{2}}_{\text{ganhou a } 1^{\text{a}}} \mapsto \underbrace{64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}_{\text{ganhou a } 1^{\text{a}} \text{ e } 2^{\text{a}}} \mapsto \underbrace{64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}_{\text{ganhou a } 1^{\text{a}}, 2^{\text{a}} \text{ e } 3^{\text{a}}}$$

e,

$$\underbrace{64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Perdeu a } 4^{\text{a}}} \mapsto \underbrace{64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Perdeu a } 4^{\text{a}} \text{ e } 5^{\text{a}}} \mapsto \underbrace{64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Perdeu as três últimas}}$$

Veja que ela termina com $64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 27$ reais. Além disso, também fica evidente que se as vitórias e derrotas tivessem ocorrido em outra ordem, isso apenas mudaria a ordem dos fatores, sem alterar o produto, e a pessoa também terminaria com R\$27,00.

Assim, se uma pessoa começou com R\$64,00 e terminou com R\$27,00, significa que ela teve um prejuízo de R\$37,00. Desta forma, a alternativa correta para o problema é a (d).

O que deve ter ficado claro nesse exemplo é que se uma grandeza tem taxa de crescimento igual a i , cada valor da grandeza é igual a $(1+i)$ vezes o valor anterior. PG's são seqüências nas quais as taxas de crescimento i de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Vejam a definição para Progressão Geométrica a seguir.

Definição 2.4. Uma Progressão Geométrica (PG) é uma seqüência na qual o quociente da divisão entre cada termo e o termo anterior é constante. Esse quociente é chamado razão da PG e representada pela letra q . O primeiro termo de uma PG costuma ser representado pela letra a . Assim, uma PG pode ser definida de maneira recursiva:

$$a_1 = a \quad e \quad a_k = a_{k-1} \cdot q, \quad \text{para } k \geq 2.$$

Exemplo 18. As seqüências $(3, 9, 27, 81, \dots)$, $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots)$, $(1, 1, 1, \dots)$ e $(2, -10, 50, -250, 1250, \dots)$ são PG's cujas razões valem $3, \frac{1}{3}, 1$ e -5 , respectivamente.

Em uma PG (a_1, a_2, a_3, \dots) bastamos multiplicar a razão uma vez para avançar um termo, multiplicar duas vezes para avançar dois termos, e assim por diante.

Em geral temos que $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$, pois ao passar de a_1 para a_k , avançamos $k - 1$ termos. Podemos ver que:

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ a_5 &= a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4 \\ \vdots &= \vdots = \vdots \\ a_{k-1} &= a_{k-2} \cdot q = (a_1 \cdot q^{k-3}) \cdot q = a_1 \cdot q^{k-2} \\ a_k &= a_{k-1} \cdot q = (a_1 \cdot q^{k-2}) \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1}. \end{aligned}$$

Para um melhor embasamento matemático, precisaríamos provar essa validade por meio de Indução Finita matemática, mas a priori, vamos admiti-la como verdadeira. Isso, nos permite enunciar a seguinte Proposição.

Proposição 2.8. Seja (a_k) uma PG de primeiro termo $a \neq 0$ de razão $q \neq 1$, então a soma dos seus n primeiros termos é

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Demonstração. *Veja que:*

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1}. \quad (2.9)$$

Agora, multiplicando os dois lados da equação anterior pela razão q obtemos:

$$q \cdot S_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n. \quad (2.10)$$

Fazendo (2.9) - (2.10), tem-se:

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= a - aq^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a - aq^n = a(1 - q^n) \\ &\Rightarrow S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}. \end{aligned}$$

Outra maneira de obter o valor da soma é utilizando o Teorema Fundamental da Somação - Teorema 2.5 como foi visto na Proposição 2.6, ou seja,

$$\sum_{k=1}^n q^k = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1} &= a + a(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}) \\ &= a + a \sum_{k=1}^{n-1} q^k \\ &= a + a \left(\frac{q^n - q}{q - 1} \right) \\ &= \frac{a(q - 1) + a(q^n - q)}{q - 1} \\ &= \frac{aq^n - a}{q - 1} \\ &= \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 19. *Segundo uma lenda antiga, o jogo de xadrez foi inventado na Índia, para agradar a um soberano, como passatempo que o ajudasse a esquecer os aborrecimentos que tivera com uma desastrada batalha. Encantado com o invento, o soberano, rei Shirham, quis recompensar seu súdito Sissa Ben Dahir, o inventor do xadrez. Shirham disse a Sissa que lhe fizesse um pedido, que ele, rei Shirham, o atenderia prontamente. Sissa disse, simplesmente: Bondoso rei, dê-me então um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda casa, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. O rei achou esse pedido demasiado modesto e, sem dissimular seu desgosto, disse a Sissa: Meu amigo, tu me*

pedes tão pouco, apenas um punhado de grãos de trigo. Eu desejava acumular-te de muitas riquezas, palácios, servos e tesouros de ouro e prata.

Determine a quantidade de grãos de trigos que Sissa teria direito a receber.

Solução. Pelo acordo feito entre o Rei Shirhan e Sissa, o rei deveria disponibilizar a seguinte quantidade de grãos de trigos: $S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63}$. Ou seja, estamos diante de uma soma finita de uma PG, assim tem-se:

- Primeiro termo: $a_1 = 1$;
- Razão: $q = 2$;
- Quantidade de termos: 64.

Desta forma, substituindo esses valores na fórmula da soma dos termos de uma PG finita, obtemos:

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$$

Calculando esse valor, encontraremos $S_n = 18446744073709551615$. Ou seja, um valor em torno de 18 sextilhões de grãos de trigo.

Para dar uma ideia desse número, estima-se hoje que o número de grãos de areia presente na Terra seja de 8 quintilhões, ou seja, a quantidade de grãos de trigo que Sissa terá direito é mais de mil vezes maior que a quantidade de grãos de areia no planeta Terra.

3 Recorrências

Neste capítulo iremos trabalhar com as chamadas sequências recorrentes, isto é, sequências que são definidas a partir dos valores de alguns dos seus termos iniciais acompanhados de uma relação que permite determinar os demais termos da sequência a partir dos termos iniciais fixados.

As sequências recursivas consistem de uma ferramenta matemática bastante poderosa para resolver problemas de Matemática Discreta e problemas de muitas outras áreas tais como Engenharia, Computação, Biologia, Estatística, entre outras.

Vimos no capítulo anterior que uma sequência é definida recursivamente se ela for dada por uma regra que permite calcular um termo qualquer por meio de um ou mais termos anteriores. Por exemplo, PA's, PG's, fatorial, potências com expoentes naturais e a sequência de Fibonacci são definidas por recorrência.

A sequência de Fibonacci foi inspirada num problema que consistia em determinar o número de pares de coelhos que serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês, cada par de coelhos gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês. Desse problema célebre surge a sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, f_n, \dots)$, onde $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Além da sequência de Fibonacci existem outras que são comuns, como por exemplo, a sequência de inteiros:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) \quad (3.1)$$

na qual fixamos que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores, o que equivale dizer que para todo $n \geq 3$:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (3.2)$$

O processo pelo qual se determinam sucessivamente os termos particulares destas sequências chama-se processo recorrente e uma igualdade da forma (3.2) é uma fórmula recorrente.

É fácil ver que podemos construir outras sequências recorrentes para inteiros usando a condição (3.2), como por exemplo:

- a) $(a_2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \dots)$ com $a_1 = 2$ e $a_2 = 5$;
- b) $(10, 15, 25, 40, 65, \dots)$ com $a_1 = 10$ e $a_2 = 15$;
- c) $(-3, -7, -10, -17, -27, \dots)$ com $a_1 = -3$ e $a_2 = -7$.

Destacamos que para se estabelecer a sequência (3.1) precisamos conhecer os dois primeiros elementos e a partir daí encontrar todos os elementos exigidos, usando a regra definida em (3.2).

Existem problemas cujas resoluções recaem em uma sequência numérica onde não se conhece de forma explícita a lei de formação (termo geral) que permita escrever, de forma direta, qualquer termo de tal sequência. Porém, a natureza de tal sequência permite relacionar um termo qualquer desta com alguns de seus termos anteriores, ou seja, os termos podem ser obtidos recursivamente, ou através de uma equação de recorrência. No texto, sempre vamos considerar sequência cuja lei de formação está bem estabelecida, no sentido que as recorrências significam a continuidade de um padrão na formação da sequência. Observe os exemplos a seguir:

Exemplo 20. *Considere a sequência $(2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots)$. Observe que cada termo, a partir do segundo termo, é igual ao termo imediatamente anterior adicionado (somado) com 5. Desta forma, podemos encontrar a relação geral dessa sequência dada por $x_{n+1} = 5 + x_n$, com $x_1 = 2$.*

Exemplo 21. *Considere a sequência $(0, 3, 3, 6, 9, 15, \dots)$, perceba que qualquer termo a partir do terceiro termo é obtido pela soma dos dois termos anteriormente a ele. Assim, os termos dessa sequência estão relacionados pela equação $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$, em que $n \geq 3$, $y_1 = 0$ e $y_2 = 3$.*

Diante dos exemplos acima, de modo geral, as equações de recorrências são determinadas por fórmulas que especifica como cada termo da sequência é obtido através dos seus termos anteriores.

Em geral, estamos interessados em encontrar uma fórmula fechada que represente a solução, ou seja, uma fórmula com a qual é possível obter todos os termos da sequência, em função da posição n que cada termo ocupa e não dos termos prévios. Veja o exemplo a seguir para melhor compreensão.

Exemplo 22. *Considere a seguinte sequência $(2, 7, 12, 17, 22, 27, \dots)$, sendo assim, determine o 15º termo dessa sequência.*

Solução. *Do Exemplo 20 temos que a relação geral dessa sequência é dada por:*

$$x_{n+1} = 5 + x_n, \quad \text{com } x_1 = 2.$$

Então, como estamos procurando o 15º termo, pela relação de recorrência, iremos precisar do 14º termo, que por sua vez, depende do 13º termo. E o procedimento continua, nesse caso, até o 7º termo que conseguimos de forma imediata, utilizando a relação da sequência e os termos dados na sua formação.

Sendo assim, obtemos a Tabela a seguir contendo os demais termos da sequência dada pela relação $x_{n+1} = x_n + 5$.

Tabela 7 – Os 15 primeiros termos da recorrência $x_{n+1} = x_n + 5$

$x_1 = 2$	$x_6 = 27$	$x_{11} = 52$
$x_2 = 7$	$x_7 = 32$	$x_{12} = 57$
$x_3 = 12$	$x_8 = 37$	$x_{13} = 62$
$x_4 = 17$	$x_9 = 42$	$x_{14} = 67$
$x_5 = 22$	$x_{10} = 47$	$x_{15} = 72$

Desta forma, conclui-se que o 15º termo é igual a 72.

Veja, dependendo da posição do termo que se deseja encontrar (por exemplo, o milésimo termo) é muito trabalhoso obtê-lo. Sendo assim, será que é possível encontrar uma fórmula fechada em função apenas de n para descobrir qualquer termo dessa sequência? A resposta é que é possível obter uma fórmula prática para isso, mas deixaremos para fazer isso em um momento mais oportuno.

Resolver uma relação de recorrência é encontrar uma fórmula posicional explícita para o termo geral da sequência. Para entender melhor o conceito de solução, vamos exemplificar a relação de recorrência e a sua fórmula posicional, sem no entanto ainda descrever como tal fórmula é obtida.

Exemplo 23. A sequência (a_n) dos números naturais ímpares $1, 3, 5, 7, \dots$, pode ser definida por $a_{n+1} = a_n + 2$, com $n \geq 1$ e $a_1 = 1$. Neste caso, podemos verificar que $a_n = 2n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é a solução dessa recorrência.

Exemplo 24. Qualquer PA (b_n) de razão r e primeiro termo igual a c , pode ser definida por $b_{n+1} = b_n + r$, com $n \geq 1$ e $b_1 = c$. Neste caso, podemos verificar que $b_n = c + (n-1)r$ é uma solução dessa recorrência.

Exemplo 25. Qualquer PG (y_n) de razão q e primeiro termo igual a a , pode ser definida por $y_{n+1} = q \cdot y_n$, com $n \geq 1$ e $y_1 = a$. É fácil obtermos que $y_n = a \cdot q^{n-1}$ é uma solução dessa recorrência.

Uma equação de recorrência costuma ser classificada através dos seguintes critérios independentes entre si:

- i) **Ordem:** A ordem de uma equação de recorrência é a diferença entre o maior e o menor índice que aparece na equação. Se tal diferença entre índices for igual a n , dizemos que a recorrência é de n -ésima ordem.

- ii) **Termo independente ou homogeneidade:** são as expressões aditivas, que podem depender de n , mas que aparecem isoladas dos termos da sequência na expressão da recorrência.
- iii) **Linearidade:** uma recorrência é dita linear se a sua parte principal, isto é, se excetuando os termos independentes da expressão, consiste de uma combinação linear (soma de múltiplos dos termos da sequência) de seus termos. Esses múltiplos, inclusive, podem ser apresentados como funções de n . Caso contrário, diremos que a recorrência é não linear.

Por exemplo, a recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ é linear. Mas, a recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n^2$ é dita não linear.

Agora, vejamos alguns exemplos de recorrências e suas classificações.

Exemplo 26. *Dadas as recorrências a seguir, classifique-as de acordo com sua ordem, homogeneidade e linearidade.*

a) $x_{n+1} = x_n + 3$.

b) $x_{n+1} = n \cdot x_n^2 + 3x_{n-1}$.

Classificação:

a)

- **Ordem:** é uma recorrência de primeira ordem, pois fazendo a diferença do maior e do menor índice obtem-se: $(n+1) - (n) = 1$.
- **Termo independente:** O único termo aditivo que aparece na expressão é o 3.
- **Linearidade:** é uma recorrência linear uma vez que a sua parte principal consiste de combinação linear dos termos x_n e x_{n+1} , mais precisamente tem-se $1 \cdot x_{n+1} + (-1) \cdot x_n$ (soma de múltiplos de x_n e x_{n+1}).

b)

- **Ordem:** É uma recorrência de segunda ordem, uma vez que $(n+1) - (n-1) = 2$.
- **Termo independente:** Função identicamente nula.
- **Linearidade:** é uma recorrência não linear, pois temos o termo dependente x_n^2 , não pode ser escrito como uma combinação linear.

Diante do exposto, vamos abordar ainda nas próximas seções desse capítulo: recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas e não homogêneas, dependência e independência lineares e as recorrências de 2ª ordem homogêneas e não homogêneas.

3.1 Recorrência Linear de 1ª Ordem

No presente texto usaremos os símbolos Σ (lê-se Sigma ou somatório) utilizado para somas e \prod (lê-se pi ou produtório) para produtos, os quais terão um papel fundamental no contexto do estudo das seqüências.

Definição 3.1. Dada uma seqüência (a_n) , escrevemos $\sum_{i=1}^n a_i$ para denotar a seguinte soma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, e lê-se o somatório dos a_i para $1 \leq i \leq n$.

Sendo assim,

$$\sum_{i=1}^n a_i = \begin{cases} a_1, & \text{se } n = 1 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Uma das vantagens de se fazer uso da notação usando o símbolo Σ se deve ao fato de torna-se fácil a manipulação de somas com um número grande de parcelas.

Essa notação é particularmente útil para fazermos cancelamentos em somas. Mais precisamente, dada uma seqüência (a_n) , efetuando os cancelamentos intermediários na soma:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}),$$

obtemos $(a_n - a_1)$ como resultado. Com o uso da notação Σ , podemos escrever tal igualdade como:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_1,$$

que é a soma telescópica, conforme mencionado no Capítulo 2.

Definição 3.2. Dada uma seqüência (a_n) , escrevemos $\prod_{i=1}^n a_i$ para denotar o produto $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$, e lê-se o produtório dos a_i 's para $1 \leq i \leq n$.

Assim,

$$\prod_{i=1}^n a_i = \begin{cases} a_1, & \text{se } n = 1 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Com o uso da notação \prod , podemos denotar o *fatorial* de $n \in \mathbb{N}$, escrevendo:

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Analogamente ao caso de somatórios, a notação \prod é particularmente útil para a realização de cancelamentos em produtos. Daí segue o mesmo raciocínio para **produtos telescópicos**, conforme a definição a seguir.

Propriedade 3.1. Se (a_k) é uma sequência de reais não nulos, então:

$$\prod_{j=1}^n \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{a_{n+1}}{a_1},$$

ou seja,

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1}.$$

Agora, iremos abordar as recorrências lineares de 1ª ordem;

Definição 3.3. Uma recorrência é dita linear de 1ª ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele e são apresentadas no seguinte formato:

$$x_{n+1} = f(n)x_n + h(n), \quad \text{com } f(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

onde, $f(n)$ e $h(n)$ são funções de $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $h(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário será não homogênea.

3.1.1 Resolução de recorrências lineares de primeira ordem homogênea

A equação da recorrência linear de 1ª ordem homogênea é do tipo $x_{n+1} = f(n)x_n$. Para resolver estas recorrências será utilizado o método dos produtos telescópicos ou soma telescópicas de forma que seja feito o cancelamento de alguns termos para que possamos escrever x_n em função apenas de n .

Não há grandes dificuldades na resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem, como podemos observar nos exemplos a seguir.

Exemplo 27. Resolva a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, $x_1 = 1$.

Solução: Temos,

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ x_5 &= 4x_4 \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Daí, fazendo a multiplicação membro a membro nas igualdades, e efetuando as devidas simplificações, obtém-se:

$$x_n = (n-1)!x_1 = (n-1)!,$$

uma vez que $x_1 = 1$.

Veja que a fórmula que encontramos depende somente do número natural n , mas isso é apenas uma conjectura, para mostrar que a fórmula é sempre válida, precisamos mostrar que ela vale para todo número natural n , desta forma, utilizaremos o PIF para mostrar sua validade para todo número natural n .

Demonstração. *Seja $P(n)$ a propriedade relativa ao número natural n tal que:*

$$P(n) : x_n = (n - 1)!.$$

Assim,

- $P(1) : x_1 = (1-1)! = 0! = 1$. Logo, $P(1)$ se verifica.
- (Hipótese indutiva) *Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n , o que equivale a $x_n = (n - 1)!$.*
- *Queremos mostrar a validade de $P(n + 1)$, ou seja, que $x_{n+1} = n!$ para todo n natural.*

Assim, da hipótese indutiva temos:

$$x_n = (n - 1)! \tag{3.3}$$

Agora, multiplicando (3.3) por n obtemos:

$$n \cdot x_n = n \cdot (n - 1)! = n!.$$

Mas, observe que pela equação de recorrência $x_n = (n - 1)! \Rightarrow x_{n+1} = n!$. Isso mostra a validade para $P(n + 1)$, sempre que $P(n)$ é verdadeira. Portanto, provamos pelo PIF que a fórmula para solução da recorrência é válida para todo número natural n , conforme queríamos.

■

3.1.2 Resolução de recorrências lineares de primeira ordem não homogênea

Recordemos que uma recorrência é dita não homogênea se ela possuir um termo independente não nulo. As recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem assumem a forma:

$$x_{n+1} = f(n)x_n + h(n), \tag{3.4}$$

onde $f(n)$ e $h(n)$ são funções não identicamente nulas.

Podemos analisar dois casos para essas recorrências, que são quando $f(n) = 1$ e quando $f(n) \neq 1$.

- Caso 1: Quando $f(n) = 1$. teremos:

$$x_{n+1} = x_n + h(n). \quad (3.5)$$

Vamos resolver a recorrência (3.5). Assim, teremos:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h(1) \\ x_3 &= x_2 + h(2) = \underbrace{x_1 + h(1)}_{x_2} + h(2) \\ x_4 &= x_3 + h(3) = \underbrace{x_1 + h(1) + h(2)}_{x_3} + h(3) \\ x_5 &= x_4 + h(4) = \underbrace{x_1 + h(1) + h(2) + h(3)}_{x_4} + h(4) \\ &\vdots = \vdots + \vdots = \dots\dots \\ x_{n-1} &= x_{n-2} + h(n-2) = \underbrace{x_1 + h(1) + h(2) + \dots + h(n-3)}_{x_{n-2}} + h(n-2) \\ x_n &= x_{n-1} + h(n-1) = \underbrace{x_1 + h(1) + \dots + h(n-2)}_{x_{n-1}} + h(n-1). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos que:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k),$$

é a solução da recorrência (3.5).

Agora, vamos ao outro caso.

- Caso 2: Quando $f(n) \neq 1$.

Para recorrências desse tipo, ou seja, aquelas em que $f(n) \neq 1$, utilizaremos o resultado a seguir que mostra que qualquer recorrência linear não homogênea de primeira ordem da forma $x_{n+1} = f(n)x_n + h(n)$ pode ser transformada em uma equação da forma $y_{n+1} = y_n + t(n)$ e assim, resolve-se conforme foi visto no caso 1.

Teorema 3.2. *Se a_n é solução não nula da recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n + h(n)$ em*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{f(n)a_n}.$$

Demonstração. *Considere a equação $x_{n+1} = f(n)x_n + h(n)$, com x_1 dado. Suponha que a_n é solução de $x_{n+1} = f(n)x_n$, isto é, suponha que $a_{n+1} = f(n)a_n$, fazendo a substituição $x_n = a_n y_n$ na equação inicial $x_{n+1} = f(n)x_n + h(n)$, obtemos que:*

$$a_{n+1}y_{n+1} = f(n)a_n y_n + h(n).$$

Logo,

$$f(n)a_n y_{n+1} = f(n)a_n y_n + h(n).$$

Dividindo toda a expressão anterior por $f(n)a_n$ teremos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{f(n)a_n}.$$

Pelo resultado obtido no caso 1, uma solução dessa recorrência é dada por:

$$y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{f(k)a_k}, \text{ com } y_1 = \frac{x_1}{a_1}.$$

Portanto,

$$x_n = a_n y_n = a_n \left[y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{f(k)a_k} \right] \quad \text{onde } y_1 = \frac{x_1}{a_1}.$$

■

Exemplo 28. Encontre a solução da recorrência $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, com $a_1 = 1$.

Solução. Note que $f(n) = 1$ e $h(n) = 2n + 1$ e desta forma podemos utilizar o resultado anterior e assim obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \end{aligned}$$

Exemplo 29. Resolver a recorrência $x_{n+1} = 5x_n + 4^n$ com $x_1 = 2$.

Solução.

Uma solução não nula para a recorrência homogênea $x_{n+1} = 5x_n$ é $x_n = 5^{n-1}$, ou seja, qualquer PG de razão 5, não nula, poderia ser outra solução.

Fazendo a seguinte substituição:

$$x_n = 5^{n-1} y_n, \tag{3.6}$$

na recorrência original, obtemos:

$$5^n y_{n+1} = 5^n y_n + 4^n,$$

isto é,

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Então, y_n é uma PG de razão $\frac{4}{5}$. Como $x_1 = 2$ e $x_n = 5^{n-1}y_n$, temos que $y_1 = 2$. Assim,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \left(\frac{4}{5}\right)^1 \\ y_3 &= y_2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ y_4 &= y_3 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \\ y_5 &= y_4 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= y_{n-2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} \\ y_n &= y_{n-1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$y_n = y_1 + \frac{\left(\frac{4}{5}\right) \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{4}{5}} = y_1 + 4 \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right].$$

Como $y_1 = 2$ teremos:

$$y_n = 2 + 4 \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right] = 6 - \frac{4^n}{5^{n-1}}. \quad (3.7)$$

Agora, substituindo (3.7) em (3.6) obtemos:

$$x_n = 5^{n-1}y_n = 5^{n-1} \left(6 - \frac{4^n}{5^{n-1}}\right) = 6 \cdot 5^{n-1} - 4^n. \quad (3.8)$$

Logo, a expressão em (3.8) é a solução da recorrência $x_{n+1} = 5x_n + 4^n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $x_1 = 2$.

3.2 Dependência e Independência Linear

Definição 3.4. Sejam (x_n) e (y_n) duas seqüências de escalares. Se existirem escalares A e B , não simultaneamente nulos, tais que

$$A \cdot x_n + B \cdot y_n = 0 \quad \text{para todo } n \text{ natural,}$$

diremos que (x_n) e (y_n) são **linearmente dependentes** (LD). Caso contrário, diremos que são **linearmente independentes** (LI).

Segue da Definição 3.4 que (x_n) e (y_n) são **LI's** se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ o sistema:

$$A \cdot x_n + B \cdot y_n = 0,$$

possui exclusivamente a solução trivial, a saber: $A = B = 0$. Assim, (x_n) e (y_n) são LD se x_n é múltipla de y_n ou y_n é múltipla de x_n .

Ademais, segue da Definição 3.4 que (x_n) identicamente nula é LD com qualquer outra sequência (y_n) . Com efeito,

$$x_n = 0 = 0 \cdot y_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, considerando $A = 1$ e $B = 0$, tem-se $Ax_n + By_n = 0$ para todo n natural, que implica serem x_n e y_n LD.

Lema 3.3. *Sejam, A, B, C, D escalares tais que $A^2 + C^2 \neq 0$. Então,*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } D = \lambda C \text{ e } B = \lambda A.$$

Demonstração. *Mostremos inicialmente que a condição é necessária. Suponha que $D = \lambda C$ e $B = \lambda A$. Então,*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = AD - BC = A(\lambda C) - (\lambda A)C = 0.$$

Mostremos agora que a condição é suficiente. Suponha que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$. Logo, $AD - BC = 0$. Como $A^2 + C^2 \neq 0$, temos dois casos a analisar:

- **Caso I.** $A \neq 0$.

Nesse caso, consideremos $\lambda = \frac{B}{A}$, assim, $B = \lambda A$ e $AD - BC = 0$ implica que $D = \left(\frac{B}{A}\right)C = \lambda C$.

- **Caso II.** $A = 0$.

Nesse caso, consideremos $\lambda = \frac{D}{C}$, teremos, $D = \lambda C$ e $AD - BC = 0$ implica que $B = \left(\frac{D}{C}\right)A = \lambda A$.

■

Teorema 3.4. *Duas sequências (x_n) e (y_n) são **LD** se, e somente se,*

$$\det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0,$$

para todos os índices i, j naturais.

Demonstração. *Suponha inicialmente que (x_n) e (y_n) são LD. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $y_n = \lambda x_n$, ou $x_n = \lambda y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Suponhamos sem perda de generalidade que*

ocorre o primeiro caso, em particular, dados os índices i, j quaisquer, tem-se $y_i = \lambda x_i$ e $y_j = \lambda x_j$, de onde segue que

$$\det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = x_i \cdot y_j - x_j \cdot y_i = x_i(\lambda x_j) - x_j(\lambda x_i) = 0.$$

Reciprocamente, suponha $\det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0$, para todos os índices i, j naturais. Seja i_0 o menor índice tal que $x_{i_0} \neq 0$ e $\lambda = \frac{y_{i_0}}{x_{i_0}}$.

Vamos provar por indução sobre n que se $x_n \equiv 0$, então (x_n) e (y_n) são LD.

Suponhamos que $x_n \not\equiv 0$, então provemos que $y_n = \lambda x_n$, $\forall n \geq i_0$.

Com efeito,

(I) para $n = i_0$ a igualdade se verifica por definição. De fato, veja que:

$$n = i_0 \Rightarrow y_{i_0} = 1 \cdot y_{i_0} = \begin{pmatrix} x_{i_0} \\ x_{i_0} \end{pmatrix} y_{i_0} = \begin{pmatrix} y_{i_0} \\ x_{i_0} \end{pmatrix} x_{i_0} = \lambda x_{i_0}.$$

(II) Passo indutivo: Suponha, por indução, que $y_k = \lambda x_k$, $\forall i_0 \leq k \leq n$.

(III) Mostremos que $y_{n+1} = \lambda x_{n+1}$. Considerando $j = n + 1$ e $i = i_0$, por hipótese (inicial) tem-se

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x_{i_0} & y_{i_0} \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow x_{i_0} y_{n+1} - x_{n+1} y_{i_0} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{i_0} y_{n+1} - x_{n+1} (\lambda x_{i_0}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{i_0} (y_{n+1} - \lambda x_{n+1}) = 0, \end{aligned}$$

como $x_{i_0} \neq 0$, da última igualdade segue que $y_{n+1} = \lambda x_{n+1}$. Portanto, pelo PIF,

$$y_n = \lambda x_n, \forall n \geq i_0.$$

Para finalizar a demonstração, observe que $y_n = x_n = 0$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots, i_0 - 1$. Com efeito, desde que i_0 é o menor índice para o qual $x_n \neq 0$, segue que:

$$x_j = 0, \text{ sempre que } 1 \leq j \leq i_0.$$

Assim, se j é qualquer índice menor do que i_0 tem-se:

$$\det \begin{pmatrix} x_{i_0} & y_{i_0} \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_{i_0} y_j - x_j y_{i_0} = x_{i_0} y_j - \mathbf{0} \cdot y_{i_0} = 0 \Leftrightarrow x_{i_0} y_j = 0.$$

Ora, como $x_{i_0} \neq 0$, segue da última igualdade que $y_j = 0$ para cada $j < i_0$. Assim,

$$y_j = 0 = \lambda \cdot x_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, i_0 - 1.$$

Portanto, segue das alegações acima que $y_n = \lambda x_n$ para todo n natural, caracterizando que (x_n) e (y_n) são LD. ■

Exemplo 30. Vejamos algumas sequências que são LI's:

- a) $\{x_n, y_n\}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_n = \lambda_1^n$, $y_n = \lambda_2^n$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.
- b) $\{x_n, y_n\}$, com $x_n = \lambda^n$, $y_n = n\lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0$.
- c) $\{x_n, y_n\}$, com $\cos(n\theta)$, $y_n = \sin(n\theta)$, $\theta \neq k\pi$ com $q \in \mathbb{Z}_+^*$

Solução. Seja $i, j \in \mathbb{N}$ com $j = i + q$ para algum $q \in \mathbb{N}$ Para que as sequências sejam LI devemos ter:

$$\det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \neq 0.$$

a) Sejam $x_n = \lambda_1^n$ e $y_n = \lambda_2^n$. Assim temos que:

$$\det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1^i & \lambda_2^i \\ \lambda_2^{i+q} & \lambda_2^{i+q} \end{pmatrix} = \lambda_1^i \cdot \lambda_2^i \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^q & \lambda_2^q \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda_1^i}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\lambda_2^i}_{\neq 0} \left(\underbrace{\lambda_2^q - \lambda_1^q}_{\neq 0} \right) \neq 0.$$

Portanto, concluímos que $x_n = \lambda_1^n$ e $x_n = \lambda_2^n$ são LI.

b) Sejam $x_n = \lambda^n$ e $x_n = n\lambda^n$. Assim temos que:

$$\det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda^i & i\lambda^i \\ \lambda^{i+q} & (i+q)\lambda^{i+q} \end{pmatrix} = \lambda^i \cdot \lambda^i \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdot \lambda \\ \lambda^q & (i+1)\lambda^q \end{pmatrix} = \lambda^i \cdot \lambda^i \cdot \lambda^q \neq 0.$$

Portanto, concluímos que $x_n = \lambda^n$ e $x_n = n \cdot \lambda^n$ são LI.

c) Sejam $x_n = \cos(n\theta)$ e $y_n = \sin(n\theta)$. Relembremos as transformações trigonométricas e a Relação Fundamental da Trigonometria.

• Soma de dois arcos:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

• Relação Fundamental da Trigonometria:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \cos(i\theta) & \sin(i\theta) \\ \cos[(i+q)\theta] & \sin[(i+q)\theta] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \end{pmatrix} \\ &= \sin(q \cdot \theta) \cdot (\sin^2(i\theta) + \cos^2(i\theta)) \\ &= \sin(q \cdot \theta) \neq 0, \forall q \in \mathbb{Z}_+^*. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $x_n = \cos(n\theta)$ e $y_n = \sin(n\theta)$ são LI.

3.3 Recorrência linear de 2ª ordem

Iniciaremos essa seção propondo um exemplo de contagem, de enunciado muito simples, cujos métodos tradicionais da Análise Combinatória se mostram no mínimo ineficientes para resolvê-lo, motivando então a necessidade de uma nova ferramenta mais adequada para atacá-lo.

Exemplo 31. *Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?*

Apesar da simplicidade do seu enunciado, as técnicas usuais da análise combinatória, mostram-se ineficientes para se chegar a uma solução. Isso pode ser mais evidente quando olhamos para a resposta desse problema, dada por:

$$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} (1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} (1 - \sqrt{3})^n,$$

que é completamente não intuitiva.

Não devemos esperar que os métodos tradicionais da análise combinatória (arranjos, combinações, permutações, etc) nos levem à essa resposta. Mais tarde retornaremos a discussão desse problema e detalharemos como obtivemos essa resposta.

Diante do exposto, é clara a necessidade de estudarmos outras ferramentas que sejam eficientes para tratar problemas como o proposto no exemplo anterior. Essas ferramentas são as chamadas recorrências lineares as quais nos delimitaremos às de 2 ordem homogêneas e não homogêneas.

Inicialmente definiremos as recorrências lineares de segunda ordem a partir de sua caracterização e posteriormente mostraremos a resolução de recorrências homogêneas e não homogêneas com coeficientes constantes.

Definição 3.5. *Uma recorrência é dita linear de segunda ordem quando aparece na equação de recorrência um termo em função de seus dois antecessores imediatos, ou seja, tem o seguinte formato:*

$$x_{n+2} + f(n)x_{n+1} + g(n)x_n + h(n) = 0,$$

onde as funções f, g e h têm como domínio o conjunto dos números naturais e $g(n)$ é uma função não nula, caso contrário a recorrência será de primeira ordem. Além disso, se $h(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário ela é dita não homogênea.

Nesta seção, estudaremos apenas o caso em que as funções $f(n)$ e $g(n)$ são constantes, ou seja, as recorrências da forma: $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = h(n)$, com $Q \neq 0$.

Exemplo 32. *A recorrência $x_{n+2} + 6x_{n+1} = 8x_n$ é linear de segunda ordem homogênea.*

Exemplo 33. *A recorrência $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 8x_n = n^2 + 2n + 1$ é linear de segunda ordem não homogênea.*

3.3.1 Resolução de recorrências lineares de segunda ordem homogênea

Agora trataremos do caso particular das recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Nesse caso, a lei de recorrência é da forma:

$$x_{n+2} = f(n)x_{n+1} + g(n)x_n + h(n),$$

onde f, g são funções constantes e $g(n) \neq 0$.

Para começar, trabalharemos especificamente com o caso homogêneo, isto é, o caso em que $h(n) = 0$. Assim, as recorrências serão apresentadas no seguinte formato:

$$x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0.$$

Para resolver recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, que são apresentadas no formato apresentado anteriormente, apresentaremos uma técnica, que consiste em encontrar progressões geométricas da forma r^n que resolvem a recorrência e cujas razões r são raízes de uma equação algébrica do segundo grau chamada equação característica associada a recorrência.

O termo geral da sequência é obtido como uma combinação linear dessas progressões com coeficientes determinados graças aos valores dos termos iniciais x_1 e x_2 .

Uma primeira tentativa para determinar soluções para recorrências do tipo:

$$x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0,$$

é procurar soluções do tipo $x_n = r^n$, onde r é uma constante real. Substituindo $x_n = r^n$ na recorrência $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0$, segue que:

$$r^{n+2} + Pr^{n+1} + Qr^n = 0 \Rightarrow r^n(r^2 + Pr + Q) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^n = 0 \\ \text{ou,} \\ r^2 + Pr + Q = 0 \end{cases}.$$

No primeiro caso, $r^n = 0$ implica que $r = 0$ e nos leva que $x_n = r^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

No segundo caso, $r^2 + Pr + Q = 0$, o que revela que r é uma raiz da equação quadrática $\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$.

Observe que a técnica a ser empregada é a mesma usada na resolução das equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes, onde as PGs são substituídas por funções exponenciais. Daí, a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, associamos uma equação do segundo grau $r^2 + qr + p = 0$, chamada de equação característica.

Mas, será que vale a recíproca? Isto é, se r é uma raiz da equação quadrática $\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$, então $x_n = r^n$ é uma solução da recorrência:

$$x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0.$$

Essas são as únicas soluções dessa recorrência? Os Teoremas a seguir irão esclarecer essas e outras questões relacionadas com esse tipo de recorrência.

Teorema 3.5. *Se as raízes da equação $\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$ são iguais a λ_1 e λ_2 , tal que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $x_n = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n$ é solução da recorrência linear homogênea de segunda ordem $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0$, quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2 .*

Demonstração. *De fato, substituindo $x_n = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n$ em $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n$, obtemos:*

$$\begin{aligned} x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n &= C_1\lambda_1^{n+2} + C_2\lambda_2^{n+2} + P(C_1\lambda_1^{n+1} + C_2\lambda_2^{n+1}) + Q(C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n) \\ &= C_1\lambda_1^n \underbrace{(\lambda_1^2 + P\lambda_1 + Q)}_{=0} + C_2\lambda_2^n \underbrace{(\lambda_2^2 + P\lambda_2 + Q)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Mas, será que todas as soluções serão do tipo $x_n = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n$? Para responder a essa pergunta, vamos precisar dos resultados que serão apresentados a seguir.

Lema 3.6. *Seja (y_n) uma solução não identicamente nula da recorrência linear de segunda ordem a seguir:*

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0, \quad A \neq 0 \text{ e } C \neq 0. \quad (3.9)$$

Então, não existe um índice i natural tal que $y_i = y_{i+1} = 0$.

Demonstração. *Suponha por absurdo que exista um índice i tal que $y_i = y_{i+1} = 0$ onde y_n é uma solução não nula. Sendo y_n solução da recorrência (3.9), tem-se:*

$$y_{i+2} = \frac{-By_{i+1} - Cy_i}{A} = \frac{0}{A} = 0.$$

Suponha, por hipótese de indução, que $y_k = 0$ tal que $i \leq k \leq n$. Mostraremos que $y_{n+1} = 0$. De fato,

$$y_{n+1} = \frac{-By_n - Cy_{n-1}}{A} = \frac{0}{A} = 0.$$

Logo, pelo PIF, $y_n = 0$ para todo $n \geq i$. Por outro lado, usando a relação de recorrência e como temos que (y_n) é solução da referida recorrência, temos que:

$$Ay_{n+2} + By_{n+1} + Cy_n = 0 \Rightarrow y_n = \frac{-Ay_{n+2} - By_{n+1}}{C}.$$

Assim, usando a relação de recorrência obtemos que:

$$\bullet \quad y_{i-1} = \frac{-Ay_{i+1} - By_i}{C} = \frac{-A \cdot 0 - B \cdot 0}{A} = \frac{0}{A} = 0 \quad \therefore \quad y_{i-1} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad y_{i-2} &= \frac{-Ay_i - By_{i-1}}{C} = \frac{-A \cdot 0 - B \cdot 0}{A} = \frac{0}{C} = 0 \quad \therefore y_{i-2} = 0. \\
\bullet \quad y_{i-3} &= \frac{-Ay_{i-1} - By_{i-2}}{C} = \frac{-A \cdot 0 - B \cdot 0}{A} = \frac{0}{C} = 0 \quad \therefore y_{i-3} = 0. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Seguindo este raciocínio, encontraremos todos os termos de y_n como sendo nulos, uma contradição! Pois, não existe dois termos consecutivos nulos em uma sequência que é solução de uma recorrência linear de 2ª ordem com coeficientes constantes. Portanto, não existe um índice i tal que $y_i = y_{i+1} = 0$, onde y_n é uma solução não nula da recorrência de 2ª ordem dada. ■

Teorema 3.7. *Seja (y_n) e (z_n) duas soluções da recorrência*

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0, \quad A \neq 0 \text{ e } C \neq 0. \quad (3.10)$$

As seqüências (y_n) e (z_n) são **LD** se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} y_i & z_i \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{pmatrix} = 0, \text{ para todo o índice } i \text{ natural.}$$

Demonstração. *Se (y_n) ou (z_n) são identicamente nulas, o Teorema é trivialmente verificado. Suponha que (y_n) e (z_n) são duas soluções não nulas de recorrência (3.10). A condição necessária é um caso particular do Teorema 3.4. A prova da recíproca será dada por indução. Mais precisamente, vamos provar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$z_n = \lambda y_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Com efeito,

(I) *Considerando que (y_n) e (z_n) são ambas soluções não nulas de (3.10), segue do Lema 3.6 que $y_1 \neq 0$ ou $z_2 \neq 0$. Como por hipótese, $\det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 0$, segue do Lema 3.3, que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$z_1 = \lambda y_1 \text{ e } z_2 = \lambda y_2.$$

Observe ainda que necessariamente $\lambda \neq 0$.

(II) *Suponha, por hipótese de indução, que:*

$$z_k = \lambda y_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n, \text{ com } n \geq 2.$$

(III) Mostraremos que $z_{n+1} = \lambda y_{n+1}$. Com efeito, note que, sendo (y_n) e (z_n) soluções da recorrência (3.10) e da hipótese de indução, temos que:

$$z_{n+1} = \frac{-Bz_n - Cz_{n-1}}{A} \stackrel{\text{hip}}{=} \frac{-B(\lambda y_n) - C(\lambda y_{n-1})}{A} = \lambda \frac{-By_n - Cy_{n-1}}{A} = \lambda y_{n+1}.$$

Portanto, segue pelo PIF e das alegações feitas acima que:

$$z_n = \lambda y_n \forall n \in \mathbb{N},$$

caracterizando que (y_n) e (z_n) são LD's. ■

Teorema 3.8. *Sejam (y_n) e (z_n) duas soluções linearmente independentes da recorrência*

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0, \quad A \neq 0 \text{ e } C \neq 0. \quad (3.11)$$

Se $\{w_n\}$ é qualquer outra solução da recorrência (3.11), então existem escalares C_1 e C_2 tais que:

$$w_n = C_1 y_n + C_2 z_n.$$

Demonstração. Se (w_n) é solução identicamente nula, tomamos $C_1 = C_2 = 0$. Suponha então que (w_n) seja identicamente não nula. Como (y_n) e (z_n) são duas soluções LI's, isso significa que tanto (y_n) quanto $\{z_n\}$ são não identicamente nulas. Ademais, pelo Lema 3.6,

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dessa forma, o sistema:

$$(S) \begin{cases} y_1 A + z_1 B = w_1 \\ y_2 A + z_2 B = w_2 \end{cases}$$

tem solução única. Sejam $A = C_1$ e $B = C_2$ a (única) solução desse sistema. defina

$$t_n = w_n - C_1 y_n - C_2 z_n.$$

Perceba que $\{t_n\}$ é solução da recorrência (3.11). Além disso, $t_1 = t_2 = 0$ pelas escolhas das constantes C_1 e C_2 . Assim, $t_n \equiv 0$ e, conseqüentemente,

$$w_n = C_1 y_n + C_2 z_n. \quad \blacksquare$$

Agora, justificaremos que todas as soluções de uma recorrência de 2ª ordem em que sua equação característica possuem duas raízes distintas são da forma:

$$x_n = C_1 (\lambda_1)^n + C_2 (\lambda_2)^n.$$

Teorema 3.9. *Se P e Q são números reais não nulos e λ_1, λ_2 raízes distintas da equação característica $\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$, então todas as soluções da recorrência linear homogênea de segunda ordem $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0$, são da forma:*

$$x_n = C_1 (\lambda_1)^n + C_2 (\lambda_2)^n,$$

em que C_1 e C_2 são constantes.

Demonstração. *Sejam $t_n = \lambda_1^n$ e $y_n = \lambda_2^n$ soluções não nulas da recorrência:*

$$x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n &= (\lambda_1)^{n+2} + P(\lambda_1)^{n+1} + Q(\lambda_1)^n \\ &= \lambda_1^n (\lambda_1^2 + P\lambda_1 + Q) \\ &= \lambda_1^n \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

pois λ_1 é raiz da equação característica $r^2 + Pr + Q = 0$.

E de modo análogo,

$$\begin{aligned} x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n &= (\lambda_2)^{n+2} + P(\lambda_2)^{n+1} + Q(\lambda_2)^n \\ &= \lambda_2^n (\lambda_2^2 + P\lambda_2 + Q) \\ &= \lambda_2^n \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois λ_2 é raiz da equação característica $r^2 + Pr + Q = 0$.

Agora, vamos mostrar que $t_n = \lambda_1^n$ e $y_n = \lambda_2^n$ são LI's.

Para as soluções serem LI devemos ter:

$$\det \begin{pmatrix} t_1 & y_1 \\ t_2 & y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ora,

$$\det \begin{pmatrix} t_1 & y_1 \\ t_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \cdot \lambda_2 = \underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\lambda_2}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \neq 0,$$

pois λ_1 e λ_2 são não nulos e $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Logo, $\{t_n, y_n\}$ são LI's e portanto formam um conjunto fundamental de solução. Assim, podemos utilizar o Teorema 3.8 e concluímos que qualquer outra solução que exista é escrita como combinação linear dessas duas, ou seja:

$$x_n = C_1 (\lambda_1)^n + C_2 (\lambda_2)^n.$$

■

Exemplo 34. Resolva a recorrência $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n = 0$.

Solução.

Podemos associar a recorrência linear de 2ª ordem homogênea a seguinte equação característica $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Pelo Teorema 3.9, segue que as soluções da recorrência são as sequências $(x_n)_{n \geq 1}$ tais que $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde C_1 e C_2 são constantes reais.

Observação 3.1. Numa recorrência linear homogênea de segunda ordem, se foram dados os valores dos dois primeiros termos da sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ que deve satisfazer a recorrência, então podemos obter os valores explícitos das constantes C_1 e C_2 . Por exemplo, se no Exemplo anterior, além da recorrência tivéssemos as condições $x_1 = 5$ e $x_2 = 13$, teríamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 3^1 = 5 \\ C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot 3^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1 \quad e \quad C_2 = 1.$$

Assim, nas condições impostas no Teorema 3.5 quando temos apenas a recorrência, não existe uma solução única, isto é, não existe uma única sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ que satisfaça a recorrência. Mas, fixados os dois primeiros termos da sequência, a solução passa a ser única.

Observação 3.2. (Raízes complexas). O Teorema 3.5 continua valendo, mesmo que as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica $\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$ sejam números complexos (que, nesse caso, são conjugados, visto que os coeficientes da equação característica são números reais). Todas as soluções são, como já vimos, da forma:

$$x_n = C_1 (\lambda_1)^n + C_2 (\lambda_2)^n.$$

Escrevendo λ_1 e λ_2 na forma trigonométrica, segue que:

$$\lambda_1 = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \quad e \quad \lambda_2 = \rho(\cos\theta - i \cdot \text{sen}\theta).$$

Nesse caso,

$$\lambda_1^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)] \quad e \quad \lambda_2^n = \rho^n (\cos(n\theta) - i \cdot \text{sen}(n\theta)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n \\ &= C_1 \rho^n [(\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta))] + C_2 \rho^n [(\cos(n\theta) - i \cdot \text{sen}(n\theta))] \\ &= \rho^n [(C_1 + C_2)\cos(n\theta) + i(C_1 - C_2)\text{sen}(n\theta)] \\ &= \rho^n [D \cdot \cos(n\theta) + E \cdot \text{sen}(n\theta)], \end{aligned}$$

onde $D = C_1 + C_2$ e $E = i(C_1 - C_2)$ são constantes complexas. Nessas condições, a solução geral da recorrência é dada por:

$$x_n = \rho^n [D \cdot \cos(n\theta) + E \cdot \sen(n\theta)].$$

Em que, ρ é o módulo do número complexo e θ é o argumento principal.

Lema 3.10. Suponha que $x_n = \alpha_n + i\beta_n$ seja uma solução da recorrência:

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0 \quad (3.12)$$

com A, B e C escalares (reais ou complexos) com $A \cdot C \neq 0$. Então (α_n) e (β_n) são soluções reais de (3.12).

Demonstração. Veja que:

$$\begin{aligned} Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0 &\Leftrightarrow A(\alpha_{n+2} + i\beta_{n+2}) + B(\alpha_{n+1} + i\beta_{n+1}) + C(\alpha_n + i\beta_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow [A\alpha_{n+2} + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n] + i[A\beta_{n+2} + B\beta_{n+1} + C\beta_n] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A\alpha_{n+2} + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n = 0 \\ A\beta_{n+2} + B\beta_{n+1} + C\beta_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja, (α_n) e (β_n) são soluções da recorrência (3.12). ■

Teorema 3.11. Se $\lambda = u + iv$ é uma raiz complexa da equação $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$, onde, A, B e C são escalares reais com $A \cdot C \neq 0$, então a solução geral da recorrência:

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0 \quad (3.13)$$

é dada por:

$$x_n = C_1 \rho^n \cos(n\theta) + C_2 \rho^n \sen(n\theta), \quad (3.14)$$

onde, ρ é o módulo de λ e θ é o argumento principal de λ .

Demonstração. Considere $\lambda = \rho(\cos\theta + isen\theta)$, onde $\rho = |\lambda| = \sqrt{u^2 + v^2}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ é o argumento principal de λ .

Assim, segue que $\lambda^n = \rho^n(\cos\theta + isen\theta)^n = \rho^n(\cos n\theta + isen n\theta) = \rho^n \cos n\theta + i\rho^n \sen n\theta$ é uma solução complexa de (3.13). Pelo Lema 3.10 temos que:

$$y_n = \rho^n \cos(n\theta) \quad e \quad z_n = \rho^n \sen(n\theta)$$

são duas soluções de (3.13).

Observe também que:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} y_i & z_i \\ y_{i+1} & z_{i+1} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \rho^i \cos(i\theta) & \rho^i \operatorname{sen}(i\theta) \\ \rho^{i+1} \cos(i+1)\theta & \rho^{i+1} \operatorname{sen}(i+1)\theta \end{pmatrix} \\ &= \rho^{2i+1} [\cos i\theta \operatorname{sen}(i+1)\theta - \operatorname{sen} i\theta \cos(i+1)\theta] \\ &= \rho^{2i+1} \operatorname{sen}[(i+1)\theta - i\theta] \\ &= \rho^{2i+1} \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Como $\lambda = \rho \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se que $\rho \neq 0$ e $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, para que λ não seja um número real. Assim, (y_n, z_n) são **LI's** e portanto, formam um conjunto fundamental de soluções para (3.14). Portanto, pelo Teorema 3.8, qualquer solução de (3.14) é combinação linear de y_n e z_n . ■

Exemplo 35. Resolva a recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$.

Solução. Nesse caso a equação característica é $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, cujas raízes são:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esses dois números complexos têm o mesmo módulo $\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$. Os argumentos principais são $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Considerando $\theta = \frac{\pi}{3}$, a solução geral da recorrência será:

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n [C_1 \cos(n\theta) + C_2 \operatorname{sen}(n\theta)] \\ &= 1^n \left[C_1 \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}, \end{aligned}$$

com C_1 e C_2 constantes complexas.

Note que não faria diferença se tomássemos $\theta = -\frac{\pi}{3}$, pois nesse caso apenas teríamos:

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n [C_1 \cos(n\theta) + C_2 \operatorname{sen}(n\theta)] \\ &= 1^n \left[C_1 \cos\left(-n\frac{\pi}{3}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(-n\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + (-C_2) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \\ &= C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2' \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}, \end{aligned}$$

mudaria apenas o valor da constante C_2 , mas o conjunto de valores descritos por essa nova fórmula seria igual ao conjunto dos valores descritos pela primeira fórmula.

Exemplo 36. Resolva a recorrência linear de 2ª ordem dada por $a_{n+1} - 4a_n + 8a_{n-1} = 0$, com as condições $a_1 = -3$ e $a_2 = 4$.

Solução. A equação característica é $q^2 - 4q + 8 = 0$, cujas raízes são $q_1 = 2 + 2i$ e $q_2 = 2 - 2i$. Nesse caso, $\rho = 2\sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ e então:

$$a_n = (2\sqrt{2})^n \left[C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right].$$

Agora iremos descobrir os valores das constantes C_1 e C_2 . Note que o cálculo de a_0 nos retorna $a_0 = -2$ e substituindo $n = 0$ na solução geral nos retorna que $C_1 = -2$.

Por outro lado, $-3 = a_1 = 2\sqrt{2} \left[-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$ e usando o fato de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, segue que $C_2 = -\frac{1}{2}$. Portanto,

$$a_n = (2\sqrt{2})^n \left[-2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right].$$

Exemplo 37 (Adaptação - (MORGADO; CARVALHO, 2022)). Em um jogo, em cada etapa, Noah pode fazer 1 ou 2 pontos. De quantos modos ele pode totalizar n pontos?

Solução. Seja x_n a quantidade de modos distintos de Noah fazer n pontos. Ora, como em cada etapa, Noah faz 1 ou 2 pontos, segue que:

- $x_1 = 1$;
- $x_2 = 2$ (pode ser $1 + 1$ ou simplesmente 2);

Para que Noah obtenha $n + 2$ pontos, existem duas possibilidades:

1. Marcar 1 ponto na primeira etapa e $n + 1$ pontos nas etapas seguintes, o que pode ser feito de x_{n+1} modos distintos;
2. Marcar 2 pontos na primeira etapa e n pontos nas etapas seguintes, o que pode ser feito de x_n modos distintos.

Diante das possibilidades anteriores, segue que:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \Rightarrow \quad x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0.$$

A equação característica associada a equação homogênea anterior é $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Portanto, a equação geral de solução dessa recorrência é dada por:

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Utilizando as condições $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, obtemos $C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Logo,

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Exemplo 38. Para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ é par.

Solução. A ideia é mostrar que para todo n natural, o número $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ é solução de uma recorrência em que todos os termos da sequência são números pares.

Para todo número natural n , seja $x_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$. Note que:

$$\begin{cases} x_1 = (3 + \sqrt{5})^1 + (3 - \sqrt{5})^1 = 6 \\ x_2 = (3 + \sqrt{5})^2 + (3 - \sqrt{5})^2 = 28 \end{cases}.$$

Por outro lado, definindo $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})$ e $\lambda_2 = (3 - \sqrt{5})$, segue que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 6 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4 \end{cases},$$

o que revela que λ_1 e λ_2 são as raízes da equação quadrática $\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$. Mas, essa equação é a equação característica da equação de recorrência $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 4y_n = 0$, com $n \in \mathbb{N}$.

Mas ocorre que para todo número natural n , tem-se que:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 6y_{n+1} + 4y_n = 0 &\Rightarrow y_{n+2} = 6y_{n+1} - 4y_n \\ &\Rightarrow y_{n+2} = 2(3y_{n+1} - 2y_n). \end{aligned}$$

Perceba que se y_1 e y_2 forem pares, então a igualdade $y_{n+2} = 2(3y_{n+1} - 2y_n)$ nos garantirá que y_n será par para todo número natural n . Então, se conseguirmos fazer com que $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isso mostrará que x_n é par para todo número natural n . Mas como fazer isso? Vejamos:

Ora, como $\lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$ e $\lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$ são as raízes da equação característica da recorrência $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 4y_n = 0$, segue que a solução geral dessa recorrência é da forma:

$$\begin{aligned} y_n &= C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n \\ &= C_1 (3 + \sqrt{5})^n + C_2 (3 - \sqrt{5})^n. \end{aligned}$$

Assim, como $x_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n \forall n \in \mathbb{N}$, para que $x_n = y_n$, devemos ter que $C_1 = C_2 = 1$.

Desta forma, se tomarmos $C_1 = C_2 = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos que:

$$\begin{aligned} y_n &= 1 \cdot (3 + \sqrt{5})^n + 1 \cdot (3 - \sqrt{5})^n \\ &= (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n. \end{aligned}$$

Nesse caso, como os dois primeiros termos da sequência (y_n) são $y_1 = 6$ e $y_2 = 28$ e $y_{n+2} = 2(3y_{n+1} - 2y_n) \forall n \in \mathbb{N}$, então podemos garantir que $x_n = y_n$ é par para todo número natural n .

Agora trataremos o caso em a equação característica da recorrência linear de segunda ordem homogênea dada por $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0$, com P e Q reais não nulos, possui apenas uma raiz real (raiz dupla), isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

• Método de redução de ordem

Método para obter uma segunda solução para a recorrência linear de 2ª ordem homogênea com duas raízes iguais.

Teorema 3.12. *Se a equação característica da recorrência $Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0$, com A, B e C reais não nulos, possui apenas uma raiz real λ , então a solução geral da recorrência é dada por:*

$$x_n = C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. *Considere a recorrência:*

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0 \tag{3.15}$$

com A, B e C escalares e $A \cdot C \neq 0$. Consideremos ainda, que a recorrência (3.15) possui a propriedade que $\lambda = -\frac{B}{2A}$ é a única raiz da equação característica associada.

Então, $2A\lambda + B = 0$, $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ e $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$.

Queremos obter uma solução z_n que não seja múltipla de $y_n = \lambda^n$. Portanto, procuramos algo da forma $z_n = f(n) \cdot \lambda^n$ com f sendo uma função de n , não constante. Assim,

$$Ax_{n+2}^2 + Bx_{n+1}^2 + Cx_n^2 = 0$$

se, e somente se,

$$A\lambda^{n+2}f(n+2) + B\lambda^{n+1}f(n+1) + C\lambda^n f(n) = 0. \tag{3.16}$$

Como temos que $\lambda \neq 0$, podemos dividir a expressão de (3.16) por λ^n . E assim, obtemos:

$$A\lambda^2 f(n+2) + B\lambda f(n+1) + C f(n) = 0.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
 A\lambda^2 f(n+2) + B\lambda f(n+1) + Cf(n) &= 0 \\
 A\lambda^2 f(n+2) + A\lambda^2 f(n+1) - A\lambda^2 f(n+1) + B\lambda f(n+1) + Cf(n) &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] + \lambda [A\lambda + B] f(n+1) + Cf(n) &= 0. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Mas, como temos que λ é a única raiz da equação característica, segue que:

$$\begin{aligned}
 \lambda = -\frac{B}{2A} &\Leftrightarrow 2A\lambda + B = 0 \\
 &\Leftrightarrow A\lambda + (A\lambda + B) = 0 \\
 &\Leftrightarrow A\lambda + B = -A\lambda.
 \end{aligned}$$

Assim, substituindo $A\lambda + B = -A\lambda$ em (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] + \lambda [A\lambda + B] f(n+1) + Cf(n) &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] + \lambda [-A\lambda] f(n+1) + Cf(n) &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] + \lambda [-A\lambda] f(n+1) + Cf(n) + A\lambda^2 f(n) - A\lambda^2 f(n) &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] - A\lambda^2 [f(n+1) - f(n)] + Cf(n) - A\lambda^2 f(n) &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] - A\lambda^2 [f(n+1) - f(n)] + f(n) (C - A\lambda^2) &= 0.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ implica que $C = \frac{B^2}{4A}$. Assim, substituindo essa informação na última equação da expressão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] - A\lambda^2 [f(n+1) - f(n)] + f(n) (C - A\lambda^2) &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] - A\lambda^2 [f(n+1) - f(n)] + f(n) \left(\frac{B^2}{4A} - A\lambda^2 \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Veja que como $\lambda = -\frac{B}{2A}$ teremos que:

$$\frac{B^2}{4A} - A\lambda^2 = \frac{B^2}{4A} - A \left(-\frac{B}{2A} \right)^2 = \frac{B^2 - B^2}{4A} = 0.$$

Assim, teremos que:

$$\begin{aligned}
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] - A\lambda^2 [f(n+1) - f(n)] + f(n) \left(\frac{B^2}{4A} - A\lambda^2 \right) &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] - A\lambda^2 [f(n+1) - f(n)] + f(n) \cdot 0 &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1)] - A\lambda^2 [f(n+1) - f(n)] &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - f(n+1) - f(n+1) + f(n)] &= 0 \\
 A\lambda^2 [f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)] &= 0.
 \end{aligned}$$

Ora, $A \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, assim podemos dividir a última igualdade da expressão anterior por $A \cdot \lambda^2$. Logo, obteremos:

$$f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0,$$

ou ainda,

$$f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Veja que $\Delta f(n+1) = \Delta f(n)$ e isso significa que os pontos $(n, f(n))$ pertencem a uma reta de coeficiente angular igual a $m = \frac{f(n+1) - f(n)}{1}$. Ou seja, f é a restrição de uma função linear sobre \mathbb{N} .

Logo, $f(n) = Dn$ com $D \in \mathbb{R}$. E desta forma, temos que:

$$x_n^2 = f(n)\lambda^n = Dn\lambda^n.$$

Como as soluções $y_n = \lambda^n$ e $z_n = n\lambda^n$ são LI's (consultar item (b) do Exemplo 30), segue pelo Teorema 3.8 que todas as soluções para a recorrência (3.15) é escrita como combinação linear dessas duas soluções, ou seja,

$$x_n = C_1\lambda^n + C_2 \cdot n \cdot \lambda^n, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 39. Resolva a recorrência homogênea dada por $a_{n+1} + 6a_n + 9a_{n-1} = 0$ com as condições iniciais, $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

Solução.

A equação característica associada a recorrência homogênea é $r^2 + 6r + 9 = 0$, que tem raiz real dupla $r_1 = r_2 = -3$. Logo pelo Teorema 3.12 a solução geral é dada por:

$$a_n = C_1(-3)^n + C_2n(-3)^n.$$

Para determinar as constantes C_1 e C_2 , utilizaremos as condições iniciais e assim obtemos que $C_1 = -\frac{8}{9}$ e $C_2 = \frac{5}{9}$.

Portanto, a solução geral da recorrência será:

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{8}{9}(-3)^n + \frac{5}{9}n(-3)^n \\ &= \frac{(-3)^n}{9}(5n - 8). \end{aligned}$$

A sequência de Fibonacci, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ é definida por uma equação de recorrência linear homogênea de segunda ordem. Portanto, podemos utilizar a teoria desenvolvida anteriormente para estabelecer uma fórmula fechada para o seu n -ésimo termo, que será abordada no exemplo a seguir.

Exemplo 40. Usando a teoria das recorrências lineares de segunda ordem, deduza a famosa Fórmula de Binet para o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci, isto é, se $f(n)$ é definida por

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

então,

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Solução.

A equação característica é dada por $r^2 = r + 1$, ou seja, $r^2 - r - 1 = 0$. Desse modo, suas raízes serão:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Pelo Teorema 3.9 tem-se que:

$$f(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

Para determinar C_1 e C_2 , vamos utilizar as condições iniciais $f(0) = 1$ e $f(1) = 1$, assim resultaremos no seguinte sistema de equação:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema de equações, encontraremos $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Agora vamos resolver o Exemplo 31 do início da seção sobre recorrência linear de segunda ordem. Vamos relembra-lo.

Exemplo 41. Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

Solução.

Seja x_n a quantidade de sequências com n termos, todos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

Note que $x_1 = 3$, pois com apenas um termo, qualquer sequência não terá dois termos consecutivos iguais a 0, visto que com um termo só temos três opções a saber: (0), (1) ou (2) que são sequências com apenas um termo e em nenhuma delas há dois termos consecutivos iguais a 0.

No caso em que $n = 2$, isto é, sequências com dois termos, temos as seguintes possibilidades para que a sequência não possua dois termos consecutivos iguais a 0:

$$(0, 1); (0, 2); (1, 0); (1, 1); (1, 2); (2, 0); (2, 1) \text{ e } (2, 2),$$

o que revela que $x_2 = 8$. Agora consideremos uma sequência com $n \geq 3$ termos. Temos duas possibilidades, a saber:

- O primeiro termo da sequência é igual a 0. Nesse caso, o segundo termo da sequência não pode ser igual a 0 (já que estamos interessados nas sequências em que não há dois 0's consecutivos).

Dessa forma, existem duas possibilidades para o segundo termo da sequência (pode ser igual a 1 ou 2). Uma vez colocado o segundo termo da sequência, ainda existem $n - 2$ termos a serem colocados, que ainda devem respeitar a condição de não apresentarem dois 0's consecutivos, mas isso pode ser feito de x_{n-2} modos distintos. Pelo princípio fundamental da contagem, existem $2x_{n-2}$ sequências desse tipo.

- O primeiro termo da sequência não é igual a 0. Nesse caso, existem 2 possibilidades para o primeiro termo (pode ser igual a 1 ou 2). Uma vez preenchido o primeiro termo, ainda precisamos preencher os $n - 1$ termos restantes da sequência, o que pode ser feito de x_{n-1} modos distintos. Pelo princípio fundamental da contagem, existem $2x_{n-1}$ sequências desse tipo.

Diante do exposto, tem-se que $x_1 = 3$, $x_2 = 8$ e $x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$ para $n \geq 3$. Ora, como essa lei é de uma recorrência de segunda ordem homogênea, podemos utilizar a teoria apresentada nessa seção para exibir uma solução explícita para ela.

Com efeito, neste caso, a equação característica associada a recorrência homogênea $x_n - 2x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$ é $r^2 - 2r - 2 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{3}$. Pelo Teorema 3.9, segue que existem constantes C_1 e C_2 tais que:

$$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 (1 + \sqrt{3})^n + C_2 (1 - \sqrt{3})^n.$$

Por fim, como $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, segue-se que:

$$\begin{cases} C_1 (1 + \sqrt{3})^1 + C_2 (1 - \sqrt{3})^1 = 3 \\ C_1 (1 + \sqrt{3})^2 + C_2 (1 - \sqrt{3})^2 = 8 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema, encontraremos $C_1 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}$ e $C_2 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}$. Portanto, para todo $n \geq 3$, tem-se que:

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 (1 + \sqrt{3})^n + C_2 (1 - \sqrt{3})^n \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} (1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} (1 - \sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

Para finalizar essa subseção e a teoria básica das recorrências lineares de segunda ordem, apresentaremos as recorrências lineares de segunda ordem não homogêneas.

3.3.2 Resolução de recorrências lineares de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes

Lembrando que uma recorrência linear de segunda ordem são aquelas que podem ser escritas da seguinte maneira:

$$x_{n+2} + f(n)x_{n+1} + g(n)x_n + h(n) = 0$$

onde f, g e h são funções e $g(n) \neq 0$.

Agora trabalharemos com o caso em que f e g são funções constantes, com $g \neq 0$ e $h(n) \neq 0$, isto é, as recorrências lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes que podem ser escritas da seguinte maneira:

$$x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = h(n) \text{ com } P, Q \in \mathbb{R}, \text{ e } Q, h \neq 0.$$

O Teorema a seguir, mostra um processo para resolver algumas recorrências não homogêneas com coeficientes constantes.

Teorema 3.13. *Se a_n é uma solução particular da equação de recorrência não homogênea $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = h(n)$, então a sua solução geral é dada por $x_n = a_n + y_n$, onde y_n é a solução geral da recorrência homogênea associada, isto é, da recorrência:*

$$x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0,$$

e a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + Py_{n+1} + Qy_n = 0$.

Demonstração. *Inicialmente mostremos que $x_n = a_n + y_n$ é uma solução. Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na equação original, obtemos:*

$$\begin{aligned} x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n &= a_{n+2} + y_{n+2} + P(a_{n+1} + y_{n+1}) + Q(a_n + y_n) \\ &= \underbrace{a_{n+2} + Pa_{n+1} + Qa_n}_{=h(n)} + \underbrace{y_{n+2} + Py_{n+1} + Qy_n}_{=0} \\ &= h(n). \end{aligned}$$

Agora, vamos demonstrar que toda solução da recorrência $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = h(n)$ é da forma $x_n = a_n + y_n$, onde a_n é uma solução particular da mesma recorrência e y_n é uma solução da recorrência homogênea associada.

De fato, se x_n é a solução geral e a_n é uma solução particular da recorrência $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = h(n)$, vamos mostrar que $y_n = x_n - a_n$ é uma solução da recorrência homogênea associada. Com efeito,

$$\begin{aligned} (x_{n+2} - a_{n+2}) + P(x_{n+1} - a_{n+1}) + Q(x_n - a_n) &= \\ \underbrace{x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n}_{=h(n)} - \underbrace{(a_{n+2} + Pa_{n+1} + Qa_n)}_{=h(n)} &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $y_n = x_n - a_n$ é solução da recorrência homogênea $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0$, e assim, $y_n = x_n - a_n$ implica que $x_n = a_n + y_n$ é a solução geral da recorrência dada inicialmente.

Veja que substituindo $x_n = a_n + y_n$ na recorrência original, obtemos

$$\begin{aligned} a_{n+2} + y_{n+2} + P(a_{n+1} + y_{n+1}) + Q(a_n + y_n) &= h(n) \\ a_{n+2} + Pa_{n+1} + Qa_n + y_{n+2} + Py_{n+1} + Qy_n &= h(n). \end{aligned}$$

Mas, $a_{n+2} + Pa_{n+1} + Qa_n = h(n)$, pois a_n é solução da equação original. Logo, a equação se transformou em:

$$\begin{aligned} h(n) + y_{n+2} + Py_{n+1} + Qy_n &= h(n) \\ y_{n+2} + Py_{n+1} + Qy_n &= h(n) - h(n) \\ y_{n+2} + Py_{n+1} + Qy_n &= 0. \end{aligned}$$

■

O Teorema 3.13 mostra que a solução de uma recorrência não homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução da recorrência homogênea e uma solução qualquer da não homogênea. A solução da homogênea é fácil de encontrarmos conforme já abordamos na seção anterior e uma solução qualquer da recorrência não homogênea é encontrada por meio de tentativas. A solução particular da recorrência não homogênea deve ser escrita como uma combinação linear de um conjunto de funções capaz de gerar a função $h(n)$. Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 42. Resolva a recorrência linear de segunda ordem não homogênea dada por:

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 3n. \quad (3.18)$$

Solução.

A recorrência (3.18) tem equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Portanto, a solução da homogênea será:

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

Devemos agora, determinar uma solução particular a_n da recorrência (3.18), para que quando substituirmos a_n em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$ obtenhamos o $3n$. O problema é definir que tipo de função será a_n .

Observando a recorrência e olhando para o termo independente $h(n) = 3n$ podemos supor intuitivamente que a_n tem a forma de um polinômio de 1° grau. Assim, tentaremos $a_n = An + B$. Substituindo a_n em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 3n$ obtemos:

$$\begin{aligned} A(n+2) + B - 5[A(n+1) + B] + 6(An + B) &= 3n \\ (A - 5A + 6A)n + (2A + B - 5A - 5B + 6B) &= 3n \\ 2An - 3A + 2B &= 3n. \end{aligned}$$

Assim, teremos:

$$2An = 3n \Rightarrow A = \frac{3}{2} \quad e \quad -3A + 2B = 0 \Rightarrow B = \frac{3A}{2} = \frac{9}{4}.$$

Portanto, $a_n = An + B = \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}$ é uma solução particular para a recorrência não homogênea dada.

Mas pelo Teorema 3.13 a solução geral da recorrência não homogênea é dada pela soma de duas parcelas $x_n = a_n + y_n$, uma solução particular da recorrência não homogênea e outra solução da homogênea associada. Portanto, a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= a_n + y_n \\ &= \underbrace{C_1 2^n + C_2 3^n}_{=y_n} + \underbrace{\frac{3}{2}n + \frac{9}{4}}_{=a_n}. \end{aligned}$$

Como não foram fornecidas as condições iniciais, não é possível determinar os valores das constantes C_1 e C_2 .

Exemplo 43. Resolva a recorrência $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n^2$, sujeita às condições iniciais $x_1 = 28$ e $x_2 = 34$.

Solução.

A equação característica associada a equação homogênea é dada por $r^2 - 5r + 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Assim, a solução geral da equação homogênea é dada por: $y_n = C_1 2^n + C_2 3^n$.

Pelo Teorema 3.13, a solução geral da recorrência $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n^2$ é da forma $x_n = a_n + y_n$, onde a_n é uma solução particular dessa recorrência e y_n é a solução da recorrência homogênea que já encontramos.

Para determinar uma solução particular da recorrência $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n^2$, podemos raciocinar da seguinte forma: ora, como no termo independente $h(n) = 2n^2$

aparece o polinômio do segundo grau, podemos procurar uma solução particular do mesmo tipo, isto é, $a_n = An^2 + Bn + C$.

Substituindo a_n na recorrência $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n^2$, obtemos:

$$24An^2 + (-14A + 2B)n + (19A - 7B + 2C) = 2n^2.$$

Fazendo as devidas comparações, obtemos:

$$\begin{cases} 2A & = 2 \\ -14A + 2B & = 0 \\ 19A - 7B + 2C & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 7 \\ C = 15 \end{cases}.$$

Sendo assim, teremos que $a_n = An^2 + Bn + C = n^2 + 7n + 15$. Mas, a solução geral da recorrência é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ &= C_1 2^n + C_2 3^n + n^2 + 7n + 15. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como foram fornecidas as condições iniciais $x_1 = 28$ e $x_2 = 34$, podemos determinar as constantes C_1 e C_2 , substituindo essas condições em (3.19), obteremos:

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 + 23 & = 28 \\ 4C_1 + 9C_2 + 33 & = 34 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 7 \quad e \quad C_2 = -3.$$

Portanto, a solução geral da recorrência é dada por $x_n = 7 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n + n^2 + 7n + 15$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 44. Resolva a recorrência linear de segunda ordem não homogênea dada por:

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 3 \cdot 4^n.$$

Solução.

Perceba que a equação característica associada a recorrência homogênea é a mesma dos exemplos anteriores, portanto, segue a solução será $y_n = C_1 2^n + C_2 3^n$.

Agora, vamos procurar uma solução particular a_n para a recorrência não homogênea dada originalmente. Observando a recorrência, podemos supor que a_n seja uma soma de um constante com uma exponencial de base 4. Sendo assim, tentaremos $a_n = A + B4^n$.

Substituindo a_n na recorrência original, obtemos:

$$\begin{aligned} A + B4^{n+2} - 5(A + B4^{n+1}) + 6(A + B4^n) &= 1 + 3 \cdot 4^n \\ A - 5A + 6A + (16B - 20B + 6B)4^n &= 1 + 3 \cdot 4^n. \end{aligned}$$

Assim fazendo as devidas comparações, encontraremos os seguintes valores para as constantes, $A = \frac{1}{2}$ e $B = \frac{3}{2}$. Portanto, segue que $a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 4^n$.

Desta forma, a solução geral da recorrência é dada por:

$$\begin{aligned}x_n &= y_n + a_n \\ &= C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} 4^n.\end{aligned}$$

Nos 3 exemplos anteriormente, as tentativas de solução foram executadas com êxito, mas nem sempre a tentativa de resolução é imediata, podem ocorrer falhas e deve-se observar as composições das funções e tentar corrigir fazendo ajustes conforme verificaremos no exemplo a seguir.

Exemplo 45. Resolva a recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$.

Solução.

A equação característica associada a recorrência homogênea é $r^2 - 6r + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Portanto, a solução da equação homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é $y_n = C_1 2^n + C_2 4^n$.

Tentaremos agora, descobrir uma solução particular a_n para a recorrência não homogênea $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$.

Ora, se substituirmos a_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$, devemos encontrar $1 + 2^n$. Que tipo de função deve ser a_n ?

É bastante razoável imaginar que a_n seja a soma de um polinômio constante com uma exponencial de base 2. Tentaremos $a_n = A + B2^n$. Substituindo a_n na recorrência original, ou seja, em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$, encontraremos,

$$\begin{aligned}A + B2^{n+2} - 6(A + B2^{n+1}) + 8(A + B2^n) &= 1 + 2^n \\ (A - 6A + 8A) + (4B - 12B + 8B)2^n &= 1 + 2^n \\ 3A &= 1 + 2^n.\end{aligned}$$

Essa igualdade é impossível de ocorrer. A recorrência não admite solução da forma $a_n = A + B2^n$.

Parando para pensar no que aconteceu, verificamos que era óbvio que a nossa tentativa não podia dar certo. O espírito da nossa tentativa era tentar uma constante A para que obtivéssemos uma constante que igualaríamos a 1 e tentar $B2^n$ para gerar uma exponencial que pudéssemos igualar a 2^n .

É claro que o termo $B2^n$ não poderia cumprir o seu papel, pois, $B2^n$ é solução da homogênea (é a solução da homogênea que é obtida pondo $C_1 = B$ e $C_2 = 0$) e, substituída na equação, daria zero e não uma exponencial que pudéssemos igualar a 2^n .

Vamos corrigir a nossa tentativa para $a_n = A + Bn2^n$. Agora substituindo essa solução em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$, obteremos:

$$\begin{aligned} A + B(n+2)2^{n+2} - 6(A + B(n+1)2^{n+1}) + 8(A + Bn2^n) &= 1 + 2^n \\ A + 4B(n+2)2^n - 6(A + 2B(n+1)2^n) + 8(A + Bn2^n) &= 1 + 2^n \\ (A - 6A + 8A) + [(4B - 12B + 8B)n + (8B - 12B)]2^n &= 1 + 2^n \\ 3A - 4B2^n &= 1 + 2^n. \end{aligned}$$

Fazendo as comparações $3A = 1$ e $-4B2^n = 2^n$ encontraremos $A = \frac{1}{3}$ e $B = -\frac{1}{4}$.

Desta forma, teremos a solução particular da recorrência não homogênea de 2ª ordem, dada por:

$$a_n = A + Bn2^n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}n2^n.$$

Portanto, a solução geral da recorrência dada inicialmente é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ x_n &= C_12^n + C_24^n + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}n2^n. \end{aligned}$$

Exemplo 46. Resolva a recorrência linear de segunda ordem não homogênea dada por:

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n - 3^n.$$

Solução.

A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n - 3^n$ tem equação característica $r^2 - 6r + 9 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = 3$. Portanto, com temos uma raiz dupla, segue que a solução da homogênea será $y_n = C_13^n + C_2n3^n$.

Agora, iremos procurar uma solução particular para a recorrência não homogênea $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n - 3^n$.

Olhando para o termo independente, $h(n) = n - 3^n$, devemos encontrar uma solução a_n que ao ser substituída em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n$ resulte em $n - 3^n$. Então suponhamos que a_n seja a soma de um polinômio de 1º grau com uma exponencial de base 3, ou seja, $a_n = An + B + C3^n$.

Substituindo $a_n = An + B + C3^n$ em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n - 3^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} A(n+2) + B + C3^{n+2} - 6[A(n+1) + B + C3^{n+1}] + 9(An + B + C3^n) &= n - 3^n \\ (A - 6A + 9A)n + (2A + B - 6A - 6B + 9B) + (9C - 18C + 9C)3^n &= n - 3^n \\ 4An + (-4A + 4B) &= n - 3^n, \end{aligned}$$

onde concluímos que a igualdade é impossível de ocorrer.

Desta forma, a recorrência não admite solução na forma $a_n = An + B + C3^n$. O motivo da nossa tentativa não ter logado êxito, é o fato que $C3^n$ figura na solução da homogênea associada a recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n - 3$.

Fazendo um pequeno ajuste na tentativa para a solução particular, multiplicando nossa primeira por n , apenas na parte que figura na solução da homogênea $C3^n$, teremos a possível candidata a solução $a_n = An + B + Cn3^n$.

Efetuando o mesmo procedimento que fizemos para a primeira tentativa, obtemos:

$$(A - 6A + 9A)n + (2A + B - 6A - 6B + 9B) + 0 \cdot 3^n = n - 3^n$$

$$4An - 4A + 4B = n - 3^n.$$

No entanto, esta igualdade é impossível de ocorrer. Desta forma, a recorrência original, não admite solução particular na forma $a_n = An + B + Cn3^n$, e o motivo para a falha é o mesmo da tentativa anterior.

Novamente, tentaremos uma nova solução, modificando a parcela $Cn3^n$ para Cn^23^n , assim teremos a seguinte sequência $a_n = An + B + Cn^23^n$ como candidata a solução particular da recorrência não homogênea.

Substituindo $a_n = An + B + Cn^23^n$ na recorrência original, obtemos:

$$4An - 4A + 4B + 18C3^n = n - 3^n.$$

Fazendo as devidas comparações $4An = n$, $-4A + 4B = 0$ e $18C3^n = -3^n$, encontramos os seguintes valores para as constantes: $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$ e $C = -\frac{1}{18}$.

Portanto, uma solução particular da recorrência não homogênea é dada por:

$$a_n = An + B + Cn^23^n = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4} - \frac{1}{18}n^23^n.$$

Mas, a solução geral da recorrência não homogênea é dada como a soma da solução da equação homogênea associada y_n com a solução particular da equação não homogênea a_n , assim, segue que:

$$x_n = y_n + a_n$$

$$= C_13^n + C_2n3^n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{4} - \frac{1}{18}n^23^n.$$

No exemplo que acabamos de resolver, perceba que nossa tentativa foi bem sucedida a maneira que aumentamos o grau duas vezes, uma vez que as nossas tentativas anteriores figuravam na solução da homogênea associada.

Isso nos despertou interesse em pesquisar e analisar o porquê de multiplicar por n . Assim, pesquisando na literatura, em Morgado e Carvalho (2022) encontramos o seguinte “Sempre que na nossa tentativa algum bloco não cumprir seu papel, fazemos a correção aumentando o grau, isto é, multiplicando o bloco por n ”.

Porém, na literatura Brasileira consultada, não encontramos nenhum resultado matemático plausível que justifique a necessidade de se multiplicar o bloco por n , quando a tentativa para a solução particular da recorrência não homogênea figurar na solução homogênea associada, resolvendo à inconsistência de encontrar os valores para as constantes e conseqüentemente encontrar a solução particular da recorrência não homogênea procurada.

Encontramos na literatura Americana um resultado bem parecido, porém com uma demonstração bem ofuscada para um melhor entendimento, diferente do que apresentamos no nosso trabalho.

Diante disso, ficamos curiosos com esse resultado e apresentaremos um método para encontrarmos a solução particular para a recorrência não homogênea, reduzindo a quantidade de tentativas na busca pela tal solução particular. Esse método será abordado no próximo capítulo e isso é um dos grandes diferenciais que podemos encontrar nesse trabalho!

4 Solução particular da recorrência linear de 2ª ordem não homogênea

Neste capítulo iremos abordar alguns resultados necessários que utilizaremos no desenvolvimento do método que visa minimizar a quantidade de tentativas para a solução particular da recorrência linear de segunda ordem não homogênea. Em seguida, iremos testar o método em alguns exemplos para validarmos a sua eficácia.

4.1 Método dos coeficientes a determinar

Teorema 4.1. *Considere a recorrência*

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2 \equiv h(n) \quad (4.1)$$

onde A, B e C são escalares com $A \cdot C \neq 0$. Então, existe uma solução particular de (4.1) na forma:

$$a_n = n^s(c_0 + c_1n + c_2n^2) \quad (4.2)$$

onde $s = 0, 1$ ou 2 deve ser escolhido de forma apropriada.

Demonstração. *Vamos dividir em casos:*

- Caso 1: *Suponha que $r = 1$ não é raiz da equação característica da equação homogênea associada a recorrência (4.1). Assim teremos:*

$$Ar^2 + Br + C = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Como $r = 1$ não é raiz da equação característica associada, tem-se que $\Psi(1) \neq 0$, onde $\Psi(r) = Ar^2 + Br + C$. Sendo assim, segue que:

$$A + B + C \neq 0.$$

Vamos mostrar que, $a_n = (c_0 + c_1n + c_2n^2)$ é uma solução particular de (4.1), onde os coeficientes c_0, c_1 e c_2 são determinados apropriadamente e foi considerado ($s = 0$) em (4.2).

Com efeito, temos que:

$$Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2,$$

se e somente se,

$$A [c_0 + c_1(n+2) + c_2(n+2)^2] + B [c_0 + c_1(n+1) + c_2(n+1)^2] + C(c_0 + c_1n) + Cc_2n^2 = h(n).$$

Ou ainda, se e somente se,

$$\begin{cases} (A+B+C)c_0 + (2A+B)c_1 + (4A+B)c_2 = \alpha \\ (A+B+C)c_1 + (4A+2B)c_2 = \beta \\ (A+B+C)c_2 = \gamma \end{cases}$$

Ou, equivalentemente,

$$(S) \begin{bmatrix} A+B+C & 2A+B & 4A+B \\ 0 & A+B+C & 4A+2B \\ 0 & 0 & A+B+C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (S) é não nulo, ou seja, igual a $(A+B+C)^3$, segue que existem e são únicos os escalares c_0, c_1 e c_2 que determinam a_n .

- Caso 2: Suponha que $r = 1$ é uma raiz simples da equação característica da equação homogênea associada a recorrência (4.1). Assim teremos:

$$Ar^2 + Br + C = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Como $r = 1$ é uma raiz simples da equação característica associada, teremos que:

$$A + B + C = 0.$$

Como 1 é raiz simples, então teremos que:

$$\begin{aligned} Ar^2 + Br + C &= (r-1)(Ar + A + B) + (A + B + C) \\ &= (r-1)(Ar + A + B), \end{aligned}$$

uma vez que $A + B + C = 0$.

Como $r = 1$ é raiz simples, então $Ar + A + B$ não admite 1 como raiz. Daí:

$$A \cdot 1 + A + B = 2A + B \neq 0.$$

Agora mostremos que, $a_n = n(c_0 + c_1n + c_2n^2)$ é uma solução particular de (4.1), onde os coeficientes c_0, c_1 e c_2 são determinados de forma apropriada e se foi tomado igual a 1 em (4.2).

Sendo assim,

$$Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = \alpha + \beta \cdot n + \gamma \cdot n^2$$

se e somente se,

$$\begin{aligned} (2A+B)c_0 + (4A+B)c_1 + (8A+B)c_2 + (A+B+C)c_0 + [(A+B+C)c_0 + (4A+2B)c_1]n + \\ + [(12A+3B)c_2]n + [(A+B+C)c_1 + (6A+3B)c_2]n^2 + [(A+B+C)c_2]n^3 \\ = \alpha + \beta \cdot n + \gamma \cdot n^2. \end{aligned}$$

Como $A+B+C=0$ e $2A+B \neq 0$, da igualdade de polinômios como um sistema, podemos reescrever a última igualdade:

$$\begin{cases} (2A+B)c_0 + (4A+B)c_1 + (8A+B)c_2 = \alpha \\ 2(2A+B)c_1 + 3(4A+B)c_2 = \beta \\ 3(2A+B)c_2 = \gamma \end{cases}$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} (2A+B) & (4A+B) & (8A+B) \\ 0 & 2(2A+B) & 3(4A+B) \\ 0 & 0 & 3(2A+B) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes do sistema acima é igual a:

$$3 \cdot 2 \cdot (2A+B)^3 \neq 0,$$

o sistema possui uma única solução c_0, c_1 e c_2 .

- Caso 3: Suponha que $r=1$ é uma raiz dupla da equação característica da equação homogênea associada a recorrência (4.1). Neste caso, teremos $A+B+C=0$, $2A+B=0$ e $A=C$. Novamente, vamos mostrar que existe uma solução a_n na forma:

$$a_n = n^2(x_0 + x_1n + x_2n^2),$$

neste caso, foi considerado $s=2$ em (4.2).

Com efeito,

$$Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = h(n)$$

se e somente se,

$$\begin{aligned} A [c_0(n+2)^2 + c_1(n+2)^3 + c_2(n+2)^4] + B [c_0(n+1)^2 + c_1(n+1)^3 + c_2(n+1)^4] \\ + C [c_0n^2 + c_1n^3 + c_2n^4] = h(n). \end{aligned}$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} (4A + B)c_0 + (8A + B)c_1 + (16A + B)c_2 & = \alpha \\ 2(2A + B)c_0 + 3(4A + B)c_1 + 4(8A + B)c_2 & = \beta \\ (A + B + C)c_0 + 3(2A + B)c_1 + 6(4A + B)c_2 & = \gamma \end{cases}$$

Como $A + B + C = 0$ e $2A + B = 0$, resulta a igualdade:

$$\begin{cases} (4A + B)c_0 & + & (8A + B)c_1 + (16A + B)c_2 & = \alpha \\ 0 & + & 3(4A + B)c_1 + 4(8A + B)c_2 & = \beta \\ 0 & + & 0 & + (4A + B)c_2 & = \gamma \end{cases}$$

Como $2A + B = 0 \Rightarrow B = -2A$, resulta que o determinante da matriz dos coeficientes, dado por:

$$3(4A + B)^3 = 3(4A - 2A)^3 = 3(2A)^3 = 24A^3 \neq 0.$$

Desta forma, o sistema possui solução única no formato $a_n = n^2(c_0 + c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2)$. ■

Aqui, cabe a seguinte observação.

Observação 4.1.1. No caso 2, a solução geral da homogênea associada é dada por:

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

onde $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 \neq 1$. Ou seja, a solução constante é uma solução da homogênea associada, por isso ela não deve configurar como parte da solução particular a ser determinada.

No caso 3, a solução geral da homogênea associada é:

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_2^n,$$

com $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, assim, $x_n^H = C_1 + C_2n$. Logo, tanto C_1 quanto C_2n são soluções da homogênea associada e por isso, elas não devem configurar como parte da solução particular para a recorrência dada. Havendo assim, necessidade de multiplicar por n^2 para retirar os termos C_1 e C_2n da solução particular.

Teorema 4.2. Considere a recorrência

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = h(n) \cdot \lambda^n \quad (4.3)$$

onde, A, B e C são escalares com $A \cdot C \neq 0$, $h(n) = \alpha + \beta \cdot n + \beta \cdot n^2$ e λ é um número real diferente de 0 e de ± 1 . Então, a recorrência (4.3) possui uma solução particular da forma:

$$a_n = n^s(c_0 + c_1n + c_2n^2)\lambda^n,$$

com $s = 0, 1$ ou 2 .

Demonstração. Considere a seguinte substituição $y_n = a_n \lambda^n$. Desta forma,

$$\begin{aligned} h(n)\lambda^n = Ay_{n+2} + By_{n+1} + Cy_n &= Aa_{n+2}\lambda^{n+2} + Ba_{n+1}\lambda^{n+1} + Ca_n\lambda^n \\ &= \lambda^n (A\lambda^2 a_{n+2} + B\lambda a_{n+1} + Ca_n). \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq \pm 1$, segue que:

$$A\lambda^2 a_{n+2} + B\lambda a_{n+1} + Ca_n = h(n)$$

Ou ainda,

$$Da_{n+2} + Ea_{n+1} + Fa_n = h(n), \quad (4.4)$$

onde, $D = A\lambda^2$, $E = B\lambda$ e $F = C$.

Note que $D \cdot F = A\lambda^2 \cdot C \neq 0$, pois $A \cdot C \neq 0$ e $\lambda \neq 0$.

Do Teorema 3.4, existem constantes c_0, c_1, c_2 e $s \in \{0, 1, 2\}$ talque:

$$a_n = n^s (c_0 + c_1 n + c_2 n^2)$$

é solução de (4.4) e conseqüentemente,

$$y_n = a_n \lambda^n = \lambda^n \cdot n^s (c_0 + c_1 n + c_2 n^2)$$

é uma solução particular de (4.3). ■

4.2 Caso Geral

Iniciamos considerando o termo não homogêneo como um polinômio na variável n .

Teorema 4.3. Considere a recorrência

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = g(n) = \sum_{i=0}^m a_i n^i, \quad (4.5)$$

onde A, B e C são escalares com $A \cdot C \neq 0$. Existe uma solução particular da recorrência na forma:

$$a_n = n^s \left(\sum_{i=0}^m c_i n^i \right),$$

onde $s = 0, 1$ ou 2 deve ser escolhido de forma apropriada.

Demonstração. A equação característica associada a recorrência homogênea é dada por:

$$Ar^2 + Br + C = 0.$$

Note que $C \neq 0$, pois caso contrário, a recorrência seria de primeira ordem, e esse caso já foi trabalhado no capítulo anterior.

• Caso 1: ($s = 0$).

Neste caso, vamos admitir que a solução particular da recorrência (4.5) seja da forma:

$$a_n = P(n) = \sum_{i=0}^m c_i n^i,$$

ou seja, estamos supondo que $r = 1$ não é raiz da equação característica da homogênea associada a recorrência dada inicialmente (4.5). Neste caso, temos que $A + B + C \neq 0$.

Ora, vamos mostrar que $a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots + c_m n^m$ é uma solução particular de (4.5), onde os coeficientes c_0, c_1, \dots, c_m são determinados apropriadamente. Com efeito,

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^m c_i (n+1)^i = \sum_{i=0}^m c_i \left\{ \binom{i}{0} n^i + \binom{i}{1} n^{i-1} \cdot 1 + \dots + \binom{i}{i} 1^i \right\}$$

e

$$a_{n+2} = \sum_{i=0}^m c_i (n+2)^i = \sum_{i=0}^m c_i \left\{ \binom{i}{0} n^i + \binom{i}{1} n^{i-1} \cdot 2 + \dots + \binom{i}{i} 2^i \right\}.$$

Assim,

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i,$$

se, e somente se,

$$A \left\{ \sum_{i=0}^m c_i \left[\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} n^{i-j} \cdot 2^j \right] \right\} + B \left\{ \sum_{i=0}^m c_i \left[\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} n^{i-j} \right] \right\} + C \sum_{i=0}^m c_i n^i = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i.$$

Logo,

$$Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \dots + \alpha_k n^k + \dots + \alpha_m n^m$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \left\{ A \left[\binom{0}{0} c_0 + \binom{1}{1} 2c_1 + \dots + \binom{m}{m} 2^m c_m \right] + B \left[\binom{0}{0} c_0 + \binom{1}{1} c_1 + \dots + \binom{m}{m} c_m \right] + Cc_0 \right\} \\ & + \left\{ A \left[\binom{1}{0} c_1 + \binom{2}{1} 2c_2 + \dots + \binom{m}{m-1} 2^{m-1} c_m \right] + B \left[\binom{1}{0} c_1 + \binom{2}{1} c_2 + \dots + \binom{m}{m-1} c_m \right] + Cc_1 \right\} n + \\ & + \left\{ A \left[\binom{2}{0} c_2 + \binom{3}{1} 2^1 c_3 + \dots + \binom{m}{m-2} 2^{m-2} c_m \right] + B \left[\binom{2}{0} c_2 + \binom{3}{1} c_3 + \dots + \binom{m}{m-2} c_m \right] + Cc_2 \right\} n^2 + \\ & \quad \quad \quad + \dots + \\ & + \left\{ A \left[\binom{m-1}{0} c_{m-1} + \binom{m}{1} 2^1 c_m \right] + B \left[\binom{m-1}{0} c_{m-1} + \binom{m}{1} c_m \right] + Cc_{m-1} \right\} n^{m-1} + \\ & \quad \quad \quad + \left[A \binom{m}{0} c_m + B \binom{m}{0} c_m + Cc_m \right] n^m = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i. \end{aligned}$$

Por comparação, temos,

$$A \left[\sum_{j=0}^{m-k} \binom{k+j}{j} 2^j c_{k+j} \right] + B \left[\sum_{j=0}^{m-k} k + j^j c_{k+j} \right] + C c_k = \alpha_k$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m$.

Ou matricialmente,

$$(S) \begin{bmatrix} \binom{0}{0}[A+B+C] & \binom{1}{1}[2A+B] & \cdots & \binom{m}{m}[2^m A+B] \\ 0 & \binom{1}{0}[A+B+C] & \cdots & \binom{m}{m-1}[2^{m-1}A+B] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{m}{0}[A+B+C] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

Uma vez que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (S) é igual á:

$$\prod_{k=0}^m \binom{k}{0} \cdot (A+B+C)^{m+1} \neq 0,$$

segue que existem e são únicos os escalares c_0, c_1, \dots, c_m que determinam a_n .

• Caso 2: ($s = 1$).

Suponha que $r = 1$ é uma raiz simples da equação característica da homogênea associada à equação (4.5).

Neste caso, $A + B + C = 0$ e $2A + B \neq 0$. Vamos mostrar que

$$a_n = n \sum_{i=0}^m c_i n^i = n (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots + c_m n^m)$$

é uma solução particular de (4.5) para $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ determinados de forma apropriada.

Assim, $Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i$, se, e somente se,

$$A \left[\sum_{i=0}^m (n+2)^{i+1} c_i \right] + B \left[\sum_{i=0}^m (n+1)^{i+1} c_i \right] + C \sum_{i=0}^m n^{i+1} c_i = \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \dots + \alpha_m n^m,$$

se, e somente se,

$$A \left\{ \left[\binom{1}{0} n + \binom{1}{1} 2 \right] c_0 + \left[\binom{2}{0} n^2 + \binom{2}{1} n \cdot 2 + \binom{2}{2} 2^3 \right] c_1 + \dots + \left[\binom{m+1}{0} n^{m+1} + \dots + \binom{m+1}{m+1} 2^{m+1} \right] c_m \right\} \\ + B \left\{ \left[\binom{1}{0} n + \binom{1}{1} \right] c_0 + \left[\binom{2}{0} n^2 + \binom{2}{1} n + \binom{2}{2} \right] c_1 + \dots + \left[\binom{m+1}{0} n^{m+1} + \dots + \binom{m+1}{m+1} \right] c_m \right\} \\ + C \sum_{i=0}^m n^{i+1} c_i = \alpha_1 n + \dots + \alpha_m n^m$$

Ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \binom{1}{1}(2A+B) & \binom{2}{2}(2^2A+B) & \binom{3}{3}(2^3A+B) & \cdots & \binom{m+1}{m+1}(2^{m+1}A+B) \\ 0 & \binom{2}{1}(2A+B) & \binom{3}{2}(2^2A+B) & \cdots & \binom{m+1}{m+1}(2^m A+B) \\ 0 & 0 & \binom{3}{2}(2^2A+B) & \cdots & \binom{m+1}{m-1}(2^{m-1}A+B) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{m+1}{m}(2A+B) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema acima é igual à:

$$(m+1)! \cdot (2A+B)^{m+1} \neq 0,$$

o sistema tem uma única solução dada por c_0, c_1, \dots, c_m , uma vez que $2A+B \neq 0$.

• Caso 3: ($s = 2$).

Suponha que $r = 1$ é uma raiz dupla da equação característica da homogênea associada à equação (4.5).

Neste caso, $A+B+C = 0$, $2A+B = 0$ e $A = C$. Novamente, vamos mostrar que existe uma solução a_n na forma:

$$a_n = n^2 \sum_{i=0}^m c_i n^i = n^2 (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_m n^m)$$

em que $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ são determinados de forma apropriada.

Com efeito,

$$Axa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i$$

se, e somente se,

$$A(n+2)^2 \left[\sum_{i=0}^m (n+2)^i c_i \right] + B(n+1)^2 \left[\sum_{i=0}^m (n+1)^i c_i \right] + Cn^2 \sum_{i=0}^m c_i n^i = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i.$$

Se, e somente se,

$$\begin{aligned} & A(n+2)^2 [c_0 + c_1(n+2) + c_2(n+2)^2 + c_3(n+2)^3 + \cdots + c_m(n+2)^m] + \\ & + B(n+1)^2 [c_0 + c_1(n+1) + c_2(n+1)^2 + c_3(n+1)^3 + \cdots + c_m(n+1)^m] + \\ & C(c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_m n^m) = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i. \end{aligned}$$

Ou ainda, se, e somente se,

$$\begin{aligned}
 & A(n^2 + 4n + 4) \left\{ c_0 + c_1(n + 2) + c_2(n^2 + 2n + 4) + c_3 \left[\binom{3}{0} n^3 + \binom{3}{1} 2n^2 + \dots + \binom{3}{3} 2^3 \right] + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \dots + c_m \left[\binom{m}{0} n^m + \binom{m}{1} 2n^{m-1} + \dots + \binom{m}{m} 2^m \right] \right\} \\
 & + B(n^2 + 2n + 1) \left\{ c_0 + c_1(n + 1) + c_2(n + 1)^2 + c_3 \left[\binom{3}{0} n^3 + \binom{3}{1} n^2 + \dots + 1 \right] + \dots + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + c_m \left[\binom{m}{0} n^m + \dots + \binom{m}{m} \right] \right\} + C (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots + c_m n^m) = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i.
 \end{aligned}$$

Equivalente à:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (2^2 A + B + C)c_0 + (2^3 A + B)c_1 + (2^4 A + B)c_2 + \dots + (2^{m+2} A + B)c_m \right\} + \\
 & + n \left\{ (2^2 A + B)c_0 + (2^3 A + B + C)c_1 + (2^4 A + B)c_2 + \dots + (2^{m+2} A + B)c_m \right\} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \dots + \\
 & + n^m \left\{ \left[2^2 A + 2^3 \binom{m}{1} + 2^2 A \binom{m}{2} + 2B \binom{m}{1} + \binom{m}{2} B + C \right] c_m \right\} = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i.
 \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} \binom{1}{1}(3A) & \binom{2}{2}(6A) & \dots & \binom{m+1}{m+1}(2^m A) \\ 0 & 6A & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema acima é não nulo, tem-se que o sistema admite uma única solução com: $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$.

Como segundo caso, consideremos o termo não homogêneo abordado anteriormente multiplicado pelo fator λ^n .

Teorema 4.4. Considere a recorrência

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i n^i \right) \lambda^n. \tag{4.6}$$

onde A, B e C são escalares com $A \cdot C \neq 0$, $h(n) = \sum_{i=0}^m \alpha_i n^i = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_m n^m$ e λ é um número real diferente de 0 e ± 1 . Então, a recorrência (4.6) possui uma solução particular na forma:

$$a_n = n^s \left(\sum_{i=0}^m c_i n^i \right) \lambda^n$$

com $s = 0, 1$ ou 2 .

Demonstração. Considere a seguinte substituição, $a_n = b_n^P \lambda^n$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} h(n)\lambda^n &= Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n \\ &= Ab_{n+2}\lambda^{n+2} + Bb_{n+1}\lambda^{n+1} + Cb_n\lambda^n \\ &= \lambda^n (Ab_{n+2} + B\lambda b_{n+1} + Cb_n). \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq \pm 1$, segue que:

$$D\lambda_{n+2} + E\lambda_{n+1} + F\lambda_n = h(n), \quad (4.7)$$

com $D = A\lambda^2$, $E = B\lambda$ e $F = C$. Note que $D \cdot F = A\lambda^2 C \neq 0$.

Do Teorema 4.3, existem constantes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ e $s \in \{0, 1, 2\}$ tal que:

$$a_n = n^s \left(\sum_{i=0}^m c_i n^i \right)$$

é solução de (4.7) e conseqüentemente,

$$a_n = b_n \lambda^n = n^s \lambda^n (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots + c_m n^m)$$

é uma solução particular de (4.6).

4.3 Resolução de questões de recorrências lineares de 2ª ordem não homogênea via método apresentado

Nesta seção faremos uso do método desenvolvido para resolver algumas questões de recorrências lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes.

Exemplo 47. Resolva a recorrência linear de segunda ordem não homogênea dada por:

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + 4. \quad (4.8)$$

Solução.

A recorrência (4.8) é uma recorrência linear de 2ª ordem não homogênea com coeficientes constantes. Portanto pelo Teorema 3.13, a solução geral de tal recorrência é composta por duas parcelas, sendo uma delas a solução da recorrência homogênea associada (y_n) e a outra é uma solução particular para a recorrência não homogênea (a_n). Ou seja,

$$x_n = y_n + a_n.$$

Sendo assim, a equação da recorrência homogênea associada é dada por:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0. \quad (4.9)$$

Podemos associar a equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ à recorrência apresentada e, conforme vimos no Exemplo 42 a solução geral da equação homogênea é dada por:

$$y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n. \quad (4.10)$$

Agora, vamos determinar uma solução particular para a recorrência (4.8). Como o termo independente dessa recorrência é $h(n) = 4$, ou seja, uma constante, a solução terá o seguinte formato:

$$a_n = n^s(A),$$

onde A é uma constante e $s \in \{0, 1, 2\}$ é escolhido de forma apropriada.

Como a solução geral apresentada em (4.10) não contém em nenhuma de suas parcelas, partes do termo independente, segue que podemos tomar $s = 0$ na expressão anterior e portanto, a solução particular é dada por:

$$a_n = n^0 \cdot A = A. \quad (4.11)$$

Substituindo a solução particular a_n em:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4,$$

obtemos:

$$A - 5A + 6A = 4 \quad \Rightarrow \quad A = 2.$$

Portanto, a solução particular é dada por: $a_n = A = 2$, e assim, a solução geral da recorrência apresentada em (4.8) é dada por:

$$x_n = y_n + a_n \quad (4.12)$$

$$= C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 2. \quad (4.13)$$

Como não foi fornecida nenhuma informação a respeito das condições iniciais, não é possível determinar os valores das constantes C_1 e C_2 .

Exemplo 48. (SILVA et al., 2020) Resolver a recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 6 - 8n$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 4$.

Solução.

A solução dessa recorrência é obtida de modo totalmente análogo ao utilizado no problema anterior. Sendo assim, a solução geral da homogênea é dada por:

$$y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 (-3)^n + C_2 \cdot 2^n.$$

Agora, vamos determinar uma solução particular para a recorrência linear de 2ª ordem não homogênea dada inicialmente. Como o termo independente é $h(n) = 6 - 8n$, ou seja, é um polinômio de grau 1 em n , significa que pelo método que trabalhamos anteriormente, a solução particular é da forma:

$$a_n = n^s(An + B),$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ é escolhido de forma apropriada.

Veja que como na solução geral da homogênea figura termos exponenciais, e o termo independente figura apenas termos polinomiais, significa que podemos tomar $s = 0$ pois $r = 1$ não é raiz da equação característica associada e assim a solução particular terá o seguinte formato:

$$a_n = n^0(An + B) = An + B.$$

Substituindo $a_n = An + B$ na recorrência linear de 2ª ordem não homogênea:

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 6 - 8n,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} [A(n+2) + B] + [A(n+1) + B] + -6[An + B] &= 6 - 8n \\ (A + A - 6A)n + (2A + B + A + B - 6B) &= -8n + 6 \\ -4An + (3A - 5B) &= -8n + 6. \end{aligned}$$

Fazendo a comparação de polinômios, obtemos que:

$$\begin{cases} -4A = -8 \\ 3A - 5B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \end{cases}.$$

Logo, a solução particular da recorrência não homogênea será:

$$a_n = An + B = 2n.$$

Desta forma, pelo Teorema 3.13 a solução geral da recorrência não homogênea é dada por:

$$x_n = y_n + a_n = C_1(-3)^n + C_2 \cdot 2^n + 2n.$$

Para determinar os valores das constantes C_1 e C_2 , vamos aplicar as condições $x_0 = 1$ e $x_1 = 4$ e resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -3C_1 + 2C_2 + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2C_1 - 2C_2 = -2 \\ -3C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Portanto, a solução geral da recorrência linear de 2ª ordem não homogênea é dada por:

$$\begin{aligned}x_n &= C_1(-3)^n + C_2 \cdot 3^n + 2n \\ &= 2^n + 2n.\end{aligned}$$

Exemplo 49. Resolva a recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = (n+2)2^n$.

Solução.

Como iremos resolver uma recorrência linear de 2ª ordem não homogênea, a solução geral pelo Teorema 3.13 é dada por:

$$x_n = y_n + a_n,$$

onde y_n é a solução da homogênea associada e a_n é uma solução particular para a recorrência não homogênea.

Vamos inicialmente encontrar a solução y_n . Conforme vimos nos exemplos anteriores, a a solução geral da homogênea é dada por:

$$\begin{aligned}y_n &= C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n \\ &= C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n.\end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar uma solução particular para a recorrência não homogênea. Como o termo independente é $h(n) = P(n) \cdot 2^n$, onde P é um polinômio de grau 1 em n . Assim, pelo método que apresentamos nesse trabalho, devemos procurar uma solução particular na forma:

$$a_n = n^s(An + B)2^n,$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ deve ser escolhido de forma apropriada.

Para $s = 1$, teremos $a_n = n(An + B)3^n = (An^2 + Bn)3^n$, que não figura na homogênea e portanto será uma solução para a não homogênea.

Substituindo $a_n = (An^2 + Bn)2^n$ em:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = (n+2) \cdot 2^n,$$

teremos,

$$\begin{aligned}4[A(n+2)^2 + B(n+2)] - 10[A(n+1)^2 + B(n+1)]2^{n+1} + 6(An^2 + Bn) &= n+2 \\ 0n^2 + (-4A)n + (6A - 2B) &= n+2.\end{aligned}$$

Fazendo a comparação de polinômios, obtemos:

$$\begin{cases} -4A &= 1 \\ 6A - 2B &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= \frac{-1}{4} \\ B &= \frac{-7}{4} \end{cases}.$$

Logo, a solução particular é dada por:

$$\begin{aligned} a_n &= (An^3 + Bn)2^n \\ &= \left(-\frac{1}{4}n^2 - \frac{7}{4}n\right)2^n. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da recorrência não homogênea apresentada inicialmente é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ &= C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n + \left(-\frac{1}{4}n^2 - \frac{7}{4}n\right)2^n \\ &= C_1 \cdot 3^n + \left(-\frac{1}{4}n^2 - \frac{7}{4}n + C_2\right)2^n. \end{aligned}$$

Exemplo 50. Resolva a recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n \cdot 3^n$.

Solução.

Como iremos resolver uma recorrência linear de 2ª ordem não homogênea, a solução geral pelo Teorema 3.13 é dada por:

$$x_n = y_n + a_n,$$

onde y_n é a solução da homogênea associada e a_n é uma solução particular para a recorrência não homogênea.

Vamos inicialmente encontrar a solução y_n . Sendo assim, a recorrência homogênea é $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0$ ao qual associamos a equação característica $r^2 - 6r + 9 = 0$, cujas raízes são: $r_1 = r_2 = 3$.

Como as raízes da equação característica são iguais, temos pelo Teorema 3.12 que a solução geral da homogênea é dada por:

$$\begin{aligned} y_n &= C_1 r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n \\ &= C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n. \end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar uma solução particular para a recorrência não homogênea. Como o termo independente é $h(n) = P(n) \cdot 3^n$, onde P é um polinômio de grau 1 em n . Assim, pelo método que apresentamos nesse trabalho, devemos procurar uma solução particular na forma:

$$a_n = n^s(An + B)3^n,$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ deve ser escolhido de forma apropriada.

Veja que se tomarmos $s = 0$, teríamos a solução $a_n = (An + B)3^n = B \cdot 3^n + An \cdot 3^n$, que não serve, pois esses termos figuram na solução y_n da equação homogênea.

Para $s = 1$, teremos $a_n = n(An + B)3^n = (An^2 + Bn)3^n = An^2 \cdot 3^n + Bn \cdot 3^n$, que também não serve, pois um de seus termos figura na solução da homogênea.

Finalmente, se tomarmos $s = 2$, temos $a_n = n^2(An + B)3^n = (An^3 + Bn^2)3^n$, que não figura em y_n e portanto será uma solução particular a ser determinada.

Substituindo $a_n = (An^3 + Bn^2)3^n$ em:

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = n \cdot 3^n,$$

teremos,

$$\begin{aligned} [A(n+2)^3 + B(n+2)^2] 3^{n+2} - 6[A(n+1)^3 + B(n+1)^2] 3^{n+1} + 9(An^3 + Bn^2)3^n &= n3^n \\ 9[A(n+2)^3 + B(n+2)^2] - 18[A(n+1)^3 + B(n+1)^2] + 9(An^3 + Bn^2) &= n \\ (0)n^3 + (0)n^2 + (54A)n + (54A + 18B) &= n \end{aligned}$$

Fazendo a comparação de polinômios, obtemos:

$$\begin{cases} 54A &= 1 \\ 54A + 18B &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= \frac{1}{54} \\ B &= \frac{-1}{18} \end{cases}.$$

Logo, a solução particular é dada por:

$$\begin{aligned} a_n &= (An^3 + Bn^2)3^n \\ &= \left(\frac{1}{54}n^3 - \frac{1}{18}n^2\right)3^n. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da recorrência não homogênea fornecida inicialmente é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ &= C_1 3^n + C_2 n 3^n + \left(\frac{1}{54}n^3 - \frac{1}{18}n^2\right)3^n \\ &= \left(C_1 + C_2 n + \frac{1}{54}n^3 - \frac{1}{18}n^2\right)3^n. \end{aligned}$$

Exemplo 51. Resolva a recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$.

Solução.

Como iremos resolver uma recorrência linear de 2ª ordem não homogênea, a solução geral pelo Teorema 3.13 é dada por:

$$x_n = y_n + a_n,$$

onde y_n é a solução da homogênea associada e a_n é uma solução particular para a recorrência não homogênea.

A solução geral da homogênea é dada por:

$$\begin{aligned} y_n &= C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n \\ &= C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n. \end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar uma solução particular para a recorrência não homogênea. Como o termo independente é composto de dois termos, ou seja, $h(n) = i(n) + j(n)$ onde $i(n) = A$ e $j(n) = B2^n$. Teremos que uma solução para a recorrência não homogênea é dada por:

$$a_n = b_n + c_n,$$

onde b_n é uma solução particular da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1$ e c_n é uma solução da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 2^n$.

Assim, pelo método que apresentamos nesse trabalho, devemos procurar uma solução particular na forma:

$$b_n = n^s(A),$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ deve ser escolhido de forma apropriada.

Veja que se tomarmos $s = 0$, teremos que $b_n = A$ é uma solução, uma vez que o termo constante não figura na solução encontrada para a homogênea y_n .

Substituindo $b_n = A$ em:

$$b_{n+2} - 6b_{n+1} + 8b_n = 1,$$

teremos,

$$A - 6A + 8A = 1.$$

Fazendo a comparação de polinômios, obtemos que $3A = 1$, o que implica que $A = \frac{1}{3}$. Sendo assim, teremos que $b_n = \frac{1}{3}$.

Agora vamos encontrar a solução particular c_n . Pelo método apresentado nesse trabalho, devemos procurar uma solução na forma:

$$c_n = n^s \cdot A2^n,$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ deve ser escolhido de forma apropriada.

Tomando $s = 1$, teremos que $c_n = Bn \cdot 2^n$ é uma solução particular para a recorrência não homogênea, uma vez que essa solução não figura em y_n .

Substituindo $c_n = Bn \cdot 2^n$ em:

$$c_{n+2} - 6c_{n+1} + 8c_n = 2^n,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} B(n+2)2^{n+2} - 6B(n+1)2^{n+1} + 8Bn2^n &= 2^n \\ (4B - 12B + 8B)n + (8B - 12B) &= 1 \\ -4B &= 1 \\ B &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Logo, a solução particular c_n é dada por:

$$\begin{aligned} c_n &= Bn \cdot 2^n \\ &= -\frac{1}{4} \cdot n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Sendo assim, teremos que a solução particular da recorrência não homogênea é dada por:

$$\begin{aligned} a_n &= b_n + c_n \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da recorrência não homogênea dada inicialmente é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ &= C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n + -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot n \cdot 2^n \\ &= -\frac{1}{4} + \left(C_1 - \frac{1}{4} \cdot n\right) 2^n + C_2 \cdot 4^n. \end{aligned}$$

Exemplo 52. Resolva a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 1 + n2^n$.

Solução.

De modo análogo aos Exemplos anteriores temos que a solução geral da homogênea é dada por:

$$\begin{aligned} y_n &= C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n \\ &= C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar uma solução particular para a recorrência não homogênea. Como o termo independente é composto de dois termos, ou seja, $h(n) = i(n) + j(n)$ onde $i(n) = A$ e $j(n) = (Bn + C)2^n$. Teremos que uma solução para a recorrência não homogênea é dada por:

$$a_n = b_n + c_n,$$

onde b_n é uma solução particular da recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 1$ e c_n é uma solução da recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n \cdot 2^n$.

Assim, utilizando o método apresentado nesse trabalho, devemos procurar uma solução particular na forma:

$$b_n = n^s(A),$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ deve ser escolhido de forma apropriada.

Veja que se tomarmos $s = 0$, teremos que $b_n = A$ é uma solução, uma vez que o termo constante não figura na solução encontrada para a homogênea y_n .

Substituindo $b_n = A$ em:

$$b_{n+2} - 4b_{n+1} + 4b_n = 1,$$

teremos,

$$A - 4A + 4A = 1.$$

Fazendo a comparação de polinômios, obtemos que $A = 1$. Sendo assim, teremos que $b_n = 1$.

Agora vamos encontrar a solução particular c_n . Pelo método apresentado nesse trabalho, devemos procurar uma solução na forma:

$$c_n = n^s(Bn + C)2^n,$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ deve ser escolhido de forma apropriada.

Considerando $s = 2$, teremos que $c_n = n^2(Bn + C)2^n = (Bn^3 + Cn^2)2^n$ não figura em y_n e portanto é solução para a recorrência não homogênea.

Substituindo $c_n = (Bn^3 + Cn^2)2^n$ em:

$$c_{n+2} - 4c_{n+1} + 4c_n = n \cdot 2^n,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} [B(n+2)^3 + C(n+2)^2]2^{n+2} - 4[B(n+1)^3 + C(n+1)^2]2^{n+1} + 4(Bn^3 + Cn^2)2^n &= n \cdot 2^n \\ (8B - 8B)n^3 + (24B + 8C - 24B - 8C)n^2 + 24Bn + (24B + 8C) &= n \end{aligned}$$

Fazendo a comparação de polinômios, obtemos:

$$\begin{cases} 24B &= 1 \\ 24B + 8C &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B &= \frac{1}{24} \\ C &= -\frac{1}{8} \end{cases}.$$

Logo, a solução particular c_n é dada por:

$$\begin{aligned} c_n &= (Bn^3 + Cn^2)2^n \\ &= \left(\frac{1}{24} \cdot n^3 - \frac{1}{8} \cdot n^2\right) 2^n. \end{aligned}$$

Sendo assim, teremos que a solução particular da recorrência não homogênea é dada por:

$$\begin{aligned} a_n &= b_n + c_n \\ a_n &= 1 + \left(\frac{1}{24} \cdot n^3 - \frac{1}{8} \cdot n^2\right) 2^n. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da recorrência não homogênea dada inicialmente será:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ x_n &= C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n + 1 + \left(\frac{1}{24} \cdot n^3 - \frac{1}{8} \cdot n^2\right) 2^n \\ x_n &= \left(\frac{1}{24} \cdot n^3 - \frac{1}{8} \cdot n^2 + C_2 \cdot n + C_1\right) 2^n + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 53. Resolva a recorrência linear de segunda ordem não homogênea dada por:

$$x_{n+2} + x_n = 1. \quad (4.14)$$

Solução.

A solução geral da equação homogênea é dada por:

$$y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \cdot i^n + C_2 \cdot (-i)^n. \quad (4.15)$$

Ou ainda, pelo Teorema 3.11 temos que a solução será dada por:

$$y_n = D_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Agora, vamos determinar uma solução particular para a recorrência (4.14). Como o termo independente dessa recorrência é $f(n) = 1$, ou seja, uma constante, a solução terá o seguinte formato:

$$a_n = n^s(A),$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ é escolhido de forma apropriada.

Como na solução apresentada em (4.15) não apresenta em nenhuma de suas parcelas, apenas o termo constante, significa que podemos tomar $s = 0$ na expressão anterior e portanto, a solução particular é dada por:

$$a_n = n^0 \cdot A = A.$$

Substituindo a solução particular a_n em:

$$a_{n+2} + a_n = 1,$$

obtemos:

$$A + A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a solução particular é dada por: $a_n = A = \frac{1}{2}$, e assim, a solução geral da recorrência apresentada em (4.8) é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ &= D_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como não foram fornecidas as condições iniciais, não podemos encontrar os valores das constantes D_1 e D_2 .

5 Miscelânea de problemas envolvendo recorrências

Neste capítulo, fazendo o uso da teoria apresentada nos capítulos anteriores, iremos resolver uma miscelânea de problemas contextualizados ou não, que envolvem as recorrências lineares de primeira e segunda ordem, homogêneas e não homogêneas no âmbito da geometria, da análise combinatória, da aritmética, das olimpíadas nacionais e internacionais de matemática, utilizando as idéias recursivas para construir as recorrências.

Problema 1 (Banco de questões, questão 5 - página 23, (OBMEP, 2009)). *Conjunto de Cantor*¹ - Desenhe um segmento de reta de comprimento 1, e denote-o por C_1 . Remova o terço central (sem remover os extremos). Denote por C_2 o que sobrou. Agora remova o terço central (sem os extremos) de cada segmento de reta de C_2 . Denote por C_3 o que sobrou. Podemos continuar esse processo, em cada estágio removendo o terço central de cada segmento C_n para formar C_{n+1} .

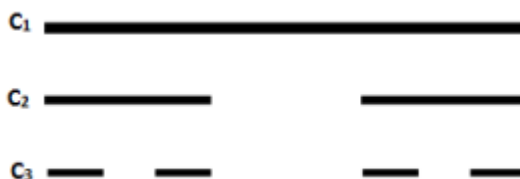


Figura 1 – Conjunto de Cantor

- Desenhe C_1, C_2 e C_3 , indicando os números que representam os extremos dos segmentos.
- Quais dos seguintes pontos pertecem ao conjunto de cantor? $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{3}{81}, \frac{4}{81}$.
- Quais são os comprimentos de C_3, C_4 e C_5 ? Você pode achar uma expressão para o comprimento C_n ?

Solução. Para responder o item (a), devemos levar em consideração que cada segmento é um subconjunto da reta real, com valores no intervalo $[0, 1]$. Usando os critérios do Conjunto de Cantor, temos a seguinte Figura:

¹ O conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ definido pelo matemático Georg Cantor como limite de um processo iterativo

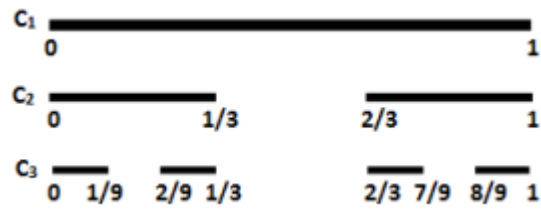


Figura 2 – Extremos do conjunto de Cantor

No item (b), deve-se observar que os extremos dos intervalos pertencem ao Conjunto de Cantor. Daí, podemos afirmar que:

- $\frac{1}{3}$ pertence ao Conjunto de Cantor, pois é extremo de C_2 ;
- $\frac{4}{9}$ é removido de C_2 , logo não pertence ao Conjunto de Cantor;
- $\frac{3}{81}$ é extremo de C_4 , logo pertence ao Conjunto de Cantor;
- $\frac{4}{81}$ é removido de C_4 , logo não pertence ao Conjunto de Cantor.

Para resolver o item (c), vamos montar a relação de recorrência entre os comprimentos de cada intervalo do Conjunto de Cantor. Como $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{2}{3}$ e $C_3 = \frac{4}{9}$, induzimos que $C_4 = \frac{8}{27}$ e $C_5 = \frac{16}{81}$ e daí,

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{2}{3}C_1 \\
 C_3 &= \frac{2}{3}C_2 \\
 C_4 &= \frac{2}{3}C_3 \\
 C_5 &= \frac{2}{3}C_4 \\
 &\vdots \\
 C_n &= \frac{2}{3}C_{n-1}
 \end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades anteriores membro a membro, obtemos:

$$C_2 \cdot C_3 \cdots C_{n-1} \cdot C_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdots C_{n-1}.$$

Efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} C_1 \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 1 \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Problema 2. (STEFFENON, 2022) Dispondo-se de uma grande quantidade de blocos quadrados de lado 1cm nas cores branco, cinza e preto. Os blocos devem ser colocados em filas de alturas 1cm e comprimento n cm, com os lados em contato.



- Quantas filas distintas de comprimento n podem ser feitas sem nenhuma restrição?
- Quantas filas distintas de comprimento menor ou igual a n podem ser feitas sem nenhuma restrição?
- Quantas filas distintas de comprimento n , podem ser feitas, contendo apenas uma quantidade par de peças pretas?

Solução.

a) Se D_n representa o número de combinações de filas de comprimento n , então $D_{n+1} = 3D_n$ com $D_1 = 3$. A solução é dada por $D_n = 3^n$ uma vez que não temos nenhuma restrição no enunciado.

Podemos também utilizar o processo de contagem. Para uma fila de comprimento n , sem restrições, há três possibilidades para o primeiro bloco, três para o segundo e assim por diante, então teremos uma quantidade de filas distintas igual à:

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times \cdots \times 3 \times 3 \times 3}_{n \text{ fatores}} = 3^n.$$

Portanto, $D_n = 3^n$ filas de comprimento n , quando não há restrições.

b) De acordo com o item a), o número de filas distintas de comprimento n é igual á: $D_n = 3^n$. Logo o número de filas distintas de comprimento menor ou igual a n é,

$$D_1 + D_2 + D_3 + \cdots + D_{n-1} + D_n = \sum_{k=1}^n 3^k.$$

Utilizando a fórmula da soma da PG finita, podemos calcular que:

$$\sum_{k=1}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 3}{2}.$$

c) Considere a_n a quantidade de maneiras de formar uma fila de comprimento n cm com uma quantidade par de peças pretas.

Note que,

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2: && \text{□} \quad \text{■} \\
 a_2 &= 5: && \text{□□} \quad \text{□■} \quad \text{■□} \quad \text{■■} \quad \text{■■}
 \end{aligned}$$

Agora vamos analisar o caso geral a_{n+1} para $n \geq 2$. Para a_{n+1} temos três tipos de soluções: aquelas em que a última peça é branca, aquelas em que a última peça é cinza e aquelas em que a última é preta.

- Caso 1: O número de soluções com $n+1$ blocos em que a última é branca, significa que temos que escolher os n primeiros blocos com uma quantidade par de pretos, que é igual a a_n .
- Caso 2: O número de soluções com $n+1$ blocos em que a última é cinza, significa que temos que escolher os n primeiros blocos com uma quantidade par de pretos, que é igual a a_n .
- Caso 3: O número de soluções com $n+1$ blocos em que a última é preta, significa que temos que escolher os n primeiros blocos com uma quantidade ímpar de pretos, que é igual a todas as configurações possíveis para n blocos, sem restrições, menos aquelas com quantidade par de blocos pretos: $3^n - a_n$.

Considerando os três casos acima, concluímos que:

$$a_{n+1} = a_n + a_n + (3^n - a_n) = a_n + 3^n, \quad a_1 = 2. \quad (5.1)$$

Vamos agora, resolver a recorrência disposta em (5.1). Note que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 3^1 \\ a_3 &= a_2 + 3^2 \\ a_4 &= a_3 + 3^3 \\ a_5 &= a_4 + 3^4 \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + 3^{n-3} \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 3^{n-2} \\ a_n &= a_{n-1} + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades anteriores e fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1}}_{PG} \\ &= 2 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n + 1}{2}. \end{aligned}$$

Problema 3 (OMRN-2018 - Gomes, Diniz e Gurgel (2021)). *Uma sequência (a_n) satisfaz:*

$$a_1 = -14, \quad a_2 = 14, \quad e, \quad \text{para } k \geq 3, \quad a_k = a_{k-2} + \frac{4}{a_{k-1}}.$$

Qual o menor valor de k para o qual $a_k = 0$?

Solução. *Observe que:*

$$a_k = a_{k-2} + \frac{4}{a_{k-1}} \Leftrightarrow a_k a_{k-1} = a_{k-1} a_{k-2} + 4.$$

Chamando $b_k = a_k a_{k-1}$, podemos escrever que:

$$b_k = a_k a_{k-1} = a_{k-1} a_{k-2} + 4 = b_{k-1} + 4.$$

Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} b_3 &= b_2 + 4 \\ b_4 &= b_3 + 4 \\ b_5 &= b_4 + 4 \\ \vdots &= \vdots + \vdots \\ b_{k-1} &= b_{k-2} + 4 \\ b_k &= b_{k-1} + 4. \end{aligned}$$

Somando membro a membro todas as igualdades anteriores e efetuando os devidos cancelamentos, obtemos:

$$\begin{aligned} b_k &= b_2 + (k-2)4 = a_2 a_1 + (k-2)4 \\ b_k &= 14(-14) + (k-2)4 \\ b_k &= -196 + 4(k-2). \end{aligned}$$

Logo, teremos que $b_k = 0$ se, e somente se,

$$-196 + 4(k-2) = 0 \Leftrightarrow k = 51.$$

Além disso, veja que $b_{50} = a_{50} a_{49} = -196 + 4(50-2) \neq 0$. Mas:

$$b_{51} = a_{51} a_{50} = -196 + 4(51-2) = -196 + 4 \cdot 49 = -196 + 196 = 0.$$

Portanto o menor valor de k para que $a_k = 0$ é 51.

O grande geômetra alemão Jacob Steiner (1796-1863) propôs e resolveu, em 1926, o seguinte problema:

Problema 4 (Pizza de Steiner - (MORGADO; CARVALHO, 2022)). *Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?*

Solução. *Seja r_n o número máximo de regiões em que n retas dividem um plano. Imagine a situação em que há $n-1$ retas dividindo o plano em r_{n-1} regiões. Ao adicionarmos uma nova reta a essa configuração (nesse caso o plano está dividido em r_{n-1} regiões), essa nova reta intersecta cada uma das $n-1$ retas já existentes em exatamente um ponto, gerando $n-1$ pontos de interseção. A inclusão dessa nova reta incrementa o número de regiões em n , ou seja, $r_n = r_{n-1} + n$. Dessa forma,*

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 \\ r_2 &= r_1 + 2 \\ r_3 &= r_2 + 3 \\ r_4 &= r_3 + 4 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= r_{n-2} + (n-1) \\ r_n &= r_{n-1} + n. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima e fazendo as devidas simplificações, segue que:

$$\begin{aligned} r_n &= 2 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n \\ &= 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n \\ &= 1 + \frac{(1+n)}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

Problema 5 (O queijo de Steiner- (MORGADO; CARVALHO, 2022)). *Para fazer a sua pizza, Steiner teve que cortar, primeiro, o queijo. Imaginando que o espaço é um enorme queijo, qual é o número máximo de pedaços que poderíamos obter ao cortá-lo por n planos?*

Solução. *Nesse caso tridimensional o problema é um pouco mais delicado, mas segue a mesma linha de raciocínio do problema da pizza de Steiner.*

Sendo assim, suponhamos que p_n seja o número máximo de regiões em que o espaço tridimensional pode ser dividido por n planos. Vamos mostrar que:

$$p_{n+1} = p_n + r_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

em que $r_n = 1 + \frac{(1+n)}{2} \cdot n$ é a solução do problema da pizza de Steiner.

De fato, suponha que já existem n planos dividindo o espaço tridimensional em p_n regiões. Agora suponha que adicionemos um novo plano, isto é, um $n+1$ -ésimo plano

sem que intersecte uma reta que seja comum a dois planos já existentes ou que seja paralelo a qualquer um dos planos já existentes.

Dessa forma, cada um dos n planos já existentes irá intersectar o novo plano em n retas que dividem o novo plano em r_n das p_n regiões já existentes (dividindo cada uma delas em duas regiões). Isso da origem à r_n novas regiões do espaço tridimensional, fazendo que haja $p_n + r_n$ regiões nesse momento, ou seja, $p_{n+1} = p_n + r_n$ para todo n natural.

Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2 \\ p_2 &= p_1 + r_1 \\ p_3 &= p_2 + r_2 \\ p_4 &= p_3 + r_3 \\ &\vdots \\ p_{n-2} &= p_{n-3} + r_{n-3} \\ p_{n-1} &= p_{n-2} + r_{n-2} \\ p_n &= p_{n-1} + r_{n-1}. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima e efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} p_n &= 2 + r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} r_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{(1+k)}{2} \cdot k \right) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1+k)}{2} k \\ &= 2 + (n-1) \cdot 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= 2 + n - 1 + \frac{1}{2} \frac{[1 + (n-1)]}{2} (n-1) + \frac{1}{2} \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} \\ &= (n+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{12(n+1) + 3n(n-1) + (n-1)n(2n-1)}{12} \\ &= \frac{n^3 + 5n + 6}{6}. \end{aligned}$$

Em 1826, *Jacob Steiner* analisou esse problema até o caso tridimensional que acabamos de mostrar. Em 1840, *Ludwif Schlafli* imaginou um queijo d -dimensional e provou que nesse caso o número máximo de regiões em que o espaço d -dimensional ficaria dividido por n hiperplanos de dimensão $d - 1$ é dado por:

$$f_d(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{d}.$$

Problema 6 (Adaptado - (STEFFENON, 2022)). *Jucimeri deposita inicialmente R\$1.000,00 em uma poupança que rende 6% ao ano, com juros computados mensalmente, e além disso, ela deposita no primeiro dia de cada mês, a partir do mês seguinte ao depósito inicial, R\$200,00.*

- a) *Para cada inteiro não negativo n , seja A_n o montante acumulado na conta após n meses. Para cada inteiro positivo n , determine uma relação entre A_n e A_{n-1} .*
- b) *Determine uma fórmula explícita para A_n , em função de n .*
- c) *Quantos anos serão necessários para que o saldo presente na conta ultrapasse R\$10.000,00?*

Solução.

- a) *Vamos inicialmente calcular a taxa de juros mensal. Sabe-se que:*

$$T_m = (1 + T_a)^{\frac{1}{12}} - 1$$

onde, T_a é a taxa anual e T_m é a taxa mensal. Assim,

$$T_m = (1 + 0,06)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,0049.$$

Utilizando o raciocínio recorrente, observamos que:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1000 \\ A_2 &= A_1 \cdot 1,0049 + 200 \\ A_3 &= A_2 \cdot 1,0049 + 200 \\ A_4 &= A_3 \cdot 1,0049 + 200 \\ A_5 &= A_4 \cdot 1,0049 + 200 \\ A_6 &= A_5 \cdot 1,0049 + 200 \\ A_7 &= A_6 \cdot 1,0049 + 200 \\ &\vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad + \quad \vdots \\ A_{n-2} &= A_{n-3} \cdot 1,0049 + 200 \\ A_{n-1} &= A_{n-2} \cdot 1,0049 + 200 \\ A_n &= A_{n-1} \cdot 1,0049 + 200. \end{aligned}$$

Desta forma, encontramos a relação entre A_n e A_{n-1} dada por:

$$A_n = A_{n-1} \cdot 1,0049 + 200.$$

b) Tem-se que:

$$\begin{aligned} 1,0049^{n-1} A_1 &= 1000 \cdot 1,0049^{n-1} \\ 1,0049^{n-2} \cdot A_2 &= A_1 \cdot 1,0049^{n-1} + 200 \cdot 1,0049^{n-2} \\ 1,0049^{n-3} \cdot A_3 &= A_2 \cdot 1,0049^{n-2} + 200 \cdot 1,0049^{n-3} \\ 1,0049^{n-4} \cdot A_4 &= A_3 \cdot 1,0049^{n-3} + 200 \cdot 1,0049^{n-4} \\ 1,0049^{n-5} \cdot A_5 &= A_4 \cdot 1,0049^{n-4} + 200 \cdot 1,0049^{n-5} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ 1,0049^2 \cdot A_{n-2} &= A_{n-3} \cdot 1,0049^3 + 200 \cdot 1,0049^2 \\ 1,0049 \cdot A_{n-1} &= A_{n-2} \cdot 1,0049^2 + 200 \cdot 1,0049^1 \\ A_n &= A_{n-1} \cdot 1,0049^1 + 200 \cdot 1,0049^0. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro e fazendo as simplificações necessárias obtemos:

$$A_n = 1000 \cdot 1,0049^{n-1} + 200 \left(\underbrace{1,0049^0 + 1,0049^1 + \dots + 1,0049^{n-3} + 1,0049^{n-2}}_{P.G.} \right).$$

Perceba que o termo destacado é a soma de uma Progressão Geométrica finita cujo primeiro termo é 1, a razão é igual a (1,0049) e contém $n - 1$ termos. Usando a fórmula para a soma de uma PG finita de n -termos, dada por:

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1},$$

teremos que,

$$S_{n-1} = \frac{1 [(1,0049)^{n-1} - 1]}{1,0049 - 1} = \frac{1,0049^{n-1} - 1}{0,0049}.$$

Portanto, segue que:

$$A_n = 1000 \cdot 1,0049^{n-1} + 200 \left(\frac{1,0049^{n-1} - 1}{0,0049} \right).$$

c) Vamos utilizar $A_n = 1000 \cdot 1,0049^{n-1} + 200 \left(\frac{1,0049^{n-1} - 1}{0,0049} \right)$ para calcular o tempo necessário para que o saldo presente ultrapasse R\$10.000,00. Sendo assim, teremos:

$$\begin{aligned} 0,0049 \cdot 10000 &= 0,0049 \cdot 1000 \cdot 1,0049^{n-1} + 200 \cdot 1,0049^{n-1} - 200 \\ \Rightarrow \quad 249 &= 204,9 \cdot 1,0049^{n-1} \\ \Rightarrow \quad 1,0049^{n-1} &= 1,22 \\ \Rightarrow \quad n &= \frac{\log 1,22}{\log 1,0049} + 1 \\ \Rightarrow \quad n &\approx 42 \text{ meses.} \end{aligned}$$

Logo o tempo necessário para o valor ultrapassar R\$10000,00 será 42 meses ou aproximadamente 3 anos e meio.

Problema 7 (Adaptado - Castro et al. (2016)). *Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$ que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?*

Solução. *Seja x_n o número de sequências de n termos, todos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$ que possuem um número ímpar de termos iguais a zero.*

Consideremos uma sequência com $n + 2$ termos, teremos dois casos a serem analisados: as sequências que não começam com o termo zero e àquelas que começam por zero.

- *Se o zero não está na primeira posição, significa que as sequências começam por 1 ou por 2 e assim, nos $n + 1$ termos restantes, devemos ter uma quantidade ímpar de termos iguais a zero, ou seja x_{n+1} . Então, se o primeiro termo não for zero, teremos uma quantidade de sequência igual a $2x_{n+1}$ que possuem uma quantidade ímpar de termos iguais a zero.*
- *Se o zero está na primeira posição, devemos ter nos $n + 1$ termos restantes, uma quantidade par de zeros. Ora, as sequências de $n + 1$ termos pertencentes à $\{0, 1, 2\}$ possuem um total de 3^{n+1} sequências, porém, devemos retirar a quantidade de sequências com número ímpar de termos, isto é, x_{n+1} , sendo assim, teremos $3^{n+1} - x_{n+1}$ sequências que começam por zero e possuem uma quantidade ímpar de termos iguais a zero.*

Diante disso, como deve acontecer as situações acima, concluímos que a quantidade de sequências de $n + 2$ termos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$ é dado por:

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= 2x_{n+1} + (3^{n+1} - x_{n+1}) \\x_{n+2} &= x_{n+1} + 3^{n+1}.\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a quantidade de sequências com n termos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$ é dada por:

$$x_n = x_{n-1} + 3^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + 3^0 \\x_2 &= x_1 + 3^1 \\x_3 &= x_2 + 3^2 \\&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\x_n &= x_{n-1} + 3^{n-1}.\end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima e efetuando as devidas simplificações, obtemos,

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \underbrace{3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-2} + 3^{n-1}}_{PG} \\ &= x_0 + \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \\ &= x_0 + \frac{3^n - 1}{2} \\ &= \frac{3^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

Observe que consideremos $x_0 = 0$, uma vez que nessa configuração não se tem sequência.

Problema 8 (PROFMAT-PROVAS NACIONAIS- MA12-2011). Considere o conjunto dos números escritos apenas com os algarismos 1, 2 e 3, em que o algarismo 1 aparece uma quantidade par de vezes, por exemplo, (2322 e 12123). Seja a_n a quantidade desses números contendo exatamente n algarismos.

- Liste todos esses números para $n = 1$ e $n = 2$, indicando os valores de a_1 e a_2 .
- Explique por que a_n satisfaz a equação de recorrência:

$$a_{n+1} = (3^n - a_n) + 2a_n, \text{ para } n \geq 1.$$

- Resolva a equação de recorrência descrita no item b).

Solução.

a) Para $n = 1$ só há três números possíveis: 1, 2 e 3. Somente os dois últimos têm um número par de algarismos iguais a 1 (neste caso, nenhum algarismo igual a 1). Sendo assim, $a_1 = 2$.

Os números de 2 algarismos são: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 e 33, num total de $9 = 3^2$ possibilidades. Cinco deles têm uma quantidade par de algarismos iguais a 1, então $a_2 = 5$.

b) Um número de $n + 1$ algarismos em que o 1 aparece um número par de vezes pode ser formado de dois modos, a partir de um número com n algarismos.

- Tomando-se um número de n algarismos em que o 1 aparece um número par de vezes (há a_n deles) e acrescentar 2 ou 3. Nesse caso haverá $2a_n$ números de $n + 1$ algarismos com um número par de 1's construídos dessa maneira.
- Tomando-se um número de n algarismos em que o 1 aparece um número ímpar de vezes e acrescentando-se 1. como há um total de 3^n números de n algarismos

formados por 1, 2 e 3, a quantidade de números com $n+1$ algarismos com número par de 1's que resulta dessa construção é igual a $3^n - a_n$.

Logo, a quantidade total de números com $n + 1$ algarismos com número par de 1's é dado por:

$$a_{n+1} = (3^n - a_n) + 2a_n = 3^n + a_n \quad \forall n \geq 1.$$

c) Note que,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= a_1 + 3^1 \\ a_3 &= a_2 + 3^2 \\ a_4 &= a_3 + 3^3 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 3^{n-2} \\ a_n &= a_{n-1} + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro nas igualdades anteriores e efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-2} + 3^{n-1}}_{PG} \\ &= 2 + \frac{3^n - 3}{2} \\ &= \frac{3^n + 1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Problema 9 (Pinheiro e Lazzarin (2015) Questão 9 - OBMEP-2012- nível 2). *Renata montou uma seqüência de triângulos com palitos de fósforos, seguindo o padrão indicado na Figura 3. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?*



Figura 3 – Sequência de triângulos

Solução.

Na Figura 3, consideremos $a_1 = 3$ o número de palitos utilizados para construir o primeiro triângulo. Desta forma, $a_2 = a_1 + 6$, $a_3 = a_2 + 9$, e assim sucessivamente. Assim, podemos formar a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 2 \cdot 3 \\ a_3 &= a_2 + 3 \cdot 3 \\ a_4 &= a_3 + 3 \cdot 4 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad + \quad \vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 3 \cdot (n-1) \\ a_n &= a_{n-1} + 3 \cdot n. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima e efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= 3(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n) \\ &= 3 \frac{(1+n)}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

Como $a_n = 135$ temos que:

$$\frac{3n(n+1)}{2} = 135 \Rightarrow 3n^2 + 3n - 270 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -10 \\ n = 9 \end{cases},$$

desconsiderando o valor negativo, pois não faz sentido termos quantidade de palitos negativa, obtemos que o quantidade de palitos necessários para formar o lado desse triângulo é igual a 9.

Problema 10. (MORGADO; CARVALHO, 2022) O salário de Carmelino no mês n é $S_n = a + bn$. Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras. Ele poupa anualmente $\frac{1}{p}$ de sua renda e investe na poupança a juros mensais de taxa i . Determine a renda de Carmelino no mês n .

Solução.

A renda x_n no mês n é igual ao salário S_n mais o rendimento sobre montante y_{n-1} das aplicações financeiras no mês anterior. Ou seja, $x_n = S_n + i \cdot y_{n-1}$.

Por outro lado, o montante das aplicações financeiras no mês n é igual ao do mês anterior, acrescido do valor poupado no mês n , ou seja, $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n$.

Da primeira equação, temos que $y_{n-1} = \frac{x_n - S_n}{i}$ o que implica que:

$$y_n = \frac{x_{n+1} - S_{n+1}}{i}.$$

Agora, substituindo essas equações em $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n$, obtemos:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{n+1} - S_{n+1}}{i} = \frac{x_n - S_n}{i} + \frac{1}{p}x_n,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - S_{n+1} + S_n &= x_n + \frac{1}{p}x_n \cdot i \\ x_{n+1} - (S_{n+1} - S_n) &= x_n \left(1 + \frac{i}{p}\right) \\ x_{n+1} - b &= x_n \left(1 + \frac{i}{p}\right). \end{aligned}$$

Note que $b = S_{n+1} - S_n$, pois como $S_n = a + bn$ teremos que:

$$S_{n+1} = a + b(n+1).$$

E assim,

$$S_{n+1} - S_n = a + b(n+1) - (a + bn) = a + bn + b - a - bn = b.$$

Daí, temos uma recorrência linear de 1ª ordem não homogênea dada por:

$$x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{i}{p}\right) + b.$$

Assim, $a_n = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1}$ é uma solução não nula da recorrência:

$$x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{i}{p}\right),$$

e aplicando o Teorema (3.2), segue que:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} \left(1 + \frac{i}{p}\right) + b \\ \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1} \cdot y_n &= \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{i}{p}\right) \cdot y_{n-1} + b \\ \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1} \cdot y_n &= \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1} \cdot y_{n-1} + b. \end{aligned}$$

Chamando $k = 1 + \frac{i}{p}$, temos $a_n = k^{n-1}$. Logo,

$$k^{n-1}y_n = k^{n-1}y_{n-1} + b.$$

Multiplicando a equação anterior por $\frac{1}{k^{n-1}}$ obtemos:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{b}{k^{n-1}}.$$

Por outro lado, $x_0 = a$ (no mês 0 a renda é $S_0 = a$). Assim,

$$x_n = a_n y_n \Rightarrow x_0 = a_0 y_0 \Rightarrow a = a_0 y_0 \Rightarrow a = k^{-1} y_0 \Rightarrow y_0 = a \cdot k.$$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned} y_0 &= ak \\ y_1 &= y_0 + b \\ y_2 &= y_1 + \frac{b}{k} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + \frac{b}{k^{n-1}}. \end{aligned}$$

Adicionando, membro a membro as igualdades anteriores, temos que:

$$\begin{aligned} y_n &= ak + b \left(\underbrace{1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}}}_{PG} \right) \\ &= ak + b \left[\frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n - 1}{\frac{1}{k} - 1} \right] \\ &= ak + bk \left[\frac{1 - k^n}{1 - k} \right] \\ &= ak + b \cdot k \frac{1 - k^n}{k^n} \cdot \frac{1}{1 - k} \\ y_n &= ak + b \cdot \frac{1 - k^n}{k^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 - k}. \end{aligned}$$

Como $x_n = a_n y_n$, teremos:

$$\begin{aligned} x_n &= k^{n-1} \left(ak + b \cdot \frac{1 - k^n}{k^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 - k} \right) \\ &= ak^n + b \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}. \end{aligned}$$

Agora, substituindo $k = 1 + \frac{i}{p}$, obteremos:

$$\begin{aligned} x_n &= a \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n + b \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n}{1 - \left(1 + \frac{i}{p} \right)} \\ &= a \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n + b \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{p} \right)^n}{-\frac{i}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= a \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n - b \cdot \frac{p}{i} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n\right] \\ &= a \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n - \frac{pb}{i} + \frac{pb}{i} \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n. \end{aligned}$$

Logo,

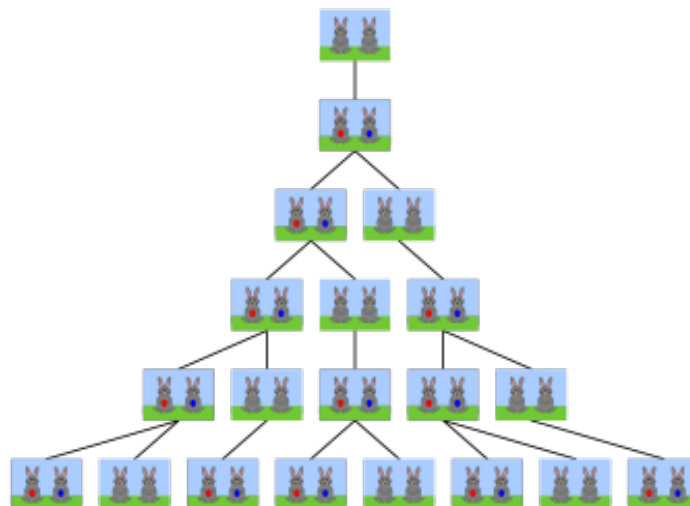
$$x_n = \left(a + \frac{pb}{i}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n - \frac{pb}{i}.$$

No mundo ocidental, a sequência de Fibonacci apareceu pela primeira vez no livro “*Liber Abaci*”(1202) de Leonardo Fibonacci, embora já tivesse sido descrita por gregos e indianos. Fibonacci considerou o crescimento de uma população idealizada (não realística biologicamente) de coelhos, como descreveremos a seguir. Consideremos uma sequência $(f_n)_{n \geq 1}$ na qual f_n representa o número de casais na população de coelhos no n -ésimo mês, supondo as seguintes regras:

- No primeiro mês nasce apenas um casal;
- os casais amadurecem sexualmente e reproduzem-se apenas após o segundo mês de vida;
- Não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;
- Todos os meses, cada casal fértil dá a luz a um novo casal;
- os coelhos nunca morrem.

A Figura 4 a seguir ilustra essa população imaginária de coelhos nos seis primeiros meses do processo.

Figura 4 – Evolução do número da população de coelhos



A população de coelhos evolui como podemos observar na Tabela 8 a seguir.

Tabela 8 – População de coelhos de Fibonacci

Mês	Pares adultos	Pares Jovens	Total de pares
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
⋮	⋮	⋮	⋮

A sequência de Fibonacci (f_n) é definida como sendo o número de casais de coelhos existentes ao final do mês n . Assim, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, \dots , mais ainda $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para todo natural $n \geq 1$.

Uma pergunta bastante natural nesse ponto é se podemos obter uma fórmula fechada para f_n em função de n .

Pelo que já abordamos no nosso trabalho, sabemos que é possível encontrar tal fórmula fechada. É uma fórmula muitíssima curiosa, pois nela aparece o número de ouro da geometria clássica $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e o seu inverso $-\frac{1}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Problema 11. (MORGADO; CARVALHO, 2022) *De quantas formas distintas n pessoas que estão sentadas em n cadeiras numa única fileira de um teatro podem regressar para a mesma fileira após o intervalo do espetáculo, respeitando-se a condição de que cada pessoa sente-se na mesma cadeira que estava antes ou numa cadeira que seja vizinha à cadeira que ocupava antes do intervalo.*

Solução.

Seja x_n o número de maneiras distintas de n pessoas que estão sentadas em n cadeiras numa fileira de um teatro regressarem para a mesma fileira após o intervalo do espetáculo, respeitando-se a condição de que cada pessoa sente-se na mesma cadeira que estava antes ou numa cadeira que seja vizinha à cadeira que estava antes.

Note que $x_1 = 1$, pois havendo apenas uma pessoa e uma cadeira, a pessoa necessariamente regressaria para a sua cadeira de origem, já que a cadeira é, neste caso, única.

Além disso, $x_2 = 2$, visto que no caso de duas pessoas e duas cadeiras, há 2 situações possíveis: a primeira situação é cada uma das pessoas regressem ao seu lugar de origem; a outra é que essas duas pessoas troquem de lugar entre si.

Consideremos então a situação em que temos $n+2$ pessoas e $n+2$ cadeiras. Podemos dividir as possíveis configurações em dois tipos, a saber:

- As configurações em que a pessoa 1 regressa para a sua cadeira de origem. Nesse caso, ainda teremos que arrumar as $n+1$ pessoas restantes satisfazendo as condições impostas pelo enunciado, o que pode ser feito de x_{n+1} modos distintos.
- As configurações em que a pessoa 1 não regressa ao seu lugar de origem. Nesse caso, a pessoa 1 necessariamente terá que sentar na cadeira que era originalmente da pessoa 2 (pois essa é a única cadeira vizinha da cadeira que era originalmente ocupada pela pessoa 1).

Já a pessoa 2, também necessariamente terá que ocupar a cadeira que era ocupada pela pessoa 1, pois nenhuma das demais pessoas tem a cadeira de origem ocupada pela pessoa 1 como cadeira vizinha.

Diante do que acabamos de expor, segue que as pessoas 1 e 2 trocaram de lugar, restando ainda n cadeiras e n pessoas, que respeitando as condições impostas pelo enunciado, pode ser feito de x_n maneiras distintas.

Logo, o número total de configurações distintas com $n+2$ pessoas que respeitam as condições do enunciado é igual a $x_{n+1} + x_n$.

Portanto,

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{com } n \geq 1. \quad (5.2)$$

Sendo assim, vamos resolver a recorrência homogênea de segunda ordem obtida em (5.2).

A equação característica associada a referida recorrência é dada por $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são: $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Como temos duas raízes distintas para a equação característica, a solução geral da homogênea é dada por:

$$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para determinar os valores das constantes C_1 e C_2 , vamos utilizar as condições: $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Aplicando essas condições, teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 2 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema de equações acima, encontraremos:

$$C_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad e \quad C_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}.$$

Desta forma, teremos que a solução geral da recorrência homogênea satisfazendo as condições iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ será:

$$\begin{aligned} x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n &= C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Se quiser relacionar com a sequência de Fibonacci, segue que $x_n = f_{n+1}$, ou seja, o n -ésimo número de Fibonacci.

$$x_n = f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Problema 12. (GOMES; DINIZ; GURGEL, 2021) Resolva a recorrência

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad \forall n \geq 2, \quad \text{com } n \in \mathbb{N},$$

e as condições iniciais $D_0 = 1$ e $D_1 = 0$.

Solução.

Podemos reescrever a lei de recorrência $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ da seguinte maneira:

$$D_n = nD_{n-1} - D_{n-1} + (n - 1)D_{n-2} \Rightarrow \underbrace{D_n - nD_{n-1}}_{a_n} = - \left[\underbrace{D_{n-1} - (n - 1)D_{n-2}}_{a_{n-1}} \right],$$

ou seja, $a_n = -a_{n-1}$, para todo $n \geq 2$.

Ora, como $D_0 = 1$ e $D_1 = 0$, segue que:

$$a_1 = D_1 - 1 \cdot D_0 = 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

Por outro lado, como $a_n = -a_{n-1}$ para todo inteiro $n \geq 2$, segue que:

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 \\ a_2 &= -a_1 = -(-1) = 1 \\ a_3 &= -a_2 = -1 \\ a_4 &= -a_3 = -(-1) = 1 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_n &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Assim,

$$a_n = D_n - nD_{n-1} = (-1)^n.$$

Agora dividindo a expressão $D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$ por $n!$, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{n!} - \frac{nD_{n-1}}{n!} &= \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow \frac{D_n}{n!} - \frac{nD_{n-1}}{n(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \\ &\Rightarrow \frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Definindo $b_n = \frac{D_n}{n!}$, podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow b_n = b_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 + \frac{(-1)^2}{2!} \\ b_3 &= b_2 + \frac{(-1)^3}{3!} \\ &\vdots \\ b_n &= b_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades anteriores e fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= \frac{D_1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Por fim, como $b_n = \frac{D_n}{n!}$, segue que:

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow D_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Como $\frac{1}{0!} = \frac{1}{1!} = 1$, podemos escrever:

$$D_n = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Da análise combinatória, sabemos que essa expressão é justamente o número de permutações caóticas de n elementos distintos.

Problema 13. (PINTO, 2017) Uma planta é tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantarmos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada quantas sementes serão produzidas daqui a n anos?

Solução.

No ano $(n + 2)$ são geradas 21 sementes para cada semente gerada no ano $(n + 1)$ e 44 sementes para cada semente gerada nos anos anteriores.

Logo, se x_n denota o número de sementes geradas no ano n , temos:

$$x_{n+2} = 21x_{n+1} + 44(x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 + x_0), \quad (5.3)$$

com $x_1 = 1$ e $x_2 = 21 \cdot 21 + 44 = 485$.

Para transformar essa recorrência em uma recorrência linear de segunda ordem, escrevemos a expressão para x_{n+1} dada por:

$$x_{n+1} = 21x_n + 44(x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_1 + x_0). \quad (5.4)$$

Agora, fazendo (5.3) – (5.4) e efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$x_{n+2} - 22x_{n+1} - 23x_n = 0.$$

Veja que podemos associar à essa recorrência homogênea a equação característica dada por:

$$r^2 - 22r - 23 = 0,$$

cujas raízes reais são: $r_1 = 23$ e $r_2 = -1$.

Desta forma, a solução geral dessa recorrência é dada por:

$$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \cdot 23^n + C_2 (-1)^n.$$

Aplicando as condições iniciais, $x_1 = 1$ e $x_2 = 485$, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 23C_1 - C_2 = 1 \\ 529C_1 + C_2 = 485 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior encontraremos os valores $C_1 = \frac{11}{12}$ e $C_2 = \frac{1}{12}$. Portanto, a solução geral é dada por:

$$x_n = \frac{11}{12} \cdot 23^n + \frac{1}{12} (-1)^n.$$

Problema 14. *Sejam a e b as raízes da equação $x^2 = x + 1$. Mostre que $a^{13} + b^{13}$ é um inteiro e determine seu valor.*

Demonstração.

Das relações de Girard, temos que $S = a + b = 1$ e $P = a \cdot b = -1$. Suponhamos que queiramos descobrir o caso geral, ou seja, $a^n + b^n = s_n$. Assim,

$$\begin{aligned} s_0 &= a^0 + b^0 = 1 + 1 = 2 \\ s_1 &= a^1 + b^1 = a + b = 1 \\ s_2 &= a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 - 2(-1) = 3 = 1 + 2 \\ s_3 &= a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 1 \cdot (3 - (-1)) = 4 = 3 + 1 \\ s_4 &= a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 3^2 - 2(-1)^2 = 9 - 2 = 7 = 4 + 3. \end{aligned}$$

Note que, $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$ (conjectura). Como $s_n = a^n + b^n$, teremos que:

$$\begin{aligned} s_{n+1} + s_n &= a^{n+1} + b^{n+1} + a^n + b^n \\ &= a^n(a + 1) + b^n(b + 1). \end{aligned}$$

Mas, como a e b são raízes da equação $x^2 = x + 1$ segue que $a^2 = a + 1$ e $b^2 = b + 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} s_{n+1} + s_n &= a^n(a + 1) + b^n(b + 1) \\ &= a^n \cdot a^2 + b^n \cdot b^2 \\ &= a^{n+2} + b^{n+2} \\ s_{n+1} + s_n &= s_{n+2}. \end{aligned}$$

Desta forma, $s_{n+1} + s_n = s_{n+2}$ como queríamos.

Sendo assim, fazendo uso da recorrência encontrada anteriormente, teremos os seguintes valores para s_i com $2 \leq i \leq 13$.

Tabela 9 – Os 12 elementos da recorrência dada

n	$s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$	s_{n+2}
0	$s_2 = s_1 + s_0$	3
1	$s_3 = s_2 + s_1$	4
2	$s_4 = s_3 + s_2$	7
3	$s_5 = s_4 + s_3$	11
4	$s_6 = s_5 + s_4$	18
5	$s_7 = s_6 + s_5$	29
6	$s_8 = s_7 + s_6$	47
7	$s_9 = s_8 + s_7$	76
8	$s_{10} = s_9 + s_8$	123
9	$s_{11} = s_{10} + s_9$	199
10	$s_{12} = s_{11} + s_{10}$	322
11	$s_{13} = s_{12} + s_{11}$	521

Desta forma, utilizando a recorrência encontrada, obtivemos que $s_{13} = 521$.

Agora, vamos encontrar esse mesmo valor, resolvendo e encontrando a fórmula fechada para a recorrência obtida anteriormente:

$$s_{n+2} = s_{n+1} + s_n, \text{ com } s_0 = 2 \text{ e } s_1 = 1.$$

Note que podemos associar a equação característica $r^2 - r - 1 = 0$ a recorrência homogênea dada. Assim, as raízes dessa equação característica são $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Portanto, a solução geral dessa recorrência homogênea é dada por:

$$s_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Aplicando as condições iniciais, $s_0 = 2$ e $s_1 = 1$, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Desta forma, a solução dessa recorrência é dada por:

$$s_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Sendo assim, o valor s_{13} procurado é dado por:

$$\begin{aligned} s_{13} &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{13} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{13} \\ &= \frac{1}{8192} (1 + \sqrt{5})^{13} + \frac{1}{8192} (1 - \sqrt{5})^{13} \\ &= \frac{1}{8192} \left[(1 + \sqrt{5})^{13} + (1 - \sqrt{5})^{13} \right] \\ &= \frac{1}{8192} \left[\sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 1^{13-k} \cdot (\sqrt{5})^k + \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 1^{13-k} \cdot (-\sqrt{5})^k \right] \\ &= \frac{1}{8192} \left[\sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} (\sqrt{5})^k + \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} (-\sqrt{5})^k \right] \\ &= \frac{1}{8192} \left[2 \cdot \sum_{k=0}^6 \binom{13}{2k} (\sqrt{5})^{2k} \right] \\ &= \frac{1}{4096} \left[\sum_{k=0}^6 \binom{13}{2k} \cdot 5^k \right] \\ &= \frac{1}{4096} \left[\binom{13}{0} + \binom{13}{2} 5 + \binom{13}{4} 5^2 + \binom{13}{6} 5^3 + \binom{13}{8} 5^4 + \binom{13}{10} 5^5 + \binom{13}{12} 5^6 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{13} &= \frac{1}{4096} (1 + 390 + 17875 + 214500 + 804375 + 893750 + 203125) \\
&= \frac{1}{4096} \cdot 2134016 \\
s_{13} &= 521.
\end{aligned}$$

Veja o quanto foi rápido obter nossa solução via solução geral da recorrência, imagine o trabalho que seria obter o resultado de s_{1000} sem usar a fórmula em função apenas de n .

Problema 15. Prove que se a e b são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$ e $x_n = a^n + b^n$ onde S e P são a soma e o produto das raízes, respectivamente, então

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Temos que,

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = Sx - P.$$

Das relações de Girard, temos que $S = a + b$ e $P = a \cdot b$. Assim,

$$\begin{aligned}
Sx_{n+1} - Px_n &= S(a^{n+1} + b^{n+1}) - P(a^n + b^n) \\
&= (a + b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - (ab)(a^n + b^n) \\
&= a^{n+2} + b^{n+2} \\
&= x_{n+2}.
\end{aligned}$$

Logo, $x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n$ conforme queríamos provar. ■

Problema 16. Prove que se a e b são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$ e $x_n = \alpha a^n + \beta b^n$ então

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}
Sx_{n+1} - Px_n &= (a + b)(\alpha a^{n+1} + \beta b^{n+1}) - (ab)(\alpha a^n + \beta b^n) \\
&= \alpha a^{n+2} + \beta b^{n+2} \\
&= x_{n+2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n,$$

como queríamos.

Problema 17. Sejam a e b as raízes da equação $x^2 - 6x + 1 = 0$ e para cada inteiro positivo n , defina $x_n = a^n + b^n$, sendo assim,

a) Mostre que $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$.

b) Prove que, para todo inteiro positivo n , x_n é um inteiro não divisível por 5.

Solução. a) Note que,

$$\begin{aligned} 6x_{n+1} - x_n &= 6(a^{n+1} + b^{n+1}) - (a^n + b^n) \\ &= a^n(6a - 1) + b^n(6b - 1) \\ &= a^n \cdot a^2 + b^n \cdot b^2 \\ &= a^{n+2} + b^{n+2} \\ &= x_{n+2}. \end{aligned}$$

Veja que utilizamos o seguinte fato, como a e b são raízes da equação $x^2 - 6x + 1 = 0$, então $a^2 + 6a + 1 = 0$ o que implica que $a^2 = 6a - 1$ e analogamente, $b^2 = 6b - 1$. Desta forma, obtemos que $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$.

b) Por indução.

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b = 6 \\ x_2 &= a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 36 - 2 = 34 \\ x_3 &= 6x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}, \quad \text{uma vez que } x_2 \text{ e } x_1 \text{ são inteiros.} \end{aligned}$$

(Hipótese de Indução): Suponha que x_k e x_{k+1} são inteiros, ou seja,

$$x_{k+2} = 6x_{k+1} - x_k \in \mathbb{Z}.$$

Como $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$, tem-se,

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b = 6 \equiv 1 \pmod{5} \\ x_2 &= a^2 + b^2 = 34 \equiv -1 \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5} \\ x_3 &= 6x_2 - x_1 = 198 \equiv -2 \pmod{5} \equiv 3 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Tabela 10 – Restos não nulos na divisão por 5

n	$x_{n+2} \equiv$	$x_{n+1} - x_n \equiv$	$c \pmod{5}$	Resto
1	$x_3 \equiv$	$x_2 - x_1 \equiv$	$-2 \pmod{5}$	3
2	$x_4 \equiv$	$x_3 - x_2 \equiv$	$-1 \pmod{5}$	4
3	$x_5 \equiv$	$x_4 - x_3 \equiv$	$1 \pmod{5}$	1
4	$x_6 \equiv$	$x_5 - x_4 \equiv$	$2 \pmod{5}$	2
5	$x_7 \equiv$	$x_6 - x_5 \equiv$	$1 \pmod{5}$	1
6	$x_8 \equiv$	$x_7 - x_6 \equiv$	$-1 \pmod{5}$	4
7	$x_9 \equiv$	$x_8 - x_7 \equiv$	$-2 \pmod{5}$	3
8	$x_{10} \equiv$	$x_9 - x_8 \equiv$	$-1 \pmod{5}$	4
9	$x_{11} \equiv$	$x_{10} - x_9 \equiv$	$1 \pmod{5}$	1
10	$x_{12} \equiv$	$x_{11} - x_{10} \equiv$	$2 \pmod{5}$	2
11	$x_{13} \equiv$	$x_{12} - x_{11} \equiv$	$1 \pmod{5}$	1
12	$x_{14} \equiv$	$x_{13} - x_{12} \equiv$	$-1 \pmod{5}$	4

Os restos que aparecem em módulo 5 são $\{1, 2, 3, 4\}$ e repetem um bloco de 6 em 6. Ou seja, os seis primeiros números deixam o mesmo resto que os números que vão de x_7 ao x_{12} respectivamente.

Desta forma, concluímos que,

$$x_n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}.$$

ou seja, sempre será um número não divisível por 5.

Problema 18. Prove que, para todo inteiro positivo n , o número $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ é ímpar. $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a x .

Solução. Veja a Tabela a seguir para alguns valores assumidos por n .

Tabela 11 – Alguns valores para número piso.

n	$\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$	=	?
0	$\lfloor (2 + \sqrt{3})^0 \rfloor$	=	1
1	$\lfloor (2 + \sqrt{3})^1 \rfloor$	=	3
2	$\lfloor (2 + \sqrt{3})^2 \rfloor$	=	13
3	$\lfloor (2 + \sqrt{3})^3 \rfloor$	=	51
4	$\lfloor (2 + \sqrt{3})^4 \rfloor$	=	193

Definindo $x_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$. Pois tanto o número $(2 + \sqrt{3})$ quanto $(2 - \sqrt{3})$ são raízes de uma equação do 2º grau com coeficientes inteiros. Então, analogamente ao Problema 15 teremos que:

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n$$

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n,$$

uma vez que $S = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$ e $P = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$.

Assim,

$$x_0 = (2 + \sqrt{3})^0 + (2 - \sqrt{3})^0 = 2 \text{ e } x_1 = (2 + \sqrt{3})^1 + (2 - \sqrt{3})^1 = 4.$$

Desta forma, como $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, significa que todos os termos da sequência são pares, pois o primeiro e o segundo termo são pares, e a recorrência x_{n+2} é a diferença de termos pares. Sendo assim, x_n é par para todo número inteiro positivo n .

Logo, de $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, obtemos:

$$\begin{aligned}x_2 &= 4x_1 - x_0 = 14 \\x_3 &= 4x_2 - x_1 = 52 \\x_4 &= 4x_3 - x_2 = 194 \\x_5 &= 4x_4 - x_3 = 724.\end{aligned}$$

Veja que $x_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$ e além disso, $0 < (2 - \sqrt{3}) < 1$ implica que $0 < (2 - \sqrt{3})^n < 1$.

Desta forma, teremos que $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor = x_n - 1$.

Ora, como X_n é sempre par, isso significa que $x_n - 1$ será sempre ímpar. Veja a Tabela a seguir para uma melhor ilustração:

Tabela 12 – Valores: número piso \times sequência x_n .

n	$\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$	x_n
0	1	2
1	3	4
2	13	14
3	51	52
4	193	194
5	723	724
\vdots	\vdots	\vdots

Desta forma, concluímos que para todo inteiro positivo n , o número $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ é sempre ímpar.

Problema 19. (MORGADO; CARVALHO, 2022) Cinco times de igual força disputarão todo ano um torneio. Uma taça será ganha pelo primeiro time que vencer três vezes consecutivas. Qual a probabilidade da taça não ser ganha nos n primeiros torneios?

Solução. Seja p_n a probabilidade de que a taça não seja ganha nos n primeiros torneios. Vamos caracterizar p_{n+2} em função de p_{n+1} e p_n .

Primeiramente, temos que o primeiro torneio pode ser ganho por qualquer um dos cinco times, com isso, duas alternativas podem ocorrer para caracterizarmos recursivamente os $n + 2$ torneios.

- O time que ganhou o primeiro torneio não ganhar o segundo, o que pode acontecer com probabilidade igual a $\frac{4}{5}$. Isso ocorrendo, será como se a série de torneios estivesse começando no segundo torneio. Assim, considerando que os torneios iniciaram a partir do segundo (sem perda de generalidade), temos que esta alternativa tem probabilidade igual a $\frac{4}{5}p_{n+1}$ de acontecer.

- O time que ganhou o primeiro torneio, ganhar o segundo, mas não ganhar o terceiro, o que pode acontecer com probabilidade igual à $\left(\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{4}{5}\right)$. Assim, considerando que os torneios iniciaram a partir do segundo (conforme a alternativa anterior), temos que esta possibilidade tem probabilidade igual a $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} p_n$, ou seja, $\frac{4}{25} p_n$ de acontecer.

Portanto, temos que a probabilidade de que a taça não seja ganha nos $n+2$ primeiros torneios é caracterizada recursivamente pela recorrência $p_{n+2} = \frac{4}{5} p_{n+1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} p_n$.

Ou ainda,

$$p_{n+2} - \frac{4}{5} p_{n+1} - \frac{4}{25} p_n = 0,$$

com $p_1 = p_2 = 1$ (já que a taça certamente não é ganha nas duas primeiras realizações).

Assim, a equação característica associada a recorrência homogênea encontrada é dada por:

$$r^2 - \frac{4}{5} r - \frac{4}{25} = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{5}$ e $r_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{5}$. Sendo assim, como $r_1 \neq r_2$ temos que a solução geral da recorrência linear de 2ª ordem é dada por:

$$p_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n,$$

onde C_1 e C_2 são determinadas pelas condições $p_1 = p_2 = 1$. Sendo assim, teremos:

$$p_n = C_1 \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{5}\right)^n + C_2 \left(\frac{2 - 2\sqrt{2}}{5}\right)^n.$$

Aplicando as condições iniciais $p_1 = p_2 = 1$, teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{5}\right) + C_2 \left(\frac{2 - 2\sqrt{2}}{5}\right) = 1 \\ C_1 \left(\frac{12 + 8\sqrt{2}}{25}\right) + C_2 \left(\frac{12 - 8\sqrt{2}}{25}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{16} \\ C_2 = \frac{10 - 5\sqrt{2}}{16} \end{cases}.$$

Logo, substituindo os valores encontrados para as constantes C_1 e C_2 , teremos que a solução geral será dada por:

$$p_n = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{16} \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{5}\right)^n + \frac{10 - 5\sqrt{2}}{16} \left(\frac{2 - 2\sqrt{2}}{5}\right)^n.$$

Problema 20. (PINHEIRO et al., 2013) De quantas maneiras diferentes podemos organizar n dominó's 2×1 em uma caixa $2 \times n$ sem contar as possíveis permutações entre as peças?

Solução. Vamos analisar alguns casos para compreender melhor o que está acontecendo. Para isso, vamos representar pela letra V e H , respectivamente, as posições vertical e horizontal que o dominó pode ser posicionado na caixa.

- Para $n = 1$ teremos UMA única possibilidade que é colocar na posição $\{V\}$.
- Para $n = 2$ teremos DUAS possibilidades que serão: $\{VV\}$ ou $\{H\}$.
- Para $n = 3$ teremos TRÊS possibilidades: $\{VVV\}$ ou $\{VH\}$ ou $\{HV\}$.
- Para $n = 4$ teremos CINCO possibilidades: $\{VVVV\}$ ou $\{VVH\}$ ou $\{VHV\}$ ou $\{HH\}$ ou $\{HVV\}$.

Analisando esses casos particulares, e sendo x_n o número de maneiras diferentes que podemos organizar n dominó's 2×1 numa caixa $2 \times n$, percebemos que:

$$x_3 = x_2 + x_1 \quad e \quad x_4 = x_3 + x_2,$$

o que intuitivamente nos leva a concluir que:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Vamos justificar que de fato a relação de recorrência dada anteriormente é válida. Para isso, como temos uma caixa de tamanho $2 \times n$, temos duas formas de começarmos organizar os dominó's nessa caixa. Ou colocamos um dominó na vertical $\{V\}$ ou dois dominó's na horizontal $\{H\}$. Então vamos analisar esses dois casos:

i) Começar com um dominó na vertical $\{V\}$.

Se começarmos com um dominó na vertical, sobrarão uma caixa de tamanho $2 \times (n - 1)$, pois já se utilizou um espaço 2×1 da caixa, ao ser posicionado o primeiro dominó.

Portanto, teremos x_{n-1} maneiras de organizar os dominó's na caixa começando com um dominó na posição vertical.

ii) Começar com dois dominó's na horizontal $\{H\}$.

Se começarmos com dois dominó's na horizontal, sobrarão uma caixa de tamanho $2 \times (n - 2)$, pois já se utilizou um espaço 2×2 da caixa, ao ser posicionado o primeiro dominó.

Portanto, teremos x_{n-2} maneiras de organizar os dominó's na caixa começando com dois dominó's na posição horizontal.

Como devemos ter qualquer um dos dois casos acima, segue que a relação de recorrência será dada por:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

A equação característica associada a recorrência homogênea acima é dada por:

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

cujas raízes são dadas por: $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Desta forma, a solução geral da recorrência é dada por:

$$x_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para determinarmos os valores das constantes C_1 e C_2 utilizaremos as condições iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, formando assim, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \\ C_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \end{cases}.$$

Portanto, a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Problema 21. (DUARTE, 2018) Quantas são as senhas de n termos, em que seus caracteres pertencem a um conjunto definido por 1 letra e 2 algarismos que não possua dois algarismos adjacentes?

Solução. Sem perda de generalidade, vamos considerar o conjunto de caracteres descrito dado por $\{A, 1, 2\}$. Seja x_n o número de senhas procurado pelo enunciado do problema.

Sendo assim, para $n = 1$, ou seja, senhas formadas apenas com 1 único termo, teremos as seguintes possibilidades: $A, 1$ ou 2 , ou seja, teremos 3 possibilidades possíveis ($x_1 = 3$).

Para senhas formadas com 2 termos tem-se: cada senha de 1 termo que termina em letra, dá origem a mais três senhas ($AA, A1, A2$). No entanto, quando termina em algarismo, só dá origem a mais uma senha ($1A, 2A$). Assim, temos 5 possibilidades possíveis ($x_2 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$).

Para senhas com 3 termos, pode-se acrescentar os algarismos 1 ou 2 depois de todas as senhas de x_2 que terminam em A , assim como também, podemos acrescentar A em todas as senhas de x_2 , veja tais possibilidades listadas a seguir:

$$(AA1, AA2, 1A1, 1A2, 2A1, 2A2) + (AAA, A1A, A2A, 1AA, 2AA).$$

Sendo assim, $x_3 = 5 + 3 + 3 = 5 + 2 \cdot 3$. Percebe-se que $5 = x_2$ e $2 \cdot 3 = 2 \cdot x_1$. Daí, $x_3 = x_2 + 2x_1 = 11$.

Para senhas com 4 termos, teremos de modo análogo ao que fizemos anteriormente, acrescenta-se 1 ou 2 depois de todas as senhas de x_3 que terminam com a letra A que corresponde ao número de senhas de x_2 , logo são $2 \cdot x_2 = 2 \cdot 5 = 10$. Pode-se também acrescentar A no final de todas as senhas de x_3 , logo são mais $x_3 = 11$ senhas. Sendo assim, $x_4 = x_3 + 2x_2 = 11 + 2 \cdot 5 = 21$.

Para senhas de 5 termos, analisando como feito nos casos anteriormente, pode-se fazer recursivamente:

$$\begin{aligned}x_5 &= x_4 + 2x_3 \\x_5 &= 21 + 2 \cdot 11 \\x_5 &= 43.\end{aligned}$$

Assim, somos levados a perceber, por argumentos de recursividade, que temos como solução geral para esse problema a seguinte recorrência:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n.$$

Veja que podemos associar a recorrência anterior a equação característica dada por:

$$r^2 - r - 2 = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$.

Assim, a solução geral da recorrência homogênea é dada por:

$$x_n = C_1 2^n + C_2 (-1)^n.$$

Para encontrarmos as constantes C_1 e C_2 utilizaremos as condições $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$ e resolveremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2C_1 - C_2 = 3 \\ 4C_1 + C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{4}{3} \\ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Desta forma, a solução geral da recorrência homogênea é dada por:

$$\begin{aligned}x_n &= C_1 2^n + C_2 (-1)^n \\x_n &= \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} (-1)^n.\end{aligned}$$

Problema 22. Quantas são as senhas de n termos, em que seus caracteres pertencem a um conjunto definido por 2 letras e 1 algarismo que não possua dois algarismos adjacentes?

Solução. Seja x_n o número de senhas procurado pelo enunciado do problema. Consideraremos o conjunto de caracteres sem perda de generalidade descrito dado por $\{A, B, 1\}$. Vamos proceder de forma análoga ao que fizemos no problema anterior. Sendo assim,

- Para senhas de 1 termo, teremos três possibilidades $x_1 = 3$ (A ou B ou 1).
- Para senhas com 2 termos, tem-se: cada senha de 1 termo que termina em letra dar origem a mais 3 senhas ($AA, AB, A1, BA, BB, B1$). No entanto, quando termina em algarismo, só dar origem a mais 2 senhas ($1A, 1B$). Temos então, 8 senhas possíveis ($x_2 = 2 + 3 \cdot 2$).
- Para senhas com 3 termos, pode-se acrescentar 1 depois de todas as senhas de x_2 que não terminam em 1, também pode-se acrescentar A ou B em todas as senhas de x_2 . Não podemos deixar de perceber que $2 \cdot x_1 = 2 \cdot 3 = 6$ e $2 \cdot x_2 = 2 \cdot 8 = 16$. Assim,

$$x_3 = 2x_1 + 2x_2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 22.$$

- Para senhas com 4 termos, de modo análogo, pode-se acrescentar 1 depois de todas as senhas de x_3 que não terminam em 1, o que corresponde ao dobro das senhas de x_2 , logo são $2 \cdot x_2 = 16$. Pode-se também acrescentar A ou B em todas as senhas de x_3 , logo são $2 \cdot x_3 = 2 \cdot 22 = 44$, sendo assim:

$$x_4 = 2x_2 + 2x_3 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 22 = 60.$$

- Senhas com 5 termos. Analisando como nos casos anteriores, pode-se fazer recursivamente:

$$\begin{aligned} x_5 &= 2x_3 + 2x_4 \\ &= 2 \cdot 22 + 2 \cdot 60 = 164. \end{aligned}$$

Analisando os casos acima, conjecturamos que a recorrência para a solução do problema é dada por:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n.$$

A equação característica associada a recorrência homogênea de 2ª ordem anterior é dada por:

$$r^2 - 2r - 2 = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{3}$.

Sendo assim, a solução geral da recorrência é dada por:

$$x_n = C_1(1 + \sqrt{3})^n + C_2(1 - \sqrt{3})^n.$$

Para determinar as constantes C_1 e C_2 , aplicaremos as condições iniciais $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, obtendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1(1 + \sqrt{3}) + C_2(1 - \sqrt{3}) = 3 \\ C_1(1 + \sqrt{3})^2 + C_2(1 - \sqrt{3})^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \\ C_2 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} \end{cases}.$$

Portanto, a solução geral é dada por:

$$x_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^n.$$

Problema 23. (DUARTE, 2018) Quantas são as senhas de n termos, em que seus caracteres pertencem a um conjunto definido por L letras e K algarismos que não possua dois algarismos consecutivos.

Solução. Seja x_n o número de senhas de n termos que satisfazem o enunciado do problema. Assim,

- Para senhas de 1 termo, teremos $x_1 = L + K$ possibilidades.
- Para senhas de 2 termos serão $x_2 = L(L + 2K)$, pois em todas as senhas de x_1 podemos acrescentar qualquer uma das L letras, ou seja $L(L + K)$ e mais, em todas as senhas de x_1 formadas por letras, que são L letras, podemos acrescentar qualquer um dos K algarismos, logo teremos $L \cdot K$ senhas, então:

$$x_2 = L(L + K) + LK = L^2 + 2LK = L(L + 2K).$$

- Senhas com 3 termos, assim como fizemos nos casos anteriores, vamos dividir em dois casos:
 - Senhas terminadas em letras: As senhas de x_3 que terminam em letra serão todas as senhas de x_2 acrescentadas por qualquer uma das L letras, logo teremos, $L \cdot x_2$ possibilidades.
 - Senhas terminadas em números: As senhas de x_3 terminadas em letras serão formadas acrescentando qualquer um dos K algarismos no final de todas as senhas de x_2 que terminam em letras, que por sua vez, são as senhas de x_1 acrescentadas por qualquer uma das L letras, logo são $K(L \cdot x_1)$. Assim, teremos:

$$x_3 = L \cdot x_2 + K \cdot L \cdot x_1,$$

com $x_1 = K + L$ e $x_2 = L(L + 2K)$, conforme vimos anteriormente.

- *Senhas com 4 termos: A partir daqui, faremos uso do raciocínio recursivo, onde se determina:*

$$x_4 = Lx_3 + KLx_2.$$

Procedendo de maneira análoga ao que fizemos nos casos anteriores, teremos:

$$x_{n+2} = Lx_{n+1} + KLx_n, \quad (5.5)$$

com $n \geq 1$, $x_1 = K + L$ e $x_2 = L(L + 2K)$.

Sendo $x_2 = L(L + 2K)$ e $x_2 = Lx_1 + KLx_0$, obtemos que $x_0 = 1$, pois:

$$\begin{aligned} L(L + 2K) &= Lx_1 + KLx_0 \\ L^2 + 2KL &= L(L + K) + KLx_0 \\ L^2 + KL + KL &= L^2 + KL + KLx_0 \quad \Leftrightarrow x_0 = 1. \end{aligned}$$

A equação característica associada a recorrência (5.5) é dada por:

$$r^2 - Lr - KL = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2}$ e $r_2 = \frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2}$.

Desta forma, temos que a solução geral da recorrência homogênea é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n \\ x_n &= C_1 \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Para determinarmos as constantes reais C_1 e C_2 , utilizaremos as condições $x_0 = 1$ e $x_1 = K + L$, formando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 &= 1 \\ C_1 \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right) &= K + L. \end{cases}$$

Como $C_1 + C_2 = 1$, implica que $C_1 = 1 - C_2$ e portanto:

$$\begin{aligned} C_1 \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right) &= K + L \\ (1 - C_2) \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right) &= K + L \\ (1 - C_2) (L + \sqrt{L^2 + 4KL}) + C_2 (L - \sqrt{L^2 + 4KL}) &= 2K + 2L \\ C_2 (L - \sqrt{L^2 + 4KL} - L - \sqrt{L^2 + 4KL}) &= 2K + L - \sqrt{L^2 + 4KL} \\ C_2 (-2\sqrt{L^2 + 4KL}) &= 2K + L - \sqrt{L^2 + 4KL} \\ C_2 &= \frac{-(2K + L) + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2\sqrt{L^2 + 4KL}}. \end{aligned}$$

Como $C_1 = 1 - C_2$, teremos:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - \frac{-(2K + L) + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2\sqrt{L^2 + 4KL}} \\ C_1 &= \frac{(2K + L) + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2\sqrt{L^2 + 4KL}}. \end{aligned}$$

Desta forma, a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n \\ &= C_1 \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^n \\ &= \left[\frac{(2K + L) + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right] \left(\frac{L + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^n + \left[\frac{-(2K + L) + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right] \left(\frac{L - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^n \quad (5.6) \end{aligned}$$

onde $\Delta = L^2 + 4KL$.

Vamos testar a veracidade da fórmula geral encontrada anteriormente em (5.6) no problema (22) para sequências com 3 termos, formado por 2 letras ($L = 2$) e 1 algarismo ($K = 1$), ou seja, vamos encontrar o valor x_3 e verificar se o resultado será 22 que foi o encontrado no referido problema.

Como $L = 2$, $K = 1$ e $\Delta = L^2 + 4KL$, teremos que: $\Delta = 12$. Sendo assim, substituindo $n = 3$ e esses valores em (5.6) obtemos:

$$\begin{aligned} x_3 &= \left[\frac{(2 + 2) + \sqrt{12}}{2\sqrt{12}} \right] \left(\frac{2 + \sqrt{12}}{2} \right)^3 + \left[\frac{-(2 + 2) + \sqrt{12}}{2\sqrt{12}} \right] \left(\frac{2 - \sqrt{12}}{2} \right)^3 \\ &= \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) (1 + \sqrt{3})^3 + \left(\frac{-2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) (1 - \sqrt{3})^3 \\ &= \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) (10 + 6\sqrt{3}) + \left(\frac{-2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) (10 - 6\sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} (10 + 6\sqrt{3} + 10 - 6\sqrt{3}) + \frac{1}{\sqrt{3}} (10 + 6\sqrt{3} - 10 + 6\sqrt{3}) = 22. \end{aligned}$$

Problema 24. (SÁ et al., 2020) Considere o conjunto das palavras formadas pelas letras A, B e C (com ou sem significado) escritas de modo que não haja duas consoantes consecutivas, por exemplo, CAB e $CABA$. Seja x_n a quantidade dessas palavras de n letras satisfazendo as condições do enunciado.

- Determine os valores de x_1 , x_2 e x_3 .
- Justifique a igualdade $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$.
- Resolva a recorrência dada em b) obtendo uma fórmula geral para n .

d) Calcule quantas palavras de 10 letras podem ser formadas satisfazendo as condições acima.

Solução.

a) Considerando as palavras com apenas 1 letra teremos: $x_1 = 3$ possibilidades A, B ou C.

Para palavras com 2 letras teremos $x_2 = 5$ possibilidades a saber: AA, AB, AC, BA ou CA.

Para palavras com 3 letras teremos $x_3 = 11$ possibilidades: AAA, AAB, AAC, ABA, ACA, BAA, BAB, BAC, CAA, CAB ou CAC.

b) Para $n \geq 1$, seja x_n o número de palavras de $(n+2)$ letras satisfazendo as condições do enunciado. Para $n \geq 3$, uma palavra de n letras pode terminar em A, B ou C.

- Se terminar em A, as $(n+1)$ letras anteriores podem formar qualquer uma das x_{n+1} palavras de $(n+1)$ letras satisfazendo as condições do enunciado.
- Se terminar em B ou C, a penúltima letra deve necessariamente ser A, obedecendo a condição de não podermos ter duas consoantes consecutivas e as n letras iniciais podem formar qualquer uma das x_n palavras de n letras satisfazendo as condições do enunciado.

Então como acontece qualquer um dos casos acima, teremos que:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n,$$

conforme queríamos.

c) Note que a equação característica associada a recorrência linear de 2ª ordem homogênea $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 0$ é dada por:

$$r^2 - r - 2 = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$.

Logo a solução geral dessa recorrência é dada por:

$$x_n = C_1 2^n + C_2 (-1)^n.$$

Para encontrarmos os valores das constantes C_1 e C_2 utilizaremos os valores encontrados no item a) $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$, formando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2C_1 - C_2 = 3 \\ 4C_1 + C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{4}{3} \\ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Desta forma, a solução geral da recorrência é dada por:

$$x_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3}(-1)^n.$$

d) Fazendo $n = 10$ na expressão encontrada no item c) teremos:

$$\begin{aligned} x_{10} &= \frac{4}{3} \cdot 2^{10} - \frac{1}{3} \cdot (-1)^{10} \\ &= \frac{4}{3} \cdot 1024 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{4095}{3} \\ &= 1365. \end{aligned}$$

Portanto, podem ser feitas 1365 palavras com 10 letras pertencentes ao conjunto de letras formado por A, B, C de modo que não haja duas consoantes consecutivas conforme o enunciado do problema.

Problema 25 (OBM - 1997 - Nível sênior). *Os vértices de um decágono regular $ABCD \dots IJ$ devem ser coloridos usando-se apenas as cores Verde, Amarela ou Preta. De quantos modos isso pode ser feito se vértices adjacentes não podem receber a mesma cor?*

Solução. *Seja p_n a quantidade de maneiras de colorir um polígono regular de n lados usando as condições do enunciado do problema.*

Para compreender melhor o problema, vamos analisar alguns casos. De quantos modos podemos colorir os vértices de um triângulo e de um quadrado? Ou seja, estamos buscando encontrar os valores de p_3 e p_4 .

Vamos analisar p_3 . Seja um triângulo regular de vértices ABC . Para pintar o vértice A temos 3 modos, uma vez escolhida a cor, resta 2 cores para pintar o vértice B e já fica determinada a cor do vértice C , pois é a cor que resta. Portanto, temos que $p_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Para pintar os vértices do quadrado, não é possível fazer da maneira que fizemos para o triângulo, pois os vértices opostos A e C podem ser coloridos da mesma cor ou cores diferentes. Sendo assim, devemos dividir em dois casos:

- CASO 1 : *Os vértices A e C serão coloridos da mesma cor.*
- CASO 2 : *Os vértices A e C serão coloridos de cores diferentes.*

Vamos analisar o caso 1. Sem perda de generalidade vamos admitir que a cor do vértice A seja PRETA e a do vértice B seja AMARELA.

Note que a cor do vértice C já fica determinada e é PRETA. Veja que para o vértice D restará 2 opções (VERDE ou AMARELA), ou seja, teremos 2 possibilidades para o caso em que o vértice A e C sejam coloridos da mesma cor.

Vamos analisar o caso 2. Considere que o vértice A foi pintado na cor PRETA e o vértice B na cor AMARELA, como a cor de A e C são diferentes, logo a cor de C fica determinada, não pode ser PRETA e nem AMARELA, logo só poderá ser VERDE. Com isso, a cor do vértice D também já fica determinada, porque não pode ser nem PRETA e nem VERDE, logo teremos apenas a cor AMARELA. Ou seja, nesse caso teremos apenas 1 possibilidade.

Assim, fixando as cores de A e B temos 3 possibilidades para colorir o quadrado. Mas como temos 6 maneiras de escolher as cores de A e B , significa que $p_4 = 6 \times 3 = 18$ modos de colorir o quadrado.

Diante disso, como podemos colorir o polígono com n lados satisfazendo as condições do problema?

Para responder a essa pergunta, vamos definir duas sequências auxiliares dadas por:

- q_n é a quantidade de maneiras de pintar o polígono nas condições do enunciado quando a cor do vértice A for igual a cor do vértice C .
- r_n é a quantidade de maneiras de pintar o polígono quando a cor de A for diferente da cor de C .

Veja que a quantidade p_n de maneiras de colorir o polígono já está definida e é dada por:

$$p_n = q_n + r_n.$$

Agora vamos encontrar a relação de recorrência de q_n e de r_n . No caso de q_n temos que as cores dos vértices A e C são iguais. Então consideremos um polígono de n lados e retiramos os vértices C e B , pois o vértice C tem a mesma cor de A e para o vértice B teremos 2 possibilidades. Então sobrarão $n - 2$ vértices do polígono n denotado por $ADEFG\dots$, quando removemos os vértices B e C .

Portanto, $q_n = p_{n-2} \cdot 2 = 2p_{n-2}$, ou seja, será igual a quantidade de modos de colorir os $n - 2$ vértices que é p_{n-2} e a quantidade de colorir o vértice B que poderá ser pintado de 2 modos.

Agora encontremos a relação de r_n . Considere o polígono de n lados e retiramos o vértice B . Assim existem p_{n-1} maneiras de colorir os vértices do polígono $ACDEF\dots$. Note que uma vez colorido esse polígono a cor de B está determinada (a cor diferente de A e C). Logo teremos que $r_n = p_{n-1}$.

Portanto, a quantidade de maneiras de colorir os vértices de um polígono de n lados é dada por:

$$\begin{aligned} p_n &= q_n + r_n \\ &= 2p_{n-2} + p_{n-1}. \end{aligned}$$

A equação característica associada a recorrência encontrada é dada por $r^2 - r - 2 = 0$, cujas raízes são $r_1 = -1$ e $r_2 = 2$.

Diante disso, a solução geral é dada por:

$$p_n = C_1(-1)^n + C_22^n.$$

Para determinar os valores das constantes C_1 e C_2 vamos utilizar as condições $p_3 = 6$ e $p_4 = 18$ na solução anterior, formando o sistema de equações:

$$\begin{cases} -C_1 + 8C_2 = 6 \\ C_1 + 16C_2 = 18 \end{cases},$$

cuja solução é $C_1 = 2$ e $C_2 = 1$.

Portanto, como determinamos os valores das constantes C_1 e C_2 , segue que a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} p_n &= C_1(-1)^n + C_22^n \\ &= 2(-1)^n + 2^n. \end{aligned}$$

Como no problema estamos procurando a quantidade de maneiras de colorir os vértices de um decágono, basta fazer $n = 10$ na solução anterior, assim:

$$\begin{aligned} p_{10} &= 2(-1)^{10} + 2^{10} \\ &= 1026. \end{aligned}$$

Problema 26 (Primeiro Teste Cone Sul Brasil-2020). *Maria tem 14 dias para se preparar para uma olimpíada. Se ela treina 3 dias seguidos, terá fadiga muscular. Mas, se ela não treina por 3 dias seguidos, terá atrofia muscular. Ela então decide planejar quais dias, dentre os 14, ela irá treinar, e quais não irá treinar, de modo que ela nunca treine 3 dias seguidos nem fique sem treinar 3 dias seguidos. De quantas maneiras diferentes Maria pode montar seu plano de treino?*

Solução. *Vamos representar as rotinas de treinos com uma sequência de letras T e N onde T representa os dias que Maria treinará e N os dias que ela não treinará.*

Seja X_n a quantidade de sequências possíveis com n letras. Para uma melhor compreensão, vamos analisar alguns casos. Para $n = 1$ teremos $X_1 = 2$ pois as possíveis sequências são T ou N. Para $n = 2$ teremos $X_2 = 4$ pois são as sequências NN, TT, NT ou TN.

Veja que se tomarmos $n = 3$ devemos tomar o cuidado com as sequências TTT ou NNN que não pode ocorrer de acordo com o enunciado do problema. Então vamos utilizar uma estratégia para estudar os casos onde $n \geq 3$.

Sejam X_n^{AB} a quantidade de seqüências possíveis com n letras que terminam em AB , onde A e B podem ser T ou N . Assim, uma seqüência de treinos ou ela termina em TT , ou em NN , ou em TN ou em NT , ou seja,

$$X_n = X_n^{TT} + X_n^{NN} + X_n^{NT} + X_n^{TN}. \quad (5.7)$$

Vamos analisar cada uma dessas situações que pode terminar o treino. Iniciaremos analisando as seqüências X_n^{TT} ou seja, as seqüências que terminam com dois treinos consecutivos. Para isso vamos analisar as seqüências com $n-1$ termos e o último termo será treinar (T).

$$\begin{aligned} X_n^{TT} &= \underbrace{\dots TT}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_T + \underbrace{\dots NN}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_T + \underbrace{\dots NT}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{1}_T + \underbrace{\dots TN}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_T \\ X_n^{TT} &= X_{n-1}^{NT}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Justificando o resultado anterior. Como estamos analisando o caso da seqüência terminar com 2 treinos, o primeiro elemento não podemos contar, uma vez que teríamos uma seqüência terminada com 3 treinos, o segundo terminaria com NT e o quarto elemento terminaria com NT .

Agora vamos analisar as situações que termina sem dois treinos seguidos, ou seja, as situações terminadas em NN . Assim,

$$\begin{aligned} X_n^{NN} &= \underbrace{\dots TT}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_N + \underbrace{\dots NN}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_N + \underbrace{\dots NT}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_N + \underbrace{\dots TN}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{1}_N \\ X_n^{NN} &= X_{n-1}^{TN}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

A justificativa ocorre de modo totalmente análogo ao caso anterior.

As situações que terminam com TN são:

$$\begin{aligned} X_n^{TN} &= \underbrace{\dots TT}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{1}_N + \underbrace{\dots NN}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_N + \underbrace{\dots NT}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{1}_N + \underbrace{\dots TN}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_N \\ X_n^{TN} &= X_{n-1}^{TT} + X_{n-1}^{NT}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

As situações que terminam com NT são:

$$\begin{aligned} X_n^{NT} &= \underbrace{\dots TT}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_T + \underbrace{\dots NN}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{1}_T + \underbrace{\dots NT}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{0}_T + \underbrace{\dots TN}_{X_{n-1}} \cdot \underbrace{1}_T \\ X_n^{NT} &= X_{n-1}^{NN} + X_{n-1}^{TN}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Sendo assim, substituindo (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11) em (5.7) obtemos:

$$\begin{aligned} X_n &= X_n^{TT} + X_n^{NN} + X_n^{NT} + X_n^{TN} \\ &= X_{n-1}^{NT} + X_{n-1}^{TN} + (X_{n-1}^{NN} + X_{n-1}^{TN}) + (X_{n-1}^{TT} + X_{n-1}^{NT}) \\ &= \underbrace{X_{n-1}^{TT} + X_{n-1}^{NN} + X_{n-1}^{NT} + X_{n-1}^{TN}}_{X_{n-1}} + X_{n-1}^{TN} + X_{n-1}^{NT} \\ &= X_{n-1} + X_{n-1}^{TN} + X_{n-1}^{NT}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ora, substituindo n por $n - 1$ em (5.10) obtemos:

$$X_{n-1}^{TN} = X_{n-2}^{TT} + X_{n-2}^{NT}. \quad (5.13)$$

E de modo análogo, substituindo n por $n - 1$ em (5.11) obtemos:

$$X_{n-1}^{NT} = X_{n-2}^{NN} + X_{n-2}^{TN}. \quad (5.14)$$

Agora substituindo (5.13) e (5.14) em (5.12) obtemos:

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} + X_{n-1}^{TN} + X_{n-1}^{NT} \\ &= X_{n-1} + (X_{n-2}^{TT} + X_{n-2}^{NT}) + (X_{n-2}^{NN} + X_{n-2}^{TN}) \\ &= X_{n-1} + \underbrace{X_{n-2}^{TT} + X_{n-2}^{NN} + X_{n-2}^{NT} + X_{n-2}^{TN}}_{X_{n-2}} \\ &= X_{n-1} + X_{n-2}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$ é a recorrência que determina de quantas maneiras uma pessoa pode organizar dentre n dias, os dias que irá treinar ou não, respeitando as condições propostas no enunciado desse problema.

Como Maria tem 14 dias para se organizar em treinar ou não, vamos encontrar de quantos modos ela poderá montar o seu plano de treino. Como $x_1 = 2$ e $X_2 = 4$ e usando a relação de recorrência encontrada anteriormente, teremos:

$$\begin{array}{rclclcl} X_3 & = & X_2 + X_1 & = & 4+2 & = & 6 \\ X_4 & = & X_3 + X_2 & = & 6+4 & = & 10 \\ X_5 & = & X_4 + X_3 & = & 10+6 & = & 16 \\ X_6 & = & X_5 + X_4 & = & 16+10 & = & 26 \\ X_7 & = & X_6 + X_5 & = & 26+16 & = & 42 \\ X_8 & = & X_7 + X_6 & = & 42+26 & = & 68 \\ X_9 & = & X_8 + X_7 & = & 68+42 & = & 110 \\ X_{10} & = & X_9 + X_8 & = & 110+68 & = & 178 \\ X_{11} & = & X_{10} + X_9 & = & 178+110 & = & 288 \\ X_{12} & = & X_{11} + X_{10} & = & 288+178 & = & 466 \\ X_{13} & = & X_{12} + X_{11} & = & 466+288 & = & 754 \\ X_{14} & = & X_{13} + X_{12} & = & 754+466 & = & 1220. \end{array}$$

Portanto, Maria terá 1220 maneiras de montar seu plano de treino respeitando as condições para não apresentar fadiga muscular e nem atrofia.

Poderíamos ter resolvido a recorrência linear de 2ª ordem e encontrado a fórmula fechada em função de n que representa a quantidade de dias que uma pessoa pode se preparar para uma determinada situação com as condições do enunciado desse problema.

Sendo assim, considere a recorrência $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$ com as condições $X_1 = 2$ e $X_2 = 4$. Podemos associar a essa recorrência a equação característica $r^2 - r - 1 = 0$,

cujas raízes são: $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Como encontramos duas raízes distintas para a equação característica, a solução geral dessa recorrência é dada por:

$$X_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para determinar as constantes C_1 e C_2 , vamos aplicar as condições $X_1 = 2$ e $X_2 = 4$ na expressão anterior e formar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 2 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 4 \end{cases},$$

cuja solução é $C_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{5}$ e $C_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}$.

Portanto,

$$X_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Fazendo $n = 14$ na expressão anterior, encontraremos $X_{14} = 1220$.

Problema 27. Num certo local a população de uma determinada espécie é contada no fim de cada ano, desde há 10 anos. Designando por p_{n+1} o número de elementos da espécie quando da $(n + 1)$ -ésima contagem, sabe-se que $p_0 = 200$ (isto é, há 10 anos havia 200 elementos da espécie em questão) e $p_1 = 400$, e verificou-se que no fim de cada ano, o número de elementos da espécie em questão era igual ao quádruplo do crescimento que essa população teve no ano anterior (ao que acabou de findar). A manter-se esta relação no futuro, qual a população da espécie daqui a 5 anos?

Solução. Pelos dados retirados do enunciado, teremos as condições iniciais $p_0 = 200$, $p_1 = 400$ e a relação de recorrência dada por:

$$p_{n+2} = 4(p_{n+1} - p_n).$$

A equação característica associada a recorrência anterior é $r^2 - 4r + 40 = 0$, cujas raízes são: $r_1 = r_2 = 2$.

Portanto, a solução geral é dada por:

$$p_n = C_1 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n.$$

Aplicando as condições $p_0 = 200$ e $p_1 = 400$ na solução geral, teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 & = 200 \\ 2C_1 + 2C_2 & = 400 \end{cases},$$

cuja solução é $C_1 = 200$ e $C_2 = 0$.

Sendo assim, a solução geral do problema é dada por:

$$p_n = 200 \cdot 2^n,$$

e conseqüentemente a população dessa localidade daqui a 5 anos é dada por:

$$\begin{aligned} p_{20} &= 200 \cdot 2^5 \\ &= 25 \cdot 8 \cdot 2^5 \\ &= 25 \cdot 2^8 \\ &= (5 \cdot 2)^2 \cdot 2^6 \\ &= 2^6 \cdot 100 \\ &= 6400. \end{aligned}$$

Problema 28 (Olimpíada Iberoamericana- 1992). Sejam a_n e b_n duas seqüências de inteiros tais que $a_0 = 0$, $b_0 = 8$ e as relações $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ e $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$. Prove que $a_n^2 + b_n^2$ é um quadrado perfeito para $n > 0$ e encontre pelo menos dois valores possíveis para (a_{1992}, b_{1992}) .

Solução. Note que:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2. \quad (5.15)$$

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2. \quad (5.16)$$

Fazendo (5.15) – (5.16) obtemos:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) - (a_n - a_{n-1}).$$

Defina $r_n = a_n - a_{n-1}$, veja que r_n é chamada de razão da seqüência a_n . Assim teremos:

$$r_{n+2} = 2r_{n+1} - r_n.$$

Podemos associar a recorrência anterior a equação característica $q^2 - 2q + 1 = 0$, cujas raízes são $q_1 = q_2 = 1$. Assim, a solução geral é dada por:

$$r_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n = C_1 + C_2 n.$$

Note que r_n é uma PA de razão C_2 .

Ora, como definimos $r_n = a_n - a_{n-1}$ temos que $r_1 = a_1 - a_0 = a_1 - 0 = a_1$. e $r_2 = a_2 - a_1 = (2a_1 - a_0 + 2) - a_1 = a_1 - a_0 + 2 = a_1 + 2$.

Assim, $r_2 - r_1 = 2$, desta forma, temos que $C_2 = 2$. Mas $r_1 = a_1 = C_1 + 2 \cdot 1$ implica que $C_1 = a_1 - 2$.

Portanto,

$$\begin{aligned} r_n &= C_1 + C_2 n \\ r_n &= (a_1 - 2) + 2n \\ r_n &= a_1 + (n - 1) \cdot 2. \end{aligned}$$

Por outro lado, veja que:

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \cdots + (a_1 - a_0) \\ &= r_n + r_{n-1} + r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_2 + r_1 \\ &= \frac{(r_1 + r_n)}{2} \cdot n \\ &= [a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot 2] \frac{n}{2} \\ &= 2(a_1 + n - 1) \frac{n}{2} \\ &= n^2 + n(a_1 - 1) \\ &= n^2 + n \cdot a, \end{aligned}$$

onde $a = a_1 - 1$.

Por outro lado, temos que:

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n.$$

Ou ainda,

$$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n = b,$$

onde b é uma razão constante. Isso significa que a sequência é uma PA. Sendo assim, teremos: $b_n = b_0 + bn = 8 + bn$.

Sendo assim, devemos mostrar que $a_n^2 + b_n^2$ é um quadrado perfeito, logo:

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= (n^2 + an)^2 + (8 + bn)^2 \\ &= n^4 + 2an^3 + a^2n^2 + 64 + 16bn + b^2n^2. \end{aligned}$$

Como estamos procurando um quadrado perfeito, temos que:

$$(n^2 + an + 8)^2 = n^4 + 2an^3 + (16 + a^2)n^2 + 16an + 64.$$

Portanto, $a_n^2 + b_n^2$ é um quadrado perfeito se, e somente se:

$$n^4 + 2an^3 + a^2n^2 + 64 + 16bn + b^2n^2 = n^4 + 2an^3 + (16 + a^2)n^2 + 16an + 64.$$

Fazendo a comparação de polinômios, devemos ter:

$$\begin{cases} 16 + a^2 = a^2 + b^2 \\ 16a = 16b \end{cases},$$

o que resulta em $a = b$ e $b = \pm 4$. Agora vamos analisar os dois casos assumidos por b .

- Se $a = b$ e $b = 4$ teremos que: $a_n = n^2 + 4n$ e $b_n = 8 + 4n$ e portanto:

$$(a_{1992}, b_{1992}) = (1992^2 + 4 \cdot 1992, 8 + 4 \cdot 1992)$$

$$(a_{1992}, b_{1992}) = (3976032, 7976).$$

- Se $a = b$ e $b = -4$ teremos que: $a_n = n^2 - 4n$ e $b_n = 8 - 4n$ e portanto:

$$(a_{1992}, b_{1992}) = (1992^2 - 4 \cdot 1992, 8 - 4 \cdot 1992)$$

$$(a_{1992}, b_{1992}) = (3960096, -7960).$$

Problema 29. (MARTINS, 2014) Um corpo nos instantes 0s, 1s, 2s, 3s e 4s se encontra nas posições 2m, 3m, 6m, 11m e 18m, respectivamente. Encontre uma fórmula que defina a posição para qualquer instante n .

Solução. Vamos colocar os dados em uma Tabela, como podemos observar a seguir:

Tabela 13 – Posição do corpo no instante n

n : instante	Posição
0s	2m
1s	3m
2s	6m
3s	11m
4s	18m

Seja x_n a posição assumida pelo corpo no instante n . Assim, perceba que:

$$x_3 = 2x_1 - x_0 + 2$$

$$x_4 = 2x_2 - x_1 + 2$$

$$x_5 = 2x_4 - x_3 + 2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_{n-1} = 2x_{n-2} - x_{n-3} + 2$$

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 2.$$

Veja que a posição para o instante n é dada pela recorrência:

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 2,$$

que é uma recorrência linear de 2ª ordem não homogênea. Então para encontrarmos a fórmula fechada, é necessário resolver tal recorrência.

Mas como estamos diante de recorrência não homogênea de 2ª ordem, a solução geral é constituída de duas parcelas, uma solução da homogênea associada e uma solução particular da recorrência não homogênea conforme vimos no capítulo 3 no Teorema 3.13.

A equação característica associada a recorrência homogênea é dada por:

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = r_2 = 1$. Sendo assim, a solução da homogênea é dada por:

$$\begin{aligned} y_n &= C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n \\ &= C_1 + C_2 n. \end{aligned}$$

Agora vamos procurar uma solução particular a_n da parte não homogênea, utilizando o método desenvolvido no capítulo 4, teremos que uma solução particular para a recorrência não homogênea é dada por:

$$a_n = n^s(A),$$

onde s deve ser escolhido de forma apropriada entre os números 0, 1 ou 2. Tendo em vista que uma constante figura na solução homogênea encontrada anteriormente, s não pode ser igual a 0. O mesmo ocorre para $s = 1$, pois na homogênea temos uma parcela formada por uma constante multiplicada por n .

Assim, tomando $s = 2$, teremos que $a_n = An^2$ é uma solução particular para a recorrência $x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 2$. Logo substituindo $a_n = An^2$ na recorrência não homogênea, obtemos:

$$\begin{aligned} An^2 - 2A(n-1)^2 + A(n-2)^2 &= 2 \\ (A - 2A + A)n^2 + (4A - 4A)n + (-2A + 4A) &= 2 \\ A &= 1. \end{aligned}$$

Assim, $a_n = n^2$ é uma solução particular para a recorrência não homogênea e portanto como a solução geral é constituída das parcelas da homogênea e da particular, teremos que:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ &= C_1 + C_2 n + n^2. \end{aligned}$$

Aplicando as condições iniciais, podemos encontrar os valores das constantes C_1 e C_2 , para isso, fazemos $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$, dando origem ao sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 + 0^2 = 2 \\ C_1 + C_2 \cdot 1 + 1^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 0 \end{cases}.$$

Logo, $x_n = 2 + n^2$ é a fórmula que define a posição do corpo para qualquer instante n .

Problema 30 (Linares, Bruno-Alfonso e Barbosa (2020)-IMO 1984 - proposto pela delegação do Canadá).

Seja c um inteiro positivo. A sequência (f_n) se define como $f_1 = 1$, $f_2 = c$ e

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} + 2, \quad (n \geq 2).$$

Mostre que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $r \in \mathbb{N}$ talque $f_k f_{k+1} = f_r$.

Solução. A relação de recorrência $f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} + 2$ pode ser reescrita como:

$$f_{n+1} - f_n = f_n - f_{n-1} + 2.$$

Agora, vamos escrever a recorrência para diferentes valores de n e colocar em evidência uma soma telescópica:

$$\begin{aligned} f_3 - f_2 &= f_2 - f_1 + 2 \\ f_4 - f_3 &= f_3 - f_2 + 2 \\ f_5 - f_4 &= f_4 - f_3 + 2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n - f_{n-1} &= f_{n-1} - f_{n-2} + 2 \\ f_{n+1} - f_n &= f_n - f_{n-1} + 2. \end{aligned}$$

Somando todas as equações anteriores, obtemos:

$$f_{n+1} - f_n = f_2 - f_1 + 2(n-1).$$

Escrevendo de forma explícita a equação anterior para diferentes valores de n fica em evidência outra soma telescópica:

$$\begin{aligned} f_3 - f_2 &= (c-1) + 2 \cdot 1 \\ f_4 - f_3 &= (c-1) + 2 \cdot 2 \\ f_5 - f_4 &= (c-1) + 2 \cdot 3 \\ f_6 - f_5 &= (c-1) + 2 \cdot 4 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n - f_{n-1} &= (c-1) + 2 \cdot (n-2). \end{aligned}$$

Somando todas as equações anteriores encontramos:

$$\begin{aligned} f_n - f_2 &= (c-1)(n-2) + 2[1+2+\cdots+(n-2)] \\ f_n - f_2 &= (c-1)(n-2) + (n-1)(n-2) \\ f_n - f_2 &= n^2 - 4n + nc - 2c + 4 \\ f_n - f_2 &= n^2 + (c-4)n + 4 - 2c. \end{aligned}$$

Assim, teremos que:

$$f_n = n^2 + (c-4)n - (c-4).$$

Chamando $b = c - 4$ temos uma fórmula explícita para a sequência (f_n) :

$$f_n = n^2 + bn - b. \quad (5.17)$$

Fazendo $n = k$ e $n = k + 1$ em (5.17) teremos:

$$f_k = k^2 + bk - b \quad e \quad f_{k+1} = (k+1)^2 + b(k+1) - b.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_k \cdot f_{k+1} &= (k^2 + bk - b) \cdot [(k+1)^2 + b(k+1) - b] \\ &= (k^2 + bk - b) \cdot (k^2 + 2k + bk + 1) \\ &= k^4 + 2(b+1)k^3 + (b^2 + b + 1)k^2 - (b^2 + b)k - b. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Queremos encontrar um número natural r tal que $f_k f_{k+1} = f_r$.

Da equação anterior, sabemos que $f_k f_{k+1}$ é um polinômio de grau 4 em k e de (5.17) temos que f_r é um polinômio de grau 2 em r . Logo, devemos fazer r um polinômio de grau 2 em k . Isto é,

$$r = k^2 + pk + q, \quad (5.19)$$

onde p e q são inteiros a serem determinados.

De (5.17) e (5.19) segue que:

$$\begin{aligned} f_r &= f_{k^2+pk+q} = (k^2 + pr + q)^2 + b(k^2 + pk + q) - b \\ &= k^4 + 2pk^3 + (p^2 + 2q + b)k^2 + p(2q + b)k + (q^2 + bq - b). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Igualando os coeficientes respectivos de cada potência de k em (5.18) e (5.20) chegamos ao seguinte sistema de equações nas variáveis p e q :

$$\begin{cases} p &= b + 1 \\ p^2 + 2q &= b^2 + 1 \\ p(2q + b) &= -(b^2 + b) \\ q^2 + bq &= 0 \end{cases}.$$

Substituindo $p = b + 1$ na segunda equação do sistema obtemos $q = -b$. Logo, voltando em (5.19), o valor de r procurado é:

$$r = k^2 + (b + 1)k - b. \quad (5.21)$$

Ou ainda, utilizando $b = c - 4$,

$$r = k^2 + (c + 3)k - c + 4.$$

Temos que r é o resultado da soma e produto de inteiros, logo r será um número inteiro. Como c e k são inteiros e no mínimo 1, teremos que r é no mínimo 2.

Assim,

$$\begin{aligned} r &= k^2 + (c - 3)k - (c - 4) \\ &= [(k - 1) + 1]^2 + [(c - 1) - 2][(k - 1) + 1] - [(c - 1) - 3] \\ &= (k - 1)^2 + 2(k - 1) + 1 + (c - 1)(k - 1) + (c - 1) - 2(k - 1) - 2 - (c - 1) + 3 \\ &= (k - 1)^2 + (c - 1)(k - 1) + 2 \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

De (5.17) a equação (5.21) também pode ser escrita como:

$$r = f_k + k.$$

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} f_k f_{k+1} &= f_r \\ &= f_{f_k + k}. \end{aligned}$$

Problema 31. (MELO; ANDRADE, 2021) Considere o experimento de lançar uma moeda repetidamente até se obterem duas caras seguidas. Sendo e_n o número de experimentos para os quais duas caras são obtidas até o n -ésimo lançamento.

- Encontre uma relação de recorrência para e_n e encontre uma fórmula em função apenas de n para a recorrência encontrada.
- Use tal resultado para calcular a probabilidade de se obterem duas caras consecutivas, para o caso particular de o experimento ser realizado com até 10 lançamentos da moeda.

Solução. (a) Inicialmente, note que $e_2 = 1$, pois o experimento consiste em obter uma cara no primeiro lançamento e outra no segundo lançamento. Em seguida, note que $e_1 = 0$, uma vez que para obter duas caras consecutivas em até três lançamentos há

dois experimentos: uma cara no primeiro lançamento e outra no segundo; uma cara no segundo lançamento e outra no terceiro lançamento.

A seguir, temos três situações a considerar: ou ocorre cara no primeiro lançamento e outra no segundo, ou ocorre coroa no primeiro lançamento (restando obter duas caras consecutivas dentre os $n - 1$ lançamentos que restam) ou cara no primeiro lançamento e coroa no segundo (restando obter duas caras consecutivas dentre os $n - 2$ lançamentos que restam).

As três situações revelam que e_n é solução da recorrência não homogênea de 2ª ordem:

$$e_n = e_{n-1} + e_{n-2} + 1 \quad (n \geq 4), \quad (5.22)$$

com $e_2 = 1$ e $e_3 = 2$.

Veja que a recorrência (5.22) é de segunda ordem e não homogênea. Portanto, a sua solução geral é composta de duas parcelas, uma solução da recorrência homogênea associada e uma solução particular para a não homogênea.

Sendo assim, a recorrência homogênea associada a (5.22) é dada por:

$$y_n - y_{n-1} - y_{n-2} = 0. \quad (5.23)$$

Agora, vamos resolver a recorrência (5.23). Sendo assim, a equação característica associada a tal recorrência é dada por:

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

cujas raízes são : $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Como as raízes encontradas são distintas, a solução geral da homogênea (5.23) é dada por:

$$y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Agora, vamos encontrar uma solução particular para a recorrência não homogênea (5.22). Fazendo uso do método desenvolvido no capítulo anterior, como o termo independente é uma constante, a solução particular para a recorrência terá o seguinte formato:

$$a_n = n^s(A),$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ deve ser escolhido de forma apropriada.

Como uma constante não é raiz da equação associada a recorrência (5.23), significa que a escolha para o s será o 0 (zero).

Sendo assim, teremos que $a_n = A$ é uma solução particular para a recorrência (5.22).

Logo, substituindo $a_n = A$ em (5.22), obtemos:

$$A = A + A + 1 \Rightarrow A = -1.$$

Assim, a solução particular da recorrência não homogênea será:

$$x_n = A = -1.$$

Portanto, a solução geral da recorrência (5.22) será:

$$\begin{aligned} e_n &= y_n + a_n \\ e_n &= C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + A = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para determinarmos os valores das constantes C_1 e C_2 , vamos utilizar as condições $e_2 = 1$ e $e_3 = 2$. Aplicando tais condições em (5.24), teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 - 1 = 1 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^3 - 1 = 2 \end{cases}.$$

Ou ainda,

$$\begin{cases} C_1 (3 + \sqrt{5}) + C_2 (3 - \sqrt{5}) = 4 \\ C_1 (2 + \sqrt{5}) + C_2 (2 - \sqrt{5}) = 3 \end{cases}.$$

Ou equivalente,

$$\begin{cases} C_1 + C_1 (2 + \sqrt{5}) + C_2 + C_2 (2 - \sqrt{5}) = 4 \\ C_1 (2 + \sqrt{5}) + C_2 (2 - \sqrt{5}) = 3 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos que $C_1 + C_2 = 1$, o que implica que $C_1 = 1 - C_2$. Substituindo $C_1 = 1 - C_2$ em:

$$C_1 (2 + \sqrt{5}) + C_2 (2 - \sqrt{5}) = 3,$$

obtemos:

$$(1 - C_2) (2 + \sqrt{5}) + C_2 (2 - \sqrt{5}) = 3. \quad (5.25)$$

Resolvendo a equação (5.25), obtemos:

$$C_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}.$$

Como $C_1 = 1 - C_2$, segue que:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - C_2 \\ C_1 &= 1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \\ C_1 &= \frac{5 + \sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Portanto, como já determinamos as constantes C_1 e C_2 , temos que a solução geral da recorrência (5.22) é:

$$\begin{aligned} e_n &= C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \\ &= \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \\ &= \frac{1}{10} \left\{ (5 + \sqrt{5}) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + (5 - \sqrt{5}) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} - 1. \end{aligned}$$

(b) Para saber a quantidade de experimentos para os quais duas caras são obtidas até o 10º lançamento, basta fazer $n = 10$ na solução obtida no item (a).

Ou seja,

$$e_{10} = \frac{1}{10} \left\{ (5 + \sqrt{5}) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{10} + (5 - \sqrt{5}) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{10} \right\} - 1.$$

Por outro lado, teremos um total de possibilidades iguais a 2^{10} . Sendo assim, a probabilidade procurada será:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &= \frac{e_{10}}{2^{10}} \\ &= \frac{e_{10}}{2^{10}} \\ &= \frac{1}{2^{10}} \cdot \left\{ \frac{1}{10} \left[(5 + \sqrt{5}) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{10} + (5 - \sqrt{5}) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{10} \right] - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2^{10}} \cdot \left\{ \frac{1}{10} \cdot 890 - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2^{10}} \cdot 88 \\ &= \frac{2^3 \cdot 11}{2^3 \cdot 2^7} \\ &= \frac{11}{128} \\ &\approx 8,59\%. \end{aligned}$$

Problema 32 (Olimpiada da Índia-96 –(AMORIM et al., 2014)). *Define-se uma sequência x_n , $n \geq 1$, por $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2$, para $n \geq 1$. Prove que para todo m , $x_m \cdot x_{m+1}$ também é um termo dessa sequência.*

Solução.

A equação característica é $r^2 - 2r + 1 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = 1$. Portanto, a solução da homogênea associada é:

$$y_n = C_1 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n = C_1 + C_2 \cdot n.$$

Agora, vamos determinar uma solução particular para a recorrência não homogênea. Como o termo independente é igual a $f(n) = 2$, ou seja, uma constante, significa que uma solução particular deve ter o seguinte formato:

$$a_n = n^s A,$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ é escolhido de forma apropriada.

Considerando $s = 0$, teremos que $a_n = n^0 \cdot A = A$ não é uma solução para a recorrência não homogênea, pois, essa solução faz parte da solução y_n .

Tomando $s = 1$, tem-se que $a_n = An$ não pode ser solução particular para a recorrência não homogênea, pois essa solução figura na solução de y_n .

Agora, tomando $s = 2$, tem-se que $a_n = An^2$ é uma solução da não homogênea, visto que essa solução não figura na recorrência y_n .

Substituindo $a_n = An^2$ em $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$, obtemos que:

$$\begin{aligned} A(n+2)^2 - 2A(n+1)^2 + An^2 &= 2 \\ (A - 2A + A)n^2 + (4A - 4A)n + (4A - 2A) &= 2 \\ 0 \cdot n^2 + 0 \cdot n + (2A) &= 2. \\ A &= 1. \end{aligned}$$

Logo, a solução particular a_n é dada por:

$$\begin{aligned} a_n &= An^2 \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da recorrência não homogênea dada inicialmente será:

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + a_n \\ x_n &= C_1 + C_2 \cdot n + n^2 \end{aligned}$$

Agora, vamos aplicar as condições iniciais : $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ para determinar os valores das constantes C_1 e C_2 .

Aplicando as condições na solução geral da recorrência, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -2 \end{cases}.$$

Portanto, a solução geral da recorrência não homogênea que satisfaz as condições iniciais é:

$$x_n = C_1 + C_2 \cdot n + 1$$

$$x_n = 2 - 2n + n^2$$

$$x_n = (n - 1)^2 + 1.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}x_m \cdot x_{m+1} &= [(m - 1)^2 + 1] \cdot [(m + 1 - 1)^2 + 1] \\&= (m^2 - 2m + 2) \cdot (m^2 + 1) \\&= m^4 - 2m^3 + 3m^2 - 2m + 1 + 1 \\&= [(m^2 - m + 2) - 1]^2 + 1 \\&= x_{m^2 - m + 2},\end{aligned}$$

conforme queríamos mostrar. ■

6 Conclusões

Esperamos que este trabalho venha a contribuir para uma melhor divulgação e conhecimento a respeito das recorrências lineares de 1^a e 2^a ordem e que além disso, desperte o interesse dos professores, principalmente aqueles que lecionam na Educação Básica, a buscarem por seu estudo, bem como estimular o uso do mesmo em demonstrações no ensino.

Sendo assim, depreendemos que a resolução de problemas a partir de um pensamento recursivo vem de certa forma contribuir para o pensar matemático no sentido de desenvolver habilidades e incitar a criatividade para a resolução de diversos problemas no Ensino Básico.

Em se tratando das aplicações do estudo de recorrências, apresentamos vários exemplos com a finalidade de mostrar que em diferentes contextos se faz uso da recorrência linear, seja de 1^a ou de 2^a ordem homogênea ou não homogênea. Acreditamos que a devida interpretação de um fenômeno real, que se observa através de um padrão matemático, desperta o interesse pela matemática.

A abordagem do estudo das recorrências lineares no ensino básico é de provocar e incentivar que os alunos sejam cada vez mais intensamente desafiados às situações problemas didáticas motivadoras. Fazendo com que a nossa sala de aula se transforme ainda mais em um laboratório para que os nossos alunos se tornem ainda mais protagonistas em elaboração de ideias e resolução de problemas, fortalecendo a experiência e o ambiente em fazer matemática a partir da prática do pensar, do experimentar, do testar, do criar, do desenvolver, do demonstrar, do produzir construindo linguagem matemática a partir das situações do cotidiano.

Ao resolvermos problemas que constam em livros didáticos ou em olimpíadas de matemática, estávamos mostrando que os padrões matemáticos já estão inseridos em questões de nível médio, faltando apenas que o professor oportunize a seus alunos o conhecimento recursivo na modelagem da solução. Daí a importância de se iniciar o estudo de recorrências ainda na Educação Básica.

No Capítulo 5 vimos que são inúmeras as situações em que problemas que envolvem contagem podem ser facilmente interpretados e solucionados utilizando-se de um raciocínio recursivo. As relações de recorrências são, dessa forma, mais uma estratégia a somar com as ferramentas típicas da Análise Combinatória para resolução de problemas dessa natureza.

O que propomos é que as relações de recorrência sejam inseridas no contexto da Educação Básica desde os primeiros anos de forma progressiva para que o aluno possa de forma fácil e criativa resolver problemas que à primeira vista parecem difíceis. E,

assim, possam, de fato, evoluir em seu potencial de aprendizagem.

No Capítulo 3 justificamos o por quê as soluções para as recorrências homogêneas de segunda ordem serem apresentados naquele formato, através da independência linear, essa abordagem é um dos diferenciais que podemos encontrar nesse trabalho, tendo em vista que não encontramos nenhum material com essa abordagem.

Para os professores que estão ou têm a pretensão de cursar o Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), este trabalho pode ser de grande relevância para alguns conteúdos abordados na disciplina de Matemática discreta (MA12), uma vez que apresentamos um método para se obter a solução particular para as recorrências lineares de 2^a ordem não homogêneas. Já na disciplina de MA12, essa solução é obtida por meio de tentativas.

Vimos que o método apresentado nesse trabalho para a obtenção da solução particular da recorrência não homogênea de 2^a ordem é eficaz, uma vez que conhecendo o formato da solução da recorrência homogênea associada, bastamos tomar o valor para $s \in \{0, 1, 2\}$ de forma apropriada e obter a devida solução particular.

Por fim, é importante lembrar que o trabalho foi elaborado com o intuito de motivar professores (mestrandos) e alunos a adentrarem nesse tema com maior profundidade, e pedimos, então, para que os que se sentirem atraídos pela área continuem seus estudos e permaneçam firmes na atividade, pois só trabalhando juntos poderemos abranger nosso conhecimento e favorecer as futuras gerações.

Referências

- AMORIM, L. M. d. et al. Relações de recorrência. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2014. Citado na página 154.
- ANDRICA, D.; BAGDASAR, O. *Recurrent Sequences*. [S.l.]: Springer, 2020. Citado na página 16.
- BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base*. 2022. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Citado na página 14.
- BRASIL, M. d. E.-M. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):matemática*. 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Citado na página 14.
- CASTRO, F. J. d. et al. Matemática discreta: tópicos de recorrências lineares e suas aplicações. Universidade Federal da Paraíba, 2016. Citado na página 112.
- DEVLIN, K. *Matemática: a ciência dos padrões*. [S.l.]: Porto: Porto Editora, 2002. Citado na página 14.
- DUARTE, G. V. As recorrências como ferramentas didáticas para o desenvolvimento do raciocínio recursivo. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 132 e 135.
- GOMES, C.; DINIZ, I. C.; GURGEL, R. T. *Matemática Discreta - Conjuntos, Recorrências, Combinatória e Probabilidade*. [S.l.]: Livraria da Física da USP São Paulo, 2021 - 1ª edição., 2021. Citado 4 vezes nas páginas 15, 17, 107 e 121.
- HEFEZ, A. Aritmética, coleção profmat, 3a edição. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- LINARES, J. L.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre recorrências na olimpíada internacional de matemática. *Matemática e Estatística em Foco*, 2020. Citado na página 149.
- MARTINS, T. E. *Equações de recorrência na educação básica*. Dissertação (Mestrado), 2014. Citado na página 147.
- MELO, M.; ANDRADE, A. M. da S. Recorrências lineares e equações diferenciais lineares: uma experiência em uma turma de matemática discreta. *Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)*, v. 6, n. 1, p. 170–179, 2021. Citado na página 151.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática discreta: coleção PROFMAT*. [S.l.]: SBM, 2022. Citado 8 vezes nas páginas 15, 17, 68, 81, 108, 115, 119 e 129.

NETO, A. C. M. Tópicos de matemática elementar: números reais. 2a edição. *Rio de Janeiro: SBM*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - Somando novos talentos para o Brasil*. 2009. Disponível em: <<https://www.obmep.org.br/banco.htm>>. Citado na página 103.

PINHEIRO, T. A.; LAZZARIN, J. R. Recorrência matemática na obmep. *Ciência e Natura*, v. 37, p. 36–46, 2015. Citado na página 114.

PINHEIRO, T. A. et al. Soluções não clássicas para problemas da obmep. Universidade Federal de Santa Maria, 2013. Citado na página 130.

PINTO, F. L. O uso das recorrências e do raciocínio recursivo no ensino médio. Instituto de Matemática. Departamento de Matemática., 2017. Citado na página 123.

SÁ, W. d. J. P. et al. O uso de recorrência na educação básica. Universidade Federal do Maranhão, 2020. Citado na página 137.

SILVA, P. R. R. d. et al. Recorrências e algumas aplicações em problemas de contagem. Universidade Federal do Maranhão, 2020. Citado na página 93.

STEFFENON, R. R. Belos problemas de matemática discreta. 2022. Citado 4 vezes nas páginas 15, 17, 105 e 110.