

Ícaro Meneses Ferreira de Santana

Projeto de controladores para um sistema subatuado não-linear

Campina Grande, Paraíba

Junho de 2024

Ícaro Meneses Ferreira de Santana

Projeto de controladores para um sistema subatuado não-linear

Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado submetido à Coordenadoria de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Centro de Engenharia Elétrica e Informática – CEEI

Departamento de Engenharia Elétrica – DEE

Orientador: Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.

Campina Grande, Paraíba

Junho de 2024

Ícaro Meneses Ferreira de Santana

Projeto de controladores para um sistema subatuado não-linear

Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado submetido à Coordenadoria de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica

Trabalho aprovado. Campina Grande, Paraíba, Junho de 2024:

Antonio Marcus Nogueira Lima, Dr.
Orientador

Rafael Bezerra Correia Lima
Convidado

Campina Grande, Paraíba
Junho de 2024

Aos meus pais, Maria do Socorro e Vanilson, que me proporcionaram alcançar novos horizontes.

Agradecimentos

Esta jornada acadêmica, que ora se concretiza neste Trabalho de Conclusão de Curso, não teria sido possível sem o apoio, incentivo e colaboração de pessoas especiais que me acompanharam ao longo do caminho. A elas, dedico meus mais sinceros agradecimentos.

Aos meus pais, pilares incansáveis de minha vida, agradeço por todo o amor, carinho e suporte incondicional. Vocês acreditaram em mim desde o início, me inspiraram a buscar meus sonhos e me ensinaram os valores que nortearam minha caminhada. Agradeço por serem meus porto seguros, por me estenderem a mão em momentos difíceis e por celebrarem cada conquista comigo. Sou grato por suas palavras de incentivo, que me impulsionaram a superar os desafios e alcançar meus objetivos.

Aos meus amigos, Hortência, Mateus Rique, Lara, Leiry, Lucas, Paulo, Wesley, Fernando, Lucas Justino, William e Mateus Marques, agradeço pela amizade, companheirismo e momentos de descontração que tornaram essa jornada mais leve e prazerosa. Vocês foram fundamentais para manter meu ânimo e me proporcionar momentos de alegria em meio às horas de estudo. Sou grato por suas palavras de apoio, por acreditarem em meu potencial e por celebrarem comigo cada etapa concluída.

Aos meus amigos da capacitação em microeletrônica, Luiz, Juliana, Joseilton, João Pedro e Valmir, com quem tive a oportunidade de compartilhar conhecimentos e experiências nessa área tão apaixonante, agradeço pela amizade, colaboração e troca de ideias. Juntos, aprendemos e crescemos, tornando essa experiência ainda mais enriquecedora.

Aos professores Antonio Marcus e Saulo, agradeço pela orientação, conhecimento passado e dedicação em me auxiliar no desenvolvimento deste trabalho. Sou grato pela paciência, por terem me dado a oportunidade e acreditado em meu potencial.

*“Até o pesadelo e a tortura, um dia chegam ao fim.
(Autoria própria)*

Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aborda o desenvolvimento de estratégias de controle para sistemas mecânicos não-lineares subatuados utilizando a mecânica lagrangiana. Sistemas subatuados, caracterizados por possuírem menos atuadores do que graus de liberdade, apresentam desafios significativos devido às suas dinâmicas complexas e não-lineares. Este trabalho foca na modelagem do sistema dinâmico cart-pole, na implementação de controladores com objetivo de estabilização baseados em lagrangianos controlados e na técnica de feedback linearization, além da análise da estabilidade utilizando o método de Lyapunov. Os resultados dos controladores foram demonstrados por meio de simulações, realizados com os softwares MATLAB e Simulink, em que foram alcançados os objetivos de controle e foi mostrada a eficácia das estratégias de controle propostas, garantindo a estabilidade desejada. Este estudo contribui para o desenvolvimento de métodos de controle mais robustos e eficazes, aplicáveis em diversos contextos tecnológicos e industriais.

Palavras-chave: Sistemas subatuados, Mecânica Lagrangiana, Controle não-linear, Feedback Linearization, Análise de Lyapunov, Lagrangianos Controlados.

Abstract

This document addresses the development of control strategies for underactuated nonlinear mechanical systems using Lagrangian mechanics. Underactuated systems, characterized by having fewer actuators than degrees of freedom, present significant challenges due to their complex and nonlinear dynamics. This work focuses on the modeling of the cart-pole dynamic system, the implementation of controllers aimed at stabilization based on controlled Lagrangians and the feedback linearization technique, as well as the stability analysis using the Lyapunov method. The results of the controllers were demonstrated through simulations carried out with MATLAB and Simulink software, where the control objectives were achieved, and the effectiveness of the proposed control strategies was shown, ensuring the desired stability. This study contributes to the development of more robust and effective control methods, applicable in various technological and industrial contexts.

Keywords: Underactuated systems, Lagrangian Mechanics, Nonlinear Control, Feedback Linearization, Lyapunov Analysis, Controlled Lagrangians.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de corpo livre do sistema.	18
Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema em malha aberta. A velocidade do carro tem um caráter oscilatório devido ao acoplamento com o movimento do pêndulo. Também não há dissipação do movimento, pois o sistema não tem o atrito considerado.	28
Figura 3 – Resultado de simulação do carro em malha aberta. A posição do carro está na cor azul e a velocidade está na cor laranja.	29
Figura 4 – Resultado de simulação do pêndulo em malha aberta. O ângulo do pêndulo está na cor azul e a velocidade angular está na cor laranja. É possível notar a característica oscilatória do pêndulo, sem a dissipação do movimento devido a falta de coeficiente de atrito.	29
Figura 5 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com o controlador por Lagrangianos Controlados. O controlador projetado está representado pelo bloco <i>controller</i>	33
Figura 6 – Resultado de simulação do carro do controlador por Lagrangianos controlados. A posição do carro está na cor azul e a velocidade está na cor laranja. Vale destacar a estabilização do carro, pois sua velocidade se anula no regime permanente.	33
Figura 7 – Resultado de simulação do pêndulo do controlador por Lagrangianos controlados. O ângulo do pêndulo está na cor azul e a velocidade angular está na cor laranja. É possível perceber que o objetivo de estabilização do pêndulo na vertical $\phi = 0$ foi cumprido.	34
Figura 8 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com o controlador por <i>Feedback Linearization</i> . O Controlador representado pelo bloco <i>controller</i> realiza o papel de cancelar as não linearidades intrínsecas do sistema. É possível perceber a realimentação dos estados ϕ e $\dot{\phi}$ para o cálculo do erro.	37
Figura 9 – Resultado de simulação do carro do controlador por feedback linearization. A posição do carro está na cor azul e a velocidade está na cor laranja. É fácil notar que o carro não é controlado, pois a variável de controle é o ângulo do pêndulo.	39
Figura 10 – Resultado de simulação do pêndulo do controlador por feedback linearization. O ângulo do pêndulo está na cor azul e a velocidade angular está na cor laranja. É possível concluir que o objetivo de estabilização foi cumprido, devido a convergência da curva do ângulo em $\phi = 0$	39

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Objetivos	12
1.1.1	Objetivos Especificos	12
1.2	Metodologias	12
1.3	Estrutura do relatório	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	Sistemas subatuados	14
2.1.1	Descrição Física dos Sistemas Subatuados	15
2.1.2	Descrição Matemática dos Sistemas Subatuados	15
2.2	Mecânica Lagrangiana	16
2.2.1	O Lagrangiano e as equações de Euler-Lagrange	16
2.3	Obtenção das equações de movimento do sistema a partir da Mecânica Lagrangiana	18
2.3.1	Vetores de Posição e Velocidade	19
2.3.2	Energia Cinética e Potencial	20
2.3.3	Equações de Euler-Lagrange	20
2.4	Análise de Estabilidade de Lyapunov	23
2.4.1	Análise de Estabilidade de Lyapunov para o Sistema <i>cart-pole</i>	24
3	PROJETO E SIMULAÇÃO DOS CONTROLADORES	27
3.1	Modelo do sistema em malha aberta	28
3.1.1	Discussão	30
3.2	Controlador baseado nos Lagrangianos Controlados	31
3.2.1	Resultados de simulação	32
3.2.2	Discussão	32
3.3	Controlador baseado em <i>Feedback Linearization</i>	33
3.3.1	Conceitos Intuitivos	34
3.3.2	Procedimento	35
3.3.3	Aplicações	35
3.3.4	Limitações	36
3.3.5	Resultados de simulação	37
3.3.6	Discussão	37
3.4	Aspectos práticos	38
4	CONCLUSÃO	41

REFERÊNCIAS	42
APÊNDICES	43
APÊNDICE A – SCRIPT MATLAB DO MODELO CART-POLE .	44
APÊNDICE B – SCRIPT MATLAB DA SIMULAÇÃO DO MO- DELO CART-POLE	45
APÊNDICE C – SCRIPT MATLAB DO CONTROLADOR POR LAGRANGIANOS CONTROLADOS	47
APÊNDICE D – SCRIPT MATLAB DA SIMULAÇÃO DO CON- TROLADOR POR LAGRANGIANOS CONTRO- LADOS	48
APÊNDICE E – SCRIPT MATLAB DA CONTROLADOR POR <i>FEEDBACK LINEARIZATION</i>	50
APÊNDICE F – SCRIPT MATLAB DA SIMULAÇÃO DO CON- TROLADOR POR <i>FEEDBACK LINEARIZATION</i>	51

1 Introdução

Os sistemas mecânicos subatuados são prevalentes em uma vasta gama de aplicações, desde aeroespaciais até sistemas robóticos avançados. Caracterizados por terem menos entradas de controle do que graus de liberdade, esses sistemas apresentam desafios significativos devido à complexidade das dinâmicas que os regem. Essa complexidade é exacerbada pela natureza não linear das equações de movimento, que descrevem como os estados do sistema evoluem ao longo do tempo.

A mecânica lagrangiana oferece uma abordagem elegante para modelar esses sistemas dinâmicos complexos. Utilizando o princípio da mínima ação, a mecânica lagrangiana formula as equações de movimento de sistemas mecânicos através da função Lagrangiana, que é definida como a diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema. Este formalismo não apenas simplifica a representação dos sistemas dinâmicos, mas também proporciona uma plataforma unificada para a introdução de restrições e forças de controle.

No contexto de sistemas subatuados, a formulação lagrangiana se torna particularmente útil, pois permite a incorporação direta de restrições e a análise detalhada das propriedades do sistema, como conservação de energia e simetrias. A mecânica lagrangiana facilita a aplicação de métodos de controle avançados que podem lidar com as não linearidades intrínsecas e as restrições dos sistemas, abordando problemas como estabilização e rastreamento de trajetórias.

O controle lagrangiano em sistemas subatuados explora a estrutura das equações de Lagrange para desenvolver estratégias de controle que garantam a estabilidade e a eficácia operacional. Utilizando técnicas como *feedback linearization* e controle baseado em lagrangianos controlados, é possível projetar controladores que não apenas estabilizam o sistema em torno de pontos de equilíbrio, mas também permitem o rastreamento preciso de trajetórias desejadas.

Este trabalho se dedica à exploração do controle de sistemas mecânicos subatuados empregando o formalismo lagrangiano. Ao analisar as propriedades dinâmicas e o potencial de técnicas de controle baseadas na mecânica lagrangiana, o objetivo é desenvolver métodos de controle mais robustos e eficazes, aplicáveis em diversos contextos tecnológicos e industriais. A importância deste estudo é ressaltada pela necessidade de controle preciso em aplicações onde falhas podem resultar em consequências severas.

1.1 Objetivos

Desenvolver e analisar estratégias de controle avançadas para o sistema dinâmico subatuado *cart-pole* utilizando o formalismo da mecânica lagrangiana, visando melhorar a precisão e a eficácia do controle em cenários com dinâmicas complexas.

1.1.1 Objetivos Especificos

- Modelar a dinâmica do sistema *cart-pole* utilizando a mecânica lagrangiana.
- Utilizar o método de Lyapunov para verificar e garantir a estabilidade dos estados de equilíbrio do *cart-pole*.
- Implementar e analisar a técnica de lagrangianos controlados para o sistema.
- Aplicar a técnica de *feedback linearization* para desenvolver um controlador que cancele as não-linearidades do modelo do *cart-pole*.

1.2 Metodologias

A metodologia deste trabalho iniciou-se com uma extensiva revisão bibliográfica, focada em compilar e analisar literaturas relevantes que discutem a mecânica lagrangiana, métodos de estabilização de sistemas dinâmicos e técnicas avançadas de controle. Esse levantamento teórico foi fundamental para estabelecer uma sólida base de conhecimento sobre os principais conceitos, técnicas e desafios associados ao controle de sistemas dinâmicos subatuados, como o sistema *cart-pole*.

Posteriormente, utilizou-se a mecânica lagrangiana para formular as equações dinâmicas que descrevem o sistema *cart-pole*. Essa abordagem permitiu uma representação precisa das forças e movimentos envolvidos, facilitando a análise subsequente de estabilidade e controle. A estabilidade do sistema foi então estudada utilizando o método de Lyapunov, onde se analisou a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema. Essa análise foi crucial para identificar e validar os pontos onde o sistema pode ser considerado estável e, portanto, adequado para a aplicação de estratégias de controle.

As simulações do sistema foram realizadas utilizando os softwares MATLAB e Simulink, o que permitiu uma visualização detalhada do comportamento do sistema sob diferentes condições e configurações de controle. Essas simulações ajudaram a validar as equações dinâmicas desenvolvidas e a verificar a eficácia das técnicas de controle propostas.

Para a estabilização do sistema, desenvolveu-se inicialmente um controlador baseado na técnica dos Lagrangianos Controlados. Este controlador aproveita modificações estruturadas da função Lagrangiana para induzir estabilidade desejada, utilizando as

equações de Euler-Lagrange modificadas para formar o sistema em laço fechado. Em seguida, foi implementado um controlador baseado em *feedback linearization*, que lineariza o sistema não linear em torno de um ponto de operação desejado, permitindo o uso de técnicas de controle linear para estabilização.

Finalmente, todas as técnicas de controle foram novamente testadas e validadas através de simulações no MATLAB e Simulink, garantindo que o comportamento do sistema estivesse em conformidade com os objetivos de desempenho e estabilidade estabelecidos inicialmente. Este conjunto de atividades metodológicas proporcionou uma compreensão abrangente sobre a aplicação de diferentes estratégias de controle no sistema *cart-pole*, além de demonstrar a eficácia de cada abordagem mediante cenários variados de simulação.

1.3 Estrutura do relatório

O primeiro capítulo é a Introdução, onde são apresentados os objetivos gerais e específicos do trabalho, assim como a metodologia adotada para atingir esses objetivos. Em seguida, é detalhada a estrutura do relatório, fornecendo uma visão geral de como o conteúdo está organizado.

O segundo capítulo, Fundamentação Teórica, aborda os conceitos essenciais que embasam o desenvolvimento do trabalho. Este capítulo começa com uma explicação sobre sistemas subatuados, discutindo seus desafios e métodos de controle. Depois, é apresentada a Mecânica Lagrangiana, que é crucial para a formulação das equações de movimento dos sistemas dinâmicos estudados. A seguir, são discutidos os vetores de posição e velocidade, a energia cinética e potencial, e as equações de Euler-Lagrange. Por fim, a teoria da estabilidade de Lyapunov é introduzida, sendo aplicada ao sistema *cart-pole*.

O terceiro capítulo trata do Projeto e Simulação dos Controladores. Inicialmente, são descritos os controladores baseados em Lagrangianos Controlados, que utilizam modificações estruturadas da função Lagrangiana para garantir a estabilidade desejada. Depois, é apresentada a técnica de Feedback Linearization, que cancela as linearidades do sistema, fazendo o mesmo se comportar como um sistema linear. São detalhados os conceitos, procedimentos, aplicações e limitações de cada técnica. Os resultados das simulações, realizadas com MATLAB e Simulink, são apresentados para ilustrar a eficácia dos controladores desenvolvidos.

Finalmente, o quarto capítulo apresenta a Conclusão do trabalho, onde são resumidos os principais achados e contribuições do estudo, destacando a importância das estratégias de controle desenvolvidas para sistemas subatuados.

2 Fundamentação teórica

Neste capítulo, serão abordados os conceitos fundamentais que formam a base teórica necessária para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, serão apresentados os sistemas subatuados, que são caracterizados por terem menos atuadores do que graus de liberdade. Discutiremos os desafios associados ao controle e estabilização desses sistemas, bem como a aplicação do método de Lyapunov direto para solucionar esses desafios, dando prosseguimento, será abordada a Mecânica Lagrangiana, que é essencial para a formulação das equações de movimento do sistema dinâmico estudado. A Mecânica Lagrangiana proporciona um método poderoso para modelar sistemas físicos, permitindo uma descrição eficaz da dinâmica através da função Lagrangiana, que compreende a diferença entre energia cinética e potencial do sistema.

Após a discussão sobre a mecânica lagrangiana, o foco se voltará para o sistema *cart-pole*, um exemplo clássico de sistema dinâmico subatuado. Serão detalhadas as características específicas do *cart-pole*, incluindo sua configuração e as principais forças que influenciam seu movimento, estabelecendo assim uma conexão direta com os princípios da mecânica lagrangiana discutidos anteriormente.

Em seguida, a teoria da estabilidade de Lyapunov será introduzida. Este conceito é fundamental para entender como a estabilidade do sistema pode ser assegurada. Através do método de Lyapunov, é possível determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema, fornecendo uma ferramenta valiosa para a análise de estabilidade antes da implementação de qualquer estratégia de controle.

Por fim, serão exploradas as diferentes estratégias de controle que podem ser aplicadas ao sistema *cart-pole*. Isso inclui técnicas como Lagrangianos controlados e *feedback linearization*, cada uma oferecendo métodos distintos para enfrentar o desafio de estabilizar e controlar sistemas dinâmicos complexos. Estas estratégias serão brevemente descritas para introduzir os métodos que serão desenvolvidos e aplicados nas seções subsequentes deste trabalho.

2.1 Sistemas subatuados

Nos estudos de controle, um sistema subatuado é caracterizado pela presença de menos atuadores do que graus de liberdade que necessitam ser controlados. Esta característica impõe desafios específicos, pois o sistema não dispõe de atuadores suficientes para manipular diretamente todos os graus de liberdade, exigindo a adoção de estratégias de controle mais complexas e sofisticadas ([TEDRAKE, 2024](#)).

2.1.1 Descrição Física dos Sistemas Subatuados

Fisicamente, sistemas subatuados são encontrados em diversas aplicações tecnológicas e industriais, tais como robótica, veículos subaquáticos e aeronaves. Esses sistemas possuem uma dinâmica intrinsecamente complexa devido à insuficiência de atuadores, o que significa que não é possível exercer forças ou momentos diretamente em todas as direções e eixos necessários (SPONG, 2005).

Por exemplo, um veículo subaquático equipado com três atuadores de propulsão, mas que precisa controlar seis graus de liberdade, correspondendo a movimentos translacionais e rotacionais. A limitação no número de atuadores implica que a movimentação e a estabilização do veículo devem ser realizadas por meio de ações indiretas, combinando os esforços dos atuadores disponíveis para gerar os movimentos desejados nos graus de liberdade não diretamente controlados (REYHANOGLU et al., 1996).

2.1.2 Descrição Matemática dos Sistemas Subatuados

A modelagem matemática de um sistema subatuado envolve a descrição das equações dinâmicas que governam o comportamento do sistema. Tipicamente, estas equações são representadas por um conjunto de equações diferenciais que relacionam as forças e momentos aplicados aos movimentos resultantes. Para um sistema subatuado genérico, as equações da dinâmica podem ser expressas da seguinte forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (2.1)$$

onde:

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de coordenadas generalizadas que representam os graus de liberdade do sistema.
- $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia, que pode variar com as coordenadas generalizadas.
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz que representa as forças de Coriolis e centrípetas.
- $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das forças gravitacionais.
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz de entrada que mapeia as forças e momentos gerados pelos m atuadores aos n graus de liberdade do sistema.
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas, representando as forças e momentos aplicados pelos atuadores.

Em um sistema subatuado, a matriz \mathbf{B} não é quadrada, possuindo mais linhas do que colunas, refletindo a insuficiência de atuadores para controlar todos os graus de liberdade de maneira independente (PATENAUDE, 2008).

2.2 Mecânica Lagrangiana

Na formulação lagrangiana, a dinâmica de sistemas com restrições é tratada de maneira elegante e eficaz. Joseph-Louis Lagrange identificou que, para descrever a dinâmica de tais sistemas, não são necessárias as forças de vínculo diretamente. Em vez disso, pode-se representar o sistema através de coordenadas e velocidades generalizadas que definem o espaço de configurações. As coordenadas generalizadas q_i representam todas as variáveis necessárias para descrever a posição de cada componente do sistema, enquanto as velocidades generalizadas \dot{q}_i descrevem as variações temporais dessas posições (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002).

A dimensão do espaço de configurações, que reflete o número de graus de liberdade do sistema, é influenciada pela quantidade de corpos no sistema N e pelo número de vínculos p que restringem o movimento dos corpos. A relação entre esses elementos é expressa pela equação $n = 3N - p$, onde n é o número de coordenadas generalizadas ou graus de liberdade (TAYLOR, 2005).

Os vínculos aplicados aos sistemas podem ser classificados como holonômicos ou não-holonômicos. Vínculos holonômicos são aqueles que podem ser expressos como equações explícitas que relacionam as coordenadas generalizadas e o tempo, restringindo o espaço de configuração do sistema de maneira previsível. Por outro lado, os vínculos não-holonômicos incluem restrições que não podem ser expressas apenas em termos de coordenadas generalizadas e seus derivados em relação ao tempo, frequentemente envolvendo interações mais complexas entre as velocidades das partes do sistema (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002).

A mecânica Lagrangiana aborda ambos os tipos de vínculos através da incorporação de multiplicadores de Lagrange, permitindo a análise detalhada de sistemas mecânicos sob diversas restrições sem a necessidade de modelar explicitamente as forças de vínculo. Este tratamento dos vínculos, tanto holonômicos quanto não-holonômicos, destaca a flexibilidade e a profundidade do formalismo lagrangiano, facilitando a análise de uma ampla variedade de sistemas mecânicos complexos.

2.2.1 O Lagrangiano e as equações de Euler-Lagrange

A mecânica Lagrangiana, estabelecida por Joseph Louis Lagrange, oferece uma formulação rigorosa e abrangente para análise de sistemas dinâmicos, especialmente aqueles que envolvem restrições ou configurações complexas. Central para este formalismo é o

Lagrangiano \mathcal{L} , definido como a diferença entre a energia cinética T e a energia potencial U do sistema:

$$\mathcal{L} = T - U. \quad (2.2)$$

O princípio fundamental da mecânica Lagrangiana é o princípio da mínima ação ou princípio de Hamilton, que afirma que a trajetória real seguida por um sistema entre dois pontos é aquela que minimiza a ação S , dada pelo integral do Lagrangiano em relação ao tempo:

$$S = \int \mathcal{L} dt. \quad (2.3)$$

O sistema evolui de forma a tornar a variação dessa ação δS igual a zero, o que leva às equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (2.4)$$

Estas equações são aplicáveis independentemente das coordenadas escolhidas e são particularmente úteis para lidar com sistemas que incluem restrições, permitindo que sejam tratadas eficazmente sem a necessidade de calcular explicitamente as forças de restrição (TAYLOR, 2005).

Quando forças não-conservativas estão presentes, elas não podem ser derivadas de um potencial da maneira que as forças conservativas podem. No entanto, as equações de Euler-Lagrange podem ser modificadas para incluir tais forças. Se Q_i representa as forças generalizadas não-conservativas atuando no sistema, as equações de Euler-Lagrange modificadas tornam-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i. \quad (2.5)$$

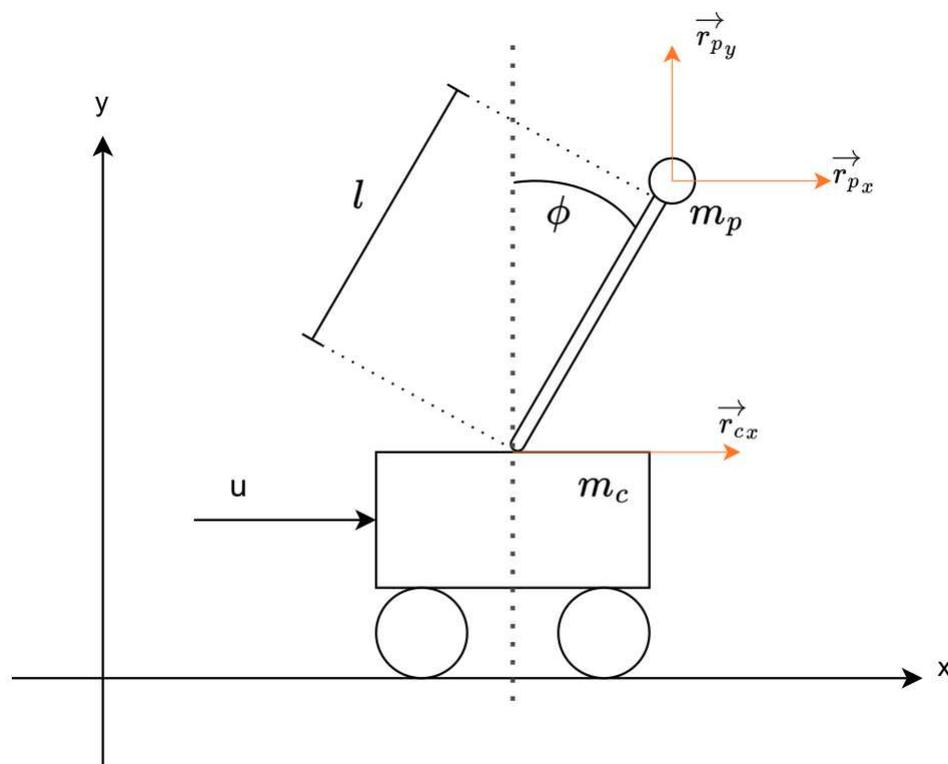
Essas forças Q_i podem incluir componentes como atrito ou outras influências externas que dissipam energia e, portanto, não derivam diretamente de um potencial conservativo.

Esta formulação permite a análise de uma variedade de sistemas dinâmicos, incluindo aqueles em que as interações não-conservativas desempenham um papel significativo. A flexibilidade e a aplicabilidade das equações de Euler-Lagrange, juntamente com a estrutura elegante do Lagrangiano, fazem da mecânica Lagrangiana uma ferramenta fundamental no estudo avançado de sistemas mecânicos tanto na física quanto na engenharia.

2.3 Obtenção das equações de movimento do sistema a partir da Mecânica Lagrangiana

O sistema *cart-pole*, também conhecido como o problema do pêndulo invertido, é um paradigma fundamental no estudo de controle dinâmico e sistemas de aprendizagem automática. Frequentemente utilizado em testes de algoritmos de controle e aprendizado por reforço, este sistema é composto por dois componentes principais, o carro e o pêndulo invertido, como mostrado na figura 1, em que estão indicados as referências de posição do carro e do pêndulo, bem como o comprimento da haste, o ângulo do pêndulo com o eixo vertical do carro e a força de atuação que é aplicada ao carro.

Figura 1 – Diagrama de corpo livre do sistema.



Fonte: [Autoria própria](#).

1. **Carrinho (*Cart*):** Uma plataforma que desliza horizontalmente ao longo de um trilho linear. Capaz de mover-se para a esquerda ou para a direita, o carrinho é impulsionado por uma força aplicada externamente.
2. **Pêndulo (*Pole*):** Um pêndulo montado no topo do carrinho que pode oscilar livremente para frente e para trás. O pêndulo é geralmente modelado como uma barra rígida com uma massa na extremidade, e o desafio é mantê-lo na posição vertical.

Objetivo do Sistema

O desafio proposto do sistema *cart-pole* é desenvolver uma estratégia de controle que mantenha o pêndulo equilibrado na vertical enquanto o carrinho se move ao longo dos trilhos. Isso envolve a aplicação precisa de forças ao carrinho, ajustadas continuamente com base nas posições e velocidades do carrinho e do pêndulo.

As variáveis m_c , m_p , e l representam os seguintes componentes físicos no sistema *cart-pole*:

- m_c : Massa do carrinho. Refere-se à massa total do carrinho que se move ao longo dos trilhos.
- m_p : Massa do pêndulo. Indica a massa concentrada na extremidade da haste do pêndulo. A massa da haste é negligenciada.
- l : Comprimento da haste do pêndulo. Mede a distância do ponto de pivô do pêndulo até sua massa concentrada.

2.3.1 Vetores de Posição e Velocidade

Os vetores de posição e velocidade para o carro e o pêndulo são definidos como:

- **Carro:**

- Vetor de posição: $\vec{r}_c = (x, 0)$;
- Vetor de velocidade: $\dot{\vec{r}}_c = (\dot{x}, 0)$

e

- **Pêndulo:**

- Vetor de posição: $\vec{r}_p = (x + l \sin(\phi), -l \cos(\phi))$;
- Vetor de velocidade: $\dot{\vec{r}}_p = (\dot{x} + l\dot{\phi} \cos(\phi), -l\dot{\phi} \sin(\phi))$

A descrição da dinâmica do sistema *cart-pole* envolve uma análise das equações de movimento derivadas do Lagrangiano, que é formulado com base na energia cinética e potencial do sistema. A seguir é feita a dedução das equações de movimento a partir do formalismo Lagrangiano.

2.3.2 Energia Cinética e Potencial

A energia cinética T do sistema *cart-pole*, levando em conta a contribuição tanto do carrinho quanto do pêndulo, é dada por

$$T = \frac{1}{2} \left(m_p l^2 \dot{\phi}^2 + 2m_p l \dot{\phi} \dot{x} \cos(\phi) + (m_c + m_p) \dot{x}^2 \right). \quad (2.6)$$

Esta expressão inclui o termo $m_p l^2 \dot{\phi}^2$, que representa a energia cinética rotacional do pêndulo; $2m_p l \dot{\phi} \dot{x} \cos(\phi)$, um termo que expressa a energia cinética devido ao movimento interativo entre o carrinho e o pêndulo; e $(m_c + m_p) \dot{x}^2$, que descreve a energia cinética translacional do carrinho e do pêndulo.

A energia potencial V associada ao pêndulo é expressa como:

$$U = m_p g l \cos(\phi). \quad (2.7)$$

Este termo reflete a altura do centro de massa do pêndulo em relação ao ponto mais baixo possível, que ocorre quando $\phi = \pi$.

O Lagrangiano \mathcal{L} do sistema é a diferença entre a energia cinética e a energia potencial, conforme descrito pela seguinte equação:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} \left(m_p l^2 \dot{\phi}^2 + 2m_p l \dot{\phi} \dot{x} \cos(\phi) + (m_c + m_p) \dot{x}^2 \right) - m_p g l \cos(\phi) \quad (2.8)$$

2.3.3 Equações de Euler-Lagrange

Para deduzir as equações de movimento, aplica-se as equações de Euler-Lagrange para cada coordenada generalizada, x e ϕ .

1. Equação de Euler-Lagrange para x

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F. \quad (2.9)$$

onde F representa forças externas ou de controle aplicadas ao carrinho, desconsiderando as forças de atrito ($b = 0$) e dissipativas, então a força que é exercida no carrinho deverá se chamar u .

2. Equação de Euler-Lagrange para ϕ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.10)$$

Calculando as derivadas parciais e temporais, derivamos as equações de movimento específicas para o *cart-pole*:

Para a posição x do carrinho:

$$(m_c + m_p)\ddot{x} + m_p l \ddot{\phi} \cos(\phi) - m_p l \dot{\phi}^2 \sin(\phi) = u \quad (2.11)$$

Para o ângulo ϕ do pêndulo:

$$m_p l^2 \ddot{\phi} + m_p l \ddot{x} \cos(\phi) - m_p g l \sin(\phi) = 0 \quad (2.12)$$

A descrição da dinâmica do sistema *cart-pole* envolve uma análise das equações de movimento derivadas do Lagrangiano, formuladas na representação matricial utilizando o vetor de estados. Esta abordagem facilita a análise e aplicação de estratégias de controle ao sistema.

Definição do Vetor de Estados

O vetor de estados \mathbf{z} é definido como:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ \phi \\ \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde:

- x (ou z_1) é a posição do carrinho.
- ϕ (ou z_2) é o ângulo do pêndulo em relação à vertical.
- \dot{x} (ou z_3) é a velocidade do carrinho.
- $\dot{\phi}$ (ou z_4) é a velocidade angular do pêndulo.

Equações Diferenciais na Forma Matricial

A forma vetorial das equações diferenciais, $\dot{\mathbf{z}}$, descreve como os estados do sistema evoluem com o tempo. O sistema não linear tem a forma $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{z}(t)) \cdot u(t)$. O vetor de estados é dado por:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \\ f_3(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}, u) \\ f_4(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}, u) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

onde f_3 e f_4 são as funções que calculam as acelerações \ddot{x} e $\ddot{\phi}$, respectivamente.

Expressões específicas para as acelerações

Realizando manipulações algébricas nas equações 2.11 e 2.12, para isolar as variáveis \ddot{x} e $\ddot{\phi}$, as expressões para as acelerações são detalhadas a seguir:

$$\dot{z}_3 = \ddot{x} = \frac{1}{m_p \sin^2(\phi) + m_c} \left[m_p l \sin(\phi) \dot{\phi}^2 - m_p g \sin(\phi) \cos(\phi) + u \right] \quad (2.15)$$

e

$$\dot{z}_4 = \ddot{\phi} = \frac{1}{L(m_p \sin^2(\phi) + m_c)} \left[(m_c + m_p) g \sin(\phi) - m_p l \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\phi}^2 - \cos(\phi) u \right] \quad (2.16)$$

Identificação dos Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio de sistemas são estados em que as variáveis de um sistema dinâmico não mudam ao longo do tempo, permanecendo constantes quando o sistema não está sujeito a perturbações externas. Matematicamente, um ponto de equilíbrio é encontrado resolvendo-se o conjunto de equações diferenciais que governam o comportamento do sistema, de modo que todas as derivadas temporais sejam iguais a zero. Em outras palavras, no ponto de equilíbrio, as taxas de variação de todas as variáveis do sistema são nulas. Estes pontos são fundamentais na análise de estabilidade, pois permitem entender como o sistema se comporta em torno dessas condições e prever a resposta a pequenas perturbações (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

Para identificar os pontos de equilíbrio no sistema dinâmico *cart-pole*, os valores das variáveis de estado que anulam as derivadas de todas as variáveis de estado são determinados. Esse procedimento implica que não há alterações dinâmicas ao longo do tempo nas variáveis de estado. Para tal condição, utilizando a representação de estados da equação 2.14,

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \\ f_x(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}, u) \\ f_\phi(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}, u) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

Para os pontos de equilíbrio, cada componente de \dot{Z} deve ser igual a zero. Assim,

1. $\dot{x} = 0$: Não deve haver movimento horizontal do carrinho.
2. $\dot{\phi} = 0$: Não deve haver movimento angular do pêndulo.

As condições para as acelerações do carrinho e do pêndulo, representadas por \ddot{x} e $\ddot{\phi}$, também devem ser zero nos pontos de equilíbrio:

3. $f_x(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}, u) = 0$:

$$\frac{1}{m_c + m_p \sin^2(\phi)} [m_p l \sin(\phi) \dot{\phi}^2 - m_p g \sin(\phi) \cos(\phi) + u] = 0 \quad (2.18)$$

Simplificando com $\dot{\phi} = 0$, obtém-se:

$$m_p g \sin(\phi) \cos(\phi) = u \quad (2.19)$$

4. $f_\phi(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}, u) = 0$:

$$\frac{1}{l(m_p \sin^2(\phi) + m_c)} [(m_c + m_p)g \sin(\phi) - m_p l \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\phi}^2 - \cos(\phi)u] = 0 \quad (2.20)$$

Novamente, com $\dot{\phi} = 0$:

$$(m_c + m_p)g \sin(\phi) = \cos(\phi)u \quad (2.21)$$

A análise dos pontos de equilíbrio foi realizada considerando valores específicos para ϕ , como 0 ou π (pêndulo completamente vertical). Em ambos os casos, quando $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$, verifica-se que $\sin(\phi) = 0$ e $\cos(\phi) = \pm 1$, simplificando as condições de equilíbrio para $u = 0$. A estabilidade destes pontos depende de controles adicionais, já que perturbações podem deslocar o pêndulo de sua posição de equilíbrio.

2.4 Análise de Estabilidade de Lyapunov

A análise de estabilidade de Lyapunov é um método matemático que se destaca por sua eficácia na determinação da estabilidade de pontos de equilíbrio em sistemas dinâmicos, especialmente em contextos não lineares. O método, proposto por Aleksandr

Lyapunov, baseia-se no conceito de uma função de Lyapunov, que é uma função escalar $V(\mathbf{z})$ projetada para avaliar as trajetórias do sistema em um espaço de estados (KHALIL, 2014).

Para aplicar este método, inicialmente escolhe-se uma função de Lyapunov candidata, $V(\mathbf{z})$, que deve ser contínua, diferenciável e positiva definida, exceto no ponto de equilíbrio, onde deve ser zero. A derivada de Lyapunov, $\dot{V}(\mathbf{z})$, é então calculada ao longo das trajetórias do sistema. A condição para a estabilidade de Lyapunov é que $\dot{V}(\mathbf{z})$ seja negativa semidefinida. Isto implica que a função $V(\mathbf{z})$ deve diminuir ou permanecer constante ao longo de todas as trajetórias do sistema, indicando que as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio, ou pelo menos não se afastam dele (KHALIL, 2014).

Para sistemas onde $\dot{V}(\mathbf{z})$ é estritamente negativa, exceto no ponto de equilíbrio, o ponto é dito assintoticamente estável, significando que todas as trajetórias não só permanecem próximas ao ponto de equilíbrio, como também convergem para ele à medida que o tempo avança. Se $\dot{V}(\mathbf{z}) = 0$, o ponto de equilíbrio é considerado estável no sentido de Lyapunov, indicando que as trajetórias do sistema permanecem próximas ao ponto de equilíbrio para todas as condições iniciais na vizinhança deste ponto (ISIDORI, 1995).

A escolha da função de Lyapunov não é única e pode variar dependendo das características específicas do sistema estudado. Uma boa escolha de $V(\mathbf{z})$ deve refletir a energia do sistema ou alguma medida de desempenho que seja relevante para a análise do comportamento dinâmico do sistema em torno do ponto de equilíbrio (BLOCH; LEONARD; MARSDEN, 2000).

A aplicabilidade deste método não se limita a sistemas lineares ou a sistemas com soluções analíticas claras; ele é particularmente valioso para sistemas não lineares complexos, onde outras abordagens podem ser ineficazes ou impraticáveis. Este método tem sido amplamente utilizado em diversas áreas da ciência e engenharia para garantir a estabilidade de sistemas como redes elétricas, sistemas de controle automotivo e dinâmica de voo, entre outros.

2.4.1 Análise de Estabilidade de Lyapunov para o Sistema *cart-pole*

Esta seção do trabalho irá explorar a aplicação da análise de estabilidade de Lyapunov ao sistema do *cart-pole*, utilizando a energia total do sistema como função de Lyapunov candidata, para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio identificados anteriormente.

Função de Lyapunov Proposta

Considera-se a energia total do sistema, composta pela energia cinética T e potencial U , como a função de Lyapunov candidata:

$$V(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}) = T + U = \frac{1}{2} \left(m_p l^2 \dot{\phi}^2 + 2m_p l \dot{\phi} \dot{x} \cos(\phi) + (m_c + m_p) \dot{x}^2 \right) + m_p g l \cos(\phi) \quad (2.22)$$

Verificação das Condições de Lyapunov

A função de Lyapunov proposta deve satisfazer duas condições principais para ser eficaz na análise de estabilidade.

A função V deve ser positiva definida, sendo que:

- A energia cinética T é intrinsecamente positiva para quaisquer valores não nulos de \dot{x} e $\dot{\phi}$.
- A energia potencial U alcança o valor mínimo, que é zero, quando $\phi = \pi$ (pêndulo na posição inferior vertical), e aumenta à medida que o pêndulo se desloca dessa posição.
- Assim, V é positiva definida exceto no ponto $\phi = \pi$, $\dot{x} = 0$, $\dot{\phi} = 0$, onde se anula.

A derivada temporal de V ao longo das trajetórias do sistema, \dot{V} , deve ser negativa definida ou semidefinida negativa:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial \dot{\phi}} \ddot{\phi}. \quad (2.23)$$

As derivadas parciais de V são calculadas como segue:

- $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, pois V não possui dependência direta de x ;
- $\frac{\partial V}{\partial \phi} = -m_p l \dot{x} \dot{\phi} \sin(\phi) - m_p g l \sin(\phi)$;
- $\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = m_p l \dot{\phi} \cos(\phi) + (m_c + m_p) \dot{x}$;
- $\frac{\partial V}{\partial \dot{\phi}} = m_p l^2 \dot{\phi} + m_p l \dot{x} \cos(\phi)$.

Após substituir \ddot{x} (da equação 2.15) e $\ddot{\phi}$ (da equação 2.16) na equação 2.23, a expressão resultante é

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -m_p \dot{x} \dot{\phi} \sin(\phi) - m_p g l \sin(\phi) \dot{\phi} + \\
& (m_p l \dot{\phi} \cos(\phi) + (m_c + m_p) \dot{x}) \frac{1}{m_c + m_p \sin^2(\phi)} \\
& [m_p l \sin(\phi) \dot{\phi}^2 - m_p g \sin(\phi) \cos(\phi) + u] \\
& + (m_p l^2 \dot{\phi} + m_p l \dot{x} \cos(\phi)) \frac{1}{l(m_c + m_p \sin^2(\phi))} \\
& [(m_c + m_p) g \sin(\phi) - m_p l \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\phi}^2 - \cos(\phi) u]. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Substituição nos Pontos de Equilíbrio

Nos pontos de equilíbrio identificados, como $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$, e com $\dot{x} = 0$ e $\dot{\phi} = 0$, devem ser aplicados esses valores na expressão de \dot{V} (equação 2.24) para realizar a análise. Também faz-se $u = 0$ nesses pontos para manter o equilíbrio.

Com $\dot{x} = 0$, $\phi = 0$ e $\dot{\phi} = 0$:

$$\dot{V} = -m_p l \cdot 0 \cdot 0 \sin(0) - m_p g l \sin(0) \cdot 0 + \text{outros termos} \cdot 0 = 0 \quad (2.25)$$

Nesse caso, $\dot{V} = 0$ indica que não há mudança na energia total, o que é esperado na posição pendurada para baixo sem movimento.

Com $\dot{x} = 0$, $\phi = \pi$ e $\dot{\phi} = 0$:

$$\dot{V} = -m_p l \cdot 0 \cdot 0 \sin(\pi) - m_p g l \sin(\pi) \cdot 0 + \text{outros termos} \cdot 0 = 0 \quad (2.26)$$

Aqui, novamente $\dot{V} = 0$. No entanto, a estabilidade desse ponto precisa de consideração adicional porque é uma posição instável (pêndulo para cima).

Para cada ponto de equilíbrio, é avaliado se pequenas perturbações aumentam ou diminuem V . Se V aumentar com perturbações, o sistema é instável. Se V diminuir ou permanecer constante, o sistema pode ser estável. No caso do pêndulo para baixo ($\phi = \pi$), uma pequena perturbação não aumenta a energia, indicando estabilidade. No caso do pêndulo para cima ($\phi = 0$), qualquer pequena perturbação tende a fazer com que o sistema se mova para uma posição de menor energia potencial, indicando instabilidade.

3 Projeto e simulação dos controladores

Neste capítulo serão abordadas as simulações do modelo do *cart-pole* e do projeto dos controladores, com o objetivo de estabilização do sistema, sendo eles o controlador baseado em Lagrangianos Controlados, que é um tipo de controlador baseado em energia e o controlador baseado em *Feedback Linearization*.

No desenvolvimento deste trabalho, foram conduzidas simulações computacionais utilizando o MATLAB e o Simulink para modelar e analisar o comportamento do sistema *cart-pole*. Inicialmente, o modelo do sistema foi implementado no MATLAB para realizar simulações numéricas básicas, permitindo uma verificação preliminar das dinâmicas envolvidas. Posteriormente, para uma análise mais detalhada e interativa, o modelo foi transposto para o ambiente do Simulink, onde simulações mais complexas e com capacidade de visualização gráfica foram realizadas.

As simulações no Simulink foram essenciais para implementar e testar diferentes estratégias de controle. Duas abordagens de controle avançadas foram exploradas: Lagrangianos Controlados e (*feedback linearization*). O controle por Lagrangianos Controlados foi desenvolvido com base nos princípios da mecânica Lagrangiana, proporcionando um método sistemático para controlar o sistema considerando suas equações de movimento. Essa abordagem foi particularmente útil para lidar com as não linearidades intrínsecas do sistema.

Por outro lado, a estratégia de *feedback linearization* foi aplicada com o objetivo de transformar o sistema não linear em um equivalente linear, em torno de um ponto de operação desejado, através de transformações de estado e realimentação de saída.

Para as simulações, os valores dos parâmetros utilizados na simulação em malha aberta do sistema *cart-pole*, são os seguintes:

- **Massa do pêndulo** (m_p): 1 kg
- **Massa do carrinho** (m_c): 5 kg
- **Comprimento da haste** (l): 2 metros
- **Aceleração devido à gravidade** (g): 9,81 m/s²
- **Coefficiente de atrito** (b): 0 (sem atrito considerado)
- **Força de controle** (u): 0 (não há controle aplicado)

As condições iniciais para a simulação foram:

- Posição inicial do carrinho: 0,1 metros
- Ângulo inicial do pêndulo: $\frac{\pi}{2} - 0,4$ radianos (aproximadamente 0,90 radianos)
- Velocidade inicial do carrinho: -3 m/s (movendo-se para a esquerda)
- Velocidade angular inicial do pêndulo: 0 rad/s (sem movimento inicial angular)

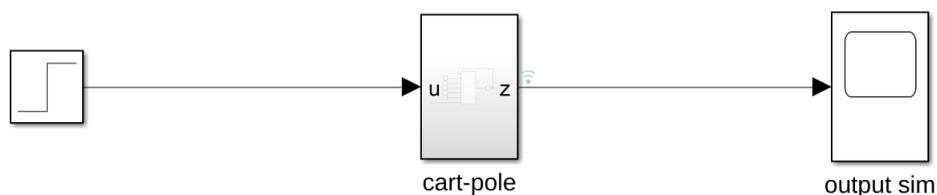
Para a simulação em malha fechada, os dados do modelo são os mesmos, diferenciando apenas a força de controle u que serão aplicados os controladores projetados com objetivo de estabilização, para um *setpoint* de $\phi = 0$, para que o pêndulo estabilize apontado para cima. No contexto geral, o resolvidor de equações diferenciais utilizado foi o `ode45`, de passo de cálculo variável, em um tempo de simulação de 20 segundos para o modelo em malha aberta e de 80 segundos para os modelos em malha fechada.

Os códigos do modelo, de cada controlador e das simulações são apresentadas nos apêndices.

3.1 Modelo do sistema em malha aberta

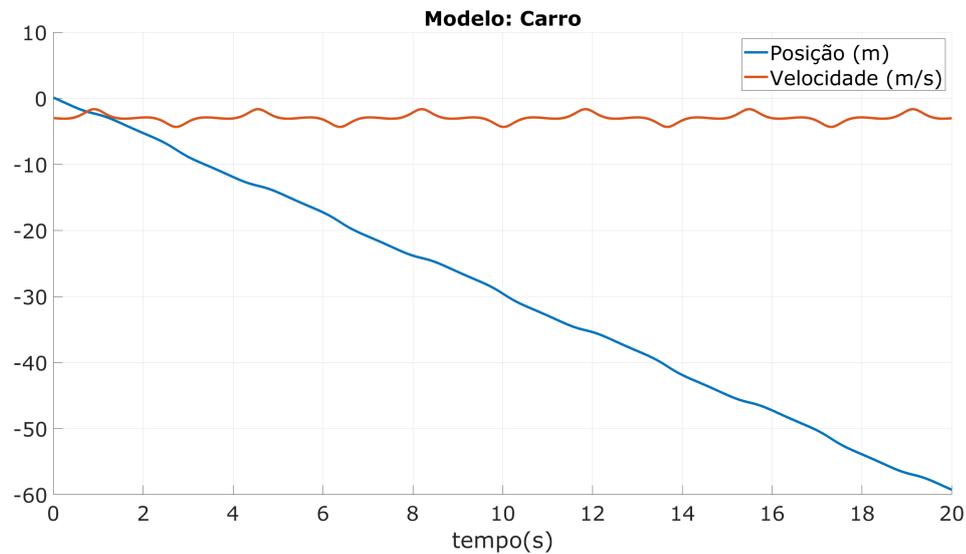
Com as equações diferenciais não-lineares definidas nas equações 2.14, 2.15 e 2.16, foi feita a simulação do sistema em malha aberta com os parâmetros e condições iniciais definidos anteriormente. O diagrama do sistema em malha aberta é mostrado na figura 2, em que o bloco *cart-pole* contém o modelo do sistema descrito por equações diferenciais que foram definidas anteriormente. Já a entrada de força de atuação representado pelo bloco de degrau à esquerda. O vetor de saída do sistema \mathbf{z} está conectado a um visualizador de sinais à direita. A resposta obtida é ilustrada nas figuras 3 e 4.

Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema em malha aberta. A velocidade do carro tem um caráter oscilatório devido ao acoplamento com o movimento do pêndulo. Também não há dissipação do movimento, pois o sistema não tem o atrito considerado.



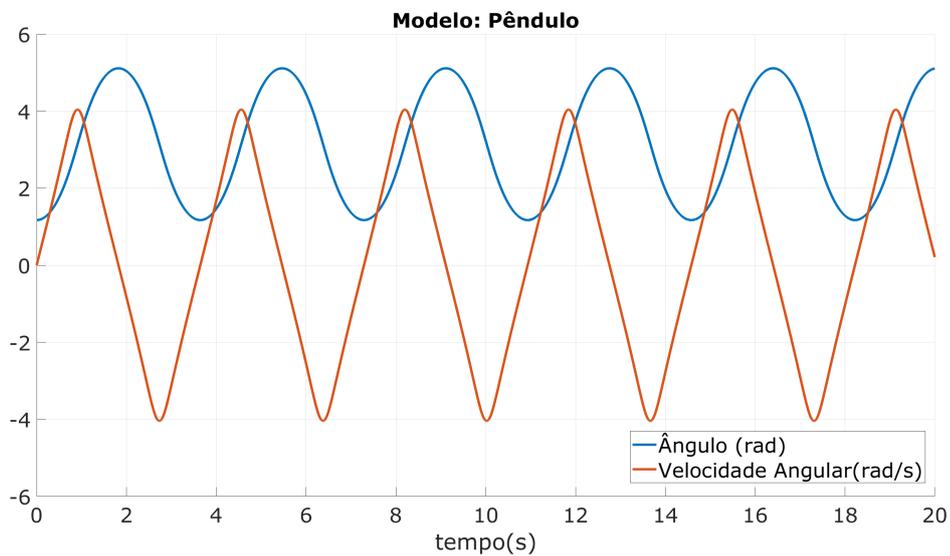
Fonte: [Autoria própria](#).

Figura 3 – Resultado de simulação do carro em malha aberta. A posição do carro está na cor azul e a velocidade está na cor laranja.



Fonte: [Autoria própria](#).

Figura 4 – Resultado de simulação do pêndulo em malha aberta. O ângulo do pêndulo está na cor azul e a velocidade angular está na cor laranja. É possível notar a característica oscilatória do pêndulo, sem a dissipação do movimento devido a falta de coeficiente de atrito.



Fonte: [Autoria própria](#).

A seguir, são apresentados os indicadores de desempenho em malha aberta do sistema *cart-pole*. Esses indicadores fornecem uma interpretação das respostas dinâmicas das variáveis do sistema: posição do carro, velocidade do carro, ângulo do pêndulo e velocidade angular do pêndulo.

Tabela 1 – Indicadores de Desempenho do Carro

Indicador	Posição	Velocidade
RiseTime	31,3104 s	1.9410×10^{-4} s
TransientTime	56,9864 s	33,6786 s
SettlingTime	56,9498 s	79,644 s
SettlingMin	30,6583 m	-6,0046 m/s
SettlingMax	34,0526 m	12,4204 m/s
Overshoot	0	$7,9582 \times 10^4$ m/s
Undershoot	0	$3,8522 \times 10^4$ m/s
Peak	34,0526 m	12,4204 s
PeakTime	80 s	1,4 s

Fonte: [Autoria própria](#).

Tabela 2 – Indicadores de Desempenho do Pêndulo

Indicador	Ângulo	Velocidade Angular
RiseTime	$8,8326 \times 10^{-5}$ s	4.4010×10^{-7} s
TransientTime	26,7861 s	25,2752 s
SettlingTime	79,6493 s	79,9523 s
SettlingMin	-0,6719 rad	-0,9456 rad/s
SettlingMax	0,3770 rad	0,4251 rad/s
Overshoot	$9,0206 \times 10^5$ rad	$2,0321 \times 10^7$ rad/s
Undershoot	$1,5720 \times 10^6$ rad	$9,1359 \times 10^6$ rad/s
Peak	1,1708 rad	0,9456 rad/s
PeakTime	0	0,2 s

Fonte: [Autoria própria](#).

3.1.1 Discussão

De acordo com as figuras 3 e 4, bem como as tabelas 1 e 2, os resultados indicam que o sistema em malha aberta do *cart-pole* não estabiliza devido à ausência de atrito, evidenciado pelos altos valores de *overshoot* e *undershoot* nas variáveis de velocidade do carro e do pêndulo. A rápida subida e os altos picos indicam uma resposta inicial abrupta, que compromete a estabilidade do sistema. Além disso, a resposta oscilatória das variáveis de velocidade e ângulo demonstra que o sistema não alcança um valor final estável, oscilando continuamente devido à falta de forças dissipativas que ajudariam na estabilização. Estes indicadores ressaltam a necessidade de implementar estratégias de controle eficazes para estabilizar o sistema e garantir o comportamento desejado das variáveis do *cart-pole*.

3.2 Controlador baseado nos Lagrangianos Controlados

O processo para determinar a lei de controle na equação 5.8 do artigo "Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. I. The first matching theorem" (BLOCH; LEONARD; MARSDEN, 2000) envolveu os seguintes passos principais:

1. Lagrangiano Controlado:

- Modificou-se o Lagrangiano original do sistema não controlado para incluir termos de controle, resultando no Lagrangiano controlado L_c . Esta modificação é feita para que o novo Lagrangiano descreva a dinâmica do sistema em malha fechada.

2. Equações de Movimento:

- Derivaram-se as equações de Euler-Lagrange a partir do Lagrangiano controlado. Essas equações incluem novos termos que representam as forças de controle.

3. *Matching Conditions*:

- Estabeleceram-se condições para garantir que a forma das equações de movimento controladas coincida com a forma desejada. Essas condições asseguram que as novas equações mantenham a estrutura Lagrangiana do sistema.

4. Determinação do Controle:

- As forças de controle foram determinadas comparando-se as equações de movimento controladas com as equações originais. Isso envolve resolver as equações de Euler-Lagrange modificadas para obter as expressões de controle em termos das variáveis de estado.

5. Estabilidade:

- Utilizou-se métodos de energia (função de Lyapunov) para garantir que a energia total do sistema controlado diminua ao longo do tempo, assegurando a estabilidade do equilíbrio. O critério de estabilidade foi verificado pela variação da energia controlada.

Os procedimentos matemáticos para a definição da lei de controle estão definidos no artigo, pois a complexidade e a extensividade estão fora do escopo deste documento. Com isso, o controlador implementado pelo autor no artigo está descrito na equação 3.1. Este controlador é responsável somente pela estabilização do sistema, não realizando rastreamento de trajetória.

$$u = \frac{\kappa\beta \sin \phi (\alpha \dot{\phi}^2 + \cos \phi D) - c \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} \cos^2 \phi \right) \left((\lambda(\kappa + 1) + 1)\beta \cos \phi \dot{\phi} + \lambda\gamma(\dot{s} - \xi) \right)}{\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} (1 + \kappa) \cos^2 \phi}, \quad (3.1)$$

onde

- s representa a posição do carro;
- $\alpha = m_p l^2$;
- $\beta = m_p l$;
- $\gamma = m_c + m_p$;
- $D = -m_p g l$;
- κ , λ e c representam valores de ganho; e
- ξ representa a velocidade do carro.

Com as equações diferenciais não-lineares definidas nas equações 2.14, 2.15 e 2.16 e o controlador definido na equação 3.1, foi feita a simulação do sistema em malha aberta com os parâmetros e condições iniciais definidos anteriormente. O diagrama do sistema em fechada com o controlador é mostrado na figura 5. A resposta obtida é ilustrada nas Figuras 6 e 7.

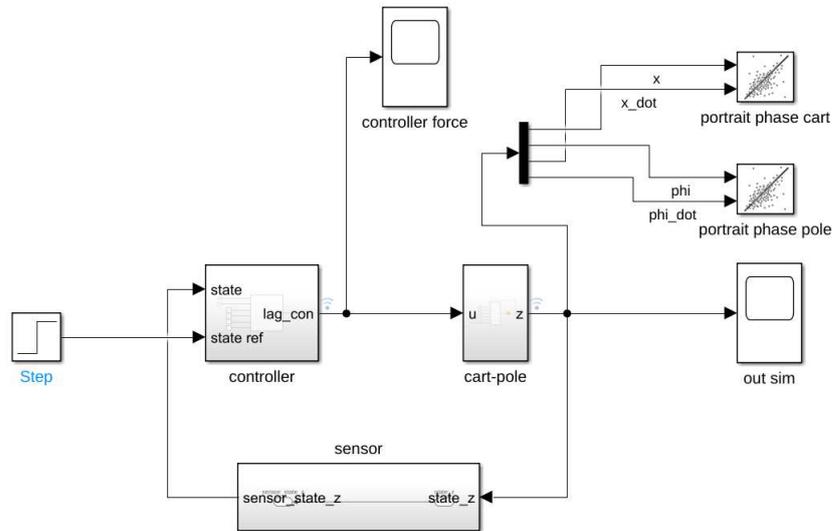
3.2.1 Resultados de simulação

A seguir são apresentados os indicadores de desempenho em malha fechada do sistema cart-pole com o controlador por Lagrangianos Controlados. Esses indicadores fornecem uma visão das respostas dinâmicas das variáveis do sistema.

3.2.2 Discussão

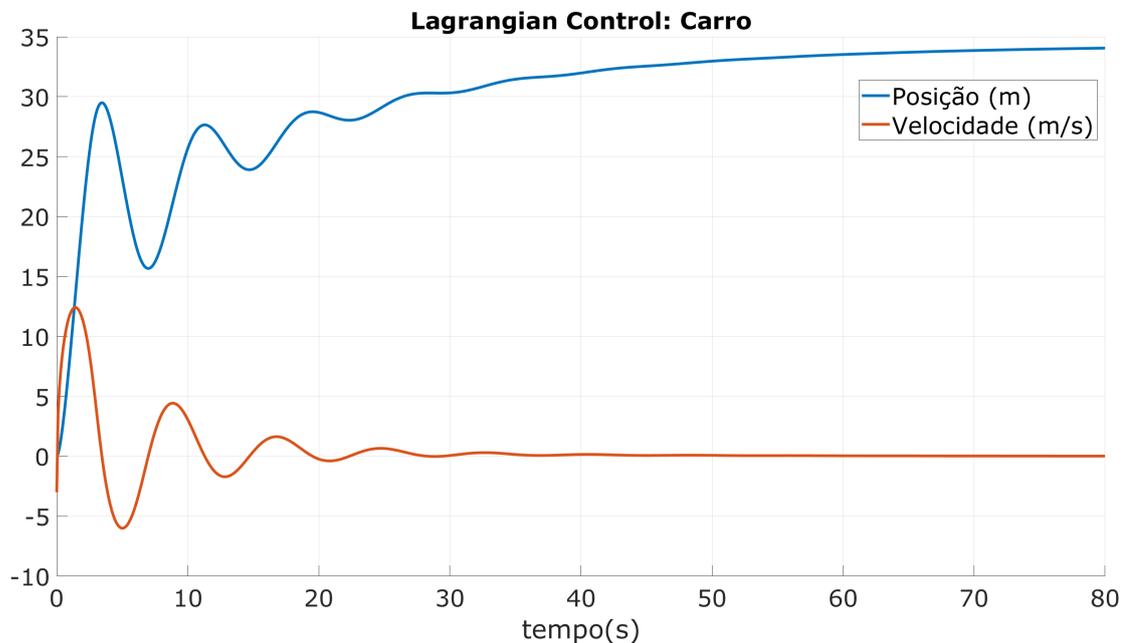
Os resultados das figuras 6 e 7 com as tabelas 3 e 4 indicam que o sistema em malha fechada do cart-pole com o controlador por Lagrangianos Controlados apresenta certas melhorias na estabilização do ângulo do pêndulo. O ângulo do pêndulo tem um tempo de subida de $8,8326 \times 10^{-5}$ s, tempo de transiente de 26.7861, e tempo de acomodação de 79.6493, com um overshoot de $9,0206 \times 10^5$ rad, demonstrando uma resposta oscilatória. A velocidade angular do pêndulo também mostra um comportamento oscilatório significativo, com overshoot de $2,0321 \times 10^7$ rad e undershoot de $9,1359 \times 10^6$ rad. Então o controlador cumpre a tarefa de estabilização do pêndulo com sucesso.

Figura 5 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com o controlador por Lagrangianos Controlados. O controlador projetado está representado pelo bloco *controller*.



Fonte: [Autoria própria.](#)

Figura 6 – Resultado de simulação do carro do controlador por Lagrangianos controlados. A posição do carro está na cor azul e a velocidade está na cor laranja. Vale destacar a estabilização do carro, pois sua velocidade se anula no regime permanente.

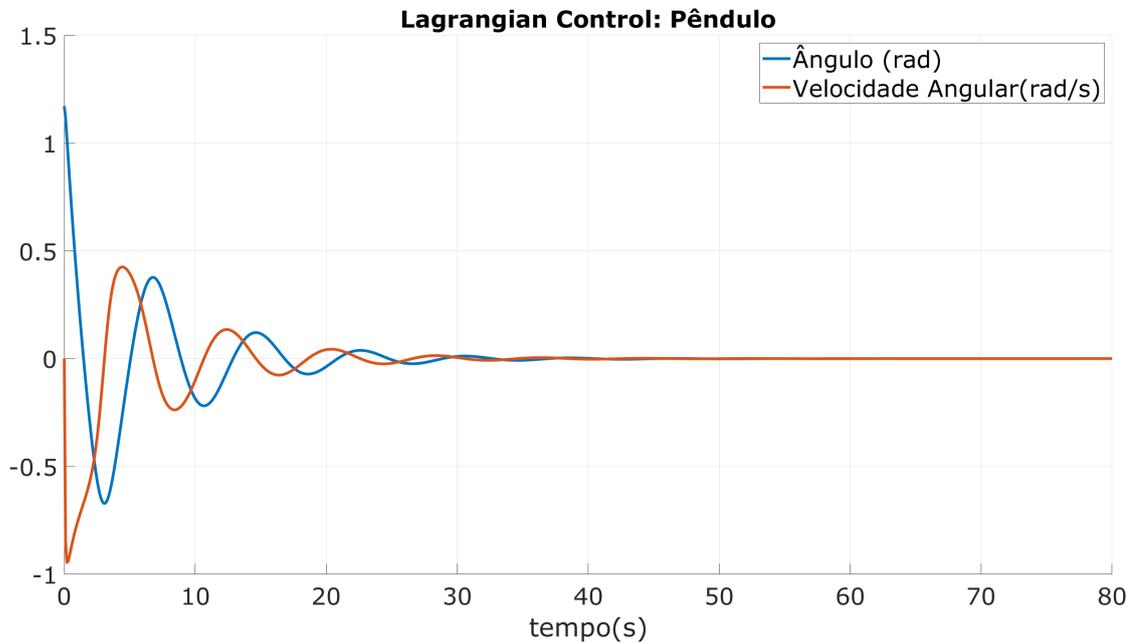


Fonte: [Autoria própria.](#)

3.3 Controlador baseado em *Feedback Linearization*

Feedback Linearization é uma técnica de controle não linear que tem como objetivo transformar dinamicamente um sistema não linear em um sistema linear (total ou par-

Figura 7 – Resultado de simulação do pêndulo do controlador por Lagrangianos controlados. O ângulo do pêndulo está na cor azul e a velocidade angular está na cor laranja. É possível perceber que o objetivo de estabilização do pêndulo na vertical $\phi = 0$ foi cumprido.



Fonte: [Autoria própria](#).

Tabela 3 – Indicadores de Desempenho do Carro

Indicador	Posição	Velocidade
RiseTime	31,3104 s	$1,9410 \times 10^{-4}$ s
TransientTime	56,9864 s	33,6786 s
SettlingTime	56,9498 s	79,5644 s
SettlingMin	30,6583 m	-6,0046 m/s
SettlingMax	34,0526 m	12,4204 m/s
Overshoot	0	$7,9582 \times 10^4$ m/s
Undershoot	0	$3,8522 \times 10^4$ m/s
Peak	34,0526 m	12,4204 m/s
PeakTime	80 s	1,4 s

Fonte: [Autoria própria](#).

cialmente), utilizando transformações algébricas exatas dos estados e retroalimentação. Isso permite a aplicação direta de técnicas de controle linear ao sistema original não linear (SLOTINE; LI, 1991; KHALIL, 2014).

3.3.1 Conceitos Intuitivos

No conceito mais simples, o *feedback linearization* visa cancelar as não linearidades de um sistema não linear, resultando em uma dinâmica de malha fechada linear. A técnica envolve transformar o sistema original em uma forma mais simples através de transforma-

Tabela 4 – Indicadores de Desempenho do Pêndulo

Indicador	Ângulo	Velocidade Angular
RiseTime	$8,8326 \times 10^{-5}$ s	$4,4010 \times 10^{-7}$ s
TransientTime	26,7861 s	25,2752 s
SettlingTime	79,6493 s	79,9523 s
SettlingMin	-0,6719 rad	-0,9456 rad/s
SettlingMax	0,3770 rad	0,4251 rad/s
Overshoot	$9,0206 \times 10^5$ rad	$2,0321 \times 10^7$ rad/s
Undershoot	$1,5720 \times 10^6$ rad	$9,1359 \times 10^6$ rad/s
Peak	1,1708 rad	0,9456 rad/s
PeakTime	0	0,2000 s

Fonte: [Autoria própria](#).

ções de estado e de entrada, usando feedback dos estados. ([MORENO-VALENZUELA; AGUILAR-AVELAR, 2018](#))

3.3.2 Procedimento

1. Transformação dos Estados e Entrada:

- Encontrar uma transformação de estado $k = T(z)$ e uma transformação de entrada $w = \alpha(z) + \beta(z)v$ de forma que as dinâmicas do sistema resultante sejam lineares. ([KRENER, 1999](#))

2. Dinâmica Linearizada:

- A transformação visa obter uma relação linear entre a entrada e a saída do sistema, que é alcançada através da redefinição dos estados e do controle.

3. Cancelamento de Não Linearidades:

- Através das transformações apropriadas, as não linearidades são canceladas. Isso é feito matematicamente, utilizando a função de transformação encontrada.

3.3.3 Aplicações

O *feedback linearization* tem sido utilizado com sucesso em várias aplicações práticas, como controle de helicópteros, aeronaves de alto desempenho, robôs industriais e dispositivos biomédicos. As técnicas de feedback linearization são especialmente úteis em sistemas não lineares que podem ser transformados em sistemas lineares, facilitando o projeto de controladores usando técnicas de controle linear.

3.3.4 Limitações

Apesar dos benefícios, o *feedback linearization* apresenta limitações significativas. Uma das principais é a dependência de um modelo exato do sistema. Incertezas nos parâmetros do modelo ou erros computacionais podem comprometer a eficácia da *feedback linearization*. Além disso, essa técnica geralmente requer a medição completa do estado do sistema, o que pode não ser viável em todas as situações práticas.

Em resumo, o *feedback linearization* é uma poderosa ferramenta no controle não linear, permitindo a aplicação de técnicas de controle linear a sistemas originalmente não lineares através de transformações exatas dos estados e entradas, embora sua aplicação dependa fortemente da precisão do modelo do sistema (SLOTINE; LI, 1991; KHALIL, 2014).

Seguindo o procedimento apresentado anteriormente, o controlador para o sistema *cart-pole* é descrito a seguir. Primeiro, as equações diferenciais do *cart-pole* definidas nas equações 2.14, 2.15 e 2.16, são representadas como $\dot{\mathbf{z}} = f(z) + g(z)u$, com $f(z)$ definido como

$$f(z) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \\ \frac{1}{m_c + m_p \sin^2(\phi)} [m_p l \sin(\phi) \dot{\phi}^2 - m_p g \sin(\phi) \cos(\phi)] \\ \frac{1}{l(m_p \sin^2(\phi) + m_c)} [(m_c + m_p)g \sin(\phi) - m_p l \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\phi}^2] \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

e $g(z)$ definido como

$$g(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_c + m_p \sin^2 \phi} \\ \frac{1}{l(m_c + m_p \sin^2 \phi)} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Então para realizar o controle da variável correspondente ao pêndulo, a nova entrada chamada pseudo-controle que irá cancelar as não-linearidades é descrita como

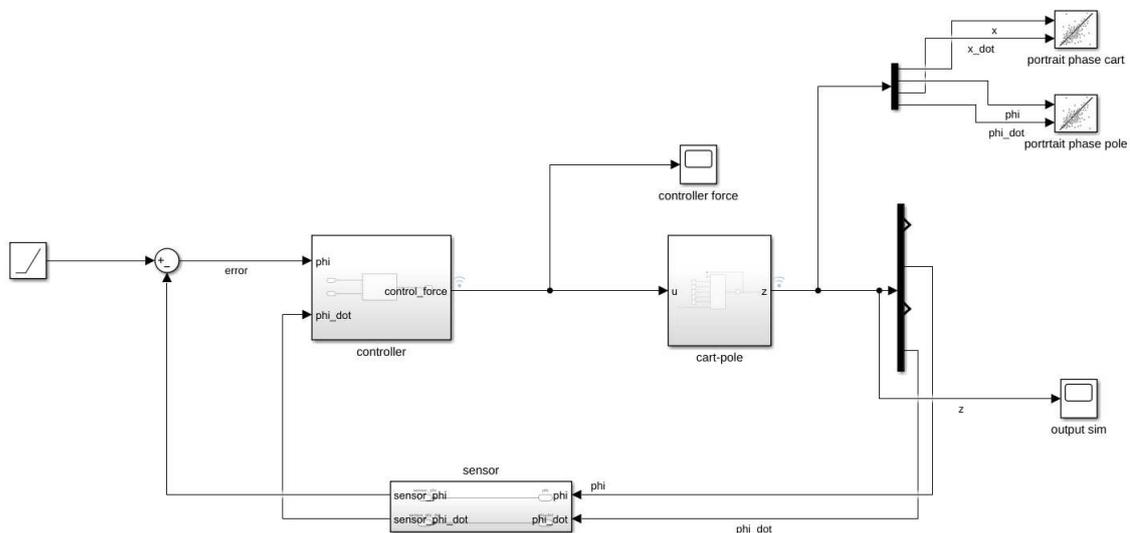
$$w = -\frac{L(m_c + m_p \sin^2(\phi))}{\cos(\phi)} \left[\frac{(m_c + m_p)g \sin(\phi) - m_p l \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\phi}^2}{l(m_c + m_p \sin^2(\phi))} + K_1 e_\phi + K_2 \dot{e}_\phi + \ddot{\phi}_d \right]. \quad (3.4)$$

onde K_1 e K_2 são ganhos; o erro de ângulo $e_\phi = \phi - \phi_d$, sendo ϕ_d a ângulo desejado; e o erro de velocidade angular $\dot{e}_\phi = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d$, sendo $\dot{\phi}_d$ a velocidade angular desejada. Esse

tipo de controlador somente proporciona o controle de uma das saídas do sistema, ou seja, é somente possível controlar o carro ou o pêndulo, pois este sistema é subatuado. O controlador torna possível realizar tanto a estabilização como o rastreamento de trajetória.

Com as equações diferenciais não-lineares definidas nas equações 2.14, 2.15 e 2.16 e o controlador definido na equação 3.4, foi feita a simulação do sistema em malha aberta com os parâmetros e condições iniciais definidos anteriormente. O diagrama do sistema em fechada com o controlador é mostrado na figura 8. A resposta obtida é ilustrada nas Figuras 3 e 4, bem como discussões sobre os resultados são feitos.

Figura 8 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com o controlador por *Feedback Linearization*. O Controlador representado pelo bloco *controller* realiza o papel de cancelar as não linearidades intrínsecas do sistema. É possível perceber a realimentação dos estados ϕ e $\dot{\phi}$ para o cálculo do erro.



Fonte: [Autoria própria](#).

3.3.5 Resultados de simulação

A seguir são apresentados os indicadores de desempenho em malha fechada do sistema cart-pole com *feedback linearization*. Esses indicadores fornecem uma visão detalhada das respostas dinâmicas das variáveis do sistema.

3.3.6 Discussão

Segundo as figuras 9 e 10 e as tabelas 5 e 6, os resultados indicam que o sistema em malha fechada do *cart-pole* com *feedback linearization* apresenta melhor desempenho em relação à estabilização do ângulo do pêndulo. O ângulo do pêndulo tem um tempo de subida de 0, tempo de transiente de 3.1799s, e tempo de acomodação de 79,8848s, o que demonstra uma resposta rápida e uma estabilização eficiente.

Tabela 5 – Indicadores de Desempenho do Carro

Indicador	Posição	Velocidade
RiseTime	63,5704 s	1,1645 s
TransientTime	78,4108 s	2,2723 s
SettlingTime	78,4107 s	2,4037 s
SettlingMin	$1,0630 \times 10^3$ m	13,4516 m/s
SettlingMax	1.1804×10^3 m	14,8544 m/s
Overshoot	0	$8,6798 \times 10^{-6}$ m/s
Undershoot	0	20,1960 m/s
Peak	$1,1804 \times 10^3$ m	14,8544 m/s
PeakTime	80 s	71,9 s

Fonte: [Autoria própria](#).

Tabela 6 – Indicadores de Desempenho do Pêndulo

Indicador	Ângulo	Velocidade Angular
RiseTime	0,0268 s	0,0279 s
TransientTime	3,1799 s	3,6116 s
SettlingTime	79,8848 s	79,9948 s
SettlingMin	$-2,8145 \times 10^{-7}$ rad	$-9,9863 \times 10^{-7}$ rad/s
SettlingMax	$2,7601 \times 10^{-7}$ rad	$1,0183 \times 10^{-6}$ rad/s
Overshoot	$3,0471 \times 10^3$ rad	$3,0471 \times 10^3$ rad/s
Undershoot	$1,3091 \times 10^{10}$ rad	$2,7519 \times 10^9$ rad/s
Peak	1,1708 rad	0,8904 rad/s
PeakTime	0 s	0,4000 s

Fonte: [Autoria própria](#).

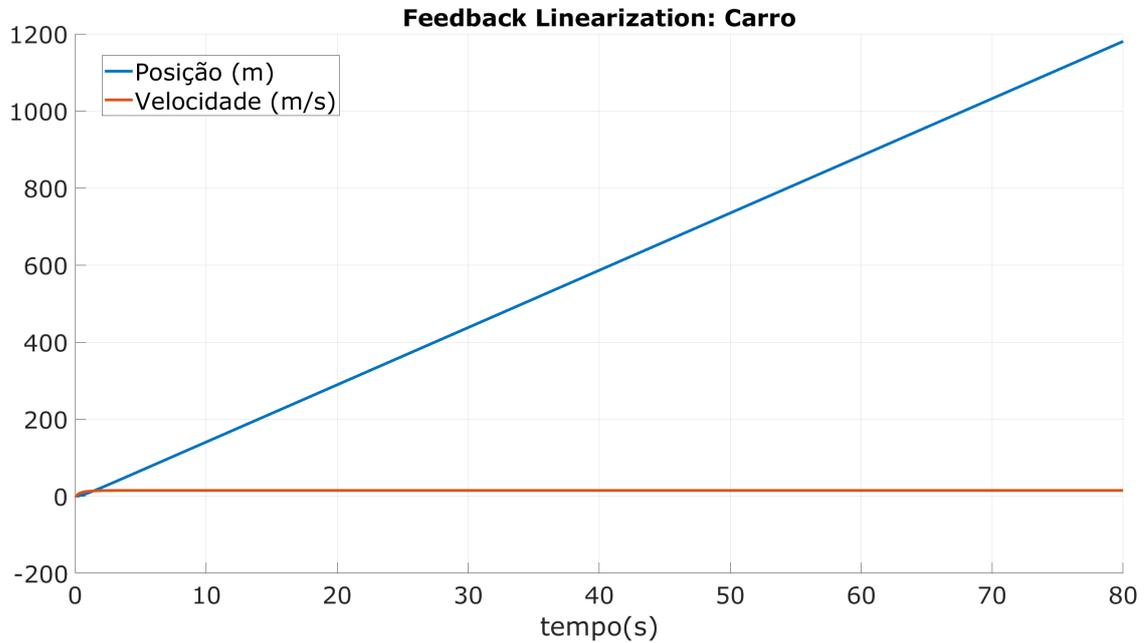
3.4 Aspectos práticos

Ao integrar sensores, atuadores e modelar fontes de ruído em um sistema de controle, como o sistema *cart-pole*, várias considerações devem ser abordadas para garantir um desempenho confiável e preciso.

Sensores são essenciais para monitorar as condições reais do sistema e fornecer dados cruciais para o controle de *feedback*. Eles devem ser precisamente modelados para considerar fatores como sensibilidade, faixa de operação, e respostas a condições ambientais variáveis. Além disso, é comum incorporar modelos de ruído, geralmente assumindo uma distribuição normal, para simular a incerteza e a variação nas leituras dos sensores. ([SILVA, 2007](#))

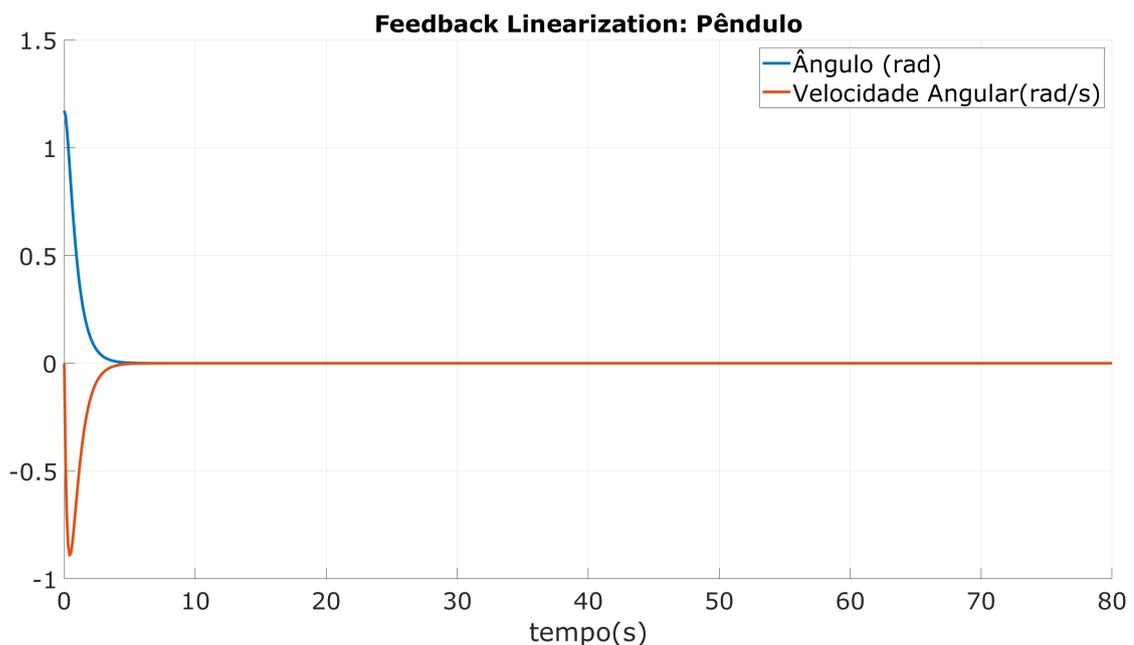
Atuadores são os componentes que efetivamente aplicam forças ou movimentos ao sistema, baseados nos sinais de controle gerados. A modelagem dos atuadores inclui a análise de sua dinâmica, como atrasos, limitações de força ou velocidade e eficiência. A

Figura 9 – Resultado de simulação do carro do controlador por feedback linearization. A posição do carro está na cor azul e a velocidade está na cor laranja. É fácil notar que o carro não é controlado, pois a variável de controle é o ângulo do pêndulo.



Fonte: [Autoria própria.](#)

Figura 10 – Resultado de simulação do pêndulo do controlador por feedback linearization. O ângulo do pêndulo está na cor azul e a velocidade angular está na cor laranja. É possível concluir que o objetivo de estabilização foi cumprido, devido a convergência da curva do ângulo em $\phi = 0$.



Fonte: [Autoria própria.](#)

interação entre os atuadores e o sistema controlado deve ser cuidadosamente simulada para prever com precisão o comportamento do sistema em diferentes condições de operação.

(SILVA, 2007)

Fontes de ruído no sistema são consideradas para avaliar a robustez do controle. O ruído pode vir de flutuações eletrônicas, vibrações mecânicas ou interferências externas, e é tipicamente modelado como ruído branco em simulações para avaliar o desempenho do sistema sob condições de operação menos ideais.

A modelagem adequada desses componentes é crucial para o desenvolvimento de um sistema de controle que não apenas atenda às especificações de desempenho, mas também seja capaz de operar de maneira eficaz e eficiente em ambientes realistas e, por vezes, desafiadores. A precisão na modelagem destes elementos influencia diretamente a eficácia do sistema de controle em aplicações práticas.

4 Conclusão

Neste trabalho, foi realizada uma análise detalhada de sistemas subatuados, destacando suas características, desafios e métodos de controle. Foram abordadas técnicas avançadas de controle como *Feedback Linearization* e controle baseado em energia com os Lagrangianos Controlados. Além disso, foi explorada a aplicação dessas técnicas no sistema subatuado do *cart-pole*.

O processo de determinação do controle foi descrito seguindo os passos de modificação do Lagrangiano original, derivação das equações de movimento modificadas, estabelecimento das condições de correspondência, determinação das forças de controle e verificação da estabilidade através de métodos de energia.

Simulações foram conduzidas para demonstrar a eficácia das técnicas de controle propostas. Estas simulações ilustraram a capacidade dos controladores desenvolvidos de estabilizar o sistema subatuado, confirmando a validade teórica das abordagens apresentadas.

Durante a realização deste trabalho, foram enfrentadas dificuldades significativas devido à complexidade matemática na definição dos controladores e aos desafios nas simulações. As técnicas matemáticas avançadas necessárias para os controladores exigiram um aprofundamento substancial, enquanto as limitações dos resolvedores de equações diferenciais afetaram as simulações, especialmente em condições dinâmicas complexas, comprometendo a estabilidade e precisão dos resultados.

A pesquisa e os resultados aqui apresentados contribuem para o avanço do entendimento e controle de sistemas subatuados, oferecendo uma base sólida para futuras investigações e aplicações práticas na área de robótica e sistemas autônomos.

Referências

- BLOCH, A. M.; LEONARD, N. E.; MARSDEN, J. E. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. i. the first matching theorem. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 45, n. 12, p. 2253–2270, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 31.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. Disponível em: <<https://www.amazon.com.br/Equa%C3%A7%C3%B5es-Diferenciais-Elementares-Problemas-Contorno/dp/8521636946>>. Citado na página 22.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002. Citado na página 16.
- ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. 3. ed. London: Springer-Verlag London, 1995. XV, 549 p. (Communications and Control Engineering). ISBN 978-3-540-19916-8. Citado na página 24.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Control*. [S.l.]: Pearson, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 24, 34 e 36.
- KRENER, A. Feedback linearization. *Mathematical control theory*, Springer, p. 66–98, 1999. Citado na página 35.
- MORENO-VALENZUELA, J.; AGUILAR-AVELAR, C. *Motion control of underactuated mechanical systems*. [S.l.]: Springer, 2018. v. 1. Citado na página 35.
- PATENAUDE, J. *A direct Lyapunov approach to stabilization and tracking of underactuated mechanical systems*. Tese (Doutorado) — Kansas State University, 2008. Citado na página 16.
- REYHANOGLU, M. et al. Nonlinear control of a class of underactuated systems. In: IEEE. *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1996. v. 2, p. 1682–1687. Citado na página 15.
- SILVA, C. W. D. *Sensors and actuators: control system instrumentation*. [S.l.]: CRC Press, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 40.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- SPONG, M. W. Underactuated mechanical systems. In: *Control problems in robotics and automation*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 135–150. Citado na página 15.
- TAYLOR, J. R. *Classical mechanics*. [S.l.]: University Science Books, 2005. 237-291 p. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- TEDRAKE, R. *Underactuated Robotics: Learning, Planning, and Control for Efficient and Agile Machines*. 2024. Acessado em: 27-05-2024. Disponível em: <<https://underactuated.csail.mit.edu/index.html>>. Citado na página 14.

Apêndices

APÊNDICE A – Script MATLAB do modelo Cart-Pole

```

1 function dz = cartpole_model(z, M, m, L, g, b, u)
2     % z(1) = x
3     % z(2) = phi
4     % z(3) = x_dot
5     % z(4) = phi_dot
6
7     % dz(1) = x_dot = z(3)
8     % dz(2) = phi_dot = z(4)
9     % dz(3) = x_dot_dot
10    % dz(4) = phi_dot_dot
11    sin_z = sin(z(2));
12    cos_z = cos(z(2));
13
14    den_phi = L * (m * sin_z^2 + M);
15    den_x = m * sin_z^2 + M;
16
17    dz(1, 1) = z(3);
18    dz(2, 1) = z(4);
19    dz(3, 1) = (m * L * sin_z * z(4)^2 - m * g * sin_z * cos_z -
20              b * z(3) + u) / den_x;
21    dz(4, 1) = (- m * L * sin_z * cos_z * z(4)^2 + (M + m) * g *
22              sin_z + b * cos_z * z(3) - cos_z * u) / den_phi;
23 end

```

APÊNDICE B – Script MATLAB da simulação do modelo Cart-Pole

```

1 clear all, close all, clc;
2
3 %% Parametros do sistema
4 m_p = 1;
5 m_c = 5;
6 L = 2;
7 g = 9.81;
8 b = 0;
9 u = 0;
10
11 options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);
12 time_vec = 0: 0.01: 20;
13 z0 = [
14     [0.1]
15     [(pi/2) - 0.4]
16     [-3]
17     [0]
18 ];
19 %% Sistema em Malha aberta
20 [t, z] = ode45(@(t, z)cartpole_model(z, m_c, m_p, L, g, b, u),
21     time_vec, z0, options);
22
23 figure;
24 hold on;
25 plot(t, z(:, 1), t, z(:, 3), 'LineWidth', 2);
26 title('Modelo: Carro');
27 legend('Posição (m)', 'Velocidade (m/s)');
28 grid on;
29 hold off;
30
31 figure;
32 hold on;
33 plot(t, z(:, 2), t, z(:, 4), 'LineWidth', 2);
34 title('Modelo: Pendulo');
35 legend('Ângulo (rad)', 'Velocidade Angular(rad/s)');
36 grid on;
37 hold off;
38 %% Analise de desempenho em malha aberta
39
40 % Posicao do carro
41 fprintf("Posicao do Carro");
42 stepinfo(z(:, 1), t)
43
44 % Velocidade do carro
45 fprintf("Velocidade do Carro");
46 stepinfo(z(:, 3), t)
47
48 % Angulo do Pendulo
49 fprintf("Angulo do Pendulo");

```

```
49 stepinfo(z(:, 2), t)
50
51 % Velocidade angular do pendulo
52 fprintf("Velocidade Angular do Pendulo");
53 stepinfo(z(:, 4), t)
```

APÊNDICE C – Script MATLAB do Controlador por Lagrangianos Controlados

```
1 function lag_con = lagrangian_control(state, state_ref, M, m, L,
2   g)
3   Alpha = m * L^2;
4   Beta = m * L;
5   Gamma = M + m;
6   Eta = -m * g * L;
7   c = 50;
8   Kappa = 50;
9   Lambda = 0.001;
10  Zeta = state_ref(3);
11
12  sin_z = sin(state(2));
13  cos_z = cos(state(2));
14
15  lag_con_den = (Alpha - (Beta^2 / Gamma)*(1 + Kappa) *cos_z^2)
16  ;
17
18  lag_con_A = (Kappa * Beta * sin_z * (Alpha * state(4)^2 +
19  cos_z * Eta));
20
21  lag_con_B = c * (Alpha - (Beta^2 / Gamma) * cos_z^2) * (
22  Lambda * (Gamma * (Kappa + 1) + 1) * Beta * cos_z * state(
23  4) + Lambda * Gamma * (state(3) - Zeta));
24
25  lag_con = (lag_con_A - lag_con_B) / lag_con_den;
26 end
```

APÊNDICE D – Script MATLAB da simulação do Controlador por Lagrangianos Controlados

```

1 clear all, close all, clc;
2
3 %% Parametros do sistema
4 m_p = 1;
5 m_c = 5;
6 L = 2;
7 g = 9.81;
8 b = 0;
9 u = 0;
10
11 options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);
12 time_vec = 0: 0.1: 80;
13 z0 = [
14     [0.1]
15     [(pi/2) - 0.4]
16     [-3]
17     [0]
18 ];
19 zref = [
20     [0]
21     [0]
22     [0]
23     [0]
24 ];
25
26 %% Controle pelo "Controlled Lagrangian"
27 lag_con = @lagrangian_control;
28 [t_lag, z_lag] = ode45(@(t_lag, z_lag)cartpole_model(z_lag, m_c,
29     m_p, L, g, b, lag_con(z_lag, zref, m_c, m_p, L, g)), time_vec,
30     z0, options);
31
32 figure;
33 hold on;
34 plot(t_lag, z_lag(:, 1), t_lag, z_lag(:, 3), 'LineWidth', 2);
35 title('Lagrangian Control: Carro');
36 legend('Posicao (m)', 'Velocidade (m/s)');
37 grid on;
38 hold off;
39
40 figure;
41 hold on;
42 plot(t_lag, z_lag(:, 2), t_lag, z_lag(:, 4), 'LineWidth', 2);
43 title('Lagrangian Control: Pendulo');
44 legend('Ângulo (rad)', 'Velocidade Angular(rad/s)');
45 grid on;
46 hold off;

```

```
45
46 %% Analise de desempenho em malha fechada
47
48 % Posicao do carro
49 fprintf("Posicao do Carro");
50 stepinfo(z_lag(:, 1), t_lag)
51
52 % Velocidade do carro
53 fprintf("Velocidade do Carro");
54 stepinfo(z_lag(:, 3), t_lag)
55
56 % Angulo do Pendulo
57 fprintf("Angulo do Pendulo");
58 stepinfo(z_lag(:, 2), t_lag)
59
60 % Velocidade angular do pendulo
61 fprintf("Velocidade Angular do Pendulo");
62 stepinfo(z_lag(:, 4), t_lag)
```

APÊNDICE E – Script MATLAB da Controlador por *Feedback Linearization*

```
1 function feedlin = feedback_linearization(state)
2
3 phi = state(2);
4 phi_dot = state(4);
5
6 m_p=1;
7 m_c=5;
8 L=2;
9 g=9.81;
10
11 K1=-5;
12 K2=-5;
13
14 feedlin=-((m_c*L+m_p*L*sin(phi)^2)/cos(phi))*...
15     (-((m_c+m_p)*g*sin(phi)-m_p*L*sin(phi)*cos(phi)*(phi_dot^2))
16     /...
17     (m_c*L+m_p*L*sin(phi)^2)+K1*(phi - 0)+K2*(phi_dot - 0));
```

APÊNDICE F – Script MATLAB da simulação do Controlador por *Feedback* *Linearization*

```

1 clear all, close all, clc;
2
3 %% Parametros do sistema
4 m_p = 1;
5 m_c = 5;
6 L = 2;
7 g = 9.81;
8 b = 0;
9 u = 0;
10
11 options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);
12 time_vec = 0: 0.1: 80;
13 z0 = [
14     [0.1]
15     [(pi/2) - 0.4]
16     [-3]
17     [0]
18 ];
19
20 %% Controle pelo "Feedback Linearization"
21 feed_lin = @feedback_linearization;
22 [t_feedlin, z_feedlin] = ode45(@(t_feedlin, z_feedlin)
23     cartpole_model(z_feedlin, m_c, m_p, L, g, b, ...
24     feed_lin(z_feedlin)), time_vec, z0, options);
25
26 figure;
27 hold on;
28 plot(t_feedlin, z_feedlin(:, 1), t_feedlin, z_feedlin(:, 3), ...
29     'LineWidth', 2);
30 title('Lagrangian Control: Carro');
31 legend('Posicao (m)', 'Velocidade (m/s)');
32 grid on;
33 hold off;
34
35 figure;
36 hold on;
37 plot(t_feedlin, z_feedlin(:, 2), t_feedlin, z_feedlin(:, 4), ...
38     'LineWidth', 2);
39 title('Lagrangian Control: Pendulo');
40 legend('Angulo (rad)', 'Velocidade Angular(rad/s)');
41 grid on;
42 hold off;
43
44 %% Analise de desempenho em malha fechada
45 % Posicao do carro

```

```
46 fprintf("Posicao do Carro");
47 stepinfo(z_feedlin(:, 1), t_feedlin)
48
49 % Velocidade do carro
50 fprintf("Velocidade do Carro");
51 stepinfo(z_feedlin(:, 3), t_feedlin)
52
53 % Angulo do Pendulo
54 fprintf("Angulo do Pendulo");
55 stepinfo(z_feedlin(:, 2), t_feedlin)
56
57 % Velocidade angular do pendulo
58 fprintf("Velocidade Angular do Pendulo");
59 stepinfo(z_feedlin(:, 4), t_feedlin)
```