

**ESTUDO SOBRE A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO
DE UM SÓLIDO ESFÉRICO**

Ma Ming Tsong
Luiz Carlos Alvarenga
Jadir Nogueira da Silva
José Ricardo C. Saglietti

RESUMO

A concentração em um sólido esférico, em diferentes pontos do seu interior, é calculada através da expressão:

$$U = - \frac{2a}{\pi r} (U_o - U_e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{a} \exp (-Dn^2\pi^2/a^2) + U_e$$

deduzida a equação da difusão em coordenadas esféricas com coeficiente de difusão constante e com as seguintes condições de contorno e iniciais.

$$U(a, t) = U_e$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{0, t} = 0$$

$$U(r, 0) = U_o$$

A precisão de U depende do número de termos da série:

$$n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{a} \exp (-Dn^2\pi^2 t/a^2)$$

Este trabalho visou determinar o número de termos da série acima, para que não haja variação no valor da concentração com precisões 4, 6 e 9 casas decimais.

Para isto, seguiu-se os seguintes passos:

1. Calculou-se U para n variando de 1 até um valor no qual não houvesse variação em 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente. Os valores de n foram obtidos para diferentes valores Dt/a^2 conhecidos.

2. Foram ajustadas curvas, por regressão, aos pontos obtidos.

Curvas potenciais foram ajustadas aos pontos obtidos experimentalmente com coeficientes de determinação 0,989, de 0,995 e 0,997 para 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente.

SUMMARY

Liquid distribution at different points within a spherical solid is calculated as follows (CRANK)

$$U = - \frac{2a}{\pi r} (U_o - U_e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi r}{a} \exp (-Dn^2\pi^2 t/a^2) + U_e$$

The above expression was derived from the diffusion equation, in spherical coordinate system, together with the following boundary and initial conditions:

$$U(a, t) = U_e$$

$$U(r, 0) = U_o$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{0, t} = 0$$

The accuracy of calculated U values depends on the number of terms in the series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi r}{a} \exp(-Dn^2\pi^2 t/a^2)$$

This work determines the required number of terms in the above series such that the computed values of U will be within $\pm 10^{-4}$, $\pm 10^{-6}$ or $\pm 10^{-9}$ of the exact values.

INTRODUÇÃO

No processo de secagem ocorrem mecanismos diversos de transporte de água no interior do sólido que está secando. Dentre elas, a difusão líquida tem tido preferência, por pesquisadores, por ser um mecanismo que explica muito bem a secagem de um produto numa determinada fase de secagem; FORTES e OKOS (1978).

A segunda lei de Fick, para um corpo considerado esférico,

$$\frac{U}{t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (1)$$

Para as condições iniciais e de contorno:

$$U(a, t) = U_e \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{0, t} = 0 \quad (3)$$

$$U(r, 0) = U_0 \quad (4)$$

tem, por solução, a seguinte equação, CRANK (1957):

$$U = -\frac{2a}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi r}{a} \exp - \frac{D\pi^2 n^2 t}{a^2} (U_0 - U_e) + U_e \quad (5)$$

onde:

- U = Teor de umidade, base seca, decimal
- a = Raio do material, cm
- r = Posição no interior do material, cm
- D = Coeficiente de difusão, cm^2/min
- t = tempo, minuto
- U_0 = Umidade inicial, base seca, decimal
- U_e = Umidade de equilíbrio, base seca, decimal

Um dos problemas para o cálculo do teor de umidade em diferentes pontos

no interior de um produto considerado esférico, durante a secagem, é a escolha da variação de n no somatório da equação (5).

Este trabalho tem, por finalidade, determinar o limite superior de n para que ocorra convergência razoável da equação (5).

MÉTODO

1. Foi feito um programa para a calculadora HP 97/67, para a equação (5) com os seguintes valores obtidos de dados experimentais, referentes ao feijão, ALVARENGA (1979)

$$a = 0,7886 \text{ cm}$$

$$U_o = 0,4146 \text{ b.s.}$$

$$U_e = 0,0908 \text{ b.s.}$$

$$D = 0,0004083 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$r = 0,1a; 0,2a; 0,3a; 0,4a; 0,5a; 0,6a; 0,7a; 0,8a; 0,9a; \text{ a } t \text{ varia de 1 a 5000 minutos, em intervalos variáveis.}$$

2. Fixando t e r , foram obtidos valores de U para n variando de 1 até um valor onde U não apresentou diferença em 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente.

3. O procedimento anterior foi repetido para cada par (t, r) e foram obtidos valores de n para cada par (t, r) que não apresentasse diferenças de unidade com 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente.

4. Foram ajustadas curvas de $n = f\left(\frac{Dt}{a^2}\right)$, por regressão, para 4, 6 e 9 casas decimais.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O gráfico da Figura 1 ilustra a variação do teor de umidade, em $r = 0,1a$ com o tempo para diferentes valores de n . No gráfico, o índice de U representa o valor máximo de n para o somatório da equação (5).

Para valores de $t \geq 1000$, o valor de n não afeta o valor da umidade.

Para um dado t , à medida que n cresce, o valor da umidade converge para um valor fixo.

Os Quadros 1, 2 e 3 nos mostram valores de n para cada par (t, r) para 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente.

Para o ajuste das curvas, os valores de n foram escolhidos em $r = (0,1)a$ devido ao fato de que n , para um dado t , ter apresentado um maior valor em $r = (0,1)a$. Nota-se, entretanto, que não houve grandes variações de n ao longo de r exceto para $n = a$, onde $n = 1$.

As equações ajustadas, por regressão, foram as seguintes, Figura 2:

a) Para 4 casas decimais

$$n = 0,6807 \left(\frac{Dt}{a^2}\right) - 0,5535$$

$$R^2 = 98,9\%$$

b) Para 6 casas decimais

$$n = 0,9817 \left(\frac{Dt}{a^2}\right) - 0,5220$$

$$R^2 = 99,5\%$$

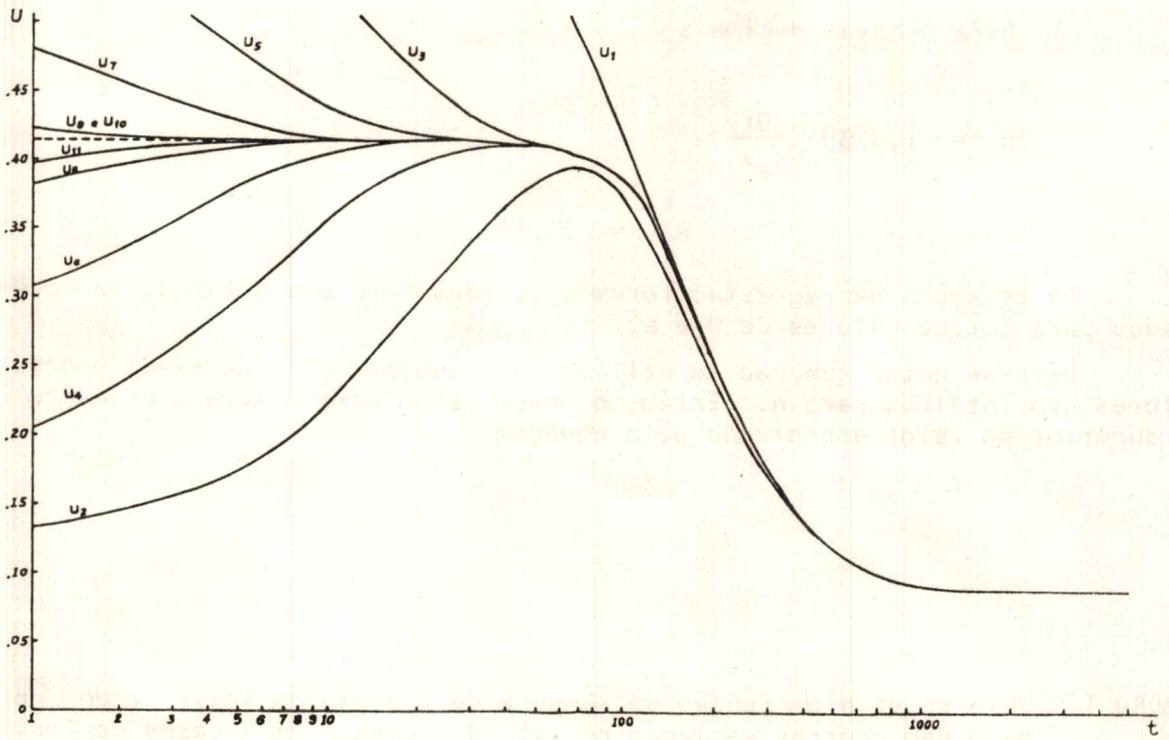


FIGURA 1 - Variação do teor de umidade, em $r = 0,1a$, com o tempo para diferentes valores de n .

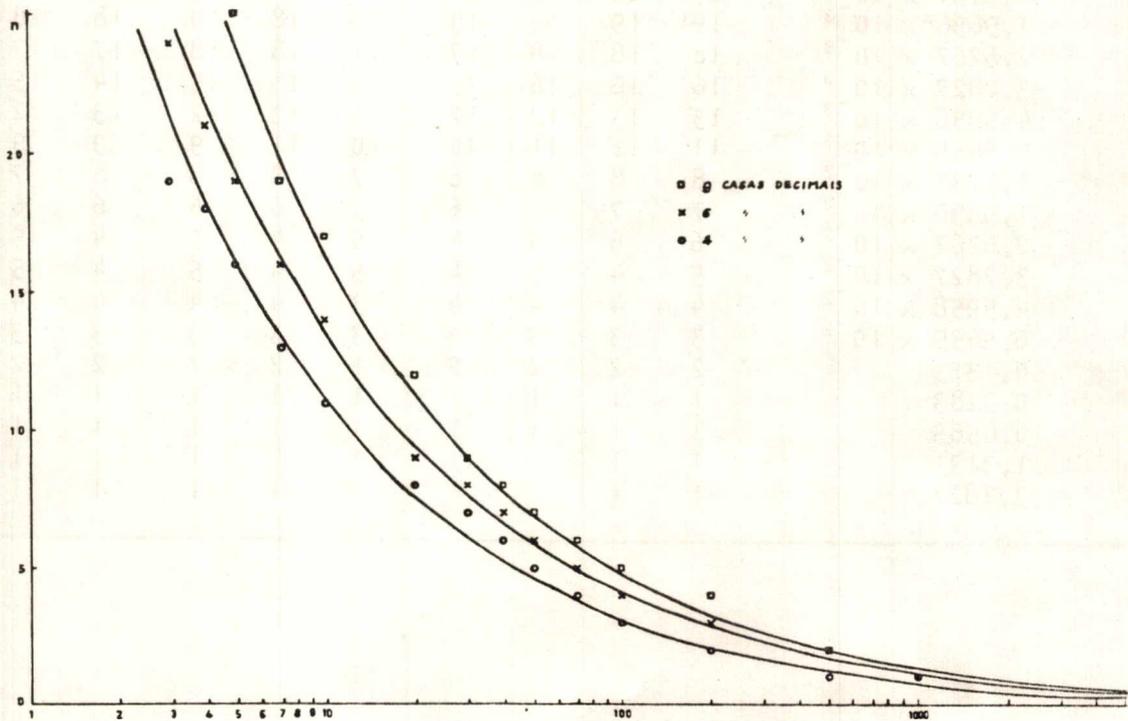


FIGURA 2 - Curvas de variação de n com o tempo.

c) Para 9 casas decimais

$$n = 1,0739 \left(\frac{Dt}{a^2} \right)^{-0,5423}$$

$$R^2 = 99,1\%$$

As equações de regressão foram ajustadas para D e a fixos, mas podem ser usadas para outros valores de D e a .

Deve-se notar que, ao se utilizar as equações de regressão, podemos ter valores não inteiros para n . Então, o menor valor para n será o primeiro inteiro superior ao valor encontrado pela equação.

QUADRO 1 - Valores de n em função do tempo e da posição no interior do produto para não ocorrer variação no teor de umidade em 4 casas decimais.

Tempo (minuto)	Dt/a^2	r/a									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	$6,5655 \times 10^{-4}$	36	34	33	33	25	33	32	31	31	1
2	$1,3131 \times 10^{-3}$	27	26	26	26	25	26	25	25	25	1
3	$1,9696 \times 10^{-3}$	19	19	19	19	19	18	18	18	18	1
4	$2,6262 \times 10^{-3}$	18	18	18	17	17	18	18	17	17	1
5	$3,2827 \times 10^{-3}$	16	16	16	15	15	16	15	14	15	1
7	$4,5958 \times 10^{-3}$	13	13	12	12	11	13	12	13	12	1
10	$6,5655 \times 10^{-3}$	11	11	11	10	10	11	9	9	9	1
20	$1,3131 \times 10^{-2}$	8	8	8	8	7	8	8	8	7	1
30	$1,9696 \times 10^{-2}$	7	7	6	6	5	6	6	6	6	1
40	$2,6262 \times 10^{-2}$	6	6	5	4	5	4	5	4	5	1
50	$3,2827 \times 10^{-2}$	5	4	5	4	5	4	5	4	5	1
70	$4,5958 \times 10^{-2}$	4	4	4	4	3	4	4	4	4	1
100	$6,5655 \times 10^{-2}$	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1
200	0,1313	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1
500	0,3283	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1000	0,6565	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2000	1,3131	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5000	3,2827	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

QUADRO 2 - Valores de n em função do tempo e da posição no interior do produto para não ocorrer variação no teor de umidade em 6 casas decimais.

Tempo (minuto)	Dt/a^2	r/a									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	$6,5655 \times 10^{-4}$	45	43	43	43	41	43	43	41	41	1
2	$1,3131 \times 10^{-3}$	32	31	31	30	29	31	30	30	28	1
3	$1,9696 \times 10^{-3}$	24	24	24	24	23	24	24	23	24	1
4	$2,6262 \times 10^{-3}$	21	21	21	21	21	21	21	19	19	1
5	$3,2827 \times 10^{-3}$	19	19	19	19	19	19	19	18	18	1
7	$4,5958 \times 10^{-3}$	16	16	16	16	15	16	15	16	15	1
10	$6,5655 \times 10^{-3}$	14	14	14	14	13	13	13	13	14	1
20	$1,3131 \times 10^{-2}$	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1
30	$1,9696 \times 10^{-2}$	8	8	8	8	7	8	8	7	7	1
40	$2,6262 \times 10^{-2}$	7	7	7	7	7	6	6	6	6	1
50	$3,2827 \times 10^{-2}$	6	6	6	6	5	6	6	6	6	1
70	$4,5858 \times 10^{-2}$	5	4	5	4	3	4	5	4	5	1
100	$6,5655 \times 10^{-2}$	4	4	4	4	3	4	4	4	4	1
200	0,1313	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1
500	0,3283	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1
1000	0,6565	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2000	1,3131	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5000	3,2827	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

QUADRO 3 - Valores de n em função do tempo e da posição no interior do produto para não ocorrer variação no teor de umidade em 9 casas decimais

Tempo (minuto)	Dt/a^2	r/a									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	$6,5655 \times 10^{-4}$	54	54	53	51	51	53	53	50	50	1
2	$1,3131 \times 10^{-3}$	37	37	37	26	37	36	36	36	36	1
3	$1,9696 \times 10^{-3}$	29	29	29	29	29	29	29	29	29	1
4	$2,6262 \times 10^{-3}$	27	27	26	26	26	26	26	24	26	1
5	$3,2827 \times 10^{-3}$	25	24	24	24	23	23	22	22	21	1
7	$4,5958 \times 10^{-3}$	19	19	19	19	19	19	19	19	19	1
10	$6,5655 \times 10^{-3}$	17	17	16	16	15	16	16	16	16	1
20	$1,3131 \times 10^{-2}$	12	11	11	11	11	11	11	11	11	1
30	$1,9696 \times 10^{-2}$	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1
40	$2,6262 \times 10^{-2}$	8	8	8	8	7	8	8	8	8	1
50	$3,2827 \times 10^{-2}$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	1
70	$4,5958 \times 10^{-2}$	6	6	6	6	5	6	6	6	6	1
100	$6,5655 \times 10^{-2}$	5	4	5	4	5	4	5	4	5	1
200	0,1313	4	4	4	4	3	3	3	3	4	1
500	0,3283	2	2	2	2	1	2	2	2	1	1
1000	0,6565	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2000	1,3131	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5000	3,2827	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

LITERATURA CITADA

- ALVARENGA, L.C.; *Transporte de água em grãos de feijão-preto sob condições de secagem e repouso*, Imprensa Universitária, Tese M.S., 1979. 72 p.
- CRANK, K.J.; *The Mathematics of diffusion*, Clarendon Press, Oxford, U.S.A., 1957, 414 p.
- FORTES, M. & OKOS.; A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary media. In: MUJUNDAR, A.S. ed., *Proceeding of the First International Symposium on Drying Sciences Press, Princeton, U.S.A. 1978.*

QUADRO 2 - Valores de n em função do tempo e da distância no feijão-preto. Para cada ponto, verificou-se teor de umidade em % com precisão de 0,1.

Tempo (min)	Distância (cm)									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
200	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
300	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
400	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
500	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1000	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2000	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3000	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4000	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5000	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1